



**HAL**  
open science

# Construction et analyse mathématique d'un modèle approché pour la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau mince parcouru par un fluide en écoulement.

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Marc Duruflé, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Marc Duruflé, Patrick Joly. Construction et analyse mathématique d'un modèle approché pour la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau mince parcouru par un fluide en écoulement.. [Rapport de recherche] RR-6363, INRIA. 2007. inria-00189320v2

**HAL Id: inria-00189320**

**<https://inria.hal.science/inria-00189320v2>**

Submitted on 21 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Construction et analyse mathématique d'un modèle  
approché pour la propagation d'ondes acoustiques  
dans un tuyau mince parcouru par un fluide en  
écoulement.***

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia — Marc Duruflé — Patrick Joly

N° ????

Novembre 2007

Thème NUM



***R***  
***apport  
de recherche***



## Construction et analyse mathématique d'un modèle approché pour la propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau mince parcouru par un fluide en écoulement.

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia <sup>\*</sup>, Marc Duruflé <sup>\*</sup>, Patrick Joly <sup>\*</sup>

Thème NUM — Systèmes numériques  
Projets Poems

Rapport de recherche n° ???? — Novembre 2007 — 46 pages

**Abstract:** Dans ce travail, nous établissons formellement un modèle asymptotique basse fréquence pour la propagation du son dans un tube mince parcouru par un fluide en écoulement stationnaire. On aboutit à une équation différentielle (de type hyperbolique) par rapport à la variable longitudinale et non local en la variable transverse. Nous menons une analyse mathématique complète du problème d'évolution correspondant. Nous étudions en particulier l'influence du profil de la vitesse de l'écoulement sur le caractère bien posé de ce problème. Cette analyse est fondée sur l'analyse spectrale d'un opérateur borné non normal en dimension infinie. Un des débouchés potentiels de ce travail est l'obtention de résultats nouveaux sur les instabilités hydrodynamiques dans le cas des fluides compressibles.

**Key-words:** Analyse asymptotique, Instabilités hydrodynamiques, Théorie spectrale, Acoustique en écoulement, Problèmes d'évolution, Semi-groupes

<sup>\*</sup> Projet POEMS, UMR CNRS/ENSTA/INRIA 2706

# Construction and mathematical analysis of an approximate model for acoustic wave propagation in a thin duct containing a fluid with stationary flow.

**Résumé :** In this work, we derive formally a low frequency asymptotic model for the propagation of sound in a thin duct containing a fluid with stationary flow. We get an equation which is differential (of hyperbolic type) in the longitudinal variable and non local in the transverse one. We achieve a complete mathematical analysis of the corresponding evolution problem. We study in particular the influence of the flow velocity profile on the well-posedness on this problem. This is based on the spectral analysis of a bounded non normal operator in infinite dimension. One possible consequence of this work consist in obtaining new results about hydrodynamic instabilities in compressible fluids.

**Mots-clés :** Asymptotic analysis, Hydrodynamic instabilities, Spectral theory, Acoustics in flows, Evolution problems, Semi-groups

# 1 Introduction et position du problème

Le coeur de ce travail est relatif à l'analyse mathématique du problème d'évolution suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, y, t) : \mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 u \, dy = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]. \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $M \in L^\infty([-1, 1])$  et  $(u_0, u_1) \in H^1([-1, 1]; L^2(\mathbb{R})) \times L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$  sont donnés.

On s'intéresse plus précisément au caractère bien posé et à la stabilité  $L^2$  de ce problème, dont on cherche a priori la solution dans l'espace "naturel" (mais pas standard) de l'énergie finie:

$$u \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1]) \cap C^0(\mathbb{R}^+; L^2([-1, 1]; H^1(\mathbb{R}))). \quad (2)$$

L'analyse de Fourier permet de ramener cette étude à l'analyse d'un problème spectral en une dimension d'espace, en apparence élémentaire, en l'occurrence la théorie spectrale d'un opérateur non local  $A$  agissant sur des fonctions de la seule variable la variable  $y \in [-1, 1]$ . Derrière la simplicité apparente de ce problème se cachent en fait des résultats assez surprenants. Nous allons voir que le caractère bien posé du problème (1) est très fortement lié à la structure de la fonction  $M(y)$  que nous appellerons "profil" par la suite.

Le plan de la suite de ce rapport est le suivant. La section 2 décrit la motivation de ce travail et explique d'où vient le modèle mathématique. Il est lié à un problème d'aéroacoustique: on s'intéresse à la propagation d'ondes acoustiques 2D dans un conduit de petite épaisseur parcouru par un fluide en écoulement laminaire (ou cisaillé): la fonction  $M$  décrit (en coordonnées normalisées) les variations latérales de la vitesse de l'écoulement (voir figure 1. Le modèle est obtenu par une analyse asymptotique formelle par rapport à l'épaisseur  $\varepsilon$  du conduit de la solution du problème physique, décrite par les équations d'Euler linéarisées [2] ou encore - de façon complètement équivalente - par les équations de Galbrun [4, 8, 1]. Bien entendu, ce modèle approché peut aussi être vu comme un modèle basse fréquence pour le problème original et notre travail est ainsi "naturellement" relié aux études classiques sur les instabilités hydrodynamiques [2]. Le

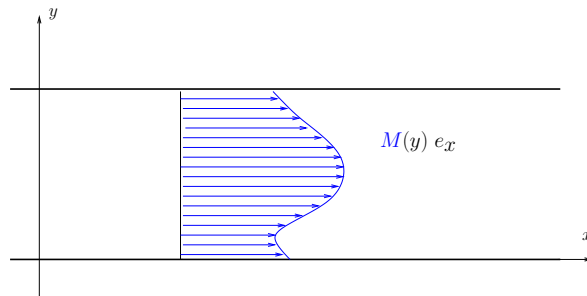


Figure 1: Le profil de l'écoulement

court paragraphe 3 montre comment l'analyse de se ramène à l'étude du spectre de l'opérateur  $A$  évoqué plus haut. Cet opérateur est non normal et le caractère bien posé est en particulier lié à l'existence d'éventuelles valeurs propres non réelles de  $A$ . Le rôle de la théorie spectrale dans l'étude de la stabilité des problèmes d'évolution - et particulièrement dans le cas d'opérateurs non

normaux - a été déjà largement étudié et mis en évidence [12], notamment en hydrodynamique.

Le reste du travail est précisément consacré à l'étude du spectre de l'opérateur  $A$ . Les propriétés générales de  $A$  et la structure générale de son spectre sont établies dans la section 4. Il en ressort que le caractère bien posé de (1) est en particulier lié à l'existence d'éventuelles valeurs propres non réelles de  $A$ . Les chapitres 5 et 6 contiennent les contributions essentielles de ce travail. Ils étudient en détail l'influence du profil de l'écoulement  $M(y)$  sur le caractère bien posé de (1) dans deux cas particuliers: le cas où le profil  $M(y)$  est antisymétrique (c'est le cas le plus riche en résultats divers - voir section 5) et le cas où le profil  $M(y)$  est symétrique à convexité fixe. Le dernier paragraphe 7 vise à illustrer numériquement les résultats théoriques et à mettre en lumière les difficultés de l'approximation numérique du problème (1).

## 2 Motivation : un modèle approché en aéroacoustique.

Nous nous plaçons en deux dimensions d'espace, dans un conduit de petite épaisseur  $2\varepsilon > 0$ :

$$\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times ]-\varepsilon, \varepsilon[. \quad (3)$$

Nous désignons par  $(x, \mathbf{y})$  le point courant de  $\Omega_\varepsilon$ . Nous supposons ce conduit parcouru par un écoulement stationnaire laminaire parallèle à la direction  $x$  et caractérisé par son profil de Mach ( $M_\varepsilon(\mathbf{y})$  est la valeur de la vitesse de l'écoulement à l'abscisse  $\mathbf{y}$ ) donné par

$$\forall \mathbf{y} \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad M_\varepsilon(\mathbf{y}) = M\left(\frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) \quad (4)$$

où  $M(y)$ ,  $y \in ]-1, 1[$  est un profil d'écoulement donné. Pour modéliser la propagation d'une onde acoustique, on peut par exemple utiliser le modèle de Galbrun dont les inconnues ( $\mathbf{u}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t)$ ,  $\mathbf{v}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t)$ ) sont les deux composantes du déplacement Lagrangien. Nous renvoyons par exemple le lecteur à [4] pour plus de détails. Les équations du modèle sont

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{u}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, & (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{v}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, & (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0, \end{cases} \quad (5)$$

complété par les conditions de non glissement sur les parois  $\mathbf{y} = \pm \varepsilon$ :

$$\mathbf{v}_\varepsilon(x, \pm \varepsilon, t) = 0, \quad (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (6)$$

L'idée est que, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, le phénomène physique va être de plus en plus monodimensionnel et devrait pouvoir être décrit par une équation 1D comme c'est le cas avec l'équation des télégraphistes (l'équation des ondes 1D) en absence d'écoulement.

Pour déterminer formellement ce modèle approché, on effectue d'abord un changement d'échelle en  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{y} = \varepsilon y$ ) de façon à se ramener à un domaine géométrique fixe. Nous posons:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = u_\varepsilon(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t) & (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0, \\ \mathbf{v}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = v_\varepsilon(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t) & (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Les équations en  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t > 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 v_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t > 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$v_\varepsilon(x, \pm 1, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (9)$$

Nous allons postuler dans un développement formel de la forme:

$$\begin{cases} u_\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots, \\ u_\varepsilon = v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \dots, \end{cases} \quad (10)$$

et chercher à identifier le modèle satisfait par le couple "limite"  $(u^0, v^0)$ . Pour cela nous procédons en trois étapes :

(i) Le terme en  $\varepsilon^{-2}$  de la seconde équation de (8) nous donne:

$$\frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} = 0,$$

ce qui, compte tenu des conditions aux limites  $v^0(x, \pm 1, t) = 0$  entraîne:

$$v^0(x, y, t) = 0.$$

(ii) Le terme en  $\varepsilon^{-1}$  de la seconde équation de (8) nous donne:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) = 0,$$

Il existe donc une "constante en  $y$ ", notée  $c(x, t)$ , telle que:

$$\left( \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} \right)(x, y, t) = c(x, t).$$

En intégrant en  $y$  et en utilisant  $v^1(x, \pm 1, t) = 0$ , on identifie la fonction  $c(x, t)$ :

$$c(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial u^0}{\partial x}(x, \xi, t) d\xi$$

(iii) Le terme en  $\varepsilon^0$  de la première équation de (8) donne:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u^0 - \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

En remplaçant  $c$  par sa valeur, il vient:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u^0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 u^0 dy = 0, \quad (11)$$

autrement dit,  $u^0$  satisfait bien (1).

L'étude du caractère bien posé de (1) revêt donc une double importance:

1. Elle est bien sûr fondamentale pour déterminer dans quels cas ce modèle limite peut être utilisé et/ou justifié,
2. Cette étude est susceptible, via une analyse asymptotique, des informations sur la stabilité du problème (8).



Pour préciser ce dernier point, signalons que, dans les cas où (1) est mal posé, on peut s'attendre à ce qu'une analyse asymptotique "basse fréquence" permette d'établir des résultats d'instabilité (croissance exponentielle en temps de la solution du problème de Cauchy), pour le problème originel (5). Nous renvoyons une telle étude à un prochain travail. De ce dernier point de vue, l'étude qui va suivre peut être vue dans le même esprit que l'étude des instabilités hydrodynamiques dans les écoulements stratifiés, telle qu'elle est présentée par exemple dans [2]. A noter toutefois, que la plupart des résultats connus dans ce domaine concernent le plus souvent le cas incompressible (citons néanmoins [3, 5]) comme exception notoire).

A priori, quelques observations élémentaires de (1) incitent (naïvement) à l'optimisme:

- Lorsque  $M$  est constant, le problème (1) se résout facilement en remarquant que

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x, y, t) dy$$

est solution d'une simple équation des ondes convectée:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

On obtient alors pour chaque  $y$  la fonction  $(x, t) \rightarrow u(x, y, t)$  en résolvant l'équation de transport au carré avec second membre:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(\cdot, y, \cdot) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (13)$$

- En l'absence du terme de couplage

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 u dy,$$

le système apparaît comme une famille d'équation de transport au carré découplées.

Toutefois l'observation que le système global apparaît comme une perturbation (non locale) d'une famille d'équations de transport au carré, c'est à dire d'une famille de systèmes hyperboliques qui sont seulement faiblement hyperboliques, incite à la méfiance.

### 3 Réduction à un problème spectral

La méthode traditionnellement utilisée par les physiciens pour étudier les instabilités dans un modèle physique consiste à étudier les "modes normaux", c'est à dire les solutions de la forme

$$u(x, y, t) = u(y) \exp i(\omega t - kx), \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

avec  $u(y) \neq 0$ .

Dans l'analyse, le nombre d'onde  $k$  est donné et constitue un paramètre de l'étude, la fréquence  $\omega$  a priori complexe, étant l'inconnue. La stabilité du problème est alors reliée à l'éventuelle existence de solutions  $\omega$  à partie imaginaire négative. Lorsque l'on injecte (14) dans l'équation du modèle, on aboutit à l'équation:

$$-(\omega - Mk)^2 u + k^2 E u = 0 \quad (15)$$

où nous avons introduit l'opérateur de moyenne défini par

$$\forall u \in L^2([-1, 1]), \quad E u(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy \quad (16)$$

L'équation précédente peut être réécrite comme un problème de valeurs propres en posant tout d'abord  $\omega = k\lambda$ , ce qui mène à

$$-(\lambda - M)^2 u + E u = 0,$$

puis en introduisant  $v = (\lambda - M)u$  auquel cas on peut réécrire sous forme d'un système:

$$\begin{cases} M u + v = \lambda u \\ E u + M v = \lambda v \end{cases} \quad (17)$$

On est ainsi naturellement amené à introduire l'opérateur borné  $A$  de  $L^2([-1, 1])^2$  défini par:

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I \\ E & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (18)$$

auquel cas (17) se réécrit

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (19)$$

ce qui amène naturellement à s'intéresser au spectre de  $A$ .

Une façon équivalente, mais mathématiquement plus rigoureuse, de considérer le problème consiste à appliquer la transformation de Fourier en  $x$ :

$$u(x, y, t) \longrightarrow \hat{u}(k, y, t)$$

au problème d'évolution 1. Pour chaque  $k$ , la fonction  $\hat{u} : (y, t) \rightarrow \hat{u}(k, y, t)$  satisfait l'équation d'évolution:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + ik M(y) \right)^2 \hat{u} + k^2 E \hat{u} = 0$$

qu'on peut transformer sous la forme d'un système du premier ordre en temps en introduisant:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -ik \hat{u} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + ik M(y) \hat{u} \end{pmatrix}$$

auquel cas on vérifie aisément que, pour chaque  $k$ , la fonction  $t \rightarrow \hat{U}(k, \cdot, t)$  est solution du problème d'évolution:

$$\frac{d\hat{U}}{dt} + ik A \hat{U} = 0 \quad (20)$$

dont la solution est donnée par (l'opérateur  $A$  étant borné, ce qui suit a parfaitement un sens)

$$\hat{U}(k, \cdot, t) = e^{ik A t} \hat{U}_0(k, \cdot). \quad (21)$$

La suite de l'analyse se ramène, via le théorème de Plancherel, à estimer

$$\| e^{ik A t} \|$$

L'analyse précise du spectre de  $A$  nous amène à formuler la conjecture suivante:

**Conjecture 3.1** *Le problème d'évolution (1) est bien posé dans  $L^2$  si et seulement si le spectre  $\sigma(A)$  de l'opérateur  $A$  est inclus dans  $\mathbb{R}$ .*

Pour transformer cette conjecture en théorème, la principale difficulté est due au caractère non normal de l'opérateur  $A$  et nous pensons qu'il faut peut-être aller chercher la solution dans des résultats fins de la théorie des semi-groupes [9].

**Remarque 3.2** *L'énoncé de la conjecture 3.1 est bien sûr trop imprécis car la signification rigoureuse du terme "bien posé" n'est pas précisée. En fait, nous ne demandons pas au problème d'être fortement bien posé au sens des problèmes fortement hyperboliques par exemple [7]. Nous devons autoriser une perte de régularité entre la donnée initiale  $U_0$  et la solution  $U(\cdot, t)$ . Toutefois, cette perte de régularité n'affectera que la variable  $x$ : typiquement on aura*

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])), \quad (\iff (2)),$$

sous l'hypothèse:

$$U_0 \in L^2([-1, 1]; H^m(\mathbb{R})) \quad \text{pour un certain entier } m \geq 0.$$

A titre d'exemple, dans le cas où le profil  $M$  est constant (voir (12) et (13)), c'est ce que l'on obtient avec  $m = 1$ , la perte d'un ordre de régularité étant occasionnée par l'équation de transport au carré (13).

## 4 Quelques résultats sur le spectre de l'opérateur $A$

Ce chapitre fait appel à quelques notions classiques sur la théorie spectrale des opérateurs en dimension infinie. Le lecteur pourra trouver ces notions dans [11] ou [10] par exemple.

