



HAL
open science

**Elements finis mixtes appliques a un probleme
d'ecoulement diphasique incompressible bidimensionnel
en milieu poreux en presence de gravite**

Gary Cohen

► **To cite this version:**

Gary Cohen. Elements finis mixtes appliques a un probleme d'ecoulement diphasique incompressible bidimensionnel en milieu poreux en presence de gravite. RR-0138, INRIA. 1982. inria-00076422

HAL Id: inria-00076422

<https://inria.hal.science/inria-00076422>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 138

**ÉLÉMENTS FINIS MIXTES
APPLIQUÉS À UN PROBLÈME
D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE
INCOMPRESSIBLE
BIDIMENSIONNEL
EN MILIEU POREUX
EN PRÉSENCE DE GRAVITÉ**

Gary COHEN

Juin 1982



CENTRE DE ROCOUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 138

**ÉLÉMENTS FINIS MIXTES
APPLIQUÉS À UN PROBLÈME
D'ÉCOULEMENT DIPHASIQUE
INCOMPRESSIBLE
BIDIMENSIONNEL
EN MILIEU POREUX
EN PRÉSENCE DE GRAVITÉ**

Gary COHEN

Juin 1982

ELEMENTS FINIS MIXTES
APPLIQUES A UN PROBLEME D'ECOULEMENT DIPHASIQUE
INCOMPRESSIBLE BIDIMENSIONNEL EN MILIEU POREUX EN PRESENCE DE GRAVITE

Gary Cohen
INRIA

RESUME

On s'intéresse à la résolution numérique d'une équation de transport-diffusion non-linéaire issue d'un problème d'écoulement diphasique incompressible en milieux poreux par une méthode d'éléments finis mixtes. Le terme de transport non-monotone est discrétisé en adaptant le schéma de GODOUNOV étudié par LEROUX à ces éléments finis. Après avoir défini les différentes conditions aux limites utilisées, on donne des résultats numériques de cette résolution.

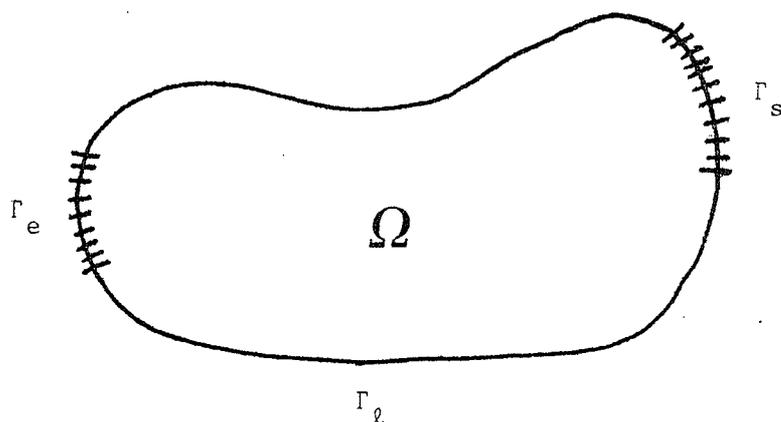
ABSTRACT

We study the numerical resolution of a non-linear convection-diffusion equation coming out of a problem of incompressible diphasic flow in porous media by using a mixed finite elements method. We discretize the non-monotonous term of convection by adaptation of the GODUNOV scheme which was studied by LEROUX, to these finite elements. After definition of different boundary conditions used for this problem, numerical results are given.

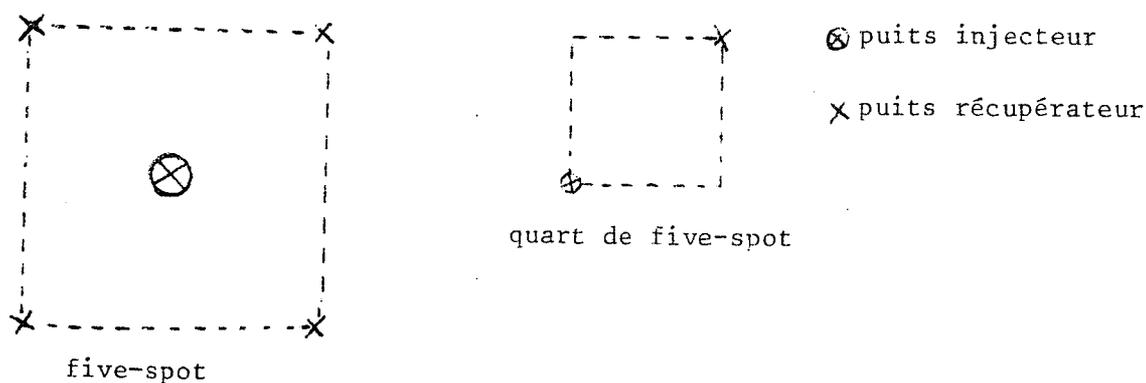
INTRODUCTION

La modélisation des écoulements dans les milieux poreux et, en particulier, des écoulements polyphasiques est un problème difficile et sa résolution numérique par des schémas aux différences finis (couramment utilisés) est souvent peu satisfaisante du fait du caractère diffusif de ces schémas. Nous étudions ici le problème d'un écoulement diphasique dans une couche de roche poreuse modélisant la récupération de pétrole (huile) par injection d'eau et sa résolution par une méthode d'éléments finis mixtes.

L'épaisseur de la couche de roche étudiée étant supposée "petite" par rapport aux dimensions du champ, le problème se ramène à l'étude d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine plan ayant pour frontières une frontière d'injection Γ_e , une frontière de production Γ_s et une frontière fermée Γ_ℓ .



Nous nous intéressons plus particulièrement au niveau numérique au problème du quart de "five-spot" obtenu par symétrie à partir d'un problème à un puits d'injection et 4 puits de récupération selon le schéma ci-dessous.



Les équations étudiées tiennent compte des forces capillaires qui introduisent un terme parabolique non-linéaire et de la gravité (champ penché) qui introduit un terme hyperbolique non linéaire dont la non-linéarité n'est pas monotone.

Ce travail continue les travaux de CHAVENT, COHEN, JAFFRE, SALZANO sur ce problème.

I - FORMULATION DES EQUATIONS DU PROBLEME

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , Γ sa frontière, $\vec{\nu}$ la normale extérieure sur Γ et $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} .

On note $Q_T = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma_T = \Gamma \times]0, T[$, $x \in \Omega$

Γ est divisée en trois parties :

- Γ_e : frontière d'injection
- Γ_s : frontière de production
- Γ_ℓ : frontière imperméable

Pour toute partie Γ_λ ($\lambda = e, s, \ell$) de la frontière on note :

$$\Sigma_\lambda = \Gamma_\lambda \times]0, T[$$

Avec les notations de l'annexe 2 (voir à la fin) et en utilisant les travaux de G. CHAVENT, les équations du problème sont :

- équations en saturation

$$(1) \quad \phi \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{r} + \vec{w}) = 0$$

$$(2) \quad \vec{r} = -\psi \text{ grad } \alpha(u)$$

$$(3) \quad \vec{w} = \sum_{j=0}^l b_j(u) \vec{q}_j$$

- équations en pression

$$(4) \quad \vec{q}_0 = -\Psi \operatorname{grad} P + d_1(u) \vec{q}_1$$

$$(5) \quad \operatorname{div} \vec{q}_0 = 0$$

- champ de gravité

$$(6) \quad \vec{q}_1 = -\Psi \operatorname{grad} \pi_1(x)$$

- conditions aux limites.

Soient $\vec{\phi}_1(x)$ et $\vec{\phi}_2(x)$ les débits d'eau et d'huile en un point x de Ω . On a les relations suivantes :

$$\vec{\phi}_1 = \vec{q}_0 + \vec{r} + \vec{w}$$

$$\vec{\phi}_2 = \vec{q}_0 - \vec{r} - \vec{w}$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer les conditions aux limites sur chaque partie de la frontière :

- sur Γ_e , on impose un débit total donné et on suppose la frontière entièrement mouillée par l'eau :

$$\vec{q}_0 \cdot \vec{\nu} = q_d = \frac{1}{2} \text{ débit total imposé}$$

$$u = 1$$

- sur Γ_ℓ , la frontière est fermée, c'est-à-dire qu'il ne sort ni entre aucun fluide. Cela s'écrit :

$$\vec{\phi}_1 \cdot \vec{\nu} = 0$$

$$\vec{\phi}_2 \cdot \vec{\nu} = 0$$

ou, de façon équivalente :

$$\vec{\phi}_1 \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{q}_0 \cdot \vec{v} = 0$$

- sur Γ_s enfin, on a une condition unilatérale en saturation, qui assure qu'il ne sort pas d'eau tant que la valeur de u au bord n'est pas maximale. En pression, on impose une pression donnée :

$$\vec{\phi}_1 \cdot \vec{v} \geq 0 ; u \leq 1$$

$$(1-u) \vec{\phi}_1 \cdot \vec{v} = 0$$

$$P = P_d$$

REMARQUES :

1 - Sur Γ_e , on pourrait prendre un débit en eau imposé au lieu de la saturation maximale. Cela s'écrirait :

$$\vec{\phi}_1 \cdot \vec{v} = \phi_{1d} \text{ (avec } \phi_{1d} = 2q_d \text{ dans le cas habituel où l'on n'injecte que de l'eau)}$$

2 - Sur Γ_s , la valeur de la saturation pour laquelle l'eau commence à sortir est en vérité la valeur où la pression capillaire s'annule (valeur qui est maximale habituellement lorsque le fluide 1, ici l'eau, est mouillant).

Les conditions aux limites sont résumées dans le tableau suivant :

Equations en	Γ_e	Γ_s	Γ_ℓ
Saturation	$u = 1$	$\vec{\phi}_1 \cdot \vec{\nu} \geq 0 ; u < 1$ $(1-u) \vec{\phi}_1 \cdot \vec{\nu} = 0$	$\vec{\phi}_1 \cdot \vec{\nu} = 0$
Pression	$\vec{q}_0 \cdot \vec{\nu} = q_d$	$P = P_d$	$\vec{q}_0 \cdot \vec{\nu} = 0$

Tableau I

Des compléments sur l'origine physique du problème seront trouvés dans CHAVENT et JAFFRE.

Classiquement, les problèmes d'écoulements polyphasiques en milieux poreux sont résolus par des méthodes de différences finies dont le caractère discontinu s'adapte mieux à l'approximation des fronts, souvent raides, qui en sont solutions.

Cependant, ces méthodes ont tendance à introduire une diffusion numérique importante qui rend difficile des évaluations précises. Pour cela, nous allons présenter ici une méthode d'éléments finis mixtes introduite par RAVIART-THOMAS et utilisée par JAFFRE. Cette méthode est originale par l'utilisation de quadrilatères au lieu de triangles (cf. JAFFRE) et par la méthode discrétisation du terme de transport non monotone inspirée par les travaux de LEROUX.

II - FORMULATION VARIATIONNELLE MIXTE DU PROBLEME

Le problème (1) - (6) est un problème à 4 inconnues couplées (u, \vec{r}) et (p, \vec{q}_0) et un champ donné \vec{q}_1 .

Dans la formulation mixte on cherche les inconnues dérivées \vec{r}, \vec{q}_0 des inconnues principales u, p dans un espace plus régulier que les inconnues principales. Soient H et V deux espaces de Hilbert (l'un formé de fonctions vectorielles, l'autre de fonctions scalaires) liés par la relation suivante :

$$(9) \quad \forall \vec{s} \in H \quad \operatorname{div} \vec{s} \in V$$

En prenant (comme dans THOMAS) $V = L^2(\Omega)$, on note $H = H(\operatorname{div}; \Omega)$ et en ajoutant aux inconnues (u, \vec{r}) et (P, \vec{q}_0) les inconnues u_Γ et P_Γ représentant les "traces" de u et P :

$$u_\Gamma \in L^2[0, T; H^{1/2}(\Gamma_e \cup \Gamma_s)]$$

$$P_\Gamma \in L^2[0, T; H^{1/2}(\Gamma_s)]$$

$u_0 \in L^2(\Omega)$ la valeur initiale de la saturation.

On a le problème suivant :

Trouver $(u, \vec{r}) :]0, T[\rightarrow V \times H$; $(p, \vec{q}_0) :]0, T[\rightarrow V \times H$

$u_\Gamma \in L^2(\Sigma_T)$ tels que :

$$(10) \quad - \int_{\Omega} \phi u_0 v(0) dx - \int_{Q_T} \phi u \frac{dv}{dt} dx dt + \int_{Q_T} \operatorname{div} \vec{r} v dx dt$$

$$- \int_{Q_T} \vec{w}(u) \operatorname{grad} v dx dt + \int_{\Sigma} v \vec{w} \cdot \vec{\nu} d\Gamma dt = 0$$

$$\forall v \in H^1[0, T; H^1(\Omega)] \quad v(T) = 0$$

$$(11) \quad \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{\Psi} dx - \int_{\Omega} \alpha(u) \operatorname{div} \vec{s} dx + \int_{\Gamma} \alpha(u_\Gamma) \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0 \quad \forall \vec{s} \in H$$

$$(12) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_0 v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

$$(13) \quad \int_{\Omega} \frac{\vec{q}_0 \cdot \vec{s}}{\Psi d(u)} - \int_{\Omega} P \operatorname{div} \vec{s} dx + \int_{\Gamma_s} P_d \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{d_i(u)}{\Psi d(u)} \vec{q}_1 \cdot \vec{s} = 0$$

$$\forall \vec{s} \in H, \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu} |_{\Gamma_e \cup \Gamma_l} = 0$$

+ conditions aux limites du tableau I avec $u = u_\Gamma$ et $P = P_\Gamma$.

Pour plus de détails on se rapportera à JAFFRE.

III - APPROXIMATION DE LA FORMULATION MIXTE

1 - Cadre fonctionnel

Soit Λ un ouvert de \mathbb{R}^2 , on définit la famille d'espace de polynômes suivante :

$$P_{k,\ell}(\Lambda) = \{p : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \mid p(\rho, \sigma) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} c_{ij} \rho^i \sigma^j, c_{ij} \in \mathbb{R}; (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$$

Soit maintenant \hat{Q} le carré unité de \mathbb{R}^2 . $\hat{Q} =]0,1[\times]0,1[$ et $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{Q}$.

On définit sur \hat{Q} les espaces suivants :

$$V_{\hat{Q}}^k = P_{k,k}(\hat{Q})$$

$$H_{\hat{Q}}^k = P_{k+1,k}(\hat{Q}) \times P_{k,k+1}(\hat{Q})$$

Nous avons les propriétés suivantes :

Soit $\vec{s} \in H_{\hat{Q}}^k$ et $\vec{\nu}_{\hat{Q}}$ la normale à un côté de \hat{Q} :

$$(i) \operatorname{div} \vec{s} \in V_{\hat{Q}}^k$$

(ii) la restriction de $\vec{s} \cdot \vec{\nu}_{\hat{Q}}$ à tout côté de \hat{Q} est un polynôme de degré $\leq k$.

Nous pouvons énoncer le lemme 2.1 (démontré dans RAVIART-THOMAS

Lemme 2.1 : Une fonction $\vec{s} \in H_{\hat{Q}}^k$ est déterminée de façon unique par :

(a) les valeurs de $\vec{s} \cdot \vec{\nu}_{\hat{Q}}$ en $k+1$ points distincts de chaque arête de \hat{Q}

(b) les moments

$$\int_{\hat{Q}} \hat{s}_1 \hat{x}_1^\mu \hat{x}_2^\nu d\hat{x}; 0 \leq \mu \leq k-1; 0 \leq \nu \leq k$$

$$\int_{\hat{Q}} \hat{s}_2 \hat{x}_1^\mu \hat{x}_2^\nu d\hat{x}; 0 \leq \mu \leq k; 0 \leq \nu \leq k-1$$

On définit une discrétisation de $\bar{\Omega}$ en quadrilatères. On note \mathcal{K}_h une famille de quadrilatères qui répond aux conditions d'un maillage d'un domaine pour une méthode d'éléments finis classiques. Soit $Q \in \mathcal{K}_h$, ∂Q sa frontière et $x = (x_1, x_2)$ un point de Q .

Il existe une transformation inversible \vec{F}_Q allant de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 telle que $\vec{F}_Q(Q) = Q$.

On note :

$$x_1 = F_{Q1}(\hat{x}) \text{ et } x_2 = F_{Q2}(\hat{x})$$

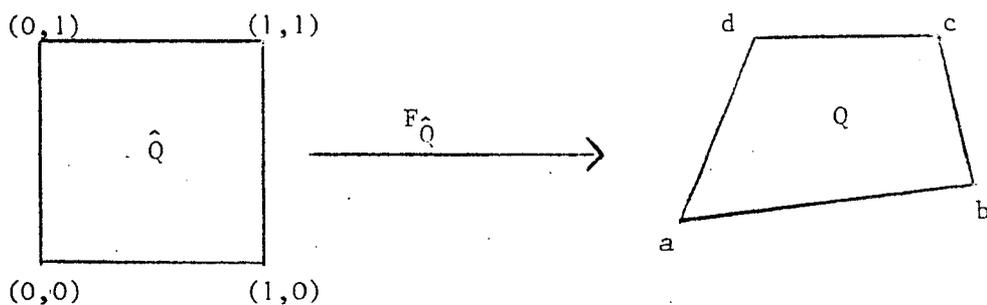
En appelant :

$$a = \vec{F}_Q(0,0) = (a_1, a_2)$$

$$b = \vec{F}_Q(1,0) = (b_1, b_2)$$

$$c = \vec{F}_Q(1,1) = (c_1, c_2)$$

$$d = \vec{F}_Q(0,1) = (d_1, d_2)$$



on a :

$$(14) \quad F_{Q1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = A \hat{x}_1 \hat{x}_2 + A_1 \hat{x}_1 + A_2 \hat{x}_2 + a_1$$

$$(15) \quad F_{Q2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = B \hat{x}_1 \hat{x}_2 + B_1 \hat{x}_1 + B_2 \hat{x}_2 + a_2$$

avec

$$A = a_1 - b_1 + c_1 - d_1$$

$$B = a_2 - b_2 + c_2 - d_2$$

$$A_1 = b_1 - a_1$$

$$B_1 = b_2 - a_2$$

$$A_2 = d_1 - a_1$$

$$B_2 = d_2 - a_2$$

On définit maintenant la matrice jacobienne DF_Q de \vec{F}_Q et son jacobien J_Q .

$$DF_Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{Q1}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_{Q1}}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial F_{Q2}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_{Q2}}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\hat{x}_2 + A_1 & A\hat{x}_1 + A_2 \\ B\hat{x}_2 + B_1 & B\hat{x}_1 + B_2 \end{pmatrix}$$

$$(16) \quad J_Q = \det(DF_Q) = (A_1 B - B_1 A) \hat{x}_1 + (B_2 A - A_2 B) \hat{x}_2 + A_1 B_2 - A_2 B_1$$

On remarque alors que le jacobien est une fonction affine de \hat{x} .

On associe maintenant à Q l'espace suivant :

$$(17) \quad H_Q^k = \{ \vec{s} : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \vec{s} = \frac{1}{J_Q} DF_Q \vec{\hat{s}} \circ \vec{F}_Q^{-1} ; \vec{\hat{s}} \in H_Q^k \}$$

Cette définition compliquée de \vec{s} résulte de la propriété de la conservation des flux à travers le maillage (cf. propriétés ci-dessous et l'annexe 1).

