



**HAL**  
open science

# Conditions aux limites absorbantes pour les equations de Maxwell en milieu conducteur tridimensionnel

Patrick Joly, R. Vezinet

► **To cite this version:**

Patrick Joly, R. Vezinet. Conditions aux limites absorbantes pour les equations de Maxwell en milieu conducteur tridimensionnel. [Rapport de recherche] RR-1728, INRIA. 1992. inria-00076967

**HAL Id: inria-00076967**

**<https://inria.hal.science/inria-00076967v1>**

Submitted on 29 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.: (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

1992



25<sup>ème</sup>  
anniversaire

N° 1728

*Programme 6*

*Calcul Scientifique, Modélisation et  
Logiciels numériques*

### CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES POUR LES EQUATIONS DE MAXWELL EN MILIEU CONDUCTEUR TRIDIMENSIONNEL

Patrick JOLY  
René VEZINET

Juillet 1992



★ RR - 1728 ★

CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES  
POUR LES EQUATIONS DE MAXWELL EN  
MILIEU CONDUCTEUR TRIDIMENSIONNEL

ABSORBING BOUNDARY CONDITIONS FOR  
MAXWELL'S EQUATIONS IN 3D CONDUCTIVE  
MEDIA

Patrick JOLY <sup>1</sup> and René VEZINET <sup>2</sup>

## Résumé

Dans cet article nous construisons des conditions aux limites de type absorbant pour les équations de Maxwell tridimensionnelles en milieu conducteur. Ces conditions sont obtenues à partir de conditions absorbantes pour l'équation des ondes scalaire avec terme d'amortissement. Elles sont locales en espace et en temps. Une attention particulière est apportée à l'analyse de la stabilité et de la précision de ces conditions et le problème des arêtes et des coins de la boîte de calcul est examiné. Quelques résultats numériques validant notre approche sont présentés.

## Abstract

In this article we construct absorbing boundary conditions for Maxwell's equations in a 3D conductive media. These conditions are derived from the ones which are constructed for a scalar wave equation with a damping term. They are local in space and time. A particular attention is brought to the analysis of the precision of these conditions and the problem of the edges and corners of the domain of calculation is examined. Some numerical results which validate our approach are presented.

## Mots clé

Equations de Maxwell - Conditions aux limites absorbantes - Milieux conducteurs

## Key words

Maxwell's equations - Absorbing boundary conditions - Conductive media

---

<sup>1</sup>INRIA Domaine de Voluceau-Rocquencourt B.P. 105 78153 Le Chesnay Cédex

<sup>2</sup>Centre d'Etudes de Gramat

# 1 Introduction - Position du problème

Nous nous intéressons dans ce travail aux équations de Maxwell 3D, en milieu conducteur supposé non borné en espace. Nous supposons dans la suite avoir appliqué un changement d'échelle en espace temps permettant d'admettre que les constantes diélectriques et magnétiques du milieu, à savoir  $\epsilon$  et  $\mu$ , sont égaux à 1. La vitesse des ondes électromagnétiques est alors égale à 1 et les équations de Maxwell s'écrivent :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E - \operatorname{rot} H = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0 \end{cases}$$

où :

- $E$  désigne le champ électrique
- $H$  désigne le champ magnétique
- $\sigma > 0$  désigne la conductivité

La conductivité  $\sigma$  sera supposée constante. Nous nous intéressons ici au problème des conditions aux limites artificielles, ou conditions aux limites absorbantes, à associer au système (1.1) afin de pouvoir se restreindre, à des fins numériques évidentes, à un domaine de calcul borné. Ce problème d'importance pratique cruciale, aux aspects théoriques délicats, a déjà été traité extensivement dans la littérature mathématique, notamment en ce qui concerne les équations hyperboliques (ou systèmes hyperboliques) dont font partie les équations de Maxwell dans le cas non conducteur, c'est-à-dire lorsque  $\sigma = 0$ . Les idées originales sont dûes à Engquist et Majda, il y a une dizaine d'années, et ont d'abord été appliquées à l'équation des ondes scalaires ([10],[11],[5]). Le principe consiste à effectuer un développement approché d'une condition transparente ou condition artificielle exacte. La nécessité d'une telle approximation est due au caractère non local, en espace et en temps, de cette condition transparente. On cherche donc une condition approchée locale en espace et en temps. Le petit paramètre intervenant dans le processus d'approximation à une signification physique très claire : il s'agit de l'angle d'incidence  $\theta$  d'une onde plane, c'est-à-dire l'angle entre la normale au bord artificiel et la direction de propagation de cette onde. On peut d'ailleurs à l'aide de ce paramètre  $\theta$  définir la précision d'une condition absorbante, ou condition transparente approchée : si  $R(\theta)$  désigne le coefficient de réflexion d'une onde d'angle d'incidence  $\theta$ , nous dirons que la condition approchée est d'ordre  $N$  si et seulement si (rappelons que nous voulons minimiser  $R(\theta)$ ) :

$$(1.2) \quad R(\theta) = o(\theta^{2N}) \quad (\theta \rightarrow 0)$$

c'est ce nombre  $N$  que par la suite nous désignerons par "ordre d'approximation en espace", pour une raison que le contexte clarifiera (voir section 2).

Pour l'équation des ondes, les conditions absorbantes d'ordre 1 et 2 sont obtenues à l'aide de développements de Taylor, d'ordres 0 et 1, du symbole de l'opérateur non local intervenant dans l'expression de la condition transparente. Ce développement est effectué par rapport au paramètre  $\theta$ . Pour les équations de Maxwell, on peut appliquer la même approche (voir [6], [21]). Malheureusement si cette approche s'avère opérante pour l'obtention de conditions d'ordre 1, elle échoue pour les conditions d'ordre 2 car les problèmes aux limites correspondants sont mathématiquement mal posés. Dans [16], Joly-Mercier ont proposé une approche totalement différente pour la construction de conditions d'ordre 2 stables. En outre leurs conditions d'ordre 2 présentent l'avantage de s'exprimer uniquement à l'aide d'opérateurs différentiels du premier ordre, ce qui les rend particulièrement simples et agréables à aborder sur le plan numérique. Depuis, A. Oumansour [2] a démontré que l'on pouvait réinterpréter la condition Joly-Mercier à l'aide d'un développement de Padé du symbole de l'opérateur apparaissant dans la condition transparente. Cette dernière approche, de même que la démarche Joly-Mercier, se généralise aux conditions d'ordre supérieur.

La difficulté que nous proposons de traiter ici est la prise en compte des phénomènes de mémoire et de dissipation dus à l'introduction de la conductivité. En fait notre objectif est de construire une condition aux limites absorbantes du second ordre en espace (au sens que nous avons déjà précisé) qui satisfasse les critères suivants :

- la condition doit être locale en espace et temps
- elle doit s'exprimer à l'aide d'opérateurs différentiels
- elle doit redonner la condition Joly-Mercier du second ordre [16] lorsque  $\sigma = 0$
- elle doit donner lieu, pour tout  $\sigma \geq 0$ , à un problème mathématiquement bien posé.

Pour atteindre cet objectif, nous essaierons de suivre la démarche de [16]. Pour cela il nous faut d'abord traiter le modèle bidimensionnel scalaire correspondant au système (1.1). Ce modèle n'est autre que l'équation des ondes amortie :

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

Nous construisons et analysons une famille de conditions aux limites pour l'équation (1.3) au paragraphe 2 dans ce rapport. Puis nous étendons ces conditions au système 3D (1.1) au paragraphe 3. Dans chaque cas, nous nous attachons à démontrer dans la mesure du possible que les conditions aux limites sont stables au sens où les problèmes aux limites associés sont mathématiquement bien posés et nous expliquons comment traiter les problèmes délicats mais importants sur le plan pratique, liés aux arêtes et aux coins.

Signalons qu'à priori, les conditions aux limites que nous construirons seront meilleures pour les faibles valeurs de  $\sigma$  (du moins faibles vis-à-vis de la fréquence). Lorsque la conductivité  $\sigma$  devient grande, le phénomène de diffusion l'emporte sur le phénomène de propagation et on peut approcher alors les équations de Maxwell par un système de nature

parabolique. Dans ce contexte, l'un des auteurs (voir[15]) a déjà proposé un système de conditions aux limites artificielles. Ces conditions sont locales en temps mais non locales en espace.

## 2 Une famille de conditions aux limites absorbantes pour l'équation des ondes scalaires (2D) avec terme d'amortissement.

Nous considérons donc l'équation

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

où  $\sigma$  désigne une constante strictement positive. Nous considérons comme problème modèle le problème de Cauchy pur associé aux données initiales :

$$(2.2) \quad \begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y) \end{cases}$$

Rappelons l'identité d'énergie associée à (2.2) :

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx dy \right) + \sigma \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy = 0$$

qui prouve que le terme  $\sigma \frac{\partial u}{\partial t}$  est un terme dissipatif. Nous supposons maintenant que les données initiales  $(u_0, u_1)$  sont à support dans la demi espace  $y < 0$  :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset \Omega \\ \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < 0\} \end{cases}$$

et nous posons le problème de caractériser la restriction de  $u$  au demi espace  $\Omega$  à l'aide de l'introduction d'une condition aux limites artificielles sur la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$

## 2.1 Une condition transparente

Désignons par  $\hat{u}(k, y, \omega)$  la transformée de Fourier en  $x$  et  $t$  de la fonction  $u(x, y, t)$  :

$$(2.5) \quad \hat{u}(k, y, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} u(x, y, t) e^{i(\omega t - kx)} dx dt$$

Compte tenu de l'hypothèse (2.4) sur les conditions initiales,  $\hat{u}(k, y, \omega)$  vérifie pour tout  $(k, \omega)$  :

$$(2.6) \quad \frac{d^2 \hat{u}}{dy^2} + (k^2 - \omega^2 - i\omega\sigma) \hat{u} = 0 \quad y \geq 0$$

Par conséquent, en sélectionnant l'unique solution physiquement acceptable, c'est-à-dire celle qui décroît dans la direction  $y > 0$ , nous obtenons :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \hat{u}(k, y, \omega) = \hat{u}(k, 0, \omega) \exp - (k^2 - \omega^2 - i\omega\sigma)^{1/2} y, & y > 0 \\ \Re([k^2 - \omega^2 - i\omega\sigma]^{1/2}) > 0 \end{cases}$$

