



**HAL**  
open science

## Treillis de relations topologiques et reconnaissance de structures spatiales sur images satellitaires

Florence Le Ber, Ludmila Mangelinck, Amedeo Napoli

► **To cite this version:**

Florence Le Ber, Ludmila Mangelinck, Amedeo Napoli. Treillis de relations topologiques et reconnaissance de structures spatiales sur images satellitaires. [Interne] A00-R-419 || le\_ber00g, 2000, 74 p. inria-00099074

**HAL Id: inria-00099074**

**<https://inria.hal.science/inria-00099074v1>**

Submitted on 26 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Treillis de relations topologiques et reconnaissance de structures spatiales sur images satellitaires

Florence Le Ber, Ludmilla Mangelinck, Amedeo Napoli

LORIA, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX, France  
*mél : {leber,napoli}@loria.fr*



## Avertissement et remerciements

Ce rapport est essentiellement tiré du travail de thèse de Ludmila Mangelinck [Man 98], qui a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre l'INRA Nancy (LIAB) et le LORIA, et financé par une bourse INRA – Région Lorraine. Il est aussi une synthèse augmentée de deux articles de revues, l'un paru, l'autre en cours de relecture [LeB 99, LeB 00]. Les auteurs remercient Jean Bachacou de l'INRA LIAB pour ses relectures attentives ainsi que les lecteurs des revues pour leurs suggestions et corrections.

## Résumé

Ce rapport présente et discute plusieurs treillis de relations topologiques qui ont été définis et implantés dans un système de représentation de connaissances par objets (RCO) pour une application en interprétation d'images satellitaires. Le but est d'avoir une représentation des relations qui permette à la fois le calcul sur les images et l'inférence sur les relations déjà vérifiées. Nous discutons des différents choix possibles en matière de calcul des relations, de méthodes de construction de treillis, de nombre de relations représentées et de propriétés des treillis. Nous montrons comment ces treillis ont été utilisés pour la reconnaissance de structures spatiales sur des images satellitaires. Nous détaillons également la manière dont les relations ont été représentées dans le cadre d'un système de RCO : nous nous sommes inspirés pour cela des logiques de descriptions. Nous discutons de notre approche par rapport aux logiques de descriptions et au problème général posé par la réification des relations dans les systèmes de RCO.

**Mots Clefs :** Relations topologiques, treillis, calcul de relations, réification des relations, classification, images satellitaires, agronomie.

## Abstract

This report is concerned with lattices of topological relations and relation reification. We have defined various lattices and implemented them within an object based knowledge representation (OKR) system in order to achieve image interpretation. The lattice representation is required to facilitate the verification of relations on the images and the deduction of relations. We discuss various choices concerning relation verification, lattice building methods, and lattice properties. We show how we have used these lattices in order to recognize spatial structures on satellite images. We focus on the reification of relations and their representation in the OKR system, which is inspired by description logics. Finally we discuss about description logics and relation reification in RCO systems.

**Key Words :** Topological relations, lattice, relation verification, relation reification, classification, satellite images, agronomy.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Les relations topologiques</b>	<b>9</b>
2.1	Théories sur les relations topologiques . . . . .	9
2.2	Le calcul des relations topologiques . . . . .	12
2.3	Les propriétés mathématiques des relations topologiques . . . . .	13
2.4	Des applications . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Relations topologiques et images rasters</b>	<b>17</b>
3.1	Le problème de la frontière . . . . .	17
3.2	Les opérations sur les images . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Deux treillis de relations topologiques</b>	<b>21</b>
4.1	Treillis $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ des parties de $RCC-8$ . . . . .	21
4.2	Un treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . . . . .	23
4.2.1	Construction du treillis . . . . .	23
4.2.2	Ordre sur le treillis et implication sur les relations . . . . .	25
4.3	Propriétés du treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . . . . .	26
4.3.1	Caractérisation des éléments du treillis . . . . .	27
4.3.2	Caractérisation de l'opérateur $\frown$ . . . . .	28
4.3.3	Ensemble minimum de conditions à vérifier pour une relation . . . . .	28
4.3.4	Caractérisation de l'opérateur $\smile$ . . . . .	29
4.3.5	Complémentaire d'une relation et complémentaire d'un élément du treillis $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Comparaison de treillis</b>	<b>31</b>
5.1	Comparaison des deux treillis $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . . . . .	31
5.2	Extension du treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . . . . .	32
5.2.1	Construction . . . . .	32
5.2.2	Comparaison du treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ et du treillis étendu $\mathcal{T}_{\mathcal{G}\mathcal{E}}$ . . . . .	34
5.3	Un treillis de Galois avec d'autres primitives . . . . .	34
5.3.1	Construction . . . . .	34
5.3.2	Comparaison des deux treillis de Galois . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Reconnaissance de structures spatiales sur images satellitaires</b>	<b>39</b>
6.1	Problématique agronomique . . . . .	39
6.2	Problématique de représentation . . . . .	41
6.2.1	Présentation de Y3 . . . . .	41
6.2.2	Les entités spatiales . . . . .	41
6.2.3	Les structures spatiales . . . . .	42

<b>7</b>	<b>Représentation des relations topologiques</b>	<b>45</b>
7.1	Une hiérarchie de classes . . . . .	45
7.1.1	Calcul des relations . . . . .	46
7.1.2	Inférences . . . . .	47
7.2	Proposition d'ajout de facettes . . . . .	48
7.3	Sémantique des facettes . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Résultats et discussions</b>	<b>51</b>
8.1	Fonctionnement du système . . . . .	51
8.1.1	Organisation des modèles et vérification des relations . . . . .	51
8.1.2	Principe de la reconnaissance . . . . .	52
8.2	Résultats pour les agronomes . . . . .	52
8.3	Discussion sur la représentation des relations . . . . .	55
8.3.1	Systèmes de RCO et logiques de descriptions . . . . .	55
8.3.2	Statut des relations dans les systèmes de RCO . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>
<b>10</b>	<b>Annexe</b>	<b>61</b>
10.1	Rappel des notations . . . . .	61
10.2	Quelques définitions et notations . . . . .	62
10.3	Démonstrations des propriétés . . . . .	63
10.4	Une brève introduction aux logiques de descriptions . . . . .	67

# Chapitre 1

## Introduction

Les chercheurs agronomes utilisent aujourd’hui des cartes d’occupation du sol provenant d’images satellitaires dans un but d’analyse des systèmes de production agricole et de prévision de problèmes environnementaux. Leurs analyses se fondent sur l’organisation spatiale des différentes occupations du sol présentes sur l’image (cultures, prairies, forêts, bâtis) et leur interprétation en termes de fonctionnement. Des modèles de ces organisations ont été définis pour permettre de classer des zones extraites de l’image [Def 90, Ben 90, LeB 98]. Ces zones correspondent à des territoires attribués à un village et théoriquement exploités par les agriculteurs de ce village. Elles sont constituées de régions, c’est-à-dire d’ensembles connexes de pixels de même étiquette, qui représentent des occupations du sol [Bac 95]. Les modèles quant à eux sont définis par des listes d’entités spatiales agricoles reliées entre elles par des relations spatiales qualitatives, topologie, distance, orientation.

Pour réaliser la classification des zones de l’image selon les modèles d’organisations spatiales, nous avons choisi d’utiliser un système de représentation de connaissances par objets (ou système de RCO). En effet, les méthodes de classification dans ces systèmes sont déjà bien connues [Nap 92b] et notre problème peut se ramener à un problème de classification d’instances, où les classes sont les modèles et les instances sont les zones extraites de l’image. Nous devons pour cela tout d’abord représenter les modèles, c’est-à-dire représenter d’une part des connaissances sur les entités agronomiques et d’autre part des connaissances sur les relations spatiales. Il faut ensuite définir des méthodes pour extraire les régions de l’image et vérifier des relations spatiales sur l’image. Finalement il faut définir une méthode de classification, c’est-à-dire une méthode pour comparer les régions et relations extraites de l’image aux entités et relations décrites dans les modèles.

Dans le cadre de notre application, la classification s’appuie principalement sur les relations spatiales, dans la mesure où elles sont les éléments les plus caractéristiques des modèles d’organisations spatiales agricoles. C’est pourquoi, outre les méthodes de calcul de relations sur l’image, nous nous sommes intéressés à la représentation des propriétés des relations : le but est à la fois de minimiser les calculs sur l’image et d’optimiser le raisonnement. En particulier, nous avons opté pour une représentation hiérarchique des relations qui permet de factoriser propriétés et méthodes de calcul. Nous nous sommes limités aux relations topologiques qui offrent un cadre théorique bien défini. Dans ce cadre, nous voulons un système de représentation des relations topologiques qui :

- définisse des primitives calculables sur les images rasters<sup>1</sup>,
- intègre l’ensemble des relations utilisées dans les modèles des agronomes,

---

1. On appelle images « rasters » par opposition à images « vecteurs » les images constituées de points, appelés *pixels*, caractérisés par leur position (ligne, colonne) et leur étiquette (couleur ou niveau de gris).



- permette de stocker toutes les informations calculées,
- autorise l’inférence de relations par différents moyens, y compris la composition de relations,
- puisse être géré par un système de RCO (donc d’une taille mémoire raisonnable).

En réponse à ces prérequis, nous avons étudié une représentation des relations topologiques sous forme de treillis, représentation qui a déjà été utilisée dans [Ran 92a] pour la démonstration de théorèmes sur les relations. Nous avons construit plusieurs treillis, dont deux en utilisant le formalisme des treillis de Galois [Bar 70], appelé aussi l’analyse conceptuelle formelle [Dav 90, Wil 92]. Ces formalismes permettent en effet d’associer à des objets (description en extension) l’ensemble des propriétés qui les caractérisent (description en intension). Ainsi, les relations qu’on veut reconnaître sur l’image peuvent être associées à des propriétés calculables sur l’image. Nous avons évalué et mis en œuvre ces différents treillis dans le cadre de notre application. Nous avons choisi l’un d’entre eux comme base pour construire une hiérarchie de classes de relations spatiales que nous avons implantée dans un système de RCO, le système Y3 [Duc 91]. Les classes de relations sont munies de propriétés, de méthodes et de facettes qui permettent de calculer les relations sur les images, de réaliser des inférences et de représenter au mieux les modèles de structures spatiales. Nous avons finalement défini une procédure de classification des structures spatiales qui intègre la hiérarchie des relations et s’apparente ainsi aux mécanismes définis dans les logiques de descriptions [Neb 90].

Ce rapport est constitué de sept chapitres, outre l’introduction et la conclusion. Les quatre premiers chapitres portent sur les relations topologiques et leur organisation sous forme de treillis. Différents treillis sont présentés et comparés. Les trois derniers chapitres présentent l’application que nous avons traitée, le système implanté et son fonctionnement. En particulier, nous proposons et discutons une représentation des relations topologiques sous forme de classes dans les systèmes de RCO.

# Chapitre 2

## Les relations topologiques

Dans cette partie nous présentons différents travaux, tant théoriques qu'applicatifs, ayant trait aux relations topologiques.

### 2.1 Théories sur les relations topologiques

La *topologie mathématique* est fondée sur la notion d'*ouvert*. Elle définit les notions de *fermé*, et de *voisinage*. La topologie peut aussi être définie à partir de la notion de *continuité*. Deux formes sont topologiquement équivalentes si elles peuvent être transformées l'une en l'autre de manière continue, soit, dans un espace euclidien, par translation, rotation, ou dilatation : ainsi, un œuf est topologiquement équivalent à une balle mais pas à un tore. La topologie peut donc être utilisée pour caractériser les formes des objets.

Dans les représentations qualitatives de l'espace, les relations topologiques sont opposées aux relations de distance et d'orientation [Vie 97]. Les relations topologiques sont binaires et indépendantes de l'orientation des objets. Elles s'appliquent le plus souvent à des objets de type « région étendue », c'est-à-dire des parties d'espace qui correspondent à des objets concrets plutôt qu'à des ensembles de points [Vie 93]. Dans les théories présentées ci-dessous, les régions sont généralement supposées être en nombre infini et peuvent être connectées à différents degrés [Ran 92c].

La *méréologie* est une théorie de la relation « partie – tout » introduite par Lesniewski au début du 20e siècle comme une alternative à la théorie des ensembles [Les 89]. Elle constitue une base d'axiomatisation pour la topologie et la géométrie sur les régions plutôt que sur les points. La méréologie définit la relation  $P(x,y)$  «  $x$  est une partie de  $y$  » respectant les propriétés de réflexivité, d'antisymétrie et de transitivité, ce qui en fait donc une relation d'ordre partiel sur un ensemble de régions  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D} & : P(x,x) \\ \forall x,y \in \mathcal{D} & : P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow x = y \\ \forall x,y,z \in \mathcal{D} & : P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)\end{aligned}$$

À partir de cette relation primitive, sept relations peuvent être définies sur les régions. Elles sont présentées dans la figure 2.1. Outre la relation  $PP(x,y)$  qui signifie «  $x$  est une partie propre de  $y$  », sont définies les relations  $O(x,y)$ , «  $x$  recouvre en tout ou partie  $y$  » (ou «  $x$  et  $y$  ont une partie commune »), et  $U(x,y)$ , «  $x$  et  $y$  sont parties d'un même tout », puis des combinaisons de ces relations qui rendent compte de différentes variantes des notions de recouvrement et d'inclusion.

Clarke [Cla 81, Cla 85] a proposé une formalisation logique de la relation « est une partie de » à partir de la notion de connexion entre régions. Deux régions  $x$  et  $y$  sont

$$\left| \begin{array}{l} PP(x,y) \equiv_{def} P(x,y) \wedge \neg P(y,x) \\ O(x,y) \equiv_{def} \exists z : P(z,x) \wedge P(z,y) \\ U(x,y) \equiv_{def} \exists z : P(x,z) \wedge P(y,z) \\ OX(x,y) \equiv_{def} O(x,y) \wedge \neg P(x,y) \\ UX(x,y) \equiv_{def} U(x,y) \wedge \neg P(y,x) \\ PO(x,y) \equiv_{def} OX(x,y) \wedge OX(y,x) \\ PU(x,y) \equiv_{def} UX(x,y) \wedge UX(y,x) \end{array} \right|$$

FIG. 2.1 – Les relations méréologiques (citées dans [Vie 93, Var 96]).

connectées — noté  $C(x,y)$  dans la suite — si elles partagent au moins un point. Le point est considéré dans le sens mathématique, c'est-à-dire comme un élément de dimension zéro. La théorie est définie par les axiomes suivants :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{D} \quad : \quad C(x,x) \\ \forall x,y \in \mathcal{D} \quad : \quad C(x,y) \rightarrow C(y,x) \\ \forall x,y \in \mathcal{D} \quad : \quad (\forall z \in \mathcal{D} : C(z,x) \leftrightarrow C(z,y)) \rightarrow x = y \end{array}$$

À partir de la connexion, Clarke a défini cinq relations qui sont  $DC(x,y)$  «  $x$  est déconnecté de  $y$  » ;  $P(x,y)$  «  $x$  est une partie de  $y$  » ;  $PP(x,y)$  «  $x$  est une partie propre de  $y$  » ;  $O(x,y)$  «  $x$  recouvre en tout ou partie  $y$  » ;  $DR(x,y)$  «  $x$  est séparé de  $y$  ». L'intérêt de cette théorie réside dans la différence entre les relations  $C(x,y)$  «  $x$  est connecté  $y$  » et  $O(x,y)$  «  $x$  recouvre en tout ou partie  $y$  », qui permet à Clarke d'introduire de nouvelles relations :  $EC(x,y)$  «  $x$  est connexe à  $y$  »,  $TP(x,y)$  «  $x$  est une partie tangentielle de  $y$  »<sup>1</sup>,  $NTP(x,y)$  «  $x$  est une partie non tangentielle de  $y$  », définies dans la figure 2.2 et représentées sur la figure 2.3. Dans cette théorie, appelée « méréotopologie », Clarke utilise en fait la distinction entre le point —  $C(x,y)$  :  $x$  et  $y$  partagent un point commun — et la région —  $O(x,y)$  :  $x$  et  $y$  partagent une partie commune. Cette distinction rend compte de la notion d'intérieur et de frontière d'une région et permet donc d'ajouter des notions topologiques aux notions purement ensemblistes de la méréologie.

$$\left| \begin{array}{l} DC(x,y) \equiv_{def} \neg C(x,y) \\ P(x,y) \equiv_{def} \forall z : C(z,x) \rightarrow C(z,y) \\ PP(x,y) \equiv_{def} P(x,y) \wedge \neg P(y,x) \\ O(x,y) \equiv_{def} \exists z : P(z,x) \wedge P(z,y) \\ DR(x,y) \equiv_{def} \neg O(x,y) \\ EC(x,y) \equiv_{def} C(x,y) \wedge \neg O(x,y) \\ TP(x,y) \equiv_{def} P(x,y) \wedge \exists z : EC(z,x) \wedge EC(z,y) \\ NTP(x,y) \equiv_{def} P(x,y) \wedge \neg \exists z : EC(z,x) \wedge EC(z,y) \end{array} \right|$$

FIG. 2.2 – Les relations méréotopologiques [Cla 81]. Certaines relations sont identiques à celles de la méréologie présentées sur la figure 2.1.

Dans la suite, d'autres théories [Ran 92c, Vie 93] ont été définies sur les relations topologiques. Ces théories sont généralement formalisées en logique du premier ordre. Elles

1. On peut aussi considérer que  $EC(x,y)$  représente la relation de tangence externe et  $TP(x,y)$  celle de tangence interne.

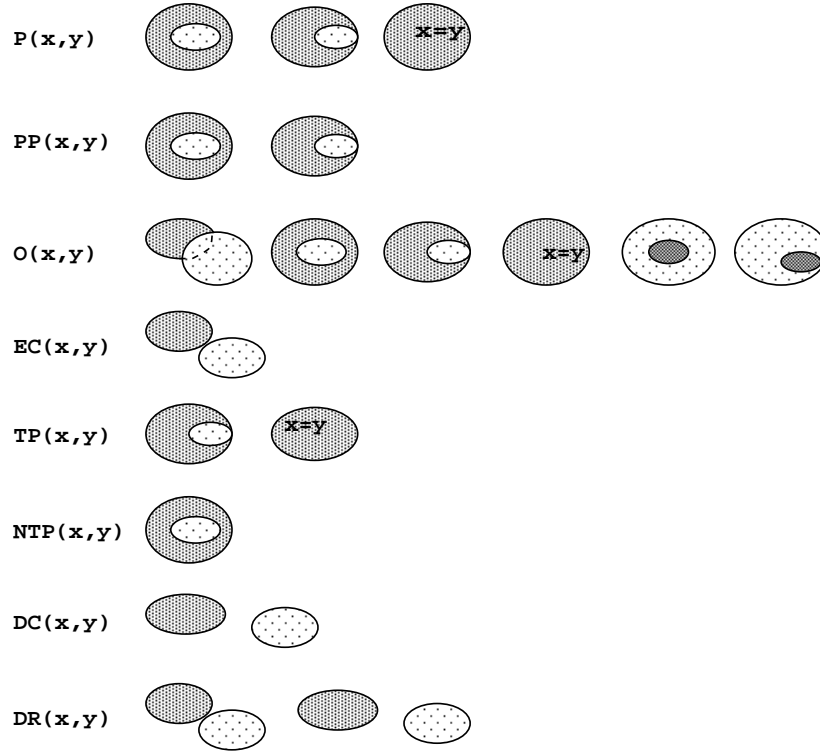


FIG. 2.3 – Représentation graphique des relations méréotopologiques : l'objet  $x$  est figuré en clair et l'objet  $y$  en foncé, le cas de l'égalité est désigné par  $x=y$ . Voir aussi [Vie 93].

diffèrent par le nombre des relations et l'interprétation que l'on peut en faire. Ainsi dans [Ran 92b], la théorie contient dix relations de base et utilise la notion de *partie intérieure* d'une région ; dans [Coh 93], seize relations sont définies pour rendre compte des positions relatives des enveloppes convexes des régions (relations « *OUTSIDE* », « *INSIDE* », etc.). Chaque théorie est définie par un ensemble d'axiomes, en fonction des propriétés désirées des régions (pour une discussion, voir [Var 96, Var 98, Mas 99, Mas 00]).

Les relations les plus utilisées sont les huit relations de base de la théorie RCC-8 [Ran 92c, Coh 97]. Elles possèdent les propriétés intéressantes d'être à la fois exhaustives et deux à deux disjointes (voir annexe). Leurs définitions sont données dans la figure 2.4 et leurs significations et descriptions symboliques sont données en figure 2.5.

$EQ(x,y)$	$\equiv_{def}$	$P(x,y) \wedge P(y,x)$
$NTPP(x,y)$	$\equiv_{def}$	$PP(x,y) \wedge \neg \exists z : EC(z,x) \wedge EC(z,y)$
$TPP(x,y)$	$\equiv_{def}$	$PP(x,y) \wedge \exists z : EC(z,x) \wedge EC(z,y)$
$NTPP^{-1}(x,y)$	$\equiv_{def}$	$NTPP(y,x)$
$TPP^{-1}(x,y)$	$\equiv_{def}$	$TPP(y,x)$
$PO(x,y)$	$\equiv_{def}$	$O(x,y) \wedge \neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$
$EC(x,y)$	$\equiv_{def}$	$C(x,y) \wedge \neg O(x,y)$
$DC(x,y)$	$\equiv_{def}$	$\neg C(x,y)$

FIG. 2.4 – Les relations de base de la théorie RCC-8 [Ran 92c]. Les définitions reposent sur la méréotopologie (cf. figure. 2.2).

relation	notation	représentation graphique
« $x$ est égal à $y$ »	$EQ(x,y)$	
« $x$ est une partie propre non tangentielle de $y$ »	$NTPP(x,y)$	
« $x$ est une partie propre tangentielle de $y$ »	$TPP(x,y)$	
« $x$ possède pour partie propre non tangentielle $y$ »	$NTPP^{-1}(x,y)$	
« $x$ possède pour partie propre tangentielle $y$ »	$TPP^{-1}(x,y)$	
« $x$ recouvre partiellement $y$ »	$PO(x,y)$	
« $x$ est connexe à $y$ »	$EC(x,y)$	
« $x$ est déconnecté de $y$ »	$DC(x,y)$	

FIG. 2.5 – Signification des huit relations de base de la théorie RCC-8.

## 2.2 Le calcul des relations topologiques

Pour nombre d'applications se pose le problème du calcul des relations topologiques, que ce soit dans des bases de données spatiales ou sur des images. Des méthodes de calcul ont été proposées dans [Ege 89, Ege 93, Cle 93] qui utilisent les notions d'intérieur et de frontière d'une région. Elles sont reliées à des modèles formels des relations topologiques.

Une telle méthode est décrite dans [Ege 89] pour les représentations vecteurs utilisées dans les systèmes d'information géographique: une région  $x$  de dimension  $n$  est caractérisée par son *intérieur*  $x^\circ$  (de même dimension) et sa *frontière*  $\partial x$  (de dimension  $n - 1$ ). Les intersections de ces deux ensembles pour deux régions définissent quatre opérations:  $\partial x \cap \partial y$ ,  $x^\circ \cap y^\circ$ ,  $\partial x \cap y^\circ$  et  $x^\circ \cap \partial y$ . Les figures 2.6 et 2.7 montrent la correspondance que l'on peut effectuer entre ces opérations sur les régions et les relations topologiques de la théorie RCC-8. Par exemple si la relation «  $x$  recouvre partiellement  $y$  »,  $PO(x,y)$ , est vraie entre les deux régions  $x$  et  $y$  on a à la fois:  $\partial x \cap \partial y \neq \emptyset$ ,  $x^\circ \cap y^\circ \neq \emptyset$ ,  $\partial x \cap y^\circ \neq \emptyset$  et  $x^\circ \cap \partial y \neq \emptyset$ . Inversement, si ces quatre conditions sont vérifiées sur les ensembles intérieurs et frontières des régions  $x$  et  $y$ , alors la relation «  $x$  recouvre partiellement  $y$  » est vérifiée (figure 2.6).

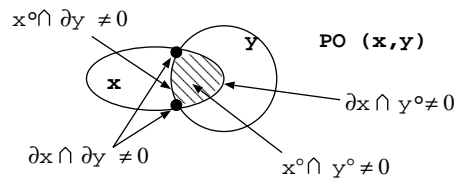


FIG. 2.6 – Correspondance entre les primitives d'Egenhofer et les relations de la théorie RCC-8. Cas de la relation  $PO(x,y)$ .

Cette méthode est intéressante car elle exprime les relations de la théorie RCC-8 en termes de conditions nécessaires et suffisantes sur des régions. Elle nécessite toutefois de disposer d'une caractérisation des régions en termes d'intérieur et de frontière, ce qui peut poser problème sur les images rasters comme nous le verrons plus loin.

$x,y$	$\partial x \cap \partial y$	$x^\circ \cap y^\circ$	$\partial x \cap y^\circ$	$x^\circ \cap \partial y$
$EQ(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$NTPP(x,y)$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$
$TPP(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$
$NTPP^{-1}(x,y)$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$
$TPP^{-1}(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$
$PO(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$
$EC(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$DC(x,y)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

FIG. 2.7 – Correspondance entre les relations de la théorie RCC-8 et les primitives de Egenhofer [Ege 89]: chaque relation est caractérisée de manière unique par les valeurs obtenues par les quatre opérations définies sur les ensembles intérieurs et frontières.