Nous pouvons maintenant définir les espaces discrets correspondants à V et H pour le maillage \mathcal{K}_h .

$$(18) \quad H_h^k = \{ \vec{s}_h \in H(\text{div}, \Omega) \mid \forall Q \in \mathcal{K}_h, \vec{s}_h|_Q \in H_Q^k \}$$

$$(19) \quad V_h^k = \{ v_h \in L^2(\Omega) \mid \forall Q \in \mathcal{K}_h, v_h|_Q \circ \vec{F}_Q \in V_Q^k \}$$

REMARQUES :

a - La valeur de k ne sera pas forcément la même pour toutes les inconnues (cf. § V).

b - La propriété $\text{div } \vec{s}_h \in V_h^k$ est démontrée dans THOMAS

2 - Principales propriétés des éléments finis

Parmi les propriétés fondamentales de ces éléments finis, on peut citer les suivantes :

a - l'espace V_h^k a comme base unisolvente des fonctions à support compact dont le support est un élément Q de \mathcal{K}_h ,

b - l'espace H_h^k est formé de champs de vecteurs discontinus sur les arêtes du maillage et dont la composante normale à l'arête est continue,

c - soient \vec{s} et $\hat{\vec{s}}$ deux fonctions définies sur Q et \hat{Q} telles que $\vec{s} = \frac{1}{J_Q} \text{DF}_Q \vec{s} \circ \vec{F}_Q^{-1}$ et v et \hat{v} deux fonctions sur Q et \hat{Q} telles que $v = \hat{v} \circ \vec{F}_Q^{-1}$.

On a les relations suivantes :

$$(20) \quad \forall v \in H^1(Q) \quad \forall \vec{s} \in [L^2(Q)]^2 \quad \int_Q \vec{s} \cdot \text{grad} v dx = \int_{\hat{Q}} \hat{\vec{s}} \cdot \text{grad} \hat{v} d\hat{x}$$

$$(21) \quad \forall v \in L^2(Q) \quad \forall \vec{s} \in H(\text{div}, Q) \quad \int_Q v \text{div} \vec{s} dx = \int_{\hat{Q}} \hat{v} \text{div} \hat{\vec{s}} d\hat{x}$$

soit :
$$\text{div} \vec{s} = \frac{1}{J_Q} \text{div} \hat{\vec{s}}$$

Toutes ces propriétés sont étudiées et démontrées dans THOMAS . Elles seront utiles dans la discrétisation pratique des équations. Particulièrement la seconde propriété assurera la continuité des vitesses des fluides dans le domaine et la conservativité du schéma.

3 - Approximation du terme de transport

Le terme du premier ordre $\text{div} \vec{w}$ appelé terme de transport est non-linéaire et non-monotone (car b_0 est croissante mais b_1 est quelconque). Pour en donner une bonne approximation, le schéma de GODUNOV, étudié par LEROUX donne des résultats satisfaisants tant au niveau théorique que numérique pour une approximation par un schéma de différences finies.

Le principe de ce schéma est de trouver, en résolvant un problème de Riemann, une valeur intermédiaire entre les deux valeurs de la discontinuité qui rende compte de l'évolution de la solution en ce point.

Rappelons le schéma de Godounov monodimensionnel dans le cas des différences finies avant de l'adapter à notre problème.

Soit $]a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} et I une partition de $]a, b[$ en N intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{N}$.

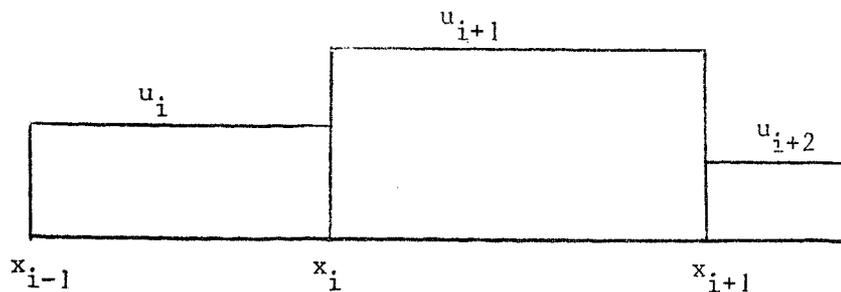
Soit maintenant l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{f(u)}{\partial x} = 0 \quad x \in]a, b[; t \in]0, T[$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

On approche la solution par une fonction constante par morceaux sur les intervalles de I .

A chaque point x_i de la discrétisation, on a deux valeurs de u , une à gauche notée u_i et une à droite notée u_{i+1} .



Si maintenant J désigne une partition de $]0, T[$ en M intervalles de longueur $\tau = \frac{T}{M}$, la méthode d'approximation de Godounov s'écrit alors :

Trouver $u_h \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ tel que :

$$(22) \quad u_i^0 = u_{0i} \quad \forall i = 1, N+1$$

$$(23) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\tau}{h} [f(\xi_{i+1}^n) - f(\xi_i^n)]$$

avec

$\xi_i^n \in \mathcal{J}(u_i^n, u_{i+1}^n)$ $\mathcal{J}(\lambda_1, \mu_1) = [\min(\lambda_1, \mu_1), \max(\lambda_1, \mu_1)]$ tel que :

$$(24) \quad \operatorname{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) f(\xi_i^n) = \min_{\lambda \in \mathcal{J}(u_i^n, u_{i+1}^n)} \operatorname{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) f(\lambda)$$

Dans le cas (générique) où le min définissant ξ_i est atteint en un seul point, ξ_i s'interprète comme la valeur au point i à l'instant $n+0$ de la solution exacte du problème de Riemann ayant pour valeur initiale à l'instant n , la discontinuité au point i .

En notant u_h^n , la solution approchée (constante par morceaux) à l'instant n , l'approximation (23) se réécrit :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau} v dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} f(u_h^n) v dx + [f(\xi_{i+1}^n) - f(u_{i+1}^n)] v +$$

$$[f(u_{i+1}^n) - f(\xi_i^n)] v = 0 \quad \forall v \text{ constante}$$

soit encore, après intégration par parties du second terme :

$$(23\text{bis}) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau} v dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u_h^n) \frac{\partial v}{\partial x} dx + f(\xi_{i+1}^n) v - f(\xi_i^n) v = 0$$

$\forall v \text{ constante}$

Cette méthode coïncide avec un schéma décentré amont si f est monotone.

Dans le cas des éléments finis mixtes, et de la dimension deux, à chaque arête du maillage se trouve une discontinuité de la solution. Mettons-la en évidence.

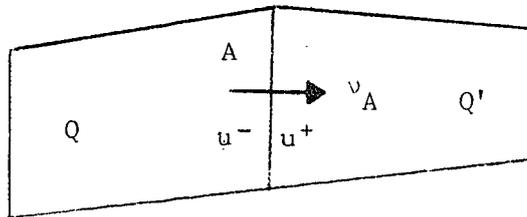
Multiplions le terme de transport par une fonction v de V_h^k à support dans $Q_i \in \mathcal{K}_h$ et appliquons la formule de Green. Nous obtenons :

$$(25) \quad \int_Q \operatorname{div} \vec{w}(u) \cdot \vec{v} = - \int_Q \vec{w}(u) \operatorname{grad} v + \int_{\partial Q} \vec{w}(u) \cdot \vec{v}_Q \, v \, d\Gamma$$

où v_Q est la normale extérieure à Q .

La méthode de Godounov consiste, pour tenir compte de la discontinuité de u au bord de Q , à faire intervenir, dans $\int_{\partial Q}$, les valeurs dans les éléments voisins, sachant que $w(u)$ peut ne pas être monotone.

Soit A une arête de ∂Q , et $Q' \in \mathcal{K}_h$ le quadrilatère tel que $A = Q \cap Q'$. Choisissons sur A une normale \vec{v}_A , par exemple orientée de Q vers Q' , et notons u^+ et u^- les valeurs de u de part et d'autre de A (ici $u^+ = \text{trace de } u_{Q'}$,



$u^- = \text{trace de } u_Q \text{ sur } A$). On définit alors en tout point de A la "valeur de Godounov" ξ_A^n par (comparer avec (24)) :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_A^n \in \mathcal{J}(u^+, u^-) \\ \operatorname{Sgn}(u^+ - u^-) \vec{w}(\xi_A^n) \cdot \vec{v}_A = \operatorname{Min}_{\lambda \in \mathcal{J}(u^+, u^-)} \operatorname{Sgn}(u^+ - u^-) \vec{w}(\lambda) \cdot \vec{v}_A \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que ξ_A^n ne dépend pas du sens choisi pour \vec{v}_A , et est donc intrinsèquement attaché à l'arête A.

On approche alors (25) par (comparer avec les derniers termes de (23bis)) :

$$(25bis) \quad \int_Q \operatorname{div} \vec{w}(u_h^n) \cdot v = - \int_Q \vec{w}(u_h^n) \cdot \operatorname{grad} v + \sum_{A \in \partial Q} \int_A \vec{w}(\xi_A^n) \cdot \vec{v}_Q v$$

REMARQUES :

1 - ξ est une fonction de x sur A qui généralise la notion de "valeur" de GODOUNOV définie par (24).

2 - Les débits approchés seront définis de la façon suivante :

$$(27) \quad - \text{débit en eau } \vec{\phi}_{1h} = \vec{q}_{0h} + \vec{r}_h + \vec{w}_h(\xi)$$

$$(28) \quad - \text{débit en huile } \vec{\phi}_{2h} = \vec{q}_{0h} - \vec{r}_h - \vec{w}_h(\xi)$$

Cette approximation assurera la conservativité du schéma d'éléments finis, sous certaines hypothèses (voir IV-2).

4 - Énoncé du problème approché

La dérivée en temps étant approchée par un schéma aux différences finies, nous pouvons énoncer le problème approché. Trouver

$$u_h \in [V_h^k]^{M+1} ; \vec{r}_h \in [H_h^{k'}]^{M+1} ; p_h \in [V_h^{k'}]^{M+1} ; \vec{q}_{0h} \in [H_h^{k'}]^{n+1} ; \vec{q}_{1h} \in H_h^{k'}$$

tel que :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_Q \varphi \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau} v_h dx + \int_Q \operatorname{div} \vec{r}_h^n v_h dx - \int_Q \vec{w}_h(u_h^n) \operatorname{grad} v_h dx + \\ \int_{\partial Q} \vec{w}_h^n(\xi) \cdot \vec{v}_h v_h d\Gamma = 0 \quad \forall v_h \in V_h^k ; \forall Q \in \mathcal{T}_h \end{array} \right.$$

$$(30) \quad \vec{w}_h^n(\mu) = b_0(\mu) \vec{q}_{0h}^n + b_1(\mu) \vec{q}_{1h}^n$$

ξ défini comme en (25bis) - (26)

$$(31) \quad \int_{\Omega} \frac{r_h^n \cdot s_h}{\psi} dx = \int_{\Omega} \alpha(u_h^n) \operatorname{div} \vec{s}_h dx - \int_{\Gamma} \alpha(u_h^n) \vec{s}_h \cdot \vec{\nu} d\Gamma \quad \forall \vec{s}_h \in H_h^k$$

$$(32) \quad \int_{\Omega} \frac{q_{0h}^n \cdot s_h}{\psi d(u_h^n)} dx = \int_{\Omega} P_h^n \operatorname{div} \vec{s}_h dx + \int_{\Gamma} -P_b \vec{s}_h \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{d_1(u_h^n)}{\psi d(u_h^n)} \vec{q}_{1h} \cdot \vec{s}_h dx \quad \forall \vec{s}_h \in H_h^{k'}$$

$$(33) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_{0h}^n v_h dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h^{k'}$$

$$(34) \quad \int_{\Omega} \vec{q}_{1h} s_h dx = \int_{\Omega} \psi \Pi_1 \operatorname{div} \vec{s}_h dx - \int_{\Gamma} \Pi_1 \vec{s}_h \cdot \vec{\nu} d\Gamma \quad \forall \vec{s}_h \in H_h^{k'}$$

+ conditions aux limites.

REMARQUES :

1 - Pour des raisons d'économie de calculs, l'équation en pression sera résolue par une méthode de point-selle décrite dans FORTIN-GLOWINSKI-THOMASSET dont le lagrangien est :

$$(35) \quad \mathcal{L}(p_h^n, \vec{q}_{0h}^n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\vec{q}_{0h}^n|^2}{Kd(u_h^n)} dx - \int_{\Omega} P_h^n \operatorname{div} \vec{q}_{0h}^n dx + \int_{\Gamma} P_h^n \vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{\nu} d\Gamma +$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{q}_{0h}^n)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{d_1(u_h^n)}{Kd(u_h^n)} \vec{q}_{1h} \cdot \vec{q}_{0h}^n dx$$

2 - Bien que u et P dépendent l'un de l'autre, l'utilisation d'un schéma explicite en temps découple les équations et rend ces inconnues indépendantes.

3 - Le schéma (27) - (34) est conservatif quelles que soient les conditions aux limites utilisées.

Cela résulte de la proposition suivante :

La solution u_h, r_h du problème (29) à (34) vérifie à tout instant n les relations suivantes :

$$(35\text{bis}) \quad \forall Q \in \mathcal{K}_h \quad \int_{\partial Q} \vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{\nu}_Q \, d\Gamma = 0$$

$$(35\text{ter}) \quad \forall Q \in \mathcal{K}_h \quad \int_Q \psi(u_h^{n+1} - u_h^n) \, dx + \tau \int_{\partial Q} [\vec{q}_{0h}^n + \vec{r}_h^n + \vec{w}_h^n(\xi^n)] \cdot \vec{\nu}_Q \, d\Gamma = 0$$

DEMONSTRATION :

(35 bis) se déduit immédiatement de (33) en prenant $v_h = \chi_Q$ (χ_Q fonction caractéristique de Q) et en lui appliquant la formule de Stokes.

(35 ter) s'obtient en prenant $v = \chi_Q$ dans (29), en appliquant la formule de Stokes et par addition de (35bis). □

IV - ETUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES

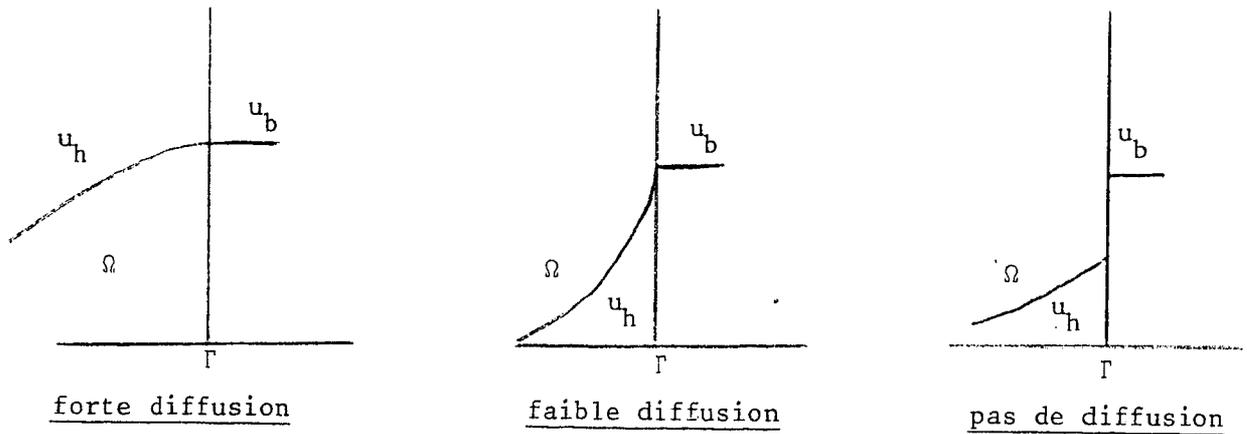
1 - Formulation générale

Du fait de l'approximation utilisée, on approche $u(.,t) \in H^1(\Omega)$ par :

$$\cdot u_h(.,t) \in L^2(\Omega) \quad (\text{qui n'a pas de trace !})$$

$$\cdot u_b(t) \in L^2(\Gamma) \quad (\text{qui "approche" la trace de } u).$$

Par continuité $u_b(t)$ peut être interprétée comme valeur de u à l'"extérieur" de Ω . En particulier, dans le cas sans diffusion u_h peut être discontinue et u_b devient une véritable "valeur extérieure". Il en est de même pour la pression P_h .



On définit ainsi :

$u_b = (u_e, u_\ell, u_s)$ de telle sorte que (31) détermine parfaitement u_b^n là où $\vec{r}_h^n \cdot \vec{\nu}$ est connu,

$P_b = (P_e, P_\ell, P_s)$ de telle sorte que (32) détermine parfaitement P_b^n là où $\vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{\nu}$ est connu.

Les conditions aux limites du Tableau 1 deviennent alors :

Equations en	Γ_e	Γ_s	Γ_ℓ
Saturation	$u_e^n = 1$	$\vec{\phi}_{lh}^n \cdot \vec{\nu} \geq 0; u_s^n \leq 1$ (35) $(1 - u_s^n) \vec{\phi}_{lh}^n \cdot \vec{\nu} = 0$ (36)	$\vec{\phi}_{lh}^n \cdot \vec{\nu} = 0$ (38)
Pression	$\vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{\nu} = q_d$ (38bis)	$P_s^n = P_d$ (39)	$\vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{\nu} = 0$ (40)

avec $\vec{\phi}_{lh}^n = \vec{q}_{0h}^n + \vec{r}_h^n + \vec{w}_h^n (\xi_s^n)$

Les conditions aux limites en pression (dernière ligne du tableau 1_h) à l'aide des équations (32), (33) déterminent sans ambiguïté P_h^n et q_{0h}^n lorsque u_h^n est connu.

Par contre, les conditions aux limites en saturation (première ligne de 1_h) font intervenir, sur Γ_e et Γ_s la quantité $\vec{\phi}_{lh}^n \cdot \vec{\nu}$ et leur mise en oeuvre dépend de la présence ou l'absence de diffusion et de gravité.

2 - Mise en oeuvre des conditions aux limites en saturation en présence de pression capillaire

Les conditions en saturation à résoudre numériquement sont (1ère ligne du tableau 1_h) de deux types seulement :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_b^n = 1 & \text{sur } \Gamma_e \text{ et sur } \Gamma_s \text{ après le break-through} \\ \vec{\phi}_{lh}^n \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_\ell \text{ et sur } \Gamma_s \text{ avant le break-through} \end{array} \right.$$

La mise en oeuvre de la première condition ne présente pas de difficultés : une fois u_h^n calculé par (29), on calcule ξ_b^n par (26), \vec{r}_h^n par (31).