### 4.1 Remarques préliminaires.

Notons tout d'abord que nous pouvons réécrire:

$$A = A_0 + B, \tag{22}$$

où

$$A_0 = \begin{pmatrix} M & I \\ 0 & M \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Notons que l'opérateur  $B$  est de rang 1 donc en particulier compact ! L'opérateur  $A_0$ , lui, n'est pas normal car on vérifie aisément par le calcul que

$$A_0 A_0^* = \begin{pmatrix} M^2 + I & M \\ M & M^2 \end{pmatrix}, \quad A_0^* A_0 = \begin{pmatrix} M^2 & M \\ M & M^2 + I \end{pmatrix}$$

On sait en revanche que le spectre de  $A_0$  est réel. En fait, on voit immédiatement qu'il coïncide avec l'image essentielle de  $M$

$$\sigma(A_0) = \mathcal{I}m M, \tag{24}$$

où on rappelle que, par définition

$$\lambda \in \mathcal{I}m M \iff \forall \delta > 0, \quad \text{mes} \{ y \in ]-1, 1[ / M(y) \in ]\lambda - \delta, \lambda + \delta[ \} > 0. \tag{25}$$

Par contre, la nature de ce spectre dépend fortement des propriétés de  $M$  ainsi que le montre les deux cas extrêmes suivants:

- Si  $M \in C^0([-1, 1])$ , le spectre de  $A_0$  est absolument continu:

$$\sigma(A_0) = [M_-, M_+], \quad M_- = \inf_{y \in [-1, 1]} M(y), \quad M^+ = \sup_{y \in [-1, 1]} M(y). \tag{26}$$

- Si  $M$  est constante par morceaux, le spectre de  $A_0$  est purement ponctuel. Plus précisément soit  $\beta_0 = -1 < \beta_1 < \dots < \beta_N - 1 < \beta_N = 1$  tels que

$$y \in ]\beta_{j-1}, \beta_j[ \implies M(y) = M_j,$$

alors  $\sigma(A_0) = \{M_1, \dots, M_N\}$ , chaque valeur propre  $M_j$  étant de multiplicité infinie, le sous-espace propre associé  $\mathcal{E}_j$  étant défini par:

$$\mathcal{E}_j = \{ (u, 0)^t, u \text{ à support dans } ]\beta_{j-1}, \beta_j[ \}.$$

Enfin, si comme on le verra, la structure du spectre de  $A$  dépend de certaines propriétés de  $M(y)$ , ce spectre est insensible à la façon dont sont “rangés” les  $M(y)$ . Exprimons cela de façon plus mathématique.

Soit  $g$  une bijection de  $[-1, 1]$  dans lui-même qui préserve la mesure:

$$\begin{cases} g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], & \text{bijective} \\ \forall \Omega \subset [-1, 1] \text{ mesurable}, & \text{mes}(g(\Omega)) = \text{mes}(\Omega) \end{cases} \quad (27)$$

Nous introduisons la transformation linéaire dans  $L^1([-1, 1])$ :

$$\begin{cases} S_g : L^1([-1, 1]) \longrightarrow L^1([-1, 1]), \\ u \longrightarrow S_g u = u \circ g. \end{cases} \quad (28)$$

Il est clair et bien connu que, pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $S_g$  est un isomorphisme isométrique de  $L^p([-1, 1])$  dans lui-même. De plus, dans le cas  $p = 2$ , cet opérateur est autoadjoint unitaire. Nous laissons au lecteur la preuve élémentaire du résultat suivant:

**Lemme 4.1** *Soit  $M_g = S_g M$  et  $A_g$  l'opérateur associé au profil  $M_g$  alors on a l'identité*

$$A_g = S_g^{-1} \circ A \circ S_g. \quad (29)$$

*En particulier les opérateurs  $A$  et  $A_g$  ont même spectre.*

Cela signifie que, par la suite, tout résultat énoncé pour un profil  $M$  s'étend à tout profil  $M_g$  pour toute bijection  $g$  préservant la mesure.

**Remarque 4.2** *Notons que les bijections préservant la mesure sont stables par composition des fonctions. On trouve bien entendu parmi elles les fonctions  $g(x) = x$  où  $g(x) = -x$  mais aussi des permutations discrètes comme celle-ci: soit  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  un maillage régulier de  $[-1, 1]$  ( $x_0 = -1, x_j = -1 + j h, h = 2/N$ ) et  $\sigma$  une permutation dans  $S_N$ , le groupe des permutations de  $\{0, 1, \dots, N-1\}$ , on obtient une bijection préservant la mesure avec*

$$g(x_j + \nu h) = g(x_{\sigma(j)} + \nu h), \quad \forall j = 1, \dots, N-1, \quad \forall \nu \in [0, 1[.$$

Pour terminer, nous établissons un lien entre le spectre de l'opérateur  $A$  associé au profil  $M$  à celui de l'opérateur  $\tilde{A}$  associé au profil  $-M$  et à celui de l'opérateur  $A_\alpha$  associé au profil  $M_\alpha = M + \alpha$  où  $\alpha$  est une constante.

Nous introduisons la symétrie  $\mathcal{S}$  de

$$\mathcal{S}(u, v) = (u, -v). \quad (30)$$

Il est facile de vérifier le

**Lemme 4.3** *On a les relations*

$$\tilde{A} = -\mathcal{S} (A + \lambda) \mathcal{S}, \quad A_\alpha - A = \alpha I. \quad (31)$$

*En particulier*

$$\sigma(\tilde{A}) = -\sigma(A) \quad \text{et} \quad \sigma(A_\alpha) = \sigma(A) + \alpha. \quad (32)$$

## 4.2 Valeurs propres de $A$ : résultats généraux

**Lemme 4.4** *Les valeurs propres  $\lambda \in \mathbb{C}$  qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{Im} M$  sont des racines de l'équation:*

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2} = 2. \quad (33)$$

*De plus ces valeurs propres sont simples.*

PREUVE. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $(u, v)^t$  le vecteur propre associé. Il est facile de calculer que:

$$\begin{cases} (\lambda - M)^2 u = Eu \\ v = (\lambda - M) u \end{cases}$$

La fonction  $u$  est donc nécessairement non nulle. Si  $\lambda \notin \mathcal{Im} M$ , la moyenne  $Eu$  est également non nulle car  $(\lambda - M)^2 u = 0$  entraîne  $u = 0$ . Par conséquent:

$$u = \frac{Eu}{(\lambda - M)^2}$$

Après intégration entre -1 et 1, on obtient

$$Eu \left[ 2 - \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2} \right] = 0,$$

dont on déduit que toute valeur propre de  $A$  est nécessairement solution de

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2} = 2.$$

De plus on voit que toute vecteur propre associé à une telle valeur propre est nécessairement proportionnelle à

$$\left( \frac{1}{(\lambda - M)^2}, \frac{1}{(\lambda - M)} \right).$$

Cette valeur propre est donc simple. □

**Corollaire 4.5** *Le spectre ponctuel de  $A$ ,  $\sigma_p(A)$ , est symétrique par rapport à l'axe réel:*

$$\lambda \in \sigma_p(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_p(A) \quad (34)$$

PREUVE. En conjuguant l'égalité (33), on voit que, comme  $M$  est à valeurs réelles, si  $\lambda$  est solution de (33),  $\bar{\lambda}$  l'est également. □

**Corollaire 4.6** *En dehors de  $\mathcal{Im} M$ , le spectre ponctuel de  $A$  est constitué de valeurs propres simples isolées qui ne peuvent s'accumuler que sur  $\mathcal{Im} M$ .*

PREUVE. La fonction

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}, \quad \lambda \in D = \mathbb{C} \setminus \mathcal{Im} M \quad (35)$$

est clairement analytique dans  $D$ . Les zéros de  $F(\lambda) - 2$  sont donc nécessairement isolés. Par ailleurs il est clair que

$$|F(\lambda)| \sim \frac{1}{|\lambda|^2} \quad \text{quand } |\lambda| \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, l'équation  $F(\lambda) = -2$  ne peut pas avoir de solution à l'extérieur d'un certain disque du plan complexe, ce qui conclut la première partie de la démonstration.  $\square$

Nous déduisons également du lemme 4.4, l'existence d'au moins deux valeurs propres réelles. Nous introduisons pour cela

$$M_- = \inf M(y), \quad M_+ = \sup M(y). \quad (36)$$

**Théorème 4.7** *L'opérateur  $A$  a au plus une valeur propre  $\lambda_-$  dans l'intervalle  $] -\infty, M_-[$  et au plus une valeur propre  $\lambda_+$  dans l'intervalle  $]M_+, +\infty[$ . Plus précisément, la valeur propre  $\lambda^-$  existe si et seulement si:*

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_- - M(y))^2} > 2$$

et elle est caractérisée par:

$$\lambda_- < M_- \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda_- - M(y))^2} = 2.$$

De même, la valeur propre  $\lambda^+$  existe si et seulement si:

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_+ - M(y))^2} > 2$$

et elle est caractérisée par:

$$\lambda_+ > M_+ \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda_+ - M(y))^2} = 2.$$

PREUVE. Pour étudier les valeurs propres réelles, étudions la fonction

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Im} M. \quad (37)$$

$F$  est en particulier définie sur l'intervalle réel  $] -\infty, M_- [ \cup ] M_+, +\infty [$  où elle prend des valeurs réelles. Sa dérivée est donnée par

$$F'(\lambda) = -2 \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^3},$$

ce qui montre que  $F$  est strictement croissante sur  $] -\infty, M_- [$  et strictement décroissante sur  $]M_+, +\infty[$ . Par ailleurs, on remarque que, en utilisant le théorème de convergence monotone

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} F(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow M_{\pm}} F(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_{\pm} - M(y))^2},$$

cette dernière intégrale pouvant être égale à  $+\infty$  (voir notamment la remarque 4.8 ci-après).

Il est facile de conclure à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.  $\square$

**Remarque 4.8** *Si  $M(y)$  atteint la valeur  $M_{\pm}$  en un point  $y_{\pm}$  où elle est  $C^1$  à droite ou à gauche, on vérifie aisément que*

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_{\pm} - M(y))^2} = +\infty,$$

ce qui assure l'existence de  $\lambda_{\pm}$ .

Nous traitons enfin le cas de valeurs propres dans  $\mathcal{I}m M$ .

**Théorème 4.9** *Soit  $\lambda \in \mathcal{I}m M$  et  $N_\lambda = \{y \in [-1, 1] / M(y) = \lambda\}$ . Alors*

$$mes(N_\lambda) > 0 \implies \lambda \in \sigma_p(A), \quad (38)$$

*et de plus il s'agit d'une valeur propre de multiplicité infinie.*

*Si  $M$  est  $C^1$  par morceaux, on a l'équivalence:*

$$\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathcal{I}m M \iff mes(N_\lambda) > 0. \quad (39)$$

PREUVE. Supposons que  $mes(N_\lambda) > 0$ . Soit  $u$  non nulle, à support dans  $N_\lambda$  et à mesure nulle, on vérifie aisément que:

$$A [(u, 0)^t] = \lambda [(u, 0)^t],$$

ce qui prouve que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et que le sous-espace propre associé contient l'espace (de dimension infinie) des fonctions à moyenne nulle à support dans  $N_\lambda$ .

Supposons que  $mes(N_\lambda) = 0$  et que  $M$  est  $C^1$  par morceaux. Soit  $(u, v)^t$  un éventuel vecteur propre de  $A$ , on a toujours

$$\begin{cases} (\lambda - M)^2 u = Eu \\ v = (\lambda - M)u \end{cases}$$

On en déduit que pour  $y \notin N_\lambda$ ,

$$u = \frac{Eu}{(\lambda - M)^2}$$

Cela implique nécessairement que  $Eu = 0$  car sinon,  $M$  étant  $C^1$  par morceaux,  $u$  ne pourrait pas être de carré intégrable. Par suite  $Eu = 0$  entraîne  $(\lambda - M)^2 u = 0$  ce qui entraîne  $u = 0$  puisque  $mes(N_\lambda) = 0$ . □

**Remarque 4.10** *La démonstration montre que lorsque  $M$  est  $C^1$  par morceaux, toute fonction propre associée à une valeur propre dans  $\mathcal{I}m M$  est nécessairement à moyenne nulle.*

### 4.3 Spectre continu.

**Lemme 4.11** *Le spectre résiduel de  $A$  est vide.*

PREUVE. On sait que  $\lambda \in \sigma_r(A)$  si et seulement si  $\lambda \notin \sigma_p(A)$  et  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ , où  $A^*$  désigne l'adjoint de  $A$ . Or on voit que (il suffit de remarquer que  $E$  est autoadjoint dans  $L^2([-1, 1])$ )

$$A^* = \begin{pmatrix} M & E \\ I & M \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si nous introduisons l'opérateur qui réalise l'échange de  $u$  et  $v$ , soit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

qui est autoadjoint et unitaire ( $\mathbf{S}^2 = I$ ), on réalise que:

$$A^* = \mathbf{S} A \mathbf{S}.$$

Autrement dit les opérateurs  $A$  et  $A^*$  sont semblables. Ils ont en particulier les mêmes valeurs propres et le corollaire 4.5 est donc incompatible avec l'existence de spectre résiduel (cf [11, 10]).  $\square$

Le résultat suivant implique, compte tenu du théorème 4.4 et du lemme 4.11, que, en dehors de l'axe réel, le spectre de  $A$  n'est constitué que de valeurs propres simples.

**Théorème 4.12** *On a l'inclusion:  $\sigma_c(A) \subset \text{Im } M$ .*

PREUVE. Il suffit de montrer que si  $\lambda \notin \text{Im } M$  et n'est pas une valeur propre de  $A$ , alors  $A - \lambda I$  est inversible.

Soit  $(f, g)^t \in L^2([-1, 1])^2$ , nous cherchons à trouver  $(u, v)^t \in L^2([-1, 1])^2$  tels que

$$(A - \lambda I) [(u, v)^t] = (f, g)^t,$$

c'est à dire

$$\begin{cases} (M - \lambda)u + v = f \\ Eu + (M - \lambda)v = g \end{cases}$$

ce qui amène à l'équation en  $u$

$$Eu - (M - \lambda)^2 u = h, \quad h = g - (M - \lambda)f.$$

Comme  $\lambda \notin \text{Im } M$ , il est licite de diviser par  $(M - \lambda)^2$ , ce qui donne:

$$\frac{Eu}{(M - \lambda)^2} - u = \frac{h}{(M - \lambda)^2}.$$

Appliquons l'opérateur  $E$  à cette égalité, il vient

$$Eu \left( E \left[ \frac{1}{(M - \lambda)^2} \right] - 1 \right) = E \left[ \frac{h}{(M - \lambda)^2} \right]$$

Or comme  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$  on a (lemme 33)

$$E \left[ \frac{1}{(M - \lambda)^2} \right] \neq 1.$$

On en déduit que  $Eu = \left( E \left[ \frac{1}{(M - \lambda)^2} \right] - 1 \right)^{-1} E \left[ \frac{h}{(M - \lambda)^2} \right]$  puis que

$$u = \left( E \left[ \frac{1}{(M - \lambda)^2} \right] - 1 \right)^{-1} E \left[ \frac{h}{(M - \lambda)^2} \right] \frac{1}{(M - \lambda)^2} - \frac{h}{(M - \lambda)^2}.$$

Nous avons donc montré que la résolvante de l'opérateur  $A$  était donnée par

$$(A - \lambda I)^{-1} [(f, g)^t] = (u, v)^t$$

$$\text{avec } \begin{cases} u = \left( E \left[ \frac{1}{(M - \lambda)^2} \right] - 1 \right)^{-1} \frac{E[g/(M - \lambda)^2] - E[f/(M - \lambda)]}{(M - \lambda)^2} - \frac{g - (M - \lambda)f}{(M - \lambda)^2}, \\ v = \frac{g}{(M - \lambda)} - \left( E \left[ \frac{1}{(M - \lambda)^2} \right] - 1 \right)^{-1} \frac{E[g/(M - \lambda)^2] - E[f/(M - \lambda)]}{(M - \lambda)}. \end{cases}$$

$\square$

**Théorème 4.13** *Soit  $y_\lambda \in ]-1, 1[$  tel que  $M$  soit de classe  $C^1$  au voisinage de  $y_\lambda$  et tel que  $M(y_\lambda) = \lambda$  alors*

$$\lambda \in \sigma(A). \quad (40)$$



PREUVE. Pour montrer que chaque  $\lambda$  est dans le spectre de  $A$ , l'idée est la suivante. Soit  $y_\lambda$  tel que  $M(y_\lambda) = \lambda$  et  $\delta_{y_\lambda}$  la distribution de Dirac au point  $y_\lambda$ , alors, au moins formellement,

$$\begin{cases} \delta'_{y_\lambda} \text{ est "à moyenne nulle",} \\ \delta'_{y_\lambda} (\lambda - M)^2 = 0, \\ \delta'_{y_\lambda} (\lambda - M) = -M'(y_\lambda) \delta_{y_\lambda}. \end{cases}$$

C'est ce qui va nous guider pour construire une suite singulière  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$  "convergeant" vers  $(\delta'_{y_\lambda}, -M'(y_\lambda) \delta_{y_\lambda})$ . Soit  $\rho(y)$  une fonction régulière à support compact, paire et dont l'intégrale vaut 1. Posons

$$\rho_\lambda^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{y - y_\lambda}{\varepsilon}\right), \quad u^\varepsilon(y) = \alpha_\varepsilon (\rho_\lambda^\varepsilon)'(y), \quad v^\varepsilon(y) = -\alpha_\varepsilon (M(y) - \lambda) (\rho_\lambda^\varepsilon)'(y),$$

où  $\alpha_\varepsilon$  est une constante de normalisation telle que:

$$\|(u^\varepsilon, v^\varepsilon)^t\| = 1.$$

Notons que comme:

$$\int_{-1}^1 [1 + (M(y) - \lambda)^2] |(\rho_\lambda^\varepsilon)'(y)|^2 dy \sim \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho'(z)|^2 dz, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

on voit que

$$\alpha_\varepsilon \sim \alpha \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{où } \alpha = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho'(z)|^2 dz \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(A - \lambda)(u^\varepsilon, v^\varepsilon)^t\| = 0,$$

ce qui démontrera que  $\lambda$  appartient au spectre de  $A$ . On calcule aisément que

$$(A - \lambda) [(u^\varepsilon, v^\varepsilon)^t] = (0, \varphi^\varepsilon)^t,$$

où, comme  $\rho$  est à moyenne nulle,

$$\varphi^\varepsilon = -\alpha_\varepsilon [(M - \lambda)^2 (\rho_\lambda^\varepsilon)']$$