## 2.3 Les propriétés mathématiques des relations topologiques

À partir des définitions de base et d'une connaissance partielle sur les positions des régions, il est souvent nécessaire de déduire d'autres connaissances sur ces positions ou de vérifier la cohérence des connaissances établies. Vérifier la cohérence des connaissances ou déduire d'autres connaissances peut s'effectuer grâce aux propriétés inter-relations. Nous utiliserons les propriétés suivantes ( $\mathcal{D}$  est l'ensemble des régions sur lesquelles sont établies les relations) :

- toute relation  $R$  admet une relation transposée (ou inverse)  $R^t$  tq:
 
$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, R(x,y) \leftrightarrow R^t(y,x)$$
- deux relations  $R_1$  et  $R_2$  sont disjointes si:
 
$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, R_1(x,y) \leftrightarrow \neg R_2(x,y)$$
- Un ensemble de relations  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  est dit exhaustif<sup>2</sup> sur  $\mathcal{D}$  si:
 
$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} R_i(x,y) \text{ est vrai.}$$
- on appelle relation complémentaire de  $R$  la relation  $R^c$  telle que  $R$  et  $R^c$  sont disjointes et exhaustives :
 
$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, R(x,y) \vee R^c(y,x) \text{ est vrai,}$$

$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, R(x,y) \wedge R^c(y,x) \text{ est faux.}$$
- la composée de deux relations  $R_1$  et  $R_2$  est la disjonction  $R$  de toutes les relations possibles entre  $x$  et  $z$ , étant données trois régions  $x, y, z$  et  $R_1(x,y)$  et  $R_2(y,z)$  :
 
$$\forall(x,y,z) \in \mathcal{D}^3, R_1(x,y) \wedge R_2(y,z) \rightarrow R(x,z)$$
 et  $\forall R_3, (R_1(x,y) \wedge R_2(y,z) \wedge R_3(x,z)) \rightarrow (R_3(x,z) \rightarrow R(x,z))$

La dernière propriété est particulièrement intéressante: les règles de composition, établies par exemple dans [Ran 92a], permettent de déduire toutes les relations possibles entre deux régions  $x$  et  $z$  à partir de la connaissance des relations entre ces régions, prises séparément, avec une troisième région  $y$ . Par exemple, sur la figure 2.8 sont représentées trois régions  $x, y$  et  $z$  qui sont telles que  $TPP(x,y)$  et  $EC(y,z)$ . On peut déduire alors que  $DC(x,z)$  ou  $EC(x,z)$ . Les deux schémas sur la figure correspondent aux deux configurations possibles pour les régions  $x$  et  $z$ .

La composition des relations est représentée dans des tables de composition. De telles tables ont été utilisées par Allen [All 83] pour l'inférence de relations temporelles entre

2. Ou, les relations  $R_1, R_2, \dots, R_n$  sont exhaustives.

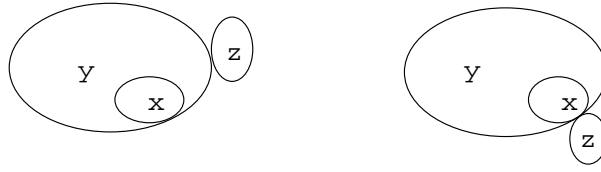


FIG. 2.8 – *Un exemple de composition de relations topologiques. Ces deux situations sont décrites par  $TPP(x,y)$  et  $EC(y,z)$ . Dans le premier cas on a  $DC(x,z)$ , dans le second  $EC(x,z)$ .*

événements. Les tables de composition ont aussi été utilisées dans les théories topologiques fondées sur la connexion : une table de composition pour neuf relations est proposée dans [Ran 92b]; une autre est proposée dans [Coh 93] pour vingt-deux relations.

Une table de composition est définie pour un sous-ensemble de relations d'une théorie, qui ne contient que des relations disjointes entre elles. La table 2.9 présente la composition des relations de la théorie RCC-8. La relation  $EQ(x,y)$  « *x est égal à y* » n'est pas représentée car elle est élément neutre pour la composition.

## 2.4 Des applications

Selon la synthèse présentée dans [Cre 97], il y a peu de systèmes d'interprétation d'images qui utilisent des cadres logiques, à cause de certaines difficultés propres à l'image. Les systèmes de représentation qualitative de l'espace n'ont donc pas pu être utilisés avec autant de succès que dans d'autres domaines de l'IA, tels que les bases de données géographiques ou la conception assistée par ordinateur, où de nombreuses applications ont été développées.

Dans les systèmes d'informations géographiques, les représentations qualitatives de l'espace sont utilisées surtout dans les interfaces, pour faciliter les communications entre les systèmes et leurs utilisateurs humains, tandis que les systèmes eux-mêmes sont toujours fondés sur une représentation euclidienne de l'espace [Fra 97]. Les relations méréotopologiques sont par exemple utilisées dans [Tan 95, Gon 99].

Dans le domaine de la conception assistée par ordinateur, un système fondé sur les relations topologiques a été développé pour l'architecture [Gou 96]. Ce système modélise les divers éléments architecturaux ainsi que les relations entre les éléments à l'aide de formules logiques.

Dans ces différentes applications, les représentations qualitatives sont importantes pour faciliter l'usage du système par son utilisateur. Il convient d'aller au plus près des notions et du vocabulaire de l'utilisateur et de distinguer les différentes relations signifiées par un même mot, comme par exemple le mot « dans » dans les expressions « l'œuf est dans la corbeille » ou « le jaune est dans l'œuf » [Win 87]. Des tentatives ont été faites en ce sens dans le domaine du traitement du langage naturel. Par exemple, la méréotopologie de Clarke a été étendue pour rendre compte d'autres relations spatiales [Vie 91, Vie 93, Ash 95]: ont été ajoutées des notions sur les relations entre l'espace et le temps, sur les relations partie-tout, sur différentes notions de contacts, etc.

Dans [Kaw 94], les relations méréotopologiques sont utilisées pour décrire le comportement d'un groupe de footballeurs, à partir d'images : les joueurs sont extraits de l'image grâce à leur couleur, les groupes de joueurs sont hiérarchisés suivant leur taille et leur position est décrite à l'aide des relations de la théorie RCC-8. Des types de comportements sont définis en fonction des relations spatiales entre les groupes de joueurs.






















































$R_1(x,y)$	$R_2(y,z)$						
	<i>NTPP</i>	<i>TPP</i>	<i>NTPP</i> <sup>-1</sup>	<i>TPP</i> <sup>-1</sup>	<i>PO</i>	<i>EC</i>	<i>DC</i>
 <i>NTPP</i>			8				
 <i>TPP</i>							
 <i>NTPP</i> <sup>-1</sup>							
 <i>TPP</i> <sup>-1</sup>							
 <i>PO</i>					8		
 <i>EC</i>							
 <i>DC</i>							8

FIG. 2.9 – La table de composition des relations de base de la théorie RCC-8 : en ligne est donnée la relation entre les régions  $x$  et  $y$  ; en colonne celle entre les régions  $y$  et  $z$  ; en résultat les relations possibles entre  $x$  et  $z$  ; la marque 8 indique les situations où toutes les relations de la théorie RCC-8 sont possibles entre  $x$  et  $z$ .



Notre application traite d'interprétation d'images et de classification de structures spatiales. En ce sens, elle s'approche du problème traité dans [Kaw 94], à la différence que nous cherchons à reconnaître des structures statiques, et non pas dynamiques. Par ailleurs, nous travaillons à partir d'une expertise humaine, exprimée en langage naturel. Pour approcher au plus près cette expertise, nous avons donc besoin d'une bonne représentation des expressions du langage naturel, comme proposée dans [Vie 93, Ash 95].

## Chapitre 3

# Relations topologiques et images rasters

Notre application traite à la fois d'images et de connaissances : nous avons développé un système de reconnaissance d'organisations spatiales agricoles sur des cartes d'occupations du sol. Les experts agronomes qui analysent ces cartes d'occupations du sol utilisent différentes relations spatiales pour caractériser les structures qu'ils observent. Parmi ces relations, on trouve les relations de la théorie RCC-8 [Ran 92c] mais aussi des disjonctions de ces relations (par exemple la relation  $PP(x,y)$ , « *x est une partie propre de y* », disjonction de  $TPP(x,y)$  et de  $NTPP(x,y)$ ). Nous avons donc besoin de plus d'une théorie pour formaliser le discours des experts. Par ailleurs, nous avons besoin de méthodes de calcul sur les images (images rasters, tirées de données satellitaires) pour vérifier les relations et ainsi caractériser les structures extraites des images. Finalement, nous avons besoin de propriétés mathématiques sur les relations pour minimiser les calculs sur les images et assurer le maintien de la cohérence du système.

Il nous faut donc combiner les approches « théoriques » telles que celle décrite dans [Ran 92c] et « calculatoires » telles que celle décrite dans [Ege 89]. Nous avons pour cela étudié une représentation des relations topologiques sous forme de treillis qui permet d'intégrer les différentes approches et qui sera décrite dans la prochaine partie. Mais auparavant nous présentons un problème spécifique posé par notre application, quant au calcul des relations sur des images rasters, et pour les régions que nous manipulons, qui sont des régions rasters étendues et régulières au sens de [Ege 93] : elles sont constituées d'un ensemble connexe de pixels, elles sont non vides, sans trous et fermées. Dans la suite, toutes les opérations et propriétés que nous utilisons portent sur ce type de régions.

### 3.1 Le problème de la frontière

Dans la théorie de Clarke [Cla 81, Cla 85], la frontière d'une région n'est pas explicitée. Elle est sous-jacente à la distinction entre la relation  $C$ , interprétée par « partage un point », et la relation  $O$  interprétée par « partage une partie ». Egenhofer utilise quant à lui explicitement la distinction entre frontière et intérieur pour définir des primitives de calcul de relations [Ege 89]. Dans [Ege 93], ces mêmes primitives sont définies pour des régions rasters et comparées avec les régions vecteurs.

De fait, définir les points frontières d'une région sur des images rasters est problématique [Win 99]. L'image est constituée de pixels, chacun défini par une position et un contenu, et assimilable à un point mathématique. Un pixel ne possède donc pas de frontière. Visuellement, le pixel est un carré, qui représente une surface (pour nos images, 90 m<sup>2</sup>), il

a des voisins et sa frontière peut « naturellement » être définie comme la ligne immatérielle entre le pixel et ses huit voisins.

Dans [Ege 93], la frontière d'une région d'une image raster est définie comme l'ensemble des pixels externes et adjacents à la région (ses huit pixels voisins pour une région constituée d'un pixel). On peut également définir une frontière interne à la région en prenant les pixels internes qui sont « les plus au bord » de la région (elle-même pour une région constituée d'un pixel). Ces deux définitions rendent mal compte de la notion de connexion de Clarke : si les pixels frontières sont internes à la région, alors l'intersection des ensembles de points frontières de régions connectées extérieurement est vide. À l'inverse, si les pixels frontières sont externes à la région, alors certaines régions déconnectées auront des points frontières communs et pourront donc être confondues avec des régions connectées. Les primitives proposées dans [Ege 93] permettent de différencier ces deux situations (pour le cas de la frontière externe) :  $\partial x \cap y^\circ$  et  $x^\circ \cap \partial y$  sont vides lorsque les régions sont déconnectées et non vides lorsqu'elles sont connectées. Dans [Win 99], la représentation raster est complétée par des *côtés* et des *nœuds* qui représentent la frontière du pixel ou d'un ensemble de pixels. Les relations topologiques sont définies à l'aide de primitives qui s'appliquent aux ensembles de pixels, aux côtés et aux nœuds.

Nous proposons de résoudre ce problème d'une autre manière, intuitivement plus proche de la notion de ligne immatérielle entre les pixels, en définissant une *frontière abstraite* dont les éléments sont des *pixels abstraits* qui chevauchent quatre pixels de l'image, comme il est montré dans la figure 3.1 : un pixel abstrait  $f$  est un pixel frontière d'une région  $x$  si, parmi les quatre pixels chevauchés par  $f$ , il y a au moins un pixel de  $x$  et un pixel du complémentaire de  $x$ .

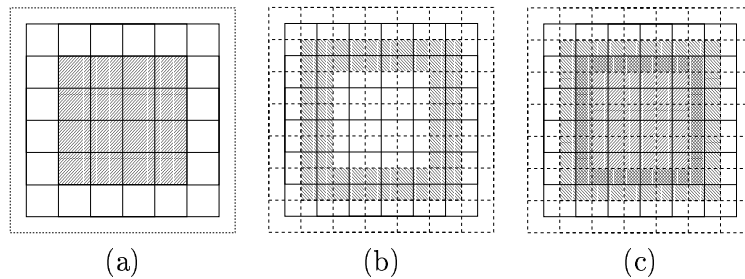


FIG. 3.1 – Définition de la frontière d'une région par des pixels abstraits : (a) une région est constituée de pixels (hachurés) ; (b) la frontière de la région est constituée de pixels abstraits (hachurés inverses) qui « chevauchent » les pixels vrais ; (c) une vision superposée de la région et de sa frontière [Man 98].

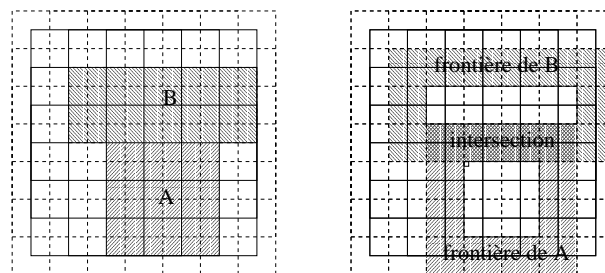


FIG. 3.2 – Intersection des frontières de deux régions sur une image raster : la grille en traits pleins correspond aux pixels vrais, la grille en traits pointillés aux pixels abstraits.

L'intersection de frontières est maintenant réalisable, comme le montre la figure 3.2.

## 3.2 Les opérations sur les images

Pour traiter notre problème nous avons besoin d'opérations de calcul des relations sur les images. Dans [Ege 89], Egenhofer a défini de telles opérations sur des régions vecteurs : les primitives de calcul sont l'intersection des deux intérieurs des régions  $x^\circ \cap y^\circ$  ; l'intersection des deux frontières  $\partial x \cap \partial y$  ; les intersections croisées des frontières et intérieurs  $\partial x \cap y^\circ$  et  $x^\circ \cap \partial y$ . Nous appelons *CE-8* l'ensemble des huit conditions définies par les valeurs (*vide* ou *non vide*) prises par ces primitives (voir figure 2.7).

Ces primitives ne conviennent malheureusement pas pour traiter notre problème, à cause de la définition que nous avons adoptée pour la frontière entre pixels : en particulier, les ensembles des pixels intérieurs et frontières des régions de l'image ne sont pas de même nature, et il paraît donc incohérent d'en faire l'intersection. Nous avons donc défini des opérations de calcul des relations selon le même principe que Egenhofer, mais en utilisant des primitives spécifiques, qui sont : les différences des deux ensembles de points intérieurs  $x^\circ - y^\circ$  et  $y^\circ - x^\circ$ , l'intersection des deux ensembles de points intérieurs  $x^\circ \cap y^\circ$  et l'intersection des deux ensembles de points frontières  $\partial x \cap \partial y$ . Nous obtenons ainsi un ensemble de huit conditions que nous dénotons de la façon suivante :

- $(x^\circ - y^\circ = \emptyset)$  : « *x appartient à y* », notée  $P(x,y)$
- $(x^\circ - y^\circ \neq \emptyset)$  : « *x n'appartient pas à y* », notée  $Dx(x,y)$
- $(y^\circ - x^\circ = \emptyset)$  : « *x contient y* », notée  $P^{-1}(x,y)$
- $(y^\circ - x^\circ \neq \emptyset)$  : « *x ne contient pas y* », notée  $Dy(x,y)$
- $(x^\circ \cap y^\circ = \emptyset)$  : « *x ne recouvre pas y* », notée  $DR(x,y)$
- $(x^\circ \cap y^\circ \neq \emptyset)$  : « *x recouvre en tout ou partie y* », notée  $O(x,y)$
- $(\partial x \cap \partial y = \emptyset)$  : « *x n'est pas tangent à y* », notée  $NA(x,y)$ .
- $(\partial x \cap \partial y \neq \emptyset)$  : « *x est tangent à y* », notée  $A(x,y)$

Nous nommons cet ensemble *CM-8*. Il est à noter que, du fait des propriétés de nos régions, certaines de ces conditions peuvent en impliquer d'autres. Par exemple, la condition  $x^\circ \cap y^\circ \neq \emptyset$  est impliquée par chacune des conditions  $x^\circ - y^\circ = \emptyset$  et  $y^\circ - x^\circ = \emptyset$  (les régions sont non vides). La condition  $\partial x \cap \partial y \neq \emptyset$  est impliquée par la conjonction de ces deux mêmes conditions (les régions sont non vides et fermées).

Enfin, ces primitives de calcul permettent de vérifier les huit relations de la théorie *RCC-8* sur des images rasters. La figure 3.3 spécifie les résultats des primitives pour ces relations. De fait, chacune des relations de la théorie *RCC-8* est équivalente à une conjonction de conditions de *CM-8*.

Quatre conditions de *CM-8* sont identiques à des conditions de *CE-8* : les conditions portant sur les intersections des ensembles de points intérieurs d'une part et de points frontières d'autre part. Nous avons supprimé les conditions portant sur des intersections entre un ensemble de points frontières et un ensemble de points intérieurs. Nous avons ajouté des conditions utilisant la différence ensembliste entre ensembles de points intérieurs. Comme dit précédemment, ces choix sont dûs au fait que nous avons défini des ensembles de points intérieurs (pixels) et de points frontières (pixels abstraits) qui ne sont pas de même nature : il serait donc incohérent d'effectuer une intersection de ces ensembles comme le fait Egenhofer.

Notons pour finir que, récemment, Ligozat a proposé d'utiliser les régions elles-mêmes et leurs intérieurs pour calculer les relations de la théorie *RCC-8* [Lig 99]. Les opérations qui sont utilisées sont l'intersection et l'inclusion. Ainsi, la relation  $TPP(x,y)$  est définie

$x,y$	$x^\circ - y^\circ$	$y^\circ - x^\circ$	$x^\circ \cap y^\circ$	$\partial x \cap \partial y$
$EQ(x,y)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$
$NTPP(x,y)$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$
$TPP(x,y)$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$
$NTPP^{-1}(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$
$TPP^{-1}(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$
$PO(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$
$EC(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\neq \emptyset$
$DC(x,y)$	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

FIG. 3.3 – Correspondance entre les relations de la théorie RCC-8 et nos primitives [Man 98]: chacune des relations est caractérisée de manière unique par les résultats des quatre opérations sur les ensembles intérieurs et frontières des régions (voir figure 2.7 pour une comparaison avec les primitives de Egenhofer).

par  $\{x \subset y, x \not\subseteq y^\circ\}$ . Cette approche pourrait également être utilisée sur les images rasters, mais induirait un réexamen du problème de la frontière.

# Chapitre 4

## Deux treillis de relations topologiques

Nous avons besoin de définir une représentation des relations qui possède de bonnes propriétés, c'est-à-dire qui permette de :

- représenter l'ensemble des relations utiles y compris les conjonctions et disjonctions de relations,
- représenter les propriétés calculatoires des relations,
- représenter les propriétés mathématiques des relations (implication, composition, inverse, complémentaire),
- permettre le raisonnement (inférences, maintien de cohérence).

Nous avons choisi pour cela d'étudier une représentation des relations topologiques sous forme de treillis. Dans cette partie, nous présentons deux treillis de relations topologiques, le premier construit sur les parties de l'ensemble des relations de la théorie  $RCC-8$ , et le second construit à partir de la correspondance de Galois entre l'ensemble des relations de la théorie  $RCC-8$  et l'ensemble des conditions  $CM-8$ . Nous étudions les propriétés de ces deux treillis en fonction de nos objectifs. Dans la suite, nous nommons  $RCC-8$  l'ensemble des huit relations de la théorie  $RCC-8$  et  $\mathcal{D}$  l'ensemble des régions sur lesquelles on vérifie les relations. Nous rappelons que ces régions sont des ensembles connexes de pixels, non vides, sans trous et fermés. Les différentes définitions et démonstrations nécessaires à cette partie sont présentées en annexe.

### 4.1 Treillis $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ des parties de $RCC-8$

Pour représenter l'ensemble  $RCC-8$  des huit relations de la théorie  $RCC-8$ , nous pouvons construire un premier treillis « de référence » qui est fondé sur l'ensemble des parties de  $RCC-8$  muni de la relation d'inclusion. Le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  est défini de la manière suivante :

**Définition 1** *Le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  est la structure  $\langle \mathcal{P}(RCC-8), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, RCC-8 \rangle$  où :*

- l'ensemble des éléments est l'ensemble des parties de  $RCC-8$  noté  $\mathcal{P}(RCC-8)$ ,
- l'ordre sur les éléments est l'inclusion ensembliste  $\subseteq$ ,
- l'infimum de deux éléments  $E_1$  et  $E_2$  est obtenu par l'intersection  $\cap$  des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ ,
- le supremum de deux éléments  $E_1$  et  $E_2$  est obtenu par l'union  $\cup$  des ensembles  $E_1$  et  $E_2$ ,
- le minorant universel est l'ensemble vide  $\emptyset$ ,

– le majorant universel est l'ensemble  $RCC-8$ .

Ce treillis est en fait le treillis associé à l'algèbre de Boole des parties de l'ensemble  $RCC-8$  :  $\langle \mathcal{P}(RCC-8), \cap, \cup, ^c, \emptyset, RCC-8 \rangle$  [Dav 90]. Il en possède donc les propriétés : en particulier,  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  est complété (chaque élément  $E$  du treillis possède un unique complémentaire  $E^c$ ). De plus,  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  contient toutes les parties de  $RCC-8$  et permet donc de représenter la composition de relations de  $RCC-8$  (cf. figure 2.9).

Pour pouvoir exploiter ce treillis, on définit une fonction  $\pi_r$  qui permet d'associer à chacun de ses éléments une relation topologique. La fonction  $\pi_r$  associe à un élément  $E$  du treillis une formule logique définie par la disjonction des éléments de  $E$  (notée  $\pi_r(E)$ ) :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(E)(x,y) =_{def} \bigvee_{r \in E} r(x,y)$$

On note immédiatement que la relation  $\pi_r(E)$  associée au supremum de deux éléments  $E_1, E_2$ , est égale à la disjonction des deux relations  $\pi_r(E_1), \pi_r(E_2)$  :

$$\pi_r(E) = \pi_r(E_1 \cup E_2) = \pi_r(E_1) \vee \pi_r(E_2)$$

De même, la relation  $\pi_r(E')$  associée à l'infimum de  $E_1$  et  $E_2$  est égale à la conjonction des deux relations  $\pi_r(E_1)$  et  $\pi_r(E_2)$ . On démontre également très facilement qu'il y a équivalence entre la complémentarité sur les éléments du treillis et sur les relations associées, soit  $\pi_r(E^c) = (\pi_r(E))^c$ .

On vérifie ensuite que l'ordre défini sur le treillis est équivalent à l'implication sur les relations. En effet, la disjonction  $\pi_r(E)$  associée à un ensemble  $E$  de relations est impliquée par la disjonction  $\pi_r(E')$  associée à un sous-ensemble  $E'$  de  $E$ . On a donc :

$$\forall E, E' \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}} : (E' \subseteq E) \rightarrow (\pi_r(E') \rightarrow \pi_r(E))$$

On démontre la réciproque en utilisant les hypothèses d'exhaustivité et de disjonction sur les relations de  $RCC-8$  : pour tout couple de régions de  $\mathcal{D}^2$ , il existe une unique relation de  $RCC-8$  qui soit vérifiée (cf. annexe).

Finalement on a le théorème suivant pour les éléments du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  :

$$\forall E, E' \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}} : (E' \subseteq E) \leftrightarrow (\pi_r(E') \rightarrow \pi_r(E))$$

Dans [Ran 92a], un treillis identique est exploité pour démontrer des théorèmes sur les relations et plus particulièrement pour faciliter l'inférence de la composition de relations. Il est représenté — pour partie — sur la figure 4.1.

La composition de toutes les relations se déduit en effet de la table présentée figure 2.9 et du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  (ou du treillis présenté figure 4.1). Par exemple, si on a calculé, pour trois régions  $x, y$  et  $z$ , les relations  $PP(x,y)$  et  $EC(y,z)$ , on peut déduire que  $x$  et  $z$  sont liées par la relation  $DR(x,z)$  ( $DR$  est le supremum du couple  $(EC, DC)$  sur le treillis de la figure 4.1) :

$$\begin{aligned} \text{d'après le treillis :} & \quad PP(x,y) = TPP(x,y) \vee NTPP(x,y) \\ \text{d'après la table :} & \quad TPP(x,y) \circ EC(y,z) = DC(x,z) \vee EC(x,z) \\ \text{et :} & \quad NTPP(x,y) \circ EC(y,z) = DC(x,z) \\ \text{donc :} & \quad PP(x,y) \circ EC(y,z) = DC(x,z) \vee EC(x,z) = DR(x,z) \end{aligned}$$

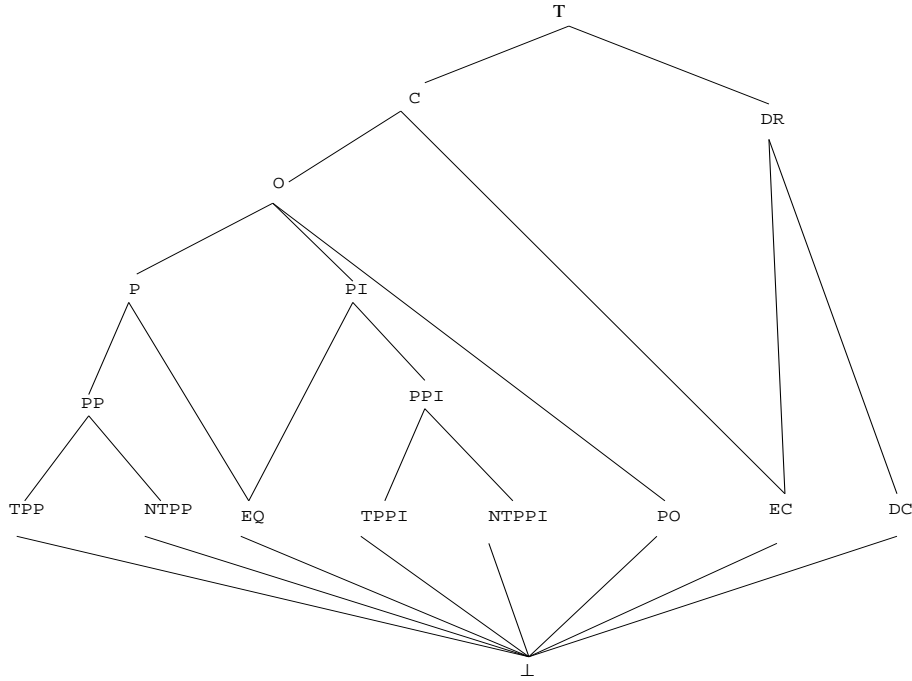


FIG. 4.1 – Le treillis proposé dans [Ran 92a]. Les relations affichées correspondent à des disjonctions d'éléments de *RCC-8*. Ce treillis est complété automatiquement en un treillis booléen afin d'être exploité.

