



**HAL**  
open science

## Transformée en échelle de signaux stationnaires

Daniel Alpay, Mamadou Mboup

► **To cite this version:**

Daniel Alpay, Mamadou Mboup. Transformée en échelle de signaux stationnaires. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 2009, 347 (11-12), pp.603-608. 10.1016/j.crma.2009.03.030 . inria-00428985v2

**HAL Id: inria-00428985**

**<https://inria.hal.science/inria-00428985v2>**

Submitted on 30 Oct 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transformée en échelle de signaux stationnaires

Daniel Alpay\*<sup>a</sup>, Mamadou Mboup<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Department of mathematics*

*Ben Gurion University of the Negev, Israel*

<sup>b</sup>*UFR Mathématiques et Informatique - CRIP5*

*Université Paris Descartes*

*45, rue des Saints-Pères - 75270 Paris cedex 06*

*EPI ALIEN, INRIA*

Reçu le \*\*\*\*\*, accepté après révision le +++++

Présenté par Jean-Pierre Kahane

---

## Résumé

Utilisant la notion de transformée en échelle d'un signal à temps discret, nous définissons une nouvelle famille de systèmes linéaires. Nous considérons un cas particulier, lié à la théorie des fonctions dans le bidisque.

*Pour citer cet article : D. Alpay, M. Mboup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

## Abstract

### Scale transform of discrete stationary signals

Using the scale transform of a discrete time signal we define a new family of linear systems. We focus on a particular case related to function theory in the bidisk. *To cite this article: D. Alpay, M. Mboup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

---

## Abridged English version

A wide class of causal discrete time-invariant linear systems can be given in terms of convolution in the form

$$y_n = \sum_{m=0}^n h_{n-m} u_m, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

where  $(h_n)$  is the impulse response and where the input sequence  $(u_m)$  and output sequence  $(y_m)$  are requested to belong to some pre-assigned sequences spaces. The  $\mathcal{Z}$  transform of the sequence  $(h_n)$ , that is

---

\*Earl Katz Chair in Algebraic System Theory

*Email addresses: dany@cs.bgu.ac.il (Daniel Alpay\*), Mamadou.Mboup@mi.parisdescartes.fr (Mamadou Mboup).*

$\widehat{h}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n h_n$ , is called the *transfer function* of the system, and there are deep relationships between properties of  $\widehat{h}$  and of the system; see [1] for a survey. Analogs of systems of the form (1) when both  $h_n$  and  $u_n$  are Gaussian random variables, which belong to the white noise space, or more generally to the Kondratiev space (see [7] for the latter), have been studied recently in [3]. The pointwise product  $h_{m-n}u_m$  in (1) is then replaced by the Wick product (this allows in particular to have a Gaussian output). In view of equations (4) and (5) below, it is well to recall that the Wick product is a convolution when expressed in terms of the Hermite functions. See [7, Definition 2.4.1 p. 39] and [3]. Using the Hermite transform, one can define a generalized transfer function, which is a function analytic in  $\zeta$  and in a countable number of other variables (these variables take into account the randomness). In the present note we look at an extension of (1) in a different direction, and develop a new approach to discrete-time systems with a (multi) scale-invariant property. We use the results presented in [10]. Let  $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+)$  (that is, a continuous time signal), with Laplace transform  $F(s)$ ,  $\Re(s) \geq 0$ . For every  $\alpha = 1/\beta > 0$ , the Laplace transform of  $f(\beta t)$  is  $\sqrt{\alpha}F(\alpha s)$ . Therefore, time scaling has the same form in the frequency domain. This remark is the starting point to define the scaling operator for discrete signals. Begin with  $G_\theta(s) = \frac{e^{i\theta} - s}{e^{-i\theta} + s}$ ,  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ , which maps conformally the open right half-plane  $\mathbb{C}_+$  onto the open unit disk  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Then, the scale shift  $S_\alpha(s) = \alpha s$ ,  $\alpha > 0$  expresses in the unit disc as the hyperbolic transformation  $\gamma_{\{\alpha\}} = G_\theta \circ S_\alpha \circ G_\theta^{-1}$ . Conversely, for each hyperbolic transformation  $\gamma(z) = \frac{\gamma_1 z + \gamma_2}{\gamma_2 z + \gamma_1}$ , we may find  $\alpha_\gamma > 0$ ,  $\theta_\gamma$  and  $\xi_\gamma$  such that  $e^{i\xi_\gamma} \gamma(z) = (G_{\theta_\gamma} \circ S_{\alpha_\gamma} \circ G_{\theta_\gamma}^{-1})(e^{i\xi_\gamma} z)$ . Therefore, we define below the discrete-time frequency domain scale shift by the action of the (hyperbolic) group of automorphisms of  $\mathbb{D}$ . We denote this group by  $\Gamma_0$ . Let  $X(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \zeta^n$ , which we assume convergent in a neighborhood of the origin. The scale  $\alpha = \alpha_\gamma$  shift of the sequence  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  is the sequence  $\{x_n(\gamma)\}_{n \geq 0}$  defined by the equation

