



**HAL**  
open science

## Expressions non-matricielles des bornes de Cramer-Rao pour la localisation de source en champ proche

Mohammed Nabil El Korso, Remy Boyer, Alexandre Renaux, Sylvie Marcos

► **To cite this version:**

Mohammed Nabil El Korso, Remy Boyer, Alexandre Renaux, Sylvie Marcos. Expressions non-matricielles des bornes de Cramer-Rao pour la localisation de source en champ proche. Colloque GRETSI 2009, 2009, Dijon, France. inria-00444817

**HAL Id: inria-00444817**

**<https://inria.hal.science/inria-00444817>**

Submitted on 7 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Expressions non-matricielles des bornes de Cramér-Rao pour la localisation de source en champ proche

Mohammed Nabil EL KORSO, Remy BOYER, Alexandre RENAUX, Sylvie MARCOS

Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S), Université Paris-Sud XI (UPS), CNRS, SUPELEC,  
3 rue Joliot Curie, Gif-Sur-Yvette, France

{elkorsor, remy.boyer, alexandre.renaux, marcos}@lss.supelec.fr

**Résumé** – Lors d’une localisation de sources à l’aide d’un réseau de capteurs passifs, on fait généralement l’hypothèse simplificatrice de sources situées loin de l’antenne. Cependant, dans le cas de sources proches de l’antenne, les fronts d’ondes ne sont plus plans et il faut prendre en compte un modèle d’observation paramétré, non seulement par l’azimut et l’élévation de chaque source, mais aussi par la distance entre les sources et un référentiel vis-à-vis de l’antenne. Bien qu’une pléthore de méthodes d’estimation concernant ces paramètres soit disponible dans la littérature, les performances ultimes de tels estimateurs n’ont pas tout à fait été traitées en détails. Dans cet article, nous calculons et analysons la Borne de Cramér-Rao (BCR) déterministe dans le cas d’une source située en champ proche. Notre approche comporte deux avantages : (1) le coût calculatoire de la BCR déterministe, pour un grand nombre d’observations, sous forme matricielle peut être très coûteux, ce qui n’est pas le cas de nos expressions non-matricielles et (2) des informations pertinentes concernant les performances du système peuvent être facilement déduites.

**Abstract** – Near-field source localization problem by a passive antenna array makes the assumption that the time-varying sources are located near the antenna. In this situation, the far-field assumption (planar wavefront) is no longer valid and we have to consider a more complicated model parameterized by the bearing and by the distance, named range, between the source and a reference sensor. We can find a plethora of estimation schemes in the literature but the ultimate performance has not been fully investigated. In this paper, we derive and analyze the Cramér-Rao Bound (CRB) for a single time-varying source. In this case, we obtain nonmatrix closed-form expressions. Our approach has two advantages: (i) the computational cost for a large number of snapshots of a matrix-based BCR can be high while our approach is cheap and (ii) thanks to our nonmatrix expressions we are able to deduce useful informations improving the estimation.

## 1 Introduction

La localisation passive de sources à l’aide d’une antenne de capteurs est un sujet d’une importance croissante avec plusieurs applications à la clef ; radar, sismologie, télécommunication, etc. Lors d’une localisation de sources à l’aide d’un réseau de capteurs passifs, on fait généralement l’hypothèse simplificatrice de sources situées loin de l’antenne [1]. De ce fait, on peut faire l’hypothèse que les fronts d’ondes sont plans. Cependant, dans le cas de sources proches de l’antenne, les fronts d’ondes ne sont plus plans et il faut prendre en compte un modèle d’observation paramétré, non seulement par l’azimut et l’élévation de chaque source, mais aussi par la distance entre les sources et un référentiel vis-à-vis de l’antenne. Bien qu’une pléthore de méthodes d’estimation concernant ces paramètres soit disponible dans la littérature [2], [3], les performances ultimes de tels estimateurs n’ont pas tout à fait été traités en détails. La Borne de Cramér-Rao (BCR) est un outil mathématique très utilisé pour caractériser de telles performances. Dans cet article<sup>1</sup>, nous calculons et analysons la BCR déterministe dans le cas d’une source située en champ proche. Dans cette situation, le nombre de paramètres inconnus augmente avec le nombre d’observations. Cela signifie que l’estimateur du maximum de vraisemblance n’est pas efficace pour un grand nombre d’observations [4]. Cependant, il le sera pour un grand Rapport Signal sur Bruit (RSB) et un nombre d’observations fixé