Par conséquent nous obtenons en  $y = 0$  :

$$(2.8) \quad \frac{d\hat{u}}{dy}(k, 0, \omega) + (k^2 - \omega^2 - i\omega\sigma)^{1/2} \hat{u}(k, 0, \omega) = 0$$

En d'autres termes, nous avons montré qu'une condition transparente exacte est donnée par :

$$(2.9) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + Bu = 0 \text{ sur } \Gamma$$

où  $B$  est l'opérateur pseudo-différentiel sur  $\Gamma$  de symbole  $(k^2 - \omega^2 - i\omega\sigma)^{1/2}$  :

$$(2.10) \quad (\hat{B}\varphi)(k, \omega) = (k^2 - \omega^2 - i\omega\sigma)^{1/2} \hat{\varphi}(k, \omega)$$

Nous signifions par condition transparente le fait que la restriction de  $u$  (solution de (2.1),(2.2)) à  $\Omega$  est entièrement caractérisée comme étant la solution du problème :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial y} + Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \\ + \text{conditions initiales} \end{cases}$$

## 2.2 Conditions absorbantes locales en espace

La condition transparente (2.9) est non locale en espace et en temps. Nous nous proposons maintenant d'en construire des approximations locales en espace en nous inspirant des idées originales d'Engquist-Majda ([11],[10]). Nous commençons par écrire :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} [k^2 - (\omega^2 + i\omega\sigma)]^{1/2} = i\omega(1 + i\frac{\sigma}{\omega})^{1/2}(1 - \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma})^{1/2} \\ \Re e \left( 1 - \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma} \right)^{1/2} > 0 \end{array} \right.$$

et nous allons obtenir une approximation locale en espace en approchant la fonction  $(1 - \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma})^{1/2}$  pour les petites valeurs du paramètre  $\frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma}$ . Ceci peut être considéré comme une approximation "hautes fréquences" et correspond en tous cas à l'approche Engquist-Majda lorsque  $\sigma = 0$ . Nous nous limiterons ici aux deux premières approximations:

### Approximation d'ordre 1 en espace

Elle consiste simplement à remplacer la fonction  $(1 - z)^{1/2}$  par sa valeur en  $z=0$  :

$$(2.13) \quad \left( 1 - \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma} \right)^{1/2} \simeq 1$$

La condition absorbante correspondante s'écrit :

$$(2.14) \quad \frac{d\hat{u}}{dy} - i\omega \left( 1 + i\frac{\sigma}{\omega} \right)^{1/2} \hat{u} = 0$$

Si nous désignons par  $T_\sigma$  l'opérateur de convolution en temps de symbole  $(1 + i\frac{\sigma}{\omega})^{1/2}$ :

$$(2.15) \quad \widehat{T_\sigma \varphi}(k, \omega) = \left( 1 + i\frac{\sigma}{\omega} \right)^{1/2} \hat{\varphi}(k, \omega)$$

cette condition s'écrit simplement en variables  $(x, y, t)$  :

$$(2.16) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + T_\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Notons que pour  $\sigma = 0$ ,  $T_\sigma$  n'est autre que l'opérateur identité, si bien qu'on retombe sur la condition du premier ordre classique :

$$(2.17) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$



## Approximation d'ordre 2 en espace

Nous approchons cette fois la fonction  $(1 - z)^{1/2}$  par son développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de  $z = 0$  :

$$(2.18) \quad \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma}$$

La condition absorbante correspondante en variables  $(k, y, \omega)$  s'écrit :

$$(2.19) \quad \frac{d\hat{u}}{dy} - i\omega \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\omega^2 + i\omega\sigma}\right) \hat{u} = 0$$

Nous multiplions cette égalité par  $-i\omega(1 + i\frac{\sigma}{\omega})^{1/2}$  ce qui donne :

$$(2.20) \quad -i\omega \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega}\right)^{1/2} \frac{d\hat{u}}{dy} - (\omega^2 + i\omega\sigma) \hat{u} + \frac{1}{2} k^2 \hat{u} = 0$$

c'est-à dire, en variables  $(x, y, t)$  :

$$(2.21) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Contrairement à la condition d'ordre 1 (2.16), (2.21) fait intervenir des dérivées tangentielles. Bien entendu, pour  $\sigma = 0$ , nous retrouvons la condition du second ordre classique ([11], [10],[5]) :

$$(2.22) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

### 2.3 Conditions absorbantes locales en espace et en temps

Contrairement à ce qui se passe dans le cas  $\sigma = 0$ , le travail n'est pas encore terminé à ce stade car les conditions (2.16) et (2.21) sont toujours non locales en temps du fait de présence de l'opérateur  $T_\sigma$  qui introduit en fait un terme de mémoire. Pour pallier cet inconvénient il s'agit de réaliser une nouvelle approximation, locale en temps, de l'opérateur  $T_\sigma$ . L'idée pour atteindre cet objectif n'est pas originale et consiste à approcher le symbole de  $T_\sigma$  par une fraction rationnelle à coefficients réels de la variable  $i\omega$ . Ceci nous ramène au problème de l'approximation rationnelle de la fonction  $z \rightarrow (1 + z)^{1/2}$ . Ce problème n'est pas nouveau et a été traité pour diverses applications ([11], [7],[15],[3]). Nous reprenons ici, en omettant les détails et les démonstrations la démarche adoptée dans [15].

Le principe consiste à faire apparaître  $f(z) = (1 + z)^{1/2}$  comme le point fixe d'une application homographique :

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 + z \\ \Rightarrow (y - 1)(y + 1) &= z \\ \Rightarrow y &= 1 + \frac{z}{1 + y} \end{aligned}$$

Nous construirons alors une suite de fonctions  $f_n(z)$  convergeant vers  $f(z) = (1+z)^{1/2}$  par la méthode des approximations successives. Nous considérons par exemple la suite définie par la récurrence suivante :

$$(2.23) \quad \begin{cases} f_0(z) = 1 \\ f_{n+1}(z) = 1 + \frac{z}{1+f_n(z)} \end{cases}$$

Le choix  $f_0(z) = 1$  assure par construction que  $f_n(0) = 1$  pour tout  $n$ , de telle sorte que l'approximation est exacte pour  $z = 0$ . Par récurrence il est clair que  $f_n(z)$  est une fraction rationnelle. A titre d'exemple :

$$(2.24) \quad \begin{cases} f_1(z) = 1 + \frac{z}{2} \\ f_2(z) = 1 + \frac{2z}{4+z} \\ f_3(z) = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z}{2(2+z)} \\ f_4(z) = 1 + \frac{4z(2+z)}{16+12z+z^2} \end{cases}$$

Par récurrence, il est facile d'établir que

$$\frac{f_{n+1}(z) - f(z)}{f_{n+1}(z) + f(z)} = \left[ \frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right] \left[ \frac{f_n(z) - f(z)}{f_n(z) + f(z)} \right]$$

Par conséquent

$$(2.25) \quad \frac{f_n(z) - f(z)}{f_n(z) + f(z)} = \left( \frac{1-f(z)}{1+f(z)} \right)^{n+1}$$

et par suite en posant  $\rho(z) = \frac{1-f(z)}{1+f(z)}$  :

$$(2.26) \quad f_n(z) = \frac{1 - \rho(z)^{n+1}}{1 + \rho(z)^{n+1}} f(z)$$

Rappelons que l'application  $Z \rightarrow \frac{1-Z}{1+Z}$  applique le demi plan ouvert  $\Re(Z) > 0$  dans le disque unité ouvert  $|Z| < 1$ . Pour tout  $z = i\lambda, \lambda \in \mathbf{R}, \Re(f(z)) > 0$ , donc  $|\rho(z)| < 1$  et la formule (2.26) prouve que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  exponentiellement vite. On a en fait le résultat plus précis suivant [15]:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \forall M > 0, \exists C(M) > 0, C(M) < 1 \text{ tel que} \\ \sup_{|\lambda| \leq M} |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \leq C(M)^n \end{cases}$$

où la constante  $C(M)$  croit avec  $M$ . Ce résultat exprime que la convergence est d'autant meilleure que  $|\lambda|$  est petit. qui est cohérent avec la propriété suivante :

$$(2.28) \quad f_n(z) - f(z) = O(z^{n+1}) \quad z \rightarrow 0$$

Ceci démontre que la suite  $f_n(z)$  n'est autre que la suite des approximations de Padé de  $f(z)$  à l'origine (voir également [3]).

Outre les propriétés de convergence de la suite  $f_n(z)$ , il est utile, comme on le verra plus tard, de connaître un développement en éléments simples de la fonction  $f_n(z)$ . On démontre le résultat suivant :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{2p}(z) = 1 + \frac{2}{2p+1} \sum_{k=1}^p \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)z}{1 + z \cos^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} \\ f_{2p+1}(z) = 1 + \frac{z}{2p+2} + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^p \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+2}\right)}{1 + z \cos^2\left(\frac{k\pi}{2p+2}\right)} \end{array} \right.$$

L'exemple de la suite  $f_n(z)$  définie précédemment suggère en fait une généralisation qui consiste à considérer à priori des approximations de  $f(z)$  ayant la forme suivante :

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^n z}{1 + \alpha_k^n z} \\ \alpha_k^n \geq 0, \beta_k^n > 0 \end{array} \right.$$

L'exemple (2.29) prouve qu'il est possible à l'aide de telles fractions rationnelles de bien approcher  $f(i\lambda)$  par  $f_n(i\lambda)$  pour tout  $\lambda$  réel. Notons toutefois que l'approximation est nécessairement mauvaise pour  $\lambda$  grand puisque lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $f(i\lambda) = 0(\lambda^{1/2})$  alors que  $f_n(i\lambda) = 0(\lambda)$  ou  $0(1)$ . Autrement dit en choisissant d'approcher  $f(i\frac{\sigma}{\omega})$  par  $f_n(i\frac{\sigma}{\omega})$  nous privilégions les petites valeurs de  $\frac{\sigma}{\omega}$ . Cette option nous paraît légitime dans la mesure où :

- une telle hypothèse privilégie les hautes fréquences ce qui est cohérent avec la première phase de l'approximation (voir section 1)
- ce choix défavorise les grandes valeurs de  $\sigma$ . Ceci n'est pas trop gênant si on observe que pour  $\sigma$  grand, les ondes sont fortement amorties au cours de leur propagation (et ce d'autant plus que la fréquence est grande) auquel cas l'intérêt de l'utilisation de conditions absorbantes très efficaces est moins important.

