



**HAL**  
open science

# Une approche syntaxique pour le problème de la fusion de réseaux de contraintes qualitatives

Jean-François Condotta, Souhila Kaci, Pierre Marquis, Nicolas Schwind

► **To cite this version:**

Jean-François Condotta, Souhila Kaci, Pierre Marquis, Nicolas Schwind. Une approche syntaxique pour le problème de la fusion de réseaux de contraintes qualitatives. JFPC 2010 - Sixièmes Journées Francophones de Programmation par Contraintes, Jun 2010, Caen, France. pp.103-112. inria-00520375

**HAL Id: inria-00520375**

**<https://inria.hal.science/inria-00520375>**

Submitted on 23 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une approche syntaxique pour le problème de la fusion de réseaux de contraintes qualitatives

Jean-François Condotta, Souhila Kaci, Pierre Marquis et Nicolas Schwind

Université Lille-Nord de France, Artois, F-62307 Lens

CRIL, F-62307 Lens

CNRS UMR 8188, F-62307 Lens

{condotta,kaci,marquis,schwind}@cril.univ-artois.fr

## Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons au problème de la fusion de réseaux de contraintes qualitatives (RCQ) représentant des croyances ou des préférences locales sur les positions relatives d'entités spatiales ou temporelles. Nous définissons deux classes d'opérateurs de fusion  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  qui, à un ensemble de RCQ définis sur le même formalisme qualitatif et le même ensemble d'entités, associent un ensemble cohérent de configurations qualitatives représentant une vision globale de ces RCQ. Ces opérateurs sont paramétrés par une distance entre relations du formalisme qualitatif considéré et par des fonctions d'agrégation. Contrairement aux précédents opérateurs proposées pour la fusion de RCQ, nous optons pour une approche syntaxique, où chacune des contraintes des RCQ fournis a une influence sur le résultat de la fusion. Nous étudions les propriétés logiques des opérateurs de fusion définis et montrons leur équivalence sous certaines restrictions. Nous montrons que le résultat fourni par l'opérateur  $\Delta_2$  correspond à l'ensemble des solutions optimales d'un RCQ pondéré particulier. Afin de calculer ces solutions, un algorithme basé sur la méthode de fermeture par faible composition étendu au cas des RCQ pondérés est proposé.

## 1 Introduction

La représentation qualitative du temps et de l'espace intervient dans de nombreux domaines de l'Intelligence Artificielle comme le traitement du langage naturel, la conception assistée par ordinateur (CAO) ou l'ordonnancement d'activités. Etant donné un ensemble d'entités spatiales ou temporelles, exprimer de manière explicite l'ensemble des configurations globales plausibles ou préférées sur ces entités est une tâche ardue pour des raisons liées à son élicitation. En effet, on est généralement plus disposé à exprimer des relations locales sur ces entités à partir desquelles

les configurations globales sous-jacentes peuvent être déduites. Considérons par exemple un étudiant, Jérôme, qui exprime ses préférences sur l'emploi du temps de quatre matières (algèbre, analyse, algorithmique et anglais) se déroulant sur un intervalle de temps. Jérôme préfère apprendre l'algorithmique après l'analyse. Une difficulté est que l'expression des préférences locales entre les choix est susceptible de provoquer une incohérence (ou conflit). Ainsi, si Jérôme souhaite aussi que le cours d'anglais se déroule après celui d'algorithmique, et voudrait commencer à suivre le cours d'anglais avant la fin du cours d'analyse, alors aucune programmation possible de ces cours ne peut satisfaire toutes ses préférences. L'incohérence peut aussi être due à la présence de plusieurs agents. Dans notre exemple, il s'agit d'agréger les préférences de plusieurs étudiants sur la programmation des cours.

Dans cet article, les croyances ou les préférences de chaque agent sur les positions relatives d'entités spatiales ou temporelles sont représentées par un réseau de contraintes qualitatives (RCQ). Une méthode de fusion de RCQ a été proposée dans [5] qui est directement adaptée d'une méthode de fusion en logique propositionnelle. Elle consiste à définir un opérateur de fusion qui prend en entrée un ensemble fini de RCQ et retourne comme résultat un ensemble cohérent d'informations spatiales ou temporelles représentant une vision globale de ces RCQ. Néanmoins cette méthode présente deux inconvénients : le premier est qu'elle ne considère pas les croyances ou les préférences locales explicitement fournies par les RCQ, car chacun d'entre eux est interprété comme l'ensemble des configurations qualitatives cohérentes qu'il représente ; le second est sa complexité calculatoire élevée. Nous proposons dans cet article une approche syntaxique pour la fusion de RCQ. Dans cette approche, toutes les contraintes des RCQ fournis ont une influence sur le résultat de la fusion. Basées sur ce principe, nous définissons deux classes d'opérateurs de

fusion  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  qui, à un ensemble de RCQ définis sur le même formalisme qualitatif et le même ensemble d'entités, associent un ensemble de configurations qualitatives des entités représentant une vision globale de ces RCQ. Ces opérateurs sont paramétrés par une distance entre relations du formalisme qualitatif considéré et par deux fonctions d'agrégation de distances.

La suite de l'article est organisée de la manière suivante. La section suivante introduit des préliminaires sur les réseaux de contraintes qualitatives, les distances sur les relations d'un formalisme qualitatif et les fonctions d'agrégation. Dans la section 3, nous présentons le problème de la fusion de RCQ à travers un exemple, nous définissons les classes d'opérateurs de fusion de RCQ  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , nous étudions leurs propriétés logiques, les comparons avec les opérateurs de fusion proposés récemment dans la littérature et montrons l'équivalence entre  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sous certaines conditions. Dans la section 4, nous introduisons les RCQ pondérés, directement adaptés des problèmes de satisfaction de contraintes pondérés, nous montrons que le résultat renvoyé par l'opérateur  $\Delta_2$  correspond à l'ensemble des solutions optimales d'un RCQ pondéré particulier, et nous proposons un algorithme pour calculer ces solutions. Nous concluons dans la dernière section et présentons des perspectives pour un travail futur.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Formalismes qualitatifs et réseaux de contraintes qualitatives

Un formalisme qualitatif considère un ensemble fini  $B$  de relations de base binaires définies sur un domaine  $D$ . Les éléments de  $D$  représentent les entités temporelles ou spatiales considérées. Chaque relation de base  $b \in B$  représente une position relative particulière pouvant être satisfaite par deux éléments de  $D$ . L'ensemble  $B$  satisfait également les trois propriétés suivantes : (i)  $B$  forme une partition de  $D \times D$ , autrement dit tout couple de  $D \times D$  satisfait une et une seule relation de base de  $B$ ; (ii) la relation identité sur  $D$ , notée  $eq$  dans la suite, appartient à l'ensemble  $B$ ; (iii) pour toute relation de base  $b \in B$ , la relation inverse de  $b$ , notée  $b^{-1}$ , appartient également à l'ensemble  $B$ .

À titre d'illustration considérons le formalisme qualitatif appelé l'Algèbre des Intervalles. Ce formalisme, introduit par Allen [1], considère un ensemble  $B_{int}$  de treize relations de base défini sur le domaine des intervalles de la droite des nombres rationnels :  $D_{int} = \{(x^-, x^+) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^- < x^+\}$ . Ces intervalles représentent des entités temporelles non ponctuelles. Les relations de base de  $B_{int} = \{eq, p, pi, m, mi, o, oi, s, si, d, di, f, fi\}$  sont illustrées à la figure 1. Chacune d'entre elles représente une situation particulière entre deux intervalles. Par exemple, la relation  $m = \{((x^-, x^+), (y^-, y^+)) \in D_{int} \times D_{int} : x^+ = y^-\}$  représente le cas où la borne supérieure du premier intervalle et la borne inférieure du second coïncident.