[5]. Par conséquent, l’inversion numérique de la Matrice d’Information de Fisher (MIF) est difficile. C’est pourquoi, nous proposons des expressions analytiques non-matricielles de la BCR. La BCR stochastique (c’est-à-dire, lorsque les sources sont supposées issues d’un processus aléatoire gaussien) pour des problèmes de localisation en champ proche a déjà fait l’objet de quelques recherches (voir par exemple [3], [2], [6], [7]). Mais, à notre connaissance, aucun résultat concernant la BCR pour des sources déterministes, mais inconnues, n’est disponible dans la littérature. Notre approche comporte deux avantages : (1) le coût calculatoire de la BCR déterministe, pour un grand nombre d’observations, sous forme matricielle peut être très coûteux, ce qui n’est pas le cas de nos expressions non-matricielles et (2) des informations pertinentes concernant les performances du système peuvent être facilement déduites ce qui n’est généralement pas le cas avec des expressions matricielles. En particulier, nous montrons que l’estimation de la distance est améliorée plus la source est proche de l’antenne et/ou plus la fréquence porteuse est grande.

## 2 Modèle

Considérons une antenne linéaire uniforme composée de  $N$  capteurs avec une distance inter-capteurs notée  $d$ . L’antenne reçoit un signal émis par une source, supposée à bande étroite, située dans le champ proche de l’antenne. Par conséquent, le modèle d’observation au niveau de l’antenne s’écrit comme

<sup>1</sup>. Ces travaux sont financés par la région Île de France et le groupe de recherche Digiteo.

suit:  $x_n(t) = s(t)e^{j\tau_n} + v_n(t)$ , avec  $t = 1, \dots, T$  et  $n = 0, \dots, N - 1$  où,  $T$  est le nombre d'observations et  $x_n(t)$  représente le signal observé à la sortie du  $(n + 1)^{\text{ème}}$  capteur.  $s(t) = \alpha(t)e^{j(2\pi f_0 t + \psi(t))}$  représente le signal émis [8] à une fréquence porteuse  $f_0$  où  $\alpha(t)$ ,  $\psi(t)$ , représentent, respectivement, l'amplitude et la phase du signal source. Le processus aléatoire  $v_n(t)$  est un bruit additif. Le retard temporel,  $\tau_n$ , qui représente le temps de propagation du signal de la source au  $(n + 1)^{\text{ème}}$  capteur est donné par [3]

$$\tau_n = \frac{2\pi r}{\lambda} \left( \sqrt{1 + \frac{n^2 d^2}{r^2} - \frac{2nd \sin \theta}{r}} - 1 \right), \quad (1)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $r$  et  $\theta$  représentent, respectivement, la distance et l'azimut de la source. Si cette distance appartient à la région dite de Fresnel [9], c'est-à-dire si

$$0.62(d^3(N - 1)^3/\lambda)^{1/2} < r < 2d^2(N - 1)^2/\lambda, \quad (2)$$

alors le temps de propagation  $\tau_n$  peut être approximé par  $\tau_n = \omega n + \phi n^2 + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right)$  où le terme  $O(\beta)$ , qui regroupe les termes d'ordre supérieur ou égal à  $\beta$ , sera négligé par la suite.  $\omega$  et  $\phi$  sont généralement appelés angles électriques. Ces angles s'expriment en fonction des paramètres physiques du problème à l'aide des relations suivantes

$\omega = -2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)$  et  $\phi = \pi \frac{d^2}{\lambda r} \cos^2(\theta)$ . Par conséquent, le modèle d'observation peut s'écrire comme

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_N(t)]^T = \mathbf{a}(\omega, \phi) s(t) + \mathbf{v}(t), \quad (3)$$

où  $\mathbf{v}(t) = [v_1(t) \dots v_N(t)]^T$ , et où, le  $(n + 1)^{\text{ème}}$  élément du vecteur directionnel  $\mathbf{a}(\omega, \phi)$  est donné par  $[\mathbf{a}(\omega, \phi)]_{n+1} = e^{j(\omega n + \phi n^2)}$ .