Quoiqu'il en soit, en choisissant (2.30) comme approximation de  $f(z)$ , nous approchons l'opérateur  $T_\sigma$  par l'opérateur  $T_\sigma^n$  défini par :

$$(2.31) \quad (\widehat{T_\sigma^n \varphi}) = f_n\left(i\frac{\sigma}{\omega}\right) \hat{\varphi}$$

Nous avons donc :

$$(2.32) \quad (\widehat{T_\sigma^n \varphi}) = \hat{\varphi} + \sigma \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^n}{\alpha_k^n \sigma - i\omega} \hat{\varphi}$$

ce que nous pouvons écrire

$$(2.33) \quad \begin{cases} (\widehat{T_\sigma^n \varphi}) = \hat{\varphi} + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_k^n \hat{\psi}_k \\ (\alpha_k^n \sigma - i\omega) \hat{\psi}_k = \hat{\varphi} \end{cases}$$

soit encore, en variables physiques  $(x, y, t)$  :

$$(2.34) \quad \begin{cases} T_\sigma^n \varphi = \varphi + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_k^n \psi_k \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \alpha_k^n \sigma \psi_k = \varphi \\ \psi_k(0) = 0. \end{cases}$$

Sous cette forme, l'opérateur  $T_\sigma^n$  apparaît clairement comme une perturbation de l'identité, les effets de mémoire existant dans l'opérateur  $T_\sigma$  étant "pris en charge" par les inconnues auxiliaires  $\psi_k$ , à travers la résolution d'équations différentielles ordinaires. Notons que, sous l'hypothèse  $\alpha_k > 0$ , chacune des équations différentielles est dissipative. En fait l'approximation réalisée revient à approcher le noyau de convolution de l'opérateur  $T_\sigma$  par la somme de la masse de Dirac à l'origine et d'un nombre fini d'exponentielles décroissantes :

$$(2.35) \quad \delta(t) + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_k^n e^{-\alpha_k^n \sigma t}$$

De la propriété

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} f\left(i \frac{\sigma}{\omega}\right) = 1$$

jointe à un argument d'homogénéité on déduit que le noyau de convolution de l'opérateur  $T_\sigma$  est de la forme :

$$\delta(t) + \sigma R(\sigma t)$$

où  $R(\cdot)$  est une fonction régulière. Cela signifie que par construction, la partie "Dirac" du noyau de convolution est conservée exactement et que seule la partie régulière est approchée par les exponentielles décroissantes. On peut en fait expliciter complètement la fonction  $R(t)$  à l'aide de fonctions usuelles ([1]) :

$$R(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left( I_0\left(\frac{t}{2}\right) + I_1\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

où  $I_n(t)$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $n$  de première espèce définie notamment par la formule :

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-t \cos \phi} \cos(n\phi) d\phi$$

On peut en particulier préciser le comportement de  $R(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :

$$R(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (t \rightarrow +\infty)$$

ce qui prouve que l'approximation du noyau de convolution sera nécessairement défectueuse aux temps longs (ce qui correspond à la mauvaise approximation de la transformée de Fourier pour les basses fréquences).

L'importance de l'hypothèse de positivité des coefficients  $\alpha_k^n$  et  $\beta_k^n$  apparaîtra de façon encore plus claire au moment de l'étude de la stabilité mathématique du problème aux limites. Quoiqu'il en soit, les conditions absorbantes locales espace-temps que nous proposons sont les suivantes :

#### Conditions d'ordre 1 en espace, $n$ en temps

Nous les obtenons en remplaçant  $T_\sigma$  par  $T_\sigma^n$  dans (2.16)

$$(2.36) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + T_\sigma^n \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$(2.37) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_k^n \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \alpha_k^n \sigma \psi_k = u & 1 \leq k \leq n \\ \psi_k(0) = 0 & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

#### Conditions d'ordre 2 espace, $n$ en temps

Nous les obtenons en remplaçant  $T_\sigma$  par  $T_\sigma^n$  dans (2.21).

$$(2.38) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + T_\sigma^n \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

ce qui équivaut à écrire :

$$(2.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \beta_k^n \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \alpha_k^n \sigma \psi_k = \frac{\partial u}{\partial y} & 1 \leq k \leq n \\ \psi_k(0) = 0 & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Notons que sous leurs formes (2.37) et (2.39), les conditions aux limites (2.36) et (2.38) sont bien adaptées à une discrétisation par différences finies, voire par éléments finis. (Ceci ne signifie pas qu'on puisse utiliser n'importe quel schéma, fût-il consistant, pour les approcher).

Bien entendu une augmentation du nombre  $n$  de fractions rationnelles apparaissant dans le développement (2.30) correspond d'une part à une augmentation de la précision des conditions limites, d'autre part à une augmentation du coût calcul (plus grand nombre de fonctions auxiliaires à traiter). Il y aura donc en pratique un compromis à trouver, cela est habituel en analyse numérique, entre coût et précision. Notons toutefois que les équations régissant l'évolution des fonctions  $\psi_k$  étant purement locales en espace, le surcoût introduit par leur présence devrait être relativement marginal, si on se limite à  $n \leq 20$  par exemple.

## 2.4 Analyse de la stabilité des problèmes aux limites

### 2.4.1 Une propriété des opérateurs $T_\sigma^n$

Nous allons établir une propriété de positivité des opérateurs  $T_\sigma^n$  (propriété évidente lorsque  $\sigma = 0$ ) qui va s'avérer essentielle dans l'étude de la stabilité des problèmes aux limites.

**Théorème 1** *Pour tout  $T > 0$ ,  $T_\sigma^n$  applique continuellement  $L^2(0, T)$  dans  $L^2(0, T)$  et satisfait, dès que  $\alpha_k^n \geq 0, \beta_k^n \geq 0$ ;*

$$(2.40) \quad \forall \varphi \in L^2(0, T) \quad \int_0^T T_\sigma^n \varphi \cdot \varphi \, dt \geq 0$$

#### Démonstration

La continuité de  $T_\sigma^n$  étant évidente nous nous bornerons à établir la propriété (2.40). De la définition (2.34) de l'opérateur  $T_\sigma^n \varphi$ , nous déduisons :

$$(2.41) \quad \left| \begin{array}{l} T_\sigma^n \varphi \cdot \varphi = |\varphi|^2 + \sigma \sum_{k=1}^n \beta_k^n \varphi \psi_k \\ \varphi \psi_k = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\psi_k|^2 + \alpha_k^n \sigma |\psi_k|^2 \end{array} \right.$$

Après intégration entre 0 et  $T$  nous obtenons, compte tenu de  $\psi_k(0) = 0$ ;

$$(2.42) \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^T T_\sigma^n \varphi \cdot \varphi \, dt = \int_0^T |\varphi|^2 \, dt + \sigma^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^n \beta_k^n \int_0^T |\psi_k|^2 \, dt \\ \quad \quad \quad + \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^n |\psi_k(T)|^2 \end{array} \right.$$

ce qui établit la positivité de  $T_\sigma^n$  dès que les coefficients  $\alpha_k^n$  et  $\beta_k^n$  sont positifs.

#### Remarque

En fait, l'identité (2.42) montre que l'opérateur  $T_\sigma^n$  est coercif (uniformément par rapport à  $n$  et  $\sigma$ ) dans  $L^2(0, T)$  puisque :

$$(2.43) \quad (T_\sigma^n \varphi, \varphi)_{L^2(0, T)} \geq \|\varphi\|_{L^2(0, T)}^2$$

#### 2.4.2 Le cas de la condition d'ordre 1 en espace

Nous nous intéressons au problème :

$$(2.44) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + T_\sigma^n \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & y = 0, t > 0 \end{cases}$$

$u$  étant solution de l'équation des ondes amorties (2.1), nous avons :

$$(2.45) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right\} + \sigma \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} dx = 0$$

Nous utilisons alors la condition aux limites satisfaite par  $u$  et intégrons (2.45) entre 0 et  $T$ . Nous obtenons :

$$(2.46) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_\Omega ( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u|^2 )(T) dx dy + \sigma \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy ds \\ & + \int_0^T \int_\Gamma T_\sigma^n \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx dy = \frac{1}{2} \int_\Omega (|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2) dx dy \end{aligned} \right.$$

d'où nous déduisons en particulier que

$$(2.47) \quad \forall t \geq 0 \quad \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq \frac{1}{2} \int_\Omega (|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2) dx dy$$

ce qui établit que le problème (2.44) est bien posé. En fait, grâce à l'identité (2.42) établie dans la démonstration du théorème 1, nous pouvons établir un résultat plus précis :

**Théorème 2** *Le problème (2.1), (2.36) admet une solution et une seule :*

$$u \in C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$$

dès que les données initiales satisfont :

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

En outre, les fonctions  $\psi_k$  définies dans (2.37), vérifient :

$$\psi_k \in H^1(0, T; L^2(\Gamma)) \quad 1 \leq k \leq n$$

et on a l'identité d'énergie

$$(2.48) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\nabla u|^2) dx dy + \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^n \int_{\Gamma} |\psi_k|^2 dx \right\} + \\ & + \sigma \int_{\Omega} |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dx dy + \int_{\Gamma} |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dx + \sigma^2 \sum_{k=1}^n \beta_k^n \int_{\Gamma} |\psi_k|^2 dx = 0 \end{aligned} \right.$$

### Démonstration

L'identité d'énergie (2.48) s'obtient formellement en utilisant le contenu de la démonstration du théorème 2.1 et l'identité (2.46). La démonstration rigoureuse se mène sans problèmes à l'aide de techniques classiques en analyse fonctionnelle (voir par exemple [19])

### Remarque

Le problème aux limites ((2.1),(2.36)) est bien de type dissipatif puisque l'identité (2.48) prouve qu'il y a décroissance au cours du temps de l'énergie  $E(t)$  définie par :

$$(2.49) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\nabla u|^2) dx dy + \frac{\sigma}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^n \int_{\Gamma} |\psi_k|^2 d\sigma$$