Nous avons

$$\|\varphi^\varepsilon\| = \alpha_\varepsilon \left[ \int_{-1}^1 |(M - \lambda)|^2 |(\rho_\lambda^\varepsilon)'|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce qui suit,  $C$  désigne une constante positive dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Comme  $M$  est dérivable au voisinage de  $y_\lambda$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$|y - y_\lambda| \leq \varepsilon \implies |(M(y) - \lambda)|^2 \leq C |y - y_\lambda|^2.$$

Par conséquent

$$\int_{-1}^1 |(M - \lambda)|^2 |(\rho_\lambda^\varepsilon)'|^2 dy \leq \frac{C}{\varepsilon^4} \int_{y_\lambda - \varepsilon}^{y_\lambda + \varepsilon} |y - y_\lambda|^2 \rho'\left(\frac{y - y_\lambda}{\varepsilon}\right)^2 dy = \frac{C}{\varepsilon} \int_{-1}^1 z^2 \rho'(z)^2 dz$$

Finalement

$$\|\varphi^\varepsilon\| \leq C |\alpha_\varepsilon| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \leq C \varepsilon.$$

□

**Corollaire 4.14** *Si on suppose que  $M$  est de classe  $C^1$  par morceaux, auquel cas  $\mathcal{I}m M$  est une réunion finie d'intervalles, et si on suppose que tous les ensembles de niveau  $N_\mu$  sont de mesure nulle*

$$\sigma_c(A) = \mathcal{I}m M.$$

PREUVE. Il suffit de réunir les théorèmes 4.9, 4.12 et 4.13. □

**Remarque 4.15** *Il est assez intuitif que dire que l'ensemble du spectre continu est de multiplicité 2 et qu'à chaque élément du spectre continu est associé un bloc de Jordan de multiplicité 2. Nous allons établir cela formellement (et pensons qu'il doit être possible de donner un sens rigoureux à ce qui suit) lorsque  $M$  est  $C^2$  strictement monotone. Plus exactement, lorsque  $M$  est  $C^2$ , nous allons montrer que si  $M'(x) \neq 0$ ,  $M(x)$  est un point du spectre qui a la multiplicité 2. Pour cela il faut "moralement" passer de  $L^2$  aux distributions, et au moins étendre  $A$  aux distributions d'ordre 2, ce qui a bien un sens quand  $M$  est  $C^2$ .*

Dans ce cadre, la démonstration du théorème 4.13 prouve que chaque  $M(x)$  est une valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre:

$$e_x = \begin{pmatrix} \delta'_x \\ -M'(x) \delta_x \end{pmatrix}$$

Nous allons construire maintenant un vecteur  $f_x$  tel que:

$$Af_x = e_x + M(x) f_x,$$

ce qui établira que  $A$  restreint au sous-espace  $(e_x, f_x)$  est représenté par la matrice de Jordan:

$$\begin{pmatrix} M(x) & 1 \\ 0 & M(x) \end{pmatrix}$$

Si on pose  $f_x = (u, v)^t$ , l'équation  $Af_x = e_x + M(x) f_x$  se réécrit:

$$\begin{cases} Mu + v = \delta'_x + M(x) u \\ Eu + Mv = -M'(x) \delta(x) + M(x) v \end{cases}$$

Dès que  $Eu = 0$ , la seconde équation nous donne

$$[M - M(x)] v = -M'(x) \delta$$

dont une solution est  $v(x) = -\delta'(x)$ . En reportant dans la seconde équation nous obtenons

$$[M - M(x)] u = 2 \delta'_x$$

Rappelons les formules:

$$\begin{cases} [M - M(x)] \delta'_x = M(x) \delta_x \\ [M - M(x)] \delta''_x = 2 M'(x) \delta'_x + M''(x) \delta_x \end{cases}$$

En cherchant  $u$  sous la forme  $u = a \delta''_x + b \delta'_x$ , qui vérifie bien  $Eu = 0$ , on aboutit aisément à:

$$a = \frac{1}{2 M'(x)} \quad b = -\frac{M''(x)}{M'(x)^2}$$

Par conséquent dans le sous-espace propre associé aux vecteurs:

$$e_x = \begin{pmatrix} \delta'_x \\ -M'(x) \delta_x \end{pmatrix}, \quad f_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2M'(x)} \delta''_x - \frac{M''(x)}{M'(x)^2} \delta'_x \\ -\delta'_x \end{pmatrix},$$

l'opérateur  $A$  est bien représenté à un bloc de Jordan de  $2 \times 2$  associé à la valeur propre  $M(x)$ .

#### 4.4 La question fondamentale de l'existence de valeurs propres non réelles

Les sections 4.1 à 4.3 nous permettent de résumer la structure générale du spectre de l'opérateur  $A$  à l'aide la figure 2, qui correspond typiquement au cas d'un profil  $M(y)$  continu : en bleu nous représentons le spectre continu, en vert les valeurs propres réelles (dont deux seulement sont en dehors du spectre continu, les autres - nécessairement de multiplicité infinie - correspondant à d'éventuels "paliers" de la fonction  $M$ ), en rouge les éventuelles valeurs propres non réelles (qui vont nécessairement par paires conjuguées).

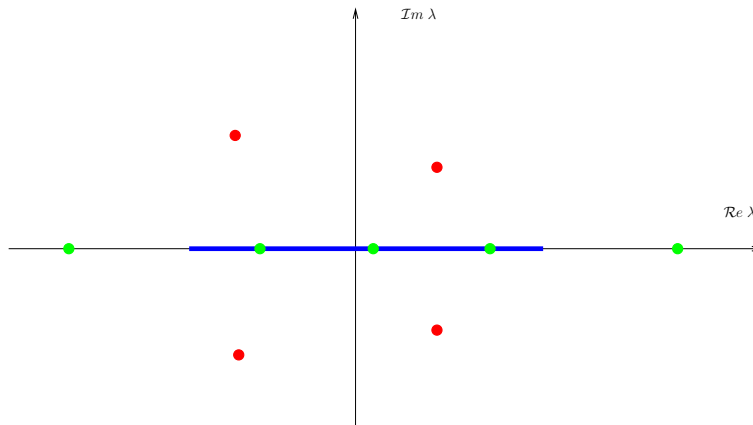


Figure 2: Structure du spectre de  $A$

Si on admet la conjecture 3.1, l'étude du caractère bien posé du problème 1 se ramène à cette seule question

$$\text{L'opérateur } A \text{ admet-il des valeurs propres non réelles ?} \quad (41)$$

Si la réponse à cette question est non, cela signifie que le problème 1 est bien posé. Si la réponse est oui, cela signifie que le problème 1 est fortement mal posé.

La deuxième partie (la partie négative) de l'énoncé qui précède est un résultat rigoureux. Nous pouvons donc l'énoncer sous la forme d'un théorème:

**Théorème 4.16** *Si le spectre de  $A$  n'est pas réel, le problème (1) est fortement mal posé.*

PREUVE. Si le spectre de  $A$  n'est pas réel, cela signifie que  $A$  admet une valeur propre  $\lambda = \mu + i\sigma$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ . Soit  $\Phi \neq 0$ , un vecteur propre associé, que nous supposons de norme 1 dans  $L^2(-1, 1)^2$ , si on considère une donnée initiale:

$$U_0(x, y) = \beta(x) \Phi(y),$$

alors, après transformation de Fourier, on voit que la solution de (1) doit être donnée, si elle existe, par

$$\widehat{U}(k, y, t) = \widehat{\beta}(k) \cdot e^{i\mu kt} e^{\sigma kt} \cdot \Phi(y)$$

qui satisfait

$$\|\widehat{U}(k, \cdot, t)\|_{L^2(-1,1)^2} \geq |\widehat{\beta}(k)| e^{\sigma kt}$$

ce qui permet de conclure aisément.  $\square$

Les pages qui vont suivre vont montrer qu'on peut établir une grande variété de résultats en fonction des propriétés du profil  $M(y)$ . Il est pratiquement impossible d'être exhaustif. C'est pourquoi nous nous limiterons à deux cas particuliers:

- Le cas des profils symétriques et convexes, c'est à dire lorsque la fonction  $M(y)$  est paire et convexe (ou concave) - voir Figure 8,
- Le cas des profils antisymétriques, c'est à dire lorsque la fonction  $M(y)$  est, à une constante additive près, impaire - voir Figure 4.

Dans le premier cas, que nous traiterons à la section 6, nous verrons que les choses se "passent bien": le problème d'évolution est toujours bien posé dès que la fonction  $M(y)$  est continue. Le cas des profils antisymétriques, que nous allons d'abord traiter dans la section 6, est beaucoup plus riche et mène à des résultats variés. En particulier, on peut exhiber des profils menant à des problèmes fortement mal posés.

## 5 Quelques résultats d'existence ou de non existence de valeurs propres non réelles pour les profils antisymétriques

On appellera profil antisymétrique, une fonction  $M(y)$  telle qu'il existe une constante  $\overline{M}$  (la valeur moyenne de  $M$  ! ) telle que:

$$M(y) + M(-y) = 2\overline{M}. \quad (42)$$

Dans ce cas, il existe une fonction impaire  $M_i(y)$  telle que

$$M(y) = \overline{M} + M_i(y). \quad (43)$$

Le spectre ponctuel de  $A$  se déduit immédiatement par translation de  $\overline{M}$  (donc parallèle à l'axe réel) du spectre de l'opérateur  $A_i$  associé à  $M_i$  (cf. lemme 4.3). C'est pourquoi, sans perdre de généralité, nous nous restreindrons au cas où  $\overline{M} = 0$ , c'est à dire au cas où  $M$  est impaire.

### 5.1 Un premier résultat général.

**Lemme 5.1** *On suppose que la fonction  $M$  est impaire. Alors, en dehors de l'image de  $M$ , le spectre ponctuel de l'opérateur  $A$  est constitué par une réunion finie de sous-ensembles  $S$  tels que*

- Soit  $S = \{0\}$ ,
- Soit  $S$  est constitué est constitué de deux valeurs propres opposées, réelles ou imaginaires pures,
- Soit  $S$  est constitué est constitué de quatre valeurs propres qui se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'axe réel, l'axe imaginaire ou l'origine.

PREUVE. Il suffit de remarquer que si

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2},$$

alors  $F(-\lambda) = -F(\lambda)$  (appliquer le changement de variable  $y \rightarrow -y$ ). On en déduit que si  $\lambda$  est valeur propre,  $-\lambda$  l'est également. On conclut en joignant cette remarque au corollaire 4.5.  $\square$

## 5.2 Etude de ceux cas particuliers très simples.

Nous allons étudier deux cas particuliers (Figure 3) pour lesquels les calculs se mènent à la main de façon élémentaire et aboutissent à deux conclusions opposées : dans un cas, le problème (1) est bien posé (absence de valeur propre non réelle, théorème 5.2), dans l'autre il est mal posé (existence de valeurs propres non réelles) au moins dans certains cas (théorème 5.3). Au delà de leur intérêt intrinsèque, ces deux cas préparent la suite du chapitre. Le cas du profil linéaire prépare les résultats de la section 5.3 sur les profils suffisamment réguliers, et le cas du profil bi-couches ceux de la section 5.4 sur les profils constants par morceaux.

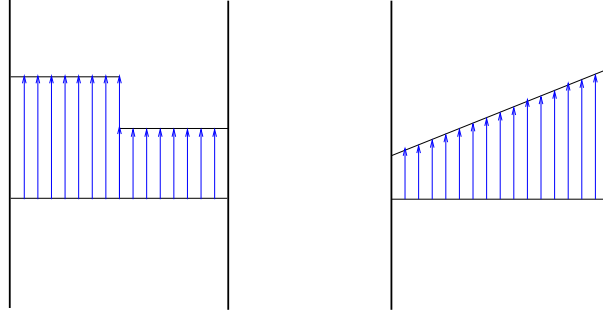


Figure 3: Profil bi-couches et profil linéaire.

**Le cas d'un profil linéaire.** Nous considérons le cas particulier

$$M(y) = M_+ y, \quad (44)$$

**Théorème 5.2** *Si le profil  $M(y)$  est donné par (44),  $A$  n'admet aucune valeur propre non réelle.*

PREUVE. Notons que

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2} = \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M_+ y)^2} = \frac{2}{(\lambda^2 - M_+^2)}$$

L'équation aux valeurs (33) propres s'écrit alors

$$\lambda^2 - M_+^2 = 1$$

dont les deux seules solutions,  $\lambda = \pm(1 + M_+^2)^{\frac{1}{2}}$ , sont réelles (ce sont les deux valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  annoncées par le théorème 4.7). □

**Le cas d'un milieu bi-couches.** Nous allons voir que  $A$  peut avoir des valeurs propres non réelles. Supposons en effet que  $M$  prend deux valeurs constantes différentes sur les deux intervalles  $I_{\pm} = \pm [0, 1[$ . On peut toujours supposer que ces deux valeurs sont opposées

$$M(y) = \pm M_+, \quad \text{si } y \in I_{\pm}. \quad (45)$$

Nous savons déjà que  $M^+$  et  $-M^+$  sont deux valeurs propres de multiplicité infinie (cf théorème 4.9).

**Théorème 5.3** *Si le profil  $M(y)$  est donné par (45),  $A$  admet exactement 4 valeurs propres simples en dehors de  $\pm M^+$ . D'autre part:*

- Si  $M^+ \geq 1$ , ces quatre valeurs propres sont réelles.
- Si  $M^+ < 1$ , deux sont réelles, deux sont imaginaires pures.

PREUVE. En écrivant:

$$(\lambda - M)^2 u = Eu$$

on voit que  $u$  est constante sur chacun des intervalles  $I_-$  et  $I_+$ . De plus, si  $u_-$  et  $u_+$  désignent les deux valeurs constantes, on a:

$$\begin{cases} (\lambda + M_+)^2 u_- = \frac{1}{2} (u_+ + u_-) \\ (\lambda - M_+)^2 u_+ = \frac{1}{2} (u_+ + u_-) \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{2(\lambda + M_+)^2} + \frac{1}{2(\lambda - M_+)^2} = 1,$$

soit encore

$$\frac{1}{2} [(\lambda + M_+)^2 + (\lambda - M_+)^2] = (\lambda^2 - M_+^2)^2,$$

c'est à dire

$$(\lambda^2 + M_+^2) = (\lambda^2 - M_+^2)^2,$$

Il est clair, graphiquement, que les racines de l'équation en  $X$

$$(X + M_+^2) = (X - M_+^2)^2,$$

sont réelles, la plus grande étant nécessairement positive. Les deux sont positives si et seulement si  $1 \leq M_+^2$ . On en déduit que si  $1 > M_+^2$ ,  $A$  admet deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées et deux valeurs propres réelles opposées. □

### 5.3 Le cas des profils antisymétriques continus et croissants.

Notre but est ici d'obtenir un certain nombre de résultats généraux sur l'éventuelle existence de valeurs propres non réelles dans le cas où  $M$  est un profil antisymétrique continu et strictement monotone. Compte tenu du lemme 4.3, on ne perd aucune généralité en supposant que:

$$y \rightarrow M(y) \text{ est continu et strictement croissante.} \quad (46)$$

Les résultats que nous allons démontrer prouvent que deux éléments jouent un rôle important:

- les propriétés de *convexité* de  $M(y)$ ,
- la *régularité* de  $M(y)$  au voisinage de l'origine.

Dans ce qui suit, nous allons nous limiter à des profils antisymétriques continus strictement croissants dont la convexité est fixée dans le demi-intervalle  $[0, 1]$  (Figure 4). Avant d'entrer dans le vif du sujet, présentons ci-dessous notre démarche ainsi qu'un bilan des résultats que nous allons obtenir.

- Dans le prolongement du cas du profil linéaire, nous étudions tout d'abord le cas des profils linéaires par morceaux. Là encore, les calculs se mènent à la main et le gros avantage est que la fonction  $F(\lambda)$  se révèle être une fraction rationnelle. Ces calculs nous permettent d'établir un premier résultat assez général sur les profils linéaires par morceaux, c'est le théorème 5.5, qui met déjà en évidence le rôle de la convexité de  $M$ .

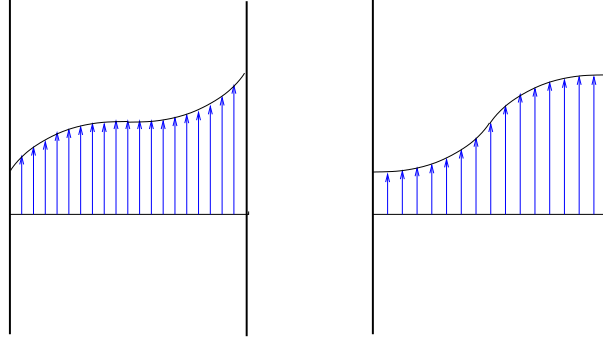


Figure 4: Profils antisymétriques à convexité fixe sur un demi-intervalle.