Dans ce qui suit, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

- On admet que le bruit est un processus complexe circulaire blanc gaussien de moyenne nulle et de variance inconnue  $\sigma^2$ .
- On supposera également que le bruit est décorrélé temporellement et spatialement.
- Les vecteurs de paramètres inconnus sont  $\boldsymbol{\kappa} = [r \ \theta \ \psi^T \ \boldsymbol{\alpha}^T \ \sigma^2]^T$  ou  $\boldsymbol{\xi} = [\omega \ \phi \ \psi^T \ \boldsymbol{\alpha}^T \ \sigma^2]^T$  où  $\boldsymbol{\psi} = [\psi(1) \dots \psi(T)]^T$  et  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha(1) \dots \alpha(T)]^T$ . Selon la situation considérée,  $\omega$ ,  $\phi$  ou  $r$ ,  $\theta$  seront les paramètres d'intérêt. Tous ces paramètres sont supposés déterministes. Notons que, la taille de  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $\boldsymbol{\xi}$  dépend du nombre d'observations considérées.

La fonction de vraisemblance relative au vecteur d'observations  $\boldsymbol{\chi} = [\mathbf{x}^T(1) \dots \mathbf{x}^T(T)]^T$  pour un  $\boldsymbol{\xi}$  donné, s'écrit simplement comme :  $p(\boldsymbol{\chi} | \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi^{NT} \det(\mathbf{R})} e^{-(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu})^H \mathbf{R}^{-1} (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mu})}$ , où  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_{NT}$  et  $\boldsymbol{\mu} = [\mathbf{a}^T(\omega, \phi) s(1) \dots \mathbf{a}^T(\omega, \phi) s(T)]^T$ .

Dans la suite,  $[\boldsymbol{\xi}]_i$ ,  $\text{Re}\{u\}$ ,  $\text{tr}\{\mathbf{Z}\}$ ,  $\odot$  et  $\text{diag}(\cdot)$  représentent, respectivement, le  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur  $\boldsymbol{\xi}$ , la partie réelle de  $u$ , la trace de la matrice  $\mathbf{Z}$ , le produit de Hadamard et l'opérateur diagonal.

### 3 Expression de la borne de Cramér-Rao

Le principe d'inégalité de covariance, pour un estimateur non biaisé  $[\hat{\boldsymbol{\xi}}]_i$  d'un paramètre  $[\boldsymbol{\xi}]_i$  stipule que  $E \left\{ \left( [\hat{\boldsymbol{\xi}}]_i - [\boldsymbol{\xi}]_i \right)^2 \right\}$

$\geq \text{BCR}([\boldsymbol{\xi}]_i)$ , où  $\text{BCR}([\boldsymbol{\xi}]_i) = [\mathbf{MIF}^{-1}]_{i,i}$  [10]. Par conséquent, nous donnerons une inversion analytique de la Matrice d'Information de Fisher (MIF) qui nous conduira à des expressions non-matricielles compactes de la BCR. Enfin, après un changement de paramètres, nous obtiendrons des expressions (non-matricielles) de la BCR en fonction des paramètres physiques du problème qui sont la distance et l'azimut.