Regardons maintenant la condition $\vec{\phi}_{lh}^n \cdot \vec{\nu} = 0$. On a vu que :

$$(41\text{bis}) \quad \vec{\phi}_{lh}^n = \vec{q}_{0h}^n + \vec{r}_h^n + \vec{w}_h^n(\xi_b^n)$$

Or \vec{r}_h^n dépend de u_b^n par (31) et ξ_b^n dépend aussi de u_b^n d'après sa définition (26), sauf dans le cas sans gravité, que nous traitons d'abord :

- Le cas sans gravité : on a $\vec{q}_{lh}^n = 0$, et (26) donne $\xi_A^n = u^-$ en choisissant $\vec{\nu}_A$ orienté comme \vec{q}_{0h}^n : le schéma se ramène à un schéma décentré introduit par LESAIN-T-RAVIART et utilisé par JAFFRE. En supposant que, sur Γ_s on a $\vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{\nu} \geq 0$ (ce qui est vérifié dès que $q_d < 0$ et $P_d = \text{cste}$), les conditions (41), (41bis) se résument à :

$$\vec{r}_h^n \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_\ell \quad (\text{car } \vec{q}_{Oh}^n \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_\ell)$$

$$(1 + b_0(u_h^n |_\Gamma)) \vec{q}_{Oh}^n \cdot \vec{v} + \vec{r}_h^n \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ avant le break-through}$$

Ces deux conditions donnent directement, une fois u_h^n calculé par (29), la valeur de $\vec{r}_h^n \cdot \vec{v}$ sur $\Gamma_\ell \cup \Gamma_s$. Le reste de \vec{r}_h^n est calculé, simultanément avec $\alpha(u_b^n)$ par le système linéaire (31).

- Le cas avec gravité : lorsque $\vec{q}_1 \neq 0$, la valeur de Godounov ξ_b^n sur $\Gamma_\ell \cup \Gamma_s$ peut dépendre effectivement de u_b^n , de sorte que la résolution exacte de (41), (41bis) conduit à la résolution d'un système non-linéaire (31), (26), (41), (41bis) d'équation sur les variables \vec{r}_h^n et u_b^n sur $\Gamma_\ell \cup \Gamma_s$.

Pour contourner cette difficulté, on découple les équations en remplaçant (41), (41bis) par :

$$(41\text{ter}) \quad [\vec{q}_{Oh}^n + \vec{r}_h^n + \vec{w}_h^n(\xi^{n-1})] \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_\ell \text{ et sur } \Gamma_s \text{ avant le break-through}$$

ce qui ramène à la même situation que dans le cas sans gravité, puisque (41ter) définit directement $\vec{r}_h^n \cdot \vec{v}$ sur $\Gamma_\ell \cup \Gamma_s$.

Naturellement, avec les conditions (41ter) les parois Γ_ℓ et Γ_s ne sont plus absolument imperméables, mais le schéma est toujours conservatif.

REMARQUES :

1 - Si on modifie la définition du débit d'eau approché ϕ_{lh}^n en posant

$$\phi_{lh}^n = \vec{q}_{Oh}^n + \vec{r}_h^n + \vec{w}_h^n(\xi^{n-1})$$

la paroi devient imperméable, mais le schéma n'est plus conservatif. ■

2 - On pourrait remplacer (41ter) par la condition :

$$(41\text{quarto}) \left\{ \begin{array}{l} [\vec{q}_{0h}^n + \vec{r}_h^n + \vec{w}_h^n(\xi^n)] \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_\ell \text{ et sur } \Gamma_s \text{ avant le break-through} \\ \text{avec} \\ \text{sgn}(u_b^{n-1} - u_h^n |_\Gamma) \vec{w}(\xi^n) \cdot \vec{v} = \underset{\lambda \in \mathcal{J}(u_b^{n-1}, u_h^n |_\Gamma)}{\text{Min}} \text{sgn}(u_b^{n-1} - u_h^n |_\Gamma) \vec{w}(\lambda). \end{array} \right.$$

L'avantage de (41quarto) sur (41ter) est que, chaque fois que $\xi^n = \xi^n = u_h^n$, les conditions (41quarto) et (41), (41bis) sont équivalentes, de sorte que la condition (41quarto) donnera effectivement un débit d'eau nul à travers certaines parties de la frontière (grosso modo, celles où la valeur de Godounov est la valeur de u à l'intérieur du domaine). \square

Nous pouvons maintenant énoncer l'algorithme :

a - On part de u_h^0, u_ℓ^{-1} .

b - Ayant $u_h^{n-1}, u_\ell^{n-1}, \vec{r}_h^{n-1}$, on en déduit $\vec{r}_h^n \cdot \vec{v}$ sur Γ_ℓ en utilisant (31) et (41ter).

c - Puis on calcule u_ℓ^n en utilisant (31) sur Γ_ℓ .

d - Enfin on calcule u_h^n à partir de (29).

e - On fait $n = n+1$ et on revient en b.

Comme sur Γ_ℓ $\vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall n$, (41ter) s'écrit :

$$\vec{r}_h^n \cdot \vec{v} = -\vec{q}_{1h} \cdot b_1(\xi_\ell^{n-1}) \cdot \vec{v}$$

ce qui traduit le découplage des équations.

3 - Equation en saturation sans diffusion

Nous allons maintenant examiner le cas où $\alpha \equiv 0$ (c.a.d. $\vec{r} = 0$).

L'équation en saturation devient alors une équation purement hyperbolique pour laquelle on ne sait pas imposer des conditions du type Dirichlet généralisée.

- Cas sans gravité

. sur Γ_ℓ on a :

$$\vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{v} = 0$$

et puisque $\vec{r} = 0$:

$$\phi_{lh}^n \cdot \vec{v} = [1 + b_0(\xi^n)] \vec{q}_{0h}^n \cdot \vec{v} = 0$$

de sorte que (38) est toujours vérifié sans condition sur u_h . La vitesse de filtration de chacun des fluides est tangente à la frontière de façon naturelle.

. sur Γ_s

Pas de condition en saturation puisque le champ q_{0h} est imposé sortant.

- Cas avec gravité

C'est le cas le plus difficile. En effet, sur la frontière, une composante indépendante du débit total q_{0h} vient s'ajouter à la vitesse de filtration. Nous allons chercher la condition de Dirichlet généralisée à imposer (c'est-à-dire la valeur de u_s à choisir) pour que les conditions liées au problème physique (c'est-à-dire celles des tableaux 1 et 1_h) soient satisfaites au mieux.

Pour plus de clarté, nous omettrons les indices d'itération en temps n et les indices h dans cette partie.

i) Condition sur Γ_ℓ

On se place dans le cas $b_1 \geq 0$ (cas où le fluide injecté a une densité plus grande). Les cas $b_1 \leq 0$ s'en déduit immédiatement. De (38) à (40) nous obtenons la condition physique à satisfaire :

$$(42) \quad b_1(\xi) \vec{q}_1 \cdot \vec{v} = 0$$

Nous avons deux possibilités :

- le champ de gravité tend à aller contre la paroi imperméable Γ_ℓ

$$(43) \quad \vec{q}_1 \cdot \vec{v} \geq 0$$

Dans ce cas, nous avons :

$$(44) \quad b_1(u) \vec{q}_1 \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall u \in [0, 1]$$

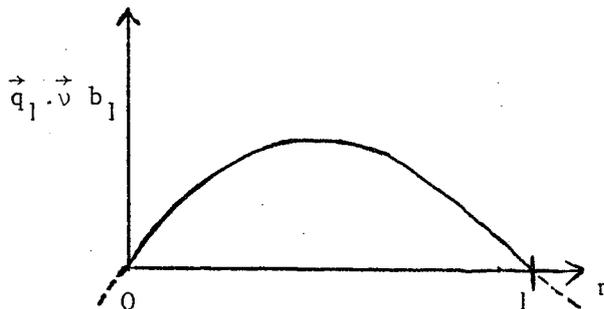
et u_ℓ vérifie l'équation :

$$(45) \quad b_1(\xi_\ell) \vec{q}_1 \cdot \vec{v} = 0$$

avec ξ_ℓ minimum de

$$(46) \quad (u_\ell - u_Q) \vec{q}_1 \cdot \vec{v} b_1(k) \quad k \in \mathcal{Y}(u_\ell, u_Q)$$

Comme $u_Q \geq 0$, la solution de (45)-(46) est $u_\ell = 1$. (cf. figure ci-dessous)



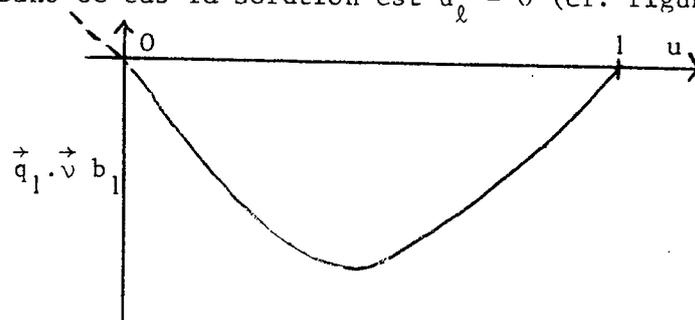
- le champ de gravité tend à décoller le fluide de la paroi imperméable Γ_ℓ : $\vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \leq 0$.

Nous avons alors :

$$(47) \quad b_1(u) \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \leq 0 \quad \forall u \in]0, 1[\text{ et } b_1(\xi_\ell) \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} = 0$$

$$(48) \quad \text{avec } \xi_\ell \text{ minimum de } (u_Q - u_\ell) \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \quad b_1(k) \quad k \in \mathcal{J}(u_Q, u_\ell)$$

Dans ce cas la solution est $u_\ell = 0$ (cf. figure ci-dessous).



ii) Condition sur Γ_s

$$\text{On a : } \phi_1 = [1 + b(u)] \vec{q}_0 + b_1(u) \vec{q}_1$$

On a toujours sur Γ_s : $\vec{q}_0 \cdot \vec{\nu} \geq 0$, ce qui signifie qu'il ne peut pas globalement entrer de fluide par cette frontière. (Cette condition est assurée par les conditions en pression).

D'autre part, d'après la définition de b :

$$1 + b(u) \geq 0.$$

Donc

$$(49) \quad [1 + b(u)] \vec{q}_0 \cdot \vec{\nu} \geq 0$$

Il faut donc maintenant discuter selon le signe de $\vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} b_1(u)$.

1er cas :

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} b_1(u) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_s$$

$$(50) \quad \text{si } \rho_1 \geq \rho_2 \text{ alors } \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \geq 0 \quad (\text{cas eau-huile par exemple})$$

$$(51) \quad \text{si } \rho_1 \leq \rho_2 \text{ alors } \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \leq 0 \quad (\text{cas gaz-huile par exemple})$$

Donc, dans le premier cas, la gravité a tendance à pousser le fluide 1 vers l'extérieur (parce qu'il est plus lourd ou plus léger).

2ème cas :

$$\vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} b_1(u) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_s$$

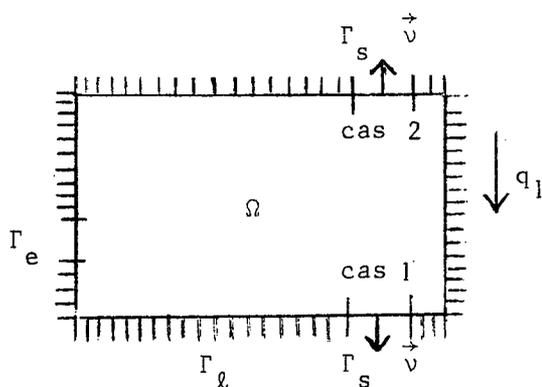
On a de même :

$$(52) \quad \text{soit } \rho_1 \geq \rho_2 \text{ et } \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \leq 0$$

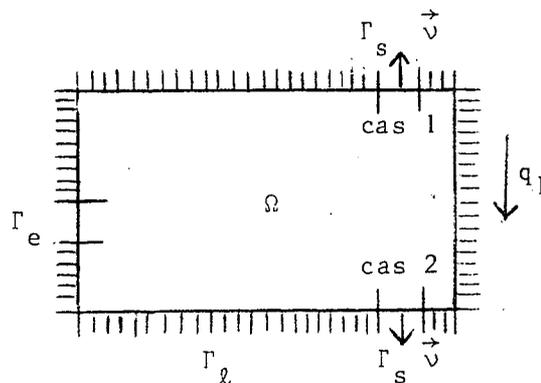
$$(53) \quad \text{soit } \rho_1 \leq \rho_2 \text{ et } \vec{q}_1 \cdot \vec{\nu} \geq 0$$

Là, la gravité a tendance à pousser le fluide 2 vers l'extérieur.

Nous résumons tous les cas dans les figures ci-dessous :



$$\rho_1 \geq \rho_2$$



$$\rho_1 \leq \rho_2$$

Posons maintenant :

$$f(k) = [1 + b(k)] \vec{q}_0 \cdot \vec{v} + b_1(k) \vec{q}_1 \cdot \vec{v} \quad \forall k \in [0,1]$$

Nous obtenons alors :

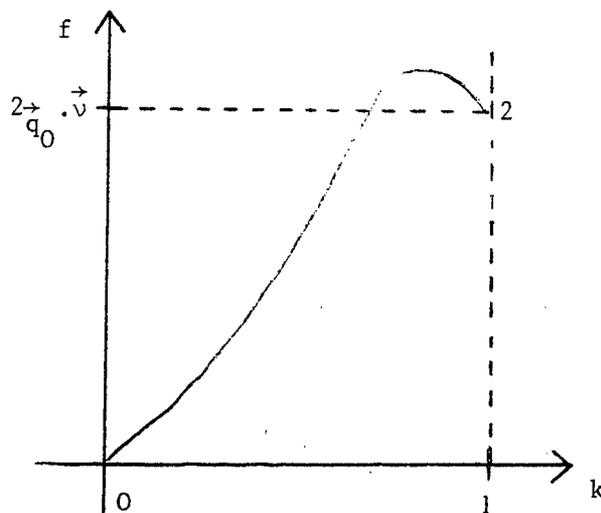
$$(54) \quad \vec{\varphi}_1 \cdot \vec{v} |_{\Gamma_s} = f(\xi_s) = \min_{k \in (u_s, u_Q)} \operatorname{sgn} (u_s - u_Q) f(k)$$

A partir de (54), nous pouvons étudier les conditions sur Γ_s . En effet, d'après (49), $(1+b)\vec{q}_0 \cdot \vec{v}$ est une fonction positive croissante de 0 à $2\vec{q}_0 \cdot \vec{v}$.

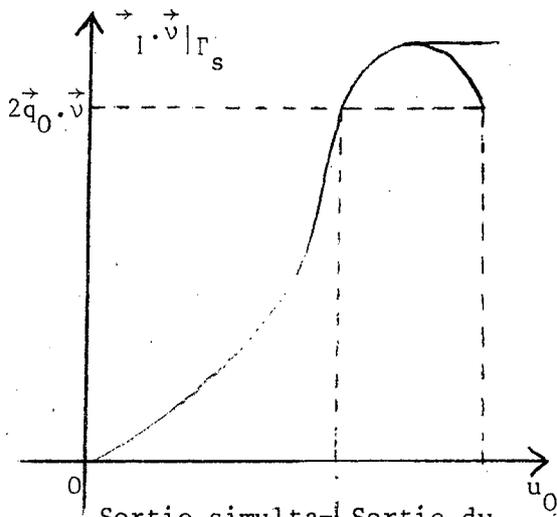
Étudions, dans chaque cas, la contribution apportée par $b_1 \vec{q}_1 \cdot \vec{v}$.

Cas 1 : $b_1 \vec{q}_1 \cdot \vec{v} \geq 0$

Nous avons dans ce cas $f \geq 0$. La contribution du terme de gravité peut faire dépasser f au-dessus de 2 (cf. figure ci-dessous).

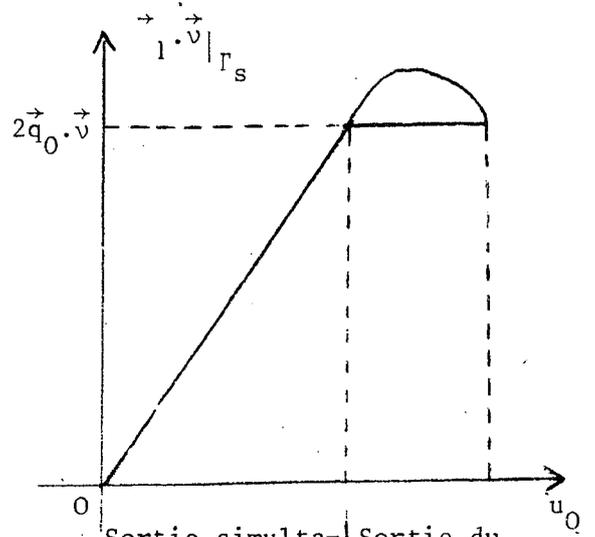


L'allure de $\vec{\psi}_1 \cdot \vec{v}|_{\Gamma_s}$ en fonction de u_0 , pour deux choix de u_s est donnée par les courbes suivantes :



Sortie simulta- | Sortie du
née des 2 | fluide 1 et
fluides | entrée du 2

1 - $u_s = 0$: (s est mouillée par le fluide \bar{e} de l'extérieur).



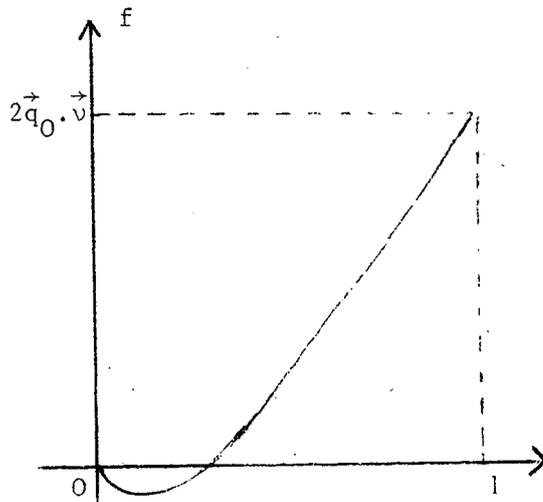
Sortie simulta- | Sortie du
née des 2 | fluide 1
fluides

2 - $u_s = 1$: (s est mouillée par le fluide 1 de l'extérieur).

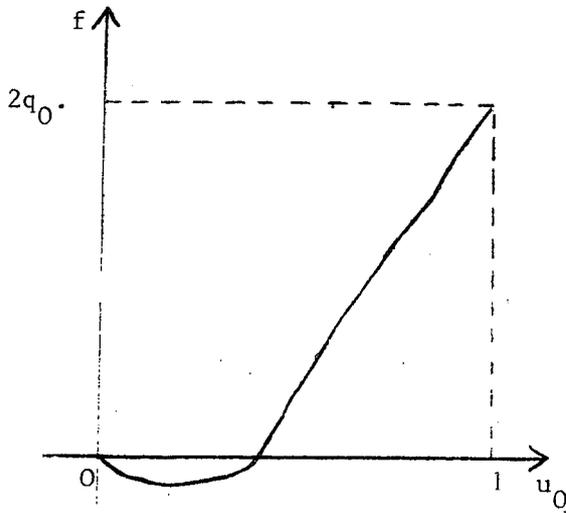
Le choix entre les deux possibilités dépend du problème physique. (Le second semble meilleur...).

Cas 2 : $b_1 \vec{q}_1 \cdot \vec{v} \leq 0$

f peut devenir négative au début.