### 2.4.3 Le cas de la condition d'ordre 2 en espace

Comme pour le cas de la condition d'ordre 1, nous allons nous appuyer sur l'obtention d'estimations a priori de type énergie. La démarche est toutefois assez nettement plus compliquée et nous allons utiliser sur les idées de [12]. Nous commençons par noter que si  $v$  est une fonction suffisamment régulière solution de l'équation des ondes amortie :

$$(2.50) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$$

alors on a les deux identités suivantes :

$$(2.51) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( |\frac{\partial v}{\partial t}|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx dy \right\} + \sigma \int_{\Omega} |\frac{\partial v}{\partial t}|^2 dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial y} dx$$

$$(2.52) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx dy \right) + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx dy \right) + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy = \\ & = \int_{\Omega} |\frac{\partial v}{\partial t}|^2 dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial v}{\partial y} dx \end{aligned} \right.$$



(2.51) n'est autre que (2.46) et s'obtient par multiplication de (2.1) par  $\frac{\partial v}{\partial t}$  et intégration sur  $\Omega$ . (2.52) s'obtient par multiplication de (2.50) par  $v$  et intégration sur  $\Omega$ . Nous appliquons l'identité (2.51) successivement à  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $v = \frac{\partial u}{\partial y}$  Ceci nous donne :

$$(2.53) \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right) dx dy \right\} + \sigma \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dy = \\ = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} dx$$

$$(2.54) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \right\} + \sigma \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 dx dy \\ = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} dx$$

D'autre part, en appliquant (2.51) à  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ , nous obtenons :

$$(2.55) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right) + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy + \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \\ = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} dx$$

Nous remarquons maintenant que  $u$  étant solution de (2.1) nous avons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u}{\partial t}$$

de telle sorte que la condition aux limites d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + T_{\sigma}^n \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se réécrit encore :

$$(2.56) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2T_{\sigma}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}$$

Multiplions alors (2.55) par  $\sigma$  et ajoutons le résultat à la somme des équations (2.53) et (2.54). Il vient :

$$(2.57) \quad \left[ \begin{aligned} & \frac{\sigma}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left[ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right] dx dy \right) \\ & + \sigma \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right) dx dy = -2 \int_{\Gamma} T_{\sigma}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} dx \end{aligned} \right]$$

Après intégration entre 0 et  $t$ , il vient :

$$(2.58) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right] dx dy \\ & + \sigma \int_0^t \int_{\Omega} \left[ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] dx dy ds + \int_0^t \int_{\Gamma} T_{\sigma}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} dx ds \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left| \sigma u_1 + \Delta u_0 \right|^2 + \left| \nabla u_1 \right|^2 + \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^2 + \sigma^2 \left| u_1 \right|^2 \right] dx dy \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} u_1 (\sigma u_1 + \Delta u_0) dx dy \end{aligned} \right.$$

Désignons par  $F(u_0, u_1)$  le membre de droite de l'égalité. Il est clair que :

$$(2.59) \quad F(u_0, u_1) \leq C(\sigma) \left( \|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^1}^2 \right)$$

Compte tenu de la propriété de positivité de l'opérateur  $T_{\sigma}^n$  (cf. théorème 1), on déduit, en particulier, de (2.57) l'inégalité :

$$\frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq F(u_0, u_1)$$

ce qui équivaut encore à

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \right) e^{\sigma t} \right\} \leq \frac{2}{\sigma} F(u_0, u_1) e^{\sigma t}$$

Si nous intégrons entre 0 et  $t$  cette inégalité, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq \left( \int_{\Omega} \left| u_1 \right|^2 dx \right) e^{-\sigma t} + \frac{2F(u_0, u_1)}{\sigma^2} (1 - e^{-\sigma t})$$

Cette estimation prouve que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est bornée en norme  $L^{\infty}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ . Mais de (2.57), nous tirons également après intégration en temps entre 0 et  $T$  que :

$$(2.60) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \right|^2 + \left| \Delta \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right\} dx dy dt \\ & \leq \frac{\sigma}{2} \|u_1\|_{L^2}^2 + C(\sigma) T \|u_0\|_{H^2}^2 + \|u_1\|_{H^1}^2 \end{aligned} \right.$$

ce qui prouve (en utilisant en outre le fait que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ) que la solution  $u$  est contrôlée en norme  $H^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ . Nous sommes en mesure d'énoncer le :

**Théorème 3** Avec les hypothèses :

$$(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

le problème ((2.1), (2.38)) admet une solution et une seule qui satisfait :

$$u \in H^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$$

en outre l'application  $(u_0, u_1) \rightarrow u$  est linéaire continue de  $H_0^2(\Omega) \times H_0^1$  à valeurs dans  $H^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$

### Remarque

Une théorie bien connue a été développée, notamment par Hersh [13] et Kreiss [17], (voir également Higdon [14] pour une revue très complète) pour l'étude de la stabilité des problèmes hyperboliques mixtes. Cette théorie est fondée sur l'analyse modale dans le cas du demi espace. Elle n'est malheureusement pas directement applicable ici car notre équation n'est pas hyperbolique. Il est probable toutefois qu'une analyse modale "à la Kreiss" de notre problème mènerait à un résultat d'existence et d'unicité. Nous avons préféré ici une approche par estimations a priori, plus précise à notre avis et susceptible d'être généralisée au cas de coefficients variables.

## 2.5 Le problème des coins

Si l'on désire ramener les calculs effectifs à un domaine borné sans introduire de frontière courbe il est à tout moins nécessaire de traiter le cas de coins à angle droit. Ce problème ne se pose en fait que pour les conditions du second ordre. Considérons pour simplifier le problème modèle du quart de plan  $\{x < 0, y < 0\}$ . Dans le cas de l'équation purement hyperbolique, il est nécessaire d'ajouter une condition de coin en  $(x = 0, y = 0)$  pour assurer l'unicité d'une solution d'énergie finie. Il va de soit qu'il en est de même ici et nous allons établir cette équation de coin en suivant précisément la démarche de [4].

Nous raisonnons donc par compatibilité entre les équations sur les bords et l'équation à l'intérieur. Nous écrivons, donc au point  $(0, 0)$ :

- l'équation sur le bord  $y = 0$

$$(2.61) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- l'équation sur le bord  $x = 0$

$$(2.62) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- l'équation à l'intérieur

$$(2.63) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

Nous effectuons la combinaison linéaire :

$$(2.61) + (2.62) - \frac{1}{2}(2.63)$$

de façon à faire disparaître les termes en  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Après intégration (une fois) en temps, nous obtenons :

$$(2.64) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u + \frac{2}{3}T_\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

Pour l'analyse mathématique du problème correspondant dans le cas  $\sigma = 0$ , nous renvoyons le lecteur à [4]. L'analyse du cas  $\sigma \neq 0$  doit pouvoir être menée de la même façon. Nous reportons cette étude à un travail ultérieur.

## 2.6 Sur le choix des paramètres $\alpha_k^n$ et $\beta_k^n$

Une fois la forme générale du développement a priori (2.30) choisie, il reste un problème important sur le plan pratique qui est la détermination du nombre  $n$  de fractions rationnelles intervenant dans le développement puis,  $n$  étant fixé, de la détermination des coefficients  $\alpha_k^n$  et  $\beta_k^n$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

En ce qui concerne le choix de  $n$ , il est difficile de se décider a priori, du moins sur le plan théorique. C'est en fait une question de compromis qui doit se régler au niveau d'expériences numériques : l'augmentation de  $n$  accroît la précision de la condition absorbante mais également le coût calcul. En revanche, à  $n$  fixé, la détermination d'un jeu de paramètres "optimal" (en un sens à préciser) peut se révéler très judicieuse car on peut espérer accroître la précision des calculs sans en augmenter le coût. Il nous faut bien sûr un critère pour la précision de la condition aux limites. Il suffit pour cela d'étudier la réflexion d'une onde arrivant à incidence normale sur le bord absorbant. Cela revient à raisonner en dimension 1 d'espace et d'étudier, dans le demi espace  $y < 0$ , les solutions de la forme :

$$(2.65) \quad u(y, t) = \exp i(\omega t - (\omega^2 + i\sigma\omega)^{1/2}y) + R(\omega) \exp i(\omega t + (\omega^2 + i\sigma\omega)^{1/2}y)$$

$R(\omega)$  étant le coefficient de réflexion complexe. Dans (2.65), l'onde incidente est évanescente dans la direction  $y > 0$  alors que l'onde réfléchie est évanescente dans la direction  $y < 0$ . Bien sur en pratique une telle solution n'a de sens que dans une bande  $-L < y < 0$ . Un calcul élémentaire montre que la fonction  $u(y, t)$  définie par (2.65) satisfait la condition transparente si et seulement si  $R(\omega)$  est donné par :

$$(2.66) \quad R(\omega) = \frac{f(i\frac{\sigma}{\omega}) - f_n(i\frac{\sigma}{\omega})}{f(i\frac{\sigma}{\omega}) + f_n(i\frac{\sigma}{\omega})}$$

La condition absorbante sera d'autant meilleure que  $|R(\omega)|$  sera petit. Il est facile d'établir que, quel que soit le choix des coefficients  $(\alpha_k^n, \beta_k^n)$ , nous avons :

$$(2.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < |R(\omega)| < 1 \quad \forall \omega \neq 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |R(\omega)| = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |R(\omega)| = 1 \end{array} \right.$$

En tout état de cause, la condition absorbante se comportera très bien à haute fréquence et mal à basse fréquence, et on ne peut pas espérer, même en augmentant  $n$ , que  $R(\omega)$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, +\infty[$ . Ceci est dû aux comportements nécessairement différents des fonctions  $f_n(z)$  et  $f(z)$  lorsque  $|z|$  va à l'infini. En revanche on peut espérer en augmentant  $n$  avoir une convergence uniforme sur tout intervalle fermé de la forme  $[\varepsilon, +\infty[$ ,  $\varepsilon > 0$ , en d'autres termes, augmenter la plage de fréquences sur laquelle la condition absorbante se comportera de façon satisfaisante. Pour avoir une idée de ce phénomène nous avons représenté, dans la figure 2.1, les variations de la fonction  $\omega \rightarrow |R(\omega)|$  pour les fonctions  $f_n(z)$  correspondant à (2.29), c'est-à-dire à l'approximation par fractions continues décrite au paragraphe 2.3, et ce pour plusieurs valeurs de  $n$ . On voit que, pour chaque valeur de  $n$ , on obtient une absorption quasi-parfaite dans une bande  $[\omega_n, +\infty[$ ,  $\omega_n$  tendant vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On voit également que si l'on utilise des sources dont la gamme de fréquences correspond à  $\omega > 10^{-4}$  ( ce qui est le cas pour beaucoup d'applications ) il faut utiliser jusqu'à 1000 fractions rationnelles c'est à dire 1000 fonctions auxiliaires !