#### 3.1 Partitionnement de la matrice d'information de Fisher

Dans le cadre d'un modèle d'observation gaussien, l'élément  $i, j$  de la MIF correspond au vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\xi}$  s'écrit [4]

$$\begin{aligned} [\mathbf{MIF}]_{i,j} &= \\ & \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_j} \right\} + 2 \text{Re} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^H}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_j} \right\} \\ &= \frac{NT}{\sigma^4} \frac{\partial \sigma^2}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_i} \frac{\partial \sigma^2}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_j} + \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^H}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_i} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_j} \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

La MIF peut être partitionnée en une matrice bloc diagonal comme suit

$$\mathbf{FIM} = \begin{bmatrix} f_{\omega, \omega} & f_{\omega, \phi} & \mathbf{f}_{\omega, \psi} & \mathbf{0}_{1 \times T} & 0 \\ f_{\phi, \omega} & f_{\phi, \phi} & \mathbf{f}_{\phi, \psi} & \mathbf{0}_{1 \times T} & 0 \\ \mathbf{f}_{\psi, \omega} & \mathbf{f}_{\psi, \phi} & \mathbf{F}_{\psi, \psi} & \mathbf{0}_{T \times T} & \mathbf{0}_{T \times 1} \\ \mathbf{0}_{T \times 1} & \mathbf{0}_{T \times 1} & \mathbf{0}_{T \times T} & \frac{2N}{\sigma^2} \mathbf{I}_T & \mathbf{0}_{T \times 1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times T} & \mathbf{0}_{1 \times T} & \frac{NT}{\sigma^4} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

où

$$f_{\omega, \omega} = \text{RSB} \frac{N(N-1)(2N-1)}{3}, \quad (6)$$

$$f_{\phi, \phi} = \text{RSB} \frac{N(N-1)(2N-1)(3N^2 - 3N - 1)}{15}, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_{\psi, \psi} = \frac{2N}{\sigma^2} \text{diag}(\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\alpha}), \quad (8)$$

$$f_{\omega, \phi} = f_{\phi, \omega} = \text{RSB} \frac{N^2(N-1)^2}{2}, \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_{\psi, \omega}^T = \mathbf{f}_{\omega, \psi} = \frac{2}{\sigma^2} N(N-1) (\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\alpha}), \quad (10)$$

$$\mathbf{f}_{\psi, \phi}^T = \mathbf{f}_{\phi, \psi} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{N(N-1)(2N-1)}{3} (\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{\alpha}), \quad (11)$$

où  $\text{RSB} = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2/\sigma^2$ . Notons que, grâce à la diversité temporelle de la source,  $\mathbf{F}_{\alpha, \psi}$  et  $\mathbf{F}_{\psi, \alpha}$  sont des matrices nulles. Nous remarquons aussi, la propriété bien connue, que la variance du bruit est bien découplée par rapport aux autres paramètres. Les termes nuls restant sont la conséquence de l'application de la partie réelle dans (5) aux termes purement imaginaires.

#### 3.2 Inversion analytique

L'inversion de la MIF, dont la taille est  $(2T + 3) \times (2T + 3)$ , est une opération très coûteuse lorsque  $T$  devient grand. C'est l'une des raisons pour laquelle nous en donnerons l'inversion analytique. En utilisant une partition appropriée de la MIF (5) et après le calcul explicite de l'inverse du complément de Schur de  $\mathbf{F}_{\psi, \psi}$  [11], nous obtenons les expressions non-matricielles de la BCR relative à  $\boldsymbol{\xi}$  associée au modèle (3) notée  $\text{BCR}(\boldsymbol{\xi})$

où :

$$\begin{aligned} \text{BCR}(\omega) &= \frac{6(2N-1)(8N-11)}{\text{RSB}(N^2-1)N(N^2-4)}, \\ \text{BCR}(\phi) &= \frac{90}{\text{RSB}(N^2-1)N(N^2-4)}, \\ \text{BCR}(\psi(t)) &= \frac{8N^2-12N+4+\|\alpha\|^2(N^3+3N^2+2N)}{\text{RSB}\alpha(t)^2N^2(N+1)(N+2)}, \\ \text{BCR}(\alpha(t)) &= \frac{\sigma^2}{2N}, \\ \text{BCR}(\sigma^2) &= \frac{\sigma^4}{NT}. \end{aligned}$$

Et les termes croisés sont donnés par  $[\text{BCR}(\xi)]_{1,2} = [\text{BCR}(\xi)]_{2,1} = -\frac{90}{\text{RSB}N(N^2-4)(N+1)}$ .

