



**HAL**  
open science

# Méthodes d'approximation numérique pour le pricing des options vanilles et asiatiques dans le modèle de Heston de volatilité stochastique

Najed Ksouri

► **To cite this version:**

Najed Ksouri. Méthodes d'approximation numérique pour le pricing des options vanilles et asiatiques dans le modèle de Heston de volatilité stochastique. [Rapport Technique] 2007. inria-00157141v1

**HAL Id: inria-00157141**

**<https://inria.hal.science/inria-00157141v1>**

Submitted on 25 Jun 2007 (v1), last revised 26 Jun 2007 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Méthodes d'approximation numérique pour le  
pricing des options vanilles et asiatiques dans le  
modèle de Heston de volatilité stochastique*

Najed Ksouri

N° ????

mai 2007

Thème NUM

 *rapport  
technique*



## Méthodes d'approximation numérique pour le pricing des options vanilles et asiatiques dans le modèle de Heston de volatilité stochastique

Najed Ksouri

Thème NUM — Systèmes numériques

Projet TOSCA

Rapport technique n° 1000 — mai 2007 — 91 pages

**Résumé :** Ce travail porte sur les « Méthodes d'approximation numérique pour le pricing des options vanilles et asiatiques dans le modèle de Heston de volatilité stochastique » et permet d'apporter une solution aux problèmes d'évaluation des produits dérivés, plus précisément les options en finance de marché. La résolution de ces problèmes d'évaluation est basée sur les probabilités et le calcul stochastique. En effet, il est naturel de considérer que les évolutions des cours en bourse suivent des équations différentielles stochastiques dont la simulation nécessite leur discrétisation par différences finies et la génération de différents scénarios possibles. L'objectif en finance de marché étant de déterminer la valeur des produits dérivés en bourse (ou pricing), il y a donc le défi de rapidité et surtout de précision à relever. Les techniques de Monte Carlo et de quantification sont très adaptées pour résoudre ce genre de problème. Ce projet a pour but donc d'implémenter des techniques récentes de discrétisation des EDS (différences finies, marginales) et de les combiner avec plusieurs nouvelles méthodes de simulation de Monte Carlo (variables antithétiques, échantillonnage préférentiel) et de quantification afin d'améliorer l'évaluation des prix. Le modèle que nous avons choisi de simuler est le modèle de Heston de volatilité stochastique, qui est un modèle certes compliqué à simuler mais très utilisé dans la pratique. Le but final de ce travail est d'étudier l'efficacité de ces méthodes selon le type de marchés (actions, taux d'intérêt, taux de change, ...) et aussi dans des cas extrêmes de grande volatilité. Dans ce rapport, deux types d'options ont été étudiées à savoir les options vanilles et les options exotiques de type asiatiques qui sont les deux types d'options les plus utilisées en bourse.

**Mots-clés :** Pricing d'options, options vanilles et asiatiques, Monte Carlo, quantification fonctionnelle, réduction de variance, variables antithétiques, échantillonnage préférentiel, algorithme de Robbins Monro, algorithme de Levenberg-Marquardt, schéma Quadratic Exponential

## **Approximation Numerical Methods for vanilla and asian options for Heston stochastic volatility model pricing**

**Abstract:** This work concerns the “Approximation Numerical Methods for Vanilla and Asian options for Heston stochastic volatility model pricing”. Its aim is to find a solution to options evaluation problems in financial markets. The evaluation problems resolution is based on probabilities and stochastic calculus. Indeed, the stock exchange prices evolutions are known to follow stochastic differential equations whose simulation requires their discretization by finite differences method and also the generation of different possible scenarios. The objective in financial market is to evaluate the options value (or pricing), there is thus a challenge to speed the calculation and also to improve the precision. The Monte Carlo and quantification techniques are very adapted to solve this sort of problem. This project consists in implementing recent techniques of SDE discretization (finite differences, marginals) and to combine them with several new methods of Monte Carlo simulation (antithetic variables, importance sampling) and of quantification in order to improve the pricing step. The model that we chose to simulate is the Heston stochastic volatility model which is complicated to simulate but which is very used in practice. The final goal of this work is to study the effectiveness of these methods according to the markets products type (actions, interest rate, exchange rate, ...) and also in extreme situations of high volatility. In this report, two types of options are studied : vanilla and asian exotic options which are the two most used options.

**Key-words:** Options pricing, Vanilla and asian options, Monte Carlo, Functional quantization, Variance reduction, antithetic variables, Importance Sampling, Robbins Monro algorithm, Levenberg-Marquardt algorithm, Quadratic exponential scheme

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Rappels et notions élémentaires</b>	<b>11</b>
1.1 Rappels mathématiques	11
1.1.1 Processus stochastique	11
1.1.2 Martingale	11
1.1.3 Mouvement brownien ou processus de Wiener	11
1.1.4 Intégrale stochastique	12
1.1.5 Equations différentielles stochastiques (EDS)	13
1.1.6 Lemme d'Itô	13
1.1.7 Théorème de Girsanov	14
1.1.8 Mouvement brownien géométrique	14
1.1.9 Loi du $\chi^2$	14
1.2 Notions élémentaires en finance	14
1.2.1 Options	15
1.2.2 Approches de pricing des options	15
1.2.3 Méthodes de discrétisation (différences finies)	16
1.2.4 Schéma d'Euler	16
1.2.5 Méthodes de Monte Carlo	17
1.2.6 Techniques de réduction de variance	18
1.2.7 Modèle de Black & Scholes	21
1.2.8 Processus du CIR	24
1.2.9 Modèle de Heston de volatilité stochastique	24
<b>2 Méthodes d'amélioration numérique implémentées</b>	<b>27</b>
2.1 Méthode de Bossy et Diop pour la discrétisation du CIR	27
2.1.1 Expansion de l'erreur	27
2.2 Simulation efficiente d'Andersen du modèle de Heston	28
2.2.1 Schéma de discrétisation de la volatilité	29
2.2.2 Schéma de discrétisation de l'actif	30
2.2.3 Amélioration du calcul de l'intégrale de la volatilité	30
2.2.4 Correction Martingale pour l'actif	30
2.3 Solution semi-exacte	31
2.4 Echantillonnage préférentiel de Arouna et algorithmes de Robbins-Monro	33
2.4.1 Echantillonnage préférentiel de Arouna	33
2.4.2 Algorithme de Robbins-Monro	35
2.4.3 Projections de Chen	36
2.4.4 Amélioration de la méthode d'Arouna	36
2.5 Méthode d'échantillonnage préférentiel : Least Squares	37
2.5.1 Méthode de Gauss-Newton	38

2.5.2	Méthode de Levenberg-Marquardt . . . . .	38
2.5.3	Application à la réduction de variance . . . . .	38
2.6	Techniques de quantification . . . . .	39
2.6.1	Quantification fonctionnelle du mouvement brownien . . . . .	40
2.6.2	Implémentation numérique . . . . .	41
2.6.3	Application aux options vanilles et asiatiques . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Résultats numériques et discussion</b>	<b>45</b>
3.1	Présentation des modèles . . . . .	45
3.2	Graphiques pour les options vanilles . . . . .	46
3.2.1	Présentation des méthodes . . . . .	46
3.2.2	Temps de calcul des méthodes . . . . .	47
3.2.3	Marché de taux de change à long terme . . . . .	48
3.2.4	Marché de taux d'intérêt à long terme . . . . .	49
3.2.5	Marché d'actions à court terme . . . . .	50
3.2.6	Cas test classique . . . . .	51
3.3	Graphiques pour les options asiatiques . . . . .	52
3.3.1	Présentation des méthodes . . . . .	52
3.3.2	Temps de calcul des méthodes . . . . .	52
3.3.3	Marché de taux de change à long terme . . . . .	53
3.3.4	Marché de taux d'intérêt à long terme . . . . .	54
3.3.5	Marché d'actions à court terme . . . . .	55
3.3.6	Cas test classique . . . . .	56
3.4	Guide des méthodes à utiliser . . . . .	56
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>61</b>
A.1	Résultats pour le marché de taux de change à long terme . . . . .	61
A.1.1	Options vanilles européennes (Call) . . . . .	61
A.1.2	Options asiatiques (Call) . . . . .	68
A.2	Résultats pour le marché de taux d'intérêt à long terme . . . . .	70
A.2.1	Options vanilles européennes (Call) . . . . .	70
A.2.2	Options asiatiques (Call) . . . . .	76
A.3	Résultats pour le marché d'actions à court terme . . . . .	78
A.3.1	Options vanilles européennes (Call) . . . . .	78
A.3.2	Options asiatiques (Call) . . . . .	84
A.4	Résultats pour le marché d'actions stable à court terme . . . . .	87
A.4.1	Options vanilles européennes (Call) . . . . .	87
A.4.2	Options asiatiques (Call) . . . . .	89
<b>B</b>	<b>Algorithme de Levenberg-Marquardt</b>	<b>91</b>

## Table des figures

1.1	Fonction de répartition et densité de probabilité de la loi du $\chi^2$ pour plusieurs degrés de liberté	15
1.2	Effet de la technique des variables antithétiques sur la variance de l'évaluation d'une option vanille par Monte Carlo . . . . .	19
1.3	Effet de la technique des variables antithétiques sur les trajectoires simulées par Monte Carlo .	19
1.4	Effet de la technique de l'échantillonnage préférentiel sur les trajectoires simulées par Monte Carlo . . . . .	21
1.5	Evolution du taux de change de l'EURO par rapport aux autres monnaies entre 1999 et 2007 .	22
1.6	Evolution du taux d'intérêt américain entre 2003 et 2006 . . . . .	23
1.7	Evolution des cours des actions Nintendo, Sony et Microsoft en 2006 . . . . .	23
1.8	Simulations de 10 et 100 trajectoires du mouvement brownien géométrique et leurs moyennes par Monte Carlo . . . . .	24
2.1	Simulation du processus par le schéma de Bossy et Diop du CIR dans le cas $\sigma^2 < 2k\theta$ . . . .	28
2.2	Simulation du processus par le schéma de Bossy et Diop du CIR dans le cas $\sigma^2 > 2k\theta$ . . . .	28
2.3	Effet de la technique de Andersen sur l'erreur d'évaluation d'une option par Monte Carlo . . .	30
2.4	Fonction de répartition exacte de $V_T$ sachant $V_0$ et celle approchée par une loi Normale et une loi Log Normale . . . . .	31
2.5	Fonction de répartition exacte de $V_T$ sachant $V_0$ et celle approchée par les schémas QE et TG pour deux valeurs de $\sigma$ . . . . .	31
2.6	Effet de la technique de Arouna sur la variance de l'évaluation d'une option par Monte Carlo .	37
2.7	Effet de la technique des Least Squares sur la variance de l'évaluation d'une option par Monte Carlo . . . . .	39
2.8	96 trajectoires du mouvement brownien simulées par Monte Carlo Simple. . . . .	42
2.9	96 trajectoires du mouvement brownien simulées par quantification. . . . .	42
2.10	Effet de l'interpolation sur l'erreur de l'évaluation des options par quantification . . . . .	43
3.1	Temps de calcul des méthodes implémentées pour les options vanilles . . . . .	47
3.2	Temps de calcul des méthodes implémentées pour les options asiatiques . . . . .	52



## Table des symboles et abréviations

BS	Black & Scholes.
CIR	Processus Cox-Ingersoll-Ross.
EDS	Equation différentielle stochastique.
$K$	Strike d'une option (prix d'exercice).
$r$	Taux d'intérêt sans risque.
$S_t$	Cours d'un actif financier.
$T$	Maturité d'une option.
$V_t$	Volatilité d'un actif financier.
$W_t$	Mouvement brownien.
$\sigma$	Coefficient de volatilité.



# Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un stage Internship effectué au sein de l'équipe de recherche TOSCA commune à l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA Lorraine) et à l'Institut de Mathématiques Élie Cartan de Nancy. Ce stage a été encadré par Madalina Deaconu et Antoine Lejay. L'objectif de TOSCA est de développer et d'analyser des méthodes numériques probabilistes. Deux champs d'application sont privilégiés : la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles (en particulier en mécanique des fluides et en neutronique), et le calcul de quantités complexes en mathématiques financières.

Le but de ce travail au sein du projet TOSCA est d'étudier les méthodes de simulations d'EDS dans un cas concret en finance de marchés.

En effet, la gestion de risque d'un portefeuille d'actifs financiers exige la simulation de processus aléatoires multidimensionnels régis par des équations différentielles stochastiques interdépendantes. Une des applications pratiques de ces méthodes est par exemple le calcul de la VaR (montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné).

Le pricing des options peut être aussi réalisé par la simulation des EDS. Les valeurs des options dépendent en effet de la valeur des actifs financiers dont l'évolution est modélisée par des équations différentielles stochastiques. Ces options sont extrêmement utilisées dans les marchés financiers pour la couverture. Les méthodes de pricing sont diverses et font intervenir plusieurs disciplines mathématiques. Les méthodes Monte Carlo ont l'avantage de l'efficacité pour les processus en grande dimension ( $> 4$ ). Leurs applications au pricing d'options a fait l'objet d'une littérature extrêmement riche vu leur intérêt pratique non seulement en finance mais aussi en physique, en biologie, etc.

Le modèle qui régit l'évolution des actifs financiers et qui sera étudié dans ce travail est le modèle de Heston de volatilité stochastique qui est complexe et difficile à simuler. Pour cela nous disposons de méthodes exactes pour évaluer les options sur ce modèle sous certaines conditions. Les méthodes implémentées sont des méthodes qui sont valables pour tous les processus aléatoires solutions d'équations différentielles stochastiques. Ces méthodes sont extensibles à des cas de processus multidimensionnels.

La première partie de ce rapport est dédiée aux rappels mathématiques et aux notions générales nécessaires pour la compréhension des méthodes. Dans la deuxième partie et dans le cadre de la simulation du modèle de Heston, nous présenterons les méthodes que nous avons implémentées pour la discrétisation des EDS (différences finies, marginales) et les méthodes de simulation de Monte Carlo (variables antithétiques, échantillonnage préférentiel) et de quantification, afin d'améliorer l'évaluation des prix. Dans une dernière partie, et après une présentation des résultats obtenus, nous présentons un guide des domaines d'efficacité des méthodes.



# Chapitre 1

## Rappels et notions élémentaires

Ce chapitre regroupe les notions élémentaires de mathématiques nécessaires pour la compréhension de ce rapport. Pour de plus amples détails sur ces notions, voir [Pro05, Øks03, KS91, Jea06, Dea07, LL97].

### 1.1 Rappels mathématiques

#### 1.1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique (ou processus aléatoire) représente une évolution, généralement dans le temps, d'une variable aléatoire.

Plus précisément, soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(A, \mathcal{A})$  un espace mesurable. On appelle processus aléatoire à valeur dans  $(A, \mathcal{A})$  un élément  $(X_t(\omega))_{t \geq 0, \omega \in \Omega}$ , où pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire à valeur dans  $(A, \mathcal{A})$ .

Si  $(\mathcal{F}_t)_t$  est une filtration, on appelle processus aléatoire adapté, à valeurs dans  $(A, \mathcal{A})$ , un élément  $X$  tel que  $X_t$  soit une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable à valeurs dans  $(A, \mathcal{A})$ .

Pour  $\omega \in \Omega$  fixé, la fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $A$  qui à  $t$  associe  $X_t(\omega)$  est appelée la trajectoire associée à la réalisation  $\omega$ .

#### 1.1.2 Martingale

On se donne un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_t$ .  $(\mathcal{F}_t)_t$  est donc une famille croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ .

##### Définition

Une famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_t$  si :

- $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et intégrable pour tout  $t$ .
- $\mathbb{E}[X_t / \mathcal{F}_s] = X_s, \quad \forall s \leq t$ .

#### 1.1.3 Mouvement brownien ou processus de Wiener

##### Historique

Le botaniste Robert Brown a observé en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux a expliqué les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de mouvement au hasard.

En 1900, Louis Bachelier [Bac00], en vue d'étudier les cours de la bourse, a mis en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant  $t + s$  dépend de sa position en  $t$  et

ne dépend pas de sa position avant  $t$ . Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du mouvement brownien a été développée pour la bourse, avant de l'être pour la physique.

En 1905, Albert Einstein a déterminé la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. La même année, Smoluchowski a décrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires.

La première étude mathématique rigoureuse de ce processus est faite par Norbert Wiener (1923) qui a exhibé également une démonstration de l'existence du brownien. Paul Lévy (1948) s'est intéressé aux propriétés fines des trajectoires du brownien. Depuis, le mouvement brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener, Itô, Watanabe, Meyer, Yor, Le Gall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman, ...).

### Définition du mouvement brownien

Le mouvement brownien est un processus stochastique à incréments stationnaires, indépendants et distribués selon une loi normale. Les trajectoires de ce processus sont continues.

Exemples :

- trajectoire du pollen dans l'eau ;
- trajectoire de la pollution dans une rivière ;
- prix des actifs dans un marché financier.

### Propriétés

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien, alors pour tout  $t, \tau \geq 0$ ,  $(W_{t+\tau} - W_t)$  est indépendant de  $W_u, 0 \leq u \leq t$  et est distribué selon une loi normale centrée de variance  $\tau$ .

Ses principales propriétés sont d'être :

- fini : l'échelonnage de la variance du mouvement brownien en fonction du temps garantit que le mouvement brownien reste fini ;
- continu : les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais fractales et non différentiables nulle part ;
- markovien : la distribution conditionnelle de  $W_t$  sachant toute l'information jusqu'à  $\tau \leq t$  dépend uniquement de  $W_\tau$  ;
- une martingale : l'espérance conditionnelle de  $W_t$  sachant toute l'information jusqu'à  $\tau \leq t$  est  $W_\tau$  ( $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_\tau] = W_\tau$ ) ;
- de variation quadratique finie : si on divise  $[0, T]$  en  $n + 1$  points  $t_i = \frac{it}{n}$  alors

$$\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T;$$

- normal :  $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ .

C'est un processus très riche et extrêmement utilisé en finance pour modéliser des processus aléatoires.

*Remarque 1.* Pour tout  $\lambda$  réel  $(\exp(\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t), t \geq 0)$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

### 1.1.4 Intégrale stochastique

#### Définition

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique  $d$ -dimensionnel continu adapté et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel. L'intégrale stochastique de  $X_t$  se définit comme suit :

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n X_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \quad t_i = \frac{it}{n}$$

## Propriétés

L'intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

- $\int_0^t X_s dW_s$  est une martingale ;
- $\mathbb{E}[\int_0^t X_s dW_s] = 0$  ;
- $\text{Var}\left(\int_0^t X_s dW_s\right) = \int_0^t \|X_s\|_d^2 ds$ .

### 1.1.5 Equations différentielles stochastiques (EDS)

On se donne un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . Une équation différentielle stochastique réelle est une équation de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

ou sous une forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Soit  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  à valeurs réelles, données :

- $b(t, X_t)$  est appelé coefficient de transport ou de dérive (ou drift) ;
- $\sigma(t, X_t)$  est appelé coefficient de diffusion ou volatilité.

On se donne également un  $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien  $(W_t)_{t \geq 0}$  sur cet espace. Une solution de l'EDS précédente est un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  continu,  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté tel que les intégrales  $\int_0^t b(s, X_s) ds$  et  $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$  aient un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

soit satisfaite pour tout  $t$ ,  $\mathbb{P}$  presque sûrement.

**Théorème 1 (Théorème d'existence).** *Sous les hypothèses suivantes :*

(a) *il existe  $K$  tel que pour tout  $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}$  :*

- $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$ .
- $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq (1 + |x|^2)$ .

(b) *la condition initiale  $X_0$  est indépendante de  $(W_t)_{t \geq 0}$  et est de carré intégrable,*

*il existe une unique solution forte de l'EDS à trajectoires continues pour  $t \in T$ . De plus cette solution vérifie*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < \infty.$$

### 1.1.6 Lemme d'Itô

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique en dimension 1, vérifiant l'EDS suivante

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard en dimension 1. Soit  $f(t, x)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $t$  et  $\mathcal{C}^2$  par rapport  $x$  alors  $f$  vérifie :

$$f(t, X_t) = f(0, x) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s, X_s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

Le lemme d'Itô est aux variables stochastiques ce que les séries de Taylor sont au cas déterministe.

### 1.1.7 Théorème de Girsanov

Soit  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  un processus aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que :

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s\|^2 ds \right) \right] < +\infty.$$

Le processus  $W^\theta$  défini par :

$$W_t^\theta = W_t - \int_0^t \theta_s ds,$$

est un mouvement brownien sous la probabilité  $\mathbb{P}_\theta$  de densité (par rapport à  $\mathbb{P}$ ) :

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}} = \exp \left( \int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s\|^2 dt \right).$$

### 1.1.8 Mouvement brownien géométrique

Un mouvement brownien géométrique est un processus stochastique continu dont le logarithme suit un mouvement brownien. Il est appliqué dans la modélisation mathématique de certains cours dans les marchés financiers. Il est principalement employé pour le pricing des options parce qu'une quantité qui suit un mouvement brownien géométrique prend toute valeur strictement positive et seuls les changements élémentaires de la variable aléatoire sont significatifs. Le mouvement brownien géométrique représente une approximation raisonnable de l'évolution des cours en bourse.

Un processus stochastique  $(S_t)_{t \geq 0}$  est appelé mouvement brownien géométrique si il est solution de l'EDS suivante :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien et  $r$  (le « drift ») et  $\sigma$  (la « volatilité ») sont constants.

Cette équation a une solution analytique obtenue facilement grâce à la formule d'Itô :

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

### 1.1.9 Loi du $\chi^2$

La « loi du  $\chi^2$  » (prononcer khi-deux ou khi carré) est une loi à densité de probabilité. Cette loi est caractérisée par un paramètre dit « degrés de liberté » à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels (non nuls).

Soit  $X_1, \dots, X_k$ ,  $k$  variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée et réduite, alors la variable  $X$  définie par  $X := \sum_{i=1}^k X_i^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $k$  degrés de liberté.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi du  $\chi^2$  à  $k$  degrés de liberté, on notera  $\chi^2(k)$  la loi de  $X$ .

La densité de  $X$ , notée  $f_X$ , est connue et donnée par

$$f_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}},$$

pour tout  $t$  positif où  $\Gamma$  note la fonction gamma.

L'espérance mathématique de  $X$  vaut  $k$  et sa variance vaut  $2k$ .

Les figures (Fig 1.1) représentent la fonction de répartition et la densité de probabilité de la loi du  $\chi^2$  pour plusieurs degrés de liberté.

## 1.2 Notions élémentaires en finance

Cette partie contient les notions élémentaires de finance et de mathématiques financières qui seront supposées connues par la suite. Pour plus d'informations sur ces données, voir [Hul05], [Hau07] et [Gla04].

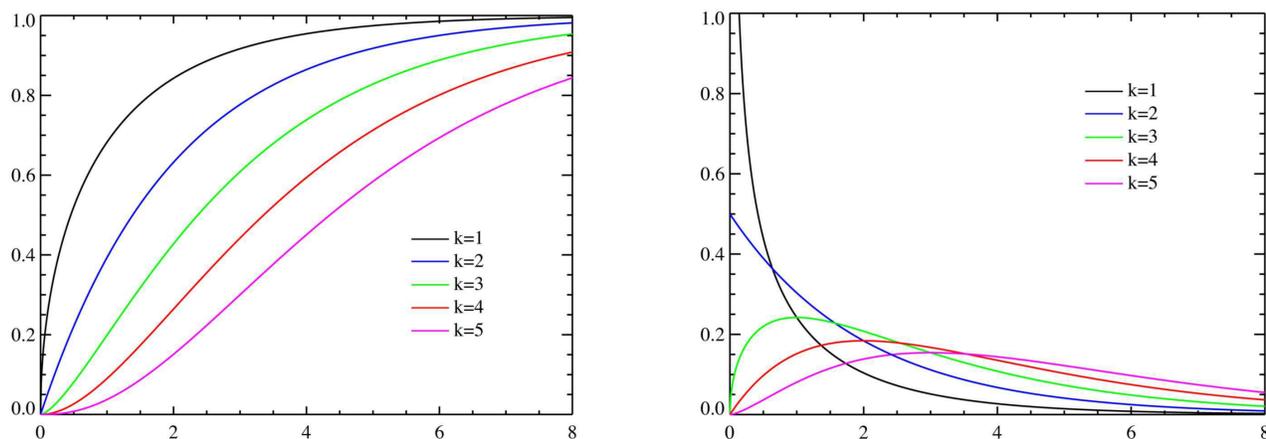


FIG. 1.1 – Fonction de répartition et densité de probabilité de la loi du  $\chi^2$  pour plusieurs degrés de liberté

### 1.2.1 Options

Une option financière est un produit dérivé qui donne le droit, et non l'obligation,

- d'acheter (option d'achat, appelée aussi Call)
- ou de vendre (option de vente, appelée aussi Put)

une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc.), appelé actif sous-jacent

- à un prix précisé à l'avance (prix d'exercice ou strike en anglais),
- à une date d'échéance donnée (option dite européenne),
- ou durant toute la période jusqu'à échéance (option dite américaine).

Ce droit lui-même se négocie, sur un marché d'options spécialisé (géré par une bourse, ou au gré à gré), à un certain prix appelé prime. Le vendeur (souscripteur) a l'obligation d'honorer les termes du contrat.