- Nous traitons ensuite le cas des profils continus par des arguments d'approximation par interpolation linéaire. Nous étudions successivement deux cas:
  - (i)  $M$  est *convexe* sur  $[0, 1]$  : dans ce cas l'opérateur  $A$  n'a jamais de valeur propre non réelle (théorème 5.6).
  - (ii)  $M$  est *concave* sur  $[0, 1]$  : dans le cas le nombre de valeurs propres non réelles de  $A$  est égal à 0 ou 2, auquel cas elles sont imaginaires pures et conjuguées (théorème 5.7). Pour trancher l'alternative, il faut faire des hypothèses plus précises. Nous avons étudié deux sous cas:
    - (a)  $M$  est *non dérivable en 0* et même suffisamment singulière au voisinage de l'origine pour que la fonction  $1/M^2$  (qui tend nécessairement vers  $+\infty$  à l'origine par continuité et imparité de  $M$ ) soit intégrable. On obtient dans ce cas une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de valeurs propres non réelles: c'est le théorème 5.8 (voir aussi la remarque 5.10).
    - (b)  $M$  est *dérivable en 0* et de classe  $C^2$  sur chacun des deux sous intervalles  $[-1, 0]$  et  $[0, 1]$ . Dans ce cas, il est nécessaire que  $M$  soit  $C^2$  à l'origine pour que  $A$  n'ait pas de valeur propre non réelle: c'est la première partie du théorème 5.12. Par ailleurs, lorsque  $M$  est effectivement  $C^2$  à l'origine, moyennant quelques hypothèses techniques sur  $M$  (voir théorème 5.12 pour plus de précision), on peut établir une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de valeurs propres non réelles: c'est la deuxième partie du théorème 5.12.

**Remarque 5.4** *On pourrait légitimement se demander pourquoi c'est la régularité de  $M$  en 0 qui joue un rôle, et non sa régularité en un autre point, surtout si on tient compte du lemme 4.1. C'est bien sûr le fait que l'on se restreigne à des profils antisymétriques qui confère à 0 un rôle particulier. En fait, le point important est que, compte tenu de l'antisymétrie de  $M$ , 0 est un point d'inflexion (donc "le" point d'inflexion dès qu'on on fixe la convexité de  $M$  sur chaque demi-intervalle) de  $M$ .*

### 5.3.1 Étude de profils continus linéaires par morceaux.

Nous supposons  $M(y)$ , continu et impaire et qu'il existe une suite finie

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad (47)$$

telle que  $M$  est linéaire dans l'intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$  pour tout  $i < N$ . Autrement si  $M_i = M(x_i)$  (en particulier  $M_0 = 0$ ), nous avons

$$\begin{cases} \forall 0 \leq i \leq N-1, & M(y) = \alpha_i y + \beta_i \text{ dans } [x_i, x_{i+1}], \\ \alpha_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}, & \alpha_i x_l + \beta_i = M_l, \quad l = i, i+1. \end{cases} \quad (48)$$

On supposera en outre la fonction  $M$  strictement croissante, c'est à dire

$$\forall 0 \leq i \leq N-1, \quad M_{i+1} > M_i \quad (\implies M_N = M_+).$$

Enfin on peut toujours supposer, quitte à changer le découpage, que:

$$\forall 0 \leq i \leq N-1, \quad \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$$

**Théorème 5.5** *Soit  $M(y)$  un profil strictement croissant, impair défini par (47) et (48). Alors*

- (i) *Si la fonction  $M$  est convexe dans  $[0, 1]$ , l'opérateur  $A$  n'a aucune valeur propre non réelle.*
- (ii) *Si la fonction  $M$  est concave dans  $[0, 1]$ , l'opérateur  $A$  a au plus deux valeurs propres non réelles qui sont nécessairement imaginaires pures et conjuguées.*

PREUVE. Notons tout d'abord que, avec l'hypothèse de croissance de  $M$ , nous savons que  $A$  n'a que deux valeurs propres réelles (cf. théorèmes 4.7 et 4.9). Remarquons ensuite que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{(\alpha_i y + \beta_i - \lambda)^2} = \frac{1}{\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\alpha_i}{(\alpha_i y + \beta_i - \lambda)^2} dy = \frac{1}{\alpha_i} \left[ \frac{1}{(\alpha_i y + \beta_i - \lambda)} \right]_{x_i}^{x_{i+1}},$$

autrement dit

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{(\alpha_i y + \beta_i - \lambda)^2} = \frac{1}{\alpha_i} \left[ \frac{1}{\alpha_i x_i + \beta_i - \lambda} - \frac{1}{\alpha_i x_{i+1} + \beta_i - \lambda} \right],$$

c'est à dire, compte tenu de (48)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{(\alpha_i y + \beta_i - \lambda)^2} = \frac{x_{i+1} - x_i}{M_{i+1} - M_i} \left[ \frac{1}{M_i - \lambda} - \frac{1}{M_{i+1} - \lambda} \right].$$

En tenant compte de l'imparité de  $M$ , nous obtenons

$$\begin{cases} F(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{M_{i+1} - M_i} \left[ \frac{1}{M_i - \lambda} - \frac{1}{M_{i+1} - \lambda} \right] \\ + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{M_{i+1} - M_i} \left[ \frac{1}{M_i + \lambda} - \frac{1}{M_{i+1} + \lambda} \right]. \end{cases} \quad (49)$$

Autrement dit, la fonction  $F(\lambda)$ , a priori holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$  se prolonge en une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$ , plus précisément une fraction rationnelle, admettent  $2N$  pôles simples, à savoir les  $\pm M_i, i = 1, \dots, N$  (le lecteur vérifiera aisément que  $M = 0$  n'est pas un vrai pôle, les termes correspondant s'éliminant). Par suite, il est clair que l'équation  $F(\lambda) = 2$  se réduit à une équation polynomiale de degré  $2N$  ce qui démontre que  $A$  admet au plus  $2N$  valeurs propres non réelles.

Étudions maintenant les possibles racines réelles de l'équation  $F(\lambda) = 2$  (qui ne sont pas des valeurs propres dès qu'elles sont dans  $[-M_+, M_+]$ ). Nous savons déjà qu'il y en a deux, et seulement



deux, en dehors de  $[-M_+, M_+]$  (cf théorème 4.7). Nous remarquons que, au voisinage de chaque  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq N-1$

$$F(\lambda) \sim \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{M_{i+1} - M_i} - \frac{x_i - x_{i-1}}{M_i - M_{i-1}} \right) \frac{1}{M_i - \lambda}, \quad (\lambda \rightarrow M_i), \quad (50)$$

alors que par ailleurs:

$$F(\lambda) \sim -\frac{x_N - x_{N-1}}{M_N - M_{N-1}} \frac{1}{M_N - \lambda}, \quad (\lambda \rightarrow M_N).$$

de telle sorte que, en particulier:

$$F(\lambda) \rightarrow -\infty, \quad \text{quand } \lambda \rightarrow M_N^- \quad (51)$$

(i) Supposons maintenant que  $F$  est convexe dans  $[0, 1]$ , c'est à dire que

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} > \frac{M_i - M_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

En utilisant (50) et (51), on peut alors remarquer que dans tous les intervalles  $[M_i, M_{i+1}]$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow M_i^+} F(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow M_{i+1}^-} F(\lambda) = -\infty.$$

Autrement dit, la fonction  $F$  prend la valeur 2 au moins une fois dans chacun des  $N-1$  intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . Par symétrie on en déduit que l'équation  $F(\lambda) = 2$  a au moins  $2N-2$  racines réelles dans  $[-M_+, M_+]$ . Les racines de  $F(\lambda) = 2$  sont toutes réelles et  $A$  n'a donc pas de valeurs propres non réelles.

(ii) Supposons maintenant que  $F$  est concave dans  $[0, 1]$ , c'est à dire que

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} < \frac{M_i - M_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

On peut alors remarquer que dans les intervalles  $[M_i, M_{i+1}]$ ,  $1 \leq i \leq N-2$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow M_i^+} F(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow M_{i+1}^-} F(\lambda) = +\infty. \quad (52)$$

alors que dans l'intervalle  $[M_{N-1}, M_N]$

$$\lim_{\lambda \rightarrow M_{N-1}^+} F(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow M_N^-} F(\lambda) = -\infty. \quad (53)$$

Autrement dit, en utilisant (52) et le théorème des valeurs intermédiaires, on voit que la fonction  $F$  prend la valeur 2 au moins une fois dans chacun des  $N-2$  intervalles  $[M_i, M_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N-2$ . Par symétrie, on en déduit que l'équation  $F(\lambda) = 2$  a au moins  $2N-4$  racines réelles dans  $[-M_+, M_+]$ . Compte tenu des deux racines (valeurs propres) en dehors de  $[-M_+, M_+]$ , l'équation  $F(\lambda) = 2$  a deux autres racines.

Aucune de ces racines ne peut se situer dans l'un des intervalles  $[-M_N, -M_{N-1}]$  ou  $[M_{N-1}, M_N]$  car, compte tenu de (53), si  $F(\lambda) - 2$  s'annule dans  $[M_{N-1}, M_N]$ , elle s'y annule au moins deux fois (en comptant 2 fois une éventuelle racine double): par symétrie, on aurait donc 4 racines supplémentaires, ce qui est impossible. Par un raisonnement analogue, on voit que ces deux racines manquantes ne peuvent appartenir non plus à aucun des  $N-2$  intervalles  $[M_i, M_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N-2$ .

Dans l'intervalle  $[-M_1, M_1]$ , il est facile de voir que la fonction  $F(\lambda)$  est paire et tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $\pm M_1$ . De plus, elle est croissante pour  $x > 0$ , décroissante pour  $x < 0$  et donc atteint son minimum en  $x = 0$ . Deux cas de figure se présentent alors:

- $F(0) \geq 2$ . Dans ce cas, l'équation  $F(\lambda) = 2$  a deux racines opposées dans l'intervalle  $[-x_1, x_1]$  et ce ne sont pas des valeurs propres de  $A$ .
- $F(0) > 2$ . Dans ce cas, les deux racines manquantes sont donc imaginaires pures et conjuguées et ce sont des valeurs propres de  $A$ .

Nous illustrons ci dessous ces deux cas de figures sur deux cas particuliers correspondant à  $N = 6$  et un découpage uniforme de  $[0, 1]$ .

- Cas 1 :  $M$  est l'interpolée linéaire sur ce maillage de la fonction  $th(y)$ . Nous représentons le graphe de  $F(\lambda)$  sur l'axe réel (Figure 5). La droite horizontale rouge est la droite d'ordonnée constante égale à 2. Le lecteur notera que l'on ne voit pas de portion de courbe dans les intervalles  $] -M_N, -M_{N-1}[$  et  $]M_{N-1}, M_N[$  (ici  $M_N$  vaut  $th(1)$ ) : ceci est dû au fait que les valeurs prises par  $F$  dans ces intervalles sortent de l'intervalle  $[-12, 12]$ . Par ailleurs  $F(\lambda) - 2$  s'annule deux fois dans  $] -M_1, M_1[$ .

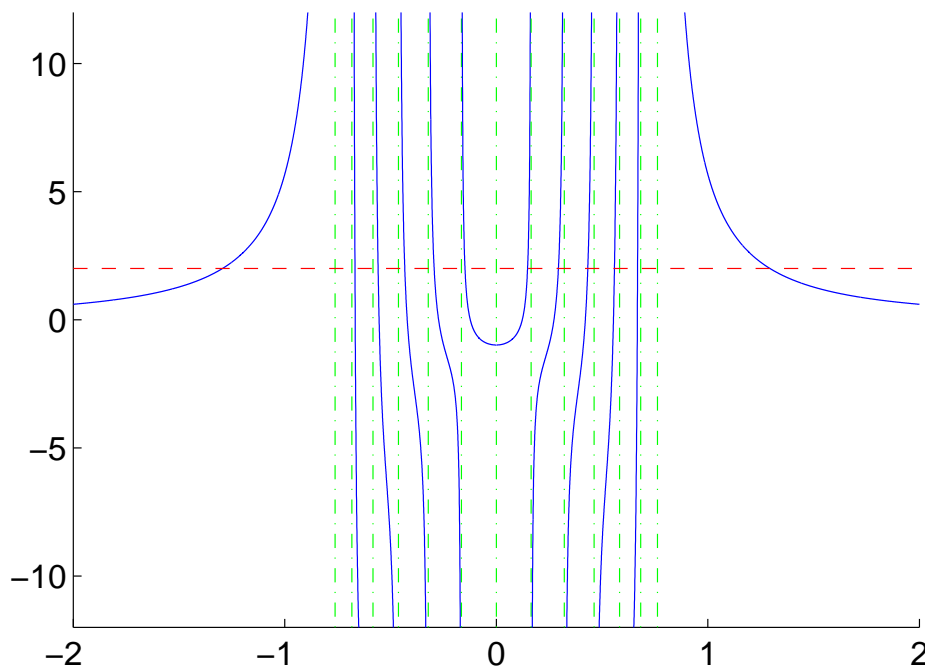


Figure 5: Le graphe de  $F(\lambda)$ .  $M(y)$  est l'interpolé linéaire sur 12 intervalles de  $th(y)$ .

- Cas 2 :  $M$  est l'interpolée linéaire sur ce maillage de la fonction  $\sqrt{y}$  (Figure 6). Les commentaires relatifs aux intervalles  $] -M_N, -M_{N-1}[$  et  $]M_{N-1}, M_N[$  (cette fois  $M_N$  vaut 1) sont toujours de mise. En revanche, on note cette fois que  $F(\lambda) - 2$  ne s'annule pas dans  $] -M_1, M_1[$ .

□

### 5.3.2 Le cas d'un profil continu et convexe sur $[0, 1]$ .

**Théorème 5.6** Soit  $M(y)$  un profil strictement croissant, impair et continu sur  $[-1, 1]$ . On suppose  $M(y)$  est convexe sur  $[0, 1]$ . Alors l'opérateur  $A$  n'admet aucune valeur propre non réelle.

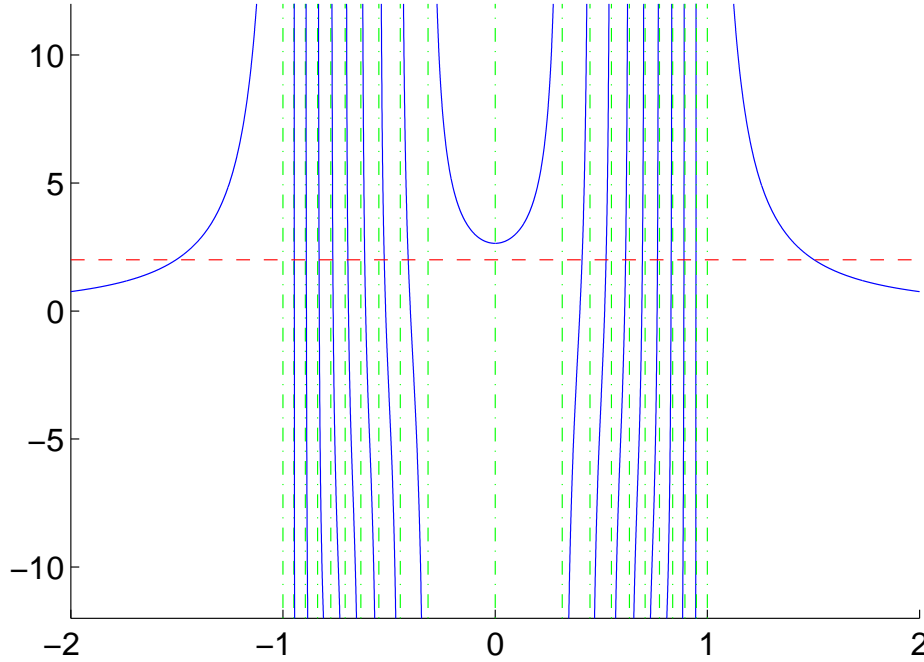


Figure 6: Le graphe de  $F(\lambda)$ .  $M(y)$  est l'interpolé linéaire sur 12 intervalles de  $\sqrt{y}$ .

PREUVE. Soit  $h = 1/N$ . On considère le maillage régulier de  $[0, 1]$  constitué par les points

$$x_i = i h, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Soit  $M_h(y)$  le profil linéaire par morceaux obtenu en prolongeant par imparité, l'interpolée linéaire de  $M$  sur ce maillage. Clairement:

$$\|M - M_h\|_{L^\infty([-1,1])} \leq \omega(M, h),$$

où  $\omega(M, h)$  désigne le module de continuité uniforme de  $M$

$$\omega(M, h) = \sup_{|y_1 - y_2| < h} |M(y_1) - M(y_2)|.$$

En particulier

$$\|M - M_h\|_{L^\infty([-1,1])} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Soit  $A_h$  l'opérateur associé au profil  $M_h$ . On est dans le cas d'application du point (i) du théorème 5.5 et nous savons que le spectre de  $A_h$  est purement réel, ce pour tout  $h$ . Comme

$$A - A_h = \begin{pmatrix} M - M_h & 0 \\ 0 & M - M_h \end{pmatrix}$$

il est clair que:

$$\|A - A_h\| = \|M - M_h\|_{L^\infty([-1,1])}$$

Si  $A$  admettait une valeur propre  $\lambda$ , d'après les résultats classiques (voir [6]) d'approximation spectrale, dans tout voisinage de  $\lambda$  il existerait, pour  $h$  assez petit, une valeur propre de  $A_h$ . Or ceci est impossible puisque le spectre de  $A_h$  est réel. □

### 5.3.3 Le cas d'un profil continu et concave sur $[0, 1]$ .

Un premier résultat général.