## 4.2 Un treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

### 4.2.1 Construction du treillis

Nous voulons un treillis qui possède les propriétés suivantes : il doit inclure les ensembles *RCC-8* et *CM-8* et doit être ordonné par la relation d'implication entre les relations topologiques de base (les relations de *RCC-8*) et les conditions nécessaires à leur vérification (les conditions de *CM-8*). Nous proposons de construire un tel treillis en utilisant une correspondance de Galois, méthode qui s'appuie sur la donnée d'une relation  $\mathcal{G}$  définie entre deux ensembles. Cette méthode, décrite dans [Bar 70] à l'usage des sciences humaines, est tout à fait semblable à celle utilisée dans le cadre de l'analyse conceptuelle formelle (ACF) [Dav 90] ou de la fouille de données [God 94, Sim 99]. Elle permet d'associer à des objets (ici les parties de l'ensemble des relations *RCC-8*) les ensembles de propriétés qu'ils vérifient (ici les parties de l'ensemble des conditions *CM-8*), et de constituer ainsi des *concepts formels*.

Nous définissons la relation  $\mathcal{G}$  de la façon suivante :

**Définition 2** Soit la relation binaire  $\mathcal{G}$  qui associe à chacune des huit relations topologiques de *RCC-8* l'ensemble des conditions de *CM-8* qui sont vraies entre deux régions lorsque la relation est vraie entre ces deux régions :

$$\mathcal{G} : \begin{array}{ll} RCC-8 & \mapsto \mathcal{P}(CM-8) \\ r & \mapsto \mathcal{G}(r) = \{c \in CM-8 \mid \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2 : r(x,y) \rightarrow c(x,y)\} \end{array}$$

La relation  $\mathcal{G}$  est représentée dans la table 4.2. Notons que l'analyse conceptuelle formelle s'appuie directement sur la donnée de ce type de table [Dav 90]. On définit aussi la



relation réciproque  $\mathcal{G}'$  :

**Définition 3** Soit la relation binaire  $\mathcal{G}'$  qui à chaque condition  $c$  associe l'ensemble des relations de  $RCC-8$  qui impliquent  $c$  :

$$\mathcal{G}' : \begin{array}{l} CM-8 \mapsto \mathcal{P}(RCC-8) \\ c \mapsto \mathcal{G}'(c) = \{r \in RCC-8 \mid \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2 : r(x,y) \rightarrow c(x,y)\} \end{array}$$

	$P$	$Dx$	$P^{-1}$	$Dy$	$DR$	$O$	$NA$	$A$
$EQ$	1	0	1	0	0	1	0	1
$NTPP$	1	0	0	1	0	1	1	0
$TPP$	1	0	0	1	0	1	0	1
$NTPP^{-1}$	0	1	1	0	0	1	1	0
$TPP^{-1}$	0	1	1	0	0	1	0	1
$PO$	0	1	0	1	0	1	0	1
$EC$	0	1	0	1	1	0	0	1
$DC$	0	1	0	1	1	0	1	0

FIG. 4.2 – La relation  $\mathcal{G}$  entre les ensembles  $RCC-8$  (en colonne) et  $CM-8$  (en ligne). La valeur 1 attribuée à une paire  $\{r, c\}$  signifie que si la relation  $r$  est vraie la condition  $c$  l'est également, soit  $c \in \mathcal{G}(r)$ .

Soit  $f$  la fonction qui, à chaque partie  $R$  de  $RCC-8$ , associe l'ensemble des conditions vérifiées par *toutes* les relations de  $R$  :

$$f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(RCC-8) \mapsto \mathcal{P}(CM-8) \\ R \mapsto \bigcap_{r \in R} \mathcal{G}(r) \end{array}$$

Soit  $f'$  la fonction inverse qui, à chaque partie  $C$  de  $CM-8$ , associe l'ensemble des relations de  $RCC-8$  qui impliquent *toutes* les conditions de  $C$  :

$$f' : \begin{array}{l} \mathcal{P}(CM-8) \mapsto \mathcal{P}(RCC-8) \\ C \mapsto \bigcap_{c \in C} \mathcal{G}'(c) \end{array}$$

Ces deux fonctions permettent de définir une fermeture  $h$  de l'ensemble  $RCC-8$  et une fermeture  $h'$  de l'ensemble  $CM-8$ . La fermeture  $h$  est la composée des fonctions  $f$  et  $f'$  et la fonction  $h'$  est la composée des fonctions  $f'$  et  $f$  :

$$h : \begin{array}{l} \mathcal{P}(RCC-8) \mapsto \mathcal{P}(RCC-8) \\ R \mapsto f' \circ f(R) \end{array} \quad h' : \begin{array}{l} \mathcal{P}(CM-8) \mapsto \mathcal{P}(CM-8) \\ C \mapsto f \circ f'(C) \end{array}$$

À partir des fonctions  $h$  et  $h'$  nous pouvons construire un treillis dit « *treillis de Galois* ». La méthode consiste à rechercher, parmi toutes les parties de  $RCC-8$ , les parties qui sont fermées pour la fonction  $h$ , c'est-à-dire qui vérifient  $h(R) = R$ . Soit  $R$  une partie de  $RCC-8$  fermée pour  $h$  et soit  $C = f(R)$  ( $C$  est fermée pour  $h'$ ), le couple  $(C, R)$  est alors un élément du treillis de Galois [Bar 70] et constitue un concept au sens de l'ACF. Les éléments du treillis sont donc des éléments de l'ensemble  $\mathcal{P}(CM-8) \times \mathcal{P}(RCC-8)$ . Le treillis de Galois fondé sur la relation d'implication entre les relations topologiques de la théorie  $RCC-8$  et les conditions de  $CM-8$  se définit alors par :

**Définition 4** Le treillis de Galois  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  fondé sur la relation d'implication entre les relations topologiques de base appartenant à  $RCC-8$  et les conditions appartenant à  $CM-8$  est la structure  $(\mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \sqsubseteq, \frown, \smile, (CM-8, \emptyset), (\emptyset, RCC-8))$  où :

- l'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  des éléments du treillis est l'ensemble des couples  $(C, R)$  tels que  $C$  est une partie de  $CM-8$  fermée pour  $h'$ ,  $R$  est une partie de  $RCC-8$  fermée pour  $h$  et  $C = f(R)$  (ou de manière équivalente  $R = f'(C)$ ),
- l'ordre  $\sqsubseteq$  entre deux éléments du treillis  $(C_1, R_1)$  et  $(C_2, R_2)$  est défini par :

$$(C_1, R_1) \sqsubseteq (C_2, R_2) \leftrightarrow \begin{cases} C_2 \subseteq C_1 \\ R_1 \subseteq R_2 \end{cases}$$

où  $\subseteq$  est l'inclusion ensembliste,

- le supremum  $\smile$  de deux éléments est défini par :

$$(C_1, R_1) \smile (C_2, R_2) = (C_1 \cap C_2, h(R_1 \cup R_2))$$

avec  $\cup$  et  $\cap$  l'union et l'intersection ensemblistes,

- de même, l'infimum  $\frown$  est défini par :

$$(C_1, R_1) \frown (C_2, R_2) = (h'(C_1 \cup C_2), R_1 \cap R_2)$$

- le minorant universel est le couple  $(CM-8, \emptyset)$ ,
- le majorant universel est le couple  $(\emptyset, RCC-8)$ .

Ce treillis de Galois est présenté dans la figure 4.3. Concrètement, il peut être construit en recherchant les « rectangles maximaux » dans la table définissant la relation  $\mathcal{G}$  (figure 4.2) ou en recherchant parmi toutes les parties de  $RCC-8$  celles qui restent identiques par la fonction  $h$ . Par exemple, si on considère la paire  $\{EQ, NTPP\}$  de la table de la figure 4.2, on voit qu'elle est associée à la paire  $\{P, O\}$  de conditions communes. Inversement, si on considère la paire  $\{P, O\}$ , on voit qu'elle est associée au triplet  $\{EQ, NTPP, TPP\}$  de relations. Finalement  $h(\{EQ, NTPP\}) = \{EQ, NTPP, TPP\}$ . Le couple  $(\{P, O\}, \{EQ, NTPP, TPP\})$  est un élément du treillis de Galois, il est représenté par l'élément  $P^1$  sur la figure 4.3. On remarque par ailleurs que tous les singletons de  $\mathcal{P}(RCC-8)$  sont clos pour  $h$ , c'est-à-dire que  $h(\{r\}) = \{r\}$ . Cette construction peut être automatisée [Gué 93]. Nous explicitons les notations des éléments ci-dessous.

#### 4.2.2 Ordre sur le treillis et implication sur les relations

Comme pour le treillis des parties de  $RCC-8$ , nous définissons une fonction qui permet d'associer une relation topologique à un élément du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . La fonction  $\pi_r$  associe à un élément  $(C, R)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  une formule logique définie par la disjonction des éléments de  $R$  (notée  $\pi_r(C, R)$ ):

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(C, R)(x, y) =_{def} \bigvee_{r \in R} r(x, y)$$

Symétriquement, nous introduisons la fonction  $\pi_c$  qui associe à un élément  $(C, R)$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  une formule logique définie par la conjonction des éléments de  $C$ :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \pi_c(C, R)(x, y) =_{def} \bigwedge_{c \in C} c(x, y)$$

---

1. Car  $P = EQ \vee NTPP \vee TPP$ .

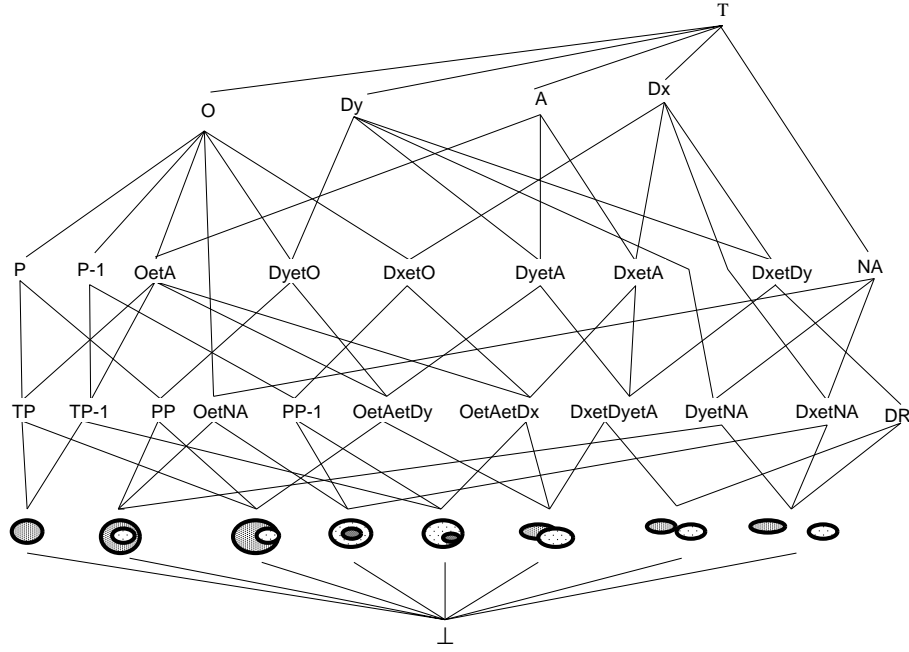


FIG. 4.3 – Le treillis de Galois construit à partir de la table de la figure 4.2. Pour simplifier, les couples  $(C, R)$  sont dénotés par les relations, respectivement les conditions, qui leur sont associées par  $\pi_r$ , respectivement  $\pi_c$ , nommées ou dessinées.

Nous verrons plus loin que les formules résultant de l'application des deux fonctions  $\pi_r$  et  $\pi_c$  sont équivalentes. Ceci nous autorise à désigner indifféremment les éléments du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  comme une conjonction de conditions ou comme une disjonction de relations. Sur la figure 4.3, les éléments du treillis sont dénotés par un nom ou un dessin. Le nom correspond à une conjonction de conditions : par exemple **OetA** dénote l'élément  $(\{O, A\}, R)$  ; ou à une relation topologique : par exemple **PP** dénote l'élément  $(C, \{TPP, NTPP\})^2$  sur la figure 4.3. Les dessins, en bas du treillis, représentent les éléments  $(C, \{r\})$  où  $r$  est une relation de  $RCC-8$ . Dans la suite nous notons  $A$  la condition et **A** l'élément du treillis représentant cette condition (respectivement  $EC$  et **EC** pour les relations topologiques et leur représentation dans le treillis).

Les fonctions  $\pi_c$  et  $\pi_r$  nous permettent également de mettre en évidence le lien entre l'ordre défini sur le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  et l'implication sur les relations et les conditions. En effet on vérifie que, pour toute paire d'éléments de  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  (cf. annexe) :

$$(C_1, R_1) \sqsubseteq (C_2, R_2) \leftrightarrow \begin{cases} \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R_1} r(x, y) \rightarrow \bigvee_{r \in R_2} r(x, y) \\ \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in C_1} c(x, y) \rightarrow \bigwedge_{c \in C_2} c(x, y) \end{cases}$$

### 4.3 Propriétés du treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

Nous nous intéressons ici aux propriétés du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . Nous cherchons à vérifier que le treillis construit à partir de la correspondance de Galois possède bien les propriétés attendues pour résoudre notre problème.

2. Car  $PP = NTPP \vee TPP$ .

### 4.3.1 Caractérisation des éléments du treillis

Les éléments du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  sont des éléments de l'ensemble produit de  $\mathcal{P}(RCC-8)$  et de  $\mathcal{P}(CM-8)$ . Ils sont constitués d'un ensemble de conditions  $C$  et d'un ensemble  $R$  de relations topologiques de base et sont caractérisés par la propriété suivante, qui résulte directement de la façon dont a été construit le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  :

**Propriété 1** *Si un élément  $\mathbf{E} = (C, R)$  est un élément du treillis, alors la relation  $\pi_r(\mathbf{E})$  formée par la disjonction des éléments de  $R$  est équivalente à la condition  $\pi_c(\mathbf{E})$  formée par la conjonction des éléments de  $C$  :*

$$(C, R) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \rightarrow \left( \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in C} c(x, y) \right)$$

Cette propriété nous permet de vérifier qu'une relation formée à partir d'un élément du treillis est bien équivalente logiquement à une conjonction des conditions définies par ce même élément. Ainsi, pour vérifier une relation sur l'image, il suffit de rechercher l'élément du treillis qui la représente et de vérifier les conditions qui lui sont associées. Nous avons également la propriété réciproque (démonstration en annexe) :

**Propriété 2** *Soit  $R$  une partie de  $RCC-8$  et soit  $C$  une partie des éléments de  $CM-8$ . Si la relation formée par une disjonction des relations de  $R$  est équivalente à une conjonction des conditions de  $C$ , alors le couple  $(\bar{C}, R)$ , où  $\bar{C}$  est la fermeture par  $h'$  de  $C$ , est un élément du treillis de Galois :*

$$\left( \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in C} c(x, y) \right) \rightarrow (\bar{C}, R) \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$$

De la propriété 2 on déduit immédiatement la propriété 3 (ci-dessous), en utilisant le fait que chaque relation de  $RCC-8$  est équivalente à une conjonction d'éléments de  $CM-8$  (cf. paragraphe 3.2). Cette propriété peut être également déduite directement de l'examen de la table 4.2 :

**Propriété 3** *Pour tout  $r$  élément de  $RCC-8$ ,  $(f(\{r\}), \{r\})$  est un élément du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ .*

Cette propriété nous permet d'affirmer que les relations topologiques de  $RCC-8$  sont bien représentées dans le treillis. En ce qui concerne les conditions de  $CM-8$  nous avons la propriété suivante :

**Propriété 4** *À toute condition  $c$  de  $CM-8$ , on peut associer un élément du treillis  $\mathbf{E}_c = (C, R)$ , où  $C = h'(\{c\})$  et  $R = f'(\{c\})$ , qui vérifie :*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, c(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{r \in R} r(x, y)$$

*Cet élément est distinct pour chaque condition.*

Cette dernière propriété nous permet de vérifier que les conditions sont effectivement représentées dans le treillis, bien que tous les singletons de  $CM-8$  ne soient pas fermés pour  $h'$ . En particulier on a (cf. figure 4.3) :

- $h'(\{P\}) = \{P, O\}$  et la condition  $P$  est représentée par l'élément :  
 $\mathbf{P} = (\{P, O\}, \{EQ, NTPP, TPP\})$  ;
- $h'(\{P^{-1}\}) = \{P^{-1}, O\}$  et la condition  $P^{-1}$  est représentée par l'élément :  
 $\mathbf{P}^{-1} = (\{P^{-1}, O\}, \{EQ, NTPP^{-1}, TPP^{-1}\})$  ;

- $h'(\{DR\}) = \{DR, Dx, Dy\}$  et la condition  $DR$  est représentée par :  
 $DR = (\{DR, Dx, Dy\}, \{EC, DC\})$ .

Les autres singletons de  $\mathcal{P}(CM-8)$  sont égaux à leur fermeture par  $h'$ , ils sont représentés respectivement par les éléments  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Dy}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Dx}$  et  $\mathbf{NA}$  (de gauche à droite du treillis, figure 4.3).

### 4.3.2 Caractérisation de l'opérateur $\frown$

On montre qu'il y a équivalence entre l'opérateur  $\frown$  sur les éléments du treillis et l'opérateur  $\wedge$  sur les relations (démonstration en annexe) :

**Propriété 5** *Un élément  $\mathbf{E}$  du treillis est l'infimum de deux éléments  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  si et seulement si  $\pi_r(\mathbf{E})$  est égale à la conjonction des deux relations  $\pi_r(\mathbf{E}_1)$  et  $\pi_r(\mathbf{E}_2)$  :*

$$(\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \frown \mathbf{E}_2) \leftrightarrow (\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(\mathbf{E})(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow \pi_r(\mathbf{E}_1)(\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge \pi_r(\mathbf{E}_2)(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

Puisque tout élément  $\mathbf{E}$  du treillis de Galois est tel que la conjonction  $\pi_c(\mathbf{E})$  est équivalente à la disjonction  $\pi_r(\mathbf{E})$ , on déduit immédiatement que :

**Propriété 6** *Soient  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ , trois éléments du treillis de Galois :*

$$(\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \frown \mathbf{E}_2) \leftrightarrow (\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_c(\mathbf{E})(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow \pi_c(\mathbf{E}_1)(\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge \pi_c(\mathbf{E}_2)(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

### 4.3.3 Ensemble minimum de conditions à vérifier pour une relation

Dans le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ , une relation est associée à un ensemble de conditions suffisantes pour sa vérification. Cependant, parmi ces conditions, certaines peuvent n'être pas nécessaires et il convient de les éliminer afin de minimiser les calculs.

Prenons un exemple. Soit la relation  $EQ(x,y)$  «  $x$  est égal à  $y$  ». Pour vérifier  $EQ(x,y)$  il suffit de vérifier les deux conditions  $P(x,y)$  («  $x$  appartient à  $y$  ») et  $P^{-1}(x,y)$  («  $x$  contient  $y$  »). Réciproquement,  $EQ(x,y)$  implique  $P(x,y)$  et  $P^{-1}(x,y)$  mais également les conditions  $A(x,y)$  («  $x$  est tangent à  $y$  ») et  $O(x,y)$  («  $x$  recouvre en tout ou partie  $y$  »), du fait des propriétés de nos régions, qui sont fermées et non vides (voir la figure 4.2). Dans le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ , la relation  $EQ$  est représentée dans l'élément  $\mathbf{EQ} = (\{EQ\}, \{A, O, P, P^{-1}\})$ . La propriété 1 nous donne :

$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, EQ(x,y) \leftrightarrow (A \wedge O \wedge P \wedge P^{-1})(x,y)$$

Or l'infimum des éléments  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^{-1}$  représentant respectivement les conditions  $P$  et  $P^{-1}$  est l'élément  $\mathbf{EQ}$  représentant la relation  $EQ$  (voir figure 4.3). Selon la propriété 6 on a donc :

$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_c(\mathbf{EQ})(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow \pi_c(\mathbf{P})(\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge \pi_c(\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$\text{soit : } \forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, (A \wedge O \wedge P \wedge P^{-1})(x,y) \leftrightarrow (P \wedge P^{-1} \wedge O)(x,y)$$

soit encore (en utilisant la propriété 4) :

$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, EQ(x,y) \leftrightarrow (P \wedge P^{-1})(x,y)$$

Les propriétés de l'opérateur  $\frown$  permettent donc de retrouver l'ensemble minimum des conditions à calculer sur l'image pour vérifier la relation  $EQ$  entre deux objets : cet ensemble minimum est directement lisible sur le treillis.

De la même façon, on trouve pour les autres relations de *RCC-8*:

$$\begin{aligned} \forall(x,y) \in \mathcal{D}^2 : \quad & EC(x,y) \leftrightarrow (A \wedge DR)(x,y) \\ & DC(x,y) \leftrightarrow (NA \wedge DR)(x,y) \\ & PO(x,y) \leftrightarrow (Dx \wedge Dy \wedge O)(x,y) \\ & NTPP(x,y) \leftrightarrow (P \wedge NA)(x,y) \\ & TPP(x,y) \leftrightarrow (P \wedge A \wedge Dy)(x,y) \\ NTPP^{-1}(x,y) \leftrightarrow & (P^{-1} \wedge NA)(x,y) \\ TPP^{-1}(x,y) \leftrightarrow & (P^{-1} \wedge A \wedge Dx)(x,y) \end{aligned}$$

#### 4.3.4 Caractérisation de l'opérateur $\smile$

**Propriété 7** Pour tout couple d'éléments du treillis  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ , le supremum  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \smile \mathbf{E}_2$  est tel que la disjonction des relations  $\pi_r(\mathbf{E}_1)$  et  $\pi_r(\mathbf{E}_2)$  implique la relation  $\pi_r(\mathbf{E}')$ :

$$(\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \smile \mathbf{E}_2) \rightarrow (\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(\mathbf{E}')(x,y) \leftarrow \pi_r(\mathbf{E}_1)(x,y) \vee \pi_r(\mathbf{E}_2)(x,y))$$

Cette propriété est vérifiée car l'ensemble  $R'$  des relations représentées par  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \smile \mathbf{E}_2$  est égal à la fermeture de l'union des deux ensembles  $R_1$  et  $R_2$  des relations représentées par  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ . Par là même, on montre qu'il n'y a pas toujours équivalence entre  $\pi_r(\mathbf{E}')$  et  $\pi_r(\mathbf{E}_1) \vee \pi_r(\mathbf{E}_2)$ . Ceci s'exprime dans le treillis par le fait qu'un élément peut être le supremum de plusieurs couples. On peut avoir à la fois :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \smile \mathbf{E}_2 : \pi_r(\mathbf{E}_1) \vee \pi_r(\mathbf{E}_2) &\rightarrow \pi_r(\mathbf{E}') \\ \mathbf{E}' = \mathbf{E}_3 \smile \mathbf{E}_4 : \pi_r(\mathbf{E}_3) \vee \pi_r(\mathbf{E}_4) &\rightarrow \pi_r(\mathbf{E}') \\ \text{et } \pi_r(\mathbf{E}') &\rightarrow \pi_r(\mathbf{E}_1) \vee \pi_r(\mathbf{E}_2) \vee \pi_r(\mathbf{E}_3) \vee \dots \end{aligned}$$

Nous prenons pour exemples les éléments  $\mathbf{TP}$  et  $\mathbf{TP}^{-1}$  qui ont pour supremum l'élément  $\mathbf{OetA}$ , qui est également supremum des éléments  $\mathbf{OetAetDx}$  et  $\mathbf{OetAetDy}$  (voir figure 4.3). Cette propriété est à relier à une propriété des ensembles fermés, à savoir que, généralement, le supremum de deux fermés n'est pas fermé, alors que leur infimum est toujours fermé [Bar 70].

La réciproque de la propriété 7 n'est pas vraie dans le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ ; d'un élément  $\mathbf{E}'$  qui est tel qu'il existe deux éléments  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  tels que :

$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(\mathbf{E}')(x,y) \leftarrow \pi_r(\mathbf{E}_1)(x,y) \vee \pi_r(\mathbf{E}_2)(x,y)$$

on pourra simplement dire qu'il est supérieur au supremum des deux éléments  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ .

#### 4.3.5 Complémentaire d'une relation et complémentaire d'un élément du treillis $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

Notons tout d'abord que, contrairement aux éléments du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ , les éléments du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  n'admettent pas un complémentaire unique. Par exemple l'élément  $\mathbf{NA}$  a pour complémentaires  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{OetA}$  (cf. figure 4.3). Deux éléments  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  sont complémentaires si et seulement si leur infimum est égal au minorant universel  $\perp = (CM-8, \emptyset)$  et leur supremum au majorant universel  $\top = (\emptyset, RCC-8)$ .

D'après les propriétés 5 et 7, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(\perp)(x,y) &\leftrightarrow \pi_r(\mathbf{E})(x,y) \wedge \pi_r(\mathbf{F})(x,y) \\ \forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \pi_r(\top)(x,y) &\leftarrow \pi_r(\mathbf{E})(x,y) \vee \pi_r(\mathbf{F})(x,y) \end{aligned}$$

La conjonction des relations associées à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  est donc toujours fautive : ces relations sont disjointes. Sur la disjonction, on ne peut pas conclure, les relations  $\pi_r(\mathbf{E})$  et  $\pi_r(\mathbf{F})$  ne

sont pas forcément exhaustives et donc complémentaires (cf. paragraphe 2.3). Par exemple, les éléments  $\mathbf{OetA}$  et  $\mathbf{NA}$  sont complémentaires, mais leurs relations  $\pi_r(\mathbf{OetA}) = TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ \vee PO$  et  $\pi_r(\mathbf{NA}) = NTPP \vee NTPP^{-1} \vee DC$  ne le sont pas. En revanche  $\mathbf{A}$  est également un complémentaire de  $\mathbf{NA}$  et les deux relations associées sont complémentaires :  $\pi_r(\mathbf{A}) = TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ \vee PO \vee EC$ .