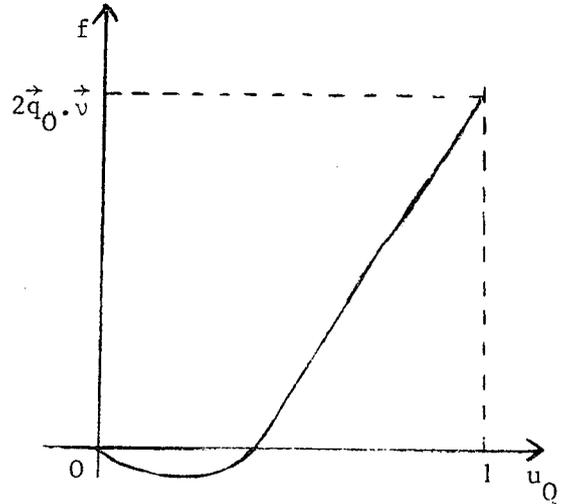


Nous avons dans les deux choix précédents, des processus analogues :



Sortie du fluide 2 Sortie des deux fluides

$$1 - u_s = 0$$



Entrée du fluide 1 et sortie du fluide 2 Sortie des deux fluides

$$2 - u_s = 1$$

Le choix dépend là aussi du problème.

V - RESOLUTION NUMERIQUE

1 - Espaces utilisés

Les calculs étant pratiquement impossibles sur des quadrilatères quelconques, ils sont ramenés sur le carré de référence grâce au changement de variable standard et aux relations (20) et (21).

De ce fait, il nous suffit de connaître une base des éléments finis sur le carré unité.

Les principaux espaces utilisés ont été les suivants :

- $V_{\hat{Q}}^0$: c'est l'espace des constantes sur \hat{Q} . On a $\dim V_{\hat{Q}}^0 = 1$ et l'élément de base est $\hat{v}_1 = 1$.
- $V_{\hat{Q}}^1$: c'est l'espace des fonctions de degrés 1 en chaque variable.

On a $\dim V_{\hat{Q}}^1 = 4$.

Les fonctions de base sont données par les relations du lemme 2.1. Il y a 6 champs de vecteurs de base colinéaires à l'axe des abscisses et 6 à celui des ordonnées. Si on appelle \vec{s}_i^1 les six premières et \vec{s}_i^2 les six autres, en notant $(\vec{s}_i^k)_j$ la $j^{\text{ième}}$ composante de \vec{s}_i^k ($j=1,2$), on a :

$$\begin{aligned} (\vec{s}_i^1)_1 &= Y_1 M^{-1} X_i & (\vec{s}_i^1)_2 &= 0 \\ (\vec{s}_i^2)_1 &= 0 & (\vec{s}_i^2)_2 &= Y_2 M^{-1} X_i \end{aligned}$$

où $X_i = (\delta_{i\ell})_{\ell=1,6}$ (δ_i étant le symbole de Kronecker)

$$Y_1 = (1, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1 \hat{x}_2, \hat{x}_1^2, \hat{x}_1^2 \hat{x}_2) \text{ et } Y_2 = (1, \hat{x}_2, \hat{x}_1, \hat{x}_1 \hat{x}_2, \hat{x}_2^2, \hat{x}_1 \hat{x}_2^2)$$

et M_1, M_2 deux matrices de $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ définies ci-dessous.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2 & 1 & \alpha_2 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2 & 1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/9 \end{pmatrix}$$

Avec : $\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$

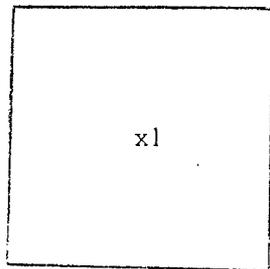
La base utilisée est la suivante :

$$\hat{v}_1 = (1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)$$

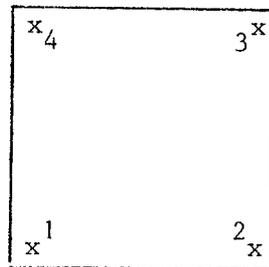
$$\hat{v}_2 = \hat{x}_1(1-\hat{x}_2)$$

$$\hat{v}_3 = \hat{x}_1 \hat{x}_2$$

$$\hat{v}_4 = (1-\hat{x}_1)\hat{x}_2$$



degrés de liberté pour V_Q^0



degrés de liberté pour V_Q^1

- H_Q^0 : c'est l'espace des fonctions vectorielles dont les composantes sont affines. On a $\dim H_Q^0 = 4$. La base de fonctions utilisées est :

$$\vec{\hat{s}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+\hat{x}_2 \end{pmatrix} \quad \vec{\hat{s}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\hat{s}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \quad \vec{\hat{s}}_4 = \begin{pmatrix} -1+\hat{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- H_Q^1 : c'est l'espace des fonctions vectorielles de la forme :

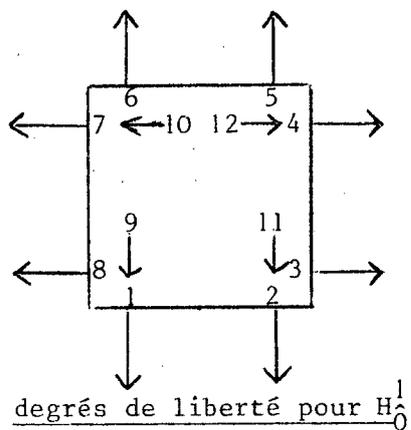
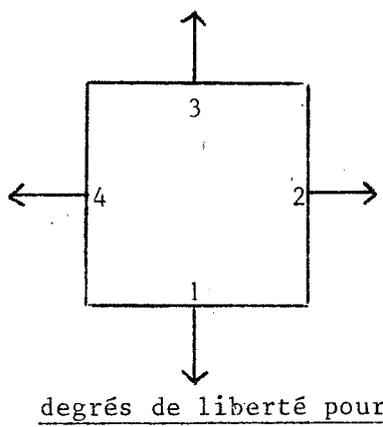
$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \text{ avec :}$$

$$s_1 = a_1 + b_1 \hat{x}_1 + c_1 \hat{x}_2 + d_1 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + e_1 \hat{x}_1 + f_1 \hat{x}_1^2 \hat{x}_2$$

$$s_2 = a_2 + b_2 \hat{x}_2 + c_2 \hat{x}_1 + d_2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 + e_2 \hat{x}_2^2 + f_2 \hat{x}_1 \hat{x}_2^2$$

Nous avons : $\dim H_Q^1 = 12$.

REMARQUE : Les coefficients α_1 et α_2 ne sont pas uniques. Ils proviennent du choix des points supportant les degrés de liberté qui, dans ce cas, ont été choisis comme points de la formule d'intégration de Gauss d'ordre 2, ce qui simplifie les calculs sur les frontières des quadrilatères.



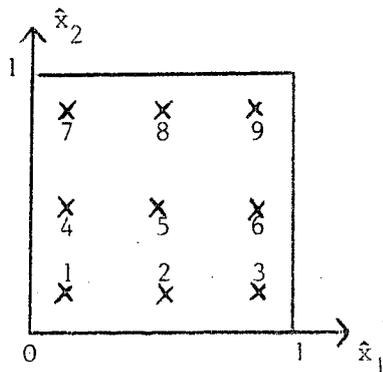
La connaissance de ces espaces et des transformations du carré unité en un quadrilatère du maillage est suffisante pour le calcul des intégrales du problème, qui, grâce aux relations (20) et (21), se ramène à un calcul sur \hat{Q} par changement de variable.

En général, u_h^n a toujours été cherché dans V_h^1 , p_h^n dans V_h^0 et q_{0h}^n et q_{1h} dans $H_h^0 \cdot r_h^n$, pour sa part a été cherché dans H_h^1 et H_h^0 comme on le verra dans les résultats numériques.

2 - Résolution technique

a) Formules d'intégration

En général, les intégrales ont été approchées par une formule de quadrature de Gauss à 9 points sur le carré unité qui est exacte pour $P_{5,5}$.



Cette formule, suffisante pour la majorité des intégrales ne convient pas à l'approximation de l'intégrale $\int_{\Omega} \vec{r}_h^n \cdot \vec{s} dx$ dans le cas d'un maillage quelconque (c'est-à-dire contenant autre chose que des parallélogrammes) et pour \vec{r}_h^n , $\vec{s} \in H_n^1$. En effet, nous obtenons pour cette intégrale, une matrice symétrique M telle que :

$$M = (a_{ij})_{\substack{i=1,N \\ j=1,N}} \quad \text{avec} \quad a_{ij} = \int_{\Omega} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j dx = \sum_{Q \in K_1} \int_Q \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j dx$$

où s_i, s_j sont des fonctions de base de H_h^1 .

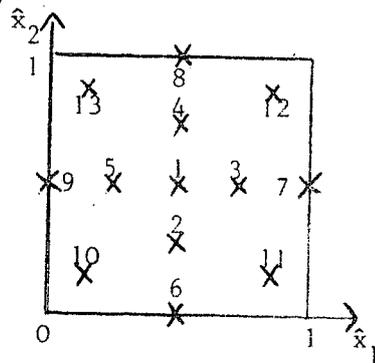
Or, d'après (17) nous pouvons écrire :

$$(55) \quad \int_Q \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j dx = \int_{\hat{Q}} \frac{1}{J_Q} DF_Q \vec{s}_i \cdot DF_Q \vec{s}_j d\hat{x}$$

Dans le cas où Q est un parallélogramme, J_Q est une constante et $DF_Q \vec{s}_i$ et $DF_Q \vec{s}_j$ sont des polynômes de $P_{2,2}$ et la formule de quadrature est suffisante.

Par contre dans le cas où Q est un quadrilatère quelconque J_Q est une fonction affine et nous avons à intégrer une fraction rationnelle dont le numérateur appartient à $P_{4,4}$ et le dénominateur est affine. Dans ce cas, la formule de quadrature s'avère insuffisante.

De ce fait, quand $\vec{r}_h^n \in H_n^1$, les coefficients a_{ij} ont été calculés à l'aide d'une formule de quadrature à 13 points exacte pour les polynômes de degré 7 (noté Q_7).



REMARQUE :

1 - Pour certaines intégrales une formule à 7 points exacte pour les polynômes de degré 5 est suffisante. Cependant, comme la précision dépend de l'importance de la non-linéarité, la quadrature à 9 points, toujours efficace, a été préférée.

2 - Les coordonnées des points et les poids des formules de quadrature peuvent être trouvés dans STROUD pour la formule à 13 points et dans ZIENKIEWICZ pour celle à 9 points (respectivement pp. 234-235 et pp. 218-219).

b) Calcul de u à l'extérieur du domaine Ω

Comme on l'a vu dans le paragraphe IV-2, le calcul de u à l'extérieur du domaine (u_s, u_ℓ) est fait à partir des équations en \vec{r}_h^n définies par (31). De ce fait, le nombre des valeurs de n à l'extérieur, sur une arête, est lié au nombre de valeurs de \vec{r}_h^n sur cette arête, c'est-à-dire au nombre de degrés de liberté des éléments finis sur l'arête.

Quand $\vec{r}_h^n \in H_h^1$, il y a deux degrés de liberté et u est linéaire de part et d'autre de l'arête.

Par contre, lorsque $\vec{r}_h^n \in H_h^0$, il n'y a plus qu'un seul degré de liberté et u est linéaire à l'intérieur et constante à l'extérieur. De ce fait, pour pouvoir calculer le ξ de GODOUNOV sur les arêtes extérieures, il faudra quand même définir deux valeurs identiques de u à l'extérieur afin de garder une formule d'intégration de Gauss d'ordre 2 sur les arêtes.

VI - RESULTATS NUMERIQUES

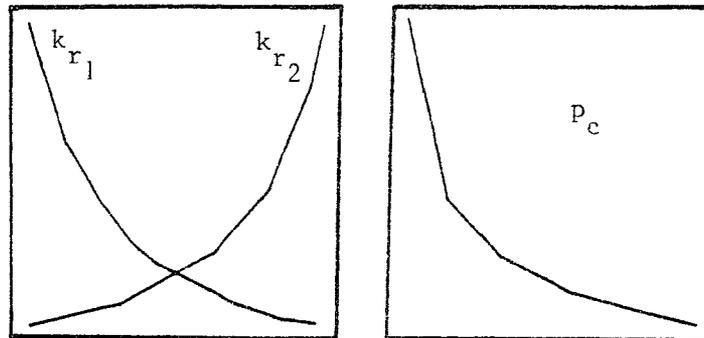
La plupart des expériences numériques ont été faites sur un cas de quart de five-spot "difficile" à fort débit d'injection afin de bien tester la diffusivité du modèle et sa précision. Différents aspects en ont été étudiés afin de voir l'étendue de ses possibilités.

Donnons d'abord les principales données numériques :

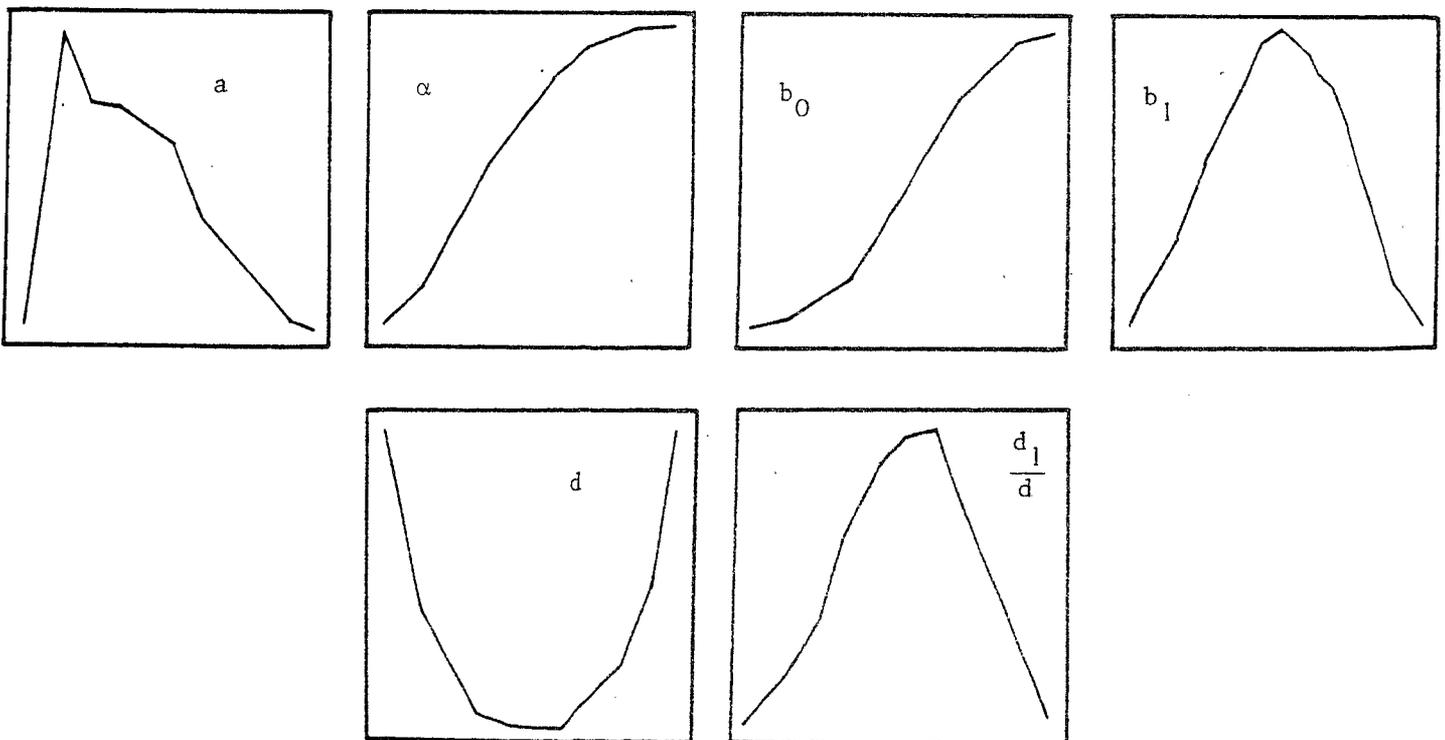
Longueur des côtés : 210 m × 210 m ; Débit d'injection : 40 m³/jour
 Epaisseur : 5 m ; Pression de récupération : 100 bars
 Porosité : 0.3 ; Densité : - eau : 1.1 ; - huile : 0.6
 Perméabilité absolue : 100 mD ; Viscosités : - eau : 1cP ; - huile : 1.43 cP

Ces données fournissent un rapport de mobilités égal à 1 qui a été modifié selon les expériences.

Les fonctions de la saturation sont les suivantes :



Données physiques



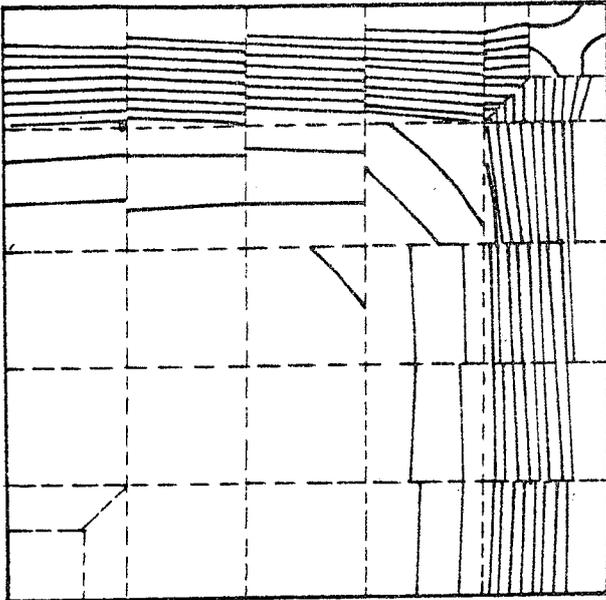
Fonctions résultantes

1) Comparaison des maillages

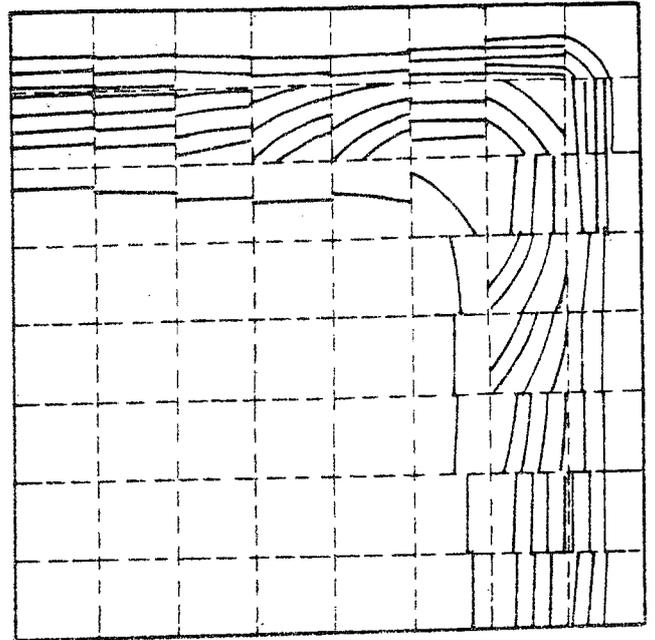
Deux maillages ont été utilisés :

- un maillage "grossier" comprenant 29 quadrilatères de 42 mètres de côté (sauf aux puits).
 - un maillage "raffiné" comprenant 64 carrés de 26,25 m de côté.
- Les isosaturations vont de 0.1 à 0.9.