À partir d'un ensemble  $B$  de relations de base sont dé-

Relation	Symbole	Inverse	Illustration
precedes	p	pi	
meets	m	mi	
overlaps	o	oi	
starts	s	si	
during	d	di	
finishes	f	fi	
equals	eq	eq	

FIGURE 1 – Les relations de base de l'Algèbre des Intervalles.

finies les relations « complexes ». Une relation complexe est l'union de relations de base, que l'on représente par l'ensemble des relations de base qu'elle contient. Dans la suite nous omettons le qualificatif « complexe ». En considérant l'Algèbre des Intervalles, l'ensemble  $\{m, d\}$  représente la relation issue de l'union des relations de base  $m$  et  $d$ . Ainsi  $2^B$ , l'ensemble des sous-ensembles de  $B$ , représente l'ensemble des relations.  $2^B$  est muni des opérations ensemblistes habituelles que sont l'union ( $\cup$ ) et l'intersection ( $\cap$ ), ainsi que de l'opération inverse ( $^{-1}$ ) définie par :  $\forall r \in 2^B, r^{-1} = \{b \in B \mid b^{-1} \in r\}$ , et de l'opération de faible composition ( $\diamond$ ) définie par :  $\forall a, b \in B, a \diamond b = \{c \in B : \exists x, y, z \in D \mid x a z \wedge z b y \wedge x c y\}$ ;  $\forall r, s \in 2^B, r \diamond s = \bigcup_{a \in r, b \in s} \{a \diamond b\}$ . Notons que  $r \diamond s$  est la plus petite relation de  $2^B$  (pour l'inclusion ensembliste) contenant la composition relationnelle  $r \circ s = \{(x, y) \in D \times D : \exists z \in D \mid x r z \wedge z s y\}$ . Pour certains formalismes qualitatifs, en particulier l'Algèbre des Intervalles,  $r \circ s$  et  $r \diamond s$  sont identiques.

Il est habituel de représenter un ensemble de configurations qualitatives préférées ou possibles d'un ensemble d'entités à l'aide de réseaux de contraintes qualitatives (RCQ en abrégé). Formellement, un RCQ (sur  $B$ ) est défini de la manière suivante :

**Définition 1 (Réseau de contraintes qualitatives).** Un RCQ  $N$  est un couple  $(V, C)$  où :

- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  est un ensemble fini de variables représentant les entités,
- $C$  est une application qui associe à tout couple de variables  $(v_i, v_j) \in V \times V$  une relation  $N[i, j]$  appartenant à  $2^B$ .  $C$  est telle que  $N[i, i] = \{eq\}$  et  $N[i, j] = N[j, i]^{-1}$ , pour toute paire  $(v_i, v_j) \in V$ .

Étant donné un RCQ  $N = (V, C)$ , une solution partielle de  $N$  sur  $V' \subseteq V$  est une application  $\alpha$  de  $V'$  sur  $D$  telle que pour chaque couple  $(v_i, v_j)$  de variables de  $V'$ ,  $(\alpha(v_i), \alpha(v_j))$  satisfait  $N[i, j]$ , i.e., il existe une relation de base  $b \in N[i, j]$  telle que  $(\alpha(v_i), \alpha(v_j)) \in b$  pour

tout  $v_i, v_j \in V$ . Une *solution* de  $N$  est une solution partielle de  $N$  sur  $V$ .  $N$  est *cohérent* ssi il admet une solution. Un *sous-RCQ*  $N'$  de  $N$  est un RCQ  $(V, C')$  tel que  $N'[i, j] \subseteq N[i, j]$ , pour chaque paire de variables  $(v_i, v_j)$ . Un *scénario*  $\sigma$  est un RCQ tel que chaque contrainte est définie par une relation singleton de  $2^B$ , *i.e.*, une relation ne contenant qu'une seule relation de base. Pour un scénario  $\sigma$  donné, la relation de base définissant la contrainte entre deux variables  $v_i$  et  $v_j$  est notée  $\sigma_{ij}$ . Un scénario  $\sigma$  de  $N$  est un sous-RCQ de  $N$ . Dans la suite de l'article,  $\langle N \rangle$  dénote l'ensemble des scénarios de  $N$  et  $[N]$  l'ensemble de ses scénarios cohérents. Deux RCQ  $N$  et  $N'$  sont dits *équivalents*, noté  $N \equiv N'$ , ssi  $[N] = [N']$ .  $N_{All}^V$  dénote le RCQ particulier sur  $V$  vérifiant pour tout couple de variables  $(v_i, v_j)$ ,  $N_{All}^V[i, j] = \{eq\}$  si  $v_i = v_j$ ,  $N_{All}^V[i, j] = B$  sinon.  $N_{All}^V$  représente l'absence totale d'information sur la configuration des variables de  $V$ .

Un RCQ  $N = (V, C)$  est dit *fermé par faible composition* ssi  $N[i, j] \subseteq N[i, k] \diamond N[k, j]$  pour tout  $v_i, v_j, v_k \in V$ . La méthode de la fermeture (notée dans la suite  $\diamond$ -fermeture) par faible composition est la méthode qui consiste à itérer l'opération de triangulation :  $N[i, j] \leftarrow N[i, j] \cap (N[i, k] \diamond N[k, j])$  jusqu'à ce qu'un point fixe soit obtenu. Le RCQ obtenu est un sous-RCQ équivalent au réseau initial. Cette méthode a une complexité polynomiale et est habituellement utilisée comme méthode de filtrage lors d'une recherche de scénarios cohérents d'un RCQ. Elle est complète pour le problème de déterminer si un RCQ est cohérent ou non lorsqu'on se restreint à des sous-ensembles particuliers de  $2^B$  appelés *classes traitables*, comme par exemple l'ensemble des relations singletons de l'Algèbre des Intervalles.

Les figures 2(a), 2(b) et 2(c) représentent respectivement un RCQ  $N$  de l'Algèbre des Intervalles défini sur l'ensemble des variables  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , un scénario non cohérent  $\sigma$  de  $N$  et un scénario cohérent  $\sigma'$  de  $N$ . Une solution  $\alpha$  de  $\sigma'$  est représentée à la figure 2(d). Pour tout couple  $(v_i, v_j)$  de variables, on ne représente pas graphiquement la relation  $N[i, j]$  lorsque  $N[i, j] = B$ , lorsque  $N[j, i]$  est présente, ou lorsque  $i = j$ .

## 2.2 Distances de base et fonctions d'agrégation

Dans la suite, nous considérons deux classes d'opérateurs de fusion de RCQ, toutes deux paramétrées par une distance entre relations de base de  $B$ , appelée distance de base, et par des fonctions d'agrégation. Nous définissons formellement la notion de distance de base, d'une part, de fonction d'agrégation d'autre part.

**Distances de base.** Une distance de base associée à un couple de relations de base de  $B$  a une valeur numérique représentant leur degré de proximité [5].

**Définition 2 (Distance de base).** Une distance de base  $d_B$  est une application de  $B \times B$  vers  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\forall b, b' \in B$  nous avons :

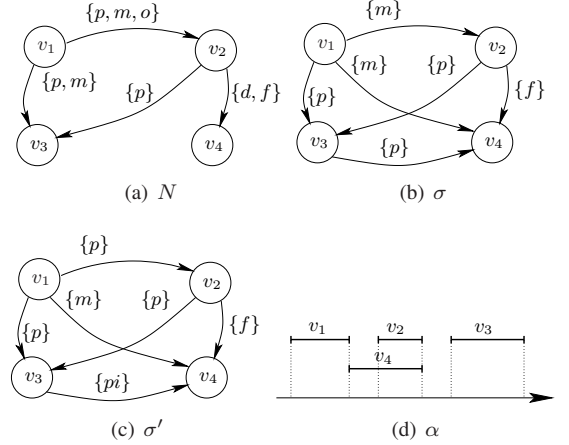


FIGURE 2 – Un RCQ  $N$ , un scénario non cohérent  $\sigma$  de  $N$ , un scénario cohérent  $\sigma'$  de  $N$  et une solution de  $\sigma'$ .

$$\begin{cases} d_B(b, b') = d_B(b', b) & (\text{symétrie}) \\ d_B(b, b') = 0 \text{ ssi } b = b' & (\text{séparation}) \\ d_B(b, b') = d_B(b^{-1}, (b')^{-1}). \end{cases}$$

Par exemple, une distance de base est la distance drastique  $d_D$ , égale à 1 pour tout couple de relations de base distinctes, 0 sinon. Cependant, dans le cadre des algèbres qualitatives, deux relations de base distinctes peuvent être considérées « plus ou moins » distantes. Cette intuition a donné lieu à des études dans le passé sur la notion de proximité entre relations de base. Nous pouvons par exemple citer les travaux de Freksa [6] qui définit une notion de voisinage conceptuel entre relations de base de l'algèbre des intervalles. En généralisant cette définition, deux relations de base  $b, b' \in B$  sont conceptuellement voisines si par transformation continue sur les éléments du domaine nous pouvons à partir d'une configuration entre deux entités satisfaisant la relation  $b$  obtenir une configuration satisfaisant  $b'$  sans qu'aucune autre relation n'ait été satisfaite au cours de la transformation. La transformation utilisée définit une relation de voisinage particulière sur  $B$ . Cette relation peut être représentée à l'aide d'un graphe de voisinage conceptuel, *i.e.*, un graphe connexe non orienté dont chaque noeud représente un élément de  $B$ . Dans un tel graphe, une arête relie deux noeuds correspondant à deux relations de base voisines. Prenons pour exemple les relations de base de l'algèbre des intervalles. Dans un contexte où une transformation continue entre deux intervalles correspond au déplacement d'une des quatre bornes considérées, nous obtenons le graphe de voisinage conceptuel  $GB_{int}$  représenté à la figure 3(a). Dans d'autres circonstances, une transformation peut correspondre au décalage des intervalles sans faire varier leur durée, et nous obtenons dans ce cas le graphe de voisinage conceptuel  $GB'_{int}$  illustré à la figure 3(b).