Inversement soient deux éléments  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  du treillis  $\mathcal{T}_G$  tels que les relations associées sont complémentaires. On a alors  $(\pi_r(\mathbf{E}) \vee \pi_r(\mathbf{F}))(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  toujours vrai et  $(\pi_r(\mathbf{E}) \wedge \pi_r(\mathbf{F}))(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  toujours faux. On vérifie que  $\mathbf{E} \cup \mathbf{F} = \top$  et  $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \perp$  et donc que les deux éléments  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  sont complémentaires.

Finalement les seuls couples de complémentaires dans le treillis qui sont également complémentaires pour les relations sont les couples d'éléments qui représentent une condition et sa négation. Soit :  $(\mathbf{A}, \mathbf{NA})$ ,  $(\mathbf{O}, \mathbf{DR})$ ,  $(\mathbf{P}, \mathbf{Dx})$ ,  $(\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{Dy})$ . Pour tout couple  $(\mathbf{C}, \mathbf{NC})$  représentant une condition et sa négation, on a donc  $\pi_r(\mathbf{NC})$  et  $\pi_r(\mathbf{C})$  à la fois disjointes et exhaustives. De plus, toute relation représentée par un élément plus petit que  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire telle que  $\pi_r(\mathbf{E})$  implique  $\pi_r(\mathbf{C})$ , est disjointe de  $\pi_r(\mathbf{NC})$ ; symétriquement, toute relation représentée par un élément plus petit que  $\mathbf{NC}$  est disjointe de  $\pi_r(\mathbf{C})$ .

# Chapitre 5

## Comparaison de treillis

### 5.1 Comparaison des deux treillis $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

Pour la conception du système final nous avons besoin d'une représentation par objets des relations topologiques qui permette à la fois de calculer sur l'image et d'inférer les relations entre les régions, et qui ait une taille mémoire raisonnable.

Le treillis booléen  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$  contient  $2^8 = 256$  éléments, ce qui signifie que le concepteur du système doit créer 256 classes de relations dans le système et qu'il doit les gérer. Le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  en revanche ne contient que les éléments représentés sur la figure 4.3, soit 34 éléments.

De plus, nous voulons représenter de manière efficace les conditions utiles au calcul des relations et le lien d'implication entre conditions et relations. Dans le treillis défini uniquement sur des parties de l'ensemble des relations topologiques de base, ce lien n'est pas mis en évidence : les conditions qui permettent de calculer les relations sur l'image n'y apparaissent que de manière implicite, comme disjonctions de relations de *RCC-8*. Le treillis booléen ne permet donc pas facilement de calculer les relations sur des images.

Ce lien peut être naturellement mis en évidence pour le treillis construit à partir de la correspondance de Galois entre les ensembles de relations et de conditions et c'est pourquoi nous avons choisi cette approche.

En revanche, pour pouvoir raisonner sur la composition de relations, le treillis booléen  $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ , qui contient toute les compositions de *RCC-8*, doit être utilisé de préférence au treillis de Galois qui ne contient que les compositions suivantes (voir figure 4.3) :

$$\begin{aligned} DC \vee EC \vee PO \vee TPP \vee NTPP &= \pi_r(\text{Dy}) \\ DC \vee EC \vee PO \vee TPP^{-1} \vee NTPP^{-1} &= \pi_r(\text{Dx}) \\ PO \vee TPP \vee NTPP &= \pi_r(\text{Dy et 0}) \\ PO \vee TPP^{-1} \vee NTPP^{-1} &= \pi_r(\text{Dx et 0}) \\ PO \vee TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ &= \pi_r(\text{0 et A}) \\ NTPP \vee TPP &= \pi_r(\text{PP}) \\ NTPP^{-1} \vee TPP^{-1} &= \pi_r(\text{PP}^{-1}) \\ EC \vee DC &= \pi_r(\text{DR}) \end{aligned}$$

Pour pouvoir raisonner sur la composition des relations et disposer des avantages en matière de calcul des relations apportés par le treillis de Galois  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  nous proposons de l'étendre en y intégrant toutes les compositions de la table de la figure 2.9. C'est ce treillis que nous présentons dans le prochain paragraphe. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons, à



titre de comparaison, le treillis de Galois construit sur les primitives d'Egenhofer [Ege 89], qui sont les plus couramment utilisées dans les systèmes d'informations géographiques.

## 5.2 Extension du treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$

Le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  présenté précédemment n'est pas complété et ne contient pas l'ensemble des relations présentes dans la table de composition. Pour pallier ce défaut, nous avons étendu ce treillis en lui ajoutant les relations qui sont présentes dans la table de composition de la figure 2.9, mais qui ne sont pas représentées dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . Ces relations sont :

1.  $EC \vee PO \vee NTPP \vee TPP$
2.  $EC \vee PO \vee NTPP^{-1} \vee TPP^{-1}$
3.  $DC \vee EC \vee PO \vee TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ$

### 5.2.1 Construction

Nous avons construit le treillis étendu  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}\mathcal{E}}$  progressivement en essayant d'intégrer chaque relation manquante, à la façon classique de la construction incrémentale de treillis [Mis 89, Car 93, God 95]. Cette intégration se fait en deux étapes :

- insertion de la relation en recherchant toutes les implications avec les relations déjà présentes dans le treillis.
- ajout d'un infimum et d'un supremum pour les couples n'en possédant plus.

Concrètement, l'ajout des relations manquantes s'est fait manuellement et de la manière suivante. Pour les deux premières relations, la recherche des implications avec les relations déjà présentes dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  est assez simple (voir figure 4.3) :

$$\begin{aligned}
EC \vee PO \vee NTPP^{-1} \vee TPP^{-1} &\rightarrow \pi_r(\mathbf{Dx}) \\
EC \vee PO \vee NTPP^{-1} \vee TPP^{-1} &\leftarrow \pi_r(\mathbf{DxetA}) \\
EC \vee PO \vee NTPP^{-1} \vee TPP^{-1} &\leftarrow \pi_r(\mathbf{Dxet0}) \\
EC \vee PO \vee NTPP \vee TPP &\rightarrow \pi_r(\mathbf{Dy}) \\
EC \vee PO \vee NTPP \vee TPP &\leftarrow \pi_r(\mathbf{Dyeta}) \\
EC \vee PO \vee NTPP \vee TPP &\leftarrow \pi_r(\mathbf{Dyeto})
\end{aligned}$$

La relation  $EC \vee PO \vee NTPP^{-1} \vee TPP^{-1}$  se place donc « entre » les éléments  $\mathbf{Dx}$  (en haut),  $\mathbf{DxetA}$  et  $\mathbf{Dxet0}$  (en bas) tandis que la relation  $EC \vee PO \vee NTPP \vee TPP$  se place « entre » les éléments  $\mathbf{Dy}$  (en haut),  $\mathbf{Dyeta}$  et  $\mathbf{Dyeto}$  (en bas). La relation  $EC \vee PO \vee NTPP^{-1} \vee TPP^{-1}$  est figurée par l'élément  $\mathbf{Dxet-Aou0-}$  et la relation  $EC \vee PO \vee NTPP \vee TPP$  par l'élément  $\mathbf{Dyeta-Aou0-}$  dans la figure 5.2. La structure de treillis est conservée, nous n'avons pas besoin d'ajouter d'autres relations.

Pour la troisième relation, nous obtenons les implications suivantes avec les relations déjà présentes dans le treillis :

$$\begin{aligned}
DC \vee EC \vee PO \vee TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ &\leftarrow \pi_r(\mathbf{A}) \\
DC \vee EC \vee PO \vee TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ &\leftarrow \pi_r(\mathbf{DxetDy}) \\
DC \vee EC \vee PO \vee TPP \vee TPP^{-1} \vee EQ &\rightarrow \top
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute cette relation, figurée par l'élément  $\mathbf{Aou-DxetDy-}$ , au-dessus de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{DxetDy}$ , nous perdons la structure de treillis, car (voir figure 5.1) :

- le couple d'éléments  $(\mathbf{Dyeta}, \mathbf{DxetDy})$  possède alors deux supremums, les éléments  $\mathbf{Aou-DxetDy-}$  et  $\mathbf{Dy}$ ,

- il en va de même pour le couple d'éléments  $(DxetA, DxetDy)$  qui admet pour supremums les éléments  $Aou-DxetDy-$  et  $Dx$ .

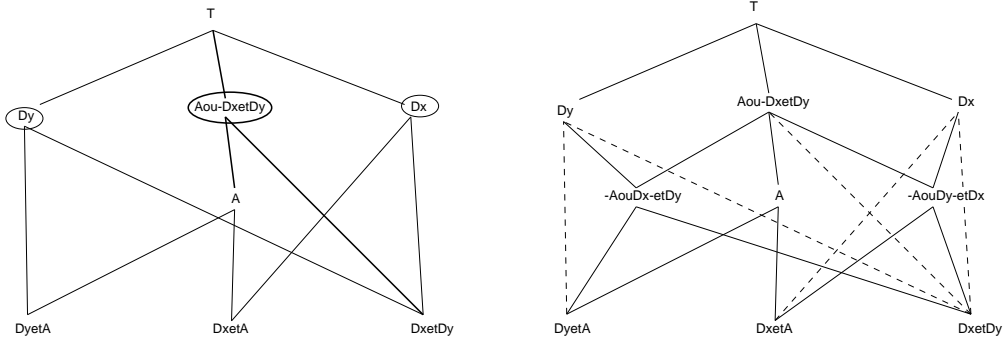


FIG. 5.1 – *Gauche* : ajout de l'élément  $Aou-DxetDy-$  au treillis  $\mathcal{T}_G$  (vue partielle). Sont entourés les supremums des couples  $(DyetA, DxetDy)$  et  $(DxetA, DxetDy)$ . *Droite* : ajout des éléments  $-AouDx-etDy$  et  $-AouDy-etDx$  pour rétablir la structure du treillis. Les lignes tireées disparaissent.

Afin d'obtenir à nouveau une structure de treillis, nous devons donc ajouter les éléments  $-AouDx-etDy$  et  $-AouDy-etDx$  (figure 5.1). Nous obtenons alors le treillis comprenant toutes les relations nécessaires pour représenter la composition des relations, pour les relations de  $RCC-8$ , et pour toutes les disjonctions des relations de  $RCC-8$ , par distributivité de la composition  $\circ$  par rapport à la disjonction  $\vee$ . Le treillis  $\mathcal{T}_{G\mathcal{E}}$  ainsi construit est présenté dans la figure 5.2.

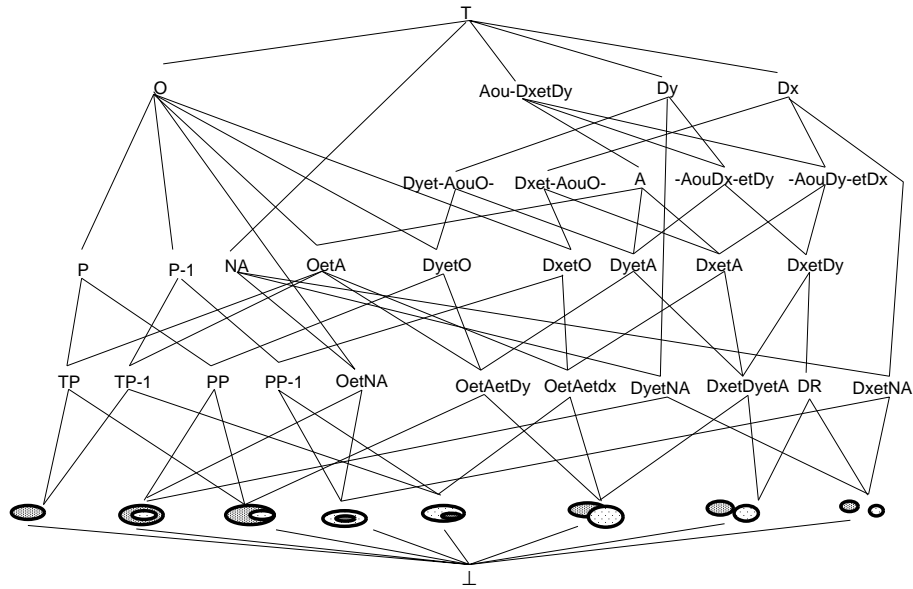


FIG. 5.2 – Le treillis  $\mathcal{T}_{G\mathcal{E}}$ , extension du treillis  $\mathcal{T}_G$  pour la composition de relations.

Finalement nous avons ajouté cinq éléments au treillis  $\mathcal{T}_G$  pour construire  $\mathcal{T}_{G\mathcal{E}}$ . Ces cinq éléments correspondent aux cinq parties de  $RCC-8$  suivantes :

1.  $Dyet-Aou0-$ :  $(EC, PO, NTPP, TPP)$
2.  $Dxet-Aou0-$ :  $(EC, PO, NTPP^{-1}, TPP^{-1})$

3. **Aou-DxetDy**:  $(DC, EC, PO, TPP, TPP^{-1}, EQ)$
4. **-AouDy-etDx**:  $(DC, EC, PO, TPP^{-1})$
5. **-AouDx-etDy**:  $(DC, EC, PO, TPP)$

### 5.2.2 Comparaison du treillis de Galois $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ et du treillis étendu $\mathcal{T}_{\mathcal{G}\varepsilon}$

Si l'on veut une représentation des relations qui permette à la fois le calcul et l'inférence, l'alternative se situe donc entre le treillis de Galois et le treillis de Galois étendu. Ce dernier paraît préférable, car il comprend toutes les relations nécessaires à la composition des relations et permet donc d'inférer toutes les relations possibles à partir des relations calculées. De plus, le treillis de Galois étendu contient un nombre raisonnable d'éléments et peut être géré correctement dans un système de représentation de connaissances par objets.

Toutefois, il faut noter que l'ordre du treillis étendu est distinct de celui du treillis de Galois, qui est défini par la relation d'inclusion sur les parties de  $RCC-8$  et sur les parties de  $CM-8$  (cf. définition 4). En effet, l'extension du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  est fondée sur l'implication entre relations, qui est équivalente à l'inclusion sur les parties de  $RCC-8$ , comme nous l'avons vu précédemment. Mais rien n'est dit sur les parties de  $CM-8$ , d'autant que les relations ajoutées ne peuvent être associées à des ensembles de conditions de la même manière que les relations représentées dans les éléments du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ . Autrement dit, si on se réfère à l'analyse conceptuelle formelle, les éléments ajoutés ne correspondent pas à des concepts. On ne peut donc conserver l'ordre  $\sqsubseteq$  tel qu'il est défini dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ .

De ce fait, contrairement au treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ , le treillis étendu ne permet pas de calculer un ensemble minimum de conditions pour vérifier toute relation : les relations ajoutées lors de l'extension ne sont pas équivalentes à une conjonction de conditions. Par exemple, considérons l'élément du treillis étendu appelé **Dxet-Aou0-**. Comme il est placé entre les éléments **DxetA** et **Dx** du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  (cf. figures 4.3 et 5.2), son ensemble de conditions  $C$  serait tel que (selon l'ordre du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ ) :

$$\{Dx, A\} \subset C \subset \{Dx\}$$

ce qui est impossible. Notons pour finir que les cinq relations ajoutées dans  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}\varepsilon}$  ne sont pas « naturelles », au sens où elles ne sont pas *dites* par les experts, et qu'elles ne seront donc *a priori* pas utilisées (calculées) directement dans le cadre d'un système à bases de connaissances, fondé sur une expertise humaine. Elles ne serviront que dans le cadre d'inférences réalisées par le système.

## 5.3 Un treillis de Galois avec d'autres primitives

### 5.3.1 Construction

Nous avons étudié la possibilité d'utiliser, à la place de nos primitives, les primitives proposées dans [Ege 93], qui sont plus classiques dans les systèmes d'informations géographiques (SIG). Nous appelons  $CE-8$  l'ensemble des huit conditions définies par ces primitives (cf. paragraphe 3.2).

Tout d'abord nous nommons ces conditions afin de faciliter la comparaison des deux approches. Quatre des conditions de  $CE-8$  sont les mêmes que les nôtres : il s'agit de  $DR$ ,  $O$ ,  $NA$  et  $A$ , qui sont fondées sur les primitives d'intersection des ensembles des points intérieurs d'une part et des ensembles des points frontières d'autre part. Les quatre autres conditions sont fondées sur les primitives d'intersection entre un ensemble de points intérieurs et un ensemble de points frontières. Nous les nommons de la façon suivante :

$\partial x \cap y^\circ = \emptyset$	est notée	<i>NFO</i>
$\partial x \cap y^\circ \neq \emptyset$	est notée	<i>FO</i>
$x^\circ \cap \partial y = \emptyset$	est notée	<i>NOF</i>
$x^\circ \cap \partial y \neq \emptyset$	est notée	<i>OF</i>

Nous avons donc construit un deuxième treillis en utilisant la correspondance de Galois entre les ensembles *RCC-8* et *CE-8*. La relation  $\mathcal{G}$  entre ces deux ensembles est présentée sur la figure 5.3.

	<i>DR</i>	<i>O</i>	<i>NA</i>	<i>A</i>	<i>NFO</i>	<i>FO</i>	<i>NOF</i>	<i>OF</i>
<i>DC</i>	1	0	1	0	1	0	1	0
<i>EC</i>	1	0	0	1	1	0	1	0
<i>PO</i>	0	1	0	1	0	1	0	1
<i>TPPI</i>	0	1	0	1	1	0	0	1
<i>TPP</i>	0	1	0	1	0	1	1	0
<i>NTPP</i>	0	1	1	0	0	1	1	0
<i>NTPPI</i>	0	1	1	0	1	0	0	1
<i>EQ</i>	0	1	0	1	1	0	1	0

FIG. 5.3 – La relation  $\mathcal{G}$  entre les relations de *RCC-8* et les conditions de Egenhofer.

Le treillis obtenu, nommé  $\mathcal{T}_G'$ , est constitué d'éléments  $(C, R)$  composés d'un ensemble  $R$  de relations de *RCC-8* et d'un ensemble  $C$  de conditions de *CE-8*. Il est présenté à la figure 5.4. La représentation des éléments est similaire à celle utilisée pour le treillis  $\mathcal{T}_G$  : un élément est dénoté par un nom ou un dessin de relation, ou par un nom ou une conjonction de noms de conditions.

### 5.3.2 Comparaison des deux treillis de Galois

Du fait de sa construction, le treillis  $\mathcal{T}_G'$  possède les mêmes propriétés que le treillis  $\mathcal{T}_G$  que nous avons étudié précédemment. Il s'en distingue toutefois par les conditions utilisées et par les ensembles de relations représentés.

En ce qui concerne les conditions, nous observons que cinq d'entre elles se trouvent représentées directement sous le  $\top$  du treillis. Il s'agit des éléments **A**, **O**, **NA**, **NFO**, **NOF** dont l'ensemble  $C = \{c\}$  est égal à sa fermeture par la fonction  $h'$  :

$$\forall c \in \{A, O, NA, NOF, NFO\}, h'(\{c\}) = \{c\}$$

Les autres conditions se comportent de la façon suivante par  $h'$  :

$$\begin{aligned} h'(\{OF\}) &= \{OF, O\} & \text{et } OF(x, y) &\leftrightarrow OF(x, y) \wedge O(x, y) \\ h'(\{FO\}) &= \{FO, O\} & \text{et } FO(x, y) &\leftrightarrow FO(x, y) \wedge O(x, y) \\ h'(\{DR\}) &= \{DR, NOF, NFO\} & \text{et } DR(x, y) &\leftrightarrow DR(x, y) \wedge NOF(x, y) \wedge NFO(x, y) \end{aligned}$$

Nous comparons maintenant le nombre de conditions à calculer pour la vérification des relations pour les deux treillis de Galois  $\mathcal{T}_G'$  et  $\mathcal{T}_G$ . La table de la figure 5.5 montre le nombre de conditions nécessaires à la vérification des relations, pour toutes les relations créées par les deux treillis. La première colonne donne les ensembles de relations représentés dans les treillis. Les deux colonnes suivantes donnent les noms des éléments correspondants dans chacun des treillis (respectivement **E'** pour  $\mathcal{T}_G'$  et **E** pour  $\mathcal{T}_G$ ) et les deux dernières colonnes

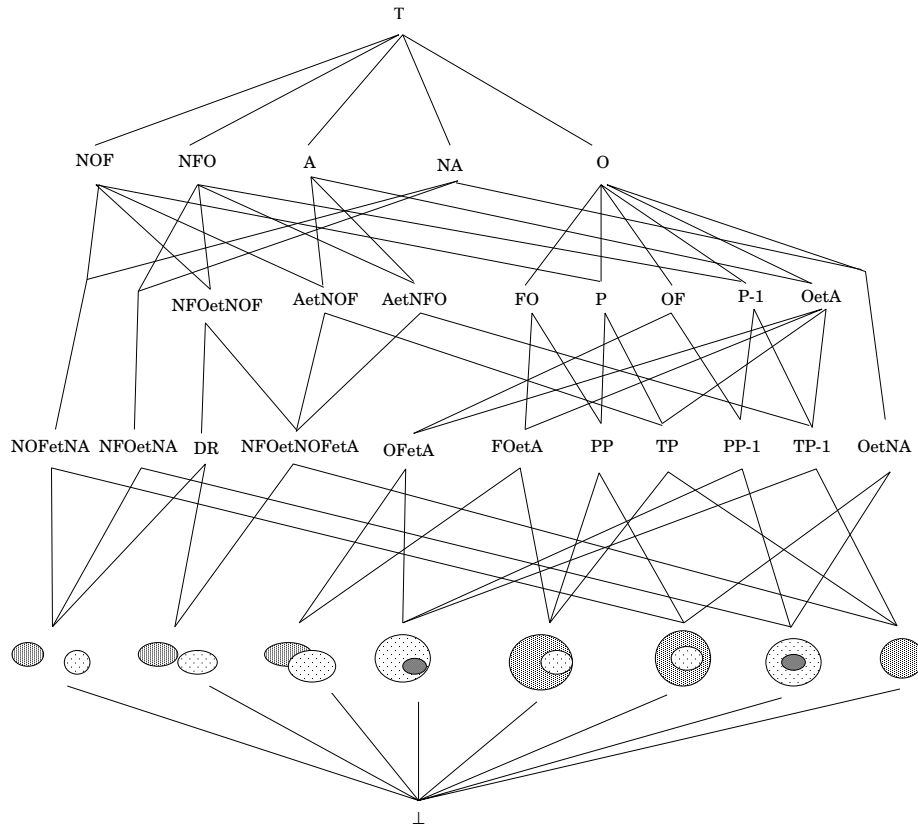


FIG. 5.4 – Le treillis de Galois construit à partir des primitives de Egenhofer.

le nombre de conditions à calculer (respectivement  $n'$  et  $n$ ). Sur le haut du tableau se trouvent les ensembles de relations qui sont représentés dans les deux treillis, puis ceux qui sont représentés uniquement dans  $\mathcal{T}_G'$  et enfin ceux qui sont représentés uniquement dans  $\mathcal{T}_G$ .

On remarque sur cette table que le calcul d'une même relation peut faire appel à un nombre différent de conditions dans les deux treillis : par exemple, pour vérifier la relation  $EQ$ , le treillis  $\mathcal{T}_G$  fait appel à la paire de conditions  $\{P, P^{-1}\}$  tandis que le treillis  $\mathcal{T}_G'$  fait appel au triplet  $\{O, NFO, NOF\}$ . On notera que les conditions  $P$  et  $P^{-1}$  correspondent aux paires  $\{O, NFO\}$  et (respectivement)  $\{O, NOF\}$ . À l'inverse, pour vérifier la relation  $PO$  le treillis  $\mathcal{T}_G$  fait appel à trois conditions,  $Dx$ ,  $Dy$  et  $A$ , tandis que dans le treillis  $\mathcal{T}_G'$ , la paire  $\{FO, OF\}$  est suffisante.

En moyenne, sur les relations communes ou non, la vérification des relations fait appel au même nombre de conditions dans les deux treillis. Le choix entre les deux treillis ne s'effectue donc pas en termes d'optimisation du calcul des relations mais bien en termes de choix des primitives de calcul : il faut choisir entre les primitives proposées par Egenhofer, et celles que nous proposons, en fonction des objets sur lesquels portent ces primitives. Il peut être préférable d'effectuer l'intersection d'une frontière et d'un intérieur ( $\partial x \cap y^\circ$ ,  $x^\circ \cap \partial y$ ), ou bien la différence de deux ouverts ( $x^\circ - y^\circ$ ,  $y^\circ - x^\circ$ ), selon le cas. Pour ce qui nous concerne, et compte tenu de la définition de la frontière que nous avons adoptée, la deuxième solution nous paraît être la meilleure.