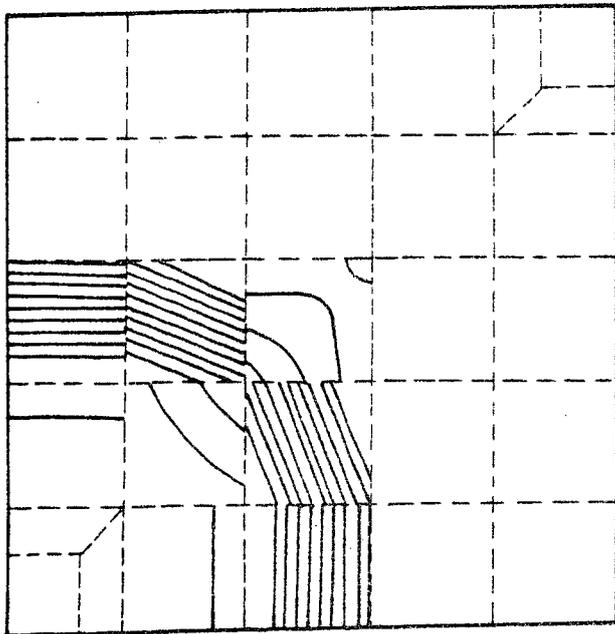
Nous pouvons observer une variation de la largeur du front selon le maillage (figures 1 et 2).



582 jours : "breakthrough"



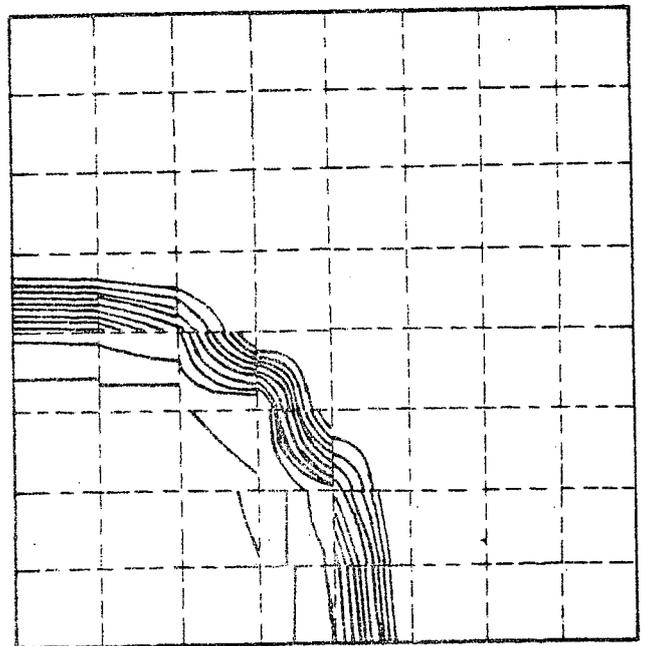
610 jours : "breakthrough"



200 jours

Figure 1

Maillage grossier



200 jours

Figure 2

Maillage raffiné

Cette largeur peut être réduite en prenant un rapport des mobilités inférieur à 1 (égal à $1/3$ dans la figure 3).

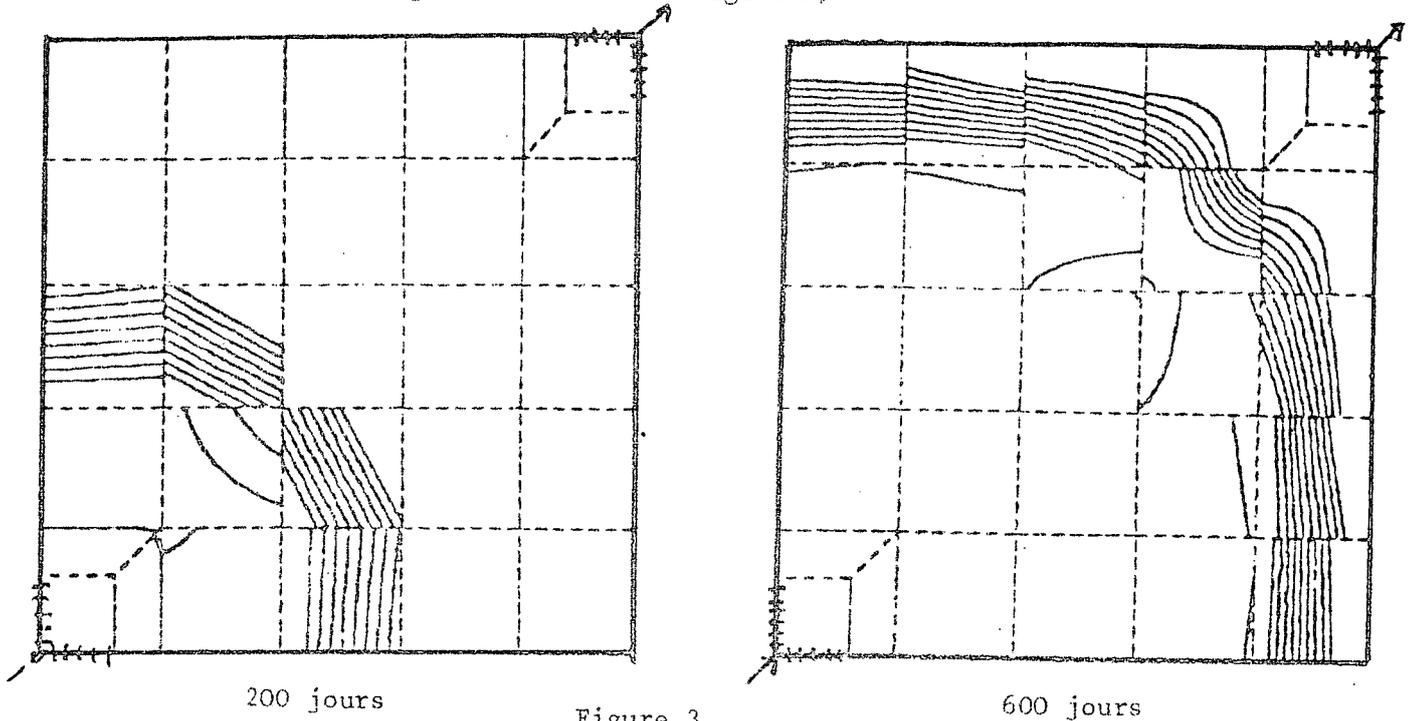
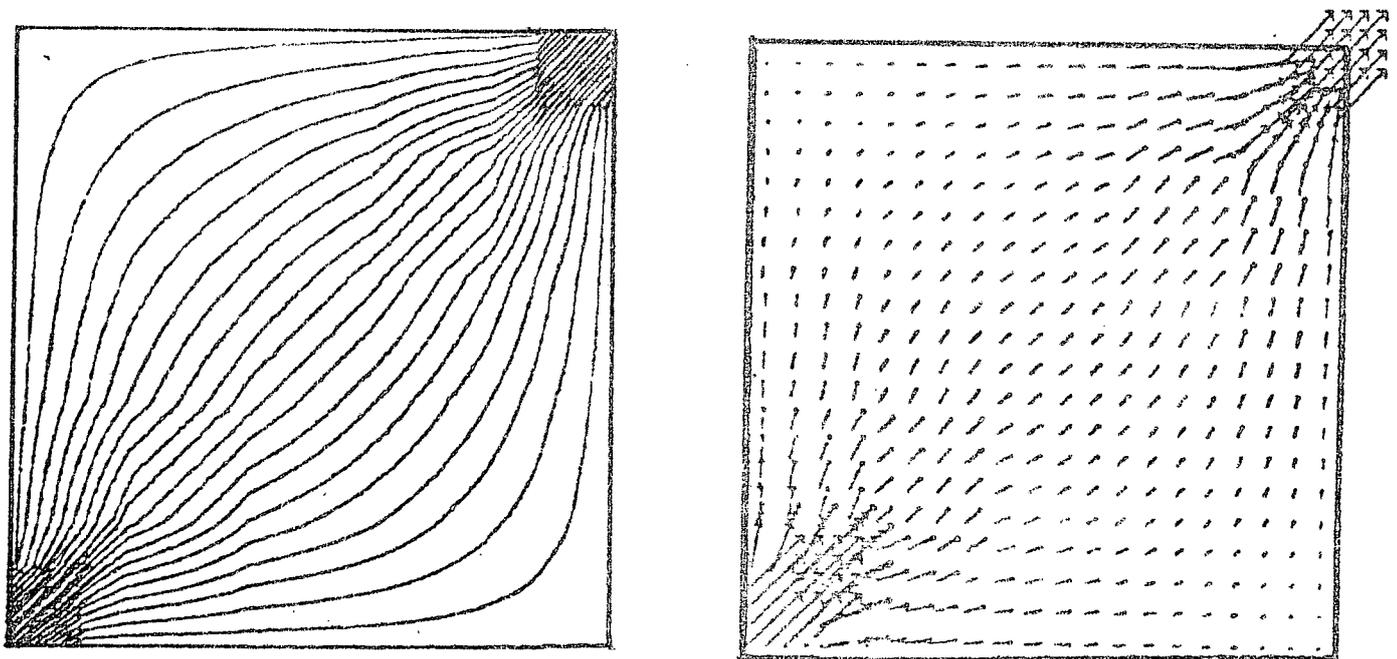


Figure 3
Rapport de mobilités : $1/3$

A titre indicatif, on donne les lignes de courant du champ q_{0h} ainsi que sa représentation pour le maillage grossier à 200 jours (rapport de mobilités égal à 1).



Lignes de courant

Représentation

Figure 4
Champ q_{0h}

2) Influence du terme de diffusion et de sa discrétisation

r_h a été calculé d'abord dans H_h^1 , puis dans H_h^0 (pour lequel on a encore $\text{div } r_h \in V_h^1$).

Nous avons testé les deux approximations pour trois valeurs de la diffusion :

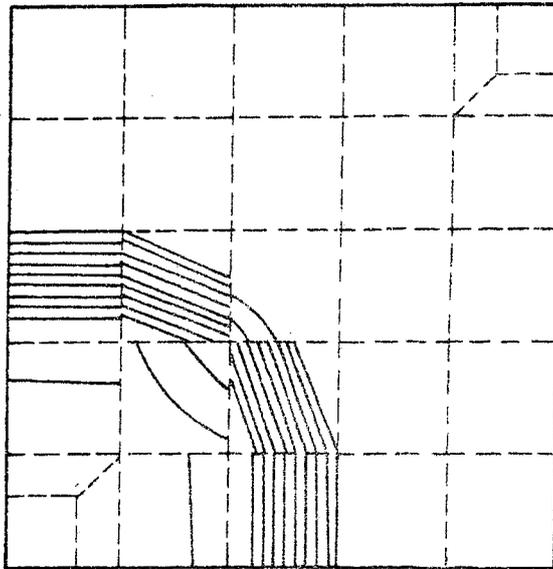
- 1 - $P'_c = 0$
- 2 - $K = 5$ Darcies
- 3 - $K = 23$ Darcies

Dans les cas 1 et 2, la diffusion numérique du maillage l'emporte sur la diffusion physique et le résultat reste quasiment inchangé. Dans le troisième cas, la différence devient sensible.

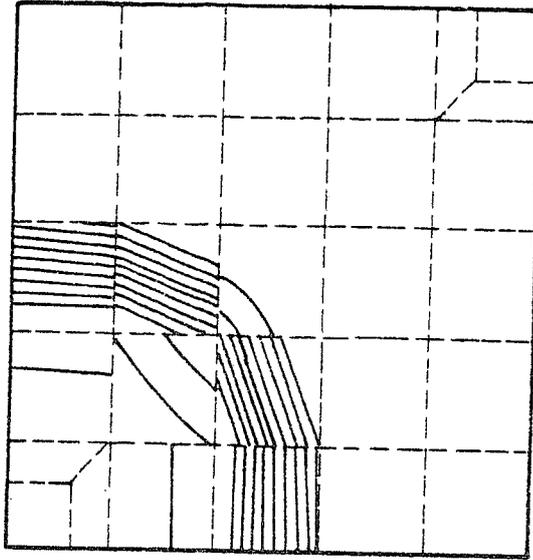
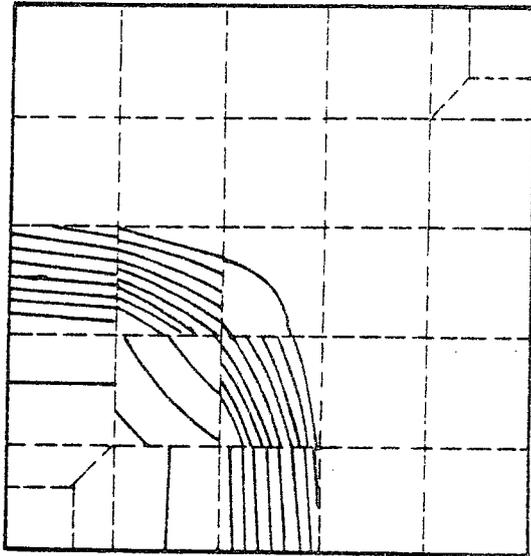
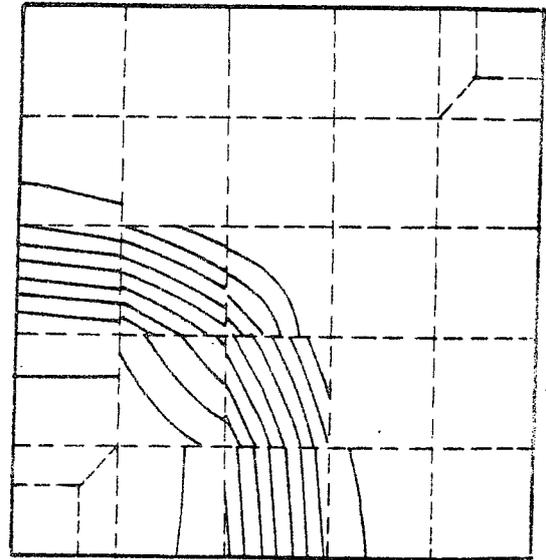
Dans le cas 3, nous avons comparé la méthode de discrétisation H_h^0 à H_h^1 et nous avons remarqué un effet plus sensible de la diffusion pour H_h^1 (ce qui est explicable par la plus grande importance numérique de la diffusion dans ce cas).

On donne ci-dessous les figures correspondantes à 200 jours.

CAS 1



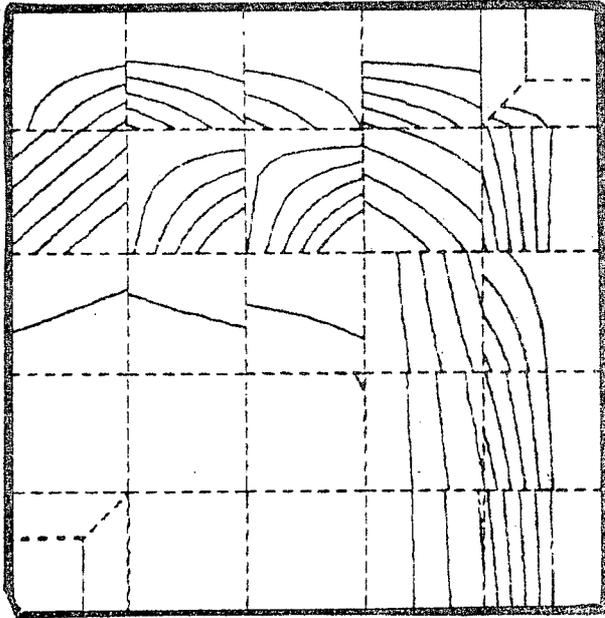
H_h^0

CAS 2 H_h^0 CAS 3 H_h^0  H_h^1

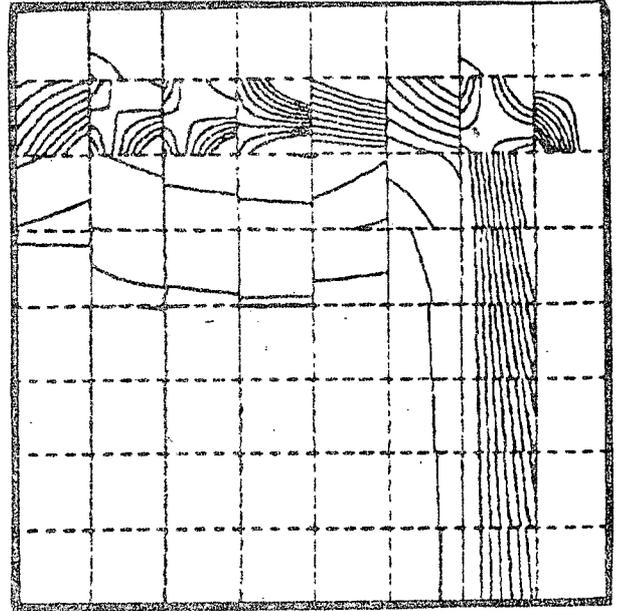
REMARQUE : 1 - Il faut noter qu'entre H_h^0 et H_h^1 (dans le cas où il n'y a pas de gravité) le temps de calcul passe du simple au double.

3) Etude de la gravité

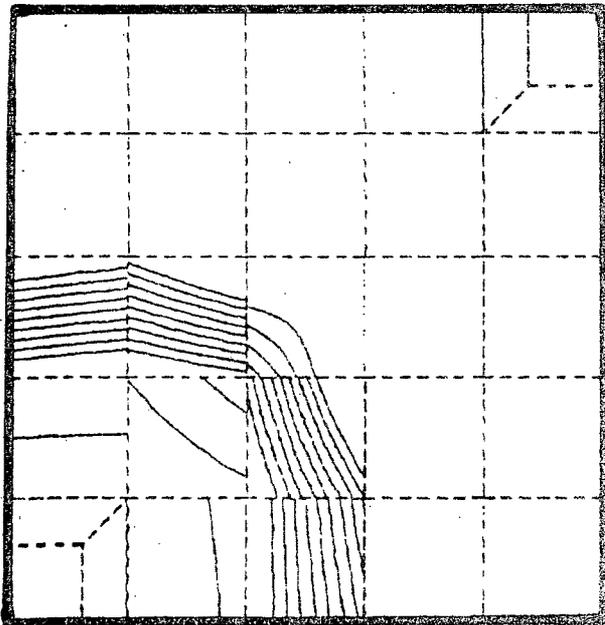
L'introduction de la gravité n'est sensible, pour ces données, que si la pente est très forte (car le débit est très rapide). Aussi avons-nous étudié le problème dans le cas où le domaine à l'axe des abscisse qui fait un angle de $+75^\circ$ avec l'horizontale. La représentation du front perd alors sa régularité comme on le voit ci-dessous.