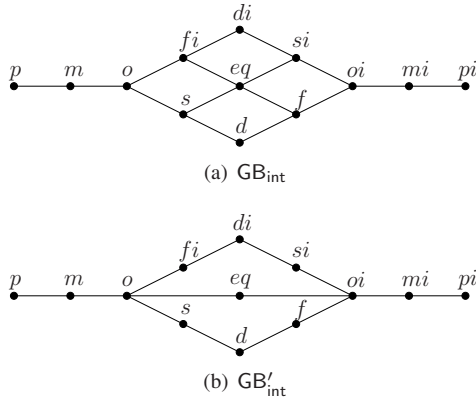


FIGURE 3 – Deux graphes de voisinage conceptuels  $GB_{\text{int}}$  (a) et  $GB'_{\text{int}}$  (b) de l'Algèbre des Intervalles.

Une distance entre relations de base spécifique au cadre des RCQ et utilisant les graphes de voisinage conceptuel a été proposée dans [5], appelée *distance de voisinage conceptuel*. Elle est définie formellement comme suit :

**Définition 3 (Distance de voisinage conceptuel).** Soit  $GB$  un graphe de voisinage conceptuel sur  $B$ . La distance de voisinage conceptuel  $d_{GB}(a, b)$  entre deux relations de base  $a, b$  de  $B$  est la longueur de la chaîne la plus courte entre les deux noeuds  $n_a$  et  $n_b$  représentant respectivement  $a$  et  $b$  dans  $GB$ .

Dans les exemples qui suivent, nous utilisons la distance de voisinage conceptuel  $d_{GB_{\text{int}}}$  définie à partir du graphe conceptuel de voisinage  $GB_{\text{int}}$ . Par exemple,  $d_{GB_{\text{int}}}(m, di) = 4$ . Clairement,  $d_{GB_{\text{int}}}$  est une distance de base (au sens de la définition 2) et peut donc être utilisée dans nos processus de fusion.

**Fonctions d'agrégation.** Typiquement, une fonction d'agrégation [10, 7] associe à un ensemble de valeurs numériques une valeur représentant cet ensemble dans sa globalité, selon certains critères.

**Définition 4 (Fonction d'agrégation).** Une fonction d'agrégation  $f$  associe à un ensemble de nombres réels positifs un nombre réel positif et satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } x_1 \leq x'_1, \dots, x_p \leq x'_p, \text{ alors} \\ \quad f(x_1, \dots, x_p) \leq f(x'_1, \dots, x'_p) & (\text{monotonie}) \\ x_1 = \dots = x_p = 0 \text{ si } f(x_1, \dots, x_p) = 0 & (\text{minimalité}) \end{cases}$$

Nous présentons quelques propriétés supplémentaires sur les fonctions d'agrégation.

**Définition 5 (Propriétés sur les fonctions d'agrégation).** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions d'agrégation.

- $f$  est associative ssi

$$\begin{aligned} f(f(x_1, \dots, x_p), f(y_1, \dots, y_{p'})) \\ = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{p'}). \end{aligned}$$

- $f$  est symétrique ssi pour toute permutation  $\tau$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $p$  étant un entier naturel strictement positif,

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(\tau(x_1), \dots, \tau(x_p)).$$

- $f$  est strictement monotone ssi

$$\begin{aligned} \text{si } x_1 \leq x'_1, \dots, x_p \leq x'_p \\ \text{et } \exists i \in \{1, \dots, p\}, x_i < x'_i, \\ \text{alors } f(x_1, \dots, x_p) < f(x'_1, \dots, x'_p). \end{aligned}$$

- $f$  commute sur  $g$  (ou  $f$  et  $g$  sont inter-commutatives) ssi

$$\begin{aligned} f(g(x_{1,1}, \dots, x_{1,q}), \dots, g(x_{p,1}, \dots, x_{p,q})) \\ = g(f(x_{1,1}, \dots, x_{p,1}), \dots, f(x_{1,q}, \dots, x_{p,q})). \end{aligned}$$

Dans le reste de l'article, toute fonction d'agrégation est supposée associative et symétrique. L'associativité impose que l'agrégation de valeurs peut être décomposée par des agrégations partielles, la symétrie signifie que l'ordre des arguments passés en paramètres de la fonction d'agrégation n'a pas d'importance. Dans [12], il est souligné que la propriété d'inter-commutativité entre des fonctions d'agrégation joue un rôle important dans un processus de fusion d'information en plusieurs étapes dans lequel le résultat ne doit pas dépendre de l'ordre dans lequel les étapes sont traitées. Cette assertion sera discutée dans notre cadre (cf. section 3.4). Par exemple la fonction d'agrégation  $MAX$  renvoyant le maximum de ses arguments est associative, symétrique, et commute sur elle-même. Il en est de même pour la fonction  $\sum$  qui effectue la somme de ses arguments, et qui de plus est strictement monotone.

## 3 Fusion de RCQ

### 3.1 Problème et exemple

Nous définissons dans cette section deux classes d'opérateurs de fusion de croyances ou de préférences émanant d'un ensemble d'agents  $\{Agent_1, \dots, Agent_m\}$  concernant la configuration d'un ensemble d'entités représentées par un ensemble de variables  $V$ . À chaque agent  $Agent_k$  exprimant ses croyances ou ses préférences locales sur les positions relatives de chaque couple d'entités est associé un RCQ  $N^k = (V, C^k)$ . Une contrainte  $N^k[i, j]$  correspond pour l'agent  $Agent_k$  à l'ensemble des relations de base représentant ses préférences ou ses croyances pour le couple  $(v_i, v_j)$ . Dans un tel cadre, deux types d'incohérence sont susceptibles d'apparaître. D'une part, pour tout RCQ  $N^k$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $N^k$  n'est pas nécessairement cohérent. En effet, les informations fournies permettant de définir  $N^k$  sont données sur des paires de variables et sont donc locales, ce qui peut généralement provoquer l'apparition d'un conflit. D'autre part, un autre type d'incohérence peut survenir lorsque les différents RCQ fournis sont combinés entre eux. Par exemple, dans le cas des préférences, un simple conflit d'intérêt entre deux agents à propos d'un



même couple de variables suffit à rendre l'ensemble des RCQ conflictuels.

Nos deux classes d'opérateurs de fusion considèrent en entrée un multi-ensemble  $\mathcal{N} = \{N^1, \dots, N^m\}$  de RCQ définis sur  $V$ , tel que tout RCQ  $N^k = (V, C^k)$  représente les croyances ou les préférences de l'agent  $Agent_k$ . Un tel multi-ensemble est appelé *profil*, ou *profil de RCQ*. De manière naturelle, nous imposons qu'aucune des contraintes des RCQ ne soit définie par la relation vide, ainsi  $N^k[i, j] \neq \emptyset$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Si une contradiction au niveau d'un agent et d'une paire de variables apparaît, nous définissons la contrainte correspondante par la relation B exprimant l'absence totale d'information.

*Exemple.* Considérons un ensemble de quatre cours communs pour un ensemble d'étudiants donnés, nous restreignons notre exemple à un ensemble de trois étudiants Pierre, Paul et Jacques. Chacun d'entre eux peut exprimer ses préférences sur l'emploi du temps en fournissant un ensemble de relations binaires entre ces cours. Nous considérons alors quatre variables temporelles, chacune d'elles représentant un cours se déroulant sur un intervalle de temps. Les quatre variables  $v_1, v_2, v_3, v_4$  représentent respectivement les cours d'algèbre, analyse, algorithmique et anglais, et forment l'ensemble  $V$ . Nous considérons l'algèbre des intervalles pour représenter des relations qualitatives entre ces cours. Par exemple, Pierre préfère commencer à étudier l'algèbre avant le début du cours d'analyse et voudrait également terminer l'algèbre avant de terminer l'analyse. Ceci peut être exprimé par la relation  $v_1 \{p, m, o\} v_2$ . Ainsi, Pierre, Paul et Jacques fournissent respectivement les RCQ  $N^1, N^2, N^3$  représentés à la figure 4, représentant leurs préférences sur les relations binaires entre ces cours et formant le profil  $\mathcal{N}$ . Remarquons que l'exemple de conflit décrit dans l'introduction intervient dans le RCQ  $N^3$ ; en effet il n'existe pas de solution partielle de  $N^3$  sur  $\{v_2, v_3, v_4\}$ . Nous nous appuyons sur cet exemple dans le reste de l'article.