Les options dites vanilles (plain vanilla options en anglais) sont les premières apparues sur les marchés, les plus répandues et les plus simples. Ce sont les options sur valeur de l'actif dont elles sont dérivées.

Cependant, les besoins de couverture très divers, notamment sur le Forex, ont favorisé l'apparition d'options plus complexes dites options exotiques.

Deux générations d'options exotiques subsistent :

- les options de première génération : caps, floors, swaptions européens (essentiellement utilisées comme options sur taux d'intérêt, ...)
- les options de seconde génération qui sont path-dépendent : lookback, asiatiques, à barrière, digitales, composées, à choix différé.

Le pricing des options est la détermination à la date actuelle ( $t = 0$ ) de la valeur (payoff) de l'option qui sera (peut-être) exercée à la date d'échéance ou encore maturité  $T$ .

Dans notre étude nous traitons les deux types d'options Call européennes les plus répandues et les plus utilisées :

- les options vanille européennes de payoff  $e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)]$ ;
- les options asiatiques européennes de payoff  $e^{-rT} \mathbb{E}[\max(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0)]$ .

Le facteur  $e^{-rT}$  est le facteur d'actualisation de la valeur de l'option.

Pour tout  $t \in [0, T]$ , l'option est dite :

- hors de la monnaie si  $S_t < K$  ;
- à la monnaie si  $S_t = K$  ;
- dans la monnaie si  $S_t > K$ .

### 1.2.2 Approches de pricing des options

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour calculer les valeurs des options :

- l'approche EDP (équations aux dérivées partielles) ;
- l'approche par les arbres binomiaux ;
- l'approche par les formules « fermées » (tel que dans le cas du modèle Black & Scholes) ;
- l'approche par les formules approchées (approximations asymptotiques, etc.) ;
- l'approche Monte Carlo.

Nous avons choisi l'approche Monte Carlo pour 3 raisons :

- elle est très efficace pour les processus vectoriels en grande dimension ( $\geq 4$ ) ;
- elle marche pour tous les modèles dynamiques interdépendants ;
- évaluer 10 000 options (pour 10 000 strikes différents) par cette méthode coûte à peine plus cher en temps de calcul que pour une seule option.

### 1.2.3 Méthodes de discrétisation (différences finies)

La base l'utilisation des méthodes de Monte-Carlo en finance est leur capacité à simuler l'évolution des processus de prix. On commence donc par s'intéresser aux méthodes de simulation d'une diffusion homogène de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, X_0 = x \in \mathbb{R}^d.$$

Ici,  $X$  modélise l'évolution de  $d$  sous-jacents sur le marché (actions par exemples) et  $W$  est un mouvement brownien standard  $d$ -dimensionnel. En général, la solution de cette équation n'a pas une forme simple et l'on est obligé de recourir à une approximation de  $X$  qui correspond à une discrétisation en temps de l'équation par différences finies.

### 1.2.4 Schéma d'Euler

On se donne une grille de  $[0, T]$  de taille  $n$ ,  $(t_0, \dots, t_i, \dots, t_n)$  avec  $t_i = i \frac{T}{n}$ . On notera  $\Delta^n t = \frac{T}{n}$  et  $\Delta^n W_{i+1} = W_{i+1} - W_i$ . L'idée de la discrétisation d'Euler est très simple. Pour tout  $i = 1, \dots, n$  on a :

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)dW_s.$$

Ce qui conduit au schéma de discrétisation par différences finies suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}_0^n = X_0, \\ \bar{X}_i^n = \bar{X}_{i-1}^n + b(\bar{X}_{i-1}^n)\Delta^n t + \sigma(\bar{X}_{i-1}^n)\Delta^n W_{i+1}. \end{cases}$$

Un développement à l'ordre supérieur de cette discrétisation est le schéma de Milstein :

$$\begin{cases} \bar{X}_0^n = X_0, \\ \bar{X}_i^n = \bar{X}_{i-1}^n + b(\bar{X}_{i-1}^n)\Delta^n t + \sigma(\bar{X}_{i-1}^n)\Delta^n W_{i+1} + \frac{1}{2}\sigma'(\bar{X}_{i-1}^n)\sigma(\bar{X}_{i-1}^n)((\Delta^n W_{i+1})^2 - \Delta^n t). \end{cases}$$

Le défaut principal de ce schéma est qu'il n'est pas simple en dimension supérieure à 1 dans le cas général.

### Convergence Forte

Un schéma numérique converge avec un ordre fort  $k$  si pour  $n$  assez grand, il existe une constante  $K_T$  tel que :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - \bar{X}_t^n| \right] < \frac{K_T}{n^k}.$$

### Convergence Faible

Un schéma numérique converge avec un ordre faible  $s$  si pour  $\frac{1}{n}$  assez petit et  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^4$ , il existe  $K_{g,T}$  tel que :

$$|\mathbb{E}[g(X_t)] - \mathbb{E}[g(\bar{X}_t^n)]| < \frac{K_{g,T}}{n^s}.$$

Pour plus de détails sur le schéma d'Euler, consulter : [BT96, Tal92, Dea07, KS91].

### 1.2.5 Méthodes de Monte Carlo

Evaluer des espérances de fonctions de diffusions multidimensionnelles  $X_T$  telles que  $\mathbb{E}[F(X_T)]$  est devenu un enjeu de grande envergure dans différents domaines. En particulier, en finance, de telles quantités représentent les prix de certaines options sur le marché. Pouvoir calculer les prix de ces options n'est pas toujours facile. En pratique, pour évaluer  $\mathbb{E}[F(X_T)]$  on est souvent ramené à discrétiser la diffusion par un schéma d'approximation  $X_T^n$  (où  $n$  représente le nombre de pas de temps de la discrétisation) puis à approcher  $\mathbb{E}[F(X_T^n)]$  par une méthode de Monte Carlo. Utiliser une méthode probabiliste plutôt qu'une méthode EDP permet de résoudre le problème en grande dimension, ou lorsque l'opérateur associé à l'équation aux dérivées partielles est dégénéré. L'espérance en question est solution d'une équation aux dérivées partielles. On peut résoudre cette EDP en ayant recours à une méthode de discrétisation en espace et en temps. Cependant, en optant pour une méthode de Monte Carlo, on doit tenir compte de deux types d'erreurs :

- une erreur de discrétisation donnée par  $\mathbb{E}[F(X_T^n)] - \mathbb{E}[F(X_T)]$  ;
- une erreur statistique dite erreur de Monte Carlo donnée par

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(X_{T,i}^n) - \mathbb{E}[F(X_T^n)]$$

où  $(X_{T,i}^n)_{1 \leq i \leq N}$  est un échantillon *i.i.d.* de taille  $N$ .

Les méthodes de Monte-Carlo sont basées sur la loi des grands nombres : lorsqu'on veut approcher  $\mathbb{E}[Y]$ , on simule un grand nombre de variables aléatoires (variable aléatoire.) indépendantes et de même loi,  $(Y_n)_n$  de même loi que  $Y$ , on prend ensuite la moyenne des valeurs prises,  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$ , et on obtient une approximation de  $\mathbb{E}[Y]$ . La convergence est assurée par le théorème classique suivant :

**Théorème 2 (Loi des grands nombres).** Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles intégrables *i.i.d.* de même loi que  $Y$ , alors :  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[Y]$  p.s. dans  $L^1$ . Si de plus les  $(Y_n)$  sont de carré intégrable, on peut montrer que la convergence a lieu dans  $L^2$  et on obtient un contrôle de l'erreur p.s. et de l'erreur  $L^2$ .

**Théorème 3 (Théorème de la limite centrale).** Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles (pas nécessairement gaussiennes) *i.i.d.* de carré intégrable de même loi qu'une v.a  $Y$ . On suppose que  $\text{Var}(Y) > 0$  et on pose

$$\hat{m}_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \text{ et } \hat{\sigma}_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (Y_n - \hat{m}_N)^2}.$$

Alors :

$$\sqrt{N} \left( \frac{\hat{m}_N - \mathbb{E}[Y]}{\hat{\sigma}_N} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1) \text{ en loi.}$$

En particulier pour tout réel  $c > 0$  :

$$\mathbb{P} \left[ \sqrt{N} \left| \frac{\hat{m}_N - \mathbb{E}[Y]}{\hat{\sigma}_N} \right| < c \right] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 1 - \alpha_c,$$

où  $\alpha_c = \mathbb{P}[|X| < c]$  pour  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

On en déduit pour  $N$  grand,  $\mathbb{P} \left[ \mathbb{E}[Y] \in [\hat{m}_N \pm c \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}] \right] = 1 - \alpha_c.$

On voit donc que l'erreur, dite erreur de Monte Carlo, dépend de  $\hat{\sigma}_N/\sqrt{N}$ , donc de la taille de l'échantillon et de la variance.

Les avantages des méthodes de Monte Carlo sont :

- une programmation facile ;
- une auto-estimation de l'erreur d'approximation (sans aucun calcul supplémentaire) ;
- une indépendance vis-à-vis de la régularité de la fonction à estimer ;
- une insensibilité (ou presque) vis-à-vis de la dimension  $d$  du problème.

Son principal inconvénient est :

- une vitesse de convergence assez faible (de l'ordre de  $\hat{\sigma}_N/\sqrt{N}$ ,  $\hat{\sigma}_N > 0$ ).

Pour améliorer la convergence d'une méthode de Monte Carlo, on peut soit augmenter le nombre total de simulations  $N$  soit réduire la variance  $\hat{\sigma}_N^2$ . Si l'on opte pour une augmentation de  $N$ , pour obtenir une précision supplémentaire d'un point, on doit multiplier le nombre total de simulations par un facteur de 100 (ce qui est indamissible vu le surcoût de temps de calcul occasionné). Par contre, si on opte pour une réduction de  $\hat{\sigma}_N$ , une réduction d'un facteur 10 permettrait de réduire le nombre de simulations de 100 pour une même précision. Il existe une grande variété de ces techniques souvent à la fois simples et efficaces mais dont le choix est spécifique. Les plus connues et les plus classiques pour la réduction de variance sont :

- les variables antithétiques ;
- les variables de contrôle ;
- le carré latin ;
- la stratification ;
- l'échantillonnage préférentiel.

### 1.2.6 Techniques de réduction de variance

Dans cette partie, nous présentons les techniques les plus usuelles de réduction de variance. Pour plus de détails, consulter : [Aro04a], [Gla04] et [Bou06].

#### Variables antithétiques

L'idée du contrôle antithétique est très simple. Elle est basée sur la propriété de symétrie du mouvement brownien :  $W \sim -W$  en loi, donc :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{F(W_t) + F(-W_t)}{2} \right] = \mathbb{E}[F(W_t)].$$

On réduit la variance si :

$$\text{Var} \left[ \frac{F(W_t) + F(-W_t)}{2} \right] < \frac{\text{Var}[F(W_t)]}{2},$$

ce qui revient à dire que

$$\text{Cov}(F(W_t), F(-W_t)) < 0.$$

**Théorème 4.** *Si  $F$  est monotone et  $\sigma > 0$ , alors*

$$\text{Cov}(F(W_t), F(-W_t)) < 0.$$

*avec inégalité stricte si  $F$  est strictement monotone sur un domaine de mesure non nulle.*

*Remarque 2.* Cette méthode est non seulement très simple mais elle peut réduire le temps de calcul étant donné qu'on a recours au générateur aléatoire 2 fois moins de temps. On génère  $N/2$  nombres aléatoires selon la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et on obtient les  $N/2$  autres en inversant le signe des premiers,  $N$  étant la taille de l'échantillon Monte Carlo.

La figure (voir Fig 1.2) montre l'effet de l'utilisation de la technique des variables antithétiques sur la variance de l'évaluation d'une option vanille.

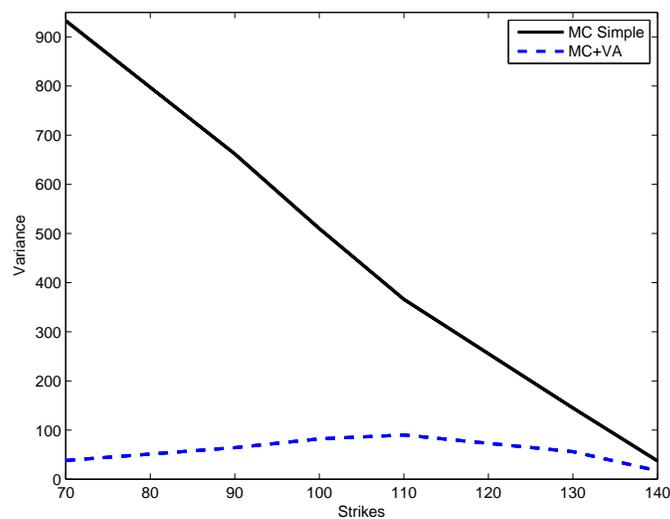


FIG. 1.2 – Effet de la technique des variables antithétiques sur la variance de l'évaluation d'une option vanille par Monte Carlo

La réduction de variance est très claire et ceci est confirmé par l'allure des trajectoires simulées (voir Fig 1.3).

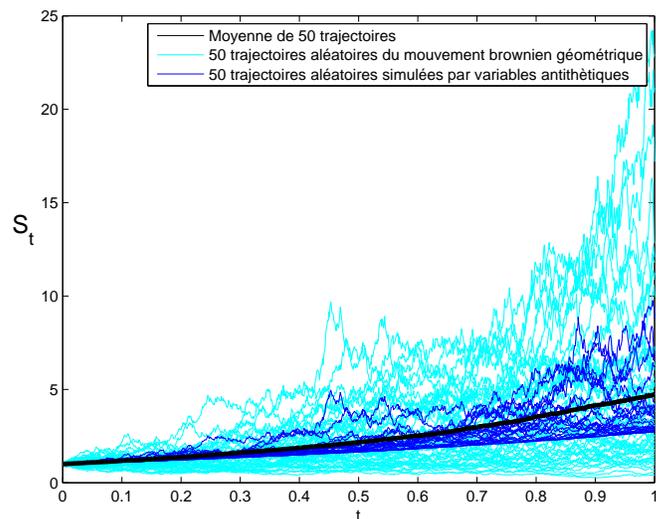


FIG. 1.3 – Effet de la technique des variables antithétiques sur les trajectoires simulées par Monte Carlo

### Variables de Contrôle

Le principe de la technique de réduction de variance des variables de contrôle est d'ajouter une variable aléatoire  $Y$  d'espérance nulle lors de l'estimation de l'espérance  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X + Y]$  d'une variable aléatoire  $X$  de façon que  $\text{Var}(X + Y) < \text{Var}(X)$ .

Ceci est assuré quand la corrélation entre  $X$  et  $Y$  est très négative vu que :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Une autre façon de voir la chose est d'écrire :

$$\begin{aligned} \theta_x &= X + c(Y - \mathbb{E}[Y]), \\ \mathbb{E}[\theta_x] &= \mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \text{Var}(\theta_x) = \text{Var}(X) + c^2 \text{Var}(Y) + 2c \text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

En minimisant sur la variable  $c$  cette variance on trouve que :

$$c^* = \frac{-\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \quad \text{et} \quad \text{Var}(\theta_x^*) = \text{Var}(X) - \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(Y)},$$

la quantité  $c^*$  sera calculée de manière empirique sur un échantillon plus petit.

*Remarque 3.* Cette méthode possède l'avantage de la simplicité mais le choix de la variable de contrôle dépend de l'EDS elle-même ce qui rend son implémentation automatique impossible. C'est pour cela que nous avons choisi de ne pas implémenter cette méthode.

### Exemple : Méthode de Romberg statistique

Le principe de cette méthode est d'utiliser 2 discrétisations à l'ordre  $n$  et à l'ordre  $m$  pour une EDS,  $n \gg m$  et d'utiliser la discrétisation à l'ordre  $m$  (dont on retranche l'espérance) comme variable de contrôle.

La méthode est d'utiliser l'estimateur de variance  $\mathcal{O}(1/\sqrt{m})$  ( $m \ll n$ ) suivant :

$$F = f(X_T^n) - f(X_T^m) + \mathbb{E}[f(X_T^m)].$$

Pour plus d'informations sur cette technique, voir [Keb05].

### Echantillonnage préférentiel

La méthode consiste à changer de loi de probabilité lors de la simulation (tout en restant dans le cadre gaussien) grâce au théorème de Girsanov, afin de garder la même espérance mais réduire la variance de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[F(X)] &= \int F(X) \frac{p(X)}{q(X)} q(X) dX = \mathbb{E}_q[G(X)], \\ \text{Var}(G(X)) &< \text{Var}(F(X)), \end{aligned}$$

où  $p(X)$  est la densité de probabilité sous laquelle est généré le mouvement brownien (en pratique  $\mathcal{N}(0, 1)$ ) et  $q(X)$  est la nouvelle densité de probabilité (en pratique  $\mathcal{N}(\theta, 1)$ ). Ce changement de probabilité se traduit en fait par un rajout d'un coefficient de drift vectoriel à la partie transport de l'EDS, ce qui a pour effet (sous couvert que ça marche) de rallonger les trajectoires vers un état moins aléatoire et de réduire ainsi la variance. L'effet (biais) de ce drift sur l'espérance sera par la suite en multipliant par le rapport des densités de probabilités  $p(X)/q(X)$ .

Plusieurs approches ont été adoptées afin de calculer le drift  $\theta$  et qui sont en général de 2 types :

- la recherche d'un drift constant optimal par des méthodes de minimization ;
- la construction d'un drift adaptatif qui change d'un tirage Monte Carlo à un autre.

La réduction de variance est très claire dans l'allure des trajectoires simulées (voir Fig 1.4).

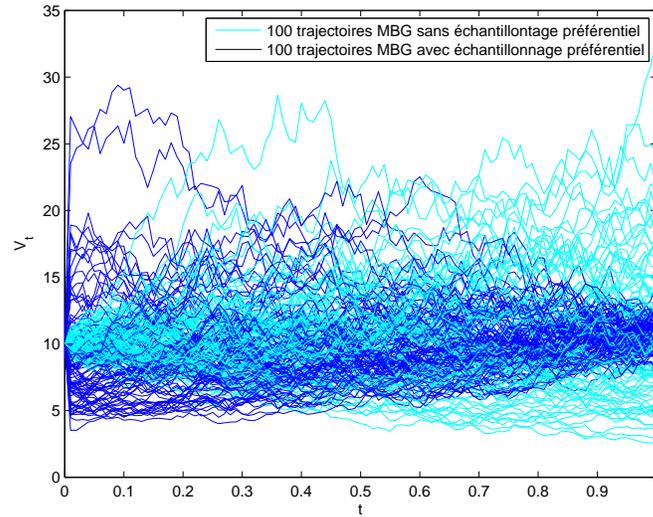


FIG. 1.4 – Effet de la technique de l'échantillonnage préférentiel sur les trajectoires simulées par Monte Carlo

### 1.2.7 Modèle de Black & Scholes

La formule de Black & Scholes (voir [BS73]) permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes :

- $S_0$  la valeur actuelle de l'actif financier sous-jacent ;
- $T - t$  le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années) ;
- $K$  le prix d'exercice fixé de l'option ;
- $r$  le taux d'intérêt sans risque ;
- $\sigma$  la volatilité du prix de l'action.

Le prix théorique d'une option d'achat Call, qui donne le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif  $S$  à la valeur  $K$  à la date  $T$ , est caractérisé par son « payoff » :  $(S_T - K)_+ = \max(S_T - K; 0)$ .

Le prix de l'option est donné par l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du payoff terminal actualisé  $C = \mathbb{E}[\text{Payoff} \times e^{-rT}]$ , soit la formule de Black & Scholes :

$$C(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

De même, le prix théorique d'une option de vente Put, de payoff  $(K - S_T)_+ = \max(K - S_T; 0)$  est donné par :

$$P(S_0, K, r, T, \sigma) = -S_0 N(-d_1) + K e^{-rT} N(-d_2),$$

avec :

- $N$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ , c'est-à-dire  $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$  ;
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right]$  ;
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ .

La formule de Black & Scholes repose sur l'hypothèse que les rendements de l'actif sous-jacent sont gaussiens, ou de manière équivalente que la valeur de l'actif suit une diffusion brownienne géométrique qui est solution de l'EDS :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Les quatre premières données ( $S_0, T, K, r$ ) sont connues, seule la volatilité  $\sigma$  de l'actif est difficile à évaluer. Deux analystes pourront avoir une opinion différente sur la valeur de  $\sigma$  à choisir. Mais le modèle reste toutefois très robuste.

On peut également appliquer la formule à l'inverse. Étant donné le prix de l'option qui est coté dans les marchés, quelle valeur de  $\sigma$  doit être choisie pour que la formule de Black & Scholes donne exactement ce prix. On obtient ainsi la volatilité implicite qui a un grand intérêt pratique et théorique.

La formule de Black & Scholes peut être démontrée rigoureusement si un certain nombre de conditions sont établies. On parle alors de modèle de Black & Scholes, ou bien on dit qu'on est dans le cas Black & Scholes. Les marchés financiers correspondent assez bien à ce modèle, mais pas exactement bien sûr et, en particulier, contrairement à l'hypothèse centrale du modèle, le temps n'y est pas continu. Il y a donc un certain écart entre ce modèle et la réalité, qui peut devenir important quand les marchés sont agités avec de fréquentes discontinuités de cours.

Les conditions du modèle sont les suivantes :

- le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique ;
- la volatilité est connue à l'avance et est constante ;
- il est possible d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais ;
- les ventes à découvert sont autorisées (où on emprunte une certaine quantité du sous-jacent pour la vendre) ;
- il n'y a pas de dividende ;
- le taux d'intérêt est connu à l'avance et est constant ;
- l'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance, pas avant (option européenne).

Plusieurs actifs peuvent être modélisés par un mouvement brownien géométrique tels que les actions, les taux d'intérêt, les taux de change. Les figures (Fig 1.5, Fig 1.6 et Fig 1.7) représentent les évolutions de certains actifs en bourse.

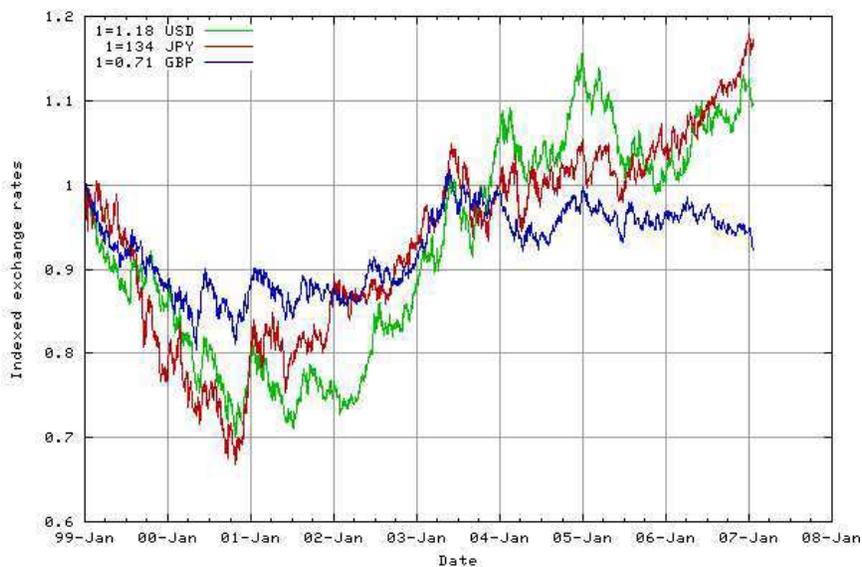


FIG. 1.5 – Evolution du taux de change de l'EURO par rapport aux autres monnaies entre 1999 et 2007



FIG. 1.6 – Evolution du taux d'intérêt américain entre 2003 et 2006



FIG. 1.7 – Evolution des cours des actions Nintendo, Sony et Microsoft en 2006

Les figures (Fig 1.8) donnent (à titre de comparaison) une simulation de 2 échantillons Monte Carlo d'un mouvement brownien géométrique.

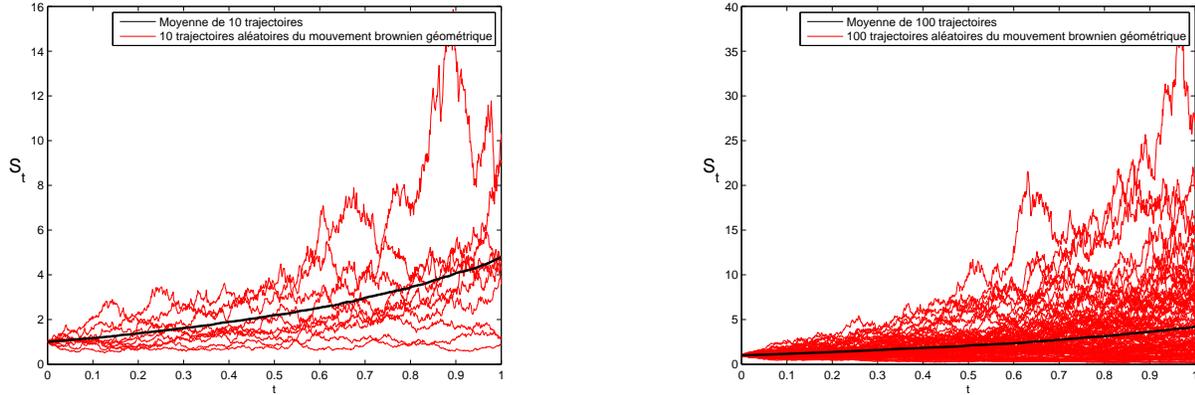


FIG. 1.8 – Simulations de 10 et 100 trajectoires du mouvement brownien géométrique et leurs moyennes par Monte Carlo

### 1.2.8 Processus du CIR

Les diffusions en racine carré jouent un rôle important dans plusieurs modèles en finance car ils modélisent très bien les taux d'intérêt mais aussi les volatilités stochastiques d'actifs financiers.