$$X_\gamma(\zeta) = \frac{1}{\bar{\gamma}_2 z + \bar{\gamma}_1} X(\gamma(\zeta)) = \sum_{n \geq 0} x_n(\gamma) \zeta^n. \quad (2)$$

It is useful to note that the operator  $\{x_n\}_{n \geq 0} \mapsto \{x_n(\gamma)\}_{n \geq 0}$ ,  $\gamma \in \Gamma_0$  is an isometry in  $\ell_2$  and it also makes sense for vector-valued signals. In particular,  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  may be a second order stochastic process. In this paper we focus on the case when one considers a cyclic subgroup of infinite order of  $\Gamma_0$ . Another case of interest is when one considers a Fuchsian group of Widom type. This case is related to self-similar systems, and will be discussed in a separate publication.

## 1. Signaux et systèmes temps-échelle

Étant donné un signal discret  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , ses transformées en échelles  $\gamma \in \Gamma_0$  définissent un signal bidimensionnel  $\{x_n(\gamma)\}_{n \geq 0, \gamma \in \Gamma}$ . Dans la suite, nous considérons le sous groupe cyclique  $\Gamma$  de  $\Gamma_0$ , engendré par  $\gamma_0$ . Soit  $\widehat{\Gamma}$  le groupe dual de  $\Gamma$  *i.e.* le groupe des caractères unimodulaires de  $\Gamma$  et  $d\mu$  sa mesure de Haar. On rappelle qu'un caractère de  $\Gamma$  est une application  $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  satisfaisant :

$$\sigma(\gamma \circ \varphi) = \sigma(\gamma)\sigma(\varphi), \quad \forall \gamma, \varphi \in \Gamma.$$

Pour un  $n$  fixé, notons  $\{x(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  le signal correspondant, défini sur  $\Gamma$ . Si  $\{x(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \in \ell_1$ , alors sa transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{x}(\sigma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma) \sigma(\gamma)^*, \quad \sigma \in \widehat{\Gamma},$$

dont l'inverse est (voir par exemple [6])

$$x(\gamma) = \int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{x}(\sigma) \sigma(\gamma) d\mu(\sigma).$$

On interprète cette transformée de Fourier en termes de spectre du signal  $\{x(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ . Comme pour le filtrage temporel, on définit le filtrage sur  $\Gamma$ , dans le domaine fréquentiel par la multiplication par une transformée de Fourier  $\widehat{h}(\sigma) : \widehat{y}(\sigma) = \widehat{h}(\sigma)\widehat{x}(\sigma)$ . Ceci correspond dans le domaine des échelles,  $\Gamma$ , au produit de convolution :

$$y(\gamma) = \sum_{\varphi \in \Gamma} h(\varphi)x(\gamma \circ \varphi^{-1}) = (h \star x)(\gamma). \quad (3)$$