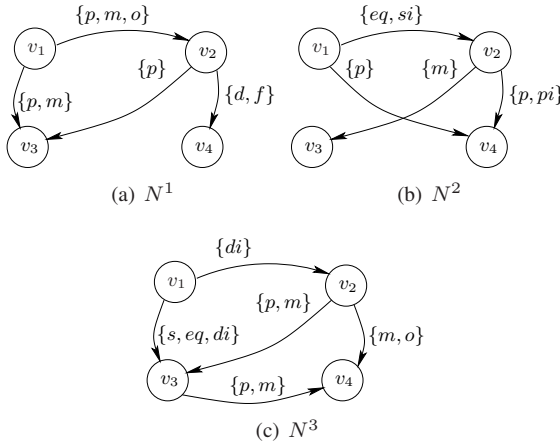


FIGURE 4 – Trois RCQ  $N^1, N^2$  et  $N^3$  à fusionner.

### 3.2 Postulats de rationalité pour les opérateurs de fusion de RCQ

Étant donné un profil  $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_m\}$  de RCQ sur  $V$  représentant les croyances ou les préférences d'un ensemble d'agents, nous désirons obtenir comme résultat de la fusion un ensemble d'informations *cohérentes* représentant  $\mathcal{N}$  dans sa globalité. Dans [3] des postulats de rationalité ont été proposés pour les opérateurs de fusion de RCQ. Les auteurs considèrent un cadre très général où un opérateur de fusion de RCQ est fondamentalement une application qui, à un profil de RCQ, associe un ensemble de RCQ (éventuellement incohérents). Notre but ici est de proposer un compromis *cohérent* pour la fusion de RCQ :

**Définition 6 (Opérateur  $\Delta$ ).** *Un opérateur  $\Delta$  est une application qui, à un profil  $\mathcal{N}$  de RCQ, associe un ensemble  $\Delta(\mathcal{N})$  de scénarios cohérents.*

Nous adaptons à cette définition les postulats proposés dans [3] pour définir un opérateur de fusion de RCQ.

**Définition 7 (Opérateur de fusion de RCQ).** *Soit  $\mathcal{N}$  un profil de RCQ.  $\Delta$  est un opérateur de fusion de RCQ ssi il satisfait les postulats suivants :*

- (N1)  $\Delta(\mathcal{N}) \neq \emptyset$ .
- (N2) Si  $\bigcap \{[N^k] \mid N^k \in \mathcal{N}\} \neq \emptyset$ , alors  $\Delta(\mathcal{N}) = \bigcap \{[N^k] \mid N^k \in \mathcal{N}\}$ .

(N1) assure que la cohérence de  $\Delta(\mathcal{N})$ . (N2) impose pour  $\Delta(\mathcal{N})$  de correspondre à l'ensemble des scénarios cohérents partagés par chacun des RCQ de  $\mathcal{N}$ , lorsque cet ensemble est non vide.

Nous présentons un ensemble de postulats supplémentaires pour les opérateurs  $\Delta$ . Avant de les présenter, nous définissons la notion d'équivalence entre profils de RCQ. Deux profils  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  sont dits *équivalents*, noté  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$ , ssi il existe une bijection  $f$  de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{N}'$  telle que  $\forall N \in \mathcal{N}, N \equiv f(N)$ .  $\sqcup$  est l'opérateur d'union pour les multi-ensembles.

**Définition 8 (Postulats (N3) - (N6)).** *Soient  $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  trois profils de RCQ, et soient  $N, N'$  deux RCQ cohérents.*

- (N3) Si  $\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2$ , alors  $\Delta(\mathcal{N}_1) \equiv \Delta(\mathcal{N}_2)$ .
- (N4) Si  $\Delta(\{N, N'\}) \cap [N] \neq \emptyset$ , alors  $\Delta(\{N, N'\}) \cap [N'] \neq \emptyset$ .
- (N5)  $\Delta(\mathcal{N}_1) \cap \Delta(\mathcal{N}_2) \subseteq \Delta(\mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2)$ .
- (N6) Si  $\Delta(\mathcal{N}_1) \cap \Delta(\mathcal{N}_2) \neq \emptyset$ , alors  $\Delta(\mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2) \subseteq \Delta(\mathcal{N}_1) \cap \Delta(\mathcal{N}_2)$ .

(N3) applique le principe d'indépendance à la syntaxe des RCQ de  $\mathcal{N}$ . (N4) est le postulat d'équité, il impose que le résultat de la fusion de deux RCQ cohérents ne doit pas préférer l'un d'entre eux. (N5) indique qu'un scénario cohérent appartenant à la fusion d'un premier profil et à la fusion d'un second profil doit nécessairement appartenir à la fusion des deux profils joints. (N5) et (N6), ensemble,

assurent que si deux profils fusionnés de manière indépendante s'accordent sur un ensemble non vide  $E$  de scénarios cohérents, alors la fusion des deux profils joints doit être cet ensemble  $E$ .

### 3.3 Deux classes d'opérateurs de fusion

Dans cette section, nous définissons de manière constructive deux classes d'opérateurs de fusion de RCQ. Les opérateurs de la première et de la seconde classe sont respectivement notés  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Ces opérateurs associent à un profil  $\mathcal{N}$  un ensemble de scénarios cohérents les plus « proches » de  $\mathcal{N}$  en terme de « distance ». C'est dans la définition de cette distance que réside leur différence. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , un opérateur de fusion  $\Delta_i$  est caractérisé par un triplet  $(d_B, f_i, g_i)$  où  $d_B$  est une distance de base sur  $B$  et  $f_i$  et  $g_i$  sont deux fonctions d'agrégations symétriques et associatives. L'opérateur  $\Delta_i$  caractérisé par  $(d_B, f_i, g_i)$  est noté  $\Delta_i^{d_B, f_i, g_i}$ . L'ensemble des scénarios cohérents  $\Delta_i^{d_B, f_i, g_i}(\mathcal{N})$  est défini par le résultat d'un processus en deux étapes.

**Les opérateurs  $\Delta_1$**  La première étape consiste à calculer une *distance locale*  $d_{f_1}$  entre tout scénario cohérent sur l'ensemble de variables  $V$ , *i.e.*, tout scénario cohérent de  $N_{All}^V$  et chacun des RCQ du profil  $\mathcal{N}$ . À cette fin, la distance de base  $d_B$  et la fonction d'agrégation  $f_1$  sont utilisées pour définir la distance  $d_{f_1}$  entre deux scénarios  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $N_{All}^V$  de la manière suivante :

$$d_{f_1}(\sigma, \sigma') = f_1\{d_B(\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}) \mid v_i, v_j \in V, i < j\}.$$

La distance entre deux scénarios résulte donc de l'agrégation de distances au niveau de leurs contraintes au moyen d'une fonction d'agrégation. Le choix de la fonction d'agrégation  $f_1$  dépend du contexte. Par exemple  $f_1 = MAX$  est un choix approprié lorsque seule la distance la plus grande pour une paire de contraintes entre un scénario et un RCQ est importante, quelque soit le nombre de contraintes. Pour  $f_1 = \sum$ , les distances  $d_B$  sur toutes les contraintes sont sommées, et donc chacune d'entre elles est prise en compte.

La définition de  $d_{f_1}$  est étendue afin de calculer une distance entre un scénario cohérent de  $N_{All}^V$  et tout RCQ  $N^k$  de  $\mathcal{N}$  de la manière suivante :

$$d_{f_1}(\sigma, N^k) = \min\{d_{f_1}(\sigma, \sigma') \mid \sigma' \in \langle N^k \rangle\}.$$

La distance entre un scénario  $\sigma$  et un RCQ  $N$  est donc la plus petite des distances (pour  $d_{f_1}$ ) entre  $\sigma$  et l'ensemble des scénarios de  $N$ .

*Exemple (suite).* Par souci de concision de représentation, nous définissons un scénario comme l'ensemble de ses relations ordonné selon l'ordre lexicographique sur les couples de variables  $(v_i, v_j), i < j$ . Ainsi, le scénario cohérent  $\sigma_1$  représenté à la figure 5(a) est désigné par l'ensemble de relations  $\{\{fi\}, \{m\}, \{p\}, \{m\}, \{p\}, \{m\}\}$ .