$R$	$E'$	$E$	$n'$	$n$
$\{DC\}$	DC	DC	2	2
$\{EC\}$	EC	EC	2	2
$\{PO\}$	PO	PO	2	3
$\{TPP^{-1}\}$	$TPP^{-1}$	$TPP^{-1}$	3	3
$\{TPP\}$	TPP	TPP	3	3
$\{NTPP\}$	NTPP	NTPP	2	2
$\{NTPP^{-1}\}$	$NTPP^{-1}$	$NTPP^{-1}$	2	2
$\{EQ\}$	EQ	EQ	3	2
$\{DC, EC\}$	DR	DR	1	1
$\{DC, NTPP\}$	NOFetNA	DyetaA	2	2
$\{DC, NTPP^{-1}\}$	NFOetaA	DxetaA	2	2
$\{PO, TPP^{-1}\}$	OFetaA	OetaAetDx	2	3
$\{PO, TPP\}$	FOetaA	OetaAetDy	2	3
$\{TPP, NTPP\}$	PP	PP	2	2
$\{TPP, EQ\}$	TP	TP	3	2
$\{TPP^{-1}, NTPP^{-1}\}$	$PP^{-1}$	$PP^{-1}$	2	2
$\{TPP^{-1}, EQ\}$	$TP^{-1}$	$TP^{-1}$	3	2
$\{NTPP, NTPP^{-1}\}$	OetaNA	OetaNA	2	2
$\{DC, NTPP, NTPP^{-1}\}$	NA	NA	1	1
$\{PO, TPP, NTPP\}$	FO	DyetaO	1	2
$\{PO, TPP^{-1}, NTPP^{-1}\}$	OF	DxetaO	1	2
$\{TPP, NTPP, EQ\}$	P	P	2	1
$\{TPP^{-1}, NTPP^{-1}, EQ\}$	$p^{-1}$	$p^{-1}$	2	1
$\{TPP, TPP^{-1}, EQ, PO\}$	OetaA	OetaA	2	2
$\{TPP, TPP^{-1}, EQ, PO, EC\}$	A	A	1	1
$\{TPP, NTPP, TPP^{-1}, NTPP^{-1}, EQ, PO\}$	O	O	1	1
$\{EC, EQ\}$	NFOetaNOFetaA		3	
$\{EC, EQ, TPP\}$	AetaNOF		2	
$\{EC, EQ, TPP^{-1}\}$	AetaNFO		2	
$\{EC, EQ, DC\}$	NFOetaNOF		2	
$\{EC, EQ, DC, TPP, NTPP\}$	NOF		1	
$\{EC, EQ, DC, TPP^{-1}, NTPP^{-1}\}$	NFO		1	
$\{EC, PO\}$		DxetaDyetaA		3
$\{EC, PO, TPP^{-1}\}$		DxetaA		2
$\{EC, PO, TPP\}$		DyetaA		2
$\{EC, PO, DC\}$		DxetaDy		2
$\{EC, PO, DC, TPP^{-1}, NTPP^{-1}\}$		Dx		1
$\{EC, PO, DC, TPP, NTPP\}$		Dy		1

FIG. 5.5 – Comparaison du nombre de conditions à calculer pour chaque ensemble de relations dans les deux treillis de Galois  $\mathcal{T}_G'$  et  $\mathcal{T}_G$  :  $E'$  et  $E$  sont les noms des éléments des deux treillis,  $n'$  et  $n$  les nombres de conditions calculées.



## Chapitre 6

# Reconnaissance de structures spatiales sur images satellitaires

Nous nous plaçons ici dans le cadre des systèmes d'interprétation d'images et nous montrons comment les relations topologiques, et les treillis de relations tels que  $\mathcal{T}_G$ , peuvent être utilisés pour la reconnaissance de structures sur des images satellitaires. À notre connaissance, il n'existe pas de travaux qui s'intéressent à la reconnaissance d'organisations spatiales de territoires sur des images satellitaires. Les travaux les plus proches, portant sur des systèmes à bases de connaissances pour l'interprétation d'images, sont assez anciens : ils sont recensés dans [Nie 89, Har 93, Cre 97]. Actuellement, les principaux travaux concernent la reconnaissance de structures spatiales bâties (immeubles, routes, aérodromes, etc.) généralement sur photographies aériennes [Cha 96], ou la reconnaissance d'objets variés (tables et chaises dans [Gir 97], objets biologiques mais aussi souris informatiques dans [Wen 98]). Ces systèmes utilisent des modèles géométriques des objets à reconnaître ou des paramètres unaires (niveau de gris, surface, forme des objets, etc.). Ils utilisent également certaines informations spatiales, telles que les relations de colinéarité, parallélisme, proximité ou adjacence entre primitives de l'image (segments et régions) : par exemple, dans [Gir 97], les relations spatiales décrites entre les objets à reconnaître (chaise, table, téléphone) sont utilisées pour focaliser la reconnaissance. Dans [Wen 98], la reconnaissance se fonde sur des relations d'inclusion entre régions de l'image. Les relations de la théorie RCC-8 sont utilisées dans [Kaw 94] pour décrire la position et suivre la dynamique d'objets (des groupes de footballeurs) sur une image.

Comme dans ce dernier travail, la question de la classification des organisations spatiales agricoles sur les cartes d'occupations du sol se pose davantage en termes de reconnaissance de relations spatiales que de reconnaissance d'objets : en effet, comme nous allons le voir ci-dessous, les modèles d'organisations à reconnaître sont essentiellement définis par des relations spatiales qualitatives entre des entités spatiales déjà reconnues sur les cartes (les occupations du sol).

### 6.1 Problématique agronomique

L'image sur laquelle nous travaillons est une image raster issue de données multi-dates du satellite LANDSAT TM. Elle est constituée de régions étiquetées qui sont affectées d'une couleur repérant une occupation du sol (occupations agricoles, bâti, forêt). Chaque région est constituée d'un ensemble connexe de pixels ; un pixel représente  $90\text{m}^2$  au sol. La figure 6.1 donne un extrait de l'image correspondant à un territoire villageois : on y voit des forêts (gris sombre), un village (blanc) ; le fond du territoire est principalement



constitué de prairies avec quelques cultures (gris moyens) ; les taches noires correspondent à des occupations non reconnues [LeB 93, Bac 95].



FIG. 6.1 – *Un territoire villageois extrait de l'image ; le territoire non considéré est en noir.*

Les modèles à reconnaître sur l'image, que nous appellerons modèles agronomiques dans la suite, sont des modèles d'organisations spatiales de territoires villageois. Ils sont au nombre de cinq et se déclinent au long des reliefs lorrains : vallée, rebord de côte, bas de côte, plaine, plateau [Def 90, Man 95]. Ils sont décrits par un ensemble d'entités spatiales qui les constituent ; ces entités sont elles-mêmes définies par des caractères de forme, de surface, etc. et par les relations spatiales qu'elles entretiennent les unes avec les autres, ou avec le territoire qui les englobe. Par exemple le modèle « vallée » (cf. figure 6.2) se caractérise par la présence de deux forêts de part et d'autre du territoire, par la position des prairies au centre du territoire et des cultures en bordure des forêts. Ainsi, les éléments à extraire de l'image sont de différents ordres : des entités spatiales agricoles ou non (cultures, prairies, forêts, bâtis), des entités complexes (territoires villageois, zones, îlots de cultures), des relations spatiales qualitatives (distance, topologie, orientation), des surfaces, des formes, etc.

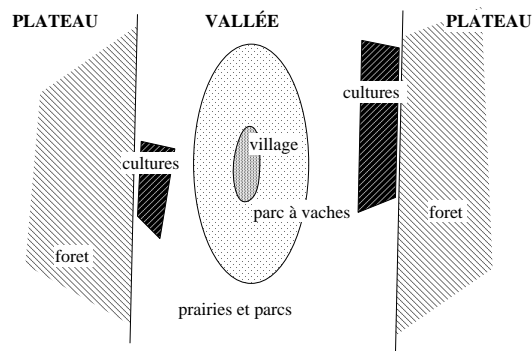


FIG. 6.2 – *Modèle « vallée » d'un territoire villageois.*

À la fin d'une première étape d'acquisition de connaissances auprès de l'expert agronome [LeB 98, Man 98], nous avons défini un *lexique* des modèles agronomiques à reconnaître : chaque modèle s'exprime comme un ensemble d'énoncés formés des éléments de ce

lexique ; à chaque élément du lexique est associé une méthode d'extraction sur l'image. Par exemple, un modèle agronomique peut être décrit de la façon suivante :

*les cultures qui font partie du territoire sont des grosses cultures,  
toutes les forêts domaniales sont déconnectées du territoire,  
le bâti (village) est connexe à au moins une prairie,  
il existe au plus un îlot de cultures qui soit partie tangentielle du territoire.*

Les termes *culture*, *grosse culture*, *forêt domaniale* représentent des entités spatiales qu'on peut directement extraire de l'image ; *partie de*, *déconnecté*, *connexe* sont des relations spatiales qu'on peut vérifier sur l'image, de même que les expressions *toutes*, *au moins*, *au plus*. Le terme *îlot de cultures* représente une entité spatiale complexe, composée de différentes entités spatiales (des cultures) reliées entre elles. Nous verrons dans les parties suivantes comment nous avons représenté ces différents éléments (entités spatiales, relations et quantificateurs) afin d'aboutir à la reconnaissance des modèles agronomiques sur les images.

## 6.2 Problématique de représentation

Nous voulons construire un système d'aide à la reconnaissance et à la classification de paysages agricoles. Au vu des éléments énoncés dans la partie précédente, ce système doit contenir : une représentation des modèles agronomiques à reconnaître ; une représentation des éléments qui composent ces modèles (entités spatiales, relations spatiales, quantificateurs) ; des méthodes d'extraction de ces différents éléments sur l'image ; une méthode de mise en correspondance des éléments et des modèles, qui est *une méthode de classification*.

Ces nécessités nous ont conduits à choisir comme cadre de développement un système de RCO qui combine programmation et représentation de connaissances [Car 95, Cho 96]. Nous avons choisi le système Y3 [Duc 91, Mas 89]. Dans cette partie, nous décrivons les propriétés de Y3 intéressantes pour la suite, puis nous donnons les éléments de représentation des connaissances du domaine, entités et structures spatiales.

### 6.2.1 Présentation de Y3

Y3 est un système à objets qui se compose essentiellement du langage hybride YAFOOL et de l'interface YAFEN. En Y3, tout objet, classe ou instance, est un *frame*, constitué d'un ensemble de *slots* représentant aussi bien des attributs que des méthodes. Tout attribut peut être muni de facettes déclaratives ou procédurales. Les premières introduisent le co-domaine (*un*, *des*) et la valeur (*value*) de l'attribut. Les secondes introduisent des réflexes qui spécifient des comportements locaux (*si-possible*, *si-besoin*, *si-ajout*, *si-enlève*). La sémantique des facettes est conforme au modèle de langage de *frames* défini dans [Mas 89]. Attributs, facettes et méthodes sont des objets à part entière. En particulier, les relations (qui sont des attributs particuliers) sont réifiées et héritent d'une classe *RELATION*. Le système de classification ainsi que le mécanisme d'héritage proposés dans YAFOOL sont fondés sur l'unification d'attribut [Duc 91, Nap 92a] : chaque attribut est nommé ; le système teste si l'attribut d'une classe est présent dans l'instance à classer et, si c'est le cas, il teste si la valeur de l'attribut est une instance du co-domaine de l'attribut.

### 6.2.2 Les entités spatiales

Les méthodes d'extraction des entités spatiales sur les images sont diverses : les différentes cultures (maïs, blé, orge, colza, etc.), les forêts, les villages et les prairies sont extraits par des algorithmes d'étiquetage ; les forêts domaniales sont extraites par des opérations

de seuillage de surface sur des objets déjà extraits comme forêt ; toute entité reconnue comme maïs, blé, orge, etc. est également reconnue comme une entité de type culture ; on distingue des grosses et des petites cultures par un seuillage de la surface des entités de type culture ; les territoires villageois sont définis par un diagramme de Voronoï, à partir des barycentres des villages [Man 95, Man 96]. Ces méthodes d'extraction sont écrites en C et doivent — telles quelles — faire partie intégrante du système.

Chaque type d'entité spatiale est représenté par une classe de YAFOOL. Nous avons ainsi défini des classes `BLÉ`, `CULTURE`, `PETITE-CULTURE`, etc. Les méthodes d'extraction sont représentées comme des méthodes des classes correspondantes, en utilisant les propriétés d'héritage. Par exemple, la méthode d'extraction de la classe `FORÊT-DOMANIALE` hérite de la super-méthode de son ascendant `FORÊT` (une méthode d'étiquetage), à laquelle nous avons ajouté un seuillage des surfaces. L'application de cette méthode sur l'image a pour résultat la création d'un ensemble d'instances qui sont rattachées à la classe `FORÊT-DOMANIALE`. Les entités spatiales extraites de l'image sont donc représentées comme des instances, dont les propriétés sont calculées progressivement au cours de la reconnaissance.

### 6.2.3 Les structures spatiales

Les modèles agronomiques à reconnaître correspondent à des structures spatiales, c'est-à-dire à des ensembles d'entités spatiales reliées entre elles par des relations spatiales. Chaque modèle est représenté par une classe, munie d'attributs et de méthodes. Les attributs représentant les relations spatiales sont des instances des sous-classes de la classe `RELATION-SPATIALE` (voir chapitre 7). Nous définissons de cette manière les classes `VALLÉE`, `BAS-DE-CÔTE`, etc. Chaque sous-ensemble des ensembles d'entités spatiales reliées qui constituent ces modèles peut constituer lui-même une structure particulière, typique, que nous appelons *sous-modèle agronomique* et que nous représentons également par une classe. Nous définissons ainsi des classes pour représenter des sous-modèles de territoires : `TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS`, `TERRITOIRE-ÎLOT-CONNEXE-FORÊT`, `TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES`, etc. ; des classes pour représenter des sous-modèles de regroupements de cultures : `ÎLOT`, `ÎLOT-CONNEXE-FORÊT`, etc. On voit sur la figure 6.3 comment les relations spatiales interviennent dans la définition de ces différentes classes, les unes par rapport aux autres ou par rapport aux classes représentant les entités spatiales (`FORÊT`, `TERRITOIRE`).

Les relations topologiques étant organisées dans un treillis, on observe un double mécanisme de spécialisation des sous-modèles agronomiques : ils sont spécialisés *via* la relation (spécialisation des relations topologiques) et *via* l'objet relié (spécialisation du co-domaine de la relation). Ainsi, les classes `TERRITOIRE-ÎLOT-CONNEXE-FORÊT` et `TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES` (figure 6.3) sont toutes les deux une spécialisation de la classe `TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS`, mais la première est spécialisée par l'objet relié (l'attribut `t-cont-i` a pour co-domaine `ÎLOT-CONNEXE-FORÊT`, spécialisation de `ÎLOT`) tandis que la seconde est spécialisée par la relation (l'attribut `t-contt-i` est une instance de `CONTIENT-TANGENTIELLEMENT`, spécialisation de `CONTIENT`). Nous verrons plus loin que cette double spécialisation doit être prise en compte au moment de la reconnaissance des modèles.

Finalement, les modèles et sous-modèles agronomiques sont représentés par des classes tandis que les entités et relations extraites de l'image sont considérées comme des instances : la reconnaissance des modèles s'exprime donc comme une classification d'instances. La classification est dirigée par les propriétés spatiales, car ces propriétés déterminent les sous-modèles qui sont à reconnaître avant le modèle dont ils font partie. Ceci définit une dépendance de classification entre les modèles, qui sera détaillée dans la partie 8.1. Nous en donnons ici simplement un exemple (cf. figure 6.3) : pour associer un territoire à la classe `TERRITOIRE-ÎLOT-CONNEXE-FORÊT`, il faut vérifier qu'il existe au moins une entité ou

```

(defclasse TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS
  (est-un TERRITOIRE)
  (t-cont-i (est-un . CONTIENT)
            (un . ÎLOT)))

(defclasse TERRITOIRE-ÎLOT-CONNEXE-FORÊT
  (est-un TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS)
  (t-cont-i (est-un . CONTIENT)
            (un . ÎLOT-CONNEXE-FORÊT )))

(defclasse TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES
  (est-un TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS)
  (t-contt-i (est-un . CONTIENT-TANGENTIELLEMENT)
            (un . ÎLOT)))

(defclasse ÎLOT-CONNEXE-FORÊT
  (est-un ÎLOT)
  (i-conn-f (est-un . CONNEXE)
            (un . FORÊT)))

```

FIG. 6.3 – *Des exemples de classes YAFOOL des sous-modèles agronomiques. Les attributs t-cont-i, t-contt-i, i-conn-f, etc. représentent les relations entre les différentes classes. Ce sont des instances de classes de relations spatiales (CONNEXE, CONTIENT, etc.). La facette (un . ) introduit le co-domaine de l'attribut.*

une structure spatiale contenue par le territoire et qui peut être reconnue comme instance de la classe ÎLOT-CONNEXE-FORÊT. Ce qui signifie qu'il faut trouver un îlot, c'est-à-dire un regroupement d'entités rattachées à la classe CULTURE, qui soit connexe à une forêt.



# Chapitre 7

## Représentation des relations topologiques

Nous nous intéressons ici à la double nature des relations : ce sont des concepts à part entière, qui ont la particularité de lier d'autres concepts. En tant que concepts, les relations peuvent posséder des propriétés et s'organiser dans une hiérarchie, comme nous l'avons vu précédemment. En tant que lien entre concepts, les relations apparaissent dans des triplets (*concept, relation, concept*) qui ont des propriétés particulières (par exemple une quantification). Le cadre du langage hybride YAFOOL permet de représenter ces deux points de vue sur les relations. Les propriétés intrinsèques des relations (méthodes de vérification, propriétés inter-relations) sont représentées sous forme d'attributs de la classe générique **RELATION-SPATIALE**. Les propriétés des relations considérées comme des liens entre concepts sont représentées sous forme de facettes associées au couple (**CLASSE, relation**).

Pour notre problème, nous avons défini des facettes qui permettent de fixer la cardinalité des relations et de rendre compte ainsi des expressions *tous, au moins, au plus ...* qui apparaissent dans les énoncés agronomiques. Nous avons d'autre part construit une hiérarchie de classes de relations en nous appuyant sur le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  et la correspondance entre un élément **E** du treillis la relation  $R = \pi_r(\mathbf{E})$  : à toute classe de relation correspond un élément du treillis et les classes de relations sont ordonnées comme les éléments correspondants du treillis. Dans la suite, on note de la même façon la classe de relation et l'élément du treillis correspondant.

### 7.1 Une hiérarchie de classes

Nous avons défini une classe générique de relations spatiales qualitatives, nommée **RELATION-SPATIALE**, dont dérivent toutes les classes de relations topologiques [Man 98]. Dans cette classe sont définis des attributs et méthodes qui sont hérités par toutes les classes de relations topologiques (figure 7.1).

Les relations spatiales sont ordonnées comme dans le treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ , on a donc équivalence entre l'ordre de la hiérarchie et l'implication sur les relations. Soit  $\sqsubseteq$  l'ordre de la hiérarchie,  $R_1$  et  $R_2$  deux relations,  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  leurs classes respectives, alors :

$$(\mathbf{R}_1 \sqsubseteq \mathbf{R}_2) \leftrightarrow (\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, R_1(x,y) \rightarrow R_2(x,y))$$

Cela nous permet d'affirmer qu'une relation  $R$  entre deux objets  $x$  et  $y$  (entités spatiales) est vraie si et seulement s'il existe une instance  $\mathbf{r}$  de la classe de cette relation ou d'une classe plus spécialisée et que cette instance est un attribut de l'instance  $\mathbf{x}$  ayant pour valeur

```

(defclasse RELATION-SPATIALE
  (est-un RELATION)
  (complément (un . RELATION-SPATIALE))
  (inverse (un . RELATION-SPATIALE))
  (transitivite
    (methode (RS)
      ... ))
  (incompatible
    (methode (RS)
      (not (pgcd frame* RS)) ))
  (spécialise
    (methode (RS)
      ... ))
  (condition (un . CONDITION))
  (chercher-conditions
    (methode ()
      (let ())...))
  (vérifier-relation
    (methode (O1 O2)
      ... )))

```

FIG. 7.1 – La classe RELATION-SPATIALE en YAFOOL : les attributs représentent les différentes propriétés des relations et les méthodes les méthodes de calcul ou d'inférence associées aux relations.

y. Par exemple, « territoire-1 contient flot-1 » est vrai si l'instance territoire-1 est caractérisée par un attribut contient-1 qui est une instance de la classe CONTIENT et que la valeur de contient-1 est flot-1.

### 7.1.1 Calcul des relations

Pratiquement, l'existence d'une relation entre deux entités spatiales est testée au moyen de la méthode vérifier-relation. Cette méthode teste s'il existe une instance de la relation (ou d'une relation plus spécialisée) liant ces deux entités ou si un ensemble de conditions, calculables sur l'image raster, est vérifié. L'ensemble minimum des conditions à calculer pour vérifier une relation est donné par la méthode chercher-conditions. La méthode incompatible quant à elle teste si deux relations n'ont pas de descendant commun.

La classe RELATION-SPATIALE possède l'attribut condition qui représente l'ensemble des conditions associé à la relation dans le treillis  $\mathcal{T}_G$  (cf. figure 7.1). Sa valeur est obtenue par héritage cumulatif à partir des éléments placés en haut du treillis ( $Dx$ ,  $Dy$ ,  $O$ ,  $NA$ ,  $A$ , voir figure 4.3), sauf dans certaines classes où la valeur de condition est redéfinie par une unique condition (les classes correspondant aux éléments  $P$ ,  $P^{-1}$  et  $DR$ , cf. propriété 4).

Nous avons montré précédemment l'équivalence entre la conjonction  $\wedge$  et l'infimum  $\frown$  (propriété 5) et comment cette propriété nous permet de trouver l'ensemble minimum de conditions à calculer pour vérifier une relation quelconque  $R$ . Nous appliquons cette méthode en utilisant l'attribut condition qui permet de repérer, parmi les ascendants de la classe  $R$ , ceux qui représentent les conditions.

Par exemple, supposons que l'on veuille vérifier la relation  $EQ$  qui correspond à la classe EQ. Cet élément possède un ensemble d'ascendants qui sont tels que la valeur de leur attribut condition est réduite à une unique condition. Il s'agit ici de l'ensemble  $\mathcal{S} = \{P, P^{-1}, A, O\}$ . Les conditions associées sont  $P$ ,  $P^{-1}$ ,  $A$  et  $O$ . Si on considère maintenant les différents éléments de  $\mathcal{S}$  en recherchant leurs descendants communs dans le treillis, on trouve que les deux éléments  $P$  et  $P^{-1}$  ont pour plus grand descendant

commun l'élément **EQ** : l'infimum de ces deux éléments est égal à l'élément **EQ**, et donc la relation  $EQ$  est équivalente à la conjonction des conditions associées :  $EQ \leftrightarrow P \wedge P^{-1}$  (cf. paragraphe 4.3.3).

### 7.1.2 Inférences

La classe **RELATION-SPATIALE** possède aussi les attributs **complément**, **inverse**. L'attribut **complément** donne, pour une relation  $R$ , la relation complémentaire  $R^c$ , quand elle est représentée dans le treillis. Cet attribut est en fait valué pour les classes représentant des conditions (par exemple, figure 7.2, l'attribut **complément** de **0** a pour valeur **DR**). L'attribut **inverse** — ou **lien-inverse** dans la terminologie **YAFOOL** — donne, pour une relation  $R$ , la relation transposée  $R^t$  (cf. paragraphe 2.3). La valeur de l'attribut **inverse** est redéfinie pour chaque classe de relation.

La composition des relations est représentée au moyen d'une méthode nommée **transitivité** définie dans les classes de relations. Cette méthode n'est définie que pour les éléments correspondants aux relations de la théorie RCC-8. Les valeurs retournées par cette méthode sont décrites pour la classe **DC** sur la figure 7.2 : on sait par exemple que la relation  $DC$  composée avec la relation  $EC$  donne la relation  $Dy$  (cf. la table de la figure 2.9 et l'annexe 10.1 pour les équivalences entre relations et conditions).

```
(defclasse 0
  (est-un . RELATION-SPATIALE)
  (inverse (value . 0))
  (complément (value . DR))
  (condition (value . co)))

(defclasse EC
  (est-un . (DR A))
  (inverse (value . EC))
  (transitivité (DC . Dx)(...)))

(defclasse DC
  (est-un . (DR NA))
  (inverse (value . DC))
  (transitivité (DC . Tmaj)
                (EC . Dy)
                (PO . Dy)
                (TPP . Dy)
                (NTPP . Dy)
                (TPP-1 . DC)
                (NTPP-1 . DC)
                (EQ . DC)))
```

FIG. 7.2 – Représentation des propriétés des relations : *inverse*, *complément*, *condition* et *composition*. *Tmaj* correspond au  $\top$  du treillis. Les valeurs des propriétés (introduites par la facette *value*) sont des classes de relations. La facette *est-un* représente la relation de spécialisation entre les classes.

Le calcul de la composition de deux relations quelconques à l'aide de la composition des relations topologiques de base est réalisée de la façon suivante. Chacune des relations représentées dans  $\mathcal{T}_G$  s'exprime comme une disjonction de relations de la théorie RCC-8 : à chaque classe  $E_i$  on peut donc associer un ensemble de descendants  $\mathcal{I}_{E_i}$  où la méthode **transitivité** est définie. Par exemple, la classe **DR** est associée à l'ensemble  $\mathcal{I}_{DR} = \{DC, EC\}$ . Effectuer la composition de deux relations  $R_i = \pi_r(E_i)$  et  $R_j = \pi_r(E_j)$  consiste alors



à appliquer la méthode **transitivité** des éléments de l'ensemble des descendants  $\mathcal{I}_{E_i}$  de l'une à l'ensemble des descendants  $\mathcal{I}_{E_j}$  de l'autre. On obtient ainsi un ensemble de classes qui permet d'obtenir la relation finale, par recherche du plus petit ascendant commun des éléments de cet ensemble.

Par exemple, les ensembles associés à DC et PP sont  $\mathcal{I}_{DC} = \{DC\}$  et  $\mathcal{I}_{PP} = \{TPP, NTPP\}$ . Pour composer DC et PP le système applique la méthode **transitivité** de la classe DC aux classes TPP et NTPP. L'ensemble résultat est  $\{Dy, Dy\}$  dont le supremum est Dy (cf. figure 7.2).

## 7.2 Proposition d'ajout de facettes

Pour pouvoir représenter les éléments du lexique *toutes, au moins* et *au plus* présentés dans la première partie et ainsi permettre la reconnaissance des modèles, nous devons quantifier les relations. Ceci est réalisé dans les logiques de descriptions où les relations correspondent à des instanciations de rôles (voir en annexe et [Nap 97]). Par exemple, nous pouvons représenter les énoncés de la partie 6.1 selon la spécification des logiques de descriptions KRSS [PS 93] :

- *toutes les cultures qui font partie de x sont des grosses cultures.*

En calcul des prédicats, cette implication se traduit par :

$$\forall y, \text{culture}(y) \wedge \text{contient}(x, y) \rightarrow \text{grosse-culture}(y)$$

Dans les logiques de descriptions, cette implication peut se représenter par :

`x = (all (restrict contient culture) grosse-culture)`

- *toutes les forêts domaniales sont déconnectées de x.*

En calcul des prédicats, cette implication se traduit par :

$$\forall y, \text{forêt-domaniale}(y) \rightarrow \text{déconnecté}(x, y)$$

La différence avec la phrase précédente tient à ce que la conclusion porte sur la relation (ici « déconnecté »). L'utilisation habituelle du constructeur **all** prévoit que la conclusion porte sur le type des objets en relation, comme le montre le premier exemple. Une manière de contourner le problème est de considérer une implication  $A \rightarrow B$  comme l'implication contraposée  $\neg B \rightarrow \neg A$ . Nous obtenons ainsi la représentation suivante dans les logiques de descriptions :

`x = (all (not déconnecté)(not forêt-domaniale))`

Notons que cette construction nécessite d'utiliser la négation de rôles, ce qui est peu fréquent en logiques de descriptions [Lut 00].