Considérons l'EDS suivante :

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t.$$

Si  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard alors  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un processus du type CIR (Cox-Ingersoll-Ross) avec une moyenne à long terme  $\theta$  et un taux de retour à la moyenne  $k$ .  $\sigma$  est le coefficient de diffusion de la volatilité et  $r$  est le taux d'intérêt sans risque. (pour plus de détails sur ce modèle voir [CIR85].)

Ce processus a une solution positive sous les hypothèses  $V_0 > 0$  et  $\sigma^2 < 2k\theta$ . Pour plus de détails voir [CIR85] et [BD04].

Les discrétisations classiques de ce processus seraient dans ces conditions :

#### Discrétisation de Euler-Marayuma

$$\tilde{V}_{t_{i+1}}^n = \tilde{V}_{t_i}^n + \frac{T}{n}k(\theta - \tilde{V}_{t_i}^n) + \sigma\sqrt{\tilde{V}_{t_i}^n}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

#### Discrétisation de Milstein

$$\tilde{V}_{t_{i+1}}^n = \tilde{V}_{t_i}^n + \frac{T}{n}k(\theta - \tilde{V}_{t_i}^n) + \sigma\sqrt{\tilde{V}_{t_i}^n}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{1}{2}((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - \frac{T}{n}).$$

### 1.2.9 Modèle de Heston de volatilité stochastique

Le modèle de Heston de volatilité stochastique est très utilisé pour le pricing de produits dérivés. En pratique, ce modèle est utilisé pour les options path-dependent qui nécessitent l'utilisation des méthodes de Monte Carlo. Dans cette partie nous présenterons quelques résultats sur le modèle de Heston.

En 1993, Heston (voir [Hes93]) a proposé le modèle suivant :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^1, \\ dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^2, \\ d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt. \end{cases}$$

Ici  $S$  représente l'actif sous-jacent de l'option (taux d'intérêt, taux de change, actions, ...) et  $(S_t)_{t \geq 0}$  est le processus de son cours à la date  $t$ .  $(V_t)_{t \geq 0}$  est le processus de sa volatilité.  $(W_t^1)_{t \geq 0}$  et  $(W_t^2)_{t \geq 0}$  sont deux mouvements browniens standards corrélés, de paramètre de corrélation  $\rho$ .

Le processus  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un processus du type CIR (Cox-Ingersoll-Ross) avec une moyenne à long terme  $\theta$  et un taux de retour à la moyenne  $k$ . Le paramètre  $\sigma$  est le coefficient de diffusion de la volatilité et  $r$  est le taux d'intérêt sans risque.

Des études empiriques ont montré que la densité des log-returns de l'actif  $dS_t$  n'est pas gaussienne. Elle est caractérisée par des queues importantes et des crêtes élevées.

Le paramètre  $\rho$  peut être interprété comme la corrélation entre les log-returns et la volatilité de l'actif. Si  $\rho > 0$  alors la volatilité augmente si  $dS_t > 0$ , ceci diffusera la queue droite de la distribution et comprimera la queue gauche. Si  $\rho < 0$  on aura l'effet inverse.

Le paramètre  $\rho$  affecte aussi proportionnellement la *skewness* (degré d'asymétrie) de la distribution.

Le paramètre  $\sigma$  augmente la kurtosis (pic) de la distribution et rend aussi le skew (biais) plus important.



## Chapitre 2

# Méthodes d'amélioration numérique implémentées

### 2.1 Méthode de Bossy et Diop pour la discrétisation du CIR

Comme précisé à la fin du chapitre 1, le processus du CIR suivant :

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t.$$

a une solution positive sous les hypothèses  $V_0 > 0$  et  $\sigma^2 < 2k\theta$ .

Malheureusement la condition  $\sigma^2 < 2k\theta$  n'est pas vérifiée en pratique ce qui pose problème vu que ce processus modélise les taux d'intérêt et la volatilité du modèle de Heston qui sont des quantités positives.

Plusieurs schémas de discrétisation existent afin de remédier à ce problème (voir [LKVD06] pour plus de détails). Parmi les meilleurs schémas, Bossy et Diop (voir [BD04] et [Alf05]) ont proposé le schéma suivant :

#### Schéma de Bossy et Diop

$$\tilde{V}_{i+1}^n = |\tilde{V}_i^n + \frac{T}{n}k(\theta - \tilde{V}_i^n) + \sigma\sqrt{\tilde{V}_i^n}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|.$$

On voit très clairement dans les figures (Fig 2.1 et Fig 2.2) l'effet de la reflexion des valeurs négatives du CIR induite par la valeur absolue du schéma de Bossy et Diop. Bossy et Diop ont prouvé théoriquement la positivité, la monotonie et la convergence forte de leur schéma. De manière empirique la convergence faible en  $\frac{1}{n}$  et l'expansion de l'erreur ont été aussi prouvées.

#### 2.1.1 Expansion de l'erreur

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^4$  tel que  $\exists A, m > 0, \forall x \geq 0, |f^{(4)}(x)| \leq A(1+x^m)$ . Si de plus  $\tilde{X}^n$  satisfait l'hypothèse de convergence forte alors l'erreur faible est en  $\frac{1}{n}$  :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(\tilde{X}_T)] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

Une expansion de l'erreur pour un schéma permet d'utiliser la méthode empirique de Romberg qui stipule que si il existe  $c_1$  tel que :

$$\mathbb{E}[f(\tilde{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(\tilde{X}_T)] + c_1/n + \mathcal{O}(1/n^2),$$

alors :

$$2\mathbb{E}[f(\tilde{X}_T^{2n})] - \mathbb{E}[f(\tilde{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(\tilde{X}_T)] + \mathcal{O}(1/n^2).$$

autrement dit on a diminué l'ordre de l'erreur, cette méthode sera implémentée pour le schéma de Bossy et Diop pour discrétiser le modèle du CIR.

Pour plus de détails, voir [BD04, Alf05, TT90].

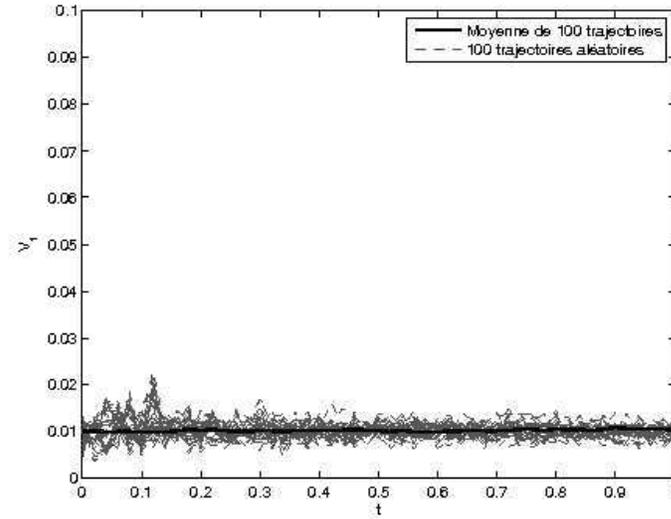


FIG. 2.1 – Simulation du processus par le schéma de Bossy et Diop du CIR dans le cas  $\sigma^2 < 2k\theta$

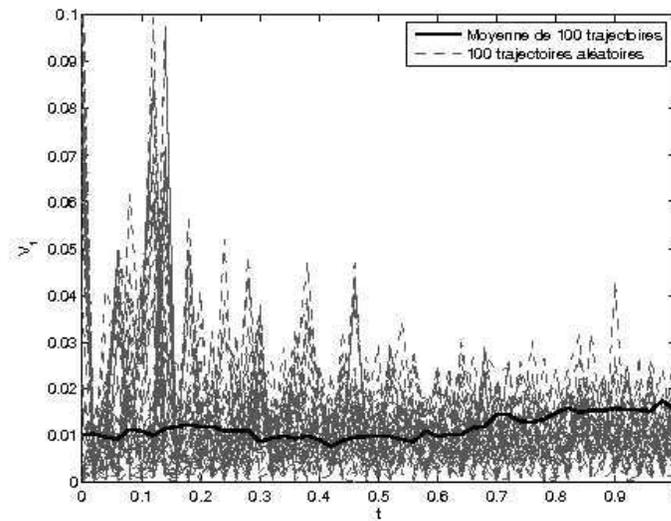


FIG. 2.2 – Simulation du processus par le schéma de Bossy et Diop du CIR dans le cas  $\sigma^2 > 2k\theta$

## 2.2 Simulation efficace d'Andersen du modèle de Heston

L'approche d'Andersen (voir [And07]) consiste à implémenter de nouveaux algorithmes pour la discrétisation temporelle et les simulations Monte Carlo en se basant sur l'analyse des distributions des processus. L'apport d'Andersen est d'avoir combiné certains aspects du schéma exact de Broadie-Kaya avec la vitesse et la simplicité du schéma d'Euler.

Le drift de  $(S_t)_{t \geq 0}$  n'intervient pas dans les améliorations de Andersen, on peut par conséquent afin de simplifier les écritures prendre  $r = 0$ .

Le processus  $(S_t)_{t \geq 0}$  est proche d'un mouvement brownien géométrique, par conséquent, travailler avec  $(\ln(S_t))_{t \geq 0}$  est plus facile :

$$\begin{cases} d\ln(S_t) = -\frac{1}{2}V_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^1, \\ dV_t = k(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2. \end{cases}$$

### 2.2.1 Schéma de discrétisation de la volatilité

Vu que la distribution du CIR suit une loi  $\chi^2$  décentrée (voir [Dyr04]), on peut déduire des propriétés de cette distribution.

**Proposition 1.** Soit  $T > t \geq 0$ . Alors

$$\mathbb{E}(V_T|V_t) = \theta + (\theta - V_t) \exp(-k(T-t))$$

$$\text{et } \text{Var}(V_T|V_t) = \frac{V_t \sigma^2 \exp(-k(T-t))}{k} (1 - e^{(-k(T-t))}) + \frac{\theta \sigma^2}{2k} (1 - e^{(-k(T-t))})^2.$$

Pour la discrétisation du CIR, Andersen a proposé 2 schémas de discrétisation : TG (Truncated Gaussian) et QE (Quadratic Exponential) (voir [KJ06]). Etant donné que le schéma QE s'est révélé le meilleur partout, c'est le seul que nous présenterons. L'idée est d'approcher  $V_{i+1}^n$  par le carré d'une loi gaussienne pour les grandes valeurs de  $V$  et de prendre les paramètres qui collent aux moments déterminés par la proposition précédente. Pour les petites valeurs de  $V$ ,  $V_{i+1}^n$  sera approchée par une densité de la forme :

$$\mathbb{P}[V_{i+1}^n \in [x, x+dx]] \approx f(x)dx = p\delta_0(x) + \beta(1-p)e^{-\beta x}dx$$

où  $\delta_0$  est la fonction de Dirac en 0.

#### Algorithme du Schéma de discrétisation QE

Entrée : Point initial  $V_0$  et pas de discrétisation  $T/n$ .

Sortie : Les points  $V_i^n$  d'un CIR pour  $i$  de 1 à  $n$ .

Début

Pour  $i$  de 1 à  $n$

$$m := \mathbb{E}[V_{i+1}^n | V_i^n]; \quad s := \text{Var}(V_{i+1}^n | V_i^n); \quad \eta := \frac{s}{m^2}$$

Générer un nombre aléatoire uniforme  $U_v$  sur  $[0,1]$

Si  $\eta < 1.5$

$$b := \left( \frac{2}{\eta} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{2}{\eta} - 1}} \right)^{1/2}$$

$$a := \frac{1}{1+b^2}$$

$$Z_v := \Phi^{-1}(U_v) (\sim \mathcal{N}(0,1))$$

$$V_{i+1}^n := a(b + Z_v)^2$$

Sinon //  $\eta \geq 1.5$

$$p := \frac{\eta - 1}{\eta + 1}$$

$$\beta := \frac{1-p}{m}$$

$$V_{i+1}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } U_v \in [0, p] \\ \beta^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-U_v}\right) & \text{si } U_v \in [p, 1] \end{cases}$$

Fin-si

Fin-boucle Fin

## 2.2.2 Schéma de discrétisation de l'actif

Le schéma de Broadie et Kaya (voir [BK06]) est assez efficace et il s'écrit pour  $S_t$  :

$$\ln(S_{i+1}^n) = \ln(S_i^n) + \frac{\rho}{\sigma} \left( V_{i+1}^n - V_i^n - k\theta \frac{T}{n} \right) + \left( \frac{k\rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_u du + \sqrt{1-\rho^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{V_u} dW_u.$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} V_u du \approx \frac{T}{n} (\gamma_1 V_{i+1}^n + \gamma_2 V_i^n),$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{V_u} dW_u \sim \mathcal{N}(0, \int_{t_i}^{t_{i+1}} V_u du).$$

La figure (Fig 2.3) montre l'effet de l'utilisation de la technique de Andersen sur l'erreur d'évaluation d'une option :

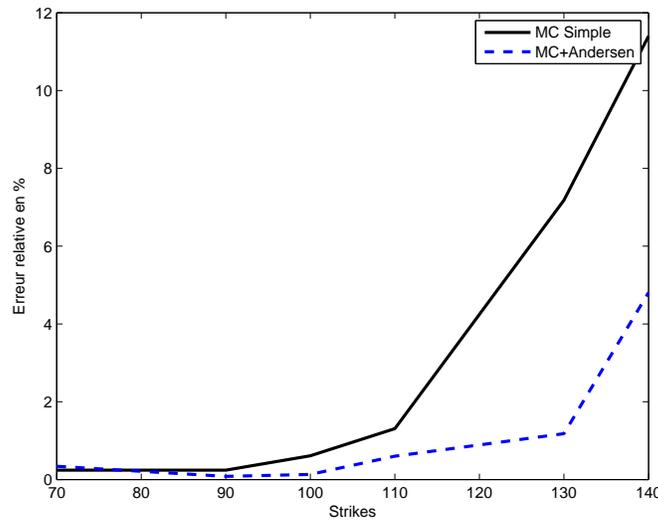


FIG. 2.3 – Effet de la technique de Andersen sur l'erreur d'évaluation d'une option par Monte Carlo

## 2.2.3 Amélioration du calcul de l'intégrale de la volatilité

Dufresne (voir [Duf01]) a calculé les 3 premiers moments de  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} V(u) du$ , ce qui donne :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} V_u du \approx \frac{V_{t_i} - \theta}{k} + \frac{T}{n} \theta - e^{-k \frac{T}{n}} \frac{V_{t_i} - \theta}{k}.$$

Nous utiliserons cette approximation pour le schéma QE ce qui augmentera sa capacité à être efficace lorsqu'on discrétise l'EDS en petits pas.

## 2.2.4 Correction Martingale pour l'actif

Comme  $(S_t)_{t \geq 0}$  est une martingale,

$$\mathbb{E}[S_{t+\Delta} | S_t] = S_t.$$

Par contre selon le schéma de Broadie Kaya, cette égalité n'est pas vérifiée, ce qui nécessite une correction martingale. Le défaut de cette correction est qu'elle introduit un temps de calcul supplémentaire (relatif à une fonction exponentielle à chaque itération) qui risque de ralentir l'algorithme. Afin que cette correction soit efficace, il faut que le pas de discrétisation soit assez petit ce qui risque de ralentir les algorithmes. Elle ne sera intéressante que dans le cas où on recherche une haute précision.

En notant le schéma de Broadie Kaya comme suit :

$$\ln(X_{i+1}^n) = \ln(X_i^n) + K_0 + K_1 V_i^n + K_2 V_{i+1}^n + \sqrt{K_3 V_i^n + K_4 V_{i+1}^n} Z,$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $K_0 = -\frac{\rho k \theta T}{\sigma n}$ ,  $K_1 = \frac{\gamma_1 T}{n} \left( \frac{k\rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho}{\sigma}$ ,  
 $K_2 = \frac{\gamma_2 T}{n} \left( \frac{k\rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\rho}{\sigma}$ ,  $K_3 = \frac{\gamma_1 T}{n} (1 - \rho^2)$  et  $K_4 = \frac{\gamma_2 T}{n} (1 - \rho^2)$ .

La correction martingale consiste à remplacer  $K_0$  par  $K_0^*$  :

$$K_0^* = -\ln(M) - \left( K_1 + \frac{1}{2} K_3 \right) V_i^n.$$

avec

$$M = \begin{cases} \frac{\exp \frac{Ab^2a}{1-2Aa}}{\sqrt{1-2Aa}} & \text{si } \eta < 1.5 \\ p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A} & \text{si } \eta > 1.5. \end{cases}$$

La figure (Fig 2.4) montre d'une part la fonction exacte de répartition de  $V_T$  sachant  $V_0$ , et d'autre part, celle en approximant l'évolution par une loi Normale et une loi Log Normale.

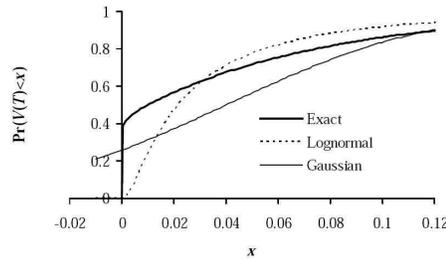


FIG. 2.4 – Fonction de répartition exacte de  $V_T$  sachant  $V_0$  et celle approchée par une loi Normale et une loi Log Normale

La figure (Fig 2.5) montre d'une part la fonction exacte de répartition de  $V_T$  sachant  $V_0$ , et d'autre part, celle en approximant l'évolution par les schémas QE et TG.

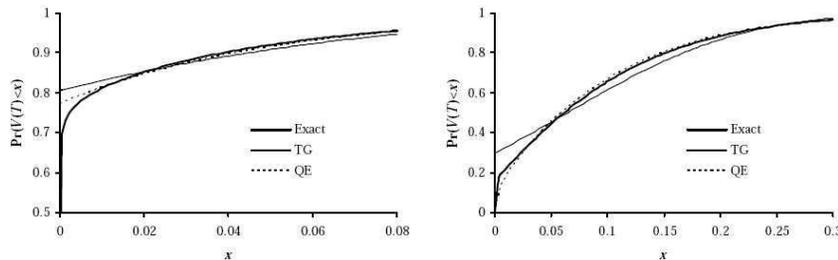


FIG. 2.5 – Fonction de répartition exacte de  $V_T$  sachant  $V_0$  et celle approchée par les schémas QE et TG pour deux valeurs de  $\sigma$

## 2.3 Solution semi-exacte

Considérons le problème du pricing d'une option Call vanille européenne :

$$\mathbb{E}[e^{-rT} \max(S_T - K; 0)].$$

La fonction caractéristique de  $s_T = \ln(S_T)$  est  $\mathbb{E}[\exp(ius_T)]$ . Heston a déterminé une formule exacte pour la fonction caractéristique [Hes93].

La solution semi-exacte d'une option européenne sur Call pour le modèle de Heston est :

$$C(S_t, V_t, t, T) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2 = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} (S_T - K)_+],$$

où,

$$P_j(x, V_t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, V_t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi,$$

$$x = \ln(S_t), f_j(x, V_t, T, \phi) = \exp C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi) V_t + i\phi x,$$

$$C(T-t, \phi) = r\phi i r + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left( \frac{1 - g e^{dr}}{1 - g} \right) \right],$$

$$D(T-t, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{dr}}{1 - g e^{dr}} \right),$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d},$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)},$$

et  $u_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $a = k\theta$ ,  $b_1 = k - \rho\sigma$ ,  $b_2 = k$ ,  $i$  est le nombre complexe.

Cette méthode sera considérée comme exacte et servira pour la comparaison des valeurs obtenues dans le cas des options vanilles. Dans le cas des options asiatiques, un échantillon Monte Carlo très grand sera considéré comme une méthode exacte.

Il reste cependant le terme en intégrale à calculer avec la méthode de transformation de Fourier (et qui ne peut pas être calculé directement car il implique une division par 0 d'où la nécessité d'introduire un coefficient d'amortissement).

### FFT pour la solution semi-exacte

Carr et Madan (voir [CM98]) ont proposé une méthode basée sur la FFT (Fast Fourier Transformation) qui est une approximation discrète de la transformée de Fourier (voir [Neg02]) :

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\phi x} f(x) dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\phi x} F(\phi) d\phi.$$

La FFT est :

$$\tilde{F}(\phi) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(\phi-1)} f(j).$$

Donc si on note  $x_t = \ln(S_t)$  et  $k = \ln(K)$ , le prix d'un call européen de strike  $K$  et de maturité  $T$  est :

$$C_T(k) = e^{-rT} \int_k^\infty (e^{x_T} - e^k) f_T(x_T) dx_T,$$

où  $f_T(x)$  est la densité de  $x$ . Carr et Madan, ont défini une autre fonction de prix qui sera de carré intégrable.

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k), \quad \alpha > 0.$$

Le paramètre  $\alpha$  est dit *coefficient d'amortissement*.

On note alors :

$$C_T(k) = e^{-\alpha k} c_T(k) = e^{-\alpha k} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\phi x} F_{C_T}(\phi) d\phi,$$

avec :

$$F_{C_T}(\phi) = \frac{e^{-rT} F_{C_T}(\phi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi},$$

et

$$\begin{aligned} F_{C_T}(\phi) &= e^{A(\phi) + B(\phi) + C(\phi)}, \\ A(\phi) &= i\phi(x_0 + rT), \\ B(\phi) &= \frac{2\zeta(\phi)(1 - e^{-\psi(\phi)T})V_0}{2\psi(\phi) - (\psi(\phi) - \gamma(\phi))(1 - e^{-\psi(\phi)T})}, \\ C(\phi) &= -\frac{k\theta}{\sigma^2} \left[ 2\ln \left( \frac{2\psi(\phi) - (\psi(\phi) - \gamma(\phi))(1 - e^{-\psi(\phi)T})}{2\psi(\phi)} \right) + (\psi(\phi) - \gamma(\phi))T \right], \\ \zeta(\phi) &= -\frac{1}{2}(\phi^2) + i\phi, \\ \psi(\phi) &= \sqrt{\gamma(\phi)^2 - 2\sigma^2\zeta(\phi)}, \\ \gamma(\phi) &= k - \rho\sigma\phi i, \\ C_T(K_u) &\approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} F_{C_T}(v_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \\ \text{où } v_j &= \eta(j-1), \quad \eta = \frac{c}{N}, \quad c = 600, \quad N = 4096, \quad b = \frac{\pi}{\eta}, \\ \text{et } k_u &= -b + \frac{2b}{N}(u-1), \quad u = 1, 2, \dots, N+1. \end{aligned}$$

La fonction Matlab `fft(X)` réalise une FFT sur le vecteur  $X = e^{ibv_j} F_{C_T}(v_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1})$ , elle retourne un vecteur  $(1 \times N)$  dont la  $j^{\text{ème}}$  composante (là où on trouve la valeur du Call) correspond à  $\ln(K) = -b + \frac{2b}{N}(j-1)$ .

Le principal défaut de cette méthode est le choix du coefficient  $\alpha$  (en pratique 1.25) qui reste assez empirique et qui a un effet certain sur le prix de l'option. Carr et Madan proposent de le choisir de façon à vérifier :

$$(\mathbb{E}[S_T^{\alpha+1}] < \infty) \implies F_{C_T}(-(\alpha + 1)i) < \infty.$$

## 2.4 Echantillonnage préférentiel de Arouna et algorithmes de Robbins-Monro

Le principe de cette méthode est d'introduire un terme de drift dans le calcul du prix par une version élémentaire du théorème de Girsanov. L'algorithme de Robbins Monro permet ensuite soit de trouver le drift optimal soit de construire un drift adaptatif. Cet algorithme est une méthode d'approximation stochastique qui permet d'estimer asymptotiquement les zéros d'une fonction sachant une espérance.

Pour plus de détails voir [Aro04a] et [Aro04b].

### 2.4.1 Echantillonnage préférentiel de Arouna

Le prix d'un actif risqué  $S_t$  suit l'EDS suivante (en dim 1 pour simplifier) sous la probabilité risque neutre :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x,$$

où  $r$  est le taux sans risque. La solution de cette EDS est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right).$$

où  $S_0$  est le prix de l'actif au temps 0. On peut simuler de manière exacte cet actif aux dates  $0 < T_1 < \dots < T_m = T$ , en posant :

$$S_{T_i} = S_{T_{i-1}} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_i - T_{i-1}) + \sigma \sqrt{T_i - T_{i-1}} W_i\right),$$

où  $W_1, \dots, W_m$  sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne 0 et de variance 1. Si on veut pricer une option de payoff donné par  $f(S_{T_1}, \dots, S_{T_m})$ , on doit évaluer :

$$V_0 = \mathbb{E}[e^{-rT} f(S_{T_1}, \dots, S_{T_m})],$$

La quantité  $V_0$  peut être écrite sous la forme

$$V_0 = \mathbb{E}[G(W_1, \dots, W_m)],$$

où  $G$  est une fonction qu'on peut calculer et  $W = (W_1, \dots, W_m) \sim \mathcal{N}(0, I_m)$ .