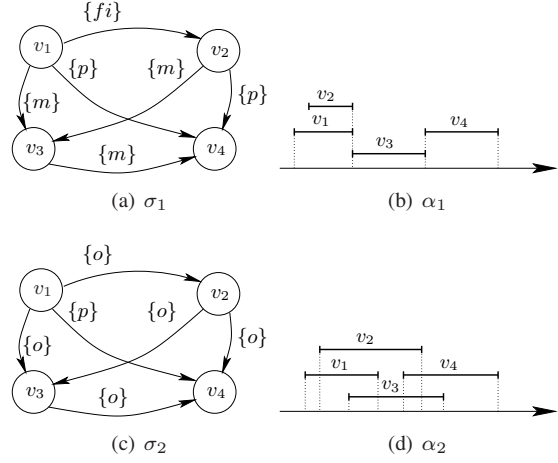


FIGURE 5 – Deux scénarios cohérents  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $N_{All}^V$ , et deux instantiations cohérentes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$ .

Soit  $\sigma''$  le scénario du RCQ  $N^1$  (cf. figure 4(a)) défini par  $\{\{o\}, \{m\}, \{p\}, \{p\}, \{d\}, \{m\}\}$ . Nous utilisons ici la distance de base  $d_{GB_{int}}$ , de même que pour les exemples qui suivent. Nous choisissons pour l'exemple  $f_1 = \sum$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\sum}(\sigma_1, N^1) &= \min\{d_{\sum}(\sigma_1, \sigma') \mid \sigma' \in \langle N^k \rangle\} \\ &= d_{\sum}(\sigma_1, \sigma'') \\ &= \sum\{d_{GB_{int}}(fi, o), d_{GB_{int}}(m, m), d_{GB_{int}}(p, p), \\ &\quad d_{GB_{int}}(m, p), d_{GB_{int}}(p, d), d_{GB_{int}}(m, m)\} \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 + 4 + 0 = 6. \end{aligned}$$

De même, on a  $d_{\sum}(\sigma_1, N^2) = 1$  et  $d_{\sum}(\sigma_1, N^3) = 4$ .

La deuxième étape du processus de fusion consiste, pour un scénario cohérent  $\sigma$  de  $N_{All}^V$ , à utiliser la fonction d'agrégation  $g_1$  sur les distances  $d_{f_1}(\sigma, N^k)$  calculées à l'étape précédente pour tout  $N^k \in \mathcal{N}$  afin de calculer une *distance globale*  $d_{g_1}$  entre  $\sigma$  et le profil  $\mathcal{N}$ . Cette distance est définie comme suit :

$$d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}) = g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}\}.$$

Plusieurs fonctions d'agrégations ont été étudiées dans la littérature dans le cadre de la résolution de conflits entre plusieurs agents [11, 9]. Pour  $g_1 = \sum$ , la distance globale reflète le point de vue de la majorité des sources [9] ; pour l'opérateur d'arbitrage  $g_1 = MAX$ , elle représentera une valeur plus consensuelle [11].

*Exemple (suite).* Considérons ici  $g_1 = MAX$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d_{MAX}(\sigma_1, \mathcal{N}) &= \max\{d_{\sum}(\sigma_1, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}\} \\ &= \max\{6, 1, 4\} = 6. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\Delta_1^{d_B, f_1, g_1}(\mathcal{N})$  est l'ensemble des scénarios cohérents de  $N_{All}^V$  minimisant la distance globale  $d_{g_1}$ . Formellement,

$$\Delta_1^{d_B, f_1, g_1}(\mathcal{N}) = \{\sigma \in [N_{All}^V] \mid \nexists \sigma' \in [N_{All}^V], d_{g_1}(\sigma', \mathcal{N}) < d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N})\}.$$

*Exemple (suite).* Considérons le scénario cohérent  $\sigma_2$  représenté à la figure 5(c). On peut calculer sa distance globale de la même manière que pour  $\sigma_1$ . On a alors  $d_{MAX}(\sigma_2, \mathcal{N}) = 5$ . Puisque  $d_{MAX}(\sigma_2, \mathcal{N}) < d_{MAX}(\sigma_1, \mathcal{N})$ , le scénario cohérent  $\sigma_1$  n'appartient pas à l'ensemble  $\Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1, \Sigma, MAX}(\mathcal{N})$ .

**Proposition 1.**  $\Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}$  est un opérateur de fusion de RCQ au sens de la définition 7, c'est-à-dire qu'il satisfait les postulats (N1) et (N2). De plus,  $\Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}$  satisfait (N5) et si  $g_2$  satisfait la propriété de stricte monotonie, alors  $\Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}$  satisfait (N6). Il ne satisfait pas (N3) et (N4) dans le cas général.

**Preuve.** (N1) Par définition.

(N2) Soit  $\sigma \in [N_{All}^V]$ . D'après la propriété de séparation de  $d_B$ , on a  $\forall \sigma' \in \langle N_{All}^V \rangle, \forall v_i, v_j, i < j, d_B(\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}) = 0$  ssi  $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}$ . Donc puisque  $f_1$  satisfait la propriété la minimalité, on a  $\forall \sigma' \in \langle N_{All}^V \rangle, d_{f_1}(\sigma, \sigma') = 0$  ssi  $\sigma = \sigma'$ . Donc  $d_{f_1}(\sigma, N^k) = 0$  ssi  $\sigma \in [N^k]$ . Par minimalité de  $g_1$ , on a  $d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}) = 0$  ssi  $\sigma \in [N^k] \forall N^k \in \mathcal{N}$ . Or  $\bigcap \{[N^k] \mid N^k \in \mathcal{N}\} \neq \emptyset$ . Donc par définition de  $\Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}$ ,  $\sigma \in \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N})$  ssi  $\sigma \in \bigcap \{[N^k] \mid N^k \in \mathcal{N}\}$ .

(N5) Soient  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  deux profils. Soit  $\sigma \in \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1) \cap \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_2)$  et soit  $\sigma' \in [N_{All}^V]$ . On a  $d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}_1) \leq d_{g_1}(\sigma', \mathcal{N}_1)$  et  $d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}_2) \leq d_{g_1}(\sigma', \mathcal{N}_2)$ , ou encore  $g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1\} \leq g_1\{d_{f_1}(\sigma', N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1\}$  et  $g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_2\} \leq g_1\{d_{f_1}(\sigma', N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_2\}$ . Donc par monotonie et associativité de  $g_1$ , on a  $g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2\} \leq g_1\{d_{f_1}(\sigma', N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2\}$ . Donc  $\sigma \in \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2)$ .

(N6) Soient  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  deux profils. Soit  $\sigma \in \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2)$ . Par l'absurde, supposons que  $\sigma \notin \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1) \cap \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_2)$ . Soit  $\sigma \notin \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1)$  (la preuve est similaire si on suppose  $\sigma \notin \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_2)$ ). Puisque  $\Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1) \cap \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_2) \neq \emptyset$ , par minimalité de  $g_1$ ,  $\exists \sigma' \in [N_{All}^V]$  tel que  $d_{g_1}(\sigma', \mathcal{N}_1) < d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}_1)$  et  $d_{g_1}(\sigma', \mathcal{N}_2) \leq d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}_2)$ , ou encore  $g_1\{d_{f_1}(\sigma', N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1\} < g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1\}$  et  $g_1\{d_{f_1}(\sigma', N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_2\} \leq g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_2\}$ . Dans par monotonie stricte et associativité de  $f_1$ , on a  $g_1\{d_{f_1}(\sigma', N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2\} < g_1\{d_{f_1}(\sigma, N^k) \mid N^k \in \mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2\}$ , ce qui contredit  $\sigma \in \Delta_1^{d_{B}, f_1, g_1}(\mathcal{N}_1 \sqcup \mathcal{N}_2)$ .  $\dashv$

**Les opérateurs  $\Delta_2$**  Un opérateur  $\Delta_2$  est défini en deux étapes de la manière suivante. La première étape consiste, pour tout couple  $(v_i, v_j)$ ,  $i < j$ , à calculer une *distance locale*  $d_{f_2}$  entre toute relation de base de B et l'ensemble  $\mathcal{N}[i, j] = \{N^k[i, j] \mid N^k \in \mathcal{N}\}$ . La définition de la distance de base  $d_B$  entre deux relations de base de B est étendue à celle de la distance de base entre une relation de base  $b \in B$  et une relation  $R \in 2^B$ ,  $R \neq \emptyset$ . Elle correspond à la

distance de base minimale entre  $b$  et chacune des relations de base de  $R$  et est définie formellement comme suit :

$$d_B(b, R) = \min\{d_B(b, b') \mid b' \in R\}.$$

La fonction d'agrégation  $f_2$  permet alors de calculer la distance locale  $d_{f_2}$  entre toute relation de base de B et l'ensemble des contraintes  $\mathcal{N}[i, j] = \{N^k[i, j] \mid N^k \in \mathcal{N}\}$  de la manière suivante :

$$d_{f_2}(b, \mathcal{N}[i, j]) = f_2\{d_B(b, N^k[i, j]) \mid N^k[i, j] \in \mathcal{N}[i, j]\}.$$

Le choix de la fonction d'agrégation  $f_2$  est motivé de la même manière que pour celui de la fonction d'agrégation  $g_1$  des opérateurs  $\Delta_1$ . En fonction du contexte, on choisira selon le cas une fonction majoritaire  $\sum$  [9] ou une fonction d'arbitrage  $MAX$  [11]. En effet l'agrégation ici concerne pour chaque couple  $(v_i, v_j)$  les contraintes  $N^k[i, j]$  dans les différents RCQ  $N^k$  du profil  $\mathcal{N}$ .