**Théorème 5.7** Soit  $M(y)$  un profil strictement croissant, impair et continu sur  $[-1, 1]$ . On suppose  $M(y)$  est concave sur  $[0, 1]$ . Alors on a l'alternative

- l'opérateur  $A$  n'admet aucune valeur propre non réelle,
- l'opérateur  $A$  admet exactement deux valeurs propre non réelles, imaginaires pures et conjuguées.

PREUVE. Il suffit d'adapter la démonstration du théorème 5.6 en s'appuyant cette fois sur la partie (ii) du théorème 5.5 □

Pour analyser plus finement le cas du profil concave sur  $[0, 1]$ , il faut s'intéresser à l'équation  $F(i\nu) = 2$  où

$$F(i\nu) = \int_{-1}^1 \frac{M(y)^2 - \nu^2}{[M(y)^2 + \nu^2]^2} dy. \quad (54)$$

Nous savons déjà, d'après le théorème 5.7, que

- Soit  $F(i\nu) = 2$  n'a aucune racine dans  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $F(i\nu) = 2$  a exactement une racine (simple) dans  $]0, +\infty[$ .

Comme la fonction  $F(i\nu)$  est régulière pour  $\nu > 0$  et comme

$$F(i\nu) \sim -\frac{2}{\nu^2} \quad (\nu \rightarrow +\infty), \quad (55)$$

on est simplement amené à situer la quantité (si on suppose qu'elle existe)

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} F(i\nu) \quad (\text{éventuellement infinie})$$

par rapport à 2.

**Le cas d'un profil suffisamment régulier à l'origine.**

**Théorème 5.8** On se place dans les hypothèses du théorème 5.7 et on suppose en outre que:

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2} < +\infty.$$

Alors l'opérateur  $A$  a deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées si et seulement si

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2} > 2.$$

PREUVE. En utilisant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} F(i\nu) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2}. \quad (56)$$

On conclut immédiatement. □

**Remarque 5.9** Les résultats (55) et (56) sont vraies indépendamment de toute hypothèse de continuité, monotonie ou convexité relative à  $M$ . On en déduit que, pour un profil antisymétrique quelconque, la double inégalité:

$$2 < \int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2} < +\infty,$$

est une condition suffisante pour l'existence de deux valeurs propres imaginaires pures de l'opérateur  $A$

**Remarque 5.10** Attention, si

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2} = +\infty,$$

il n'est pas vrai a priori que  $F(i\nu)$  tend vers  $+\infty$  quand  $\nu \rightarrow 0$ . Prendre par exemple le cas  $M(y) = M_+ y$  pour lequel la fonction  $F(i\nu)$  est toujours négative !

**Remarque 5.11** On retrouve le résultat du milieu bi-couches car dans ce cas:

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2} = \frac{2}{M_+^2}.$$

**Exemple 1 :** Pour le profil continu et impair tel que :

$$M(y) = M_+ y^\alpha \quad \text{si } y > 0,$$

où  $\alpha < 1/2$ , on voit que

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{M(y)^2} = \frac{2}{(1-2\alpha)M_+^2}.$$

On est donc assuré de l'existence d'une valeur propre imaginaire pure dès que:

$$(1-2\alpha)M_+^2 < 1.$$

**Le cas d'un profil dérivable à l'origine.** Le résultat du théorème 5.8 ne s'applique pas par exemple si on suppose que  $M$  est dérivable au voisinage de l'origine. C'est ce cas que nous allons étudier maintenant. Nous supposons désormais que  $M$  est dérivable, strictement croissante, impaire et concave sur  $[0, 1]$ . Introduisons la fonction inverse de  $M$ :

$$\mu(\lambda) = M^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in [0, M_+].$$

Des propriétés de  $M$ , nous déduisons que  $\mu$  est dérivable, strictement croissante et convexe sur  $[0, 1]$ . De plus  $\mu(0) = 0$ . En utilisant le changement de variable  $z = M(y)$  dans (54), nous obtenons (nous utilisons aussi l'imparité de  $M$ )

$$F(i\nu) = 2 \int_0^{M_+} \frac{z^2 - \nu^2}{[z^2 + \nu^2]^2} \mu'(z) dz \quad (57)$$

Nous allons maintenant supposer que  $M$  est de classe  $C^2$  dans chaque intervalle  $[-1, 0]$  et  $[0, 1]$ , ce qui entraîne que  $\mu$  est de classe  $C^2$  dans  $[-M_+, 0]$  et  $[0, M_+]$ . De plus, on calcule aisément que ( $f(0^+)$  désignant la limite à droite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0)

$$\mu'(0) = \frac{1}{M'(0)}, \quad \mu''(0^+) = -\frac{M''(0^+)}{M'(0)^3}$$

Le lecteur notera que l'hypothèse de concavité de  $M$  entraîne  $M''(0^+) \leq 0$  et que  $M$  est de classe  $C^2$  à l'origine si et seulement si  $M''(0^+) = 0$  auquel cas  $\mu''(0^+) = 0$ .

Pour  $z$  positif, nous pouvons écrire

$$\mu'(z) = \frac{1}{M'(0)} - \frac{M''(0^+)}{M'(0)^3} z + z r(z), \quad \text{avec} \quad \lim_{z \rightarrow 0} r(z) = 0. \quad (58)$$

En reportant (58) dans (57), nous obtenons

$$F(i\nu) = 2 \left( \frac{1}{M'(0)} \Phi_0(\nu) - \frac{M''(0^+)}{M'(0)^3} \Phi_1(\nu) + \Phi_r(\nu) \right),$$

où nous avons posé

$$\begin{cases} \Phi_0(\nu) = \int_0^{M_+} \frac{z^2 - \nu^2}{[z^2 + \nu^2]^2} dz, \\ \Phi_1(\nu) = \int_0^{M_+} \frac{z(z^2 - \nu^2)}{[z^2 + \nu^2]^2} dz, \\ \Phi_r(\nu) = \int_0^{M_+} \frac{z r(z)(z^2 - \nu^2)}{[z^2 + \nu^2]^2} dz. \end{cases} \quad (59)$$

Nous allons supposer que, quand  $z$  tend vers 0, la fonction  $r(z)$  tend vers 0 suffisamment vite pour que:

$$\int_0^{M_+} \frac{|r(z)|}{z} dz < +\infty. \quad (60)$$

On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Phi_r(\nu) = \int_0^{M_+} \frac{r(z)}{z} dz.$$

Par ailleurs, comme:

$$-\frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z^2 + \nu^2} \right) = \frac{z^2 - \nu^2}{[z^2 + \nu^2]^2}$$

il vient

$$\Phi_0(\nu) = \left[ \frac{z}{z^2 + \nu^2} \right]_{M_+}^0 = -\frac{M_+}{M_+^2 + \nu^2} \implies \lim_{\nu \rightarrow 0} \Phi_0(\nu) = -\frac{1}{M_+}$$

Par ailleurs

$$\Phi_1(\nu) = -\int_0^{M_+} z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z^2 + \nu^2} \right) dz = \int_0^{M_+} \frac{z}{z^2 + \nu^2} dz + \left[ \frac{z^2}{z^2 + \nu^2} \right]_{M_+}^0,$$

c'est à dire

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{M_+^2}{\nu^2} \right] - \frac{M_+^2}{M_+ + \nu^2} \implies \Phi_1(\nu) \sim \log\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad (\nu \rightarrow 0).$$

Deux cas de figure sont donc à considérer

$$\left| \begin{array}{l} M''(0^+) < 0 : \text{ Dans ce cas } \lim_{\nu \rightarrow 0} F(i\nu) = +\infty. \\ M''(0^+) = 0 : \text{ Dans ce cas } \lim_{\nu \rightarrow 0} F(i\nu) = 2 \left( \int_0^{M_+} \frac{r(z)}{z} dz - \frac{1}{M'(0)} \frac{1}{M_+} \right). \end{array} \right.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant:

**Théorème 5.12** *On suppose que la fonction  $M(y)$  est impaire, strictement croissante, de classe  $C^1$  sur  $[-1, 1]$ , de classe  $C^2$  et concave sur  $[0, 1]$ .*

- Si  $M''(0^+) = \lim_{y \rightarrow 0^+} M''(y) < 0$ ,

*A admet deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées.*

- Si  $M''(0^+) = 0$  ( $\Leftrightarrow M \in C^2([-1, 1])$ ) et si

$$\int_0^1 \frac{|M'(y) - M'(0)|}{M(y)^2} dy < +\infty, \quad (61)$$

*A admet deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées si et seulement si*

$$\int_0^1 \frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} dy - \frac{1}{M_+} > M'(0). \quad (62)$$

PREUVE. Seule la deuxième partie du théorème reste à éclaircir. Il suffit de remarquer, avec le changement de variable  $z = M(y)$ , que

$$\int_0^{M^+} \frac{r(z)}{z} dz = \int_0^1 \frac{r(M(y))}{M(y)} M'(y) dy$$

puis de noter que, lorsque  $M''(0^+) = 0$ , nous obtenons (prendre  $z = M(y)$  dans (58))

$$r(M(y)) = \frac{1}{M(y)} \left[ \mu'(M(y)) - \frac{1}{M'(0)} \right] = \frac{1}{M(y)} \left[ \frac{1}{M'(y)} - \frac{1}{M'(0)} \right],$$

auquel cas

$$\frac{r(M(y))}{M(y)} M'(y) = \frac{1}{M(y)^2} \frac{M'(0) - M'(y)}{M'(0)}.$$

On conclut alors facilement. Le lecteur notera que l'hypothèse (61) n'est autre que (60) alors que (62) n'est autre que  $\lim_{\nu \rightarrow 0} F(i\nu) < 2$ . □

**Remarque 5.13** *On notera que comme  $M$  est concave, la fonction*

$$\frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2}$$

*est positive. Les trois termes intervenant dans l'inégalité (62) sont donc positifs.*

*L'hypothèse (61) est très peu restrictive: elle demande tout juste "un peu plus" que la continuité de  $M''(y)$  en  $y = 0$ .*

**Exemple 2:** Considérons le profil particulier

$$M(y) = M_+ \sin \frac{\pi y}{2}.$$

On calcule aisément que

$$\frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} = \frac{\pi}{4M_+ \cos^2 \frac{\pi y}{4}}$$

et par conséquent que

$$\int_0^1 \frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} dy = \frac{\pi}{4M_+} \int_0^1 \frac{dy}{\cos^2 \frac{\pi y}{4}} = \frac{1}{M_+}.$$

L'inégalité (62) n'est, quelle que soit la valeur de  $M^+$ , jamais satisfaite et l'opérateur  $A$  correspondant à ce profil n'a donc pas de valeurs propres en dehors de l'axe réel.

**Exemple 3:** Considérons le profil particulier

$$M(y) = \frac{3}{2} M_+ y \left(1 - \frac{y^2}{3}\right).$$

On calcule aisément que

$$\frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} = \frac{6}{M_+} \frac{1}{[3 - y^2]^2} = \frac{2}{M_+} \left[ \frac{1}{3 - y^2} + \frac{y^2}{[3 - y^2]^2} \right],$$

Or

$$\int_0^1 \frac{y^2}{[3 - y^2]^2} dy = \int_0^1 \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{[3 - y^2]} \right] \frac{y}{2} dy = \left[ \frac{y}{2(3 - y^2)} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{3 - y^2}.$$

Par conséquent

$$\int_0^1 \frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} dy = \frac{2}{M_+} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{3 - y^2} \right] = \frac{1}{2M_+} \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \log(2 + \sqrt{3}) \right] \simeq \frac{0.88}{M_+}.$$

A nouveau, l'inégalité (62) n'est, quelle que soit la valeur de  $M^+$ , jamais satisfaite et l'opérateur  $A$  n'a donc pas de valeurs propres en dehors de l'axe réel.

**Exemple 4:** Considérons le profil particulier

$$M(y) = a \operatorname{th}(\alpha y), \quad a > 0, \quad \alpha > 0.$$

On calcule aisément que

$$\frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} = \frac{\alpha}{a},$$

et par conséquent que

$$\int_0^1 \frac{M'(0) - M'(y)}{M(y)^2} dy = \frac{\alpha}{a}.$$

L'inégalité (62) est équivalente à

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{1}{a \operatorname{th} \alpha} > a \alpha \iff a^2 < 1 - \frac{1}{\alpha \operatorname{th} \alpha}.$$

Soit  $\alpha^* > 0$  l'unique solution de l'équation

$$\alpha \operatorname{th} \alpha = 1.$$

- Si  $\alpha \leq \alpha^*$ ,  $f(\alpha) \equiv 1 - 1/\alpha \operatorname{th} \alpha \leq 0$  et l'inégalité (62) n'est pas satisfaite, quel que soit  $a$ . L'opérateur  $A$  n'a donc pas de valeurs propres en dehors de l'axe réel.
- Si  $\alpha \leq \alpha^*$ ,  $f(\alpha) \equiv 1 - 1/\alpha \operatorname{th} \alpha > 0$  et par suite
  - Si  $a < f(\alpha)^{\frac{1}{2}}$ , l'opérateur  $A$  a deux valeurs propres imaginaires pures et conjuguées.
  - Si  $a > f(\alpha)^{\frac{1}{2}}$ , l'opérateur  $A$  n'a pas de valeurs propres en dehors de l'axe réel.



## 5.4 Le cas des profils constants par morceaux.

Nous considérons maintenant le cas des profils constants par morceaux. Le principal intérêt de ce paragraphe est de mettre en évidence le danger d'une approximation numérique du profil  $M(y)$ , danger qui sera confirmé par les résultats numériques que nous présenterons dans la section 7. Pour résoudre (1), il est évidemment tentant de considérer un profil constant par morceaux, même si le profil initial est régulier : en effet, dans ce cas, on est naturellement ramené à résoudre un nombre fini d'équation de transport 1D. Nous allons voir qu'une telle approche est génériquement vouée à l'échec dans le sens où dès que le maillage est suffisamment fin, on tombe sur un problème fortement mal posé. C'est le sens du théorème 5.15.

Nous considérons à nouveau le maillage (47) et supposons maintenant que  $M$  est impair et constant dans chaque intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ :

$$\forall 0 \leq i \leq N-1, \quad M(y) = M_{i+1} \text{ dans } [x_i, x_{i+1}]. \quad (63)$$

Grâce au lemme 4.1, on peut toujours supposer que

$$0 \leq M_1 < M_2 < \dots < M_N = M_+. \quad (64)$$

Dans ce cas, on sait que toutes les valeurs  $\pm M_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, N$  sont des valeurs propres de multiplicité infinie de  $A$ . Par ailleurs, comme dans le cas linéaire par morceaux, la fonction  $F(\lambda)$  est en fait une fraction rationnelle dont les pôles sont précisément les  $2N$  valeurs réelles  $\pm M_i$  :

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) \left[ \frac{1}{(M_i - \lambda)^2} + \frac{1}{(M_i + \lambda)^2} \right]$$

On voit ainsi que l'équation  $F(\lambda) = 2$ , dont nous savons que les solutions constituent les valeurs propres simples de  $A$ , se ramène à une équation polynômiale de degré  $N$ , ce qui signifie que l'opérateur  $A$  a exactement  $4N$  valeurs propres différentes des  $\pm M_i$ . Nous savons aussi (théorème 4.7) que deux de ces valeurs propres sont réelles et opposées, situées respectivement dans  $] -\infty, -M_+[$  et  $]M_+, +\infty[$ . Nous allons maintenant nous intéresser aux éventuelles solutions (au nombre de  $4N - 2$  au plus) de l'équation  $F(\lambda) = 2$  qui sont comprises entre  $-M_N$  et  $+M_N$ , ce qui revient, par symétrie à s'intéresser à celles qui sont entre 0 et  $M_N$ .

Il est facile de voir que, pour tout réel positif  $a$  la fonction

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad F_a(\lambda) = \frac{1}{(a - \lambda)^2} + \frac{1}{(a + \lambda)^2}$$

est positive et convexe sur chacun des intervalles  $] -\infty, -a[$  et  $] -a, a[$  et  $]a, +\infty[$ . Nous supposons maintenant que  $M_1 > 0$ . Il est facile de voir que:

- Sur  $[0, M_1[$ ,  $F(\lambda)$  est strictement convexe et croissante. Elle atteint son minimum en  $\lambda = \lambda_0 \equiv 0$ .
- Sur  $]M_i, M_{i+1}[$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $F(\lambda)$  est strictement convexe et tend vers  $+\infty$  si  $\lambda \rightarrow M_i^+$  et  $\lambda \rightarrow M_{i+1}^-$ . Elle admet donc sur cet intervalle un unique minimum, strict, atteint en un point  $\lambda_i \in ]M_i, M_{i+1}[$ .

Nous illustrons cette propriété sur la figure 7. Par conséquent:

- Si  $F(0) \leq 2$ ,  $A$  admet une valeur propre dans  $[0, M_1[$  et une dans  $] -M_1, 0]$ . Sinon,  $A$  n'a pas de valeurs propres réelles dans cet intervalle et admet donc au moins deux valeurs propres non réelles.
- Si  $F(\lambda_i) \leq 2$  pour un certain  $i$  entre 1 et  $N_1$ ,  $A$  admet deux valeurs propres dans l'intervalle  $]M_i, M_{i+1}[$  et deux dans  $] -M_{i+1}, -M_i]$ . Sinon,  $A$  n'a pas de valeurs propres réelles dans cet intervalle et admet donc au moins quatre valeurs propres non réelles.