562 jours : breakthrough



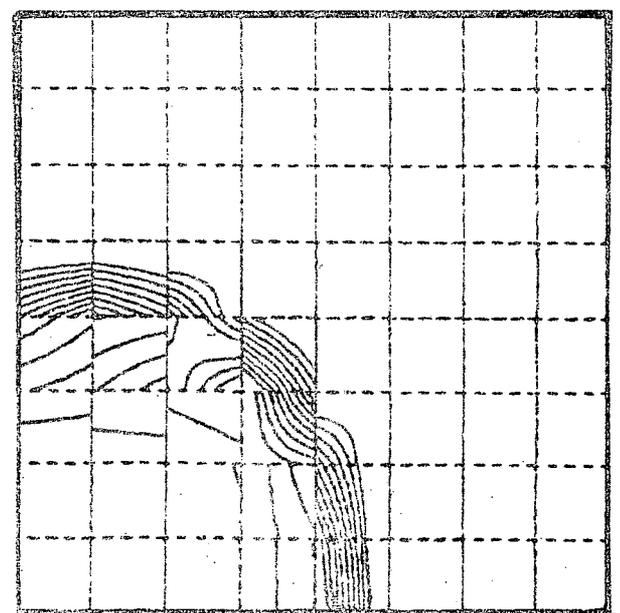
541 jours : breakthrough



200 jours

FIGURE 5

Maillage grossier avec gravité

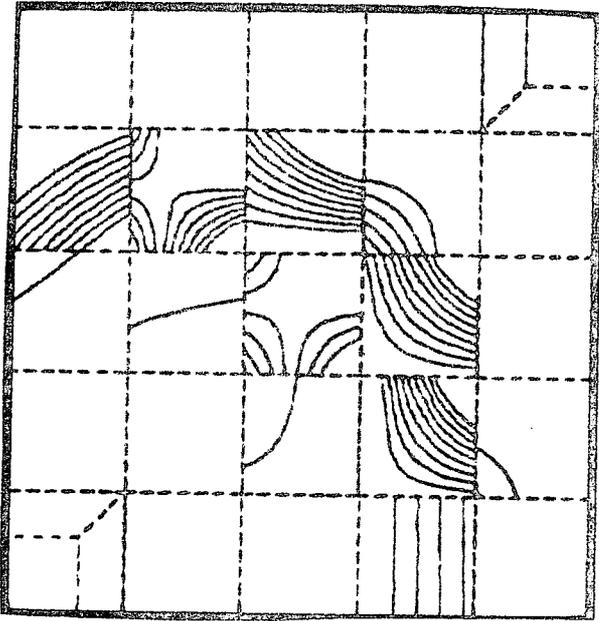


200 jours

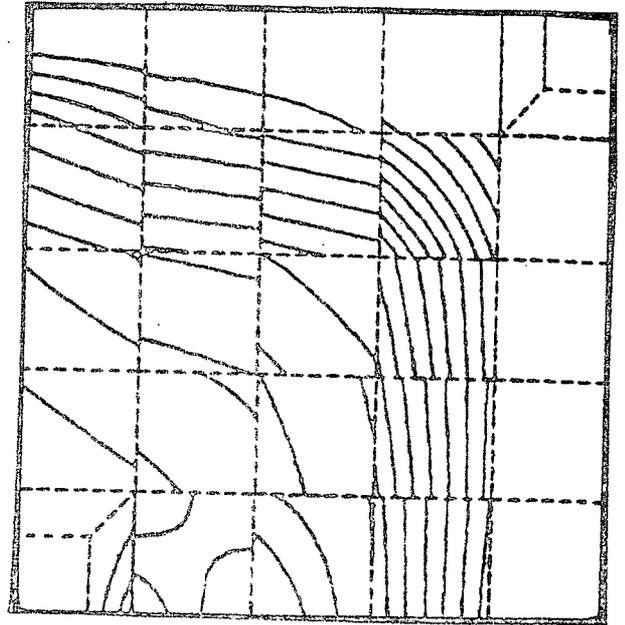
FIGURE 6

Maillage raffiné avec gravité

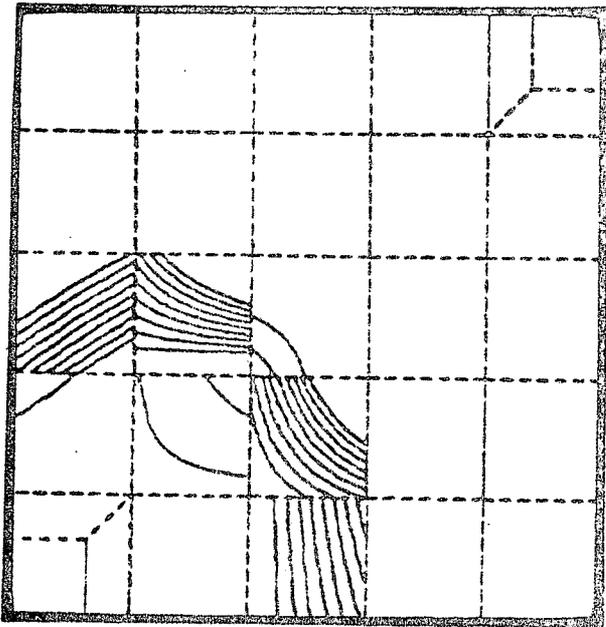
Cette irrégularité semble liée à l'étalement du front de saturation dont les variations ont des difficultés à être représentées dans la base d'éléments finis utilisée. Les figures 7 et 8 illustrent ce phénomène.



400 jours



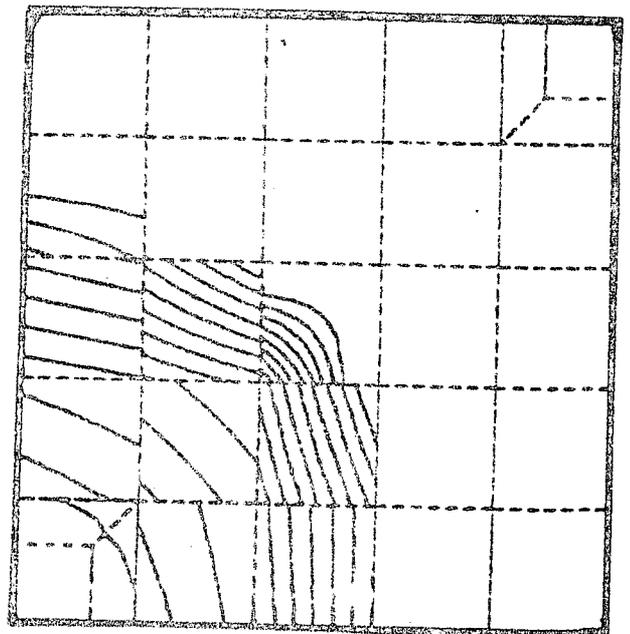
400 jours



200 jours

FIGURE 7

Rapport de mobilités : 1/3



200 jours

FIGURE 8

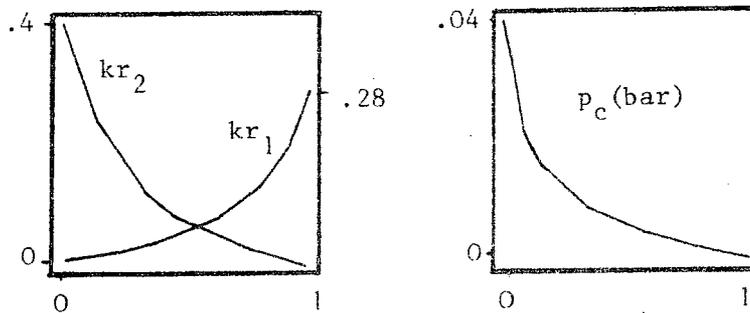
Rapport de mobilités : 3

4) Représentation d'une expérience "réaliste"

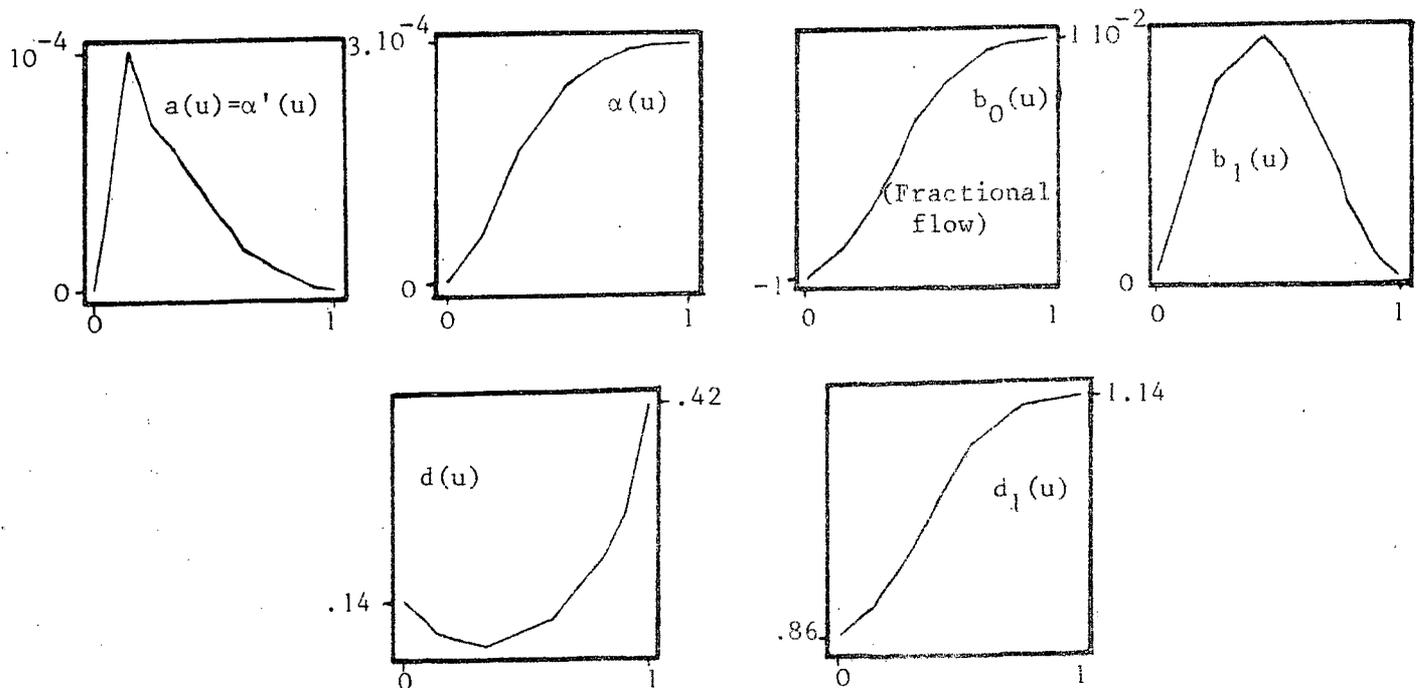
Les données correspondant aux expériences précédentes ont été choisies pour tester un cas "difficile" où le front est très raide. Dans la réalité, les débits sont bien moins forts et les pentes moins raides. Aussi, nous avons réalisé une expérience utilisant des données réalistes faisant intervenir la pression capillaire et la gravité. Les données précédentes ont été modifiées de la façon suivante :

Densités : eau : 1. ; huile : 0.75 ; Viscosités : eau : 0.33 cP ; huile : 1.43 cP
 (Rapport de mobilités : 3) ; Débit d'injection : $5 \text{ m}^3/\text{jour}$
 Angle de l'axe Ox avec l'horizontale : $+30^\circ$

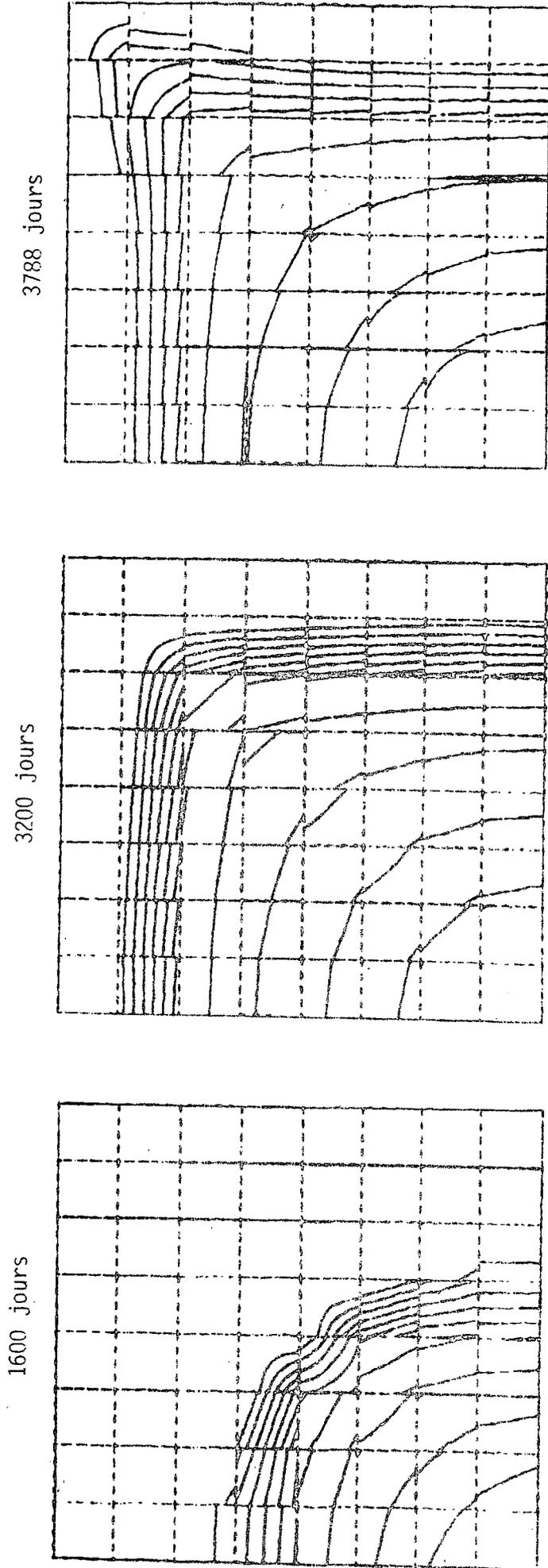
Les fonctions de la saturation sont modifiées en conséquence :