*Exemple (suite).* Considérons l'ensemble  $\mathcal{N}[1, 2] = \{\{p, m, o\}, \{eq, si\}, \{di\}\}$  (cf. figure 4) et choisissons  $d_{GB_{int}}$  pour la distance de base et  $f_2 = MAX$ . La distance entre la relation de base  $fi$  et l'ensemble  $\mathcal{N}[1, 2]$  est alors définie par :

$$\begin{aligned} d_{MAX}(fi, \mathcal{N}[1, 2]) &= \max\{d_{GB_{int}}(fi, \{p, m, o\}), \\ &\quad d_{GB_{int}}(fi, \{eq, si\}), d_{GB_{int}}(fi, \{di\})\} \\ &= \max\{d_{GB_{int}}(fi, o), d_{GB_{int}}(fi, eq), d_{GB_{int}}(fi, di)\} \\ &= \max\{1, 1, 1\} = 1. \end{aligned}$$

La deuxième étape consiste, pour toute relation de base de B, à agréger sur l'ensemble des couples de variables  $(v_i, v_j)$ ,  $i < j$ , les distances locales calculées à l'étape précédente, afin d'obtenir une *distance globale*  $d_{g_2}$  entre un scénario  $\sigma$  de  $N_{All}^V$  ainsi généré et le profil  $\mathcal{N}$ . Cette distance utilise la fonction d'agrégation  $g_2$  et est définie comme suit :

$$d_{g_2}(\sigma, \mathcal{N}) = g_2\{d_{f_2}(\sigma_{ij}, \mathcal{N}[i, j]) \mid v_i, v_j \in V, i < j\}.$$

Le choix de la fonction d'agrégation  $g_2$  sur l'ensemble des paires de variables  $(v_i, v_j)$  du scénario  $\sigma$  est ici motivé de manière identique à celui de la fonction d'agrégation  $f_1$  pour les opérateur  $\Delta_1$ .

*Exemple (suite).* Considérons de nouveau le scénario cohérent  $\sigma_1$  (cf. figure 5(a)) et choisissons  $g_2 = \sum$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\sum}(\sigma_1, \mathcal{N}) &= \sum\{d_{MAX}(\sigma_1(1, 2), \mathcal{N}[1, 2]), \dots, \\ &\quad d_{MAX}(\sigma_1(3, 4), \mathcal{N}[3, 4])\} \\ &= 1 + 2 + 0 + 1 + 4 + 0 = 8. \end{aligned}$$

De manière similaire aux opérateurs  $\Delta_1$ , le résultat de la fusion du profil  $\mathcal{N}$  par l'opérateur  $\Delta_2^{d_{B}, f_2, g_2}$  correspond à l'ensemble des scénarios *cohérents* de  $N_{All}^V$  qui minimisent la distance globale  $d_{g_2}$ . Formellement,

$$\Delta_2^{d_{B}, f_2, g_2}(\mathcal{N}) = \{\sigma \in [N_{All}^V] \mid \nexists \sigma' \in [N_{All}^V], d_{g_2}(\sigma', \mathcal{N}) < d_{g_2}(\sigma, \mathcal{N})\}.$$



*Exemple (suite).* Considérons de nouveau le scénario cohérent  $\sigma_2$  représenté à la figure 5(c). Sa distance globale, calculée de manière similaire à celle de  $\sigma_1$ , est définie par  $d_{\Sigma}(\sigma_2, \mathcal{N}) = 8$ . Remarquons alors que les deux scénarios cohérents  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ont une même distance globale, ce qui implique que  $\sigma_1 \in \Delta_2^{d_{GB_{int}}, MAX, \Sigma}(\mathcal{N})$  ssi  $\sigma_2 \in \Delta_2^{d_{GB_{int}}, MAX, \Sigma}(\mathcal{N})$ .

**Proposition 2.**  $\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}$  est un opérateur de fusion de RCQ au sens de la définition 7, c'est-à-dire qu'il satisfait les postulats (N1) et (N2). Les postulats (N3) - (N6) ne sont pas vérifiés dans le cas général.

**Preuve.** (N1) Par définition. (N2) D'après la propriété de séparation de  $d_B$ , on a  $\forall b \in B, \forall R \in 2^B, d_B(b, R) = 0$  ssi  $b \in R$ . Soit  $\mathcal{R}$  un multi-ensemble de relations de  $2^B$ . D'après la minimalité de  $f_2$ , on a  $d_{f_2}(b, \mathcal{R}) = 0$  ssi  $b \in R \forall R \in \mathcal{R}$ . Soit  $\sigma \in [N_{All}^V]$ . D'après la minimalité de  $g_2$ , on a  $d_{g_2}(\sigma, \mathcal{N}) = 0$  ssi  $\forall v_i, v_j, i < j, \sigma_{ij} \in N^k[i, j] \forall N^k \in \mathcal{N}$ . Ceci signifie que  $\sigma \in \Delta_2^{d_B, f_2, g_2}(\mathcal{N})$  ssi  $\sigma \in \bigcap \{[N^k] \mid N^k \in \mathcal{N}\}$ .  $\dashv$

### 3.4 Comparaison des opérateurs $\Delta_1$ et $\Delta_2$

Etant donné un profil  $\mathcal{N}$ , on choisira un opérateur  $\Delta_1$  lorsque les sources sont indépendantes, *i.e.*, lorsque l'information fournie par chaque RCQ du profil doit être traitée indépendamment. En effet, la première étape d'agrégation est « locale » à un RCQ particulier, la deuxième étape consiste alors à combiner les sources entre elles. Dans cet esprit, les opérateurs  $\Delta_1$  sont définis en s'inspirant des opérateurs de fusion de RCQ récemment proposés dans [5] et aux opérateurs de fusion de croyances  $\mathbf{DA}^2$  [7] définis dans le cadre de la logique propositionnelle. Dans [5] les opérateurs de fusion de RCQ, notés  $\Theta$ , considèrent de même que les opérateurs  $\Delta_1$  un profil  $\mathcal{N}$  de RCQ et renvoient en résultat un ensemble de scénarios cohérents suivant un processus similaire en deux étapes, en considérant systématiquement  $f_1 = \Sigma$ . Cependant alors que les opérateurs  $\Delta_1$  considèrent l'ensemble des scénarios des RCQ de  $\mathcal{N}$  dans le calcul de la distance locale  $d_{f_1}$ , un opérateur  $\Theta$  considère l'ensemble de leurs scénarios *cohérents*. Ainsi, à la différence d'un opérateur  $\Delta_1$ , les RCQ incohérents de  $\mathcal{N}$  ne sont pas considérés par un opérateur  $\Theta$ , de même que les relations de base contenues dans les contraintes d'un RCQ qui ne participent à aucun scénario cohérent de ce RCQ. Dans [7] les auteurs définissent une classe d'opérateurs de fusion de bases de croyances propositionnelles nommée  $\mathbf{DA}^2$ , paramétrée par une distance entre interprétations et deux fonctions d'agrégation. Un profil correspond alors à un ensemble de bases de croyances, chacune étant représentée par un ensemble de formules propositionnelles. Une première étape consiste alors à calculer une distance entre une interprétation et une base de croyances au moyen d'une première fonction d'agrégation sur l'ensemble des formules propositionnelles constituant la base

de croyances, puis d'utiliser une deuxième fonction d'agrégation pour combiner les différentes bases de croyance du profil. Dans le cadre des RCQ, les opérateurs  $\Delta_1$  suivent typiquement le même principe de fusion.