Heureusement, à  $n$  fixé, il n'est pas du tout évident que la fraction continue donne le meilleur résultat. En fait le résultat optimal doit dépendre de la gamme de fréquences  $[\omega_*, \omega^*]$  à laquelle on va s'intéresser a priori. C'est pourquoi nous avons cherché à déterminer les coefficients  $(\alpha_k^n, \beta_k^n)$  par un processus d'optimisation. Nous chercherons à minimiser le critère de précision suivant :

$$(2.68) \quad J_p(\alpha_k^n, \beta_k^n) = \left( \int_{\omega_*}^{\omega^*} |R(\omega)|^p d\omega \right)^{1/p}$$

où  $p \geq 1$  (par exemple  $p=2$ ) et où  $J_p$  dépend des paramètres  $\alpha_k^n$  et  $\beta_k^n$  par l'intermédiaire de la fonction  $R(\omega)$ . Il sera alors naturel de partir, comme point de départ d'un algorithme de minimisation itératif de (2.68), du jeu de coefficients correspondant à la fraction continue. On ne pourra qu'améliorer la précision de la condition absorbante au sens du critère (2.68). Nous avons mené des expériences numériques correspondant à  $p = 2, \omega_* = 10^{-4}, \omega^* = +\infty$  pour  $N = 0, 5, 10, 15$ . La fréquence  $\omega$  est adimensionnée, ce qui équivaut à choisir  $\sigma = 1$ . Nous ne nous étendrons pas ici sur l'algorithme d'optimisation utilisé (voir à ce sujet [18],[20]) et nous contenterons de présenter les résultats. Les valeurs des coefficients optimisés n'ayant qu'un intérêt purement anecdotique, nous concentrons notre attention sur les coefficients de réflexion obtenus (figures 2.1 et 2.2).

Ces résultats mettent en évidence l'intérêt crucial de travailler avec les coefficients opti-

$|R(\omega)|$

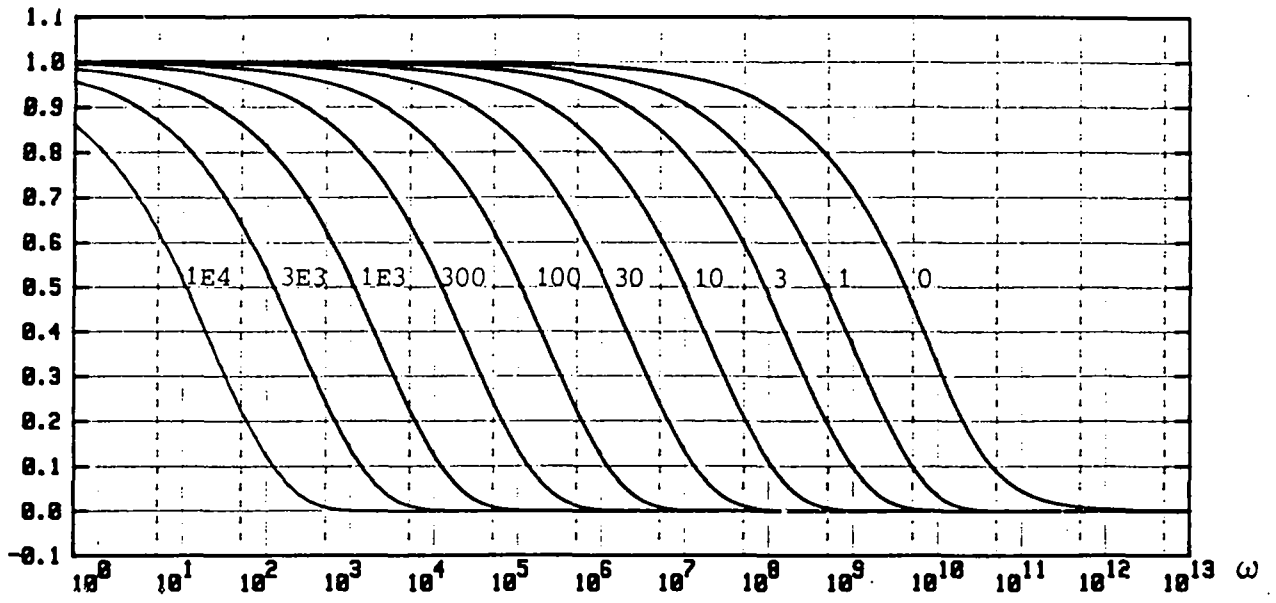


Figure 2.1 : Coefficient de réflexion - Approximations de Padé

$|R(\omega)|$

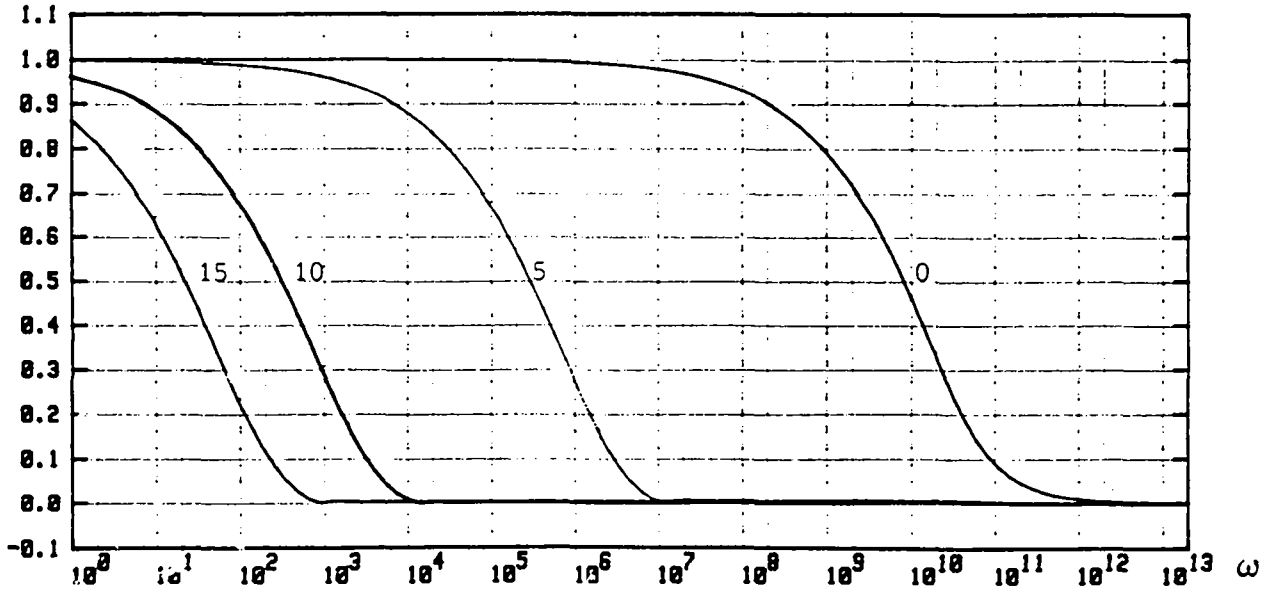


Figure 2.2 : Coefficient de réflexion - Coefficients optimisés

misés et illustrent l'efficacité de cette approche. Ainsi on constate que l'on obtient avec 15 fractions rationnelles seulement la même précision qu'avec 10000 fractions si on choisit les approximations de Padé.