Les systèmes que nous considérons sont définis par une double convolution :

$$y_n = \sum_{m=0}^n h_{n-m} \star x_m, \quad (4)$$

c'est-à-dire,

$$y_n(\gamma) = \sum_{m=0}^n \left( \sum_{\varphi \in \Gamma} h_{n-m}(\gamma \circ \varphi^{-1})x_m(\varphi) \right). \quad (5)$$

La première convolution prend en compte l'invariance dans le temps, tandis que la seconde prend en compte l'échelle. Un phénomène analogue apparaît dans [3].

En prenant la transformée en  $\mathcal{Z}$  par rapport au temps et la transformée de Fourier par rapport aux échelles, nous obtenons

$$Y(\zeta, \sigma) = H(\zeta, \sigma)X(\zeta, \sigma) \quad (6)$$

où  $H(\zeta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \widehat{h}_n(\sigma)$ .

## 2. Lien avec le problème des moments trigonométriques

Dans cette section nous associons à la fonction  $H(\zeta, \sigma)$  ci-dessus une fonction analytique dans le bidisque. Puisque  $\Gamma$  est cyclique, chaque élément est de la forme

$$\gamma = \gamma_0^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \text{avec } \gamma_0^m \triangleq \underbrace{\tilde{\gamma}_0 \circ \dots \circ \tilde{\gamma}_0}_{m \text{ fois}} \quad \text{où } \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 \text{ si } m \geq 0 \text{ et } \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0^{-1} \text{ si } m < 0.$$

**Theorem 2.1** *Il existe une mesure positive finie  $d\nu(\theta)$  sur  $[0, 2\pi)$  telle que*

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0^m) d\mu(\sigma) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\nu(\theta), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

**Preuve :** Soit  $t_m = \int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0^m)^* d\mu(\sigma)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $|\sigma(\gamma_0)| = 1$  pour tout  $\sigma \in \widehat{\Gamma}$  nous avons

$$t_{\ell-m} = \int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0^\ell)^* (\sigma(\gamma_0^m)) d\mu(\sigma) = \langle \sigma(\gamma_0^m), \sigma(\gamma_0^\ell) \rangle_{\mathbf{L}_2(d\mu)}.$$

Les matrices de Toeplitz

$$T_N = (t_{\ell-m})_{\ell, m=0, \dots, N}, \quad N = 0, 1, \dots$$

sont toutes non négatives. Le théorème des moments trigonométriques (voir par exemple [8, Theorem 2.7 p. 66]) implique qu'il existe une mesure positive unique  $d\nu$  telle que

$$t_m = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\nu(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

et nous obtenons (7).  $\square$

Par analogie avec le cas de l'espace du bruit blanc (voir [4], [7], [9]), nous appellerons *transformation de Hermite* l'application linéaire

$$\mathbf{I}(\sigma(\gamma_0^m)) = z^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

de  $\mathbf{L}_2(d\mu)$  dans  $\mathbf{L}_2(d\nu)$ . Cette application est une isométrie en vertu de (7), et elle vérifie

$$\mathbf{I}(\widehat{x}\widehat{y}) = \mathbf{I}(\widehat{x})\mathbf{I}(\widehat{y})$$

pour  $\widehat{x}$  et  $\widehat{y}$  dans  $\mathbf{L}_1(d\mu)$ . Grâce à cette application, nous introduisons la définition :

**Définition 2.1** *La fonction*

$$\mathcal{H}(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbf{I}(\widehat{h}_n)(z) \quad (10)$$

est appelée *fonction de transfert du système* (4).

Des théorèmes de stabilité pour le système peuvent être donnés en termes de cette fonction : voir la section 3. Un cas important est lorsque  $\mathcal{H}$  est rationnelle par rapport à la variable  $\zeta$ .