Pour l'échantillonnage préférentiel on change la loi de  $W = (W_1, \dots, W_m)$  en ajoutant un drift vectoriel  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ . Une version élémentaire du théorème de Girsanov conduit à la représentation suivante de  $V_0$  :

$$V_0 = \mathbb{E}[\alpha(\theta)] = \mathbb{E}[G(W + \theta)e^{(-\theta \cdot W - \frac{1}{2}\|\theta\|^2)}],$$

où  $\|\theta\|$  est la norme euclidienne d'un vecteur  $\theta \in \mathbb{R}^m$ .

Le changement de probabilité par le théorème de Girsanov ne change pas la moyenne donc minimiser la variance de  $\alpha(\theta)$  est équivalent à minimiser  $H(\theta) = \mathbb{E}[\alpha^2(\theta)]$  par rapport à  $\theta$ . Ceci est assuré par la proposition suivante :

**Proposition 2.** Si  $\mathbb{E}[G^{2a}(W)] < \infty$ , avec  $a > 1$ , alors  $H$  est deux fois dérivable en  $\mathbb{R}^m$  et il existe un unique  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  tel que :

$$H(\theta^*) = \min_{\theta \in \mathbb{R}^m} H(\theta).$$

Le paramètre  $\theta^*$  est solution de :

$$\nabla H(\theta) = \mathbb{E}\left[(\theta - W)G^2(W)e^{-\theta \cdot W + \frac{1}{2}\|\theta\|^2}\right] = 0.$$

**Idée de la preuve** Rappelons tout d'abord le résultat du théorème de Girsanov, en changeant de la loi de probabilité  $\mathcal{N}(0, I_m)$  vers celle  $\mathcal{N}(\theta, I_m)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^m$  :

$$\mathbb{E}[G(W)] = \mathbb{E}[G(Z)e^{(-\theta \cdot Z - \frac{1}{2}\|\theta\|^2)}], \quad W \sim \mathcal{N}(0, I_m), \quad Z \sim \mathcal{N}(\theta, I_m).$$

Appliquons ce théorème à  $H(\theta)$  :

$$\begin{aligned} H(\theta) &= \mathbb{E}\left[G^2(W + \theta)e^{-2\theta \cdot W - \|\theta\|^2}\right], \quad (W \sim \mathcal{N}(0, I_m)) \\ &= \mathbb{E}\left[G^2(X)e^{-2\theta \cdot X + \|\theta\|^2}\right], \quad (X \sim \mathcal{N}(\theta, I_m), \text{ Simple changement de variable}) \\ &= \mathbb{E}\left[G^2(Z)e^{-2\theta \cdot Z + \|\theta\|^2} e^{(+\theta \cdot Z - \frac{1}{2}\|\theta\|^2)}\right], \quad (Z \sim \mathcal{N}(0, I_m), \text{ Théorème de Girsanov}) \\ &= \mathbb{E}\left[G^2(Z)e^{(-\theta \cdot Z + \frac{1}{2}\|\theta\|^2)}\right], \quad (Z \sim \mathcal{N}(0, I_m)). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à différencier la fonction strictement convexe  $H(\theta)$  par rapport à  $\theta$ .

### 2.4.2 Algorithme de Robbins-Monro

Cet algorithme résout l'équation suivante :

$$h(\theta) = \mathbb{E}[F(\theta, W)] = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}^m,$$

par la méthode suivante :

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} F(\theta_n, W_{n+1}),$$

où  $(W_n)_{n \geq 0}$  est une suite de vecteurs gaussiens *i.i.d.* suivant la loi de  $W \sim \mathcal{N}(0, I_m)$  et  $\gamma_n = \frac{\alpha}{\beta + n}$  avec  $\alpha, \beta > 0$ . Suite aux tests numériques, Arouna a remarqué que  $\beta$  n'influe presque pas sur la variance et l'a, par conséquent, pris égal à 1. Par contre pour le coefficient  $\alpha$ , sa valeur importait beaucoup pour la réduction de variance et devrait être choisie de la manière suivante :

- Le paramètre  $\alpha$  devrait être petit (ex.  $\alpha \sim 0.001$ ) quand la variance Monte Carlo a beaucoup de chances d'être importante (exemple : options out of the money).
- Le paramètre  $\alpha$  devrait être grand (autour de 10 ou 100) quand la variance Monte Carlo a beaucoup de chances d'être faible (exemple : options in the money).

La méthode converge sous les hypothèses suivantes :

$$(\mathcal{H}_1) \quad \exists \theta^* \in \mathbb{R}^m, h(\theta^*) = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^m, \theta \neq \theta^*, (\theta - \theta^*) \cdot h(\theta) > 0,$$

$$(\mathcal{H}_2) \quad \sum_n \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_n \gamma_n^2 < +\infty,$$

$$(\mathcal{H}_3) \quad \mathbb{E}[\|F(\theta_n, W_{n+1})\|^2 | \mathcal{F}_n] < K(1 + \|\theta_n\|^2) \text{ p.s.}$$

Le problème de cette méthode est que  $\theta_n$  peut tendre vers l'infini. C'est pour cela que Arouna introduit une technique de projections par la méthode de Chen.

#### Détermination de la direction de descente $F$

Arouna a considéré 2 types de directions de descente selon le type de la distance entre mesures de probabilités considéré :

**Distance  $\chi^2$**  La distance  $\chi^2$  entre 2 mesures de probabilités est définie comme suit :

$$\mathcal{R}_2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int \left( \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} - 1 \right)^2 d\mathbb{Q} & \text{si } \mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors dans ce cas :

$$F(\theta_n, W_{n+1}) = (\theta_n - W_{n+1}) G^2(W_{n+1}) e^{-\theta_n \cdot W_{n+1} + \frac{1}{2} \|\theta_n\|^2}.$$

**Distance Kullback-Leibler de minimisation d'entropie** La distance  $\chi^2$  entre 2 mesures de probabilités est définie comme suit :

$$\mathcal{R}_2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \int \ln \left( \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \right) d\mathbb{P} & \text{si } \mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors dans ce cas :

$$F(\theta_n, W_{n+1}) = (\theta_n - W_{n+1}) G(W_{n+1}) e^{-\theta_n \cdot W_{n+1} + \frac{1}{2} \|\theta_n\|^2}.$$

*Remarque 4.* La distance Kullback-Leibler est inférieure à celle  $\chi^2$  et elle donne un minimum global. Nous allons l'utiliser lors de l'implémentation de la méthode.

### 2.4.3 Projections de Chen

D'abord, on choisit  $\theta^1 \neq \theta^2$  dans  $\mathbb{R}^m$  et on choisit une constante  $M > 0$  (elle n'a pas d'effet important sur la convergence et en pratique elle est choisie entre 10 et 100).

Soit aussi  $(W_n)_{n \geq 0}$  une suite de vecteurs gaussiens *i.i.d.* suivant la loi de  $W \sim \mathcal{N}(0, I_m)$ .

Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  une suite arbitraire déterministe de nombres positifs tendant vers  $\infty$  avec  $U_0 > M$ .

Définissons pour  $n \geq 0$ ,

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n - \gamma_{n+1} F(\theta_n, W_{n+1}) & \text{si } \|\theta_n - \gamma_{n+1} F(\theta_n, W_{n+1})\| \leq U_n, \\ \theta_n^* & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \sigma(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\|\theta_k - \gamma_{k+1} F(\theta_k, W_{k+1})\| > U_{\sigma(k)}}, \quad \sigma(0) = 0,$$

La quantité  $\sigma(n)$  est le nombre de projections faites après  $n$  itérations, et

$$\theta_n^* = \begin{cases} \theta^1 & \text{si } \sigma(n) \text{ est pair,} \\ \theta^2 & \text{si } \sigma(n) \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec  $(\gamma_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres positifs vérifiant

$$\sum_{n \geq 0} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \gamma_n^2 < +\infty.$$

*Remarque 5.* La suite  $U_n$  doit croître suffisamment lentement pour annuler le risque d'explosion de l'algorithme sans changer radicalement le domaine où on exerce  $h$ . Par exemple selon Arouna la suite  $U_n = \sqrt{\frac{1}{6} \ln n} + U_0$ ,  $U_0 = M + 6$ ,  $n \geq 1$  est appropriée.

Deux manières de faire ont été proposées par Arouna à savoir une méthode classique où on cherche un  $\theta$  optimal et on l'utilise pour faire la réduction de variance ou bien une méthode adaptative qui consiste à utiliser un  $\theta_i$  à chaque essai  $i$  de Monte Carlo. Cette dernière s'est avérée plus efficace numériquement. Un algorithme général pour la méthode adaptative peut être implémenté de la manière suivante :

Début

$$\theta^0 := 0; \quad h := \frac{T}{m}$$

*Remarque :*  $\theta^0$  peut avoir une autre valeur si on en connaît une proche de l'optimum.

Pour  $i$  de 1 à  $N$

$$\bar{X}_0^i := X_0; \quad \tilde{X}_0^i := X_0; \quad \Delta W^i \sim \mathcal{N}(0, I_d)$$

Pour  $j$  de 1 à  $m$

$$\bar{X}_j^i := \bar{X}_{j-1}^i + b(\bar{X}_{j-1}^i)h + \sigma(\bar{X}_{j-1}^i) \cdot \sqrt{h} \Delta W_j^i$$

$$\tilde{X}_j^i := \tilde{X}_{j-1}^i + \left( b(\tilde{X}_{j-1}^i) + \sigma(\tilde{X}_{j-1}^i) \cdot \theta_{j-1}^i \right) h + \sigma(\tilde{X}_{j-1}^i) \cdot \sqrt{h} \Delta W_j^i$$

Fin-boucle

$$\theta^{i+1} := \theta^i - \gamma^{i+1} F(\theta_i, W_{i+1})$$

Fin-boucle

$$\text{Retourne } V_0 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [G(W^i + \theta^i) e^{(-\theta^i \cdot W^i - \frac{1}{2} \|\theta^i\|^2)}]$$

Fin

### 2.4.4 Amélioration de la méthode d'Arouna

Un calcul amélioré du paramètre  $F(\theta, \Delta W)$  d'adaptation du « drift » utilisé en échantillonnage préférentiel et ce en le remplaçant par  $\frac{1}{2}(F(\theta, \Delta W) + F(\theta, -\Delta W))$  permet non seulement d'améliorer la réduction de variance mais étant appliqué comme une méthode de réduction son coût de calcul sera moindre.

La figure (Fig 2.6) montre l'effet de l'utilisation de la technique de Arouna sur la variance de l'évaluation d'une option.

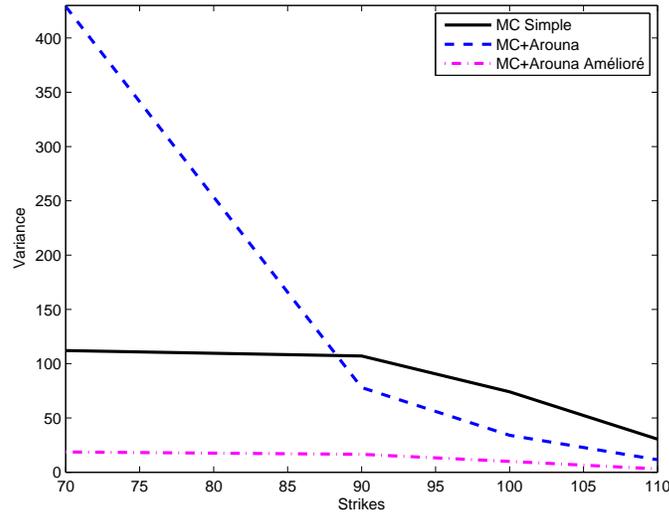


FIG. 2.6 – Effet de la technique de Arouna sur la variance de l'évaluation d'une option par Monte Carlo

## 2.5 Méthode d'échantillonnage préférentiel : Least Squares

La méthode est une technique d'optimisation qui recherche le minimum d'une fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i^2(x) = \frac{1}{2} f(x)^\top f(x).$$

où

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_m)$$

Ceci est réalisé par des méthodes de descente pour la recherche d'un minimum  $x^*$  (souvent local) par des itérations :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha h$$

en posant le gradient

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

et la hessienne

$$F''(x) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Le vecteur  $h$  est une direction de descente si  $h^\top F'(x) < 0$ .

La méthode de Newton consiste à chercher  $h_n$  tel que si  $F''(x)$  est définie positive :

$$F''(x)h_n = -F'(x),$$

et si  $F''(x)$  ne l'est pas :

$$h_n = -F'(x).$$

### 2.5.1 Méthode de Gauss-Newton

En posant la matrice jacobienne  $J = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$ ,  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  et en appliquant la méthode de Gauss-Newton à la fonction  $F$  précédente, on a :

$$f(x+h) = f(x) + J(x)h + O(\|h^2\|) \quad , \quad F'(x) = J^T(x)f(x)$$

$$F(x+h) \approx L(h) = F(x) + h^T J^T f(x) + \frac{1}{2} h^T J^T J h$$

et

$$F''(x) = L''(h) + \sum_{i=1}^n f_i(x) f_i''(x).$$

Alors la direction de la descente est donnée pour Gauss-Newton par :

$$L''(x)h_{GN} = -L'(0), \quad \text{ou bien par : } (J^T J)h_{GN} = -J^T f$$

et le pas de la descente par :

$$\alpha_{GN} = \min_{\alpha} F(x + \alpha h_{GN}).$$

### 2.5.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

C'est une méthode très proche de la méthode de Gauss-Newton mais où on introduit un paramètre d'atténuation de la descente  $\mu > 0$ . Dans ce cas la direction de la descente est obtenu grâce à :

$$(J^T J + \mu I)h_{LM} = -J^T f$$

$h_{LM} \approx -\frac{1}{\mu} F'(x)$  si  $\mu$  est très grand et  $h_{LM} \approx h_{GN}$  si  $\mu$  est très petit.

Cette approche permet aussi de se passer du pas de la descente  $\alpha$  et l'évolution du paramètre  $\mu$  est contrôlée par le ratio du gain (Voir Algorithme en annexe B) :

$$\text{Gain} = \frac{F(x) - F(x + h_{LM})}{L(0) - L(h_{LM})}.$$

Cette méthode a l'avantage d'être extrêmement rapide.

### 2.5.3 Application à la réduction de variance

La méthode d'optimisation Levenberg-Marquardt peut être employée pour réduire la variance en tant que technique d'échantillonnage préférentiel (voir [Cap07]). En effet, en notant  $Z = (\Delta Z^1, \dots, \Delta Z^n)$  le vecteur des incréments normaux des 2 mouvements browniens employés pour  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{2N_\theta})$  les paramètres de la nouvelle probabilité de Girsanov utilisée (le vecteur de dérive pour l'actif et la volatilité) et  $G(Z)$  la fonction de payoff (différente selon les options) :

$$\text{Var}^2 = \mathbb{E}_P[W_\theta(Z)G^2(Z)] - \mathbb{E}_P[G(Z)]^2, \quad W_\theta(Z) = P(Z)/P_\theta(Z) = e^{-Z \cdot \theta + \frac{1}{2} \|\theta\|^2}.$$

Minimiser la variance sur un échantillon Monte Carlo de taille  $N$  consiste à employer la méthode Levenberg-Marquardt sur la fonction :

$$m(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( W_\theta^{1/2}(Z_i) G(Z_i) \right)^2, \quad Z_i \sim P(Z), \quad W_\theta^{1/2}(Z_i) = e^{-\frac{1}{2} Z_i \cdot \theta + \frac{1}{4} \|\theta\|^2}.$$

### Algorithme de réduction de variance

Début

**Étape 1.** Générer un nombre moyen (2 à 3 fois le nombre de variables de minimization  $\theta_i$ ) de trajectoires aléatoires selon la probabilité  $P(Z)$ .

**Étape 2.** Choisir une probabilité de Girsanov  $P_{\theta_i}(Z) = (2\pi\sigma_i^2)^{-d/2} e^{-\frac{(Z-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$  (Remarque : le changement de probabilité peut aussi avoir comme paramètre la variance de la probabilité qui reste normale toutefois).

**Étape 3.** Appliquer la méthode de Levenberg-Marquardt à la fonction  $m(\theta)$  précédemment définie et déduire les paramètres optimaux  $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_{2N_\theta}^*)$ .

**Étape 4.** Utiliser  $\theta^*$  pour effectuer un échantillonnage préférentiel sur un nombre Monte Carlo plus grand  $N' > N$  et en déduire la nouvelle espérance et variance du Payoff.

Fin

La figure (Fig 2.7) montre l'effet de l'utilisation de la technique des Least Squares sur la variance de l'évaluation d'une option.

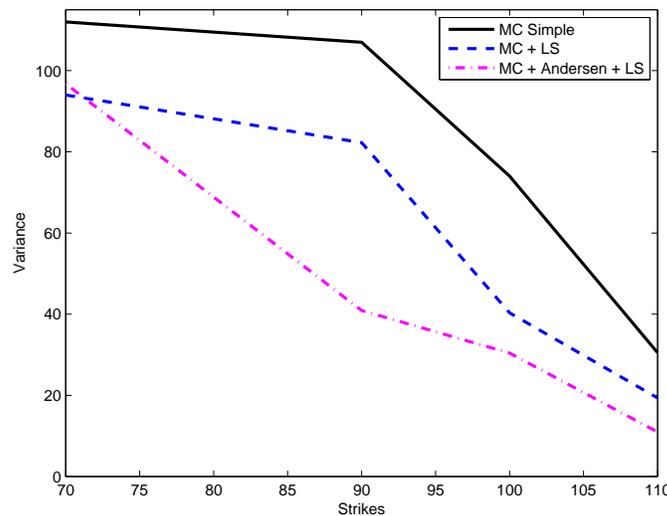


FIG. 2.7 – Effet de la technique des Least Squares sur la variance de l'évaluation d'une option par Monte Carlo

Toutes les méthodes précédentes sont basées sur le principe du tirage aléatoire des variables aléatoires gaussiennes qui interviendront dans les EDS à travers le mouvement brownien. Mais si on devait choisir un nombre  $N$  fixé de trajectoires, lesquelles choisir afin de minimiser l'erreur d'estimation ? La technique de quantification fonctionnelle permet de résoudre ce problème.

## 2.6 Techniques de quantification

La quantification vectorielle d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^M$  consiste à lui associer une autre variable aléatoire à valeurs dans le même espace mais ne prenant qu'un nombre fini de valeurs : son vecteur quantifié. Pour un nombre fini de points de  $\mathbb{R}^M$ , celui-ci est alors construit à partir du vecteur aléatoire original par sa projection au plus proche voisin. On dit que la quantification est optimale (au sens  $L^2$ ) si pour un nombre de points fixé, la disposition des points dans  $\mathbb{R}^M$  du vecteur quantifié minimise l'erreur quadratique.

Pour plus de détails sur cette technique, voir [LP02] et [PP03].

Soit  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  un espace de Hilbert séparable (c'est-à-dire où on peut trouver une suite dont l'adhérence est égale à l'espace topologique tout entier) et  $X : (\Omega, \mathbb{P}) \rightarrow H$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $H$  avec une

distribution  $\mathbb{P}_X$ .

Soit  $x = (x_1, \dots, x_N) \in H^{\otimes N}$  un quantificateur de taille  $N$ . La partition de  $H$  induite par  $x$  définit les cellules de Voronoï  $(C_i(x))_{i=1, \dots, N}$  :

$$C_i(x) = \{\eta \in H / \|x_i - \eta\|_H = \min_{1 \leq j \leq N} \|x_j - \eta\|_H\}.$$

### 2.6.1 Quantification fonctionnelle du mouvement brownien

L'objectif est de calculer  $\mathbb{E}[f(W)]$  pour une fonction  $f$  continue donnée. La technique de quantification est la recherche d'une partition  $(H_j)_{j \in J}$  de  $H$ , de leur associer une famille de points  $(W_j)_{j \in J}$ ,  $W_j \in H_j$  et des pondérations  $(\mathbb{P}[W \in H_j])_{j \in J}$  de manière que  $\sum_{j \in J} \mathbb{P}[W \in H_j] f(W_j)$  soit une bonne approximation de  $\mathbb{E}[f(W)]$ . On considère dans notre cas le mouvement brownien  $W$ , la quantification fonctionnelle de ce processus consiste à exploiter sa série de Karhunen-Loeve qui permet de distinguer les dépendances en  $t$  et en  $\omega$  du processus.

$$W(\omega, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (W(\omega, t) | e_n(t))_{L_T^2} e_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n^W(\omega) e_n(t), \text{ dans } L_T^2(\Omega, [0, T]),$$

où  $(e_n)_{n \geq 1}$  représente une base orthonormale Hilbertienne de  $L^2[0, T]$  et  $(\xi_n^X)_{n \geq 1}$  une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

La discrétisation est donc double : à la fois au niveau de la troncature de la série (une série infinie est impossible en pratique) et au niveau de la quantification des vecteurs aléatoires. C'est à dire qu'il faut d'une part déterminer une dimension  $d(N)$  optimale de troncature et à la fois déterminer un nombre de points  $N$  optimal pour quantifier le vecteur aléatoire dont les composantes sont les  $d$  premiers termes de la série.

Pour plus de détails sur cette technique, voir [LP02, PP03, PPP04].

En pratique, pour un  $N$  fixé, on détermine  $d(N) (\approx \ln(N))$  pour le brownien) seuil de troncature de la série, on remplace ensuite le vecteur  $W$  par les  $N$  processus déterministes :

$$W^i(t) = W(\omega_i, t) = \sum_{n=1}^{d(N)} \xi_n^i e_n(t) \quad , \quad 1 \leq i \leq N$$

où  $\xi^i = (\xi_1^i, \dots, \xi_{d(N)}^i) \in \mathbb{R}^{d(N)}$  quantifie le vecteur  $d(N)$ -dimensionnel  $\xi^N = (\xi_1, \dots, \xi_{d(N)})$  et où  $(W^1(t), \dots, W^N(t))$  est un  $N$ -uplet de points dans  $\mathbb{R}^N$  quantifiant le mouvement brownien.

Dans le cas du mouvement brownien standard sur  $[0, T]$  de dimension  $M$ , les termes de la série de Karhunen-Loeve sont explicites, ainsi pour  $n \geq 1$  :

$$e_n^W(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{\pi t}{T} \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \quad , \quad \xi_n^W \sim \mathcal{N}(0, \lambda_n \mathbf{I}_M) \quad , \quad \lambda_n = \left(\frac{T}{\pi(n - \frac{1}{2})}\right)^2.$$

Le quantificateur du type Karhunen-Loeve est un quantificateur produit qui se base sur une décomposition du nombre  $N$  en produit de  $d(N)$  éléments. On note  $t \mapsto W_{i_1, \dots, i_{d(N)}}^N(t)$  le quantificateur de taille  $N$  produit à partir de la décomposition optimale de  $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_{d(N)}$  qui fournit  $d(N)$  et  $(N_k)$  optimaux pour  $N$  donné ( $\leq 11519$ ).

Pour le mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, T]$  cela donne :

$$W_{i_1, \dots, i_{d(N)}}^N(t) = \sum_{n=1}^{d(N)} \sqrt{\lambda_n} x_{i_n} e_n(t) = \sum_{n=1}^{d(N)} \frac{\sqrt{2T}}{\pi(n - \frac{1}{2})} x_{i_n} \sin\left(\frac{\pi t}{T} \left(n - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$1 \leq i_n \leq N_n, \quad \prod_{n=1}^{d(N)} N_n = N.$$

L'ensemble  $(x_{i_n})_{1 \leq i_n \leq N_n}$  représente le  $N_n$  quantificateur de la loi normale centrée réduite en dimension  $M$ .

Poids (N=6)	Valeur (N=6)	Poids (N=2)	Valeur (N=2)
$7.39694 \cdot 10^{-2}$	-1.89359	0.5	$-7.978845 \cdot 10^{-1}$
$1.81006 \cdot 10^{-1}$	-1.00010	0.5	$7.978845 \cdot 10^{-1}$
$2.45023 \cdot 10^{-1}$	-0.31771	—	—
$2.45023 \cdot 10^{-1}$	0.31771	—	—
$1.81006 \cdot 10^{-1}$	1.00010	—	—
$7.39694 \cdot 10^{-2}$	1.89359	—	—

TAB. 2.1 – Table de quantification de la loi normale unidimensionnelle ( $N = 2$  et  $6$ ).