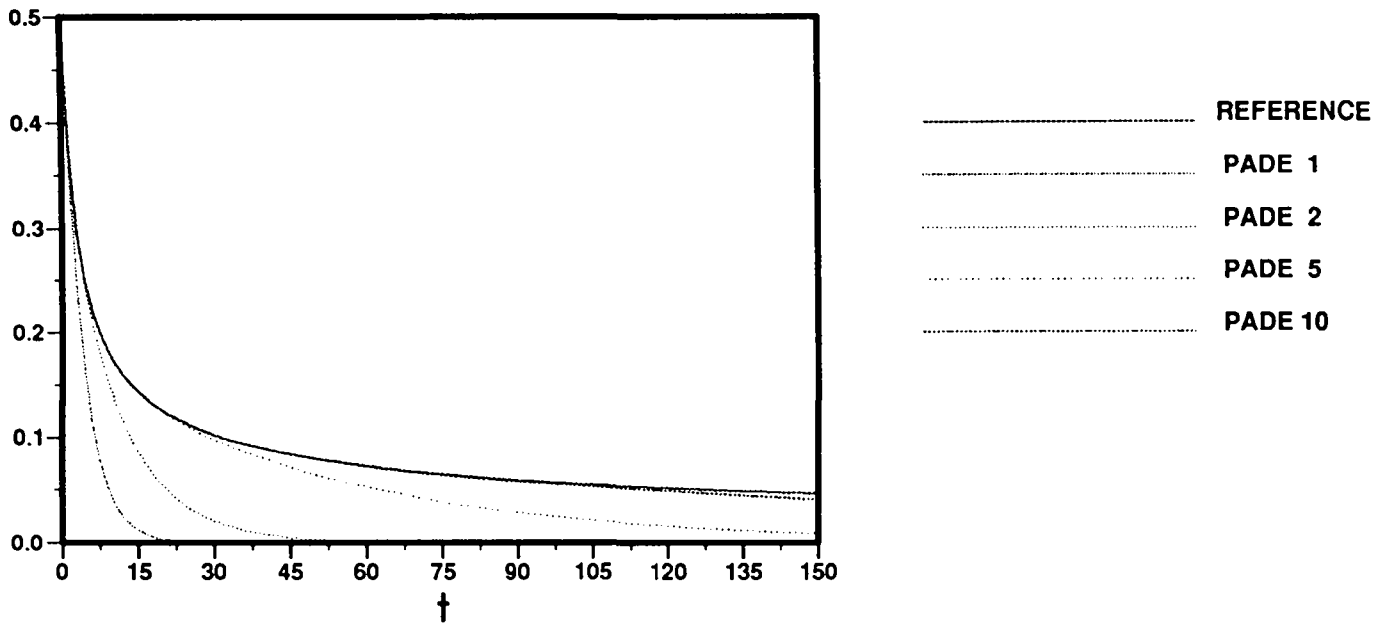


Figure 2.3 : Noyau de convolution - Approximations de Padé

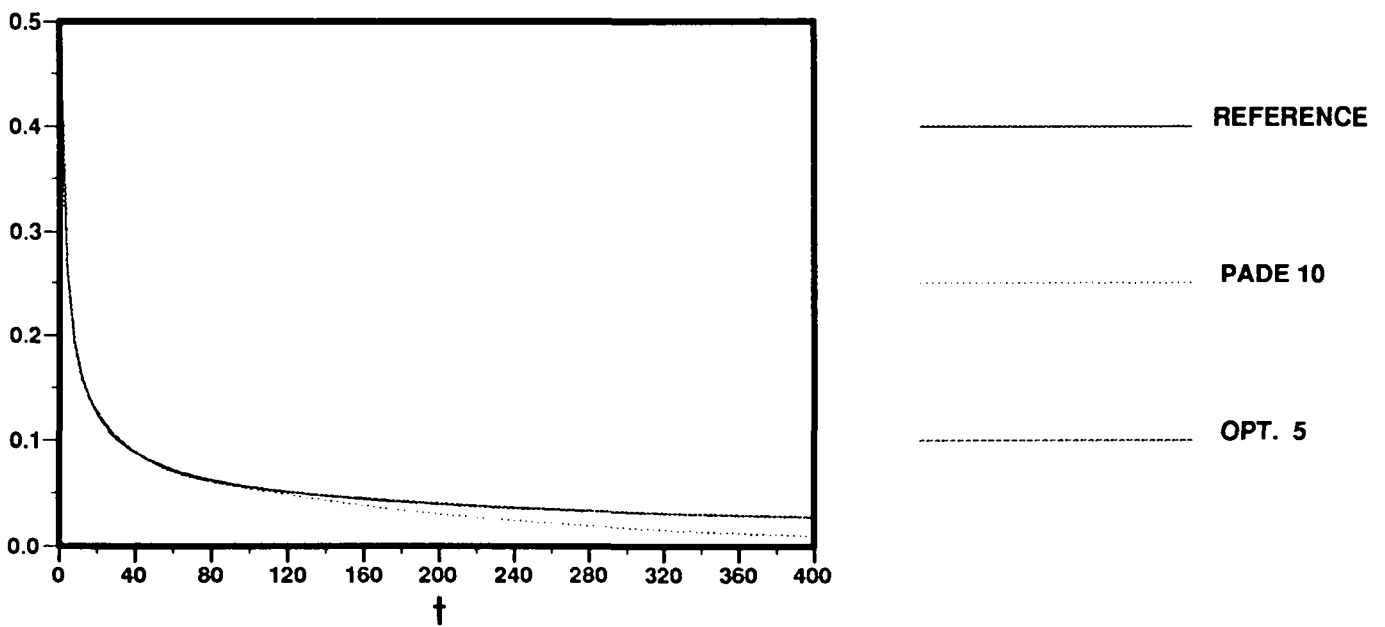


Figure 2.4 : Comparaison coefficients de Padé - coefficients optimisés

Il est également intéressant de visualiser l'approximation réalisée dans le domaine temps en comparant directement les noyaux de convolution associés aux opérateurs  $T_\sigma$  et  $T_\sigma^n$  ( voir

section 2.3 ). Ceci est l'objet des figures (2.3)(approximations de Padé) et (2.4)(coefficients optimisés). On constate comme attendu que l'approximation est excellente aux temps courts et que la qualité de cette approximation se pérennise sur un intervalle de temps qui augmente avec le nombre de fractions rationnelles.

## 2.7 Résultats numériques

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats numériques destinés à illustrer l'approximation de l'opérateur  $T_\sigma$ . Les expériences ont été menées en dimension 1 et correspondent au modèle suivant :

$$(2.69) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in [0, L], t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = f(t) \end{cases}$$

La fonction source  $f(t)$  est une "double exponentielle" :

$$f(t) = 100(\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t))$$

avec, dans notre cas particulier :

$$\alpha = 410^8 \quad \beta = 4.7610^8$$

Ce genre de source intervient notamment en impulsion électromagnétique nucléaire. Nous avons réalisé des simulations numériques en imposant notre condition aux limites absorbante en  $x=L$ . Nous avons réalisé ces simulations pour différents types de matériaux caractérisés par des conductivités différentes. Dans chaque cas nous avons comparé la solution "exacte" (en fait calculée en repoussant le bord absorbant suffisamment loin) avec diverses solutions approchées correspondant à différents choix de l'opérateur approché  $T_\sigma^n$  en regardant leur évolution au cours du temps au point  $x = L$ , c'est à dire sur le bord absorbant. Ces résultats sont représentés, sous forme de courbes, sur la figure (2.5). Trois types de matériaux ont été traités. Le premier correspond à du sable et à  $\sigma = 210^{-4}$ , le deuxième à un sol typique ( $\sigma = 10^{-3}$ ) et le troisième à de l'eau ( $\sigma = 6.2510^{-2}$ ). Les dessins de gauche correspondent à des calculs effectués avec les coefficients de Padé alors que les dessins de droite correspondent aux coefficients optimisés. Sur chaque dessin sont superposées les courbes correspondant d'une part à la solution exacte, d'autre part aux solutions approchées, l'une étant calculée avec la condition transparente qu'on utiliserait en l'absence de conductivité, les autres correspondant à différents choix du nombre  $N$  de fractions rationnelles. Ces résultats parlent d'eux mêmes et appellent donc assez peu de commentaires. Signalons toutefois qu'ils font apparaître clairement les points suivants :



- Il est très important de tenir compte de la conductivité au niveau des conditions aux limites absorbantes

- L'utilisation des coefficients optimisés se révèle très efficace.

- Le nombre de fractions rationnelles à utiliser en pratique dépend du matériau : plus celui-ci est conducteur plus il faut de fractions rationnelles.

### 3 Conditions aux limites absorbantes pour les équations de Maxwell 3D, en milieu conducteur

Nous allons ici pour construire ces conditions aux limites absorbantes suivre la démarche Joly-Mercier [16] qui donne une méthode assez systématique pour passer de l'équation des ondes scalaire 2D aux équations de Maxwell 3D, pourvu que certains critères soient satisfaits. De plus nous serons assurés de retrouver la condition Joly-Mercier lorsque  $\sigma = 0$ . Bien sûr nous reprenons dans cette section les notations du paragraphe 1 :  $x = (x_1, x_2, x_3)$  désigne le point courant de  $\mathbb{R}^3$  et  $t$  le temps. Nous supposons également que nous voulons résoudre les équations de Maxwell dans le demi-espace  $x_3 < 0$  et que la frontière artificielle  $\Gamma$  est donc le plan  $x_3 = 0$ .

#### 3.1 Etude des solutions indépendantes de $x_1$

Lorsque l'on s'intéresse aux solutions ne dépendant que de  $x_2$  et  $x_3$  (ondes planes parallèles à  $x_1$ ), les équations de Maxwell se découpent en deux systèmes :

- systèmes des ondes (TM) en  $E_1, H_2, H_3$

$$(3.1) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_1 - \left( \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

- système des ondes (TE) en  $H_1, E_2, E_3$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial t} + \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_2 - \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_3 + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

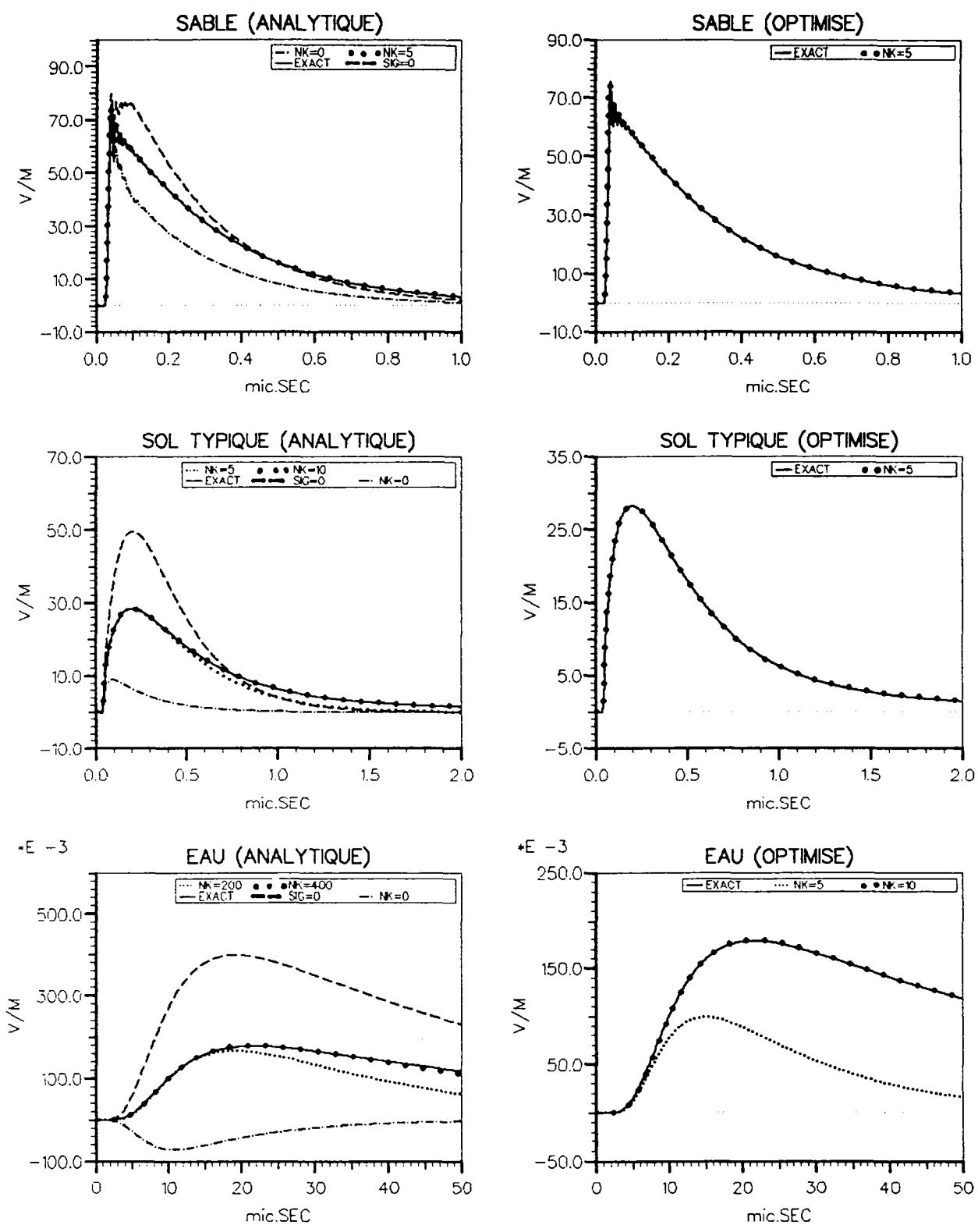


Figure 2.5 : Résultats numériques 1D

Nous allons construire une condition aux limites locale en espace (seulement) pour (3.1) et (3.2).