### 3. Théorèmes de stabilité

Soit  $\mathbf{H}_2(d\mu)$  la fermeture dans  $\mathbf{L}_2(d\mu)$  des fonctions  $\sigma(\gamma_0^n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Un signal causal est par définition une suite  $(u_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,

$$\widehat{u}_n \in \mathbf{H}_2(d\mu), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le fait de se restreindre à  $n \geq 0$  correspond au *zooming*. Le phénomène de dilatation serait traduit par les  $n < 0$ .

Le système (4) est BIBO (*bounded input bounded output*) si il existe un nombre  $M > 0$  tel que,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\widehat{y}_n\|_{\mathbf{L}_2(d\mu)} \leq M \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\widehat{u}_n\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}$$

pour tous les signaux  $(u_n)$  tels que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\widehat{u}_n\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)} < \infty$ . Il est *dissipatif* si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{y}_n\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{u}_n\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}^2.$$

pour tous les signaux causaux  $(x_n)$  tels que le membre de droite de cette inégalité est fini. Le système sera appelé  $\ell_1 - \ell_2$  borné si il existe  $M > 0$  tel que

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{y}_n\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}^2 \right)^{1/2} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{u}_n\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}.$$

Ces définitions se réduisent aux définitions classiques (voir [5]) lorsque  $\Gamma$  est trivial. Nous présentons maintenant la caractérisation de ces systèmes.

Soit  $h \in \mathbf{H}_2(d\mu)$ . Nous définissons l'opérateur de multiplication

$$T_h : x \mapsto h \star x.$$

Supposons  $T_h$  continu. Utilisant la transformation de Hermite, nous voyons que  $T_h$  est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par  $\mathbf{I}(h)$  dans l'espace  $\mathbf{L}_2(d\nu)$ .

**Théorème 3.1** *Il existe  $M < \infty$  tel que*

$$\sup_n \|y_n\|_{\mathbf{L}_2(d\mu)} \leq M \sup_n \|x_n\|_{\mathbf{L}_2(d\mu)} \quad (11)$$

*si et seulement si les opérateurs  $T_{h_n}$  sont continu et la condition suivante est remplie : pour tout  $v \in \mathbf{H}_2(d\mu)$  tel que  $\|v\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)} \leq 1$ ,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_{h_n}^* v\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)} \leq M. \quad (12)$$

Nous remarquons que la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_{h_n}\| \leq M.$$

implique (12).

Supposons que  $\mathbf{H}_2(d\nu) \subsetneq \mathbf{L}_2(d\nu)$ . L'espace  $\mathbf{H}_2(d\nu)$  est alors un espace à noyau reproduisant, dont le noyau peut être calculé utilisant les méthodes de [2]. Nous désignons ce noyau reproduisant par  $K_\nu(z, w)$

**Théorème 3.2** *Le système (4) est dissipatif si et seulement si la fonction  $\mathcal{H}(\zeta, z)$  est telle que le noyau*

$$\frac{1 - \mathcal{H}(\zeta, z)\mathcal{H}(\eta, w)}{1 - \zeta\eta^*} K_\nu(z, w)$$

*est positif dans le bidisque.*

**Théorème 3.3** *Le système (4) est  $\ell_1$ - $\ell_2$  borné si et seulement si la fonction  $\mathcal{H}(\zeta, z)$  est telle que le noyau*

$$\frac{K_\nu(z, w)}{1 - \zeta\eta^*} - \mathcal{H}(\zeta, z)\mathcal{H}(\eta, w)$$

*est positif dans le bidisque.*

Ces théorèmes sont démontrés de manière analogue aux théorèmes dans [3]. Nous terminons cette section par deux remarques. Nous notons que l'espace à noyau reproduisant de noyau  $\frac{K_\nu(z, w)}{1 - \zeta\eta^*}$  est le produit tensoriel  $\mathbf{H}_2(d\nu) \otimes \mathbf{H}_2(\mathbb{D})$  (où  $\mathbf{H}_2(\mathbb{D})$  dénote l'espace de Hardy du disque d'ordre 2). Définissons