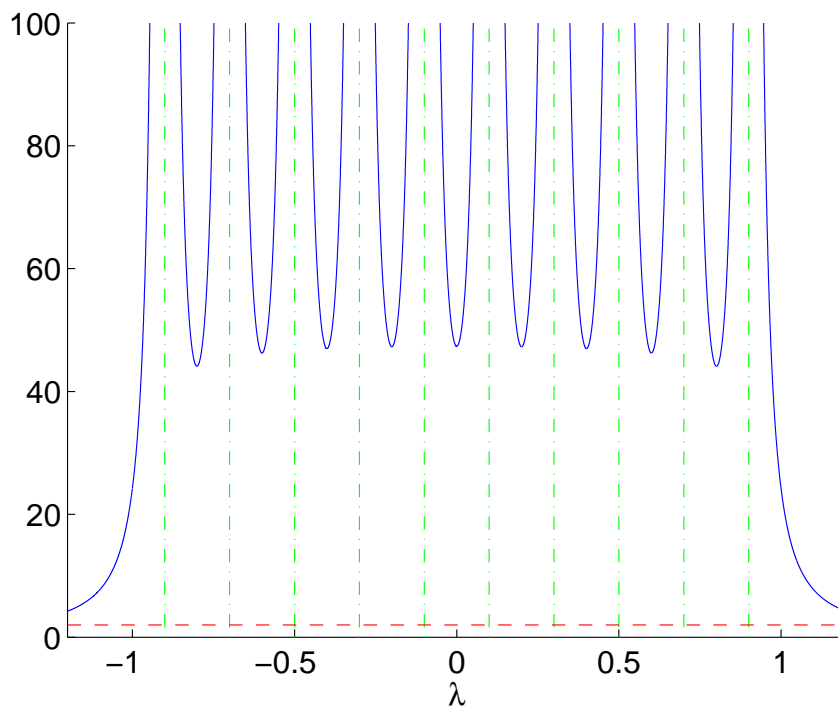


Figure 7: Le graphe de  $F(\lambda)$ .  $M(y)$  est l'interpolé linéaire sur 12 intervalles de  $\sqrt{y}$ .

Les deux situations extrêmes sont les suivantes:

- Tous les  $F(\lambda_i)$ ,  $i = 0, N - 1$ , sont inférieurs ou égaux à 2. Dans ce cas, toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles : il y a deux valeurs propres dans  $] - M_1, M_1[$  et deux valeurs propres dans chacun des intervalles  $]M_i, M_{i+1}[$  et  $] - M_i, M_{i+1}[$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ .
- Tous les  $F(\lambda_i)$ ,  $i = 0, N - 1$ , sont strictement supérieurs à 2. Dans ce cas, toutes les valeurs propres en dehors des  $\pm M_1$  sont non réelles dont deux (et deux seulement) sont imaginaires pures (voir remarque 5.14)

**Remarque 5.14** *Compte tenu du lemme 5.1, comme le nombre de valeurs propres non réelles est congru à 2 modulo 4. On en déduit l'existence d'au moins deux valeurs propres imaginaires pures. Or:*

$$F(i\nu) = \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) \left[ \frac{1}{(M_i - i\nu)^2} + \frac{1}{(M_i + i\nu)^2} \right] = 2 \sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) \frac{M_i^2 - \nu^2}{(M_i^2 + \nu^2)^2}.$$

*On voit immédiatement que, pour  $\nu > 0$  la fonction  $\nu \rightarrow F(i\nu)$  est strictement décroissante. Par conséquent, l'équation  $F(i\nu) = 0$  a au plus une solution positive...*

*Ce raisonnement démontre en fait qu'il y a exactement deux valeurs propres imaginaires pures et conjuguées dès qu'un des  $F(\lambda_i)$  pour  $i \geq 1$  est supérieur à deux.*

Pour obtenir facilement un résultat d'existence de valeur propre non réelle, remarquons que:

$$\forall \lambda \in ]M_i, M_{i+1}[, \quad F(\lambda) > \frac{x_{i+1} - x_i}{(\lambda - M_i)^2} + \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{(\lambda - M_{i+1})^2}$$

et par conséquent

$$F(\lambda) > \inf_{\lambda \in ]M_i, M_{i+1}[} \left[ \frac{x_{i+1} - x_i}{(\lambda - M_i)^2} + \frac{x_{i+2} - x_{i+1}}{(\lambda - M_{i+1})^2} \right]$$

c'est à dire, après un petit calcul simple:

$$F(\lambda_i) > \frac{\left( (x_{i+2} - x_{i+1})^{\frac{1}{3}} + (x_{i+1} - x_i)^{\frac{1}{3}} \right)^3}{(M_{i+1} - M_i)^2}.$$

On en déduit que  $A$  n'admet pas de valeur propre dans  $[M_i, M_{i+1}]$  dès que:

$$(M_{i+1} - M_i)^2 \leq \frac{1}{2} \left( (x_{i+2} - x_{i+1})^{\frac{1}{3}} + (x_{i+1} - x_i)^{\frac{1}{3}} \right)^3, \quad (65)$$

autrement dit dès que le saut entre  $M_i$  et  $M_{i+1}$  est assez petit. Cela permet évidemment de construire beaucoup de profils constants par morceaux donnant lieu à l'existence de valeurs propres non réelles.

Un cas particulièrement intéressant est le cas où  $M_i$  désigne la valeur d'une fonction continue  $M(y)$  au point  $x_i$ . Supposons pour simplifier le maillage régulier et posons

$$h = x_{i+1} - x_i$$

la condition (65) se réécrit:

$$\left( \frac{M_{i+1} - M_i}{h} \right)^2 \leq \frac{4}{h}.$$

Nous en déduisons le

**Théorème 5.15** *Soit  $M$  un profil antisymétrique croissant de classe  $C^1$  et soit  $M_h$  le profil constant par morceaux associé au maillage  $x_j = jh$  où  $h = 1/N$  et tel que*

$$M_i = M(x_i). \quad (66)$$

*Soit  $A_h$  l'opérateur associé au profil  $M_h$ . Alors dès que*

$$h \leq \frac{4}{\|M'\|_{L^\infty}^2}, \quad (67)$$

*l'opérateur  $A_h$  n'a pas de valeur propres réelles en dehors des  $\pm M_i$  et des deux valeurs propres réelles données par le théorème 4.7. Parmi les  $4N - 2$  valeurs propres restantes, deux, et deux seulement sont imaginaires pures et conjuguées.*

PREUVE. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout  $i$

$$\left( \frac{M_{i+1} - M_i}{h} \right)^2 \leq \|M'\|_{L^\infty}^2 < \frac{4}{h}$$

dès que (67) a lieu. On conclut aisément. □

## 6 Non existence de valeurs propres non réelles pour les profils symétriques à convexité fixe.

Nous allons établir dans cette section le théorème suivant

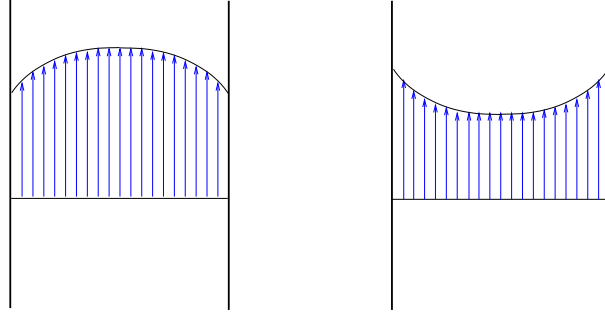


Figure 8: Profils symétriques à convexité fixe.

**Théorème 6.1** Soit  $M(y)$  un profil pair et continu sur  $[-1, 1]$ . On suppose  $M(y)$  est convexe ou concave (Figure 8). Alors l'opérateur  $A$  n'admet aucune valeur propre non réelle.

La démarche que nous allons adopter pour démontrer ce théorème est similaire à celle que nous avons utilisée pour les profils antisymétriques et consiste à regarder le cas d'un profil linéaire par morceaux.

Nous supposons donc dans un premier temps que la fonction  $M(y)$  est telle qu'il existe une suite finie

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad (68)$$

telle que  $M$  est linéaire strictement croissante dans chaque intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$  pour tout  $i < N$ . Autrement si  $M_i = M(x_i)$ , nous avons

$$\begin{cases} \forall 0 \leq i \leq N-1, & M(y) = \alpha_i y + \beta_i \text{ dans } [x_i, x_{i+1}], & \alpha_i > 0, \\ \alpha_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}, & \alpha_i x_l + \beta_i = M_l, & l = i, i+1 \end{cases} \quad (69)$$

où on peut toujours supposer que, quitte à changer le découpage, que:

$$\forall 0 \leq i \leq N-1, \quad \alpha_{i+1} \neq \alpha_i.$$

**Lemme 6.2** Soit  $M(y)$  le profil pair défini par (47) et (48). On suppose en outre que  $M$  est convexe. Alors l'opérateur  $A$  n'a aucune valeur propre non réelle.

PREUVE. Avec des calculs similaires à ceux menés dans la preuve du théorème 5.5, nous obtenons, après avoir exploité la parité de  $M$ :

$$F(\lambda) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{M_{i+1} - M_i} \left[ \frac{1}{M_i - \lambda} - \frac{1}{M_{i+1} - \lambda} \right]. \quad (70)$$

Autrement dit, la fonction  $F(\lambda)$ , a priori holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus [M_0, M_N]$  se prolonge en une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$ , plus précisément en une fraction rationnelle, admettant  $N+1$  pôles simples, à savoir les  $M_i, i = 0, \dots, N$ . Par suite, il est clair que l'équation  $F(\lambda) = 2$  se réduit à une équation polynomiale de degré  $N+1$  ce qui démontre que  $A$  admet au plus  $N+1$  valeurs propres non réelles.

Étudions maintenant les possibles racines réelles de l'équation  $F(\lambda) = 2$  (qui ne sont pas des valeurs propres dès qu'elles sont dans  $[M_0, M_N] \equiv [M_-, M_-]$ ). Nous savons déjà qu'il y en a deux,

et seulement deux, en dehors de  $[M_0, M_N]$  (cf théorème 4.7). Nous remarquons que, au voisinage de chaque  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$

$$F(\lambda) \sim \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{M_{i+1} - M_i} - \frac{x_i - x_{i-1}}{M_i - M_{i-1}} \right) \frac{2}{M_i - \lambda}, \quad (\lambda \rightarrow M_i), \quad (71)$$

alors que par ailleurs:

$$F(\lambda) \sim -\frac{x_N - x_{N-1}}{M_N - M_{N-1}} \frac{2}{M_N - \lambda}, \quad (\lambda \rightarrow M_N). \quad (72)$$

et

$$F(\lambda) \sim -\frac{x_1 - x_0}{M_1 - M_0} \frac{2}{M_0 - \lambda}, \quad (\lambda \rightarrow M_0). \quad (73)$$

L'hypothèse de convexité de  $M$ , jointe à la parité qui entraîne la croissance de  $M$  sur  $[0, 1]$ , signifie que

$$\forall 1 \leq i \leq N - 1, \quad \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i} > \frac{M_i - M_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} > 0.$$

En utilisant (71) et (72), on peut alors remarquer que dans tous les intervalles  $[M_i, M_{i+1}]$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow M_i^+} F(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow M_{i+1}^-} F(\lambda) = -\infty.$$

Autrement dit, la fonction  $F$  prend la valeur 2 au moins une fois dans chacun des  $N-1$  intervalles  $[M_i, M_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . On en déduit que l'équation  $F(\lambda) = 2$  a au moins  $N - 1$  racines réelles dans  $[M_0, M_N]$ . Les racines de  $F(\lambda) = 2$  sont toutes réelles et  $A$  n'a donc pas de valeurs propres non réelles. □

### Démonstration du théorème 6.1 .

PREUVE. Compte tenu du lemme 31, on peut se contenter de considérer le cas où  $M$  est convexe (en effet, si  $M$  est concave,  $-M$  est convexe).

On peut même se limiter au cas où  $M$  est strictement convexe (cf remarque 6.3). Dans ce cas, l'argument est le même que celui utilisé pour démontrer le théorème 5.6. Soit  $h = 1/N$ . On considère le maillage régulier de  $[0, 1]$  constitué par les points

$$x_i = i h, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Soit  $M_h(y)$  le profil linéaire par morceaux obtenu en prolongeant par parité, l'interpolée linéaire de  $M$  sur ce maillage. Des propriétés de parité et de stricte convexité de  $M$ , on s'aperçoit que le profil  $M_h$  vérifie les hypothèses 6.9 et relève donc de l'application du lemme 6.2. On conclut alors, comme au théorème 5.6, par un argument d'approximation. □

**Remarque 6.3** Une fonction  $M$  convexe, peut être vue comme la limite uniforme d'une suite de fonctions strictement convexes. On passe donc du cas strictement convexe au cas convexe par un argument d'approximation.

**Remarque 6.4** Le fait d'avoir fait l'hypothèse que la fonction  $M(y)$  était paire permet essentiellement de simplifier la preuve du lemme 6.2. En reprenant la preuve de ce lemme sans considérer l'hypothèse de parité, on peut s'apercevoir - mais c'est un peu pénible - que seule la convexité de la fonction  $M$  est importante pour aboutir au résultat. On peut ainsi établir le théorème suivant

**Théorème 6.5** Soit  $M(y)$  continu sur  $[-1, 1]$ , convexe ou concave. Alors l'opérateur  $A$  n'admet aucune valeur propre non réelle.

## 7 Approximation et résultats numériques

Nous nous intéressons à l'approximation numérique du problème aux valeurs propres (17) par des techniques de discrétisation "standard" permettant de se ramener à la résolution d'un problème spectral en dimension finie. Ce faisant, nous poursuivons un double objectif:

- Illustrer nos principaux résultats théoriques, essentiellement ceux du chapitre 5 relatifs aux profils antisymétriques.
- Mettre en lumière les difficultés de l'approximation numérique du problème d'évolution (1), dans l'esprit des résultats du paragraphe 5.4.

### 7.1 Discrétisation du problème aux valeurs propres

Pour approcher le problème, on va utiliser une méthode de Galerkin, ce qui passe par une approximation de l'espace  $\mathbf{V} = L^2([-1, 1])$  par un sous espace de dimension finie:

$$\mathbf{V}_h = \text{span} [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_h}]$$

où  $h$  est un paramètre d'approximation destiné à tendre vers 0 et où la dimension  $N_h$  de  $V_h$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $h$  tend vers 0. Le problème approché s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, v_h, \lambda) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbb{C}, \quad (u_h, v_h) \neq (0, 0), \\ \int_{-1}^1 M(y) u_h(y) \tilde{u}_h(y) dy + \int_{-1}^1 v_h(y) \tilde{u}_h(y) dy = \lambda \int_{-1}^1 u_h(y) \tilde{u}_h(y) dy \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_h(y) \tilde{v}_h(y) dx dy + \int_{-1}^1 M(y) v_h(y) \tilde{v}_h(y) dy = \lambda \int_{-1}^1 v_h(y) \tilde{v}_h(y) dy \end{array} \right. \quad (74)$$

Si on choisit la base  $\{\psi_j\}$  orthonormée dans  $L^2$  et si on désigne par  $U_h$  (resp.  $V_h$ ) le vecteur des composantes de  $u_h$  (resp.  $v_h$ ) on aboutit au problème de valeurs propres:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_h U_h + V_h = \lambda U_h \\ \mathbf{E}_h U_h + \mathbf{M}_h V_h = \lambda V_h \end{array} \right. \quad (75)$$

où :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_h)_{i,j} &= \int_{-1}^1 M(y) \psi_i(y) \psi_j(y) dy \\ (\mathbf{E}_h)_{i,j} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i(y) \psi_j(x) dx dy. \end{aligned}$$

En d'autres termes, on approche le spectre de l'opérateur  $A$  (qui comporte une partie continue et une partie discrète) par le spectre, nécessairement purement discret, de la matrice carrée  $2N_h \times 2N_h$ :

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_h & \mathbf{I} \\ \mathbf{E}_h & \mathbf{M}_h \end{pmatrix}.$$

On a étudié trois choix possibles pour l'espace d'approximation  $\mathbf{V}_h$ .