Les opérateurs  $\Delta_2$  sont adaptés dans contexte où une décision globale doit être prise *a priori*, pour chaque paire de variables  $(v_i, v_j)$ , de manière indépendante. Dans un tel cas une décision commune doit être prise en premier lieu pour chaque paire de variables, l'ensemble des paires de variables étant considéré comme un ensemble de « critères » indépendants. Les opérateurs  $\Delta_2$  considèrent une distance locale  $d_{f_2}$  qui coïncide avec celle proposée dans [4, 2]. Dans ces travaux, les auteurs utilisent cette distance locale  $d_{f_2}$  pour définir un *opérateur de fusion de contraintes*. Un tel opérateur associe à un ensemble de relations l'ensemble des relations de base minimisant la distance  $d_{f_2}$  à cet ensemble. Dans un tel cadre, un opérateur de fusion de RCQ, noté  $\Omega$ , associe à un profil  $\mathcal{N}$  de RCQ un RCQ unique  $\Omega(\mathcal{N})$ . Tout comme un opérateur  $\Delta_2$ , un opérateur  $\Omega$  prend en compte des RCQ éventuellement incohérents et considère l'ensemble des relations de base fournies dans chaque contrainte pour chaque RCQ de  $\mathcal{N}$ , même si ces dernières ne participent à aucun scénario cohérent du RCQ en question. Un ordre total  $<_V$  sur les paires des variables  $(v_i, v_j)$  est supposé fixé au départ. En suivant l'ordre  $<_V$ , chaque contrainte portant sur  $(v_i, v_j)$  du RCQ  $\Omega(\mathcal{N})$  est affectée à une relation en appliquant l'opérateur de fusion des contraintes des RCQ de  $\mathcal{N}$  portant sur  $(v_i, v_j)$ . A chaque étape la cohérence du RCQ  $\Omega(\mathcal{N})$  est préservée. Bien que le calcul de  $\Omega(\mathcal{N})$  soit efficace en pratique, il renvoie un résultat sous-optimal dans le cas général. Un opérateur  $\Delta_2$  suit un même objectif de fusion d'un profil  $\mathcal{N}$ , en garantissant toutefois un résultat cohérent optimal.

Aucun des opérateurs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ne satisfont les postulats d'indépendance syntaxique (N3) et d'équité (N4) (cf. propositions 1 et 2). Ceci est dû en particulier à la prise en compte par ces opérateurs des RCQ incohérents du profil. Les propositions 1 et 2 montrent également que les opérateurs  $\Delta_1$  satisfont un ensemble de propriétés logiques plus important que les opérateurs  $\Delta_2$ . Par conséquent, ces opérateurs renvoient des résultats différents dans le cas général. Leur principale différence réside dans l'inversion des deux étapes d'agrégation. La proposition suivante exprime le fait que sous certaines conditions sur les fonctions d'agrégations utilisées, les opérateurs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont équivalents.

**Proposition 3.** Si  $f_1 = g_2, f_2 = g_1$  et  $f_1$  et  $f_2$  sont *intercommutatives*, alors  $\Delta_1^{d_B, f_1, g_1}(\mathcal{N}) = \Delta_2^{d_B, f_2, g_2}(\mathcal{N})$ .

**Preuve.** Il suffit de montrer que les distances globales du calcul de  $\Delta_1^{d_B, f_1, g_1}(\mathcal{N})$  et  $\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}(\mathcal{N})$  coïncident. Soient  $N^k \in \mathcal{N}$  et  $\sigma \in [N_{All}^V]$ . Soit  $h$  une fonction d'agrégation, notons  $\alpha^k(h) = d_h(\sigma, N^k) = \min\{h\{d_B(\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}) \mid v_i, v_j \in V, i < j\} \mid \sigma' \in \langle N^k \rangle\}$  et  $\beta^k(h) = h\{\min\{d_B(\sigma_{ij}, b) \mid b \in N^k[i, j]\} \mid v_i, v_j \in V, i < j\}$ . Montrons d'abord que  $\alpha^k(f_1) = \beta^k(f_1)$ .

Par monotonie de  $f_1$ , on a clairement  $\alpha^k(f_1) \geq \beta^k(f_1)$ , donc montrons  $\alpha^k(f_1) \leq \beta^k(f_1)$ . Soit  $\sigma'$  un scénario cohérent défini  $\forall v_i, v_j$  par  $\sigma'_{ij} = b$  tel que  $b \in N^k[i, j]$  et  $d_B(\sigma_{ij}, b) = \min\{d_B(\sigma_{ij}, b') \mid b' \in N^k[i, j]\}$ . Par définition,  $\sigma' \in \langle N^k \rangle$ , donc  $\beta^k(f_1) = f_1\{d_B(\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}) \mid v_i, v_j \in V, i < j\}$ . Donc  $\alpha^k(f_1) \leq \beta^k(f_1)$ . La distance globale  $d_{g_1}$  entre  $\sigma$  et  $\mathcal{N}$  dans le processus de calcul de  $\Delta_1^{d_B, f_1, g_1}(\mathcal{N})$  est définie comme étant  $d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}) = g_1\{\alpha^k(f_1) \mid N^k \in \mathcal{N}\} = g_1\{\beta^k(f_1) \mid N^k \in \mathcal{N}\}$ . Comme  $f_1 = g_2$  et  $f_2 = g_1$ , on a  $d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}) = f_2\{\beta^k(g_2) \mid N^k \in \mathcal{N}\}$ .  $d_{g_2}$  est la distance globale dans le processus de calcul de  $\Delta_1^{d_B, f_2, g_2}(\mathcal{N})$ ; puisque  $f_2$  et  $g_2$  sont inter-commutatives, on a  $d_{g_1}(\sigma, \mathcal{N}) = d_{g_2}(\sigma, \mathcal{N})$ .  $\dashv$

Par conséquent, cette proposition s'applique lorsque  $f_1 = g_2, f_2 = g_1$  et par exemple lorsque  $(f_1, f_2) \in \{(\sum, \sum), (MAX, MAX)\}$ . Notons cependant que  $\sum$  et  $MAX$  ne sont pas inter-commutatives, ainsi la proposition ne s'applique pas lorsque  $(f_1, f_2) \in \{(\sum, MAX), (MAX, \sum)\}$ .

Dans la section suivante, nous proposons une méthode pratique pour le calcul de  $\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}(\mathcal{N})$ .

## 4 Les réseaux de contraintes qualitatives pondérés

En s'inspirant de l'approche proposée dans le cadre des CSP discrets pondérés [13, 8], nous définissons les réseaux de contraintes qualitatives pondérés (RCQP en abrégé). Un RCQP est un RCQ particulier où est associé à chaque relation de base de chacune des contraintes une valeur numérique. Chacune de ces valeurs correspond à un coût : le coût associé à une relation de base pour une contrainte donnée est d'autant plus faible que cette relation de base est préférée pour cette contrainte. À un RCQP est également associée une fonction d'agrégation permettant d'évaluer le coût d'un scénario cohérent et d'ainsi caractériser ses solutions optimales.

**Définition 9 (Réseau de contraintes qualitatives pondérés).** Un RCQP défini sur  $2^B$  est un quadruplet  $(V, C, \pi, \oplus)$  où

- $(V, C)$  est un RCQ  $N$  défini sur  $2^B$ ,
- $\pi$  une est application associant à chaque couple  $(v_i, v_j) \in V \times V, i < j$  une fonction qui associe à chaque élément  $b \in N[i, j]$  une valeur réelle positive notée  $\pi_{ij}(b)$ ,
- $\oplus$  est une fonction d'agrégation.

Soit  $P = (V, C, \pi, \oplus)$  un RCQP défini sur  $2^B$ . Un scénario de  $P$  est un scénario du RCQ  $(V, C)$ . Une solution de  $P$  est un scénario cohérent de  $P$ .  $[P]$  dénote l'ensemble des solutions de  $P$ . Soit  $\sigma$  un scénario de  $P$ . Le coût de  $\sigma$ , noté  $\mathcal{V}(\sigma)$ , est défini par  $\oplus\{\pi_{ij}(\sigma_{ij}) \mid v_i, v_j \in V, i < j\}$ . L'ensemble des solutions optimales de  $P$  est noté  $\text{Sols}(P)$ .