Le poids associé à ce quantificateur est  $\mathbb{P}_{i_1, \dots, i_{d(N)}} = \prod_{j=1}^{d(N)} \mathbb{P}[x_{i_j}]$  qui est le produit des poids associé à la quantification de la loi normale. Ce qui donne au final :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_N^{\text{quant}}(t)] &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_{d(N)}=1}^{N_{d(N)}} \mathbb{P}_{i_1, \dots, i_{d(N)}} W_{i_1, \dots, i_{d(N)}}^N(t) = 0, \\ \mathbb{E}[F(W_N^{\text{quant}}(t))] &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_{d(N)}=1}^{N_{d(N)}} \mathbb{P}_{i_1, \dots, i_{d(N)}} F(W_{i_1, \dots, i_{d(N)}}^N)(t). \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur cette technique, voir [LP02, PP03, PPP04, PP05]. Des grilles de quantification du mouvement brownien sur  $[0,1]$  de  $N = 1$  à  $N = 10\,160$  sont mises à disposition par Pagès et Printems (2005). Les deux premières colonnes indiquent, pour un nombre  $N$  de points, la distorsion (i.e. le carré de l'erreur quadratique) de la quantification optimale du brownien sur  $[0,1]$  associée. Il faut remarquer que parfois un nombre de quantificateurs ne donne pas un résultat optimal et il faut alors prendre le quantificateur de taille inférieure qui offre une meilleure distorsion (erreur quadratique).

Les colonnes qui suivent indiquent quant à elles le meilleur quantificateur courant pour un nombre  $N$  de points :  $N_{\text{rec}}$  (le nombre de points avant  $N$  ayant obtenu la meilleure distorsion), le rappel de la distorsion associée (cf. 2<sup>ème</sup> colonne) et la décomposition optimale obtenue.

Exemple :  $13(N) \ 0.100415 \ 12(N_{\text{rec}}) \ 0.089545 \ 6 \ 2 \rightarrow d(N) = 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{13}^{\text{quant}}(t)] &= \sum_{i_1=1}^6 \sum_{i_2=1}^2 \mathbb{P}[x_{i_1}] \mathbb{P}[x_{i_2}] W_{i_1, i_2}^{12}(t) \\ W_{i_1, i_2}^{12}(t) &= \frac{\sqrt{2T}}{\pi(1-\frac{1}{2})} x_{i_1} \sin\left(\frac{\pi t}{T} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2T}}{\pi(2-\frac{1}{2})} x_{i_2} \sin\left(\frac{\pi t}{T} \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

*Remarque 6.* La distorsion  $\|W - W^N\|_2 \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln(N)}}$  quand  $N \rightarrow \infty$  qui est une vitesse de convergence extrêmement faible, nous verrons par la suite comment remédier à ce problème.

Les figures (Fig 2.8 et Fig 2.9) représentent la simulation de 96 trajectoires du mouvement brownien par Monte Carlo Simple et par quantification.

## 2.6.2 Implémentation numérique

### Améliorations susceptibles de mieux pricer les options

**Méthode de Romberg** Cette méthode empirique consiste à utiliser 2 quantificateurs de tailles différentes ( $N \gg Q$ ) pour minimiser l'erreur de la manière suivante à travers la décomposition en série de Taylor :

$$\mathbb{E}[F_{\text{Call}}^{\text{Romberg}}(W^{\text{quant}})] = \frac{\ln(N) \mathbb{E}[F_{\text{Call}}(W_N^{\text{quant}})] - \ln(Q) \mathbb{E}[F_{\text{Call}}(W_Q^{\text{quant}})]}{\ln(N) - \ln(Q)} + o\left(\frac{1}{\ln(N)}\right).$$

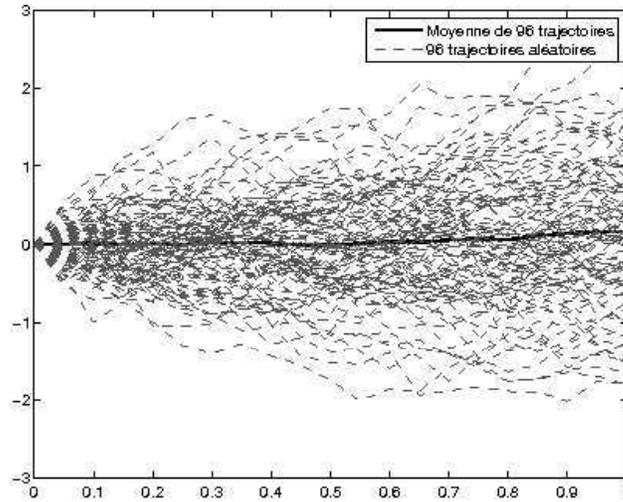


FIG. 2.8 – 96 trajectoires du mouvement brownien simulées par Monte Carlo Simple.

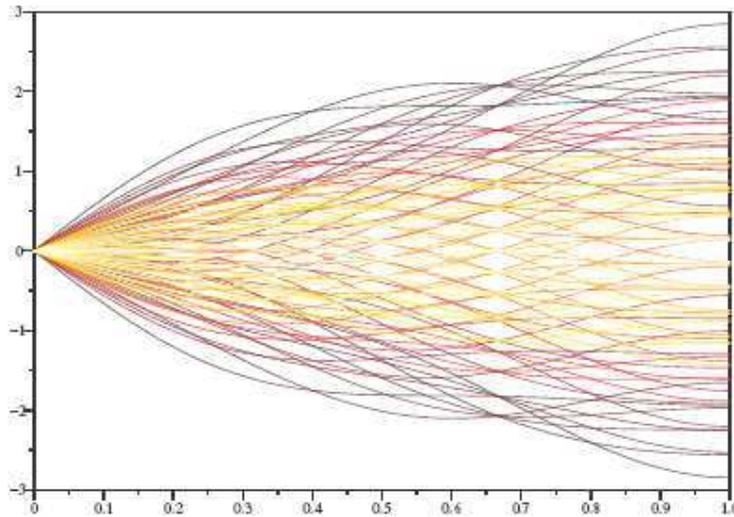


FIG. 2.9 – 96 trajectoires du mouvement brownien simulées par quantification.

**Méthode de Romberg  $K$ -Linear Interpolation** C'est une méthode heuristique basée sur la parité Call-Put qui se manifeste par exemple pour les options vanille par :

$$\mathbb{E}[F_{\text{Call-Put}}(W_N^{\text{quant}})] = S_0 - e^{(-rT)}K + \mathbb{E}[F_{\text{Put}}(W_N^{\text{quant}})],$$

et pour les options asiatiques :

$$\mathbb{E}[F_{\text{Call-Put}}(W_N^{\text{quant}})] = S_0 \left( \frac{1 - e^{(-rT)}}{rT} \right) - e^{(-rT)}K + \mathbb{E}[F_{\text{Put}}(W_N^{\text{quant}})].$$

L'interpolation consiste lorsqu'on a un panel de strikes pour tout  $K \in \{K_{\min}, \dots, K_{\max}\}$  à choisir :

$$\mathbb{E}[F_{\text{Call}}^{K\text{-Interpol}}(W_N^{\text{quant}})] = \frac{(K - K_{\min})\mathbb{E}[F_{\text{Call}}^{\text{Romberg}}(W^{\text{quant}})] + (K_{\max} - K)\mathbb{E}[F_{\text{Call-Put}}^{\text{Romberg}}(W^{\text{quant}})]}{K_{\max} - K_{\min}}.$$

Pour plus de détails sur cette technique, voir [PP05].

Cette interpolation linéaire est une approche totalement heuristique remarquée des données pratiques, elle consiste à mettre plus de poids sur la variable la « moins aléatoire » (de variance inférieure) qui tends à minimiser la l'erreur globale.

Le défaut de cette interpolation est qu'elle exige un panel de strikes, autrement dit si on a une seule option à évaluer pour un seul strike, elle n'est pas définie. Le choix de  $K_{\max}$  et de  $K_{\min}$  est aussi arbitraire.

Nous proposons une autre interpolation ( $K$ -Linear Interpolation) qui est aussi arbitraire mais qui évite les défauts de l'ancienne interpolation que nous appelleront ( $SK$ -Linear Interpolation) :

$$\mathbb{E}(F_{\text{Call}}^{SK\text{-Interpol}}(W^{\text{quant}})) = \frac{K\mathbb{E}(F_{\text{Call}}^{\text{Romberg}}(W^{\text{quant}})) + S_0\mathbb{E}(F_{\text{Call-Put}}^{\text{Romberg}}(W^{\text{quant}}))}{K + S_0}.$$

La figure (Fig 2.10) montre l'effet de l'interpolation sur l'erreur de l'évaluation d'une option.

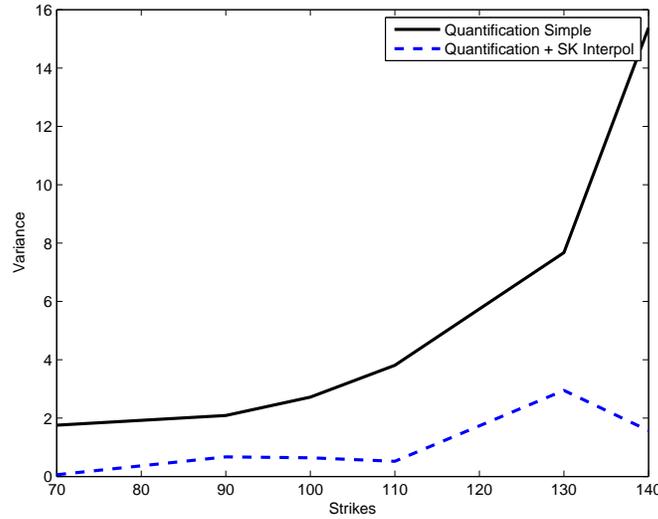


FIG. 2.10 – Effet de l'interpolation sur l'erreur de l'évaluation des options par quantification

### 2.6.3 Application aux options vanilles et asiatiques

#### Options vanilles

Considérons le modèle précédent :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1, \\ dV_t = k(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2, \\ d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt. \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$W_t^1 = \rho W_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{W}_t^1$$

où  $\tilde{W}_t^1$  est un mouvement brownien indépendant de  $W_t^2$ .

L'approche de Pagès et Printems consiste à discrétiser le CIR selon un schéma d'Euler de  $n$  pas en remplaçant le mouvement brownien par son quantificateur  $\chi_i^N(t)$  :

$$V_i^{n,N}(t_{k+1}) = V_i^{n,N}(t_k) + k \left( a - \frac{\sigma^2}{4k} - V_i^{n,N}(t_k) \right) \Delta t_n + \sigma \sqrt{V_i^{n,N}(t_k)} (\chi_i^N(t_{k+1}) - \chi_i^N(t_k)).$$

*Remarque 7.* Le terme en  $\frac{\sigma^2}{4k}$  provient de la conversion entre l'intégrale d'Itô et celle de Stratonovich et qui est la suivante :

$$\int_0^T \sigma(t, X_t) \circ dW_t = \frac{1}{2} \int_0^T \sigma'(t, X_t) \sigma(t, X_t) dt + \int_0^T \sigma(t, X_t) dW_t.$$

Le terme  $\frac{1}{T} \int_0^T V_s^{n,N} ds$  est approché par  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V^{n,N}(t_k)$ .

En notant  $\bar{V}_t = \frac{1}{t} \int_0^t V_s ds$  un calcul d'Itô montre que :

$$S_t = S_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} \bar{V}_t t + \rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2\right) \exp\left(\left(r - \frac{1-\rho^2}{2} \bar{V}_t\right)t + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_s} d\tilde{W}_s^1\right).$$

En remplaçant  $\int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2$  par son expression provenant de la définition de la volatilité, le modèle de Heston se transforme donc en un modèle de Black & Scholes à l'échéance  $T$  avec une volatilité et une valeur initiale différentes.

En notant

$$S'_0 = S_0 \exp\left(-\rho T \left[\left(\frac{k}{\sigma} - \frac{\rho}{2}\right) \bar{V} + \frac{V}{T\sigma} - \frac{ka}{\sigma}\right]\right)$$

et  $\sigma' = \sqrt{(1-\rho^2)\bar{V}}$ , on a que

$$F_{\text{Call}}(V, \bar{V}) = \text{Call}_{\text{BS}}(S'_0, K, r, \sigma', T).$$

Ensuite, il suffit d'évaluer ce modèle de Black & Scholes pour toutes les trajectoires quantifiées avec les poids associés.

### Options asiatiques

Etant donné que les options asiatiques dépendent du chemin suivi, il faut quantifier  $\tilde{W}_t^1$  aussi pour simuler toute la trajectoire de l'actif vu qu'il apparaît dans la formule de calcul du Payoff :

$$\hat{\text{Call}}_{\text{asiatique}}^{\text{Heston}}(S_0, K, n, T; \chi^N) = e^{-rT} \sum_{i,j} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_{i,j}^{n,N}(s) ds - K \right)_+ \mathbb{P}[\tilde{W}^1 = \chi_i^N] \mathbb{P}[W^2 = \chi_j^N].$$

On rappelle que

$$S_t = S_0 \exp\left(t \left( \left(r - \frac{\rho ak}{\sigma}\right) + \bar{V}_t \left(\frac{\rho k}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) \right) + \frac{\rho}{\sigma} (V_t - V_0) \right) \exp\left(\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_s} d\tilde{W}_s^1\right).$$

Donc en remplaçant la volatilité par sa valeur provenant du schéma de discrétisation et le mouvement brownien par son quantificateur, on trouve :

$$S_{i,j}^{n,N}(t) = S_0 \exp\left(t \left( \left(r - \frac{\rho ak}{\sigma}\right) + v_j^{n,N}(t) \left(\frac{\rho k}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) \right) + \frac{\rho}{\sigma} (v_j^{n,N}(t) - V_0) \right) \exp\left(\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{v_j^{n,N}} d\chi_i^N\right).$$

### Notre approche

Dans le cas des options Call vanille européennes, l'approximation du modèle de Heston par un modèle de Black & Scholes a été au plan numérique trop instable. Les Calls asiatiques ont eux le défaut de la double somme qui rend le calcul de l'option trop lourd à partir de 5000 tirages et pour des tirages de taille inférieure à 1000, le résultat est trop insatisfaisant pour des cas volatils.

C'est pour cela que nous proposons une méthode hybride Monte Carlo-quantification. Nous avons adopté la discrétisation d'Andersen pour le modèle mais en quantifiant le mouvement brownien de l'actif. Nous simulons donc environ 9000 trajectoires dans les deux cas ce qui n'est pas énorme. Cette approche s'est avérée assez précise et rapide. Elle est certes moins rapide pour le cas des options vanilles mais beaucoup plus rapide pour le cas des options asiatiques.

## Chapitre 3

# Résultats numériques et discussion

### 3.1 Présentation des modèles

Nous avons étudié le pricing des options vanilles et asiatiques dans le modèle de Heston de volatilité stochastique pour des cas extrêmes :

- marché de taux de change à long terme :  $r = 0.03$ ,  $k = 0.5$ ,  $\rho = -0.9$ ,  $T = 3$ ,  $V_0 = \theta = 0.04$ , pas de discrétisation = 0.02,  $S_0 = 100$  ;
- marché de taux d'intérêt à long terme :  $r = 0.03$ ,  $k = 0.3$ ,  $\rho = -0.5$ ,  $T = 5$ ,  $V_0 = \theta = 0.04$ , pas de discrétisation = 0.05,  $S_0 = 100$  ;
- marché d'actions à court terme :  $r = 0.05$ ,  $k = 1.0$ ,  $\rho = -0.3$ ,  $T = 1$ ,  $V_0 = \theta = 0.09$ , pas de discrétisation = 0.01,  $S_0 = 100$  ;
- cas test classique :  $r = 0.05$ ,  $k = 2.0$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $T = 1$ ,  $V_0 = \theta = 0.01$ , pas de discrétisation = 0.01,  $S_0 = 100$ ,  $\sigma = 0.1$ .

Ces données sont une combinaison de paramètres provenant de la calibration du modèle et des paramètres proposés par Leif Andersen (voir [And07]). Le cas test classique par contre est un cas idéal de marché stable utilisé dans la plupart des articles de recherche pour tester les méthodes, il est inclus uniquement pour que des comparaisons avec nos méthodes puissent être réalisées dans le futur.

La simulation a été réalisée sur un ordinateur cadencé à 3.6 GHz et dont la mémoire vive est de 1 Go de RAM sous le système d'exploitation Linux Ubuntu. Les algorithmes ont été écrits sous le langage C++ et en utilisant les bibliothèques Quantlib et GSL.

Pour la simulation le nombre de trajectoires simulées a été :  $N_{MC} = 10^6$ ,  $N_{Quant} = 9984$ .

Pour le paramètre  $\sigma$  il a été pris 0.15 pour modéliser des marchés volatils et 0.3 pour modéliser des marchés très volatils.

## 3.2 Graphiques pour les options vanilles

Nous rappelons que pour les options vanilles européennes le payoff est :

$$e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)].$$

### 3.2.1 Présentation des méthodes

- La **méthode exacte** est la méthode de transformée de Fourier FFT.
- La méthode **MC Simple** est une méthode de Monte Carlo sans réduction de variance et une discrétisation d'Euler.
- La méthode **MC + RM Amélioré** est une méthode de Monte Carlo avec la réduction de variance proposée par Arouna (Robbins Monro) sous sa version améliorée et une discrétisation d'Euler.
- La méthode **MC + Andersen + LS** est une méthode de Monte Carlo avec la réduction de variance Least Squares et une discrétisation par marginales d'Andersen.
- La méthode **Quant + SK-Interpol** est une méthode de quantification avec une amélioration d'interpolation du type SK-Interpol.

Trois critères sont à prendre en compte lors de la simulation :

- le temps de calcul ;
- l'erreur relative par rapport au cas test (la méthode exacte) ;
- la variance de l'estimateur.

### 3.2.2 Temps de calcul des méthodes

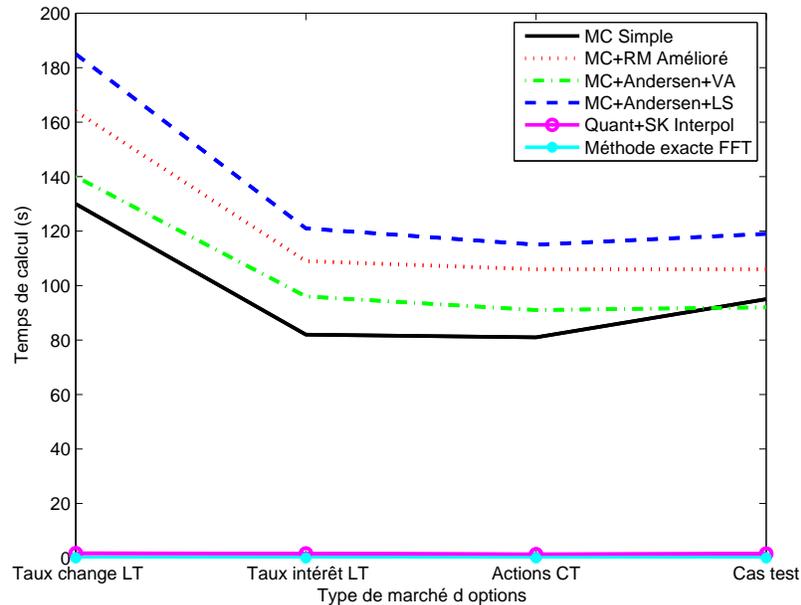
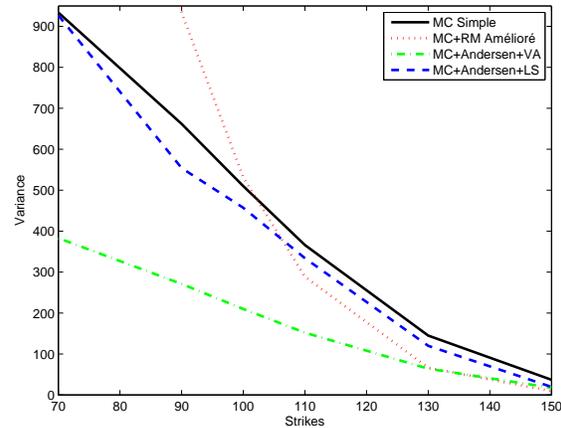
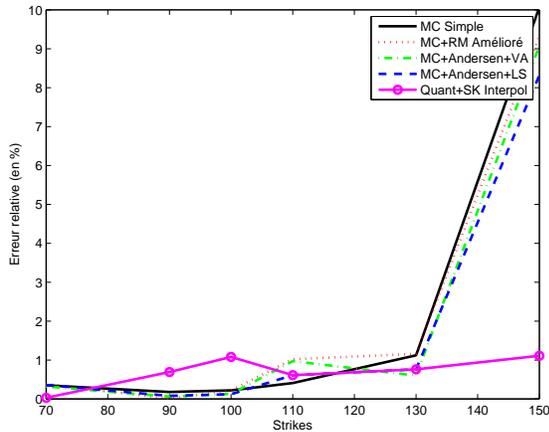


FIG. 3.1 – Temps de calcul des méthodes implémentées pour les options vanilles

Sans contestation, les méthodes par FFT et quantification sont de loin les plus rapides. Il faut toutefois relativiser cette information étant donné que la taille de l'échantillon que nous avons simulé pour les méthodes de Monte Carlo est d'un million de trajectoires. C'est une contrainte due au fait qu'un échantillon plus petit n'est pas considéré par les praticiens comme significatif. En effet, en relançant l'algorithme Monte Carlo avec une nouvelle graine pour un échantillon plus petit, il se peut que le résultat soit légèrement différent (en théorie, le second nombre à droite de la virgule en base 10 changerait). Une telle précision est trop exigeante et en pratique dans les marchés financiers un échantillon de taille 100 000 est suffisant, ce qui se traduirait pas une division par 10 du temps de calcul.

Toutefois, les méthodes de quantification et de FFT restent les plus rapides.

### 3.2.3 Marché de taux de change à long terme

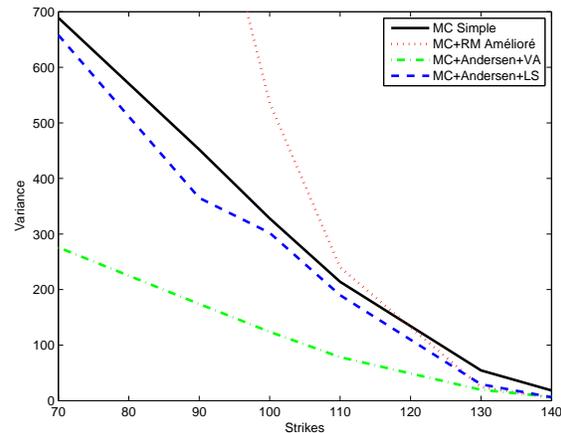
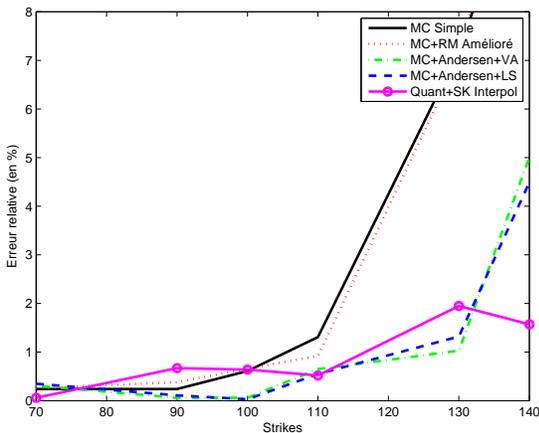


*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un marché volatil ( $\sigma = 0.15$ ) de taux de change à long terme*

Les schémas par Monte Carlo ont mal réagi au niveaux des options hors de la monnaie en terme d'erreur mais le schéma proposé par Andersen est resté le meilleur. La méthode par quantification s'est révélée excellente.

La méthode des variables antithétiques a réalisé une bonne réduction de variance pour les options dans la monnaie contrairement aux méthodes d'échantillonnage préférentiel.

La méthode de Arouna a augmenté la variance pour les options dans la monnaie ce qui confirme que c'est une méthode stochastique et qu'elle réagit mal lorsque l'actif et sa volatilité sont corrélés négativement.



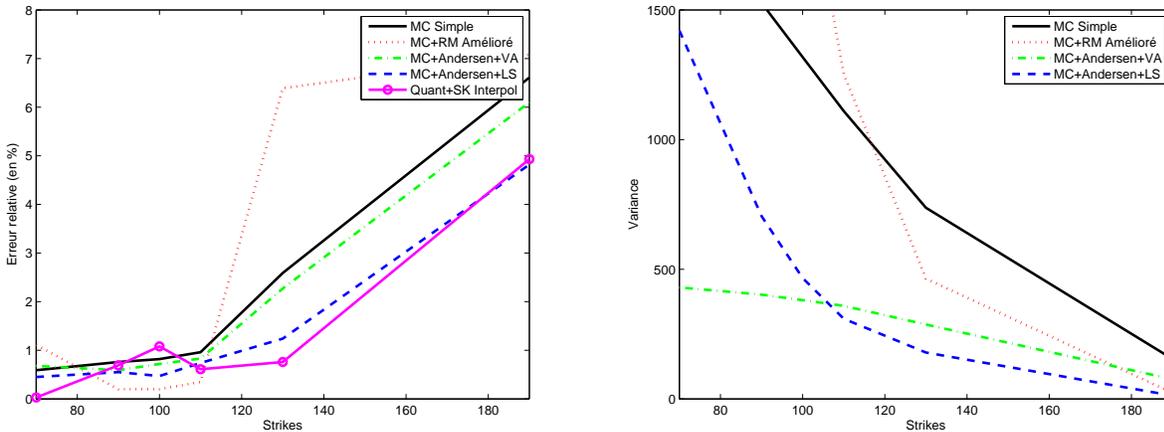
*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un marché très volatil ( $\sigma = 0.3$ ) de taux de change à long terme*

Le schéma d'Andersen a réalisé une nette amélioration par rapport au schéma d'Euler.