### 3.3 Changement de vecteur de paramètres

Même si le modèle (3) est fréquemment utilisé dans le traitement d'antenne, sa BCR par rapport à  $\xi$  ne nous apporte aucune information concernant les paramètres physiques réels du problème. De ce fait, il est intéressant d'analyser la BCR par rapport à la distance et à l'azimut. Ayant  $\text{BCR}(\xi)$ , nous pouvons facilement obtenir  $\text{BCR}(\kappa)$  en utilisant la propriété suivante (cf [12] p. 45)

$$\text{BCR}(\kappa) = \frac{\partial \mathbf{g}(\xi)}{\partial \xi^T} \text{BCR}(\xi) \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\xi)}{\partial \xi^T} \right)^T, \quad (12)$$

où  $\kappa = \mathbf{g}(\xi) = [-\arcsin(\frac{\omega\lambda}{2\pi d}) \quad \frac{\pi d^2}{\lambda\phi} \cos^2(\arcsin(\frac{\omega\lambda}{2\pi d})) \quad \psi^T \alpha^T \sigma^2]^T$ , et où la matrice Jacobienne est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\xi)}{\partial \xi^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\xi)}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g_2(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial g_2(\xi)}{\partial \xi_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

où

$$\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial \xi_1} = -\frac{\lambda}{2\pi d \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \pi^2 d^4}{\lambda^2}}}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial g_2(\xi)}{\partial \xi_1} = -\frac{\lambda\omega}{2\pi\phi} \cos\left(\arcsin\left(\frac{\lambda\omega}{2\pi d}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda\omega}{2\pi d}\right)^2}}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial g_2(\xi)}{\partial \xi_2} = -\frac{\pi d^2}{\lambda\phi^2} \cos^2\left(\arcsin\left(\frac{\lambda\omega}{2\pi d}\right)\right). \quad (16)$$

En utilisant (12), l'expression de la matrice Jacobienne ci-dessus et après quelques efforts calculatoires nous obtenons

$$\text{BCR}(\theta) = \frac{3\lambda^2}{2\text{RSB}d^2\pi^2 \cos^2(\theta)} \frac{p_2(N)}{p_3(N)}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{BCR}(r) &= \frac{6r^2\lambda^2}{\text{RSB}\pi^2 d^4} \\ &\times \frac{15r^2 + 30drp_1(N) \sin(\theta) + d^2p_2(N) \sin^2(\theta)}{p_3(N) \cos^4(\theta)}, \quad (18) \end{aligned}$$

où  $p_1(N) = N-1$ ,  $p_2(N) = (8N-11)(2N-1)$  et  $p_3(N) = N(N^2-1)(N^2-4)$ .

Notons que,  $\text{BCR}(\psi)$ ,  $\text{BCR}(\alpha)$  et  $\text{BCR}(\sigma^2)$  restent inchangées. Et les termes croisés entre  $\theta$  et  $r$  s'expriment comme suit

$$[\text{BCR}(\kappa)]_{1,2} = [\text{BCR}(\kappa)]_{2,1} = -\frac{3\lambda^2 r}{\text{RSB}\pi^2 d^3} \frac{15rp_1(N) + dp_2(N) \sin(\theta)}{p_3(N) \cos^3(\theta)}.$$

## 4 Analyse de la BCR et illustrations numériques

Le but de cette section est de valider et d'analyser les expressions non-matricielles données précédemment. Pour les simulations, nous avons considéré une antenne de  $N = 5$  capteurs avec une distance inter-capteurs  $d = 0.125m$ . Le nombre d'observations est égal à  $T = 100$  et la source est bien située dans la région de Fresnel ( $r = 2.125m$ ). Dans Fig. 1 et Fig. 2, nous avons comparé les BCRs analytique, obtenue par (18) et (17), avec la BCR calculée par inversion numérique de la MIF. Pour différentes valeurs de la variance du bruit (à puissance signal fixée) et pour différentes valeurs de la fréquence porteuse  $f_0$  et de l'azimut  $\theta$ . La Fig. 1 et Fig. 2 valident bien nos expressions analytiques. De plus, à l'aide des expressions non-matricielles données à la section 3.3, nous notons que :