- *x est connexe à au moins une prairie :*

`x = (at-least 1 connexe prairie)`

- *il existe au plus un îlot de cultures partie tangentielle de x :*

`x = (at-most 1 contient-tangentiellement îlot)`

Nous nous sommes inspirés des logiques de descriptions pour créer quatre facettes, associées au couple (modèle agronomique, relation spatiale), qui nous permettent de représenter ces énoncés en YAFOOL. Ces facettes s'appellent : **c-atleast**, **c-atmost**, **super-range** et **all-role**. Deux facettes ne peuvent pas qualifier un même couple (modèle, relation), sauf si ces facettes sont **c-atmost** et **c-atleast**.

La figure 7.3 présente trois exemples d'utilisation des facettes. Par rapport aux définitions des classes présentées dans la figure 6.3, nous précisons le sens de la propriété

`i-conn-f` au moyen de la facette `c-atleast` : le nombre d'instances de la classe `FORÊT` reliées à une instance de la classe `ÎLOT-CONNEXE-FORÊT` par une instance de `CONNEXE` doit être supérieur ou égal à 1. La propriété `t-cont-i` est spécifiée par la facette `super-range` : toutes les instances de la classe `ÎLOT` qui sont reliées par une instance de `CONTIENT` à une instance de `TERRITOIRE-ÎLOT-CONNEXE-FORÊT` doivent être spécialisées en `ÎLOT-CONNEXE-FORÊT`. Enfin, la propriété `t-dcn-f` de la classe `TERRITOIRE-DÉCONNECTÉ-FORÊT` est précisée par la facette `all-role` qui stipule qu'une instance de cette classe est liée par une instance de `DÉCONNECTÉ` à toutes les instances de `FORÊT`.

```
(defclasse ÎLOT-CONNEXE-FORÊT
  (est-un ÎLOT)
  (i-conn-f (est-un . CONNEXE)
            (c-atleast . 1)
            (un . FORÊT)))

(defclasse TERRITOIRE-ÎLOT-CONNEXE-FORÊT
  (est-un TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS)
  (t-cont-i (est-un . CONTIENT)
            (super-range . ÎLOT)
            (un . ÎLOT-CONNEXE-FORÊT)))

(defclasse TERRITOIRE-DÉCONNECTÉ-FORÊT
  (est-un TERRITOIRE)
  (t-dcn-f (est-un . DÉCONNECTÉ)
           (all-role . t)
           (un . FORÊT)))
```

FIG. 7.3 – Exemple d'utilisation des facettes `c-atleast`, `super-range` et `all-role`.

### 7.3 Sémantique des facettes

Une sémantique est donnée par un domaine d'interprétation  $\Delta_{\mathcal{I}}$  et par une fonction d'interprétation  $\cdot^{\mathcal{I}}$  [Don 96, Duc 96]. La sémantique d'une classe permet de fixer des contraintes sur les instances de cette classe. Une classe étant définie en intension, c'est-à-dire par ses propriétés, sa sémantique est régie par celle des propriétés. Si nous considérons que les propriétés sont des conditions nécessaires et suffisantes, alors l'interprétation d'une classe `C` définie par les propriétés  $p_1 \dots p_n$  est :

$$c^{\mathcal{I}} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} p_i^{\mathcal{I}}$$

La sémantique d'une propriété est donnée par celle des facettes qui la définissent. Si `p` est une propriété de `C` définie par une des quatre facettes que nous avons introduites (cf. figure 7.3), son interprétation est la suivante (avec `p` instance de la relation `R` et `CD` le co-domaine de `p`) :

- la propriété (`c-atleast n R CD`) signifie : pour qu'une entité  $x$  soit reconnue comme une instance de `C`, le nombre d'instances  $y$ , telles que  $y$  est reconnue comme instance du co-domaine `CD` et telle que  $x$  est en relation par `R` avec  $y$  doit être supérieur ou égal à  $n$ . Cette facette correspond au constructeur (`at-least n R CD`) des logiques de descriptions.

$$(c-atleast n R CD)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta_{\mathcal{I}} \mid card\{y \in \Delta_{\mathcal{I}} \mid (x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in CD^{\mathcal{I}}\} \geq n\}$$

- la propriété (**c-atmost**  $n$  **R CD**) signifie symétriquement que le nombre d’instances  $y$  doit être inférieur ou égal à  $n$ . Elle correspond au constructeur (**at-most**  $n$  **R CD**) des logiques de descriptions.

$$(\mathbf{c-atmost} \ n \ \mathbf{R} \ \mathbf{CD})^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta_{\mathcal{I}} \mid \text{card}\{y \in \Delta_{\mathcal{I}} \mid (x,y) \in \mathbf{R}^{\mathcal{I}} \wedge y \in \mathbf{CD}^{\mathcal{I}}\} \leq n\}$$

- la propriété (**all-role** **R CD**) signifie : pour que  $x$  soit reconnue comme une instance de **C**, toutes les instances  $y$  reconnues comme instances du co-domaine **CD** doivent être telles que  $x$  est en relation par **R** avec  $y$ . Intuitivement, cela signifie que toutes les entités du type **CD** doivent être en relation par **R** avec  $x$ . La facette correspond à l’implication inverse du constructeur **all**. Nous devons représenter explicitement cette implication inverse car nous ne possédons ni la négation de concepts ni la négation de relations.

$$(\mathbf{all-role} \ \mathbf{R} \ \mathbf{CD})^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta_{\mathcal{I}} \mid \forall y \in \Delta_{\mathcal{I}} \ : \ y \in \mathbf{CD}^{\mathcal{I}} \rightarrow (x,y) \in \mathbf{R}^{\mathcal{I}}\}$$

- la propriété (**super-range** **R sup-CD CD**) utilise une troisième classe nommée **sup-CD** qui permet de restreindre la quantification universelle. Cette propriété signifie : pour que  $x$  soit reconnue comme une instance de **C**, toutes les instances  $y$  qui sont reconnues comme instances de **sup-CD** et qui sont telles que  $x$  est en relation par **R** avec  $y$  doivent être reconnues comme instance du co-domaine **CD**. La facette **super-range** permet de représenter que, parmi toutes les entités  $y$  qui sont en relation par **R** avec  $x$ , seules celles qui sont instances de **sup-CD** doivent être reconnues comme instances de **CD**. Cette facette correspond à la combinaison des constructeurs **all** et **restrict**.

$$(\mathbf{super-range} \ \mathbf{R} \ \mathbf{sup-CD} \ \mathbf{CD})^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta_{\mathcal{I}} \mid \forall y \in \Delta_{\mathcal{I}} \ : \ (y \in \mathbf{sup-CD}^{\mathcal{I}} \wedge (x,y) \in \mathbf{R}^{\mathcal{I}}) \rightarrow y \in \mathbf{CD}^{\mathcal{I}}\}$$

Il est intéressant de faire le parallèle entre le langage de descriptions qui a été obtenu en Y3 après introduction des nouvelles facettes et la famille des logiques de descriptions  $\mathcal{AL}$  (voir l’annexe ou [Don 96]). Les trois facettes **c-atleast**, **c-atmost** et **super-range**, font intervenir le constructeur **restrict**, qui lui même fait intervenir de façon implicite une négation et une disjonction de concepts définis : (**all** (**restrict**  $r$  **C**) **D**) est une construction équivalente à (**all**  $r$  (**or** (**not** **C**) **D**)) [SS 91]. Le langage de description obtenu en Y3 est donc d’une expressivité et d’une complexité comparable à  $\mathcal{ALC}$  : les algorithmes de détection de relations de subsomption sont PSPACE-complets.

La quatrième facette, **all-role**, fait quant à elle intervenir de façon implicite la négation de rôles. Le constructeur de négation de rôles n’existe pas en général dans les logiques de descriptions standards : il est toutefois répertorié dans la norme KRSS [PS 93] et apparaît sous la forme de « différence de rôles » dans [Cal 96].

Il n’existe pas sur les systèmes de RCO de développements théoriques comparables à ceux qui ont été réalisés sur les logiques de descriptions, que ce soit sur le pouvoir expressif [Baa 96] ou sur la complexité des algorithmes [Don 97, Don 99]. Toutefois, un parallèle peut être fait, comme montré ci-dessus, qui donne une première idée de l’expressivité et de la complexité du langage obtenu en Y3. Une comparaison plus systématique et plus détaillée des systèmes de RCO avec les logiques de descriptions pourrait donner de meilleures indications sur les capacités de représentation et de raisonnement des systèmes de RCO.



sur l'image : si chacune de ces conditions est vraie, on crée une instance de la classe de la relation ; sinon on crée une instance de la classe de relation correspondant au sous-ensemble de conditions vraies<sup>1</sup> [Man 98]. Cette création d'instance s'exprime par la création d'un attribut représentant la relation dans l'un des deux objets. Une relation est vraie entre deux objets si et seulement s'il existe une instance de cette relation ou d'une relation plus spécialisée liant ces deux objets. Si la position entre deux objets n'a pas encore été caractérisée, nous considérons que les objets sont en relation par la relation  $\top$ , qui est la relation toujours vraie entre deux objets. Si la position des objets est déjà partiellement connue, alors vérifier une relation consiste à calculer les conditions manquantes et à créer une instance du descendant commun de la relation vérifiée et de la relation déjà existante entre les objets. La vérification des relations permet donc de « descendre » — si possible — l'instance déjà existante dans la hiérarchie de relations. La vérification d'une relation  $R$  entre deux instances  $i$  et  $i'$  est effectuée par la méthode `vérifier-relation R, i, i'` (cf. figure 7.1).

### 8.1.2 Principe de la reconnaissance

Nous considérons que les entités spatiales sont déjà extraites des images. Elles sont représentées par des instances et constituent le domaine d'interprétation  $\Delta_{\mathcal{T}}$ . Chacune est rattachée à une classe. Le principe de la reconnaissance consiste à partir d'une instance, classée au plus haut de la hiérarchie (par exemple dans la classe `TERRITOIRE`), et à la « descendre » dans la hiérarchie, en calculant à chaque niveau ses caractéristiques sur l'image en fonction des propriétés des classes plus spécialisées et en élaguant les branches de la hiérarchie devenues impossibles. Du fait de la structure des classes, la classification d'un objet fait appel récursivement à la classification des objets qui lui sont liés et des relations qui le lient à ces objets. Ce mécanisme de classification est une variante des mécanismes définis dans les logiques de descriptions [Neb 90]. L'algorithme de la méthode qui associe une instance à une classe est donné ci-dessous (cf. algorithme 1).

Supposons par exemple qu'on veuille attribuer une instance `îlot-1` à une classe `ÎLOT-CONNEXE-FORÊT` (figure 7.3). Le système s'assure pour cela que `îlot-1` vérifie toutes les propriétés de `ÎLOT-CONNEXE-FORÊT` et les contraintes associées aux propriétés, c'est-à-dire que l'instance `îlot-1` est liée à au moins une instance de la classe `FORÊT` par une relation qui est une instance de la classe `CONNEXE`. Le système doit donc rechercher les instances de `FORÊT` et examiner leurs relations avec `îlot-1`. Ceci nous amène à introduire la méthode `les-possibles CD` qui permet de restreindre  $\Delta_{\mathcal{T}}$  pour une classe `CD` en donnant le sous-ensemble  $E$  de  $\Delta_{\mathcal{T}}$  des instances qui peuvent être des instances de `CD`. La détermination des instances appartenant à `FORÊT` peut conduire parallèlement à vérifier d'autres appartenances. Ces vérifications successives sont effectuées par la méthode `reconnaître CD i`. De même que la méthode `vérifier-relation`, la méthode `reconnaître` teste si une instance  $i$  a déjà été ou peut être associée à la classe `C` ou à une classe plus spécialisée.

## 8.2 Résultats pour les agronomes

Le système de reconnaissance réalisé est l'étape ultime d'un travail de modélisation avec les agronomes. Il permet de produire des résultats concrets, sous forme de cartes des territoires villageois où chaque territoire est classé en accord avec les modèles définis. Ce système de reconnaissance peut donc être utilisé comme une aide à l'interprétation

---

1. En fait, l'information sur les conditions fausses est également utilisée, pour déduire d'autres conditions vraies : on utilise pour cela l'attribut `complément` de la classe `RELATION-SPATIALE`.

---

**Algorithme 1** reconnaître  $C, i$ 

---

```
POUR TOUT  $p \in$  liste des propriétés de  $C$  FAIRE
   $CD =$  co-domaine de la propriété  $p$  (est une entité spatiale)
   $R =$  classe de la propriété  $p$  (est une relation spatiale)
   $RES =$  vraie
  *** on étudie les différentes facettes de la propriété  $p$  ***
  Si all-role est définie ALORS
    POUR TOUT  $i_{CD} \in$  les-possibles ( $CD$ ) FAIRE
      Si reconnaître ( $CD, i_{CD}$ ) ALORS
         $RES = RES$  et vérifier-relation ( $R, i, i_{CD}$ )
  Si super-range est définie ALORS
     $sup-CD =$  ascendant de  $CD$  (est une entité spatiale)
    POUR TOUT  $i_{sup-CD} \in$  les-possibles ( $sup-CD$ ) FAIRE
      Si vérifier-relation ( $R, i, i_{sup-CD}$ ) et reconnaître ( $sup-CD, i_{sup-CD}$ ) ALORS
         $RES = RES$  et reconnaître ( $CD, i_{sup-CD}$ )
  Si c-atleast est définie ou c-atmost est définie ALORS
    Nombre = 0 (est un entier)
    POUR TOUT  $i_{CD} \in$  les-possibles ( $CD$ ) FAIRE
      Si vérifier-relation ( $R, i, i_{CD}$ ) et reconnaître ( $CD, i_{CD}$ ) ALORS
        Nombre = Nombre + 1
  Si c-atleast est définie ALORS
     $RES = (Nombre \geq (la\ valeur\ de\ la\ facette\ c-atleast))$ 
  Si c-atmost est définie ALORS
     $RES = RES$  et  $(Nombre \leq (la\ valeur\ de\ la\ facette\ c-atmost))$ 
retourner  $RES$ 
```

---

des cartes d'occupation du sol issues de l'imagerie satellitaire. Plus précisément, le travail réalisé a donné aux agronomes des outils conceptuels qui leur permettent de mieux décrire et formaliser les structures spatiales qui les intéressent et ainsi de faire progresser leur analyse.

Dans l'état actuel, ce système est utilisable sur des cartes de la Lorraine. Il peut être étendu pour d'autres régions si d'autres modèles de territoires sont intégrés. Il peut également trouver des extensions à d'autres applications ayant trait à l'information géographique (repérage, caractérisation de structures spatiales quelconques).

La durée de l'analyse d'un territoire par le système de reconnaissance est de l'ordre de plusieurs minutes<sup>2</sup>. Nous donnons un exemple de reconnaissance pour un territoire de type vallée sur la figure 8.2 (il s'agit du même territoire que celui présenté en figure 6.1). À l'issue de la reconnaissance, le territoire est caractérisé par un ensemble de classes  $\mathcal{E}$  dont il est instance et dont on calcule le plus grand descendant commun (PGCD). Trois cas se présentent alors :

- la classe PGCD est un des cinq modèles agronomiques : le territoire est alors reconnu comme appartenant à ce modèle ;
- la classe PGCD est un descendant d'un des cinq modèles agronomiques c'est-à-dire qu'on dispose de plus d'information qu'il n'en faut pour la reconnaissance d'un modèle. Sur l'exemple de la figure 8.2, le territoire est reconnu comme appartenant au modèle vallée : en effet, VALLÉE est le plus grand descendant commun des deux classes

---

2. Temps de calcul évalué sur une station SUN ultra-sparc.

F-ENTRE-DOM<sup>3</sup> et F-ILÔT-LIM qui elles-mêmes spécialisent respectivement les classes F-EC-DOM et F-ILÔT. Les classes ILÔT-EC-DOM et F-POCOM ajoutent à la qualification du territoire.

- la classe PGCD est un ascendant d'un (ou de plusieurs) des cinq modèles agronomiques : aucun modèle n'est reconnu. Le territoire est caractérisé par PGCD.

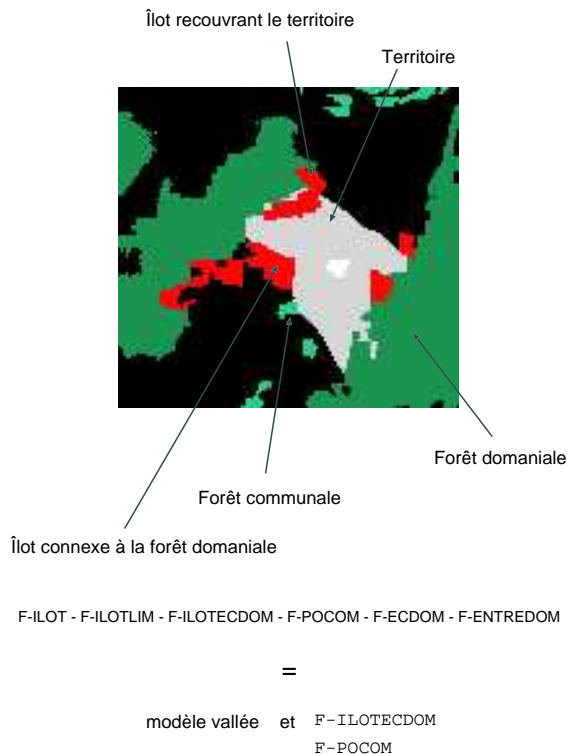


FIG. 8.2 – Un territoire reconnu comme appartenant au modèle vallée : l'image a été simplifiée ; les entités utilisées pour la reconnaissance sont désignées ; en bas sont données les différentes classes dont le territoire a été successivement reconnu comme instance.

Dans l'ensemble, le système donne des résultats satisfaisants sur la carte dont nous disposons, mais la reconnaissance n'est pas parfaite (le taux de reconnaissance est de l'ordre de 75%). Certains modèles sont mal reconnus, pour différentes raisons :

- les caractéristiques utilisées ne sont pas bonnes : par exemple il aurait fallu distinguer les parcelles de cultures incluses dans la forêt et celles qui sont simplement connexes à la forêt. Il nous faudrait donc représenter d'autres relations spatiales (topologie étendue, distance qualitative).
- la reconnaissance de certaines entités spatiales n'est pas assez fine, en partie à cause de la faible résolution de l'image, en partie à cause d'une définition incomplète des critères de reconnaissance : par exemple, il faudrait étendre les critères de reconnaissance de la forêt domaniale pour prendre en compte des pièces de forêts détachées des grands massifs. On pourrait aussi utiliser d'autres sources d'information (par exemple, un modèle numérique de terrain).

Il arrive également que des territoires villageois soient reconnus comme étant de deux modèles différents (PGCD est descendant de deux modèles compatibles). Mais cette double

3. Les noms des classes sont raccourcis par rapport à ceux donnés dans les exemples ; en particulier F vaut pour TERRITOIRE.

reconnaissance n'est pas gênante, au contraire, car elle rend compte de caractéristiques particulières des territoires, intéressantes pour les agronomes : par exemple certains territoires de plateau sont également reconnus comme territoires de vallée du fait de la présence — inhabituelle — de forêts en bordure de ces territoires.

## 8.3 Discussion sur la représentation des relations

### 8.3.1 Systèmes de RCO et logiques de descriptions

Notre travail constitue un apport pour les systèmes de RCO : nous avons défini une représentation des relations spatiales topologiques qui permet d'instruire à la fois les propriétés intrinsèques des relations et les propriétés des relations en tant que liens entre concepts. Les facettes que nous avons implantées sont adaptées à notre problème, mais leur portée est plus générale : elles sont inspirées des constructeurs des logiques de descriptions et augmentent donc le pouvoir de représentation du langage YAFOOL dans le sens défini dans [Cho 96]. Nous avons défini un mécanisme de classification d'instances qui prend en compte une double hiérarchie de modèles à reconnaître et de relations entre ces modèles et ne se limite pas à l'unification des attributs (ou relations), et qui est donc proche des mécanismes définis dans les logiques de descriptions [Neb 90, Don 96]. Le mécanisme de classification que nous avons défini correspond à une identification et à une construction d'instances [Gir 95] mais contrairement à ce qui est proposé dans TROEPS [Euz 98], la classification est sûre : une instance est associée à une classe ou ne l'est pas.

Le choix d'un système de RCO plutôt que des logiques de descriptions s'est fondé sur la nécessité d'intégrer dans le système de nombreuses méthodes de calcul sur les images et de pouvoir faire appel à ces méthodes au cours de la classification. À notre connaissance, ceci n'était pas possible avec les logiques de descriptions existantes. Nous avons donc choisi un système de RCO suffisamment souple pour pouvoir y intégrer des capacités de représentation et de raisonnement supplémentaires et ainsi allier l'expressivité des logiques de descriptions à celle des systèmes de RCO. Soulignons encore que, comme nous l'avons indiqué à la fin de la partie 7, les travaux sur les logiques de descriptions constituent des références en matière d'expressivité et de complexité des langages de représentation. Nous avons dans ce rapport mis à profit ces travaux en indiquant les langages de la famille  $\mathcal{AL}$  auxquels le système Y3 enrichi pouvait correspondre sur le plan de la représentation (et uniquement sur ce plan là, en dehors de toute considération sur les possibilités de programmation offertes par Y3).

### 8.3.2 Statut des relations dans les systèmes de RCO

Dans le système que nous avons développé, les relations sont réifiées, elles sont dotées de propriétés, mais il s'agit d'une réification partielle et *ad hoc*. Par exemple, on ne peut pas définir une spécialisation des propriétés à la fois sur le co-domaine des relations et sur les relations. Reprenons nos exemples de classes présentés dans la partie 6.2.3 (figure 6.3). La classe TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS possède la propriété `t-cont-i` et la classe TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES possède une propriété `t-contt-i`. Le mécanisme d'héritage ne reconnaissant pas la spécialisation de `t-cont-i` par `t-contt-i`, la première est héritée par la classe TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES. Les deux propriétés sont donc vérifiées lors de la classification d'une instance dans TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES alors que vérifier la propriété la plus spécialisée doit suffire.

Ainsi, il s'avère que les relations spatiales sont prises en compte et gérées dans ce qui précède d'une manière insuffisante, limitée, et manquant de généralité. Il faudrait, de façon



plus générale, améliorer la prise en compte des relations en programmation par objets et dans les systèmes de RCO selon plusieurs dimensions :

- la réification effective des relations : les relations sont des objets de première classe. La spécialisation des classes de relations doit être appréhendée au même titre que celle des classes ordinaires, en particulier lors des opérations de classification liées au raisonnement. Il serait possible d’aller plus loin en envisageant des classes de relations paramétrées, telles que les classes génériques définies dans [Mey 89]. Ainsi il pourrait exister par exemple une relation `CONTIENT(X, Y)` où `X` et `Y` sont des paramètres formels qu’il faut ensuite instancier par des classes (voir figure 8.3).
- le partage de propriétés par l’intermédiaire de relations « horizontales », par opposition aux relations verticales que sont l’instanciation et la spécialisation, doit pouvoir être particularisé pour une relation et être traité sur les mêmes bases que l’héritage (comprendre de façon aussi efficace).

```
(defmodele TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS
  (est-un TERRITOIRE)
  (t_cont_i (est-un . CONTIENT (TERRITOIRE, ÎLOT))))

(defmodele TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS-LIMITES
  (est-un TERRITOIRE-AUX-ÎLOTS)
  (t_contt_i (est-un . CONTIENT-TANGENTIELLEMENT
                 (TERRITOIRE, ÎLOT))))
```

FIG. 8.3 – Les classes de la figure 6.3 réécrites avec les relations génériques.

La réification des relations a été finalement assez peu discutée dans le cadre général de la programmation par objets et des systèmes de RCO [Rum 87, Mac 93], peut-être parce que le concept même d’objet peut apparaître en opposition avec celui de relation. Bien que les relations soient pratiques, nécessaires et très utiles dans la plupart des applications, la seule relation — autre que l’instanciation et la spécialisation — qui ait été prise en compte est la relation de composition [Bla 87, Rum 94, Art 96]. Aucun modèle générique n’a jamais vraiment émergé et les études et implantations restent locales et souvent *ad hoc*.

Plusieurs problèmes peuvent être résolus — avec élégance — si les relations sont appréhendées et implantées comme des objets de première classe, qui concernent :

- la possibilité de représenter de façon déclarative des dépendances et des contraintes entre objets, comme contraindre le type des objets qui sont en relation et la cardinalité de la relation, par exemple. Une relation détermine une certaine forme de contrainte entre des objets. Les contraintes et la satisfaction de contraintes ont été étudiées et implantées de différentes manières en programmation par objets et dans les systèmes de RCO (voir par exemple [Kök 94] et [Gen 98] pour une synthèse). Toutefois, ces études relèvent plutôt de la satisfaction de contraintes et de la gestion de dépendances fonctionnelles, et ne sont qu’indirectement liées à ce qui nous préoccupe ici ; nous n’en parlerons donc pas plus avant.
- la définition d’un modèle de relations et les propriétés génériques qui leur sont associées, comme la symétrie, la réflexivité, la transitivité, ainsi que les opérations génériques de maintien de cohérence des relations comme l’ajout, la suppression, l’inverse, etc.

Il faut, comme cela est souligné dans [Mac 93], prendre garde au fait qu’un nombre important d’objets peut être créé — et conduire à une explosion combinatoire en termes

d'espace mémoire — dès lors que les relations sont considérées comme des objets de première classe : l'*instanciation paresseuse* permet de pallier un tel problème en ne réifiant une relation que si nécessaire, comme nous l'avons fait dans le cadre de ce travail [Man 98]. Par extension, d'autres problèmes doivent également être pris en compte, comme celui de la représentation et de la gestion des relations n-aires, les protections et les privatisations pouvant exister dans le cadre des relations, sachant qu'une relation entre deux objets ne doit pas ou ne devrait pas être « privée » mais plutôt définie de façon suffisamment abstraite, avec choix de l'implantation associée.