La méthode des variables antithétiques a réalisé une bonne réduction de variance pour les options dans la monnaie contrairement aux méthodes d'échantillonnage préférentiel.

La méthode de Arouna a augmenté la variance pour les options dans la monnaie ce qui confirme que c'est une méthode stochastique et qu'elle réagit mal lorsque l'actif et sa volatilité sont corrélés négativement.

### 3.2.4 Marché de taux d'intérêt à long terme



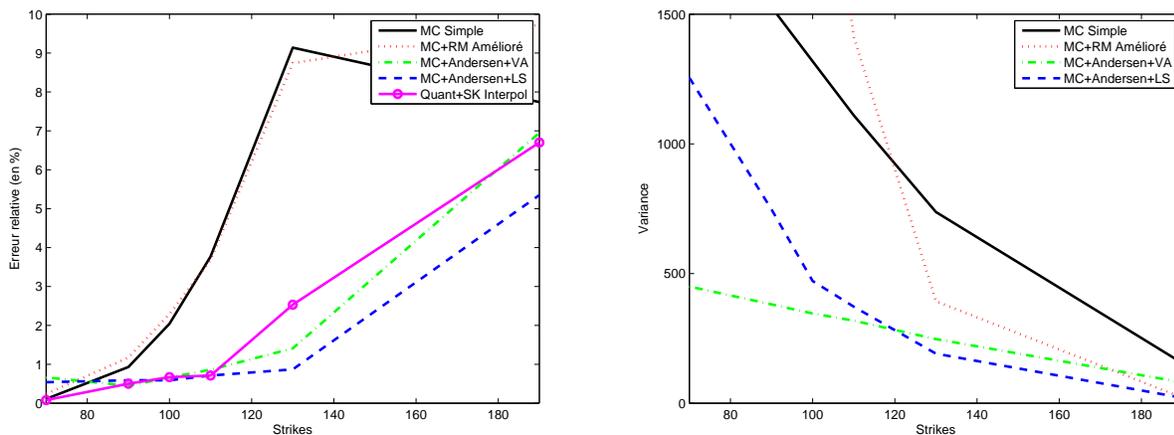
*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un marché volatil ( $\sigma = 0.15$ ) de taux d'intérêt à long terme*

Le schéma d'Andersen a réalisé une très nette amélioration par rapport au schéma d'Euler. Ceci peut s'expliquer par le fait que le pas de discrétisation est petit et que le schéma d'Andersen marche très bien dans ce cas.

La méthode des Least Squares a été très efficace surtout pour les options hors de la monnaie (qui sont les plus utilisées en finance de marché). Mais la méthode des variables antithétiques reste la meilleure pour les options dans la monnaie.

La méthode de Arouna a augmenté la variance pour les options dans la monnaie mais a réalisé un bon résultat pour les options hors de la monnaie. La méthode a par contre tendance à augmenter l'erreur relative.

La méthode de la quantification est très efficace et l'erreur induite est très acceptable.



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un marché très volatil ( $\sigma = 0.3$ ) de taux d'intérêt à long terme*

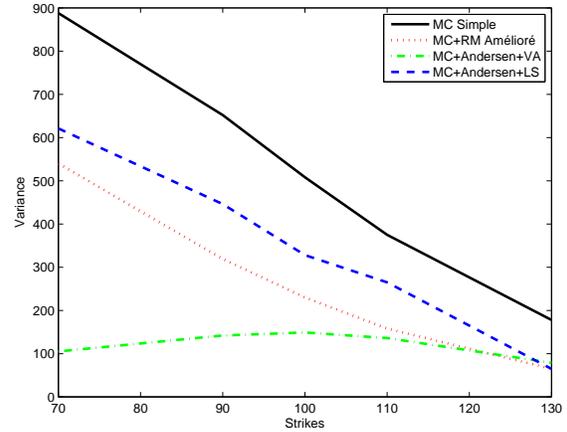
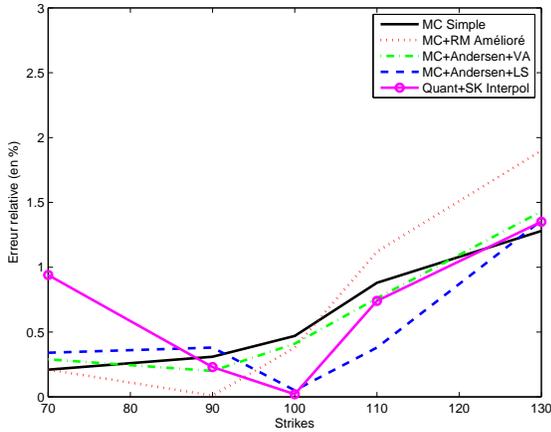
Le schéma d'Andersen a réalisé une très nette amélioration par rapport au schéma d'Euler. Ceci peut s'expliquer par le fait que le pas de discrétisation est petit et que le schéma d'Andersen marche très bien dans ce cas.

La méthode des Least Squares a été très efficace surtout pour les options hors de la monnaie (qui sont les plus utilisées en finance de marché). Mais la méthode des variables antithétiques reste la meilleure pour les options dans la monnaie.

La méthode de Arouna a augmenté la variance pour les options dans la monnaie mais a réalisé un bon résultat pour les options hors de la monnaie. La méthode a par contre tendance à augmenter l'erreur relative.

La méthode de la quantification est très efficace et l'erreur induite est très acceptable.

### 3.2.5 Marché d'actions à court terme

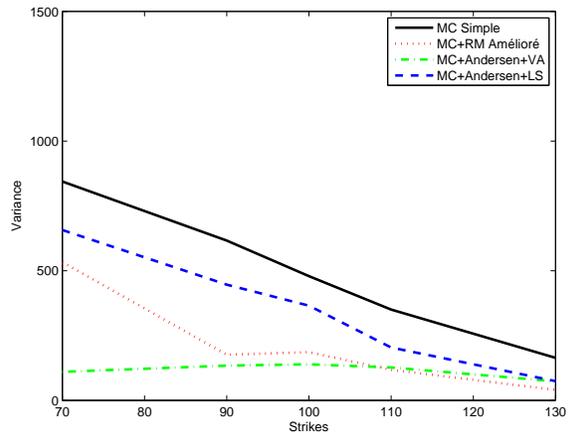
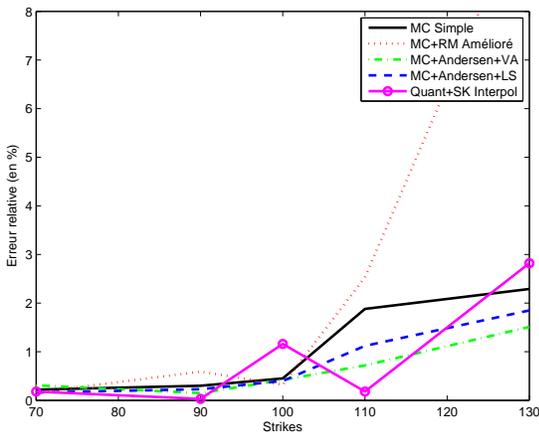


*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un marché volatil ( $\sigma = 0.15$ ) d'actions à court terme*

La méthode de Arouna a fait une bonne réduction de variance mais son erreur par rapport au cas test reste énorme par rapport aux autres schémas.

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

Le résultat de la quantification reste valable même si le cas présent est très volatil ce qui confirme la robustesse de la méthode.



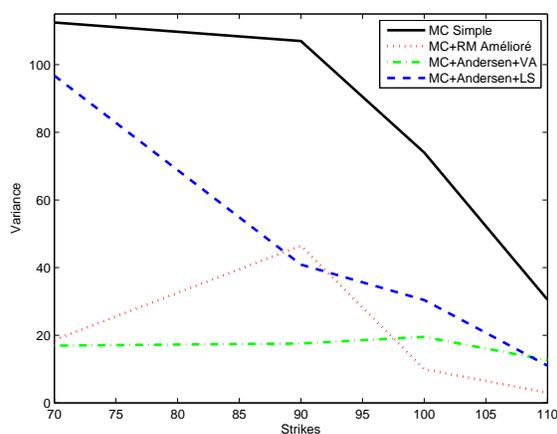
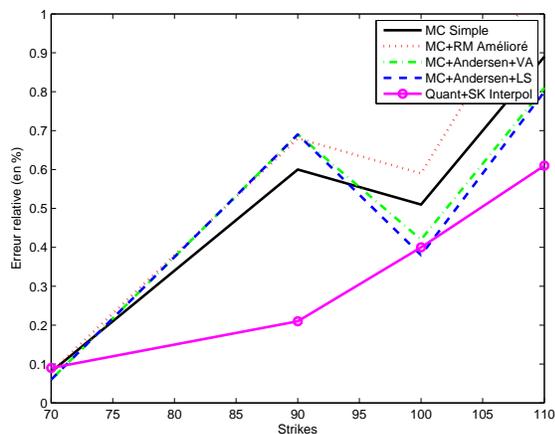
*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un marché très volatil ( $\sigma = 0.3$ ) d'actions à court terme*

La méthode de Arouna a fait une bonne réduction de variance mais son erreur par rapport au cas test reste énorme par rapport aux autres schémas.

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

Le résultat de la quantification reste valable même si le cas présent est très volatil ce qui confirme la robustesse de la méthode.

### 3.2.6 Cas test classique



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options vanilles dans un cas test classique*

La méthode de Arouna a fait une bonne réduction de variance mais son erreur par rapport au cas test reste grande en comparaison aux autres schémas.

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

Le résultat de la quantification est excellent et cette méthode a fait la plus petite erreur.

### 3.3 Graphiques pour les options asiatiques

Nous rappelons que pour les options asiatiques européennes le payoff est :

$$e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \max \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K, 0 \right) \right].$$

#### 3.3.1 Présentation des méthodes

- La **méthode exacte** est une méthode de Monte Carlo (+ variables antithétiques+ discrétisation par marginales d'Andersen + Romberg)  $N_{MC} = 4 \cdot 10^6$ .
- La méthode **MC Simple** est une méthode de Monte Carlo sans réduction de variance et une discrétisation d'Euler.
- La méthode **MC +RM Amélioré** est une méthode de Monte Carlo avec la réduction de variance proposée par Arouna (Robbins Monro) sous sa version améliorée et une discrétisation d'Euler.
- La méthode **MC + Andersen + LS** est une méthode de Monte Carlo avec la réduction de variance Least Squares et une discrétisation par marginales d'Andersen.
- La méthode **Quant + SK-Interpol** est une méthode de quantification avec une amélioration d'interpolation du type SK-Interpol.

#### 3.3.2 Temps de calcul des méthodes

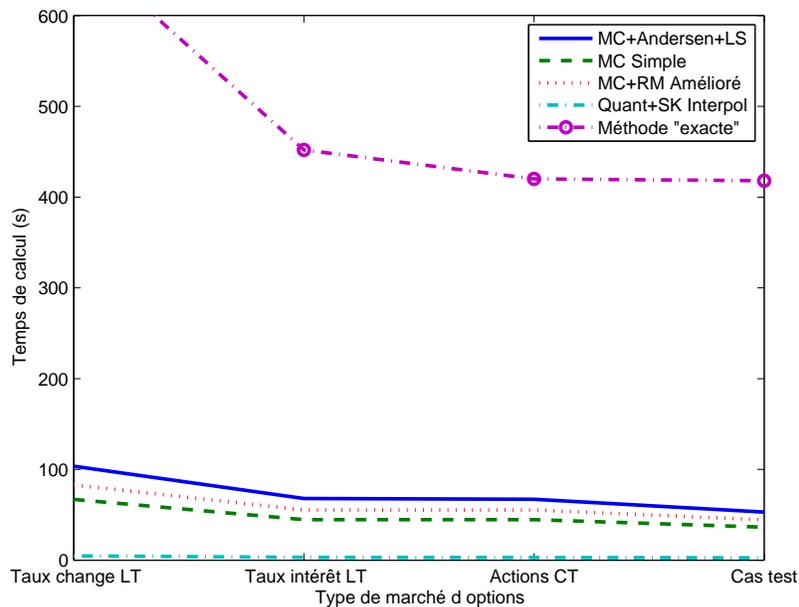


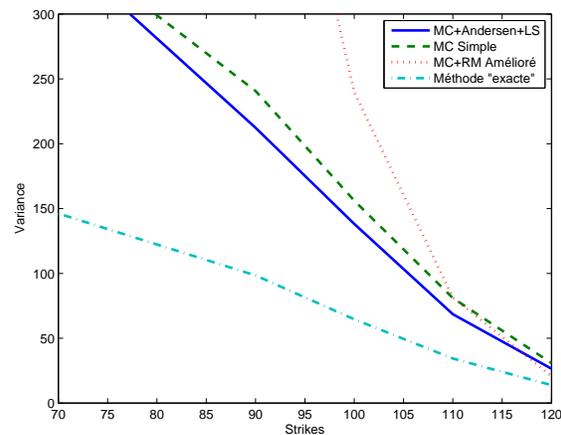
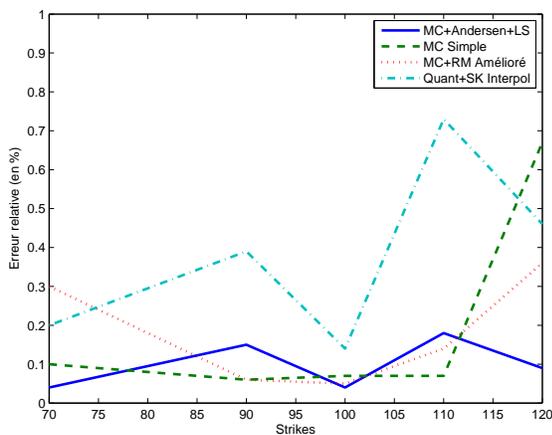
FIG. 3.2 – Temps de calcul des méthodes implémentées pour les options asiatiques

Sans contestations, la méthode par quantification est de loin la plus rapide. Il faut toutefois relativiser cette information étant donné que la taille de l'échantillon que nous avons simulé pour les méthodes de Monte Carlo est de 500 000 trajectoires. C'est une contrainte due au fait qu'un échantillon plus petit n'est pas considéré par les chercheurs comme significatif. En effet, en relançant l'algorithme de Monte Carlo avec une nouvelle graine pour un échantillon plus petit, il se peut que le résultat soit légèrement différent (en théorie, le second nombre à droite de la virgule en base 100 changerait). Une telle précision est trop exigeante et en pratique dans les marchés

financiers un échantillon de taille 100 000 est suffisant, ce qui se traduirait pas une division par 5 du temps de calcul.

Toutefois, la méthode de quantification reste la plus rapide.

### 3.3.3 Marché de taux de change à long terme

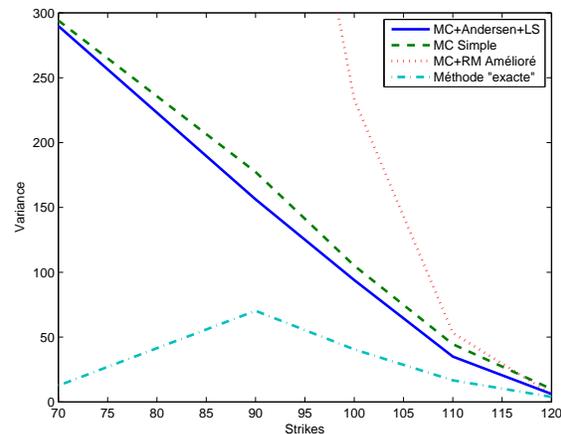
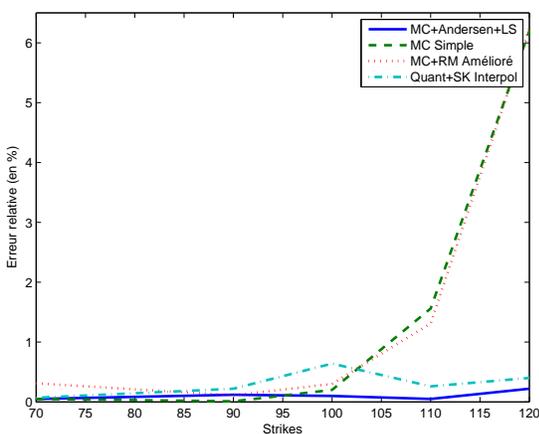


*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un marché volatil ( $\sigma = 0.15$ ) de taux de change à long terme*

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance mais le surcoût de calcul qu'elle rajoute, ne justifie pas son utilisations dans les cas volatils.

L'erreur de quantification est grande mais elle reste toutefois acceptable.



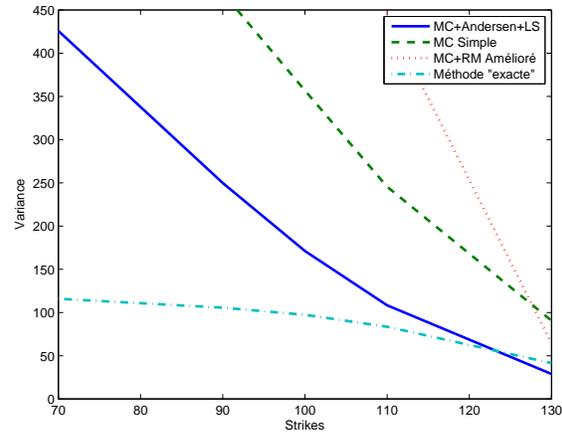
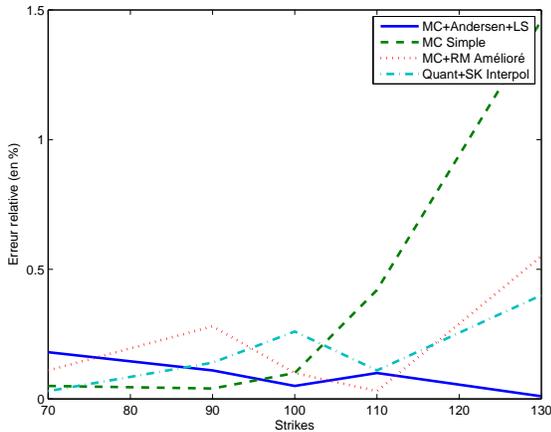
*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un marché très volatil ( $\sigma = 0.3$ ) de taux de change à long terme*

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance mais le surcoût de calcul qu'elle rajoute, ne justifie pas son utilisation dans les cas volatils.

L'erreur de la discrétisation d'Euler est trop grande pour être acceptable surtout pour les options hors de la monnaie.

### 3.3.4 Marché de taux d'intérêt à long terme



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un marché volatil ( $\sigma = 0.15$ ) de taux d'intérêt à long terme*

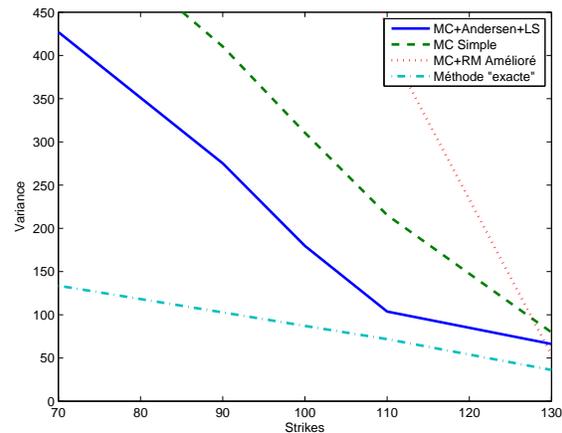
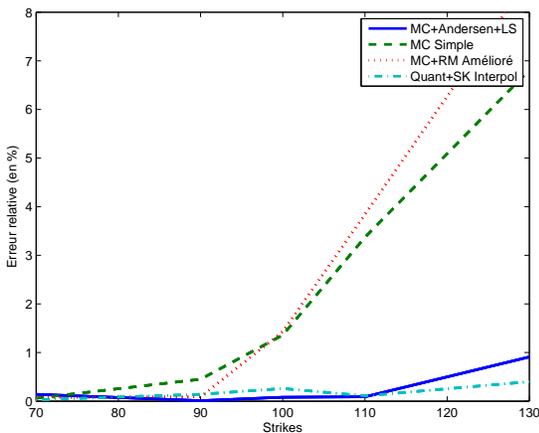
Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance surtout pour les options hors de la monnaie.

L'erreur de la discrétisation d'Euler est trop grande pour être acceptable surtout pour les options hors de la monnaie.

La méthode de Arouna est totalement inefficace sauf pour les options très en dehors de la monnaie.

L'erreur de quantification est très acceptable, elle est comparable à celle du schéma Andersen tout en étant plus rapide.



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un marché très volatil ( $\sigma = 0.3$ ) de taux d'intérêt à long terme*

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance surtout pour les options hors de la monnaie.

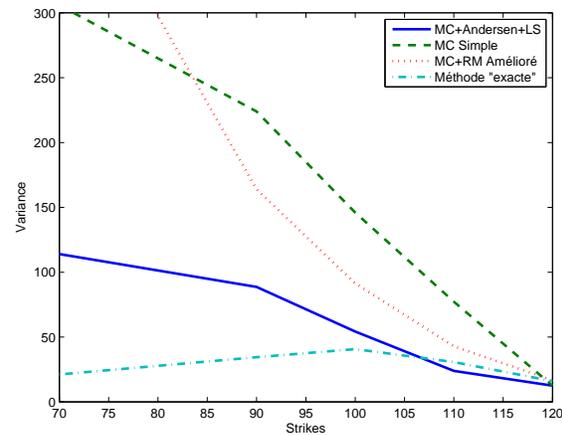
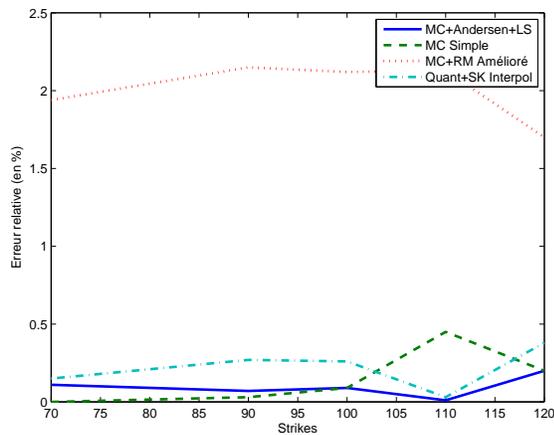
L'erreur de la discrétisation d'Euler est trop grande pour être acceptable surtout pour les options hors de la monnaie.

La méthode de Arouna est totalement inefficace sauf pour les options très en dehors de la monnaie.

L'erreur de quantification est très acceptable, elle est comparable à celle du schéma Andersen tout en étant plus rapide.

Il est à remarquer que l'erreur de la méthode de Arouna a augmenté par rapport au cas moins volatil.

### 3.3.5 Marché d'actions à court terme



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un marché volatil ( $\sigma = 0.15$ ) d'actions à court terme*

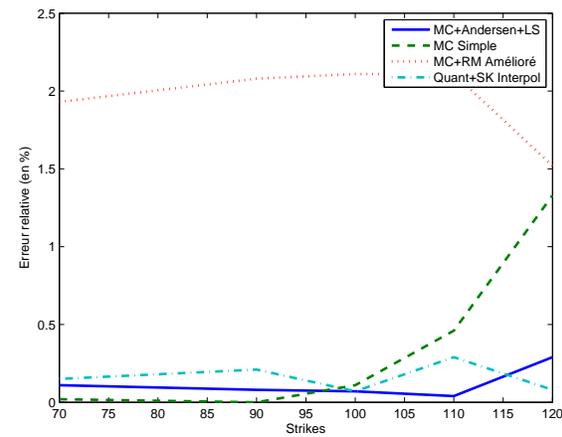
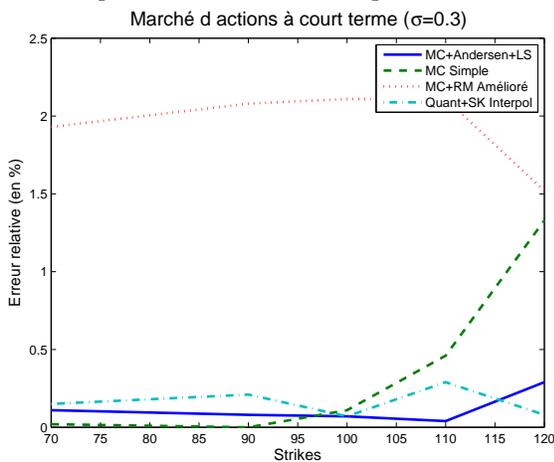
Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance surtout pour les options hors de la monnaie.

L'erreur de la discrétisation d'Euler est trop grande pour être acceptable surtout pour les options hors de la monnaie.

La méthode de Arouna est totalement inefficace sauf pour les options très en dehors de la monnaie et son erreur est trop importante pour être acceptable.

L'erreur de quantification est très acceptable, elle est comparable à celle du schéma Andersen tout en étant plus rapide.