- Pour un grand nombre de capteurs et un espace inter-capteurs fixé,  $\text{BCR}(\theta)$  exprimée dans le champ proche tend vers  $\text{BCR}(\theta)$  en champ lointain, c'est-à-dire  $\frac{3\lambda^2}{\text{RSB}2d^2\pi^2 \cos^2(\theta)N^3}$  [4]. Ce qui correspond bien à l'intuition générale, car un grand nombre de capteurs et un espace inter-capteurs fixé implique une grande distance pour la source.
- Les BCRs sont invariantes par rapport à la phase,  $\psi(t)$ , du signal source. De plus, comme dans le cas du champ lointain, la  $\text{BCR}(\theta)$  ne dépend que de l'azimut selon  $O(1/\cos^2(\theta))$ . De ce fait, l'antenne linéaire uniforme en champ proche n'est pas une antenne isotrope [13].
- $\text{BCR}(r)$  dépend à la fois de l'azimut et de la distance. Pour  $\lambda$  et  $r \propto d$ , la dépendance par rapport à la distance est de  $O(r^2)$ . Ce qui signifie que les performances d'estimation s'améliorent quand la source se rapproche de l'antenne (dans la limite de la région de Fresnel).
- La dépendance de  $\text{BCR}(r)$  par rapport à l'azimut est en  $O(1/\cos^4(\theta))$ . Si  $\theta$  est proche de  $\pi/2$ ,  $\text{BCR}(r)$  tend vers l'infini et cette divergence est plus rapide que celle de  $\text{BCR}(\theta)$  qui est en  $O(1/\cos^2(\theta))$ .
- Pour un nombre suffisant de capteurs,  $\text{BCR}(\theta)$  et  $\text{BCR}(r)$  sont en  $O(1/N^3)$ .
- Pour un espace inter-capteurs fixé,  $\text{BCR}(r)$  est dépendante de la fréquence porteuse  $f_0$ . De plus, la Fig. 2 montre que, pour différentes valeurs de la variance du bruit, plus grand est la fréquence, plus bas est  $\text{BCR}(r)$  (voir Fig. 3).
- L'expression  $[\text{BCR}(\kappa)]_{1,2}$  montre que le couplage entre les paramètres physique est important, car il est du même ordre de grandeur que  $\text{BCR}(\theta)$  et  $\text{BCR}(r)$ , c'est à dire en  $O(1/N^3)$ .

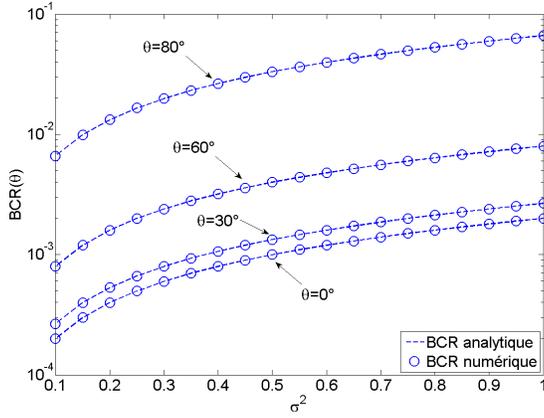


FIG. 1: La BCR( $\theta$ ) numérique et analytique en fonction de  $\sigma^2$  pour  $r = 2.125m$  et pour différentes valeurs de  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ .

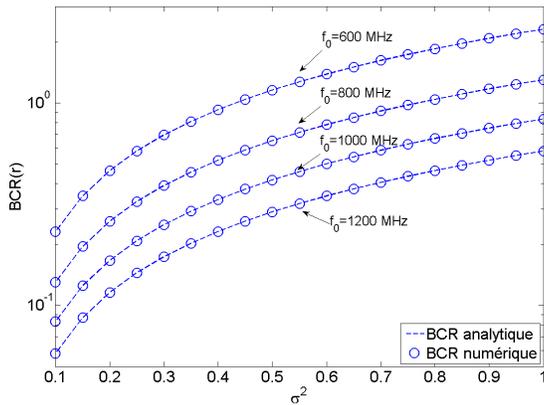


FIG. 2: BCR( $r$ ) numérique et analytique en fonction de  $\sigma^2$  pour  $(\theta, r) = (0^\circ, 2.125m)$  pour différentes valeurs de  $f_0 = 600, 800, 1000, 1200$ [MHz].

## 5 Conclusion

Dans cette contribution, nous présentons le calcul de la borne de Cramér-Rao déterministe relative au cas de la localisation de source en champ proche. Afin d'éviter l'inversion matricielle de la matrice d'information de Fisher, dont la taille croît avec le nombre d'observations, nous avons fourni des expressions analytiques non-matricielles. Tirant profit de ces expressions, nous avons analysé le comportement de la borne de Cramér-Rao. Ainsi, nous avons obtenu des informations pertinentes concernant les performances d'estimation des paramètres physiques d'intérêt (distance, azimut, amplitudes, phases). En particulier, nous montrons que l'estimation de la distance est d'autant plus améliorée que la source est proche de l'antenne et/ou que la fréquence porteuse est grande. Enfin, les expressions proposées ont été validées par des simulations numériques.

## Références

[1] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 13, no. 4, pp. 67–94, 1996.

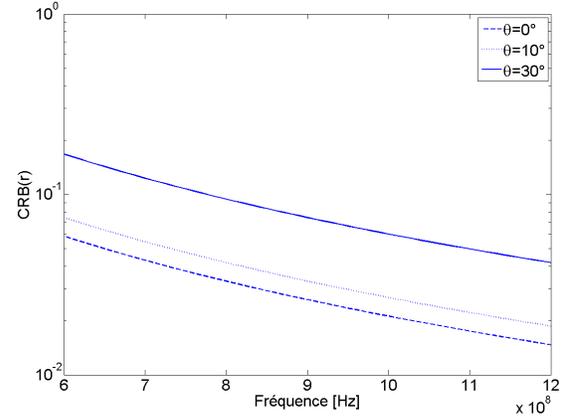


FIG. 3: BCR( $r$ ) en fonction de  $f_0$  pour  $\sigma^2 = 0.5$ ,  $r = 2.125m$  et différentes valeurs de  $\theta = 0^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ .

[2] A. J. Weiss and B. Friedlander, "Range and bearing estimation using polynomial rooting," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. 18, pp. 130–137, July 1993.

[3] E. Grosicki, K. Abed-Meraim, and Y. Hua, "A weighted linear prediction method for near-field source localization," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, pp. 3651–3660, 2005.

[4] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood and the Cramér Rao bound," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, pp. 720–741, May 1989.

[5] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal, "On the high SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 12, no. 54, pp. 4840–4843, Dec. 2006.

[6] J. P. Le Cadre, "Performance analysis of wavefront curvature methods for range estimation of a moving source," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 31, pp. 1082–1103, 1995.

[7] L. Kopp and D. Thubert, "Bornes de Cramér-Rao en traitement d'antenne. Partie 1: Formalisme," *Traitement du Signal*, vol. 3, no. 3, pp. 111–125, 1986.

[8] L. Godara, "Application of antenna arrays to mobile communications, Part ii: Beam-forming and direction-of-arrival considerations," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, pp. 1195–1245, Aug. 1997.

[9] W. Zhi and M. Chia, "Near-field source localization via symmetric subarrays," *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 14, no. 6, pp. 409–412, 2007.

[10] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*. New York: Princeton University, Press, 1946.

[11] Z. Fuzhen, *The Schur Complement and Its Applications. Series: Numerical Methods and Algorithms*. Springer, 2005, vol. 4.

[12] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. NJ: Prentice Hall, 1993, vol. 1.

[13] U. Baysal and R. L. Moses, "On the geometry of isotropic arrays," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, pp. 1469–1477, 2003.