Condition aux limites pour le système (3.1)

Observons que  $E_1$  satisfait une équation des ondes amortie :

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_1}{\partial t} - \Delta E_1 = 0$$

Nous appliquons donc les conditions construites au paragraphe 2 ( $x_3$  joue la rôle de  $y$  et  $x_2$  celui de  $x$ ). Nous avons donc :

- la condition d'ordre 1 en espace

$$(3.4) \quad \frac{\partial E_1}{\partial x_3} + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial t} = 0$$

En remarquant que  $\frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial H_2}{\partial t}$ , cette condition s'écrit encore :

$$(3.5) \quad H_2 - T_\sigma E_1 = 0$$

- la condition d'ordre 2 en espace

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_1}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_3 \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2^2} = 0$$

En remarquant que d'après (3.1):

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_2 \partial t}$$

Il est facile de voir que, après intégration en temps, (3.6) est équivalent à

$$(3.7) \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0$$

Condition aux limites pour le système (3.2)

Cette fois on observe que c'est  $H_1$  qui est solution de l'équation (3.3). Nous en déduisons donc :

- la condition d'ordre 1 en espace

$$(3.8) \quad \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + T_\sigma \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0$$

En remarquant que  $\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) E_2$ , (3.7) s'écrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) E_2 + T_\sigma \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0$$

Pour simplifier cette égalité nous remarquons que :

$$(3.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} + \sigma = \frac{\partial}{\partial t} T_\sigma$$

de telle sorte que (3.7) s'écrit encore

$$(3.10) \quad H_1 + T_\sigma E_2 = 0$$

• la condition d'ordre 2 en espace

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial H_1}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_3 \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2^2}$$

Remarquant que, d'après (3.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) E_2 \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2^2} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \end{array} \right.$$

(3.10) est équivalent à

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right] \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x_2}\right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0$$

soit encore, après multiplication par  $T_\sigma$  :

$$(3.12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) E_2 + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0$$

### 3.2 Etude des solutions indépendantes de $x_2$

Cette fois, le découplage des équations de Maxwell en deux sous systèmes :

- système des ondes ( $TM$ ) en  $E_2, H_1, H_3$

$$(3.13) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_2 - \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

- système des ondes ( $TE$ ) en  $E_1, H_2, E_3$

$$(3.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_2}{\partial t} + \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_3 - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) E_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

Nous reprenons la démarche de la section 3.1.

#### Condition aux limites pour le système (3.13)

Nous appliquons les conditions construites au paragraphe 2 (conditions locales en espace uniquement) à la fonction scalaire  $E_2$  (on remplace  $x$  par  $x_1$  et  $y$  par  $x_3$ ):

- la condition d'ordre 1 en espace :

$$(3.15) \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial t} = 0$$

Mais comme d'après (3.13),  $\frac{\partial E_2}{\partial x_3} = \frac{\partial H_1}{\partial t}$ , (3.14) est équivalent à :

$$(3.16) \quad H_1 + T_\sigma E_2 = 0$$

- la condition d'ordre 2 en espace :

$$(3.17) \quad \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_2}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_3 \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} = 0$$

Nous utilisons alors l'égalité  $-\frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1 \partial t}$ , pour transformer (3.16) en :

$$(3.18) \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0$$

### Condition aux limites pour le système (3.14)

Nous appliquons cette fois nos conditions 2D à la fonction scalaire  $H_2$ . Nous obtenons ainsi :

- la condition d'ordre 1 en espace :

$$(3.19) \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + T_\sigma \frac{\partial H_2}{\partial t} = 0$$

En utilisant la même méthode que pour passer de (3.8) à (3.9), nous montrons que (3.19) équivaut à :

$$(3.20) \quad H_2 - T_\sigma E_1 = 0$$

- la condition d'ordre 2 en espace :

$$(3.21) \quad \frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial H_2}{\partial t} + T_\sigma \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3 \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2} = 0$$

Nous utilisons les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3 \partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{\partial E_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial H_2}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \left[ \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right] \end{array} \right.$$

pour montrer que (3.21) est équivalent à :

$$T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0$$

Soit encore, après multiplication par  $T_\sigma$  et compte tenu de  $T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sigma$  :

$$(3.22) \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0$$

### **3.3 Construction des conditions absorbantes pour le système 3D complet**

Dressons le bilan des sections 3.1 et 3.2. Nous avons construit :

1. Deux systèmes de conditions aux limites d'ordre 1 en espace

- un pour les solutions indépendantes de  $x_1$

$$(3.23) \quad \begin{cases} H_1 + T_\sigma E_2 = 0 \\ H_2 - T_\sigma E_1 = 0 \end{cases}$$

- un pour les solutions indépendantes de  $x_2$

$$(3.24) \quad \begin{cases} H_1 + T_\sigma E_2 = 0 \\ H_2 - T_\sigma E_1 = 0 \end{cases}$$

## 2. Deux systèmes de conditions aux limites d'ordre 2 en espace

- un pour les solutions indépendantes de  $x_1$

$$(3.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

- un pour les solutions indépendantes de  $x_2$

$$(3.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons la :

### Construction de conditions d'ordre 1 en espace

C'est très simple car les deux systèmes (3.23) et (3.24) coïncident. Nous choisissons donc comme conditions aux limites :

$$(3.27) \quad \begin{cases} H_1 + T_\sigma E_2 = 0 \\ H_2 - T_\sigma E_1 = 0 \end{cases}$$

qui admet l'écriture intrinsèque ( $n = (0, 0, 1)$  désignant la normale à  $\Gamma$ , sortante par rapport à  $\Omega$ ) :

$$(3.28) \quad n \wedge (H \wedge n) + T_\sigma^n (E \wedge n) = 0$$

qui constitue notre condition d'ordre 1 en espace  $n$  en temps. Notons que (voir section 2), le traitement numérique de cette condition aux limites necessitera l'introduction de deux familles de fonctions auxiliaires, l'une associée à  $E_1$ , l'autre à  $E_2$ . Passons maintenant à la :

### Construction de conditions d'ordre 2 en espace

Cette fois c'est un peu plus compliqué. L'idée (voir [16] dans le cas non conducteur) consiste à écrire le système d'équations linéaires le plus simple qui redonne (3.25) pour les solutions indépendantes de  $x_1$  et (3.26) pour les solutions indépendantes de  $x_2$ . Il n'est pas difficile de voir que ce système s'écrit :

$$(3.29) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + T_\sigma \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Le système (3.29) a la propriété d'être un système de conditions aux limites qui sont absorbantes au second ordre pour les solutions indépendantes de  $x_1$  d'une part et pour les solutions de  $x_2$  d'autre part. Pour s'assurer que ces conditions sont globalement du second ordre, il suffit par exemple qu'elles soient invariantes par toute rotation d'axe  $Ox_3$  ce qui signifiera en fait que les directions  $x_1$  et  $x_2$  ne jouent aucun rôle particulier. Or cette propriété d'invariance est une conséquence de l'écriture intrinsèque suivante pour les équations (3.29):

$$(3.30) \quad \begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) [n \wedge (E \wedge n)] + \left[ n \wedge \left( T_\sigma \frac{\partial E}{\partial n} \wedge n \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2} T_\sigma \text{grad}_\Gamma(E.n) - \frac{1}{2} \text{rot}_\Gamma(H.n) = 0 \end{aligned}$$

avec les notations classiques pour les opérateurs différentiels tangentiels (voir par exemple [9]). Finalement, pour obtenir des équations locales en temps il nous suffit de remplacer l'opérateur  $T_\sigma$  par  $T_\sigma^n$  pour obtenir ce que nous appellerons la condition d'ordre  $n$  en temps et d'ordre 2 en espace :

$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma^n \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma^n \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + T_\sigma^n \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} T_\sigma^n \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Soit encore sous forme intrinsèque :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) [n \wedge (E \wedge n)] + \left[ n \wedge \left( T_\sigma^n \frac{\partial E}{\partial n} \wedge n \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2} T_\sigma^n \text{grad}_\Gamma(E.n) - \frac{1}{2} \text{rot}_\Gamma(H.n) = 0 \end{aligned}$$



Notons que l'opérateur  $T_\sigma^n$  apparait 4 fois dans les équations (3.31) ce qui laisse penser à priori que 4 familles d'inconnues auxiliaires sur le bord sont nécessaires pour  $(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}, \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_3}{\partial x_2})$ . En fait il n'en est rien car les inconnues associées à  $\frac{\partial E_2}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial E_3}{\partial x_2}$  sont nécessairement liées l'une à l'autre. En fait seules trois familles de fonctions inconnues sont nécessaires, il suffit de remarquer que l'opérateur  $T_\sigma^n$  commute avec les dérivées spatiales de telle sorte que (3.31) s'écrit encore :

$$(3.33) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma^n \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (T_\sigma^n E_3) - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + T_\sigma^n \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} (T_\sigma^n E_3) + \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

si bien qu'il faut introduire en fait 3 familles de fonctions auxiliaires, à savoir :

$$(3.34) \quad \begin{cases} - \text{une pour } \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \\ - \text{une pour } \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ - \text{une pour } E_3 \end{cases}$$

Les conditions aux limites (3.31) fournissent une réponse possible aux exigences que nous nous étions fixées au départ.