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un marché très volatil ( $\sigma = 0.3$ ) d'actions à court terme*

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

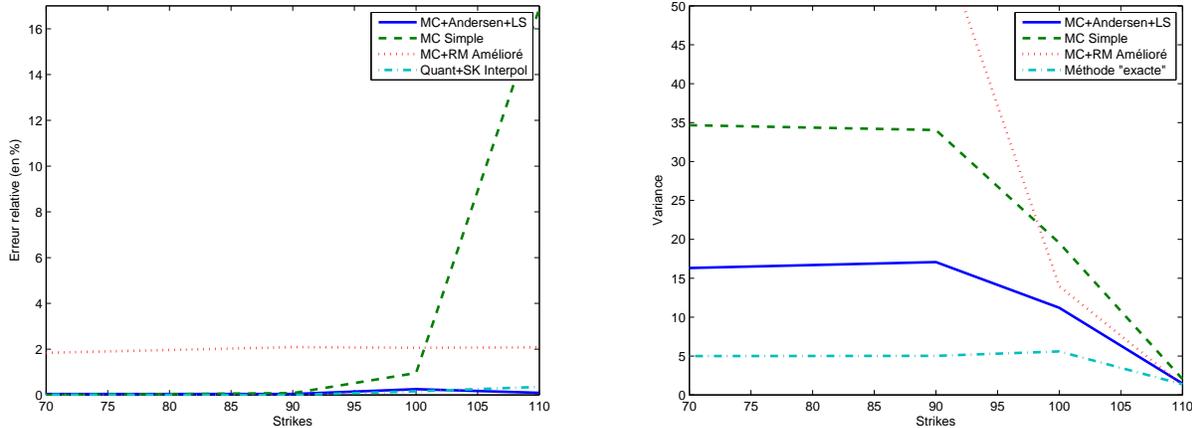
La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance surtout pour les options hors de la monnaie.

L'erreur de la discrétisation d'Euler est trop grande pour être acceptable surtout pour les options hors de la monnaie.

La méthode de Arouna est totalement inefficace sauf pour les options très en dehors de la monnaie et son erreur est trop importante pour être acceptable.

L'erreur de quantification est très acceptable, elle est comparable à celle du schéma Andersen tout en étant plus rapide.

### 3.3.6 Cas test classique



*Erreurs relatives et variances des méthodes implémentées sur les options asiatiques dans un cas test classique*

Le schéma de discrétisation de Andersen est toujours le meilleur. Son association à la méthode des variables antithétiques est aussi la meilleure en terme de réduction de variance pour les options dans la monnaie.

La méthode des Least squares présente l'avantage de bien fonctionner, de réduire toujours la variance surtout pour les options hors de la monnaie.

L'erreur de la discrétisation d'Euler est trop grande pour être acceptable surtout pour les options hors de la monnaie.

La méthode de Arouna est totalement inefficace sauf pour les options très en dehors de la monnaie et son erreur est trop importante pour être acceptable.

L'erreur de quantification est très acceptable, elle est comparable à celle du schéma Andersen tout en étant plus rapide.

## 3.4 Guide des méthodes à utiliser

Suite aux résultats numériques que nous avons obtenu, nous pouvons résumer les remarques en des consignes des méthodes à utiliser :

- la technique de quantification est efficace et rapide, elle est à utiliser si on veut privilégier la rapidité à la précision ;
- le schéma de discrétisation d'Andersen rajoute certes un temps de calcul supplémentaire mais sa précision surtout lorsqu'on fait de grands pas est très intéressante ;
- la technique des variables antithétique est très efficace quelque soit le cas mais surtout pour les options dans la monnaie ;
- pour les options hors de la monnaie (les plus utilisées), dans les cas volatils, la méthode Least Squares est la meilleure bien qu'elle soit lente ;
- pour les options hors de la monnaie dans les cas stables, la méthode de Arouna est la meilleure en terme de réduction de variance mais elle est risquée car son erreur est assez grande.

## Conclusion

Durant ce projet, nous avons été appelés à étudier le modèle d'Heston de volatilité stochastique et d'implémenter des algorithmes d'amélioration du pricing des options vanilles et asiatiques. Ce travail a pour objectif de construire des méthodes hybrides en combinant les forces de méthodes anciennes et celles des méthodes récentes afin d'améliorer les résultats.

Nous avons étudié les propriétés du modèle de Heston au niveau de la volatilité et du cours de l'actif. Ce modèle présente l'avantage d'être très proche de la réalité. En plus une méthode exacte d'évaluation des options vanilles sur ce modèle existe (en dimension 1) ce qui permet de pouvoir vérifier les résultats des méthodes employées et qui sont valables pour tous les processus régis par des EDS. Ces méthodes ne sont pas limitées au cas unidimensionnel. Nous avons donc utilisé dans un premier temps une version adaptée du schéma d'Euler pour simuler la volatilité (qui peut être vue comme l'évolution d'un taux d'intérêt) et le cours de l'action au cours du temps. Dans un second temps, une amélioration des schémas de discrétisation récemment proposée par Andersen a été implémentée et son efficacité pour améliorer le pricing a été très satisfaisante. Une fois ces schémas construits, le pricing des options par Monte Carlo nécessite la simulation d'un nombre élevé de scénarios possibles, d'en calculer ensuite la moyenne et construire à partir des simulations un intervalle de confiance qui permettra de décider à quel prix fixer l'option. Un prix trop élevé n'attirerait pas les clients, un prix trop faible causerait des pertes. Les techniques de réduction de variance permettent justement de réduire cet intervalle de confiance. Bien qu'il n'y ait pas eu de méthode universelle, certaines méthodes hybrides ont prouvé leur efficacité selon les cas et un guide d'applications de ces méthodes a été proposé.

Ce travail à la fois théorique et pratique est applicable dans plusieurs cas et dans divers domaines scientifiques. Il n'est pas uniquement restreint à l'étude du modèle d'Heston et demande à être détaillé. C'est pour cela que plusieurs perspectives d'amélioration sont proposées.



## Bibliographie

- [Alf05] A. Alfonsi. On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Rapport CERMICS*, 2005-279, Mai 2005.
- [And07] Leif B. Andersen. Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model. *SSRN eLibrary*, 2007.
- [Aro04a] Bouhari Arouna. Adaptive Monte Carlo method, a variance reduction technique. *Monte Carlo Methods Appl.*, 10(1):1–24, 2004.
- [Aro04b] Bouhari Arouna. *Algorithmes stochastiques et méthodes de Monte Carlo*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 17:21–86, 1900.
- [BD04] M. Bossy et A. Diop. An efficient discretisation scheme for one dimensional sdes with a diffusion coefficient function of the form  $|x|^a$ ,  $a \in [1/2, 1)$ . *Rapport de recherche de l'INRIA*, 2004.
- [BK06] Mark Broadie et Özgür Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Oper. Res.*, 54(2):217–231, 2006.
- [Bou06] B. Bouchard. Méthodes de Monte Carlo en finance, Notes de cours, 2006.
- [BS73] Fischer Black et Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [BT96] Vlad Bally et Denis Talay. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations. II. Convergence rate of the density. *Monte Carlo Methods Appl.*, 2(2):93–128, 1996.
- [Cap07] Luca Capriotti. Least Squares Importance Sampling for Monte Carlo Security Pricing. *SSRN eLibrary*, 2007.
- [CIR85] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. et Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.
- [CM98] P. Carr et D. Madan. Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, 2:61–73, 1998.
- [Dea07] Madalina Deaconu. Equations différentielles stochastiques, Cours de Master 2 recherche, 2007.
- [Duf01] D. Dufresne. The integrated square-root process. *University of Montreal Journal*, 2001.
- [Dyr04] S. Dyrting. Evaluating the noncentral chi-square distribution for the Cox-Ingersoll-Ross process. *Computational Economics*, 24(1):35–50, 2004.
- [Gla04] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [Hau07] Espen Gaarder Haug. *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill, 2007.
- [Hes93] S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. 6(2):327–343, 1993.
- [Hul05] John C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives (6th Edition)*. Prentice Hall, 2005.
- [Jea06] M. Jeanblanc. Calcul stochastique, Cours de Master 2 Ingénierie Financière, Évry, 2006.

- [Keb05] Ahmed Kebaier. Statistical Romberg extrapolation: a new variance reduction method and applications to option pricing. *Ann. Appl. Probab.*, 15(4):2681–2705, 2005.
- [KJ06] Christian Kahl et Peter Jäckel. Fast strong approximation Monte Carlo schemes for stochastic volatility models. *Quant. Finance*, 6(6):513–536, 2006.
- [KS91] Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [LKVD06] Roger Lord, Remmert Koekoek et Dick J. Van Dijk. A Comparison of Biased Simulation Schemes for Stochastic Volatility Models. *SSRN eLibrary*, 2006.
- [LL97] Damien Lamberton et Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses Édition Marketing, Paris, 2<sup>e</sup> édition, 1997.
- [LP02] Harald Luschgy et Gilles Pagès. Functional quantization of Gaussian processes. *J. Funct. Anal.*, 196(2):486–531, 2002.
- [Neg02] Bogdan Negrea. Option Pricing with Stochastic Volatility: A Closed-form Solution Using the Fourier Transform. *SSRN eLibrary*, 2002.
- [Øks03] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. An introduction with applications.
- [PP03] Gilles Pagès et Jacques Printems. Optimal quadratic quantization for numerics: the Gaussian case. *Monte Carlo Methods Appl.*, 9(2):135–165, 2003.
- [PP05] Gilles Pagès et Jacques Printems. Functional quantization for numerics with an application to option pricing. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(4):407–446, 2005.
- [PPP04] Gilles Pagès, Huyên Pham et Jacques Printems. Optimal quantization methods and applications to numerical problems in finance. In *Handbook of computational and numerical methods in finance*, pages 253–297. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [Pro05] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2<sup>e</sup> édition, 2005.
- [Tal92] D. Talay. Approximation et simulation de solutions d’EDS. In *Probabilités numériques*, volume 10 of *Collect. Didact.*, pages 23–38. INRIA, Rocquencourt, 1992.
- [TT90] Denis Talay et Luciano Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.*, 8(4):483–509 (1991), 1990.

## Annexe A

# Résultats numériques

Dans cet annexe, nous présentons les résultats numériques (pour quatre jeux de données) que nous avons trouvé à travers les simulations numériques. Nous avons appliqué quatre méthodes de Monte Carlo pour le pricing d'options pour le modèle de Heston de volatilité stochastique, combinées avec deux types de discrétisations (Euler et Andersen) sur des Call européens du type vanille et asiatiques.

### A.1 Résultats pour le marché de taux de change à long terme

Données fixes :  $k = 0.5$ ,  $r = 0.03$ ,  $\rho = -0.9$ ,  $T = 3$ ,  $V_0 = \theta = 0.04$ , pas = 0.02,  $S_0 = 100$ .

#### A.1.1 Options vanilles européennes (Call)

##### Méthode de la FFT

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil), temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.124	—	—	—
90	23.683	—	—	—
100	17.688	—	—	—
110	12.64	—	—	—
130	5.368	—	—	—
150	1.757	—	—	—

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil), temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.49	—	—	—
90	23.44	—	—	—
100	16.87	—	—	—
110	11.164	—	—	—
130	3.06	—	—	—
140	1.109	—	—	—

### Méthode de Monte Carlo Simple

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 130.5 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	37.991	933.80	37.930 – 38.052	0.35
90	23.641	662.18	23.590 – 23.692	0.18
100	17.649	510.65	17.604 – 17.694	0.22
110	12.588	366.63	12.550 – 12.626	0.41
130	5.308	145.83	5.284 – 5.332	1.12
150	1.580	37.23	1.568 – 1.592	10.07

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.399	689.98	38.346 – 38.451	0.24
90	23.496	452.43	23.453 – 23.538	0.24
100	16.973	328.48	16.937 – 17.010	0.61
110	11.310	214.32	11.281 – 11.340	1.31
130	3.280	54.63	3.265 – 3.295	7.18
140	1.235	18.51	1.227 – 1.244	11.40

### Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Simple

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 250 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.049	2371.47	37.952 – 38.146	0.20
90	23.623	926.11	23.562 – 23.684	0.25
100	17.633	533.04	17.586 – 17.679	0.31
110	12.567	292.23	12.533 – 12.601	0.58
130	5.309	65.49	5.293 – 5.325	1.10
150	1.593	9.30	1.587 – 1.599	9.32

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.446	2948.50	38.338 – 38.555	0.11
90	23.497	1060.21	23.432 – 23.562	0.24
100	16.966	541.42	16.920 – 17.013	0.57
110	11.296	242.90	11.265 – 11.328	1.19
130	3.270	24.43	3.261 – 3.280	6.88
140	1.247	5.20	1.242 – 1.251	12.43

**Méthode de Monte Carlo + Variables antithétiques**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 2 \times 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 96 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.013	38.10	37.996 – 38.031	0.29
90	23.643	64.86	23.620 – 23.666	0.17
100	17.649	81.90	17.624 – 17.675	0.22
110	12.573	89.75	12.546 – 12.600	0.53
130	5.300	56.05	5.279 – 5.321	1.26
150	1.587	17.17	1.575 – 1.598	9.70

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.410	105.08	38.381 – 38.439	0.21
90	23.510	70.82	23.486 – 23.534	0.30
100	16.984	58.17	16.962 – 17.005	0.67
110	11.287	47.61	11.267 – 11.306	1.10
130	3.275	20.94	3.262 – 3.288	7.02
140	1.238	8.34	1.230 – 1.246	11.65

**Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Amélioré**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 164 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	37.981	2366.73	37.843 – 38.118	0.38
90	23.684	934.14	23.598 – 23.771	0.01
100	17.649	531.98	17.584 – 17.714	0.22
110	12.511	289.09	12.463 – 12.559	1.02
130	5.306	66.45	5.283 – 5.329	1.16
150	1.593	9.38	1.584 – 1.602	9.33

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.389	2936.05	38.236 – 38.543	0.26
90	23.528	1047.49	23.436 – 23.619	0.38
100	16.982	536.29	16.916 – 17.047	0.66
110	11.266	240.98	11.222 – 11.310	0.92
130	3.276	24.88	3.261 – 3.290	7.04
140	1.249	5.22	1.242 – 1.255	12.59

### Méthode de Monte Carlo + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 239 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	37.991	702.12	37.938 – 38.044	0.35
90	23.633	367.60	23.594 – 23.671	0.21
100	17.640	172.33	17.614 – 17.666	0.27
110	12.565	95.93	12.546 – 12.585	0.59
130	5.312	39.17	5.299 – 5.324	1.05
150	1.580	24.81	1.570 – 1.590	10.06

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.397	579.28	38.349 – 38.445	0.24
90	23.488	318.20	23.452 – 23.524	0.38
100	16.970	191.58	16.942 – 16.997	0.59
110	11.292	95.35	11.272 – 11.311	1.14
130	3.278	23.81	3.268 – 3.288	7.12
140	1.243	8.82	1.237 – 1.249	12.10

### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 150 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	37.990	938.31	37.929 – 38.051	0.35
90	23.657	664.36	23.605 – 23.708	0.11
100	17.646	510.63	17.601 – 17.691	0.24
110	12.553	366.89	12.514 – 12.591	0.69
130	5.324	146.52	5.300 – 5.349	0.81
150	1.607	38.12	1.595 – 1.620	8.51

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.359	667.26	38.308 – 38.411	0.34
90	23.421	432.22	23.380 – 23.463	0.08
100	16.848	310.40	16.812 – 16.883	0.13
110	11.098	200.10	11.069 – 11.126	0.60
130	3.024	47.15	3.010 – 3.038	1.18
140	1.056	15.07	1.048 – 1.063	4.81

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Correction Martingale**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 137.5 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.007	934.28	37.921 – 38.094	0.31
90	23.527	657.53	23.454 – 23.599	0.66
100	17.583	509.01	17.520 – 17.647	0.59
110	12.539	364.68	12.485 – 12.593	0.80
130	5.262	144.75	5.228 – 5.296	1.97
150	1.594	37.81	1.576 – 1.611	9.30

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.358	664.14	38.285 – 38.431	0.34
90	23.321	430.50	23.262 – 23.380	0.51
100	16.773	309.67	16.723 – 16.822	0.58
110	11.076	199.07	11.037 – 11.116	0.78
130	2.992	46.98	2.973 – 3.011	2.22
140	1.054	15.09	1.043 – 1.065	4.99

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Variables antithétiques**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 2 \times 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 140 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.003	383.59	37.964 – 38.042	0.32
90	23.670	271.27	23.637 – 23.703	0.06
100	17.665	210.67	17.636 – 17.694	0.13
110	12.540	152.28	12.516 – 12.565	0.79
130	5.336	63.90	5.320 – 5.352	0.60
150	1.597	17.53	1.589 – 1.606	9.08

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.372	276.86	38.339 – 38.405	0.31
90	23.426	173.88	23.399 – 23.452	0.06
100	16.860	123.96	16.837 – 16.882	0.06
110	11.092	78.53	11.074 – 11.109	0.65
130	3.029	19.73	3.020 – 3.038	1.03
140	1.053	6.87	1.048 – 1.059	5.01

### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 185 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	37.987	927.04	37.926 – 38.048	0.36
90	23.663	554.23	23.616 – 23.710	0.08
100	17.667	457.98	17.624 – 17.710	0.12
110	12.563	334.01	12.527 – 12.600	0.61
130	5.327	120.38	5.305 – 5.349	0.76
150	1.611	19.54	1.602 – 1.620	8.32

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.356	658.60	38.305 – 38.408	0.35
90	23.415	365.54	23.377 – 23.454	0.11
100	16.874	302.46	16.840 – 16.909	0.03
110	11.102	190.22	11.075 – 11.130	0.55
130	3.020	29.64	3.009 – 3.031	1.32
140	1.059	6.28	1.054 – 1.064	4.49

### Méthode de quantification + Discrétisation d'Andersen

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.65 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.138	—	—	0.03
90	22.877	—	—	3.23
100	17.003	—	—	3.87
110	11.998	—	—	5.08
130	4.965	—	—	7.51
150	1.455	—	—	8.32

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	37.814	—	—	1.76
90	22.950	—	—	2.09
100	16.411	—	—	2.72
110	10.739	—	—	3.81
130	2.825	—	—	7.67
140	0.938	—	—	15.38

**Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.7 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.138	—	—	0.03
90	23.794	—	—	0.69
100	17.498	—	—	1.08
110	12.563	—	—	0.61
130	5.327	—	—	0.76
150	1.738	—	—	1.11

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	38.356	—	—	0.06
90	23.415	—	—	0.67
100	16.874	—	—	0.64
110	11.102	—	—	0.52
130	3.020	—	—	2.95
140	1.092	—	—	1.57

### A.1.2 Options asiatiques (Call)

#### Méthode exacte : Andersen + VA

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 680.83 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.925	146.15	31.913 – 31.937	—
90	15.927	98.48	15.917 – 15.937	—
100	9.669	64.62	9.661 – 9.677	—
110	5.038	34.34	5.032 – 5.044	—
120	2.115	13.86	2.112 – 2.119	—

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 680.83 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	32.143	120.56	32.132 – 32.154	—
90	16.061	70.28	16.052 – 16.069	—
100	9.371	40.49	9.365 – 9.378	—
110	4.175	16.65	4.170 – 4.179	—
120	1.065	3.90	1.063 – 1.067	—

#### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 103.48 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.939	350.13	31.886 – 31.992	0.04
90	15.903	212.36	15.862 – 15.944	0.15
100	9.673	138.17	9.639 – 9.706	0.04
110	5.047	68.57	5.023 – 5.070	0.18
120	2.113	26.50	2.099 – 2.128	0.09

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 103.48 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	32.161	289.93	32.112 – 32.209	0.05
90	16.042	156.22	16.006 – 16.077	0.12
100	9.362	93.94	9.335 – 9.389	0.10
110	4.177	34.79	4.160 – 4.194	0.05
120	1.067	6.07	1.060 – 1.074	0.22

#### Méthode de Monte Carlo simple

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 66.69 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.892	357.62	31.838 – 31.945	0.10
90	15.918	240.65	15.874 – 15.962	0.06
100	9.663	156.18	9.627 – 9.698	0.07
110	5.042	81.03	5.016 – 5.067	0.07
120	2.101	30.76	2.085 – 2.117	0.67

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 66.69 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	32.126	294.13	32.077 – 32.174	0.05
90	16.063	177.32	16.025 – 16.101	0.01
100	9.390	105.15	9.361 – 9.419	0.20
110	4.240	44.54	4.221 – 4.259	1.56
120	1.131	9.92	1.122 – 1.140	6.20

### Méthode de Monte Carlo + Arouna amélioré

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 82.89 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.830	2226.32	31.641 – 32.019	0.30
90	15.917	577.12	15.821 – 16.013	0.06
100	9.664	239.76	9.602 – 9.726	0.05
110	5.031	81.43	4.995 – 5.067	0.14
120	2.107	20.69	2.089 – 2.126	0.36

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 82.89 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	32.043	2579.70	31.840 – 32.246	0.31
90	16.079	636.09	15.978 – 16.180	0.11
100	9.399	233.20	9.338 – 9.460	0.30
110	4.230	53.20	4.200 – 4.259	1.31
120	1.131	6.06	1.122 – 1.141	6.24

### Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 4.77 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.989	—	—	0.20
90	15.989	—	—	0.39
100	9.682	—	—	0.14
110	5.001	—	—	0.73
120	2.105	—	—	0.46

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	32.167	—	—	0.07
90	16.097	—	—	0.22
100	9.403	—	—	0.64
110	4.186	—	—	0.26
120	1.065	—	—	0.40

## A.2 Résultats pour le marché de taux d'intérêt à long terme

Données fixes :  $r = 0.03$ ,  $k = 0.3$ ,  $\rho = -0.5$ ,  $T = 5$ ,  $V_0 = \theta = 0.04$ , pas = 0.05,  $S_0 = 100$ .