Données physiques



Fonctions résultantes

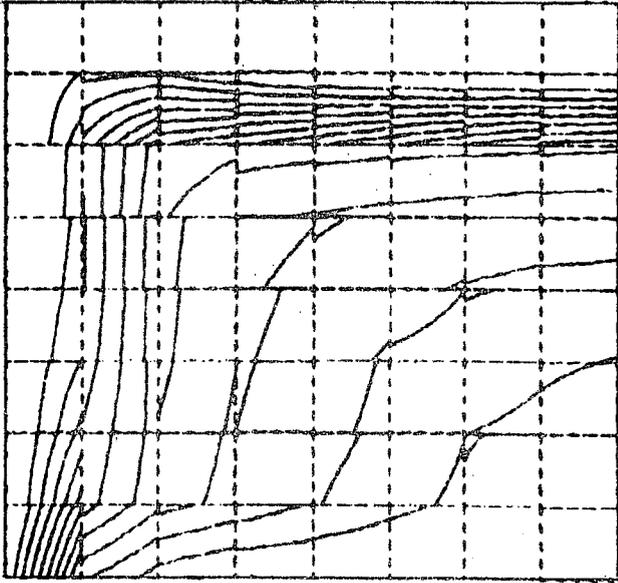


Sans gravité

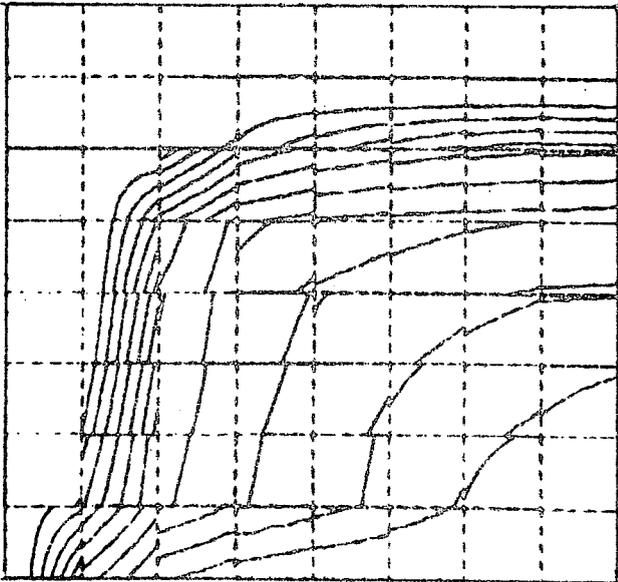
FIGURE 9-a

Cas réaliste

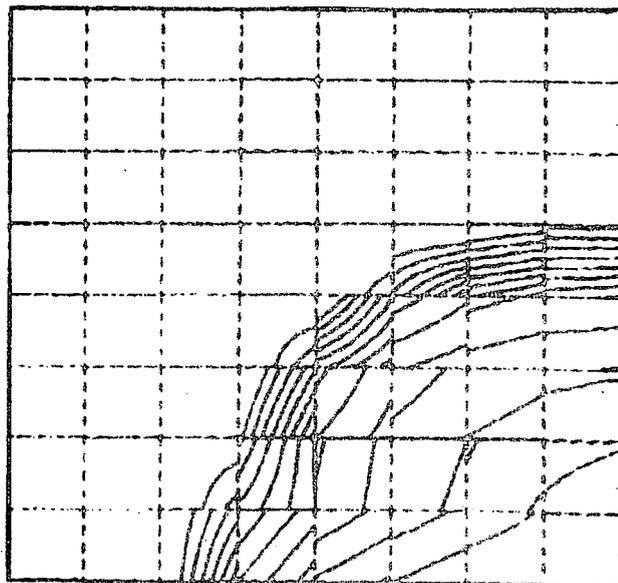
3741 jours



3200 jours



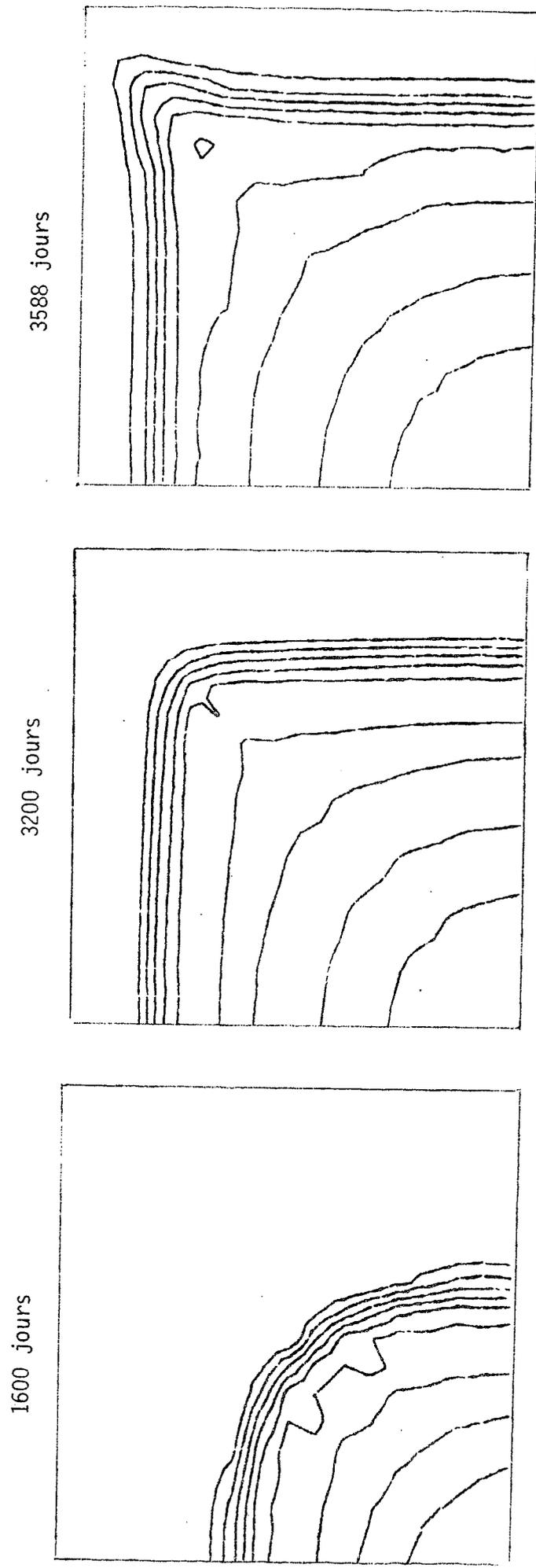
1600 jours



Avec Gravité

FIGURE 9-b

Cas réaliste

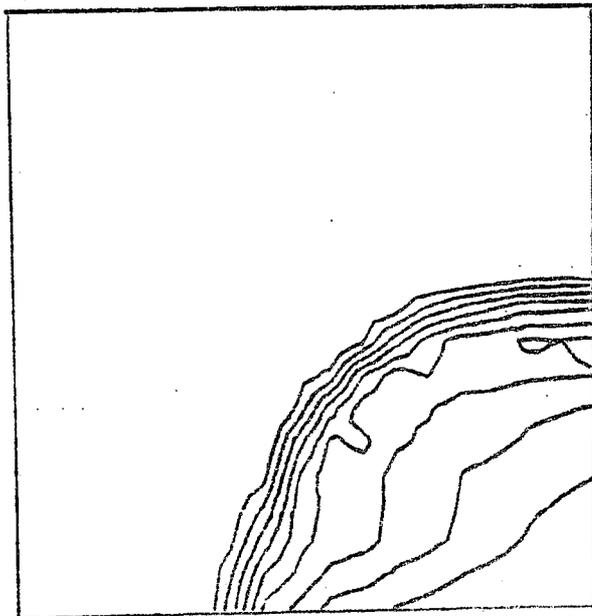


Sans gravité

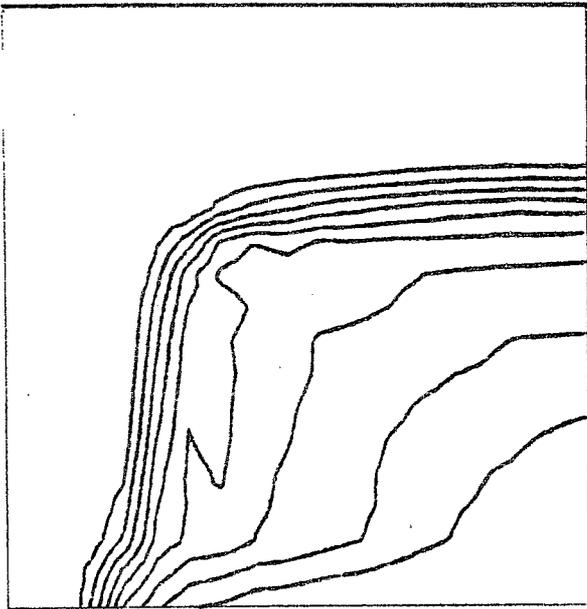
FIGURE 10-a

Cas réaliste - Figures interpolées

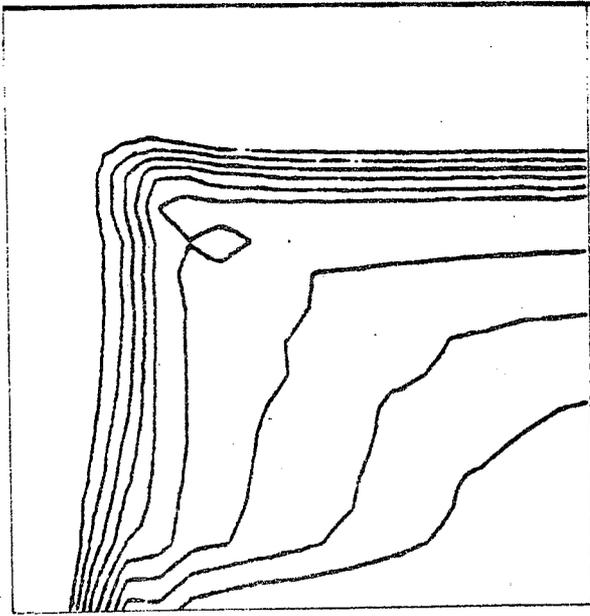
1600 jours



3200 jours



3741 jours



Avec gravité

FIGURE 10-b

Cas réaliste - Figures interpolées

L'expérience précédente a été menée d'une autre manière : après avoir injecté de l'eau en présence de gravité pendant 1600 jours, l'injection d'eau a été stoppée, laissant ainsi le champ de pesanteur agir seul. Nous donnons ci-dessous l'état du domaine après 1600 et 5600 jours, ainsi que la représentation du débit d'eau à 5600 jours.

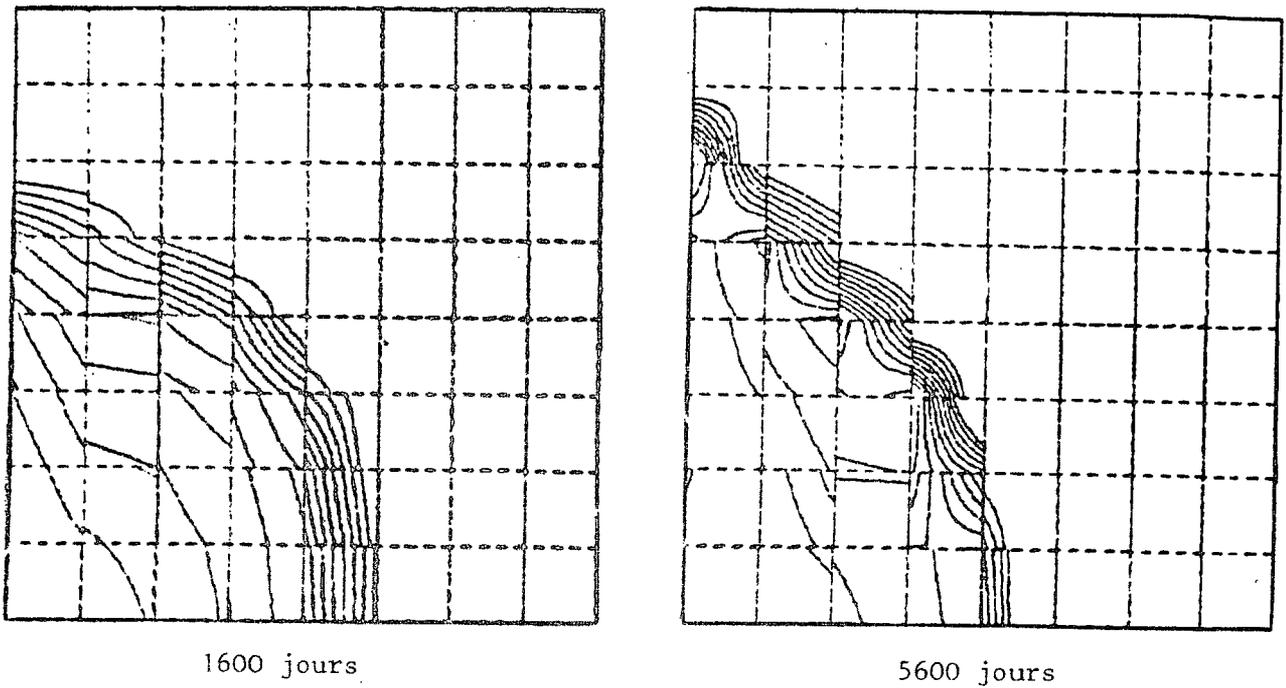


FIGURE 11 : Valeurs de la saturation

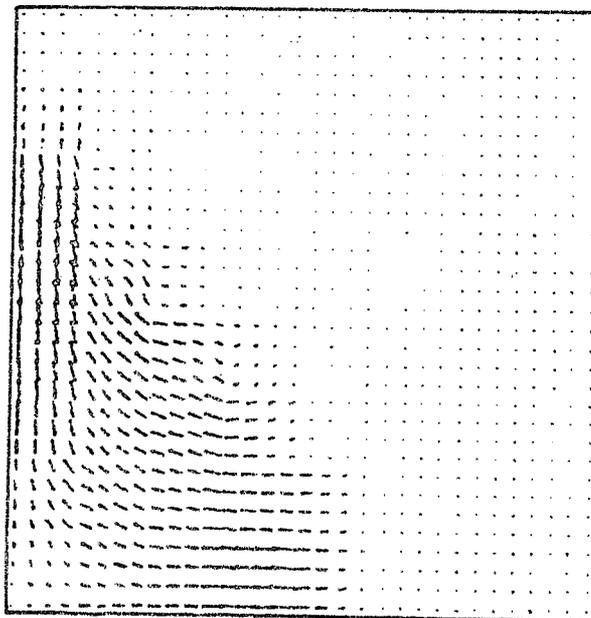
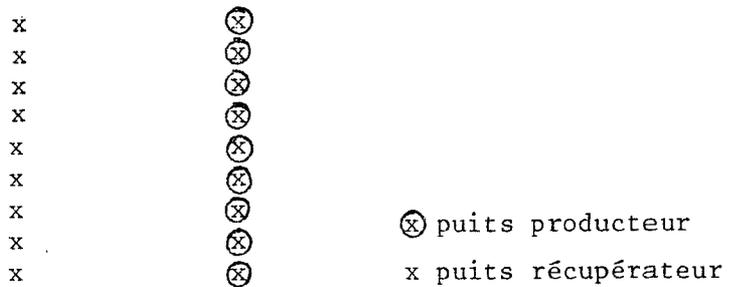


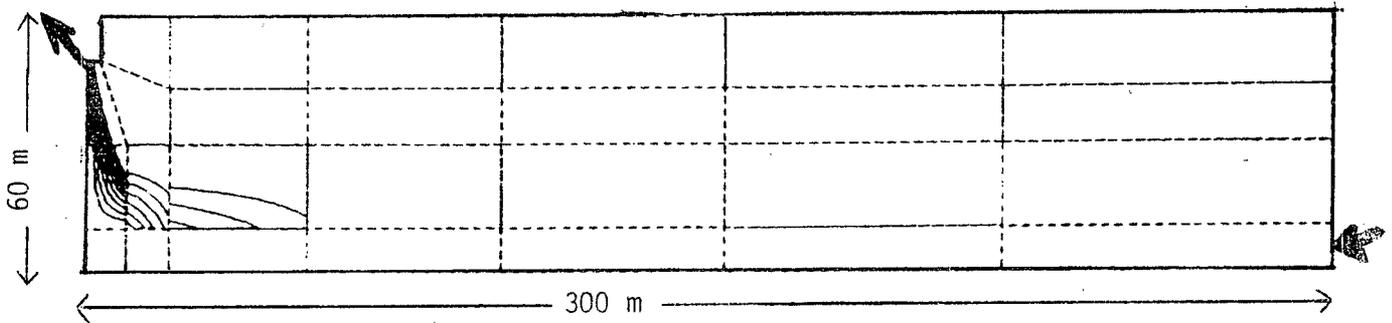
FIGURE 12 : Débit d'eau à 5600 jours

5) Expériences en (x,z)

Nous avons enfin testé le programme sur une simulation de coupe verticale d'un alignement (infini) de puits injecteurs et producteurs, c'est-à-dire un cas de (x,z).



Les résultats ont été très satisfaisants comme on le voit ci-dessous. (On voit clairement la formation d'un cône d'eau malgré le maillage assez grossier).



6) Pas de temps et temps de calcul

Le pas de temps maximal varie avec les expériences mais nous pouvons en donner un ordre de grandeur.

Pour les premières données, sans gravité, avec $\vec{r}_h \in H_h^0$ le pas de temps maximal est de l'ordre de 4 jours pour le maillage grossier et 2.5 jours pour le maillage raffiné. Ce pas de temps devient 1.5 à 2 fois plus petit lorsqu'on introduit la gravité et divisé par 2 lorsque $\vec{r}_h \in H_h^1$.

Quant au temps de calcul il est de l'ordre de 1.2 s/itération en temps pour le maillage grossier et 2.8 s pour le maillage raffiné sans gravité et avec $r_h \in H_h^0$, ce temps est multiplié par 1.5 environ par l'introduction de la gravité et par 2 par $r_h \in H_h^1$. (Ces temps sont donnés sur HB66).

ANNEXE 1

Justification de la définition de l'espace H_Q^k

Le passage d'un élément $\vec{s} \in H_Q^k$ à $\vec{s} \in H_Q^k$ se fait par une transformation non-classique qui résulte de la continuité de la composante normale de flux. On reprend ici les notation du paragraphe III. Cherchons \vec{s} et $\vec{\hat{s}}$ tels que, si ∂Q désigne l'arête correspondant à $\partial \hat{Q}$ dans le quadrilatère $Q \in \mathcal{K}_h$, nous ayons :

$$\int_{\partial Q} \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = \int_{\partial \hat{Q}} \vec{\hat{s}} \cdot \vec{\hat{\nu}} d\hat{\Gamma}$$

où ν et $\hat{\nu}$ désignent respectivement les normales extérieures à ∂Q et $\partial \hat{Q}$.

On sait que :

$$(A1) \quad \vec{\nu} = \frac{M \vec{\hat{\nu}}}{\|M\vec{\hat{\nu}}\|} \text{ avec } M = J_Q \quad {}^t(DF_Q)^{-1}$$

D'autre part, grâce à un changement de variable classique on obtient :

$$\int_{\partial Q} \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = \int_{\partial \hat{Q}} \vec{s} \circ \vec{F}_Q \cdot \vec{\hat{\nu}} \|J_Q \quad {}^t(DF)^{-1} \vec{\hat{\nu}}\| d\hat{\Gamma}$$

Soit, d'après (A1)

$$(A2) \quad \int_{\partial Q} \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = \int_{\partial \hat{Q}} \vec{s} \circ \vec{F}_Q \quad M \vec{\hat{\nu}} d\hat{\Gamma} = \int_{\partial \hat{Q}} {}^t M \vec{s} \circ \vec{F}_Q \cdot \vec{\hat{\nu}} d\hat{\Gamma}$$

Pour avoir l'égalité (A2), il suffit de poser :

$${}^t M \vec{s} \circ \vec{F}_Q = \vec{\hat{s}}$$

Soit finalement, en appliquant (A1) :

$$(A3) \quad \vec{s} = \frac{1}{J_Q} \quad DF \vec{\hat{s}} \circ \vec{F}_Q^{-1}$$

ANNEXE 2Symboles et Notations

1 - indice de l'eau

2 - indice de l'huile

σ : épaisseur de la couche poreuse

$\phi(x)$: porosité

$K(x)$: perméabilité absolue

$\phi = \phi \times \sigma \times (S_M - S_m)$ (cf. $S(x,t)$)

$\Psi = K \times \sigma$

g : accélération de la pesanteur

$S(x,t)$: saturation en eau ($S_m \leq S \leq S_M$)

$u(x,t) = \frac{S - S_m}{S_M - S_m}$: saturation réduite en eau

P : pression globale

$\tilde{k}_1(u), \tilde{k}_2(u)$: perméabilités relative

ρ_1, ρ_2 : densités

μ_1, μ_2 : viscosités

$p_c(u)$: pression capillaire

$k_i(u) = \tilde{k}_i(u)/\mu_i$ $i = 1,2$: mobilités

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{dp_c}{du} \quad (\alpha(0) = 0)$$

$$b_0 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$b_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$d = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$$d_1 = \frac{k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2}{k_1 + k_2} \frac{2}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$\Pi_1(x) = (\rho_1 - \rho_2) gZ(x)$$

BIBLIOGRAPHIE

G. CHAVENT

"A new formulation of diphasic incompressible flows in porous media" - Lectures notes in Mathematics - Vol. 503 - Springer 1976.

G. CHAVENT, G. SALZANO

"Numerical resolution of immiscible displacement in presence of gravity" - Proceedings of BAIL I Conference - Dublin - 1980.

G. COHEN

"Résolution numérique et identification pour une équation quasi-parabolique non-linéaire dégénérée de diffusion et transport en dimension un" - Thèse de 3ème cycle - Paris - 1978.

M. FORTIN, R. GLOWINSKI, F. THOMASSET

"Résolution numérique de problèmes aux limites par des méthodes de lagrangien augmenté" - A paraître.

J. JAFFRE

"Formulation mixte d'écoulements diphasiques incompressibles dans un milieu poreux" - Rapport INRIA n° 37 - Septembre 1980.

A.Y. LEROUX

"A numerical conception of entropy for quasi-linear equations" - Mathematics of computation - Vol. 31 - N° 140 - Pages 848-872 - Octobre 1977.

P.A. RAVIART, J.M. THOMAS

"A mixed finite elements method for second order elliptic problems" - Lecture notes in Mathematics - Vol. 606 - Springer, 1977.

J.M. THOMAS

"Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes" - Thèse d'état - Mai 1977 - Paris VI.