Un travail de fond sur le plan théorique et pratique reste donc à faire sur les relations en programmation par objets et dans les représentations par objets. Il serait bon de s'inspirer pour cela des travaux théoriques et pratiques effectués dans le cadre des logiques de descriptions, qui montrent une des voies à suivre [Mac 93, Pad 94, Lam 96]. Ce travail semble avoir été entrepris depuis peu et de façon très sérieuse dans le cadre de la conception du système AROM [Pag 00].



# Chapitre 9

## Conclusion

Dans ce rapport nous avons présenté différents treillis de relations topologiques qui peuvent être utilisés pour calculer et déduire des relations à partir de données provenant d'images ou des systèmes d'informations géographiques. Nous avons utilisé les relations de la théorie RCC-8 ainsi que deux ensembles de primitives de calcul sur les images rasters, celui proposé par Egenhofer et notre propre proposition. Nous avons utilisé la correspondance de Galois pour construire deux treillis qui intègrent à la fois les relations de la théorie RCC-8 et les primitives de calcul et autorisent ainsi simplement le calcul et la déduction de relations. Nous avons étudié les propriétés des treillis ainsi construits, ainsi que les conséquences du choix de l'un ou l'autre ensemble de primitives. Nous avons également comparé ces treillis avec le treillis complété contenant toutes les parties de l'ensemble des relations de la théorie RCC-8.

Cette étude s'est fondée sur les besoins d'une application ayant pour objet la reconnaissance de modèles de paysages sur des images satellitaires. Les modèles peuvent s'exprimer comme des ensembles d'objets spatiaux reliés par des relations topologiques, entre autres. La reconnaissance s'exprime comme un problème de classification d'instances par rapport à ces modèles. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la représentation des relations topologiques sous forme de treillis. Pour les besoins de l'application, les treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$  et  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}\mathcal{E}}$  ont été implantés dans un système de représentation à objets. Les relations topologiques ont été réifiées et dotées de facettes qui permettent de les décrire et de les manipuler. Le mécanisme de classification mis en œuvre s'appuie sur cette double hiérarchie et s'apparente aux mécanismes définis dans les logiques de descriptions. Les résultats de la classification permettent de produire des cartes où des portions de territoires sont classées selon les modèles de structures définis par les agronomes.

Ce travail peut être poursuivi en intégrant dans ce système de représentation les autres relations spatiales qualitatives, relations de distance, d'orientation, et topologie étendue, ce qui pose des problèmes tant du point de vue théorique que du point de vue des systèmes de RCO. Une autre voie possible concerne le développement d'un module de raisonnement à partir de cas sur les structures spatiales, afin d'aider à leur interprétation en termes de fonctionnements agricoles ou écologiques, comme entamé dans [Met 00].



# Chapitre 10

## Annexe

### 10.1 Rappel des notations

#### Relations de *RCC-8*

« $x$ est égal à $y$ »	$EQ(x,y)$	
« $x$ est une partie propre non tangentielle de $y$ »	$NTPP(x,y)$	
« $x$ est une partie propre tangentielle de $y$ »	$TPP(x,y)$	
« $x$ possède pour partie propre non tangentielle $y$ »	$NTPP^{-1}(x,y)$	
« $x$ possède pour partie propre tangentielle $y$ »	$TPP^{-1}(x,y)$	
« $x$ recouvre partiellement $y$ »	$PO(x,y)$	
« $x$ est connexe à $y$ »	$EC(x,y)$	
« $x$ est déconnecté de $y$ »	$DC(x,y)$	

#### Conditions de *CM-8*

$(x^\circ - y^\circ = \emptyset)$	« $x$ appartient à $y$ »	$P(x,y)$
$(y^\circ - x^\circ = \emptyset)$	« $x$ contient $y$ »	$P^{-1}(x,y)$
$(x^\circ - y^\circ \neq \emptyset)$	« $x$ n'appartient pas à $y$ »	$Dx(x,y)$
$(y^\circ - x^\circ \neq \emptyset)$	« $x$ ne contient pas $y$ »	$Dy(x,y)$
$(x^\circ \cap y^\circ \neq \emptyset)$	« $x$ recouvre en tout ou partie $y$ »	$O(x,y)$
$(x^\circ \cap y^\circ = \emptyset)$	« $x$ ne recouvre pas $y$ »	$DR(x,y)$
$(\partial x \cap \partial y \neq \emptyset)$	« $x$ est tangent à $y$ »	$A(x,y)$
$(\partial x \cap \partial y = \emptyset)$	« $x$ n'est pas tangent à $y$ »	$NA(x,y)$ .

#### Correspondance entre *RCC-8* et *CM-8*

$\mathcal{G}(EQ)$	=	$\{O, P, P^{-1}, A\}$
$\mathcal{G}(NTPP)$	=	$\{O, P, Dy, NA\}$
$\mathcal{G}(TPP)$	=	$\{O, P, Dy, A\}$
$\mathcal{G}(NTPP^{-1})$	=	$\{O, P^{-1}, Dx, NA\}$
$\mathcal{G}(TPP^{-1})$	=	$\{O, P^{-1}, Dx, A\}$
$\mathcal{G}(PO)$	=	$\{O, Dx, Dy, A\}$
$\mathcal{G}(EC)$	=	$\{DR, A, Dx, Dy\}$
$\mathcal{G}(DC)$	=	$\{DR, NA, Dx, Dy\}$

## Correspondance inverse

$\mathcal{G}'(P)$	$=$	$\{EQ, NTPP, TPP\}$
$\mathcal{G}'(Dx)$	$=$	$\{NTPP^{-1}, TPP^{-1}, PO, DC, EC\}$
$\mathcal{G}'(P^{-1})$	$=$	$\{EQ, NTPP^{-1}, TPP^{-1}\}$
$\mathcal{G}'(Dy)$	$=$	$\{NTPP, TPP, PO, DC, EC\}$
$\mathcal{G}'(O)$	$=$	$\{EQ, NTPP, TPP, NTPP^{-1}, TPP^{-1}, PO\}$
$\mathcal{G}'(DR)$	$=$	$\{DC, EC\}$
$\mathcal{G}'(A)$	$=$	$\{EQ, TPP, TPP^{-1}, PO, EC\}$
$\mathcal{G}'(NA)$	$=$	$\{NTPP, NTPP^{-1}, DC\}$

## 10.2 Quelques définitions et notations

Ces définitions sont tirées de [Bar 70].

**Ordre partiel.** Soit  $X$  un ensemble non vide et soit  $\leq$  une relation binaire sur  $X$ ,  $(X, \leq)$  est un *ordre partiel* si et seulement si :

1.  $\leq$  est réflexive:  $\forall x \in X, x \leq x$ ,
2.  $\leq$  est antisymétrique:  $\forall x, y \in X, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \rightarrow (x = y)$ ,
3.  $\leq$  est transitive:  $\forall x, y, z \in X, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$ .

**Infimum.** Soit  $(X, \leq)$  un ordre partiel, soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$ , soit  $m$  un élément quelconque de  $X$ ,  $m$  est un *infimum* de  $A$  si et seulement si :

- $\forall a \in A, (m \leq a)$ ,
- $\forall c \in X, (\forall a \in A, c \leq a) \rightarrow (c \leq m)$ .

**Supremum.** Soit  $(X, \leq)$  un ordre partiel, soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$ , soit  $M$  un élément quelconque de  $X$ ,  $M$  est un *supremum* de  $A$  si et seulement si :

- $\forall a \in A, (a \leq M)$ ,
- $\forall c \in X, (\forall a \in A, a \leq c) \rightarrow (M \leq c)$ .

**Treillis.** Un *treillis*  $\langle X, \leq, \wedge, \vee \rangle$  est un ordre partiel  $(X, \leq)$  où chaque paire  $\{x, y\} \in X^2$  possède un supremum  $\vee$  et un infimum  $\wedge$ <sup>1</sup>.

**Treillis complémenté.** Soit un treillis  $\langle X, \leq, \wedge, \vee \rangle$  admettant un minorant universel 0 et un majorant universel 1.  $X$  est dit *complémenté* si tout élément de  $X$  possède au moins un complément dans  $X$  c'est-à-dire si :

$$\forall x \in X, \exists y \in X : (x \vee y = 1 \text{ et } x \wedge y = 0)$$

**Treillis distributif.** Un treillis  $\langle X, \leq, \wedge, \vee \rangle$  est dit distributif s'il vérifie les trois identités suivantes pour tout triplet  $(x, y, z)$  (on montre que si l'une quelconque des trois identités est vérifiée alors les deux autres le sont également) :

$$\begin{aligned} (D_{\wedge}) \quad & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ (D_{\vee}) \quad & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ (Md) \quad & (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee y) \end{aligned}$$

1. En général l'infimum et le supremum sont notés  $\wedge$  et  $\vee$  mais dans la suite, nous réserverons ces symboles pour la conjonction logique et la disjonction logique.

**Treillis booléen.** Un treillis  $\langle X, \leq, \wedge, \vee, \cdot, \circ, 0, 1 \rangle$  est booléen s'il est distributif et complémenté.

**Fermeture.** Soit  $h$  une application dans un ensemble ordonné  $(E, \leq)$ ,  $h$  est une fermeture si elle possède les trois propriétés suivantes :

- $\forall x, \forall y, x \leq y \rightarrow h(x) \leq h(y)$  ( $h$  est monotone croissante)
- $\forall x, x \leq h(x)$  ( $h$  est extensive)
- $\forall x, h \circ h(x) = h(x)$  ( $h$  est idempotente)

Un élément de  $E$  est dit fermé s'il est égal à sa fermeture ( $x = h(x)$ ).

### 10.3 Démonstrations des propriétés

Nous admettons tout d'abord quelques hypothèses concernant  $RCC-8$  et  $CM-8$ :

- (1) pour tout couple d'objets  $(x,y) \in \mathcal{D}^2$ , il existe toujours une relation de  $RCC-8$  qui soit vérifiée:  $\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \exists r \in RCC-8 : r(x,y)$ .
- (2) cette relation est unique; toutes les autres relations de  $RCC-8$  sont fausses pour ce couple d'objets:  $r(x,y) \leftrightarrow (\forall r' \in RCC-8, r' \neq r : \neg r'(x,y))$ .
- (3) si une relation n'implique pas une condition (soit  $r \notin \mathcal{G}'(c)$ ) alors elle implique sa négation (soit  $r \in \mathcal{G}'(\neg c)$ ):  $\mathcal{G}'(c) \cup \mathcal{G}'(\neg c) = RCC-8$ .
- (4) pour toute relation de  $RCC-8$ , il n'existe pas d'autre relation qui implique les mêmes conditions:  $\forall r \in RCC-8, \neg \exists r' \in RCC-8, \mathcal{G}(r) \subseteq \mathcal{G}(r')$ .

Les deux premières hypothèses rendent compte du fait que les relations de  $RCC-8$  sont exhaustives et disjointes deux à deux. Les deux dernières hypothèses se vérifient facilement sur la figure 4.2 ou sur les tables présentant  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  dans l'annexe 10.1.

**Lemme 1** Pour tout  $R$  partie de  $RCC-8$ ,  $f(R) = f(\bar{R})$  où  $\bar{R} = h(R)$  (autrement dit toute partie de  $CM-8$  de la forme  $f(R)$  est fermée).

*Démonstration :*

$$f(R) = \bigcap_{r \in R} \mathcal{G}(r) \text{ et } f(\bar{R}) = \bigcap_{r \in \bar{R}} \mathcal{G}(r)$$

$$R \subseteq \bar{R} \text{ (propriété de la fermeture) donc } f(\bar{R}) \subseteq f(R)$$

$$\text{Inversement : } f(\bar{R}) = f \circ h(R) = f \circ f' \circ f(R) = h' \circ f(R)$$

$$\text{donc } f(R) \subseteq f(\bar{R}) \text{ (propriété de la fermeture).}$$

**Lemme 2** Pour tout  $C$  partie de  $CM-8$ ,  $f'(C) = f'(\bar{C})$  où  $\bar{C} = h'(C)$  (autrement dit toute partie de  $RCC-8$  de la forme  $f'(C)$  est fermée).

*Démonstration :*

$$f'(C) = \bigcap_{c \in C} \mathcal{G}'(c) \text{ et } f'(\bar{C}) = \bigcap_{c \in \bar{C}} \mathcal{G}'(c)$$

$$C \subseteq \bar{C} \text{ (propriété de la fermeture) donc } f'(\bar{C}) \subseteq f'(C)$$

$$\text{Inversement : } f'(\bar{C}) = f' \circ h'(C) = f' \circ f \circ f'(C) = h \circ f'(C)$$

$$\text{donc } f'(C) \subseteq f'(\bar{C}) \text{ (propriété de la fermeture).}$$

**Lemme 3** Pour toute partie  $R$  de  $RCC-8$ , la disjonction des relations de  $R$  implique la conjonction des conditions de  $f(R)$ . Soit :

$$\forall(x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x,y) \rightarrow \bigwedge_{c \in f(R)} c(x,y)$$



*Démonstration* : quelque soit  $c \in f(R)$  on a :  
 $(c \in f(R)) \leftrightarrow (c \in \bigcap_{r \in R} \mathcal{G}(r)) \rightarrow (\forall r \in R, \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, r(x,y) \rightarrow c(x,y)).$   
Donc :  $\forall r \in R, \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, r(x,y) \rightarrow \bigwedge_{c \in f(R)} c(x,y).$   
Donc :  $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x,y) \rightarrow \bigwedge_{c \in f(R)} c(x,y).$

**Lemme 4** *Pour toute partie C de CM-8, la conjonction des conditions de C implique la disjonction des relations de f'(C). Soit :*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in C} c(x,y) \rightarrow \bigvee_{r \in f'(C)} r(x,y)$$

*Démonstration* : nous démontrons l'implication inverse : si aucune des relations de  $f'(C)$  n'est vérifiée pour un couple  $(x,y)$  alors il existe une condition de  $C$  qui n'est pas vérifiée pour ce couple.

Supposons que toutes les relations de  $f'(C)$  soient fausses, alors il existe une relation  $r' \in (RCC-8 - f'(C))$  qui est vérifiée pour le couple  $(x,y)$  (d'après l'hypothèse (1) ci-dessus).

$r' \notin f'(C) = \bigcap_{c \in C} \mathcal{G}'(c)$  on a donc :  $\exists c \in C : r' \notin \mathcal{G}'(c).$

D'après l'hypothèse (3),  $r'(x,y)$  implique la négation de  $c(x,y)$  et donc la négation de la conjonction des éléments de  $C$ . Finalement :

$$\forall (R,C) \in \mathcal{E}_G, \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \neg \bigvee_{r \in R} r(x,y) \rightarrow \neg \bigwedge_{c \in C} c(x,y)$$

Dans le cas où  $f'(C) = RCC-8$ , la disjonction est toujours vérifiée (cf. hypothèse (1)).

**Lemme 5** *Pour toute partie C de CM-8, la conjonction des conditions de C est équivalente à la conjonction des conditions de la fermeture de C par h'. Soit :*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in C} c(x,y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in h'(C)} c(x,y)$$

*Démonstration* : nous notons  $\bar{C} = h'(C)$ .  
 $h'$  est monotone croissante (fermeture) donc  $\forall C \in \mathcal{P}(CM-8), C \subseteq \bar{C}$ .  
Donc  $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in \bar{C}} c(x,y) \rightarrow \bigwedge_{c \in C} c(x,y).$

Réciproquement, d'après les lemmes 3 et 4 :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in C} c(x,y) \rightarrow \bigvee_{r \in f'(C)} r(x,y) \rightarrow \bigwedge_{c \in f \circ f'(C)} c(x,y) = \bigwedge_{c \in \bar{C}} c(x,y).$$

**Démonstration de la propriété 1 :** Si un élément  $E = (C, R)$  est un élément du treillis  $\mathcal{T}_G$  alors la relation formée par une disjonction des éléments de  $R$  est équivalente à la condition formée par une conjonction des éléments de  $C$ .

Tout d'abord rappelons que si  $(C, R) \in \mathcal{E}_G$  alors  $C = f(R)$  et  $R = f'(C)$ .

*Implication directe* : elle dérive directement du lemme 3 puisque  $C = f(R)$ .  
 $\forall (R,C) \in \mathcal{E}_G, \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x,y) \rightarrow \bigwedge_{c \in C} c(x,y).$

*Implication réciproque* : elle dérive directement du lemme 4 puisque  $R = f'(C)$ .

$$\text{Donc : } \forall (R, C) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in C} c(x, y) \rightarrow \bigvee_{r \in R} r(x, y).$$

Dans le cas particulier où  $\mathbf{E} = (\emptyset, RCC\text{-}\delta)$  (majorant universel) : la disjonction des éléments de  $RCC\text{-}\delta$  et la conjonction des éléments de  $\emptyset$  sont toujours vérifiées.

**Démonstration de la propriété 2 :** Soient deux sous-ensembles  $R$  de  $RCC\text{-}\delta$  et  $C$  de  $CM\text{-}\delta$  : si la conjonction des éléments de  $C$  est équivalente à la disjonction des éléments de  $R$ , alors le couple  $(\bar{C}, R)$  est un élément du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ .

D'après le lemme 5 et l'hypothèse on a :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in C} c(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in \bar{C}} c(x, y).$$

et  $(\bar{C}, f'(\bar{C}))$  est un élément du treillis (par définition).

Dénotons  $f'(\bar{C})$  par  $R'$ . Il faut montrer que  $R = R'$ .

D'après la propriété 1,

$$(\bar{C}, R') \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}} \rightarrow (\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigwedge_{c \in \bar{C}} c(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{r \in R'} r(x, y))$$

$$\text{Donc } \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \bigvee_{r \in R} r(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{r \in R'} r(x, y).$$

Quelque soit une relation  $r \in R$ , soit un couple  $(x, y)$  tel que  $r$  soit vérifiée : alors il existe  $r' \in R'$  vérifiée pour  $(x, y)$ . De par l'hypothèse (2),  $r = r'$ . Réciproquement pour toute relation  $r'$  de  $R'$  on montre qu'il existe une relation  $r \in R$  telle que  $r = r'$ . Donc les deux ensembles sont égaux.

**Démonstration de la propriété 3 :** Pour tout  $r$  élément de  $RCC\text{-}\delta$ ,  $\{r\}$  est fermé par  $h$  et donc  $(f(\{r\}), \{r\})$  est un élément du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ .

Cette propriété peut se démontrer de différentes façons. La première consiste à observer (sur la figure 3.3), que toute relation de  $RCC\text{-}\delta$  est équivalente à une conjonction de quatre conditions de  $CM\text{-}\delta$ . L'ensemble  $C$  constitué par ces quatre conditions est donc tel que  $(\bar{C}, \{r\})$  est un élément du treillis (propriété 2). On en déduit que  $\{r\}$  est fermé et que  $\bar{C} = f(\{r\})$ .

Une deuxième façon consiste à démontrer directement que  $\{r\}$  est fermé par  $h$ . Supposons l'inverse, c'est-à-dire qu'il existe  $r'$  différent de  $r$  et appartenant à  $h(\{r\})$ .

$$h(\{r\}) = f' \circ f(\{r\}) = f'(\mathcal{G}(r)) = \bigcap_{c \in \mathcal{G}(r)} \mathcal{G}'(c).$$

$$r' \in h(\{r\}) \rightarrow (\forall c \in \mathcal{G}(r), \forall (x, y), r'(x, y) \rightarrow c(x, y)).$$

$$r' \in h(\{r\}) \rightarrow \mathcal{G}(r) \subseteq \mathcal{G}(r') \text{ ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse (4).}$$

**Démonstration de la propriété 4 :** À toute condition  $c$  de  $CM\text{-}\delta$ , on peut associer un élément  $\mathbf{E}_c = (C, R)$ , où  $C = h'(\{c\})$  et  $R = f'(C) = f'(\{c\})$ . Cet élément est distinct pour chaque condition.

On note tout d'abord que toute condition  $c$  de  $CM\text{-}\delta$  est équivalente à la conjonction des conditions de sa fermeture par  $h'$  : cette assertion se déduit du lemme 5 appliqué aux singletons de  $CM\text{-}\delta$ . On a donc :  $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, c(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in h'(\{c\})} c(x, y)$

$C = h'(\{c\})$  étant fermé par  $h'$ , l'élément  $\mathbf{E}_c = (C, f'(C))$  est un élément du treillis  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ ;  $f'(C) = f'(\{c\})$  d'après le lemme 2 et on vérifie en utilisant la propriété 1 :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, c(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{c \in C} c(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{r \in f'(\{c\})} r(x, y)$$

Cet élément  $\mathbf{E}_c$  est distinct pour chaque condition puisque les conditions prises deux à deux ne sont pas équivalentes.

**Démonstration de la propriété 5 :** Un élément  $\mathbf{E} = (C, R)$  du treillis est l'infimum de deux éléments  $\mathbf{E}_1 = (C_1, R_1)$  et  $\mathbf{E}_2 = (C_2, R_2)$  si et seulement si la disjonction des éléments de  $R$  (soit  $\pi_r(\mathbf{E})$ ) est égale à la conjonction des deux relations formées par la disjonction des éléments de  $R_1$  (soit  $\pi_r(\mathbf{E}_1)$ ), d'une part et  $R_2$  (soit  $\pi_r(\mathbf{E}_2)$ ), d'autre part.

Tout d'abord, rappelons que l'infimum de deux éléments du treillis est défini de la façon suivante:  $(C_1, R_1) \frown (C_2, R_2) = (h'(C_1 \cup C_2), R_1 \cap R_2)$ .

*Implication directe :*  $\mathbf{E}$  est l'infimum des éléments  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ .

Supposons que  $\bigvee_{r \in R} r(x, y)$  soit vérifié pour un couple d'objets  $(x, y) \in \mathcal{D}^2$ .

Alors  $\exists r \in R, r(x, y)$  est vérifié.

$$(r \in R_1 \cap R_2 \text{ et } r(x, y)) \rightarrow \bigvee_{r \in R_1} r(x, y) \wedge \bigvee_{r \in R_2} r(x, y).$$

Réciproquement si  $\bigvee_{r \in R_1} r(x, y) \wedge \bigvee_{r \in R_2} r(x, y)$  pour un couple d'objets  $(x, y)$ .

Alors  $\exists r_1 \in R_1, \exists r_2 \in R_2, r_1(x, y) \wedge r_2(x, y)$ .

D'après l'hypothèse (2),  $r_1 = r_2$ , donc  $r_1 \in R_1 \cap R_2$  et  $\bigvee_{r \in R} r(x, y)$  est vérifié.

*Implication réciproque :* soient trois éléments du treillis  $\mathbf{E}, \mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  tels que :

$$\bigvee_{r \in R} r(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{r \in R_1} r(x, y) \wedge \bigvee_{r \in R_2} r(x, y)$$

Il suffit de montrer que  $R = R_1 \cap R_2$ ;  $C = h'(C_1 \cup C_2)$  s'en déduit immédiatement par  $C = f(R)$  et  $f'(C_1) \cap f'(C_2) = f'(C_1 \cup C_2)$ .

Soit  $r \in R$  quelconque et un couple d'objets  $(x, y) \in \mathcal{D}^2$  tels que  $r(x, y)$  est vérifié.

Alors  $\bigvee_{r \in R} r(x, y)$  est vérifié et donc  $\bigvee_{r \in R_1} r(x, y) \wedge \bigvee_{r \in R_2} r(x, y)$ .

Donc  $\exists r_1 \in R_1, \exists r_2 \in R_2, r_1(x, y) \wedge r_2(x, y)$ .

D'après l'hypothèse (2),  $r_1 = r_2 = r$  donc  $R \subseteq R_1 \cap R_2$ .

Réciproquement soit  $r \in R_1 \cap R_2$  et un couple d'objets  $(x, y) \in \mathcal{D}^2$  tels que  $r(x, y)$ .

Le même raisonnement conduit à  $R_1 \cap R_2 \subseteq R$ .

**Démonstration de la propriété 7 :** Pour tout couple d'éléments du treillis  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ , le supremum  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \smile \mathbf{E}_2$  est tel que la disjonction des relations  $\pi_r(\mathbf{E}_1)$  et  $\pi_r(\mathbf{E}_2)$  implique la relation  $\pi_r(\mathbf{E}')$ .

Tout d'abord, rappelons que le supremum de deux éléments du treillis est défini de la façon suivante:  $(C_1, R_1) \smile (C_2, R_2) = (C_1 \cap C_2, h(R_1 \cup R_2))$ .

On pose  $\mathbf{E}' = (C', R')$  avec  $R' = h(R_1 \cup R_2)$

donc :

$$\bigvee_{r \in R'} r(x,y) = \bigvee_{r \in h(R_1 \cup R_2)} r(x,y) \leftarrow \bigvee_{r \in R_1 \cup R_2} r(x,y) = \bigvee_{r \in R_1} r(x,y) \vee \bigvee_{r \in R_2} r(x,y)$$

La propriété est vérifiée.

## 10.4 Une brève introduction aux logiques de descriptions

Les logiques de descriptions forment une famille de langages de représentation de connaissances. Elles permettent de représenter les connaissances relatives à un domaine de référence à l'aide de « descriptions » qui peuvent être des concepts, des rôles et des individus. Les concepts modélisent des classes d'individus et les rôles des relations entre classes. Une sémantique est associée aux descriptions par l'intermédiaire d'une fonction d'interprétation. La relation de subsumption permet d'organiser les concepts et les rôles en hiérarchies ; la classification et l'instanciation sont alors les opérations qui sont à la base du raisonnement sur les descriptions, ou raisonnement terminologique. La classification permet de déterminer la position d'un concept et d'un rôle dans leurs hiérarchies respectives, tandis que l'instanciation permet de retrouver les concepts dont un individu est susceptible d'être une instance.

Un concept possède une *description structurée* qui se construit à l'aide d'un ensemble de *constructeurs* introduisant les rôles associés au concept et les *restrictions* attachées à ces rôles. Les restrictions portent généralement sur le *co-domaine* du rôle, qui est le concept avec lequel le rôle établit une relation, et la *cardinalité* du rôle, qui fixe le nombre minimal et maximal de *valeurs élémentaires* que peut prendre le rôle. Les valeurs élémentaires sont des instances de concepts ou bien des valeurs qui relèvent des types de bases comme *entier*, *réel*, et *chaîne de caractères*.