### A.2.1 Options vanilles européennes (Call)

#### Méthode de la FFT

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil), temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.66	—	—	—
90	29.499	—	—	—
100	23.922	—	—	—
110	19.087	—	—	—
130	11.541	—	—	—
190	2.095	—	—	—

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil), temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.81	—	—	—
90	28.894	—	—	—
100	22.786	—	—	—
110	17.428	—	—	—
130	9.293	—	—	—
190	1.491	—	—	—

#### Méthode de Monte Carlo Simple

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 82 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.407	1903.39	42.320 – 42.495	0.59
90	29.275	1528.59	29.197 – 29.353	0.76
100	23.726	1318.38	23.653 – 23.798	0.82
110	18.903	1110.69	18.837 – 18.970	0.96
130	11.426	737.13	11.372 – 11.480	2.56
190	1.957	154.15	1.932 – 1.981	6.61

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.762	1693.78	42.680 – 42.844	0.11
90	29.163	1368.59	29.089 – 29.237	0.93
100	23.250	1180.20	23.182 – 23.319	2.04
110	18.085	1001.52	18.022 – 18.148	3.77
130	10.142	665.16	10.091 – 10.194	9.14
190	1.606	174.68	1.580 – 1.633	7.74

**Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Simple**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 170 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.411	8227.80	42.230 – 42.593	0.58
90	29.354	3411.15	29.237 – 29.471	0.49
100	23.749	2069.32	23.658 – 23.840	0.72
110	18.893	1215.95	18.823 – 18.962	1.02
130	11.392	398.09	11.352 – 11.432	2.26
190	1.975	17.11	1.966 – 1.983	5.74

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.738	10995.16	42.529 – 42.948	0.17
90	29.242	4450.81	29.109 – 29.376	1.21
100	23.254	2500.44	23.154 – 23.354	2.05
110	18.079	1389.23	18.005 – 18.154	3.74
130	10.139	402.59	10.099 – 10.179	9.10
190	1.632	21.64	1.623 – 1.641	9.46

**Méthode de Monte Carlo + Variables antithétiques**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 2 \times 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 65 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.321	293.37	42.272 – 42.369	0.79
90	29.324	338.20	29.272 – 29.376	0.59
100	23.913	355.90	23.859 – 23.966	0.04
110	19.180	357.11	19.127 – 19.233	0.49
130	11.832	303.75	11.782 – 11.881	6.20
190	2.235	82.66	2.210 – 2.261	6.70

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.787	493.00	42.724 – 42.850	0.05
90	29.176	420.81	29.118 – 29.234	0.98
100	23.274	383.71	23.218 – 23.329	2.14
110	18.060	356.11	18.006 – 18.113	3.63
130	10.084	275.74	10.037 – 10.131	8.51
190	1.619	89.78	1.592 – 1.646	8.60

### Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Amélioré

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 109 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.188	7600.89	41.941 – 42.434	1.11
90	29.440	3323.09	29.277 – 29.603	0.20
100	23.971	2137.52	23.840 – 24.102	0.20
110	19.153	1253.14	19.053 – 19.253	0.35
130	11.853	464.33	11.792 – 11.914	6.39
190	2.243	23.03	2.230 – 2.257	7.08

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.707	10873.32	42.413 – 43.002	0.24
90	29.232	4337.00	29.045 – 29.418	1.17
100	23.308	2570.69	23.164 – 23.451	2.29
110	18.070	1413.64	17.964 – 18.176	3.68
130	10.105	393.53	10.049 – 10.161	8.74
190	1.636	21.63	1.623 – 1.649	9.73

### Méthode de Monte Carlo + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 136 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.441	1317.42	42.368 – 42.514	0.51
90	29.284	990.27	29.221 – 29.347	0.73
100	23.750	358.38	23.712 – 23.787	0.72
110	18.905	243.43	18.874 – 18.937	0.95
130	11.386	145.85	11.362 – 11.410	2.20
190	1.962	88.57	1.944 – 1.981	6.33

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.800	1298.74	42.728 – 42.872	0.02
90	29.166	997.46	29.103 – 29.229	0.94
100	23.281	474.84	23.237 – 23.324	2.17
110	18.079	392.75	18.039 – 18.118	3.73
130	10.113	255.58	10.081 – 10.145	8.82
190	1.628	130.93	1.605 – 1.651	9.18

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 102 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.401	1921.03	42.314 – 42.489	0.61
90	29.259	1532.84	29.181 – 29.337	0.81
100	23.753	1331.29	23.680 – 23.826	0.71
110	18.846	1115.25	18.780 – 18.913	1.26
130	11.365	737.15	11.311 – 11.419	2.01
190	2.001	162.56	1.975 – 2.026	4.49

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.550	1552.10	42.471 – 42.629	0.61
90	28.693	1234.06	28.623 – 28.763	0.70
100	22.622	1076.66	22.556 – 22.688	0.72
110	17.203	899.04	17.143 – 17.263	1.29
130	9.144	593.97	9.095 – 9.193	1.60
190	1.417	167.41	1.391 – 1.443	4.94

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Correction Martingale**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 96 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.401	1920.51	42.277 – 42.525	0.61
90	29.246	1550.73	29.134 – 29.357	0.86
100	23.653	1324.83	23.550 – 23.756	1.12
110	18.835	1117.03	18.741 – 18.930	1.32
130	11.374	745.86	11.297 – 11.451	2.09
190	2.006	161.80	1.970 – 2.042	4.23

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.568	1565.44	42.456 – 42.680	0.57
90	28.648	1252.03	28.548 – 28.748	0.85
100	22.567	1076.49	22.474 – 22.659	0.96
110	17.238	903.64	17.153 – 17.323	1.09
130	9.203	617.49	9.132 – 9.273	0.97
190	1.441	169.74	1.404 – 1.478	3.36

### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Variables antithétiques

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 2.5 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 96 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.368	431.16	42.327 – 42.410	0.68
90	29.324	402.10	29.284 – 29.364	0.59
100	23.750	381.67	23.711 – 23.790	0.72
110	18.929	359.68	18.891 – 18.967	0.83
130	11.394	287.62	11.360 – 11.428	2.27
190	1.967	76.23	1.950 – 1.985	6.10

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.529	450.43	42.486 – 42.571	0.66
90	28.765	381.01	28.726 – 28.804	0.45
100	22.637	346.56	22.599 – 22.674	0.66
110	17.277	318.63	17.242 – 17.313	0.86
130	9.162	247.65	9.131 – 9.194	1.41
190	1.387	79.29	1.370 – 1.405	6.95

### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 121 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.469	1421.62	42.394 – 42.544	0.45
90	29.337	705.21	29.284 – 29.390	0.55
100	23.809	466.43	23.765 – 23.852	0.47
110	18.946	309.34	18.911 – 18.981	0.74
130	11.280	179.11	11.253 – 11.306	1.24
190	1.994	12.49	1.987 – 2.001	4.82

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.580	1255.98	42.509 – 42.651	0.54
90	28.724	747.32	28.669 – 28.778	0.59
100	22.653	471.23	22.609 – 22.696	0.59
110	17.304	372.45	17.266 – 17.343	0.71
130	9.212	191.05	9.185 – 9.240	0.87
190	1.411	20.40	1.402 – 1.420	5.35

**Méthode de quantification + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 2.64 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	44.255	—	—	3.74
90	30.878	—	—	4.674
100	25.657	—	—	7.25
110	20.657	—	—	8.23
130	12.478	—	—	8.12
190	2.340	—	—	11.72

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	41.121	—	—	3.95
90	28.132	—	—	2.64
100	22.079	—	—	3.10
110	16.731	—	—	4.00
130	9.763	—	—	5.1
190	1.674	—	—	12.3

**Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.7 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.672	—	—	0.03
90	29.702	—	—	0.69
100	24.180	—	—	1.08
110	19.201	—	—	0.61
130	11.622	—	—	0.76
190	2.198	—	—	4.93

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	42.844	—	—	0.08
90	29.039	—	—	0.50
100	22.941	—	—	0.67
110	17.552	—	—	0.71
130	9.529	—	—	2.53
190	1.591	—	—	6.7

### A.2.2 Options asiatiques (Call)

#### Méthode exacte : Andersen + VA

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 452 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.071	115.90	33.061 – 33.082	—
90	18.513	105.60	18.502 – 18.523	—
100	12.736	97.29	12.726 – 12.746	—
110	8.210	83.42	8.201 – 8.219	—
130	2.825	41.44	2.819 – 2.832	—

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 452 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.308	133.63	33.297 – 33.320	—
90	18.462	102.69	18.452 – 18.472	—
100	12.270	87.15	12.261 – 12.279	—
110	7.333	71.80	7.324 – 7.341	—
130	2.078	36.05	2.072 – 2.084	—

#### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 67.9 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.130	425.76	33.072 – 33.189	0.18
90	18.533	249.78	18.488 – 18.578	0.11
100	12.730	171.19	12.693 – 12.767	0.05
110	8.219	108.26	8.189 – 8.248	0.10
130	2.825	28.92	2.810 – 2.840	0.01

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 67.9 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.356	426.95	33.298 – 33.415	0.14
90	18.459	275.17	18.412 – 18.506	0.01
100	12.261	179.62	12.223 – 12.299	0.08
110	7.340	103.99	7.311 – 7.369	0.09
130	2.059	66.12	2.036 – 2.082	0.91

#### Méthode de Monte Carlo simple

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 44.65 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.055	641.40	32.983 – 33.126	0.05
90	18.506	470.01	18.445 – 18.567	0.04
100	12.723	356.82	12.670 – 12.777	0.10
110	8.175	245.46	8.131 – 8.220	0.42
130	2.784	90.55	2.757 – 2.811	1.46

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 44.65 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.289	572.66	33.222 – 33.357	0.06
90	18.544	410.34	18.487 – 18.602	0.45
100	12.437	310.49	12.387 – 12.487	1.36
110	7.580	215.22	7.539 – 7.622	3.37
130	2.219	79.61	2.194 – 2.245	6.81

### Méthode de Monte Carlo + Arouna amélioré

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 55.21 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.036	8062.28	32.677 – 33.395	0.11
90	18.462	2038.45	18.281 – 18.642	0.28
100	12.749	978.50	12.624 – 12.874	0.10
110	8.208	442.38	8.124 – 8.292	0.03
130	2.809	64.17	2.777 – 2.841	0.55

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 55.21 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.281	9684.24	32.887 – 33.674	0.08
90	18.478	2359.25	18.284 – 18.672	0.09
100	12.445	1058.12	12.315 – 12.575	1.43
110	7.614	413.97	7.533 – 7.696	3.84
130	2.259	53.71	2.230 – 2.288	8.70

### Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 3.15 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.079	—	—	0.03
90	18.488	—	—	0.14
100	12.770	—	—	0.26
110	8.201	—	—	0.11
1'30	2.814	—	—	0.40

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.409	—	—	0.30
90	16.097	—	—	0.22
100	9.403	—	—	0.64
110	7.171	—	—	2.20
130	1.962	—	—	5.59

### A.3 Résultats pour le marché d'actions à court terme

Données fixes :  $r = 0.05$ ,  $k = 1.0$ ,  $\rho = -0.3$ ,  $T = 1$ ,  $V_0 = \theta = 0.09$ , pas = 0.01,  $S_0 = 100$ .

#### A.3.1 Options vanilles européennes (Call)

##### Méthode de la FFT

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil), temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.529	—	—	—
90	19.702	—	—	—
100	14.143	—	—	—
110	9.86	—	—	—
130	4.405	—	—	—

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil), temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.671	—	—	—
90	19.68	—	—	—
100	13.975	—	—	—
110	9.578	—	—	—
130	4.093	—	—	—

##### Méthode de Monte Carlo Simple

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 81 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.458	888.87	34.398 – 34.518	0.21
90	19.641	652.71	19.589 – 19.692	0.31
100	14.077	508.96	14.032 – 14.122	0.47
110	9.773	375.25	9.734 – 9.811	0.88
130	4.349	178.41	4.322 – 4.375	1.28

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.594	844.45	34.536 – 34.652	0.22
90	19.621	616.38	19.572 – 19.671	0.30
100	13.912	479.27	13.868 – 13.956	0.45
110	9.493	350.79	9.456 – 9.531	0.88
130	4.040	164.32	4.015 – 4.066	1.29

**Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Simple**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 165 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.490	538.81	34.444 – 34.537	0.11
90	19.664	316.45	19.628 – 19.699	0.20
100	14.089	229.09	14.059 – 14.120	0.38
110	9.764	157.83	9.739 – 9.789	0.98
130	4.334	64.53	4.318 – 4.350	1.62

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.627	533.01	34.580 – 34.673	0.13
90	19.646	283.21	19.612 – 19.679	0.18
100	13.925	197.08	13.897 – 13.954	0.35
110	9.487	131.49	9.464 – 9.510	0.95
130	4.031	51.05	4.017 – 4.045	1.52

**Méthode de Monte Carlo + Variables antithétiques**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 2 \times 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 55 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.467	72.99	34.443 – 34.491	0.18
90	19.654	128.82	19.622 – 19.686	0.24
100	14.088	145.80	14.053 – 14.122	0.39
110	9.762	134.36	9.729 – 9.795	1.00
130	4.312	77.89	4.287 – 4.337	2.11

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.605	87.81	34.578 – 34.631	0.19
90	19.632	122.82	19.601 – 19.664	0.24
100	13.923	135.22	13.890 – 13.956	0.37
110	9.482	125.40	9.450 – 9.514	1.00
130	4.005	72.49	3.981 – 4.029	2.16

### Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Amélioré

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 106 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.455	540.92	34.389 – 34.521	0.21
90	19.704	319.32	19.653 – 19.754	0.01
100	14.089	230.76	14.046 – 14.132	0.38
110	9.749	158.52	9.714 – 9.785	1.12
130	4.321	65.04	4.298 – 4.344	1.90

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.727	533.74	34.662 – 34.793	0.16
90	19.795	275.81	19.748 – 19.842	0.59
100	13.930	186.33	13.891 – 13.968	0.32
110	9.336	118.80	9.305 – 9.366	2.53
130	3.668	40.35	3.650 – 3.686	10.39

### Méthode de Monte Carlo + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 142 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.466	730.78	34.412 – 34.520	0.18
90	19.642	471.47	19.598 – 19.685	0.31
100	14.084	256.99	14.052 – 14.116	0.42
110	9.768	152.36	9.744 – 9.793	0.93
130	4.342	68.72	4.326 – 4.359	1.43

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.603	692.58	34.550 – 34.655	0.20
90	19.623	468.96	19.579 – 19.666	0.29
100	13.910	358.87	13.872 – 13.948	0.46
110	9.493	230.65	9.462 – 9.523	0.89
130	4.034	74.85	4.017 – 4.052	1.43

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 100 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.442	892.39	34.382 – 34.502	0.25
90	19.620	653.12	19.569 – 19.671	0.42
100	14.084	511.82	14.039 – 14.130	0.41
110	9.739	376.01	9.700 – 9.777	1.23
130	4.324	177.54	4.297 – 4.350	1.84

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.579	848.95	34.520 – 34.637	0.27
90	19.605	617.23	19.556 – 19.655	0.38
100	13.920	482.25	13.876 – 13.964	0.40
110	9.457	351.53	9.419 – 9.494	1.27
130	4.019	164.04	3.993 – 4.044	1.81

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Correction Martingale**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 90 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.473	892.09	34.389 – 34.558	0.16
90	19.619	655.76	19.546 – 19.691	0.42
100	14.032	508.69	13.968 – 14.096	0.79
110	9.740	375.81	9.685 – 9.795	1.22
130	4.320	179.04	4.283 – 4.358	1.92

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.604	849.29	34.521 – 34.686	0.19
90	19.600	621.12	19.529 – 19.670	0.41
100	13.874	479.44	13.813 – 13.936	0.72
110	9.468	352.07	9.415 – 9.521	1.15
130	4.015	165.28	3.979 – 4.052	1.90

### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Variables antithétiques

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 91 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.428	105.10	34.408 – 34.449	0.29
90	19.663	142.53	19.639 – 19.686	0.20
100	14.085	149.24	14.061 – 14.110	0.41
110	9.785	136.28	9.761 – 9.808	0.76
130	4.342	79.24	4.324 – 4.360	1.43

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.564	110.03	34.543 – 34.585	0.31
90	19.650	134.74	19.627 – 19.673	0.15
100	13.916	139.01	13.893 – 13.940	0.42
110	9.509	127.48	9.487 – 9.532	0.72
130	4.031	73.56	4.014 – 4.048	1.51

### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.411	621.87	34.361 – 34.461	0.34
90	19.627	446.53	19.585 – 19.669	0.38
100	14.150	328.55	14.114 – 14.186	0.05
110	9.823	265.19	9.790 – 9.856	0.38
130	4.335	64.83	4.318 – 4.351	1.60

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $MC = 10^6$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.615	657.64	34.563 – 34.666	0.16
90	19.636	446.75	19.593 – 19.678	0.23
100	13.919	365.54	13.881 – 13.957	0.40
110	9.471	204.27	9.442 – 9.499	1.12
130	4.017	74.37	4.000 – 4.034	1.85

**Méthode de quantification + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.25 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.023	—	—	1.46
90	20.131	—	—	2.18
100	14.881	—	—	5.22
110	10.433	—	—	5.81
130	4.229	—	—	4.00

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	35.457	—	—	2.27
90	20.310	—	—	3.20
100	14.387	—	—	2.95
110	9.015	—	—	5.87
130	4.292	—	—	4.864

**Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.28 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.854	—	—	0.94
90	19.657	—	—	0.23
100	14.145	—	—	0.02
110	9.787	—	—	0.74
130	4.464	—	—	1.35

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	34.607	—	—	0.18
90	19.675	—	—	0.03
100	13.813	—	—	1.16
110	9.596	—	—	0.18
130	4.209	—	—	2.826

### A.3.2 Options asiatiques (Call)

#### Méthode exacte : Andersen + VA

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 420.98 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	30.976	21.17	30.971 – 30.981	—
90	13.905	34.43	13.899 – 13.910	—
100	7.819	40.70	7.812 – 7.825	—
110	3.888	30.74	3.883 – 3.894	—
120	1.723	15.97	1.719 – 1.727	—

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 420.98 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.006	23.94	31.001 – 31.011	—
90	13.945	33.28	13.939 – 13.951	—
100	7.769	38.18	7.763 – 7.775	—
110	3.768	28.84	3.763 – 3.774	—
120	1.612	14.73	1.608 – 1.616	—

#### Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 67.19 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.009	114.02	30.979 – 31.039	0.11
90	13.915	88.65	13.888 – 13.941	0.07
100	7.812	54.23	7.791 – 7.833	0.09
110	3.888	23.86	3.874 – 3.902	0.01
120	1.720	12.54	1.710 – 1.730	0.20

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 67.19 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.039	120.36	31.008 – 31.070	0.11
90	13.957	88.33	13.930 – 13.983	0.08
100	7.764	51.74	7.743 – 7.784	0.07
110	3.769	28.45	3.754 – 3.785	0.04
120	1.607	10.21	1.598 – 1.616	0.29

**Méthode de Monte Carlo simple**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 44.67 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	30.977	306.04	30.927 – 31.026	0.00
90	13.909	224.03	13.867 – 13.952	0.03
100	7.812	145.99	7.778 – 7.846	0.09
110	3.870	77.24	3.846 – 3.895	0.45
120	1.720	12.54	1.710 – 1.730	0.20

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 44.67 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.001	298.52	30.952 – 31.049	0.02
90	13.946	214.86	13.904 – 13.987	0.00
100	7.761	139.07	7.727 – 7.794	0.11
110	3.751	72.34	3.727 – 3.775	0.46
120	1.591	31.46	1.575 – 1.606	1.33

**Méthode de Monte Carlo + Arouna amélioré**

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 55.34 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.578	431.36	31.495 – 31.661	1.94
90	14.204	164.70	14.153 – 14.255	2.15
100	7.985	91.41	7.946 – 8.023	2.12
110	3.971	42.89	3.944 – 3.997	2.13
120	1.752	16.70	1.736 – 1.769	1.70

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché volatil),  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 55.34 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.604	447.37	31.520 – 31.689	1.93
90	14.236	159.05	14.185 – 14.286	2.08
100	7.933	84.92	7.896 – 7.970	2.11
110	3.848	37.91	3.823 – 3.872	2.11
120	1.637	14.00	1.622 – 1.652	1.52

### Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen

Données variables :  $\sigma = 0.15$  (marché volatil),  $N = 9984$ , temps de calcul = 2.99 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.024	—	—	0.15
90	13.942	—	—	0.27
100	7.831	—	—	0.26
110	3.887	—	—	0.03
120	1.729	—	—	0.38

Données variables :  $\sigma = 0.3$  (marché très volatil),  $N = 9984$ .

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.054	—	—	0.15
90	13.974	—	—	0.21
100	7.774	—	—	0.07
110	3.779	—	—	0.29
120	1.613	—	—	0.08

## A.4 Résultats pour le marché d'actions stable à court terme

Données fixes :  $r = 0.05$ ,  $k = 2.0$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $T = 1$ ,  $V_0 = \theta = 0.01$ , pas = 0.01,  $S_0 = 100$ ,  $\sigma = 0.1$ .

### A.4.1 Options vanilles européennes (Call)

#### Méthode de la FFT

Données variables : temps de calcul = 0.02 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.385	—	—	—
90	14.383	—	—	—
100	6.569	—	—	—
110	2.247	—	—	—

#### Méthode de Monte Carlo Simple

Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 95 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.358	112.46	33.336 – 33.379	0.08
90	14.469	107.15	14.448 – 14.490	0.60
100	6.603	74.05	6.586 – 6.620	0.51
110	2.227	30.54	2.216 – 2.238	0.89

#### Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Simple

Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 168 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.370	429.05	33.329 – 33.412	0.04
90	14.488	78.04	14.470 – 14.506	0.73
100	6.609	34.33	6.597 – 6.620	0.60
110	2.225	11.55	2.218 – 2.231	0.89

#### Méthode de Monte Carlo + Variables antithétiques

Données variables :  $MC = 2 \times 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 54 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.359	7.16	33.351 – 33.366	0.08
90	14.478	8.31	14.470 – 14.486	0.66
100	6.604	15.37	6.593 – 6.616	0.54
110	2.222	12.47	2.212 – 2.232	1.11

**Méthode de Monte Carlo + Robbins Monro Amélioré**Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 106 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.359	18.64	33.347 – 33.371	0.08
90	14.481	16.46	14.469 – 14.492	0.68
100	6.608	9.96	6.599 – 6.617	0.59
110	2.223	3.04	2.218 – 2.228	1.11

**Méthode de Monte Carlo + Least Squares**Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 135 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.359	93.98	33.340 – 33.379	0.08
90	14.470	82.27	14.452 – 14.488	0.61
100	6.606	40.31	6.593 – 6.618	0.56
110	2.227	19.36	2.218 – 2.236	0.89

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 99.5 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.360	113.68	33.339 – 33.381	0.07
90	14.461	108.81	14.440 – 14.481	0.54
100	6.539	77.03	6.521 – 6.556	0.46
110	2.230	32.88	2.218 – 2.241	0.76

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Correction Martingale**Données variables :  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 90.5 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.381	112.30	33.351 – 33.411	0.01
90	14.461	106.50	14.431 – 14.490	0.54
100	6.591	73.48	6.567 – 6.615	0.33
110	2.218	30.27	2.202 – 2.234	1.29

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Variables antithétiques**Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 92 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.364	16.94	33.355 – 33.372	0.06
90	14.482	17.58	14.473 – 14.490	0.69
100	6.597	19.53	6.588 – 6.605	0.42
110	2.229	12.68	2.222 – 2.236	0.81

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares**Données variables :  $MC = 10^6$ , temps de calcul = 119 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.364	96.76	33.344 – 33.383	0.06
90	14.483	40.91	14.470 – 14.496	0.69
100	6.594	30.40	6.583 – 6.605	0.38
110	2.229	10.98	2.222 – 2.235	0.80

**Méthode de quantification + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.5 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	32.914	—	—	1.41
90	14.031	—	—	2.45
100	6.209	—	—	5.48
110	1.996	—	—	11.16

**Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen**Données variables :  $N = 9984$ , temps de calcul = 1.51 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	33.414	—	—	0.09
90	14.353	—	—	0.21
100	6.543	—	—	0.40
110	12.563	—	—	0.61

**A.4.2 Options asiatiques (Call)****Méthode exacte : Andersen + VA**Données variables :  $MC = 4 \cdot 10^6$ , temps de calcul = 418.54 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	30.904	5.00	30.902 – 30.906	—
90	11.890	5.02	11.888 – 11.893	—
100	3.522	5.59	3.520 – 3.524	—
110	0.394	1.36	0.393 – 0.395	—

**Méthode de Monte Carlo + Discrétisation d'Andersen + Least Squares**Données variables :  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 52.96 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	30.916	16.31	30.904 – 30.927	0.04
90	11.886	17.08	11.874 – 11.897	0.04
100	3.513	11.20	3.504 – 3.522	0.25
110	0.394	1.46	0.390 – 0.397	0.09

**Méthode de Monte Carlo simple**

Données variables :  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 36.26 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	30.904	34.67	30.887 – 30.921	0.00
90	11.899	34.04	11.883 – 11.916	0.08
100	3.556	19.54	3.543 – 3.568	0.96
110	0.327	2.03	0.323 – 0.332	16.89

**Méthode de Monte Carlo + Arouna amélioré**

Données variables :  $MC = 5 \cdot 10^5$ , temps de calcul = 44.28 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	31.473	492.42	31.384 – 31.562	1.84
90	12.139	60.62	12.107 – 12.170	2.09
100	3.595	13.97	3.580 – 3.610	2.06
110	0.402	1.27	0.398 – 0.407	2.08

**Méthode de quantification + SK-Interpolation + Discrétisation d'Andersen**

Données variables :  $N = 9984$ , temps de calcul = 2.99 sec.

Strike	Moyenne	Variance	Intervalle confiance (98%)	Erreur relative (en%)
70	30.909	—	—	0.02
90	11.890	—	—	0.00
100	3.515	—	—	0.19
110	0.395	—	—	0.35

## Annexe B

# Algorithme de Levenberg-Marquardt

Voir le paragraphe 2.5.2 pour une description de cette méthode d'optimisation, ainsi que les notations.

Entrée : Une fonction  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un point  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ , ainsi que sa jacobienne  $J(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$ .

Sortie : Une approximation d'un point  $\mathbf{x}^*$  tel que  $\|f(\mathbf{x}^*)\| = \min_x \|f(\mathbf{x})\|$ .

Constantes : Les constantes  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\tau$  sont petites et donnent la précision de la valeur retournée, et  $k_{\max}$  qui donne le nombre maximal d'itérations. Par exemple,  $\tau = 10^{-6}$  si  $\mathbf{x}_0$  est une bonne approximation de  $\mathbf{x}^*$  et  $\tau = 10^{-5}$  sinon. On peut aussi prendre  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$ .

Début

$k := 0$ ;  $\nu := 2$ ;  $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0$ ;

$\mathbf{A} := J^\top(\mathbf{x})J(\mathbf{x})$ ;  $\mathbf{grad} := J^\top(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ ;

$\mathbf{trouvé} := (\|\mathbf{grad}\|_\infty \leq \epsilon_1)$ ;  $\mu := \tau \times \max a_{ii}$ ;

Tant que ((non  $\mathbf{trouvé}$ ) et ( $k < k_{\max}$ ))

$k := k + 1$ ; solve( $\mathbf{A} + \mu \text{Id}$ ) $\mathbf{h}_{LM} = -\mathbf{grad}$ ;

Si ( $\|\mathbf{h}_{LM}\| \leq \epsilon_2(\|\mathbf{x}\| + \epsilon_2)$ )

$\mathbf{trouvé} := \text{vrai}$

Sinon

$\mathbf{x}_{\text{new}} := \mathbf{x} + \mathbf{h}_{LM}$ ;

$\mathbf{gain} := \frac{1}{2} \frac{F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_{\text{new}})}{L(0) - L(\mathbf{h}_{LM})}$

Si  $\mathbf{gain} > 0$

$\mathbf{x} := \mathbf{x}_{\text{new}}$ ;

$\mathbf{A} := J^\top(\mathbf{x})J(\mathbf{x})$ ;  $\mathbf{grad} := J^\top(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ ;

$\mathbf{trouvé} := (\|\mathbf{grad}\|_\infty \leq \epsilon_1)$ ;

$\mu := \mu \times \max(\frac{1}{3}, 1 - (2 \times \mathbf{gain} - 1)^3)$ ;  $\nu := 2$ ;

Sinon

$\mu := \mu \times \nu$ ;  $\nu := 2 \times \nu$ ;

Fin-si

Fin-si

Fin



---

Unité de recherche INRIA Lorraine  
LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-0803