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Rappelons que le noyau

$$\frac{\varphi(z) + \varphi(w)^*}{1 - zw^*}$$

est positif dans le disque unité; soit  $\mathcal{L}_+(\varphi)$  l'espace à noyau reproduisant associé. L'application qui à  $f \in \mathbf{H}_2(d\nu)$  associe la fonction

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})d\nu(\theta)}{e^{i\theta} - z}$$

est unitaire de l'espace  $\mathbf{H}_2(d\nu)$  sur  $\mathcal{L}_+(\varphi)$ . Ce dernier espace a été introduit par de Branges. Voir [1] et [2] pour plus de détails.

#### 4. Le cas du polydisque

Dans cette section nous considérons le cas plus général où  $\Gamma$  possède un nombre fini de générateurs, que nous dénoterons par  $\gamma_0, \dots, \gamma_p$ . Il existe une mesure  $d\nu$  positive sur  $\mathbb{T}^{p+1}$  telle que

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0)^{n_0} \dots \sigma(\gamma_p)^{n_p} d\mu(\sigma) = \int_{\mathbb{T}^{p+1}} e^{i\theta_1 n_1} \dots e^{i\theta_p n_p} d\nu(\theta_1, \dots, \theta_p), \quad n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

La preuve de ce résultat nous a été communiquée par M. Putinar, et est comme suit : utilisant les notations (avec  $m = (m_0, \dots, m_p)$  et  $n = (n_0, \dots, n_p)$  dans  $\mathbb{N}^{p+1}$ ),

$$z^m = z_0^{m_0} \dots z_p^{m_p} \quad \text{et} \quad z^{*n} = (z_0^*)^{n_0} \dots (z_p^*)^{n_p},$$

on définit une forme linéaire  $L$  par

$$L(z^m z^{*n}) = \int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0)^{m_0 - n_0} \dots \sigma(\gamma_p)^{m_p - n_p} d\mu(\sigma),$$

et on montre que pour tout polynôme  $p(z, z^*)$ ,

$$L(|p(z, z^*)|^2) \geq 0, \quad \text{et} \quad L((1 - |z_j|^2)p(z, z^*)) = 0 \quad j = 0, \dots, p.$$

Voir [11]. La transformée de Hermite est maintenant une fonction de  $p + 1$  variables complexes  $z_1, \dots, z_p$ , et on peut énoncer des théorèmes de stabilité analogues à ceux de la section 3.

Remerciements : Nous remercions Mihai Putinar pour la preuve de l'existence de la mesure  $d\nu$  dans (13).

## Références

- [1] D. Alpay. *Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes*, volume 6 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- [2] D Alpay and H. Dym. Hilbert spaces of analytic functions, inverse scattering and operator models, I, *Integral Equations and Operator Theory* 7 : 589-641 (1984).
- [3] D. Alpay and D. Levanony. Linear stochastic systems : a white noise approach. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2009.
- [4] F. Biagini, B. Øksendal, A. Sulem, and N. Wallner. An introduction to white-noise theory and Malliavin calculus for fractional Brownian motion, stochastic analysis with applications to mathematical finance. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460(2041) :347–372, 2004.
- [5] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [6] E. Hewitt and K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, vol. I/II, Springer, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1963/1970.
- [7] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, and T. Zhang. *Stochastic partial differential equations*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [8] M.G. Kreĭn and A.A. Nudelman. *The Markov moment problem and extremal problems*, volume 50 of *Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.
- [9] Hui-Hsiung Kuo. *White noise distribution theory*. Probability and Stochastics Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [10] M. Mboup. A character-automorphic Hardy spaces approach to discrete-time scale-invariant systems. In *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24-28, 2006*, pages 183–188, 2006.
- [11] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana Univ. Math. Journal*, 42 : 969-984 (1993)