#### 7.1.1 Méthode 1 : discrétisation à l'aide de fonctions constantes par morceaux

On subdivise l'intervalle  $[-1, 1]$  en  $2N$  intervalles de longueur  $h = \frac{1}{N}$ . Si  $\chi_{j+\frac{1}{2}}$  désigne la fonction caractéristique de l'intervalle

$$[y_j, y_{j+1}] \quad \text{où} \quad y_j = jh, \quad j = -N, \dots, N-1,$$

on pose:

$$\begin{cases} \psi_j = \frac{1}{\sqrt{2h}} \chi_{j-\frac{1}{2}}, & j = 1, \dots, N, \\ \psi_j = \frac{1}{\sqrt{2h}} \chi_{j+\frac{1}{2}}, & j = -N, \dots, -1. \end{cases} \quad (76)$$

auquel cas les  $\{\psi_j, \pm j = 1, \dots, N\}$  forment un système orthonormé dans  $L^2$  et

$$V_h = \text{span} [\psi_j, \pm j = 1, \dots, N].$$

Dans ce cas, il est facile de voir que  $\mathbf{E}_h$  est la matrice de rang 1 définie par

$$(\mathbf{E}_h)_{i,j} = h = \frac{1}{N}, \quad \pm i = 1, \dots, N, \quad \pm j = 1, \dots, N.$$

Par ailleurs pour calculer de façon approchée la matrice  $\mathbf{M}_h$ , on calcule les intégrales avec la règle du point milieu (exacte si  $M(y) \in P_1([y_i, y_{i+1}])$ , auquel cas  $\mathbf{M}_h$  est la matrice diagonale définie par :

$$(\mathbf{M}_h)_{i,j} = M(y_{j+\frac{1}{2}}) \delta_{ij}, \quad y_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2}) h, \quad \pm i = 1, \dots, N, \quad \pm j = 1, \dots, N.$$

### 7.1.2 Méthode 2 : discrétisation spectrale

On se donne un entier  $N \geq 1$ , on pose  $h = 1/N$  et on pose:

$$\mathbf{V}_h = [\psi_0] + \text{span} [(\psi_n^1, \psi_n^2), n = 1, \dots, N].$$

où nous avons défini:

$$\psi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \psi_n^1 = \cos(n\pi y) \quad n > 0, \quad \psi_n^2 = \sin(n\pi y) \quad n > 0,$$

qui forment un système orthonormal dans  $L^2$ . On notera que  $N_h = 2N + 1$ . Dans la pratique on numérote les degrés de liberté d'une fonction  $u_h$  de 0 à  $2N$  de la façon suivante:

$$u_h = u_0 \psi_0 + \sum_{j=1}^N u_j \psi_j^1 + \sum_{j=1}^N u_{N+j} \psi_j^2.$$

Les fonctions  $\psi_n^1$  et  $\psi_n^2$  étant toutes à moyenne nulle, on en déduit que la matrice  $\mathbf{E}_h$  a un seul élément non nul:

$$(\mathbf{E}_h)_{0,0} = 1, \quad (\mathbf{E}_h)_{i,j} = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (0,0)$$

Par contre la matrice  $\mathbf{M}_h$  n'est en général pas diagonale comme c'était le cas pour méthode 1.

Plus précisément, si on fait la décomposition par blocs du vecteur  $U_h$ :

$$U_h = (U_h^1, U_h^2)^t, \quad U_h^1 = (u_0, u_1, \dots, u_N), \quad U_h^2 = (u_{N+1}, \dots, u_{2N})$$

alors on a la décomposition de la matrice  $\mathbf{M}_h$  suivante:

$$\mathbf{M}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_h^{cc} & \mathbf{M}_h^{cs} \\ \mathbf{M}_h^{sc} & \mathbf{M}_h^{ss} \end{pmatrix} \quad (77)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{mn}^{cc} = \int_{-1}^1 M(y) \cos m\pi y \cos n\pi y dy, & 0 \leq m, n \leq N, \\ \mathbf{M}_{mn}^{ss} = \int_{-1}^1 M(y) \sin m\pi y \sin n\pi y dy, & 1 \leq m, n \leq N, \\ \mathbf{M}_{mn}^{cs} = \mathbf{M}_{nm}^{sc} = \int_{-1}^1 M(y) \cos m\pi y \sin n\pi y dy, & 0 \leq m \leq N, \quad 1 \leq n \leq N. \end{cases} \quad (78)$$

Le lecteur pourra remarquer que:

- Si  $M(y)$  est impaire,  $\mathbf{M}_h^{cc} = 0$  et  $\mathbf{M}_h^{ss} = 0$ .
- Si  $M(y)$  est paire,  $\mathbf{M}_h^{cs} = 0$  et  $\mathbf{M}_h^{sc} = 0$ .

### 7.1.3 Méthode 3 : discrétisation par polynômes orthogonaux

On choisit les polynômes de Legendre à une constante près, afin d'avoir l'orthonormalité: On introduit les fonctions:

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(y) \quad n \geq 0$$

où les  $P_n$  sont polynômes de Legendre définis par récurrence par:

$$P_0(y) = 1, \quad P_1(y) = y, \quad (n+1)P_{n+1}(y) - (2n+1)yP_n(y) + nP_{n-1}(y) = 0.$$

Des propriétés des polynômes de Legendre, en particulier leur orthogonalité, on déduit aisément que les  $\psi_N$  forment un système orthonormal de  $L^2$ .

On se donne  $N$  un entier supérieur à 1,  $h = 1/N$  et on définit:

$$\mathbf{V}_h = \text{span} [\psi_n, n = 0, \dots, N].$$

auquel cas on a  $N_h = N + 1$ . Par orthogonalité à  $P_0 = 1$ , les polynômes de Legendre sont tous à moyenne nulle sur  $[-1, 1]$ . On en déduit que, comme pour la méthode 2, la matrice  $\mathbf{E}_h$  a un seul élément non nul :

$$(\mathbf{E}_h)_{0,0} = 1, \quad (\mathbf{E}_h)_{i,j} = 0 \quad \text{si } (i,j) \neq (0,0)$$

## 7.2 Comparaison des trois méthodes pour deux profils stables particuliers

### 7.2.1 Le profil linéaire.

Nous considérons le profil linéaire antisymétrique:

$$M(y) = y$$

Nous connaissons dans ce cas la structure du spectre de  $A$  qui est purement réel et constitué:

- du segment  $[-1, 1]$  qui constitue le spectre continu,
- des deux valeurs propres  $\pm \sqrt{2}$ .

**Méthode 1** Sur la figure 9, on a représenté dans le plan complexe les valeurs propres du système discret pour  $N = 100, 200$  et  $400$  intervalles, pour  $M$  linéaire. Les résultats appellent les commentaires suivants:

- Attirons tout d'abord l'attention du lecteur sur les échelles très différentes du dessin pour la partie réelle et la partie imaginaire ! Si nous avons choisi pour la partie imaginaire la même échelle que celle choisie pour la partie réelle, les 6 "courbes discrètes" qui apparaissent sur la figure 9, courbes que nous commenterons un peu plus loin, se seraient écrasées sur l'axe réel et auraient semblé "remplir" l'intervalle  $[-1, 1]$  (voir également nos commentaires sur l'approximation du spectre continu).
- Le spectre de  $\mathbf{A}_h$  est constitué de deux valeurs propres réelles opposées  $\pm \lambda_h^*$  et de  $4N + 2$  valeurs propres non réelles, qu'on peut regrouper par paires conjuguées

$$\Lambda_c(h) = \{ (\lambda_j(h), \bar{\lambda}_j(h)), j = -(N-1), \dots, N-1 \}.$$

De plus, on vérifie que  $\lambda_{-j}(h) = -\lambda_j(h)$ . et que  $\lambda_0(h)$  et  $\bar{\lambda}_0(h)$  sont les deux seules valeurs propres imaginaires pures de  $\mathbf{A}_h$ .



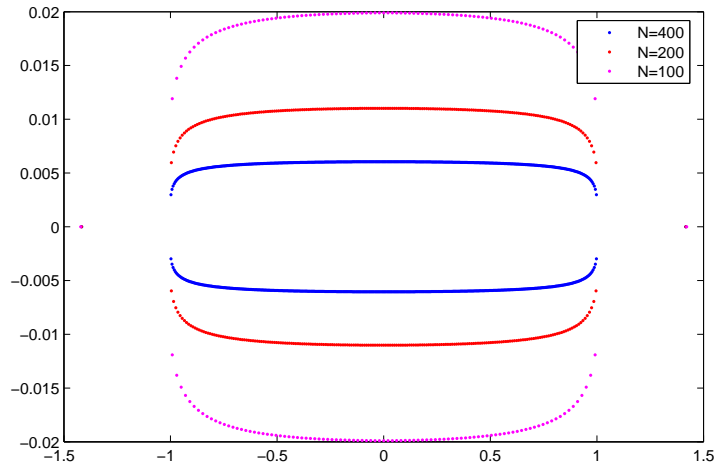
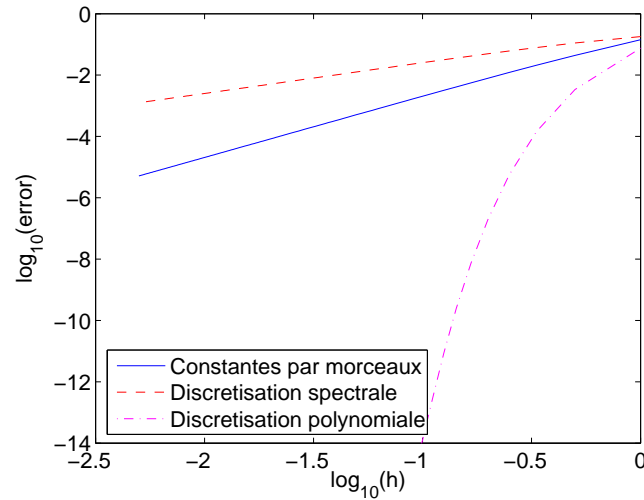


Figure 9: Valeurs propres pour un profil linéaire, Méthode 1.

- Les deux valeurs propres réelles constituent une approximation du spectre ponctuel de  $A$ . On observe que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \pm \lambda_h^* = \pm \sqrt{2}.$$

Nous représentons, en échelle logarithmique, les variations de l'erreur  $\lambda_h^* - \sqrt{2}$  en fonction du pas de discrétisation  $h = 1/N$ . La courbe de convergence qui nous concerne ici est la courbe bleue qui correspond à la méthode 1 (les autres courbes sont celles qui correspondent aux méthodes 2 et 3). On peut mesurer que la convergence est en  $O(h^2)$ .

Figure 10: Approximation des valeurs propres de  $A$  par les trois méthodes.

- L'ensemble fini  $\Lambda_c(h)$  constitue en quelque sorte une discrétisation du spectre continu de  $A$ . C'est lui qui débouche sur les "courbes discrètes" évoquées plus haut. Plus exactement:

$$\forall \lambda \in [-1, 1], \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mu \in \Lambda_c(h)} |\lambda - \mu| = 0.$$

Bien évidemment, pour chaque  $\lambda \in [-1, 1]$ ,  $\inf_{\mu \in \Lambda_c(h)} |\lambda - \mu|$  est atteint par deux valeurs propres conjuguées  $\lambda_{j\lambda}(h)$  et  $\bar{\lambda}_{j\lambda}(h)$ . De façon imagée, on peut dire que, après discrétisation, chaque réel du spectre continu est éclaté en deux valeurs propres conjuguées non réelles dont la partie imaginaire tend vers 0. Ceci est cohérent avec le “fait” que chaque élément du spectre continu de  $A$  est de multiplicité 2 (voir remarque 4.15).

- Le fait que les éléments du spectre continu “partent” dans le plan complexe de façon anti-symétrique par rapport à l’axe réel entraîne nécessairement que le même procédé de discrétisation appliqué au problème d’évolution (1) débouche sur un problème semi-discret (i. e. discret en  $y$  et continu en  $(x, t)$ ) qui est instable. Ceci est à rapprocher du résultat obtenu au paragraphe 5.4, lorsqu’on se contente de discrétiser le profil  $M$  de façon constante par morceaux (le problème spectral posé restant donc en dimension infinie). Plus précisément, la solution du problème de Cauchy semi-discret aura en général une croissance en temps en

$$e^{\alpha(h)t} \quad \text{où} \quad \alpha(h) = \sup_{\mu \in \Lambda_c(h)} \text{Im} \mu.$$

(On observe numériquement que  $\alpha(h) = \text{Im} \lambda_0(h)$ .)

Bien entendu,  $\alpha(h)$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Sur la figure 11, on représente en échelle log-log les variations de  $\alpha(h)$  pour les trois méthodes. La courbe correspondant à la méthode 1 est la courbe bleue. On peut ainsi vérifier que la convergence vers le spectre continu de  $A$  est linéaire, c’est à dire en  $O(h)$ .

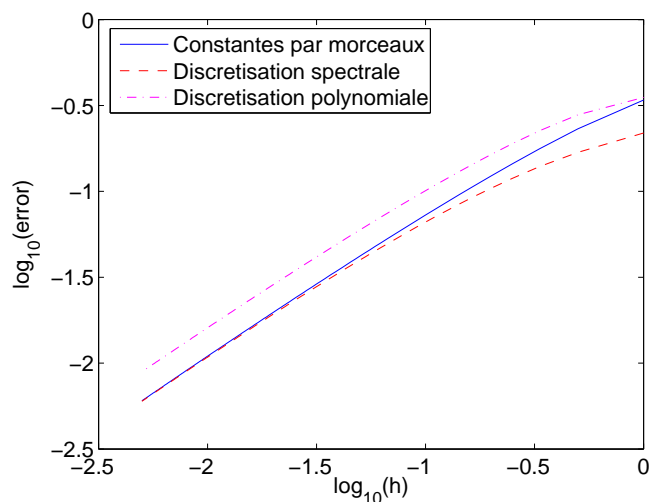


Figure 11: Approximation du spectre continu de  $A$  par les trois méthodes.

- Il est naturel de s’intéresser aux vecteurs propres  $(u_h, v_h) \in V_h \times V_h$  de  $\mathbf{A}_h$ . On observe que chaque valeur propre de  $\Lambda_c(h)$  est simple et, bien sûr, si  $(u_j(h), v_j(h))$  désigne le vecteur propre (non réel) associé à  $\lambda_j(h)$ , le vecteur propre associé à  $\bar{\lambda}_j(h)$  est  $(\bar{u}_j(h), \bar{v}_j(h))$ . Par ailleurs, il est facile de montrer que:

$$(u_{-j}(h), v_{-j}(h)) = (u_j(h), -v_j(h))$$

Sur la figure 12, nous représentons les quatre vecteurs propres associés à quatre valeurs propres: les deux valeurs propres les plus proches de  $\lambda = 0.5$ , de la “forme”  $\lambda = 0.5 \pm \delta$  où  $\delta$  est “petit” et les deux valeurs propres les plus proches de  $\lambda = -0.5$ , de la “forme”  $\lambda = -0.5 \pm \delta$  (avec le même  $\delta$ ). On constate que les modes propres sont très localisés autour de  $y = 0.5$

pour les deux valeurs propres proches de  $\lambda = 0.5$  et autour de  $y = 0.5$  pour les deux valeurs propres proches de  $\lambda = 0.5$ . Ceci était attendu et en conformité avec l'analyse formelle de la remarque 4.15.

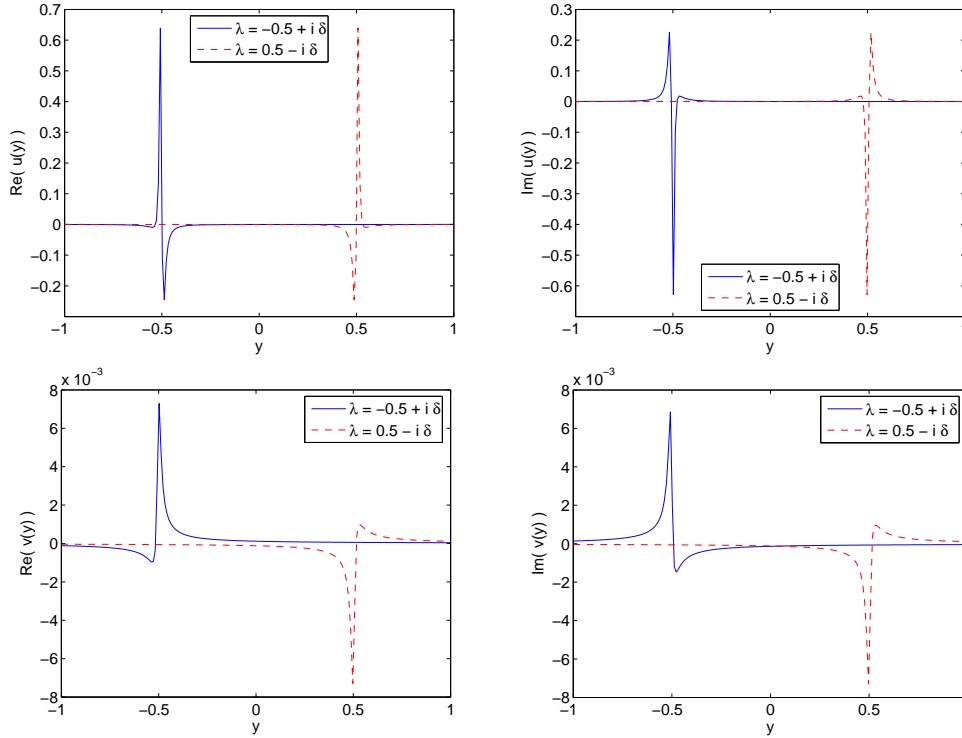


Figure 12: Modes propres associés au spectre continu pour  $\lambda \simeq \pm 0.5$ .

**Méthode 2.** On calcule aisément que

$$\mathbf{M}_{m,n}^{cs} = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{(-1)^{m+n} - (m+n)\pi}{(m+n)^2} + \frac{(-1)^{m-n} - (m-n)\pi}{(m-n)^2} \right]$$

Sur la figure 13, on a représenté dans le plan complexe les valeurs propres du système discret pour 100, 200 et 400 fonctions de base. On obtient qualitativement, des résultats étonnamment similaires à ceux obtenus avec la méthode 1. Si on y regarde plus près, on constate que:

- En ce qui concerne l'approximation du spectre ponctuel de  $A$ , on a seulement une convergence en  $O(h)$  (voir la courbe rouge de la figure 10).
- L'approximation du spectre continu est, comme pour le cas de la méthode 1 en  $O(h)$  (voir la courbe rouge de la figure 11).