### 3.4 Quelques considérations sur la stabilité des conditions aux limites.

Pour ce qui concerne la condition aux limites d'ordre 1, il n'y a pas de problème, la stabilité est une conséquence directe de la positivité de l'opérateur  $T_\sigma^n$ . En effet,  $(E, H)$  satisfait :

$$(3.35) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E - \text{rot } H = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} - \text{rot } E = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$(3.36) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|E|^2 + |H|^2) dx dy \right\} + \sigma \int_\Omega |E|^2 dx dy \\ & = \int_\Gamma n \wedge (H \wedge n) \cdot (E \wedge n) dx \end{aligned} \right.$$

Soit encore, en utilisant la condition aux limites (cf. (3.28))

$$(3.37) \quad \left| \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|E|^2 + |H|^2) dx dy \right\} + \sigma \int_\Omega |E|^2 dx dy \\ & + \int_\Gamma T_\sigma^n (E \wedge n) \cdot (E \wedge n) dx = 0 \end{aligned} \right.$$

ce qui montre qu'il y a décroissance au cours du temps de l'énergie électromagnétique. Pour la condition du second ordre (3.31), il est beaucoup plus difficile de faire une démonstration par techniques énergétiques. Nous repoussons cette étude à un prochain travail. Précisons toutefois que la stabilité de cette condition aux limites ne fait guère de doute dans notre esprit. En effet, il est facile de voir que la condition locale en espace (mais non locale en temps) (3.29) est stable. En effet en utilisant les égalités :

$$(3.38) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) E_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \end{cases}$$

d'une part, et les égalités :

$$(3.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma\right) E_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \end{cases}$$

d'autre part, nous voyons que les équations (3.29) se réécrivent :

$$(3.40) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma + T_\sigma \frac{\partial}{\partial x_3}\right) E_1 - \left(T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right) H_2 = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma + T_\sigma \frac{\partial}{\partial x_3}\right) H_1 = 0 \end{cases}$$

Soit encore, comme  $\frac{\partial}{\partial t} + \sigma = T_\sigma \frac{\partial}{\partial t}$  :

$$(3.41) \quad \begin{cases} \left(T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right) (T_\sigma E_1 + H_2) = 0 \\ \left(T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right) (T_\sigma E_2 + H_1) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, sous forme vectorielle :

$$(3.42) \quad \left(T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n}\right) (n \wedge (H \wedge n) + T_\sigma (E \wedge n)) = 0$$

cette identité est l'équivalent, pour  $\sigma \neq 0$ , de celle établie par A. Oumansour [2] dans le cas  $\sigma = 0$ . Elle fait apparaître la condition locale du second ordre comme la composée de deux conditions du premier ordre. Comme chacune de ces conditions est stable, on en déduit que la condition composée l'est également. Nous pouvons d'ailleurs obtenir des estimations

d'énergie. Introduisons :

$$(3.43) \quad \begin{cases} \tilde{E} = (T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3})E \\ \tilde{H} = (T_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3})H \end{cases}$$

$(\tilde{E}, \tilde{H})$  est solution des équations de Maxwell et satisfait, d'après (3.41)

$$n \wedge (\tilde{H} \wedge n) + T_\sigma (\tilde{E} \wedge n) = 0$$

Nous en déduisons aisément que :

$$(3.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \left| T_\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x_3} \right|^2 + \left| T_\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_3} \right|^2 \right) dx dy \right\} \\ \int_\Omega \left| T_\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x_3} \right|^2 dx dy \\ + \int_\Gamma T_\sigma \left( \left[ T_\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t} \right] \wedge n \right) \cdot \left( \left[ T_\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x_3} \right] \wedge n \right) dx = 0 \end{array} \right.$$

ce qui mène à des estimations a priori sur  $(E, H)$ .

Signalons toutefois que cette approche n'est plus valable pour l'équation locale en temps (3.31) car cette équation n'est pas obtenue en remplaçant  $T_\sigma$  par  $T_\sigma^n$  dans l'expression (3.29) (mais dans l'expression (3.29)). Il est toutefois raisonnable de penser que le fait de préserver la propriété de positivité de l'opérateur  $T_\sigma$  devrait permettre de préserver la stabilité du problème aux limites.

### 3.5 Traitement des arêtes

Conformément à [16], il nous faut, dans le cas des conditions du second ordre en espace, imposer des équations d'arêtes pour se ramener à un domaine parallélépipédique à faces parallèles aux axes de coordonnées. Nous obtiendrons ces équations, comme dans [16] et [4], par compatibilité entre les équations de face et les équations intérieures.

Traitons le cas particulier du trièdre  $x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 < 0$  et établissons l'équation d'arête pour l'arête  $0x_1$ . Nous écrivons :

- l'équation de face associée au plan  $0x_1x_2$  qui est relative à  $E_1$

$$(3.45) \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma^n \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (T_\sigma^n E_3) - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0$$

- l'équation de la face associée au plan  $0x_1x_3$  qui fait intervenir  $E_1$

$$(3.46) \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + T_\sigma \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (T_\sigma E_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = 0$$

- l'équation de Maxwell

$$(3.47) \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 = \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}$$

Maintenant nous ajoutons membre à membre (3.44) et (3.45) et utilisons (3.46) pour faire disparaître le champ magnétique. Nous obtenons ainsi :

$$(3.48) \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 + \frac{2}{3}T_\sigma^n \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right) - \frac{1}{3}T_\sigma^n \frac{\partial}{\partial x_1} (E_2 + E_3) = 0$$

Par permutation circulaire sur les indices, nous obtenons, à partir de (3.45)

- l'équation relative à l'arête  $0x_2$

$$(3.49) \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 + \frac{2}{3}T_\sigma^n \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) - \frac{1}{3}T_\sigma^n \frac{\partial}{\partial x_2} (E_1 + E_3) = 0$$

- l'équation relative à l'arête  $0x_3$

$$(3.50) \quad \frac{\partial E_3}{\partial t} + \sigma E_3 + \frac{2}{3}T_\sigma^n \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{3}T_\sigma^n \frac{\partial}{\partial x_3} (E_1 + E_2) = 0$$

## 4 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé dans ce travail de nouvelles conditions absorbantes pour l'équation des ondes avec termes d'amortissement (section 2) et les équations de Maxwell en milieu conducteur (section 3). Nous avons considéré successivement les conditions d'ordre 1 et 2 en espace. Ces conditions possèdent les propriétés suivantes :

- elles sont locales en espace et en temps
- elles prennent en compte les effets dissipatifs et les effets de mémoire dus à l'ajout de terme d'atténuation aux équations de propagation
- elles mènent à des problèmes mathématiquement bien posés
- elles redonnent les conditions absorbantes bien connues dans le cas hyperbolique
- elles s'expriment, pour le cas du système de Maxwell à l'aide d'opérateurs de dérivation spatiale d'ordre au plus égal à 1
- elles se prêtent à un traitement particulièrement simple des arêtes et des coins.

Tous ces points positifs permettent d'envisager avec un certain optimisme l'intégration de ces conditions aux limites à des codes de calcul.

Les premières expériences numériques réalisées dans le cas de l'équation des ondes scalaire avec amortissement vont, au moins partiellement, dans ce sens et démontrent que, sauf peut-être pour les très basses fréquences ou les grandes valeurs de  $\sigma$ , l'utilisation de ces nouvelles conditions mène à des résultats meilleurs que ceux obtenus avec les conditions

“hyperboliques”. Il reste toutefois à trouver de bons schémas numériques pour approcher, en particulier de façon explicite et stable, ces équations de bord . Ce travail est loin d’être évident a priori et constitue pratiquement un sujet de recherche à part entière .

Il reste enfin à étendre le présent travail aux conditions d’ordre supérieur en espace. Pour cela, nous renvoyons le lecteur aux travaux en cours de F. Collino ([8])

## Références

- [1] M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publication, 1968.
- [2] A. OUMANSOUR, *Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell en dimension 3*, PhD thesis, Université d’Alger, 1990. Thèse.
- [3] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, AND P. JOLY, *Higher order paraxial approximations for the wave equation*, SIAM J. on Appl. Math., 48 (1988), pp. 129–154.
- [4] A. BAMBERGER, P. JOLY, AND J. ROBERTS, *Second order absorbing boundary conditions for the wave equation ; a solution for the corner problem*, SIAM J. on Num. Anal., 27 (1990), pp. 323–352.
- [5] A. BAYLISS AND E. TURKEL, *Radiation boundary conditions for wave like equations*, Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), pp. 707–725.
- [6] A. BENDALI AND L. HALPERN, *Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell en dimension 3*, C.R.A.S. Paris, Tome 307, Série I n°20 (1988), pp. 79–95.
- [7] B. COCKBURN AND P. JOLY, *Resolution of Maxwell’s equations in polarisable media*, SIAM J. on Math. Anal., 19 (1986), pp. 313–357.
- [8] F. COLLINO, *Conditions aux limites absorbantes d’ordre élevé pour les modèles de propagation d’ondes ; problème des bords droits et des coins*, tech. rep., INRIA, en préparation. Rapport Interne.
- [9] R. DAUTRAY AND J. L. LIONS, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, vol. 2, Masson, 1985,.
- [10] B. ENGQUIST AND A. MAJDA, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. of Comp., 31 (1977), pp. 629–651.
- [11] ———, *Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave propagation*, Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979), pp. 313–357.

- [12] T. HA DUONG AND P. JOLY, *On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods*, tech. rep., INRIA, 1990. Rapport Interne n° 1306.
- [13] R. HERSCH, *Mixed problems in several variables*, J. Math. Mech., 12 (1963), pp. 317–334.
- [14] R. HIGDON, *Initial boundary value problems for linear hyperbolic systems*, SIAM Review, 28 (1986), pp. 177–217.
- [15] P. JOLY, *Pseudo-transparent boundary conditions for the diffusion equation (I)*, Math. Meth. Appl. Sc., 11 (1989), pp. 725–758.
- [16] P. JOLY AND B. MERCIER, *Une nouvelle condition aux limites transparente d'ordre 2 pour les équations de Maxwell en dimension 3*, tech. rep., INRIA, 1989. Rapport Interne n° 1047.
- [17] H. KREISS, *Initial boundary value problems for mixed hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), pp. 277–298.
- [18] K. LEVENBERG, *A method for the solution of certain problems in least squares*, Quat. J. Appl. Math., 2 (1944), pp. 164–168.
- [19] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Problèmes aux limites non Homogènes et Applications*, vol. 1, Dunod, 1968,.
- [20] D. MARQUARDT, *An algorithm for least squares estimation of non linear parameters*, SIAM J. on Appl. Math., 11 (1963), pp. 431–441.
- [21] M. SESQUES, *Conditions aux limites artificielles pour le système de Maxwell*, PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1990. Thèse.

**ISSN 0249 - 6399**