Les concepts peuvent être *primitifs* ou *définis*. Les concepts primitifs sont comparables à des atomes et servent de base à la construction des concepts définis, c'est-à-dire qui possèdent une *définition*. À l'image d'un concept, un rôle peut être primitif ou défini et peut posséder une description structurée, où figurent les propriétés associées au rôle.

Il existe plusieurs langages de description de concepts et de rôles. Le langage minimal  $\mathcal{AL}$  s'appuie sur l'ensemble de constructeurs  $\mathcal{AL} = \{\top, \perp, \neg \mathbf{A}, \mathbf{C} \sqcap \mathbf{D}, \forall \mathbf{r}.\mathbf{C}, \exists \mathbf{r}\}$ . Le concept **TOP** ( $\top$ ) dénote le concept le plus général et le concept **BOTTOM** ( $\perp$ ) le concept le plus spécifique. Le constructeur **and** ( $\sqcap$ ) permet de définir une conjonction d'expressions conceptuelles. Le constructeur **not** ( $\neg$ ) correspond à la négation et ne porte que sur les concepts primitifs. La *quantification universelle* **all** ( $\forall \mathbf{r}.\mathbf{C}$ ) précise le co-domaine du rôle  $\mathbf{r}$  ; la *quantification existentielle* non typée **some** ( $\exists \mathbf{r}$ ) introduit le rôle  $\mathbf{r}$  et affirme l'existence d'(au moins) un couple d'individus en relation par l'intermédiaire de  $\mathbf{r}$ .

Le langage  $\mathcal{AL}$  peut être enrichi de la négation de concepts primitifs ou définis (**not**  $\mathbf{C}$ ) ou  $\neg \mathbf{C}$  ( $\mathcal{ALC} = \mathcal{AL} \cup \{\neg \mathbf{C}\}$ ), la disjonction de concepts, (**or**  $\mathbf{C} \mathbf{D}$ ) ou  $\mathbf{C} \sqcup \mathbf{D}$  ( $\mathcal{ALU} = \mathcal{AL} \cup \{\mathbf{C} \sqcup \mathbf{D}\}$ ), la quantification existentielle typée, (**c-some**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ ) ou  $\exists \mathbf{r}.\mathbf{C}$  ( $\mathcal{AL\mathcal{E}} = \mathcal{AL} \cup \{\exists \mathbf{r}.\mathbf{C}\}$ ), la cardinalité sur les rôles, (**atleast**  $\mathbf{n} \mathbf{r}$ ) ou  $\geq \mathbf{n} \mathbf{r}$ , et, (**atmost**  $\mathbf{n} \mathbf{r}$ ) ou  $\leq \mathbf{n} \mathbf{r}$  ( $\mathcal{AL\mathcal{N}} = \mathcal{AL} \cup \{\geq \mathbf{n} \mathbf{r}, \leq \mathbf{n} \mathbf{r}\}$ ). Un certain nombre de constructeurs peuvent porter sur les rôles, comme la conjonction de rôles, (**and**  $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ ) ou  $\mathbf{r}_1 \sqcap \mathbf{r}_2$  ( $\mathcal{AL\mathcal{R}} = \mathcal{AL} \cup \{\mathbf{r}_1 \sqcap \mathbf{r}_2\}$ ), et la restriction sur le co-domaine des rôles, (**restrict**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ ) ou  $\mathbf{r} | \mathbf{C}$ , qui introduit une contrainte sur le co-domaine d'un rôle et qui peut être rapprochée de la quantification existentielle typée (**c-some**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ ).

En dehors de **restrict**, le langage  $\mathcal{ALCN}\mathcal{R} = \{\top, \perp, \neg\mathbf{C}, \mathbf{C} \sqcap \mathbf{D}, \mathbf{C} \sqcup \mathbf{D}, \forall \mathbf{r}.\mathbf{C}, \exists \mathbf{r}.\mathbf{C}, \geq n\mathbf{r}, \leq n\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \sqcap \mathbf{r}_2\}$  contient l'ensemble des constructeurs qui viennent d'être présentés (il est aussi d'usage d'employer la lettre  $\mathbf{C}$  plutôt que les lettres  $\mathcal{UE}$  dans le nom du langage).

Une sémantique est associée aux descriptions de concepts et de rôles : les concepts sont interprétés comme des sous-ensembles d'un domaine d'interprétation  $\Delta_{\mathcal{I}}$  et les rôles comme des sous-ensembles du produit  $\Delta_{\mathcal{I}} \times \Delta_{\mathcal{I}}$ . Pour un concept  $\mathbf{C}$   $\mathbf{C}^{\mathcal{I}}$  correspond au sous-ensemble des éléments du domaine  $\Delta_{\mathcal{I}}$  qui appartiennent à l'extension de  $\mathbf{C}$  et pour un rôle  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}^{\mathcal{I}}$  correspond au sous-ensemble des couples d'éléments du produit  $\Delta_{\mathcal{I}} \times \Delta_{\mathcal{I}}$  qui appartiennent à l'extension de  $\mathbf{r}$ . La notion d'*interprétation* peut se définir comme suit dans le cadre du langage  $\mathcal{ALCN}$ .

Une *interprétation*  $\mathcal{I} = (\Delta_{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  est la donnée d'un ensemble  $\Delta_{\mathcal{I}}$  appelé *domaine de l'interprétation* et d'une fonction d'interprétation  $\cdot^{\mathcal{I}}$  qui fait correspondre à un concept un sous-ensemble de  $\Delta_{\mathcal{I}}$  et à un rôle un sous-ensemble de  $\Delta_{\mathcal{I}} \times \Delta_{\mathcal{I}}$ , de telle sorte que les équations suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned} \top^{\mathcal{I}} &= \Delta_{\mathcal{I}} \\ \perp^{\mathcal{I}} &= \emptyset \\ (\mathbf{C} \sqcap \mathbf{D})^{\mathcal{I}} &= \mathbf{C}^{\mathcal{I}} \cap \mathbf{D}^{\mathcal{I}} \\ (\mathbf{C} \sqcup \mathbf{D})^{\mathcal{I}} &= \mathbf{C}^{\mathcal{I}} \cup \mathbf{D}^{\mathcal{I}} \\ (\neg\mathbf{C})^{\mathcal{I}} &= \Delta_{\mathcal{I}} - \mathbf{C}^{\mathcal{I}} \\ (\forall \mathbf{r}.\mathbf{C})^{\mathcal{I}} &= \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathcal{I}} / \forall \mathbf{y} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{r}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbf{y} \in \mathbf{C}^{\mathcal{I}}\} \\ (\exists \mathbf{r}.\mathbf{C})^{\mathcal{I}} &= \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathcal{I}} / \exists \mathbf{y} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{r}^{\mathcal{I}} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{C}^{\mathcal{I}}\} \\ (\geq n\mathbf{r})^{\mathcal{I}} &= \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathcal{I}} / |\{\mathbf{y} \in \Delta_{\mathcal{I}} / (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{r}^{\mathcal{I}}\}| \geq n\} \\ (\leq n\mathbf{r})^{\mathcal{I}} &= \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathcal{I}} / |\{\mathbf{y} \in \Delta_{\mathcal{I}} / (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{r}^{\mathcal{I}}\}| \leq n\} \end{aligned}$$

Pour être complet, il reste à donner l'interprétation des constructeurs portant sur les rôles, **and** ( $\mathbf{r}_1 \sqcap \mathbf{r}_2$ ) et **restrict** ( $\mathbf{r} | \mathbf{C}$ ) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1 \sqcap \dots \sqcap \mathbf{r}_n)^{\mathcal{I}} &= \mathbf{r}_1^{\mathcal{I}} \cap \dots \cap \mathbf{r}_n^{\mathcal{I}} \\ \mathbf{r} | \mathbf{C}^{\mathcal{I}} &= \{(x, y) \in \Delta_{\mathcal{I}} \times \Delta_{\mathcal{I}} / (x, y) \in \mathbf{r}^{\mathcal{I}} \wedge y \in \mathbf{C}^{\mathcal{I}}\} \end{aligned}$$

Il faut noter pour terminer les combinaisons suivantes des constructeurs **restrict**, **some**, **atleast** et **atmost** :

- (**c-some**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ )  $\equiv$  (**some** (**restrict**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ )), qui correspond à  $\exists \mathbf{r}.\mathbf{C}$  de  $\mathcal{AL}\mathcal{E}$ ,
- (**c-atleast**  $n \mathbf{r} \mathbf{C}$ )  $\equiv$  (**atleast**  $n$  (**restrict**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ )),
- (**c-atmost**  $n \mathbf{r} \mathbf{C}$ )  $\equiv$  (**atmost**  $n$  (**restrict**  $\mathbf{r} \mathbf{C}$ )).

# Bibliographie

- [All 83] J.F. Allen. Maintaining Knowledge about Temporal Intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, November 1983.
- [Art 96] A. Artale, E. Franconi, N. Guarino et L. Pazzi. Part-whole relations in object-oriented systems: An overview. *Data & Knowledge Engineering*, 20(3):347–383, 1996.
- [Ash 95] N. Asher et L. Vieu. Toward a Geometry of Common Sense: A Semantic and a Complete Axiomatization of Mereotopology. *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 846–852, San Mateo, CA, 1995.
- [Baa 96] F. Baader. A Formal Definition for the Expressive Power of Terminological Knowledge Representation Languages. *Journal of Logic and Computation*, 6(1):33–54, 1996.
- [Bac 95] J. Bachacou. Carte de l'occupation du sol en Lorraine d'après les images Landsat, pour l'année culturale 1989-90. Document, janvier 1995. Lab. d'Intelligence Artificielle et de Biométrie, INRA–Nancy.
- [Bar 70] M. Barbut et B. Monjardet. *Ordre et classification – Algèbre et combinatoire*. Hachette, Paris, 1970.
- [Ben 90] M. Benoît. La gestion territoriale de l'activité agricole dans un village lorrain. *Mappemonde*, (4):15–17, 1990.
- [Bla 87] E. Blake et S. Cook. On Including Part Hierarchies in Object-Oriented Languages, with an Implementation in Smalltalk. J. Bézivin, J.-M. Hullot, P. Cointe et H. Lieberman, éditeurs, *Proceedings of ECOOP'87*, pages 45–54, Paris, France, 1987. Springer Verlag. LNCS 276.
- [Cal 96] D. Calvanese. *Unrestricted and Finite Model Reasoning in Class-Based Representation Formalisms*. Dottorato di Ricerca in Informatica, Università di Roma “La Sapienza”, Italia, 1996.
- [Car 93] C. Carpineto et G. Romano. Galois: An order-theoretic approach to conceptual clustering. *Proceedings of the 10th International Conference on Machine Learning (ICML'93)*, Amherst, pages 33–40. Morgan Kaufmann, 1993.
- [Car 95] B. Carré, R. Ducournau, J. Euzenat, A. Napoli et F. Rechenmann. Classification et objets: programmation ou représentation. *Actes des cinquième Journées Nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle*, pages 213–238, Nancy, février 1995. TEKNEA.
- [Cha 96] B. Charroux, S. Philipp et J.-P. Cocquerz. Système de vision mettant en œuvre une coopération d'opérateurs de segmentation guidée par l'interprétation. *RFIA'96 Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, volume 2, pages 527–536, Rennes, janvier 1996. Afcet, Afia, IRISA.
- [Cho 96] M.-P. Chouvet, F. Le Ber, J. Lieber, L. Mangelinck, A. Napoli et A. Simon. Analyse des besoins en représentation et raisonnement dans une représentation

- à objets – L'exemple de Y3. *Actes de la conférence Langages et Modèles à Objets (LMO'96)*, pages 150–169, octobre 1996. Leysin, Suisse.
- [Cla 81] B.L. Clarke. A calculus of individuals based on 'connection'. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22(3):204–218, 1981.
- [Cla 85] B. L. Clarke. Individuals and points. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 26(1):61–75, 1985.
- [Cle 93] E. Clementini, P. Di Felice et P. van Oosterom. A small set of formal topological relationships for end-user interaction. D. J. Abel et B. C. Ooi, éditeurs, *Advances in Spatial Databases: Proceedings of the Third International Symposium, SSD'93*, LNCS 692, pages 277–295, Singapore, June 23-25 1993. Springer Verlag.
- [Coh 93] A.G. Cohn, D. A. Randell, Z. Cui et B. Bennet. Qualitative Spatial Reasoning and Representation. P. Carrete et M.G. Singh, éditeurs, *Qualitative Reasoning and Decision Technologies*, pages 513–522, Barcelona, June 1993.
- [Coh 97] A. G. Cohn, B. Bennett, J. Gooday et N. M. Gotts. *Representing and Reasoning with Qualitative Spatial Relations About Regions*, chapitre 4, pages 97–134. In Stock [Sto 97], 1997.
- [Cre 97] D. Crevier et R. Lepage. Knowledge-Based Image Understanding Systems: A Survey. *Computer vision and image understanding*, 67(2):161–185, August 1997.
- [Dav 90] B.A. Davey et H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [Def 90] J.-P. Deffontaines. Organisation spatiale de l'activité agricole et développement d'une petite région lorraine. *Mappemonde*, (4):12–14, 1990.
- [Don 96] F.-M. Donini, M. Lenzerini, D. Nardi et A. Schaerf. Reasoning in description logics. G. Brewka, éditeur, *Principles of Knowledge Representation*, pages 191–236. CSLI Publications, Stanford (CA), USA, 1996.
- [Don 97] F.M. Donini, M. Lenzerini, D. Nardi et W. Nutt. The complexity of concept languages. *Information and Computation*, 134(1):1–58, 1997.
- [Don 99] F.M. Donini, M. Lenzerini, D. Nardi et W. Nutt. Tractability and Intractability in Description Logics. Technical report, Università di Roma "La Sapienza", Italia, 1999.
- [Duc 91] R. Ducournau. *Y3 : YAFOOL, le langage à objets et YAFEN, l'interface graphique*. Sema Group, Montrouge, France, 1991.
- [Duc 96] R. Ducournau. Les incertitudes de la classification incertaine. *Actes de la conférence Langages et Modèles à Objets (LMO'96)*, pages 183–200, Leysin, Suisse, octobre 1996. EPFL.
- [Ege 89] M. J. Egenhofer. A Formal Definition of Binary Topological Relationships. W. Litwin et H.J. Schek, éditeurs, *proceedings of the 3rd international conference on Foundations of data organization and algorithms*, LNCS 367, pages 457–472. Springer Verlag, 1989.
- [Ege 93] M. J. Egenhofer et J. Sharma. Topological Relations Between Regions in  $\mathbb{R}^2$  and  $Z^2$ . D. J. Abel et B. C. Ooi, éditeurs, *Advances in spatial databases: Proceedings of the Third International Symposium, SSD'93*, LNCS 692, pages 316–336. Springer Verlag, 1993.
- [Euz 98] J. Euzenat. Représentation de connaissance par objets. R. Ducournau, J. Euzenat, G. Masini et A. Napoli, éditeurs, *Langages et modèles à objets — État des recherches et perspectives*, Collection Didactique D-019, pages 293–319. INRIA, Le Chesnay, 1998.

- [Fra 97] A. U. Frank. *Spatial Ontology: A Geographical Information Point of View*, chapitre 5, pages 135–153. In Stock [Sto 97], 1997.
- [Fre 99] C. Freksa et D. M. Mark, éditeurs. *Spatial Information Theory, Cognitive and Computational Foundations of Geographic Information Science*, LNCS 1661. Springer, 1999. International Conference COSIT'99, Stade, Germany, August 1999.
- [Gen 98] J. Gensel. Objets et contraintes. R. Ducournau, J. Euzenat, G. Masini et A. Napoli, éditeurs, *Langages et modèles à objets — État des recherches et perspectives*, Collection Didactique D-019, pages 257–289. INRIA, Le Chesnay, 1998.
- [Gir 95] P. Girard. Construction hypothétique d'objets complexes. Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble, octobre 1995.
- [Gir 97] G. Giraudon et F. Sandakly. Interprétation de scène d'intérieur pour un robot mobile. *Technique et science informatiques*, 16(1):69–99, 1997.
- [God 94] R. Godin et R. Missaoui. An incremental concept formation approach for learning from databases. *Theoretical Computer Science*, 133(2):387–419, 1994.
- [God 95] R. Godin, R. Missaoui et H. Alaoui. Incremental Concept Formation Algorithms Based on Galois (Concepts) Lattices. *Computational Intelligence*, 11(2):246–267, 1995.
- [Gon 99] M.-R. Gonçalves. Formalisation hybride du raisonnement spatial. application à la consultation d'une base de données géographique. Thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay, septembre 1999.
- [Gou 96] J.P. Goulette. Représentation des connaissances et raisonnement spatial : une application à la description d'éléments d'architecture. *10ème congrès Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, RFIA '96*. AFCET-AFIA, 1996.
- [Gué 93] A. Guénoche et I. Van Mechelen. Galois Approach to the Induction of Concepts. I. Van Mechelen, J. Hampton, R.S. Michalski et P. Theuns, éditeurs, *Categories and Concepts. Theoretical Views and Inductive Data Analysis*, pages 287–308. Academic Press, London, 1993.
- [Har 93] R. M. Haralick et L. G. Shapiro. *Computer and Robot Vision*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1993. 2 volumes.
- [Kaw 94] T. Kawashima, K. Yoshino et Y. Aoki. Qualitative Image Analysis of Group Behaviour. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'94)*, pages 690–693, 1994.
- [Kök 94] T. Kökény. Satisfaction de contraintes dans un environnement orienté objets. Thèse de l'Université de Montpellier II, décembre 1994.
- [Lam 96] P. Lambrix. *Part-Whole Reasoning in Description Logics*. Thèse de Doctorat, Department of Computer and Information Science, University of Linköping, Sweden, 1996.
- [LeB 93] F. Le Ber. Modélisation des connaissances et raisonnements pour l'analyse des paysages agraires à partir de données satellitaires. Doctorat de l'Université de Nancy I, décembre 1993.
- [LeB 98] F. Le Ber et L. Mangelinck. A formal representation of landscape spatial patterns to analyze satellite images. *AI Applications*, 12(1-3):51–59, 1998.
- [LeB 99] F. Le Ber, L. Mangelinck et A. Napoli. Représentation de relations et classification de structures spatiales. *RIA*, 13(2):441–467, décembre 1999.
- [LeB 00] F. Le Ber, L. Mangelinck et A. Napoli. Étude de treillis de relations topologiques pour l'interprétation d'images satellitaires. En relecture à *Géomatique*, 2000.



- [Les 89] S. Lesniewski. *Sur les fondements de la mathématique (fragments)*. Langue – Raisonnement – Calcul. HERMES, Paris, 1989. Traduit du polonais par G. Kalinowski.
- [Lig 99] G. Ligozat. Simple Models for Simple Calculi. In Freksa and Mark [Fre 99], pages 173–188. International Conference COSIT’99, Stade, Germany, August 1999.
- [Lut 00] C. Lutz et U. Sattler. Mary likes all cats. F. Baader et U. Sattler, éditeurs, *2000 International Workshop on Description Logics*, pages 213–226, Aachen, August 2000.
- [Mac 93] R.M. MacGregor. Representing reified relations in Loom. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 5(2&3):179–183, 1993.
- [Man 95] L. Mangelinck, F. Le Ber, S. Tabbone et J.-P. Deffontaines. Reconnaissance de paysages modèles sur images satellitaires. C. Christophe, S. Lardon et P. Monestiez, éditeurs, *Colloque Étude des phénomènes spatiaux en agriculture*, volume 78, série *Les Colloques*, pages 33–45. INRA éditions, 1996.
- [Man 96] L. Mangelinck, F. Le Ber et S. Tabbone. Étude pour la reconnaissance de paysages agricoles sur des images satellitaires. *10ième Congrès Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle*, pages 53–59. AFCET, janvier 1996. Rennes, France.
- [Man 98] L. Mangelinck. Représentation et classification de structures spatiales. Application à la reconnaissance de paysages agricoles. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy 1, octobre 1998.
- [Mas 89] G. Masini, A. Napoli, D. Colnet, D. Léonard et K. Tombre. *Les langages à objets*. InterEditions, 1989.
- [Mas 99] C. Masolo et L. Vieu. Atomicity vs. Infinite Divisibility of Space. In Freksa and Mark [Fre 99], pages 235–250. International Conference COSIT’99, Stade, Germany, August 1999.
- [Mas 00] C. Masolo. Critères de comparaison et de construction de théories axiomatiques pour la représentation de connaissances : ontologies de l’espace et du temps. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier – Toulouse et Università degli Studi di Padova, février 2000.
- [Met 00] J.-L. Metzger. Acquisition, modélisation et représentation de connaissances pour le raisonnement à partir de cas. application à l’étude d’organisations spatiales agricoles. Mémoire de DEA Informatique de l’Université Henri Poincaré Nancy 1, juillet 2000.
- [Mey 89] B. Meyer. *Conception et programmation par objets, pour du logiciel de qualité*. InterEditions, Paris, 1989.
- [Mis 89] M. Missikoff et M. Scholl. An Algorithm for Insertion into a Lattice: Application to Type Classification. W. Litwin et H.-J. Scheck, éditeurs, *Foundations of Data Organization and Algorithms*, LNCS 367, pages 64–82. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Nap 92a] A. Napoli. Représentations à objets et raisonnement par classification en intelligence artificielle. Thèse de Doctorat d’État, Université de Nancy 1, 1992.
- [Nap 92b] A. Napoli. Subsumption and Classification-Based Reasoning in Object-Based Representations. *Proceedings of the 10th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI’92), Vienna, Austria*, pages 425–429, 1992.
- [Nap 97] A. Napoli. Une introduction aux logiques de descriptions. Rapport de Recherche no. RR 3314, INRIA, 1997.

- [Neb 90] B. Nebel. *Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems*. LNCS 422. Springer Verlag, 1990.
- [Nie 89] H. Niemann. *Pattern Analysis and Understanding*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [Pad 94] L. Padgham et P. Lambrix. A Framework for Part-of Hierarchies in Terminological Logics. *Proceedings of the Fourth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 485–496, Bonn, Allemagne, 1994.
- [Pag 00] M. Page, J. Gensel, C. Capponi, C. Bruley, P. Genoud et D. Ziébelin. Représentation de connaissances au moyen de classes et d'associations : le système AROM. C. Dony, éditeur, *Actes de la conférence LMO 2000*, pages 91–106, Montréal, Canada, janvier 2000. Hermès.
- [PS 93] P. F. Patel-Schneider et B. Swartout. Description logic specification from the KRSS effort. Working version (draft), June 1993.
- [Ran 92a] D. A. Randell et A. G. Cohn. Exploiting Lattices in a Theory of Space and Time. *Computers Math. Applic.*, 23(6-9):459–476, 1992.
- [Ran 92b] D. A. Randell, A. G. Cohn et Z. Cui. Computing Transitivity Tables: A Challenge For Automated Theorem Provers. *Proceedings of the 11th International Conference on Automated DEduction, CADE'92*, LNCS 607. Springer-Verlag, 1992.
- [Ran 92c] D. A. Randell, Z. Cui et A. G. Cohn. A Spatial Logic based on Regions and Connection. *3rd International Conference on Knowledge Representation and Reasoning*, pages 165–176. Morgan Kaufmann, 1992.
- [Rum 87] J. Rumbaugh. Relations as Semantic Constructs in an Object-Oriented Language. *Proceedings of the 2nd OOPSLA*, pages 466–481, Orlando, USA, 1987. ACM SIGPLAN Notices 22(12).
- [Rum 94] J. Rumbaugh. Building boxes: Composite Objects. *Journal of Object-Oriented Programming*, 7(7):12–22, 1994.
- [Sim 99] A. Simon et A. Napoli. Building viewpoints in an object-based representation system for knowledge discovery in databases. S. Rubin, éditeur, *Proceedings of the First International Conference on Information Reuse and Integration (IRI'99), Atlanta, Georgia*, pages 104–108. The International Society for Computers and Their Applications, ISCA, 1999.
- [SS 91] M. Schmidt-Schauß et G. Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artificial Intelligence*, 48(1):1–26, 1991.
- [Sto 97] O. Stock, éditeur. *Spatial and Temporal Reasoning*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [Tan 95] T. Tanzi et T. Ubeda. Contrôle topologique de la cohérence dans les bases de données géographiques : application aux réseaux. *Revue internationale de géomatique*, 5(2):131–155, 1995.
- [Var 96] A. C. Varzi. Parts, wholes, and part-whole relations : the prospects of mereotopology. *Data & Knowledge Engineering*, 20:259–286, 1996.
- [Var 98] A. C. Varzi. Basic problems of mereotopology. N. Guarino, éditeur, *Formal Ontology in information systems, (FOIS'98)*, pages 29–38, Trento, Italy, June 6–8 1998. IOS Press.
- [Vie 91] L. Vieu. Sémantique des relations spatiales et inférence spatio-temporelles : une contribution à l'étude des structures formelles de l'espace en Langage Naturel. Thèse de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, 1991.

- [Vie 93] L. Vieu. A Logical Framework for Reasoning about Space. *Spatial Information Theory, COSIT'93*, LNCS 716, pages 25–35. Springer-Verlag, 1993.
- [Vie 97] L. Vieu. *Spatial Representation and Reasoning in Artificial Intelligence*, chapitre 1. In Stock [Sto 97], 1997.
- [Wen 98] L. Wendling, J. Desachy et A. Paries. Reconnaissance d'objets définis à partir d'une décomposition d'images en arbres de régions floues. *RFIA'98 Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, volume 1, pages 161–168, Clermont-Ferrand, janvier 1998. Afcet, Afa, Université Blaise Pascal.
- [Wil 92] R. Wille. Concept lattices and conceptual knowledge systems. *Computers & Mathematics With Applications*, 23(6–9):493–515, 1992.
- [Win 87] M. E. Winston, R. Chaffin et D. Hermann. A taxonomy of part-whole relations. *Cognitive Science*, 11:417–444, 1987.
- [Win 99] S. Winter et A. U. Frank. Functional Extensions of a Raster Representation for Topological Relations. *Interoperating Geographic Informations Systems, 2nd Int. Conference, INTEROP'99*, LNCS 1580, pages 293–304, Zürich, 1999. Springer.