**Méthode 3.** On se place dans le cas d'un profil linéaire. Le lecteur vérifiera que :

$$M_{m,n} = \begin{cases} \frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} & \text{si } n = m+1 \\ \frac{2m}{(2m-1)(2m+1)} & \text{si } n = m-1 \end{cases}$$

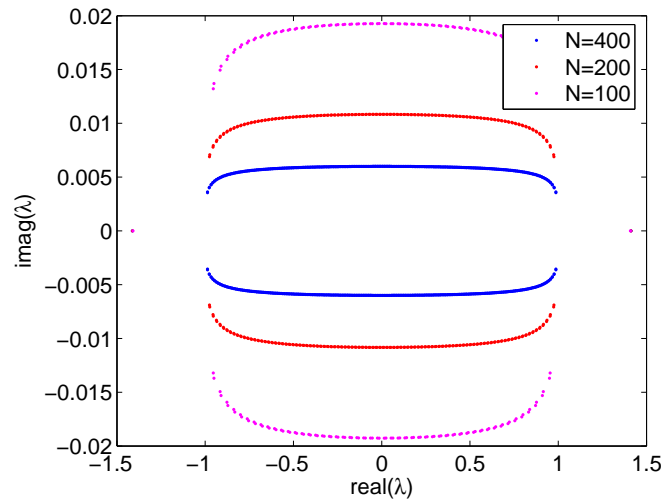


Figure 13: Valeurs propres pour un profil linéaire, Méthode 2.

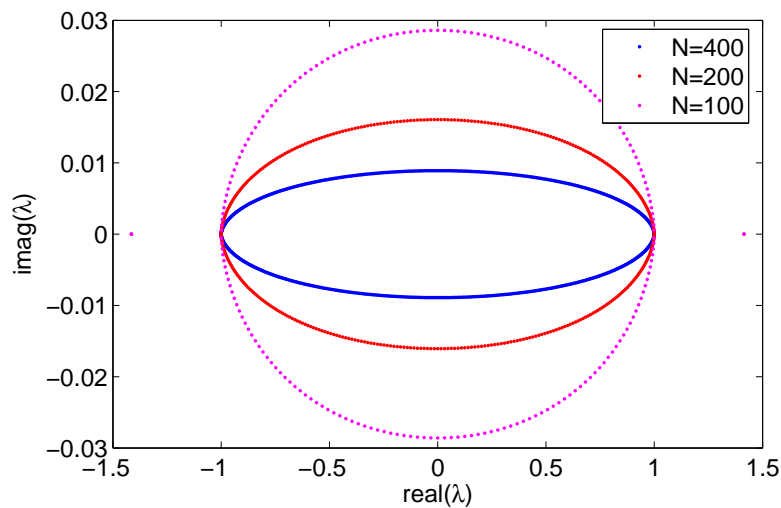


Figure 14: Valeurs propres pour un profil linéaire, Méthode 3.

Sur la figure 14, on a représenté dans le plan complexe les valeurs propres du système discret pour 100, 200 et 400 fonctions de base. On obtient un comportement similaire aux deux configurations précédentes.

### 7.2.2 Le profil sinusoïdal.

Nous considérons le profil linéaire antisymétrique:

$$M(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Nous connaissons dans ce cas la structure du spectre de  $A$  qui est purement réel et constitué:

- du segment  $[-1, 1]$  qui constitue le spectre continu,

- des deux valeurs propres  $\pm \lambda_0$  où  $\lambda_0$  est caractérisé par

$$\lambda_0 > 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda_0 - \sin \frac{\pi y}{2})^2} = 2.$$

**Méthode 1.** Nous représentons sur la figure 15 la distribution des valeurs propres de  $A_h$  pour  $N = 100, 200, 400$ . Le lecteur vérifiera que les commentaires faits dans le cas du profil linéaire restent qualitativement valables. Seule la forme de la courbe des valeurs propres est légèrement changée (elle est plus “bombée” que dans le cas du profil linéaire).

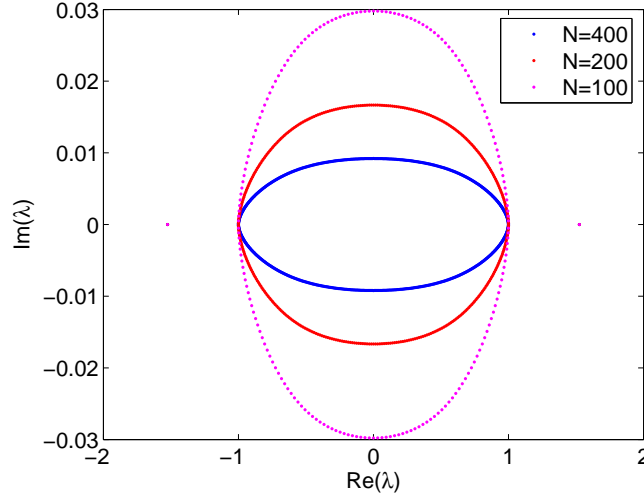


Figure 15: Valeurs propres pour un profil sinusoidal, Méthode 1.

**Méthode 2.** On calcule aisément que

$$\mathbf{M}_{m,n}^{cs} = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{(m+n)(-1)^{m+n+1}}{4(m+n)^2 - 1} + \frac{(n-m)(-1)^{n-m+1}}{4(n-m)^2 - 1} \right]$$

Sur la figure 16, on a représenté dans le plan complexe les valeurs propres du système discret pour 100, 200 et 400 fonctions de base. On obtient un comportement similaire au cas du profil linéaire, si ce n'est la forme des “courbes discrètes” des valeurs propres, plus complexe.

**Méthode 3.** Voir la figure 17.

## 7.3 Etude numérique de quelques profils bien choisis.

### 7.3.1 Profils $C^1$ mais non $C^2$

On vérifie sur la figure 18, qu'on est stable dans le cas du profil convexe,  $C^1$ , non  $C^2$ , alors qu'on obtient deux valeurs propres imaginaires pures dans le cas concave.

### 7.3.2 Cas avec absence de spectre ponctuel

On choisit un profil, de telle sorte qu'on ait pas a priori de spectre ponctuel.

$$M(y) = 4(1 - (1 - y)^{0.4})$$

On voit sur la figure 19, que toutes les valeurs propres tendent vers l'intervalle  $[-4, 4]$ .

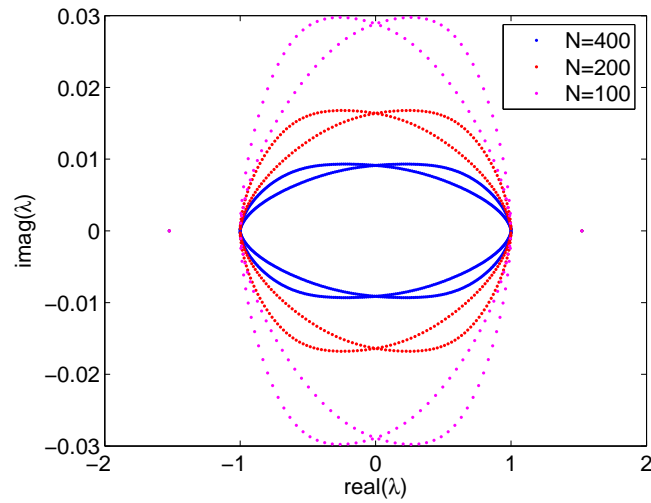


Figure 16: Valeurs propres pour un profil sinusoidal, Méthode 2.

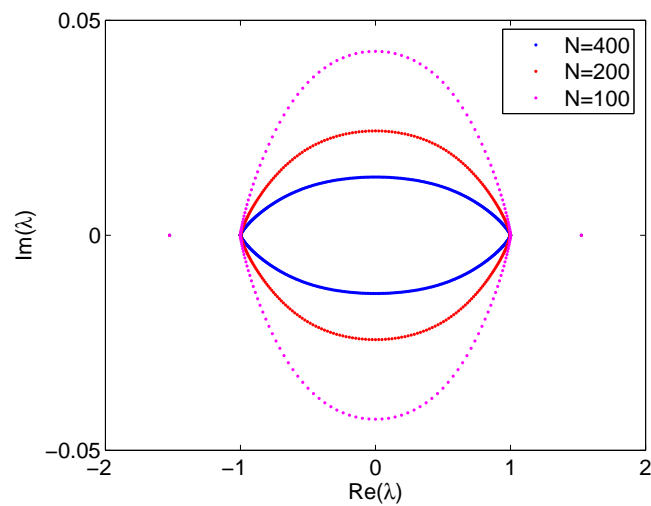


Figure 17: Valeurs propres pour un profil sinusoidal, Méthode 3.

### 7.3.3 Etude de profils en tangente hyperbolique.

On se place dans le cas d'un profil de la forme :

$$M(y) = a \tanh(2y)$$

On prévoit de manière théorique que ce profil donne lieu à des instabilités si

$$a > \sqrt{1 - \frac{1}{2 \tanh(2)}} \quad (\approx 0.6938)$$

On vérifie cette propriété sur la figure 20.

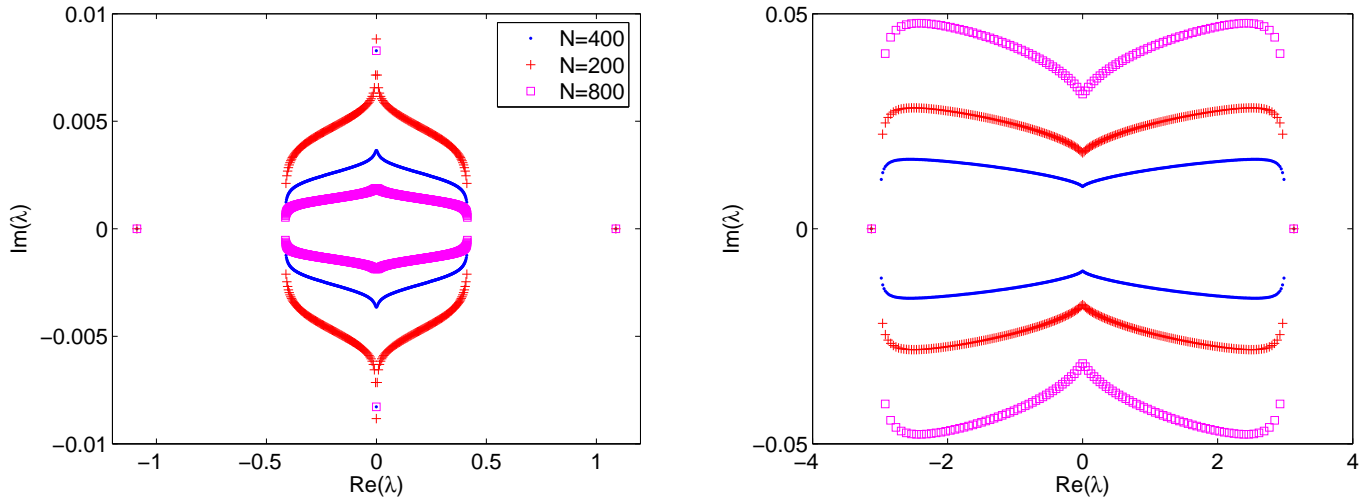


Figure 18: A gauche, distribution des valeurs propres pour un profil concave  $M(y) = \sqrt{1+y} - 1$ ,  $y \in [0, 1]$ . A droite, distribution pour le profil réciproque  $M(y) = y^2 + 2y$  (profil convexe). Dans les deux cas, le profil est  $C^1$  mais non  $C^2$ .

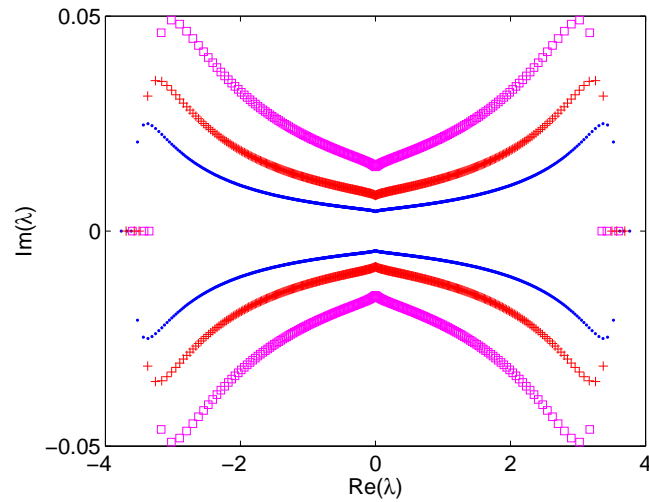


Figure 19: Distribution des valeurs propres pour un profil où on ne trouve pas de spectre ponctuel  $M(y) = 4(1 - (1 - y)^{0.4})$ ,  $y \in [0, 1]$ .

### 7.3.4 Etude de profils constant par morceaux

On peut aussi considérer le cas d'un profil constant par morceaux, où le nombre d'intervalles utilisé pour discrétiser  $u$  est plus grand que le nombre d'intervalles où le profil  $M$  est constant. Dans ce cas on observe sur la figure 21, que certaines valeurs propres sont réelles sur l'intervalle  $[M_-, M_+]$ , et d'autres sont toujours dans le plan complexe.

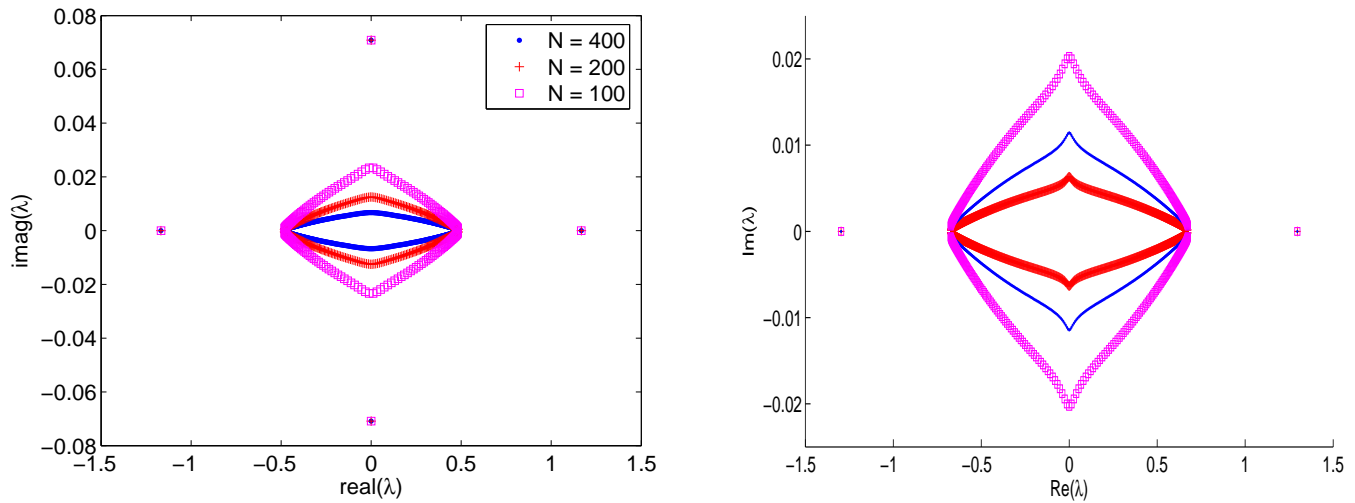


Figure 20: A gauche, valeurs propres pour  $M(y) = 0.5 \tanh(2y)$ . A droite, valeurs propres pour  $M(y) = 0.7 \tanh(2y)$ .

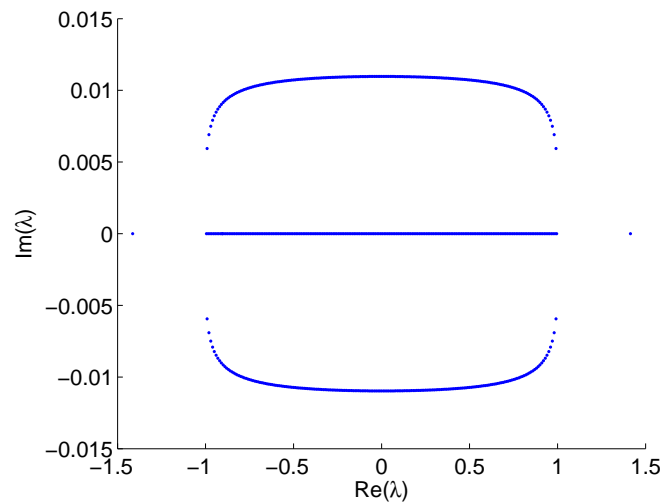


Figure 21: Distribution des valeurs propres pour un profil linéaire  $M(y) = y$ . On approche  $M$  par un nombre d'intervalles  $N$  deux fois plus petit que pour  $u$  et  $v$ .

## References

- [1] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre, and E. Lunéville. Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIB Méc.*, 329(8):601–606, 2001.
- [2] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. With a foreword by John Miles.
- [3] A. B. Friedland and A. D. Pierce. Reflexion of Acoustic Pulses from Stable and Unstable Interface between Moving Fluids. *The physics of fluids*, 12:1148–1159, 1969.



- 
- [4] H. Galbrun. *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
  - [5] D. S. Jones and J. D. Morgan. The instability of a vortex sheet on a subsonic stream under acoustic radiation. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 72:465–488, 1972.
  - [6] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
  - [7] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 47 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004. Reprint of the 1989 edition.
  - [8] Guillaume Legendre. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. PhD thesis, Université Paris 6, Septembre 2003.
  - [9] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
  - [10] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
  - [11] Martin Schechter. *Spectra of partial differential operators*, volume 14 of *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986.
  - [12] Lloyd N. Trefethen and Mark Embree. *Spectra and pseudospectra*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The behavior of nonnormal matrices and operators.



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399