La procédure *SearchSols* permet de calculer l'ensemble des solutions optimales d'un RCQP  $P =$

$(V, C, \pi, \oplus)$  à l'aide d'une recherche de type *Branch and Bound*.  $N$  est le RCQ  $(V, C)$ . À chaque point de la recherche, l'ensemble Sols contient l'ensemble des solutions de meilleur coût trouvées jusqu'à présent. Ce coût est stocké par la variable UB. Cette dernière doit être initialisée avec une valeur strictement supérieure au coût de toute solution de  $P$ . La valeur  $1 + \oplus\{\max\{\pi_{ij}(b) : b \in N[i, j]\} : v_i, v_j \in V, i < j\}$  peut être par exemple utilisée. Lorsque  $N$  est un scénario, un test de cohérence de  $N$  est réalisé à l'aide de la méthode de la fermeture par faible composition (ligne 2) pour vérifier que  $N$  est solution de  $P$ . Notons que toute autre méthode peut être utilisée pourvue que celle-ci soit complète pour la problème de la cohérence d'un scénario sur  $2^B$ . De manière générique, nous utilisons la fermeture par faible composition du fait que pour la plupart des formalismes qualitatifs cette méthode est complète pour les scénarios. Le coût de  $N$  est forcément inférieur ou égal à UB. En effet, soit le RCQP  $P$  dont est issu  $N$  est le RCQP initial sur lequel a été appelée la procédure *SearchSols*, soit  $P$  est issu d'un appel récursif (ligne 16) qui n'a lieu que dans le cas où  $\oplus\{\min\{\pi_{ij}(b) : b \in N[i, j]\} : v_i, v_j \in V, i < j\} \leq \text{UB}$ . Puisque  $N$  est un scénario, dans les deux cas nous avons  $\mathcal{V}(N) \leq \text{UB}$ . Il s'ensuit que  $N$  peut être rajoutée à l'ensemble des meilleures solutions. Le cas où  $N$  n'est pas un scénario est pris en compte à la ligne 9. Une contrainte  $N[i, j]$  non singleton est alors sélectionnée. La contrainte  $N[i, j]$  est alors substituée successivement par chacune des relations de base la composant (lignes 12–16). La méthode de filtrage qu'est la fermeture par faible composition est alors réalisée sur  $N$ . Dans le cas où  $N$  n'a pas été détecté non cohérent, une mise à jour de la fonction de coût  $\pi$  est réalisée afin de prendre en compte les relations de base supprimées sur  $N$  par le filtrage précédent. Un appel récursif de *SearchSols* sur  $P$  est alors réalisé.

**Proposition 4.** Si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour les scénarios définis sur  $2^B$  alors la procédure *SearchSols* est saine et complète pour le problème de trouver l'ensemble des solutions optimales d'un RCQP sur  $2^B$ .

Nous montrons maintenant que le résultat d'un opérateur de fusion de la classe  $\Delta_2$  sur un profil  $\mathcal{N}$  peut être représenté au travers des solutions d'un RCQP particulier. On définit l'application  $\text{RCQP}_{\Delta_2}$  qui associe à un opérateur de  $\Delta_2$  et un profil  $\mathcal{N}$  un RCQP particulier, comme suit :

**Définition 10.** Soit  $\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}$  un opérateur de fusion de la classe  $\Delta_2$  et un profil  $\mathcal{N}$  de RCQ définis sur  $V$ .  $\text{RCQP}_{\Delta_2}(\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}, \mathcal{N})$  est le RCQP  $(V', C, \pi, \oplus)$  défini par :

- $V' = V$ ,
- $\forall v_i, v_j \in V, N[i, j] = B$ , avec  $(V, C) = N$ ,
- $\forall v_i, v_j \in V, i < j, \forall b \in B, \pi_{ij}(b) = f_2\{d_B(b, N^k[i, j]) \mid N^k[i, j] \in \mathcal{N}[i, j]\}$ ,
- $\oplus = g_2$ .

---

**Procédure**  $\text{SearchSols}(P)$ 

---

**Entrée:** Un RCQP  $P = (V, C, \pi, \oplus)$

//  $N$  dénote le RCQ  $(V, C)$

**Sortie:** SolsOpts est l'ensemble  $\text{Sols}(P)$

```
1 if  $N$  est un scénario then
2   if  $\diamond$ -fermeture( $N$ ) then
3     if  $\mathcal{V}(N) < \text{UB}$  then
4        $\text{UB} \leftarrow \mathcal{V}(N)$ 
5        $\text{Sols} \leftarrow \emptyset$ 
6        $\text{Sols} \leftarrow \text{Sols} \cup \{N\}$ 
7
8 else
9    $P' \leftarrow P$ 
10  Sélectionner  $N[i, j]$  telle que  $|N[i, j]| \neq 1$ 
11  foreach  $b \in N[i, j]$  do
12     $N[i, j] \leftarrow \{b\}$ 
13    if  $\diamond$ -fermeture( $N$ ) then
14      Mettre à jour  $\pi$  à partir de  $N$ 
15      if  $\oplus\{\min\{\pi_{ij}(b) : b \in N[i, j]\} : v_i, v_j \in$ 
16         $V, i < j\} \leq \text{UB}$  then
17        |  $\text{SearchSols}(P)$ 
18     $P \leftarrow P'$ 
```

---

Le résultat du processus de fusion sur un ensemble de RCQ à l'aide d'un opérateur de fusion de la classe  $\Delta_2$  peut être obtenu en résolvant le RCQP associé par l'application  $\text{RCQP}_{\Delta_2}$ . En effet, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 5.** Soit  $\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}$  un opérateur de fusion appartenant à  $\Delta_2$  et un profil  $\mathcal{N} = \{N^1, \dots, N^m\}$ . Nous avons  $\text{Sols}(\text{RCQP}_{\Delta_2}(\Delta_2^{d_B, f_2, g_2}, \mathcal{N})) = \Delta_2^{d_B, f_2, g_2}(\mathcal{N})$ .

**Preuve.** Evident par définition.  $\dashv$

Une conséquence des propositions 3 et 5 est que sous les conditions de la proposition 3, la procédure  $\text{SearchSols}$  permet également de calculer les scénarios cohérents de  $\Delta_1^{d_B, f_1, g_1}(\mathcal{N})$ .

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons défini deux classes d'opérateurs de fusion de réseaux de contraintes qualitatives (RCQ) définis sur une même algèbre qualitative. A la différence des approches de fusion de RCQ existant dans la littérature, ces opérateurs considèrent l'information fournie par chacune des contraintes des RCQ fournis en entrée, permettant ainsi de considérer des RCQ représentant des croyances ou des préférences locales sur les positions relatives d'entités spatiales ou temporelles. Nous avons étudié les propriétés logiques de chacune de ces deux classes d'opérateurs. Nous avons enfin introduit les RCQ pondérés, montré que les solutions d'un RCQ pondéré particulier

correspond au résultat renvoyé par l'un de ces opérateurs, et proposé un algorithme pour calculer ces solutions.

Ce travail donne lieu à des perspectives multiples. Il serait d'abord intéressant de définir des méthodes de propagation de contraintes pour les RCQ pondérés, en s'inspirant notamment des travaux réalisés dans le cadre des CSP pondérés. Pour de nombreuses algèbres qualitatives des classes traitables ont été identifiées dans la littérature pour résoudre le problème de la cohérence des RCQ. Un travail futur est alors d'exploiter ces classes traitables pour la résolution des RCQ pondérés. Par ailleurs, une étude théorique et expérimentale doit être menée afin de comparer la complexité de mise en œuvre des différents opérateurs de fusion de RCQ proposés à ce jour. La plupart de ces opérateurs de fusion renvoient un résultat de taille exponentielle au nombre de variables, les opérateurs définis dans cet article n'en faisant pas exception. Une autre perspective de recherche est alors de caractériser la taille de l'ensemble résultant en fonction des RCQ fournis et de l'opérateur choisi.

## Références

- [1] J-F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *IJCAI'81*, pages 221–226.
- [2] J-F. Condotta, S. Kaci, P. Marquis, and N. Schwind. Merging qualitative constraint networks in a piecewise fashion. In *ICTAI'09*, pages 605–608.
- [3] J-F. Condotta, S. Kaci, P. Marquis, and N. Schwind. Merging qualitative constraints networks using propositional logic. In *ECSQARU'09*, pages 347–358.
- [4] J-F. Condotta, S. Kaci, P. Marquis, and N. Schwind. Fusion de réseaux de contraintes qualitatives par morceaux. In *JFPC'09*, 2009.
- [5] J-F. Condotta, S. Kaci, and N. Schwind. A Framework for Merging Qualitative Constraints Networks. In *FLAIRS'08*, pages 586–591.
- [6] Christian Freksa. Temporal reasoning based on semi-intervals. *Artificial Intelligence*, 54(1):199–227, 1992.
- [7] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis.  $\text{DA}^2$  merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2):49–79, 2004.
- [8] J. Larrosa and T. Schiex. Solving weighted CSP by maintaining arc consistency. *Artificial Intelligence*, 159(1-2):1–26, 2004.
- [9] J. Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2):363–378, 1996.
- [10] J.-L. Marichal. *Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid*. PhD thesis, Institute of Mathematics, University of Liège, Liège, Belgium, 1998.
- [11] P. Z. Revesz. On the Semantics of Arbitration. *Journal of Algebra and Computation*, 7 (2):133–160, 1997.
- [12] S. Saminger-Platz, R. Mesiar, and D. Dubois. Aggregation operators and commuting. *IEEE T. Fuzzy Systems*, 15(6):1032–1045, 2007.
- [13] T. Schiex. Arc consistency for soft constraints. In *CP'00*, pages 411–424.