A.H. STROUD

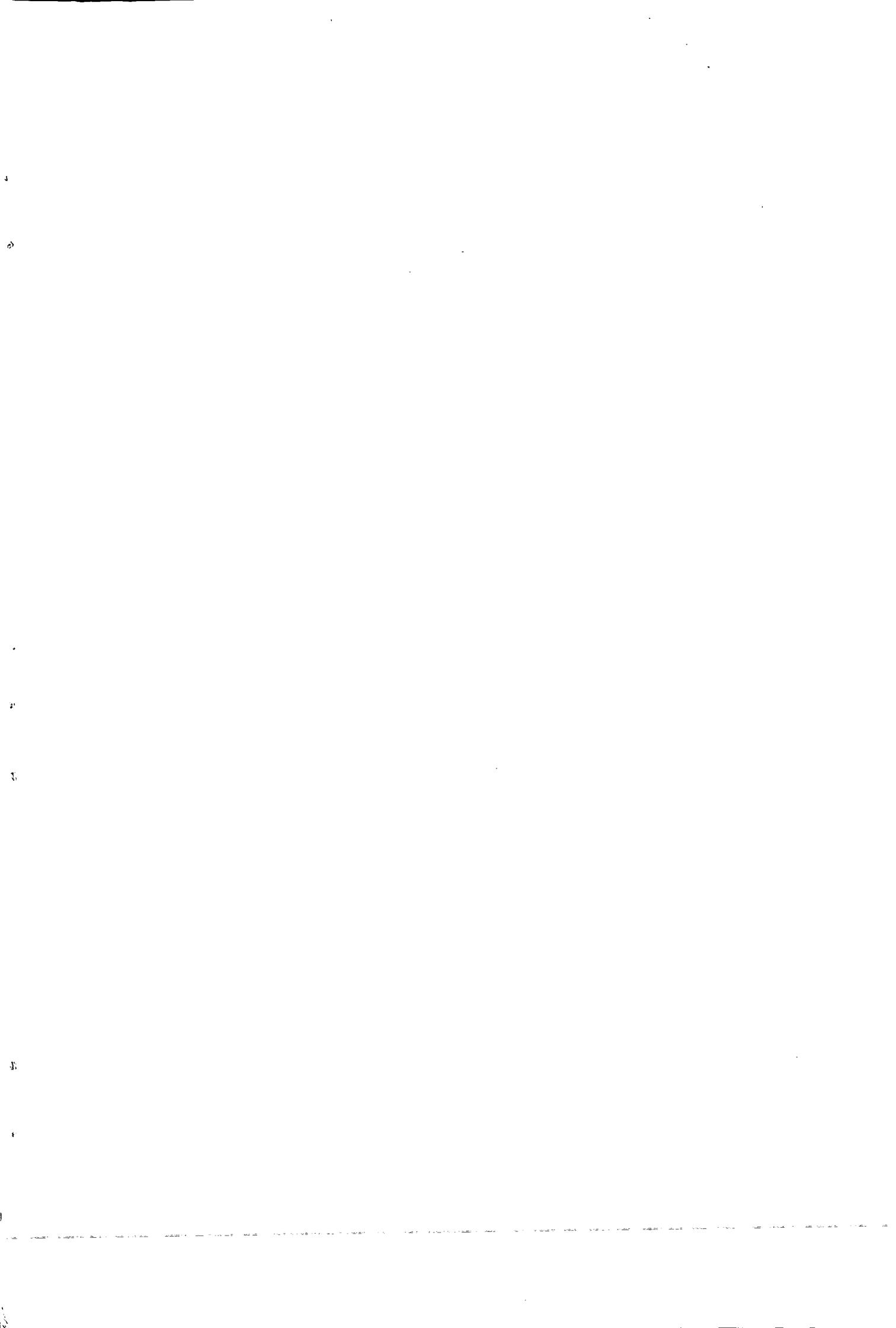
"Approximate calculation of multiple integrals" - Prentice Hall - 1971.

O. ZIENKIEWICZ

Imprimé en France

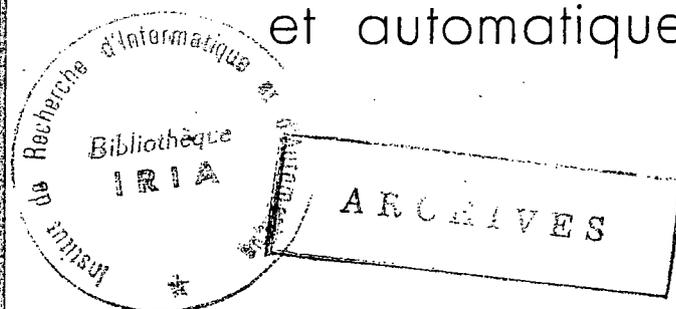
par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique



RIA
laboria

laboratoire de recherche
en informatique
et automatique



Calcul des écoulements
transoniques par des
méthodes d'éléments finis
et de contrôle optimal

R. Glowinski, O. Pironneau

Rapport de Recherche n°138
Octobre 1975

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
78150 - Le Chesnay
Tél. 954 90 20



CALCUL DES ÉCOULEMENTS TRANSONIQUES PAR DES MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS ET DE CONTRÔLE OPTIMAL

R. Glowinski, O. Pironneau

RESUME .

Dans ce travail on montre comment on peut résoudre les équations qui gouvernent les écoulements adiabatiques compressibles irrotationnels aux vitesses transoniques en leur associant des problèmes de contrôle optimal de systèmes à paramètres distribués. Ces problèmes sont discrétisés par éléments finis et résolus par des méthodes de gradient. On obtient ainsi une généralisation des méthodes de quasi-linéarisation classiques d'intégration par éléments finis des équations transoniques. Mais cette fois les schémas convergent aussi dans les régions supersoniques du fluide, en bi et en tridimensionnel, même en présence de chocs.

ABSTRACT.

In this study a new method for solving the transonic equations for inviscid compressible potential flows is obtained. This method associates to each transonic equation a problem of optimal control for a distributed parameter system. These optimal control problems are discretized by a finite elements method and solved by a gradient algorithm. The resulting algorithm is a generalization of the classical methods for solving the transonic equations by the finite elements method except that these new schemes converge also in the supersonic regions and in the presence of shocks, for two and three dimensional flows.

INTRODUCTION -

Les écoulements autour de profils d'ailes ou dans les tuyères aux vitesses voisines de la vitesse du son sont régies par des équations non linéaires assez complexes (cf. LANDAU-LIFCHITZ [1], COURANT-FRIEDRICHS [2], RICHMEYER-MORTON [3], par exemple). La présence de discontinuités comme les chocs, le caractère mixte elliptique-hyperbolique des équations et la géométrie souvent très compliquée dans le cas des ailes d'avion, rendent l'intégration numérique de ces équations extrêmement difficile. Il existe déjà quelques programmes tridimensionnels opérationnels pour des écoulements mixtes subsonique-supersonique (cf. JAMESON [4], par exemple) ; mais ce sont des schémas aux différences finies donc peu pratiques pour des géométries compliquées.

Parmi les problèmes pratiques à résoudre on peut citer le calcul de l'écoulement autour d'une aile réelle (donc en plusieurs morceaux : ailerons, bords de fuite ...) et à géométrie variable. Les méthodes d'éléments finis se prêtent bien à ce type de problème car on dispose de programmes de triangulation automatique. Malheureusement les méthodes en éléments finis comme celles de GELDER [5], DEVRIES-NORRIE [6] ne convergent pas dans les régions supersoniques du fluide.

On se propose dans cette étude d'utiliser les méthodes du contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (cf. LIONS [7]) pour traiter la non linéarité des équations transoniques. Le principe de base de la méthode est le suivant :

Soit à intégrer l'équation $\Delta\varphi=f(\varphi)$ dans un domaine Ω avec des conditions aux limites appropriées. Alors que les méthodes de quasi-linéarisation classiques consistent à calculer $\{\varphi^n\}$ tel que $\Delta\varphi^{n+1}=f(\varphi^n)$ (cf. PERRIAUX [8]) ; on va résoudre le problème :

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} (u - f(\varphi))^2 d\varphi \mid \Delta\varphi = u \right\}$$

par une méthode de gradient ou de gradient conjugué.

On se propose de développer cette méthode sur les trois formulations d'écoulements transoniques suivantes :

1. la formulation divergentielle : $\nabla \cdot \rho u = 0$; où la densité ρ est reliée à la vitesse u par une loi $\rho = G(|u|^2)$ et où u dérive d'un potentiel φ .

2. la formulation potentielle : $\Delta \varphi = \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla |\nabla \varphi|^2}{2c^2}$ où c est la vitesse locale du son.

3. la formulation potentielle "linéarisée": $\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$, où $\theta = \varphi - x$

Au § 1 on rappelle les conditions d'application de ces trois équations. Puis au § 2 on donne les formulations des problèmes de contrôle optimal associés à chaque équation ainsi que des conditions d'équivalence pour ces différents problèmes. Au § 3 on obtient les conditions d'optimalité des problèmes de contrôle ce qui permet d'utiliser des méthodes de gradient pour leur résolution. L'approximation par éléments finis des algorithmes continus est exposé dans le § 4. Les résultats numériques pour les équations 1 et 3 sont exposés au § 5. Les essais numériques pour l'équation 2 seront exposés dans un article ultérieur. Pour la simplicité de l'exposé on s'est limité dans la partie théorique à des écoulements plans mais en fait ce qui suit vaut également pour des écoulements tridimensionnels. Les essais numériques ont été effectués sur des exemples bidimensionnels.

Notation -

$\nabla \cdot u$: divergence u
$\nabla \times u$: rotationnel u
$\Delta \varphi$: laplacien de φ
$\nabla \varphi$: gradient φ
$H^m(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre m sur le domaine Ω
$H^s(\Gamma)$: espace de Sobolev d'ordre s sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$
$\ u\ _{L^\infty(\Omega)}$: $\text{essup}_{x \in \Omega} u(x) $

Plan -

0. Introduction
1. Formulation du problème physique
 - 1.1 Equations générales de l'écoulement
 - 1.2 Cas des écoulements irrotationnels
 - 1.3 Approximation des équations de l'écoulement irrotationnel
2. Réduction des problèmes 1.16, 1.19; 1.20 à des problèmes de contrôle optimal.
 - 2.1 Cas des problèmes mêlés de type Neuman Dirichlet
 - 2.2 Cas des problèmes mêlés de type Cauchy
3. Résolution des problèmes (2.3) (2.7) (2.9) par des méthodes de gradient
 - 3.1 Résolution du problème (2.3)
 - 3.2 Résolution du problème (2.7)
 - 3.3. Résolution du problème (2.9)
4. Approximation par éléments finis
 - 4.1 Discrétisation et résolution du problème (2.9)
 - 4.2. Discrétisation du problème (2.3.)
 - 4.3 Discrétisation du problème (2.7)

5. Résolution numérique du problème (2.9)

5.1 Analyse des résultats relatifs à l'exemple 1

5.2 Analyse des résultats relatifs à l'exemple 2.

5.3 Analyse des résultats relatifs à l'exemple 3

6. Remarques diverses et comparaison des méthodes

6.1 Cas des profils portants

6.2 Résolution numérique du problème (2.3)

6.3. Comparaison des méthodes

6.4 Conclusion.

1. FORMULATION DU PROBLEME PHYSIQUE

1.1 Equations générales de l'écoulement

On s'intéresse aux écoulements adiabatiques stationnaires de fluides compressibles monophasiques dans lesquels les effets de viscosité sont négligés (approximation des fluides parfaits).

Soit Ω le domaine occupé par le fluide du type ci-dessus. On notera $\Gamma = \partial\Omega$, la frontière de Ω . Les équations d'Euler du mouvement stationnaire sont alors données par

$$1.1 \quad \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (\text{conservation de la matière})$$

$$1.2 \quad \rho u \cdot \nabla u = -\nabla p \quad (\text{conservation de la quantité de mouvement})$$

$$1.3 \quad \rho u \cdot \nabla E = -p \nabla \cdot u \quad (\text{conservation de l'énergie}).$$

où dans (1.1) - (1.3)

ρ : densité du fluide

u : vitesse de l'écoulement

p : pression dans le fluide

E : énergie interne par unité de volume

Les fonctions ci-dessus sont liées par l'équation d'état

$$(1.4) \quad E = F(\rho, p)$$

par exemple dans le cas d'un gaz parfait en écoulement adiabatique on a

$$(1.5) \quad E = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants, soit $\gamma = C_p/C_v(\dagger)$

(†) pour les gaz monoatomiques $\gamma = 5/3$ pour les gaz diatomiques $\gamma = 7/5$.

Il convient d'ajouter aux équations ci-dessus des conditions aux limites "appropriées" ; par exemple

(1.6) $u, n = 0$ sur les parois des obstacles
 n étant le vecteur normal à l'obstacle.

On rencontrera également des conditions aux limites du type
 (1.7) u et/ou p ou u donnés sur une partie de Γ .

Remarque 1.1

Les équations (1.2) (1.3) peuvent, à l'aide de (1.1), se réécrire :

$$(1.8) \quad \nabla \cdot (P + (u ; u)) = 0$$

$$(1.9) \quad \nabla \cdot \rho u (E + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}) = 0$$

ou $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité et $(u ; u)$ le tenseur de composantes $u_i u_j$.

Les écoulements décrits par les équations ci-dessus peuvent posséder des discontinuités internes, comme les chocs, sur lesquelles il est nécessaire de respecter certaines conditions aux limites (condition de Rankine-Hugoniot). Soit plus précisément dans le cas des chocs, n désignant la normale unitaire à la surface de discontinuité :

$$(1.10) \quad \rho_1 u_1 n = \rho_2 u_2 n$$

$$(1.11) \quad \rho_1 u_1 n (E_1 + \frac{(u_1 n)^2}{2} + p_1/\rho_1) = \rho_2 u_2 n (E_2 + \frac{(u_2 n)^2}{2} + p_2/\rho_2)$$

$$(1.12) \quad p_1 + \rho_1 (u_1 n)^2 = p_2 + \rho_2 (u_2 n)^2$$

Par définition d'une onde de chocs les composantes tangentielles de u restent continues.

Il convient de signaler qu'au passage d'une onde de chocs il y a augmentation de l'entropie (\uparrow).

(†) La densité d'entropie par unité de volume s est reliée à E par la relation thermodynamique $dE = T ds - p d(\frac{1}{\rho})$ à laquelle il faut ajouter une autre équation d'état reliant la température T à p et ρ ($p/\rho = R T$ pour un gaz parfait).

On renvoie par exemple à LANDAU-LIFCHITZ [1], RITCHMYER-MORTON [3], ou COURANT-FRIEDRICHS [2] pour une discussion plus approfondie des phénomènes d'ondes de chocs en mécanique des fluides.

1.2 Cas des écoulements irrotationnels

Parmi les solutions du système (1.1)-(1.3) celles qui satisfont à

$$(1.11) \quad \nabla \times u = 0$$

jouent un rôle particulièrement important ; de tels écoulements sont dits "irrotationnels". De tels écoulements ne sont pas rares car on peut montrer à partir de (1.1)-(1.3) que si l'écoulement est irrotationnel dans une région Ω_i de Ω alors il est aussi irrotationnel en tout point de Ω traversé par une ligne de courant issue de Ω_i . Il faut noter qu'en toute rigueur un écoulement irrotationnel perd cette propriété au passage d'une onde de choc (cf. [1, ch.12] toutefois il est montré dans [1, ch.9 et 12] que si le choc est de faible intensité il est raisonnable de supposer la conservation de la propriété d'irrotationnalité.

Si le fluide est un gaz parfait la forme particulière de $F(p,e)$ et la condition (1.11) permettent d'obtenir des intégrales premières du système (1.1)-(1.3) de la façon suivante :

De (1.9),(1.4) on déduit à l'aide de (1.1),(1.2),(1.11) :

$$(1.12) \quad \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

De (1.2) (1.11) on déduit

$$\rho \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) = \nabla p$$

Soit, après élimination de p à l'aide de (1.12)

$$(1.13) \quad \frac{\rho}{(\gamma-1)} \nabla \left(\frac{|u|^2}{2} \right) - \left(K - \frac{|u|^2}{2} \right) \nabla \rho$$

où K est une constante provenant de l'intégration de (1.12).

L'équation (1.13) s'intègre à vue, on a l'habitude de l'écrire sous la forme

$$(1.14) \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{|u|^2}{c_*^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

La constante c_* est connue sous le nom de vitesse critique du son.

De (1.11) on déduit l'existence d'une fonction potentielle φ telle que

$$(1.15) \quad u = \nabla \varphi$$

Compte-tenu de (1.14), (1.15) le système (1.1) (1.4) équivaut donc à

$$(1.16) \quad \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = 0$$

$$(1.17) \quad \rho = G(|\nabla \varphi|^2)$$

où $G(|u|^2)$ est la fonction définie par (1.14).

Des conditions de saut (1.10)-(1.12) au passage d'une onde de choc on gardera la condition :

$$(1.18) \quad \varphi \text{ continue}$$

Cependant il faut noter que le système (1.16) (1.17) n'admet pas toujours de solution unique ; parmi celles qui ont des chocs on ne pourra donc retenir que celles qui ont un saut d'entropie croissant.

1.3 Approximation des équations de l'écoulement potentiel

On peut, au moins formellement, éliminer ρ de (1.16), (1.17).

Dans le cas d'un gaz parfait on obtient :

$$(1.19) \quad -\Delta\varphi + \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla(|\nabla\varphi|^2)}{\gamma+1 - (\gamma-1)|\nabla\varphi|^2} = 0$$

(on a changé φ en $C_*\varphi$)

Equation à laquelle il faut ajouter les conditions aux limites convenables ainsi que la condition (1.17).

Au cas où dans Ω la vitesse de l'écoulement diffère assez peu en grandeur et en direction d'une vitesse fixe u_0 , prise comme direction Ox , l'équation (1.19) est assez bien approchée par

$$(1.20) \quad 2\alpha_* \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{ou} \quad \alpha_* = \frac{\gamma+1}{2} \quad \text{et} \quad \theta = \varphi - x$$

2. REDUCTION DES PROBLEMES (1.16); (1.19), (1.20) A DES PROBLEMES DE CONTROLE OPTIMAL.

2.1 Cas des problèmes mêlés de type Neuman-Dirichlet

L'écoulement dans Ω étant irrotationnel, on va supposer que les conditions aux limites sur φ sont du type suivant :

$$(2.1) \quad \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\Gamma_2} = u_2$$

avec $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$

On suppose Ω borné et Γ régulière.

On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(2.3) \quad \min_{\varphi \in \Phi_m} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varepsilon|^2 d\Omega \mid -\Delta \varepsilon = \nabla \cdot (G(|\nabla \varphi|^2) \nabla \varphi), \varepsilon|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

$$\text{où } \Phi_m = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\Gamma_2} = u_2; |\nabla \varphi(x)| \leq m \text{ pp } x \in \Omega \right\}$$

et où m est une constante donnée telle que $m < C_* \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{2}}$

Proposition 2.1

On suppose que

$$(2.4) \quad \text{Il existe } K \text{ tel que } 0 \leq G(|u|^2) \leq K \text{ pour tout } u \in [0, m]$$

$$(2.5) \quad \varphi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1); \quad u_2 \in \bar{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$$

(2.6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le problème (1.16), (1.17), (2.1), (2.2) où les égalités} \\ \text{sont prises respectivement au sens de } H^{-1}(\Omega), L^2(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \\ \text{admet au moins une solution telle que } |\nabla\varphi(x)| \leq m \text{ pp } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (\dagger)$

Alors toute solution de (2.3) est solution de (1.16)-(2.2).
Réciproquement toute solution de (1.16)-(2.2) au sens ci-dessus telle que $|\nabla\varphi(x)| \leq m$ pp $x \in \Omega$ est solution de (2.3).

Démonstration

Pour tout $\varphi \in \Phi_m$, ε défini dans (2.3) existe et appartient à $H^1(\Omega)$. Or $G(|\nabla\varphi|^2) \in L^\infty(\Omega)$ donc, $G(|\nabla\varphi|^2)\nabla\varphi$ étant dans $(L^2(\Omega))^2$ et Ω étant borné, $\nabla \cdot (G(|\nabla\varphi|^2)\nabla\varphi) \in H^{-1}(\Omega)$.

Le problème (2.3) est donc bien posé (cf. Lions [7]).

Toute solution $\bar{\varphi}$ de (1.16)-(2.2) est une solution de (2.3) car pour ce $\bar{\varphi}$, $\nabla\varepsilon = 0$. D'autre part toute solution de (2.3) devant être telle que $\nabla\varepsilon = 0$, on doit avoir $\nabla \cdot (G(|\nabla\varphi|^2)\nabla\varphi) = 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Car l'opérateur Δ est continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Remarque 2.1

On peut aussi en relation avec (1.16) résoudre le problème

$$\min_{\rho} \left\{ \int_{\Omega} [G(|\nabla\varphi|^2) - \rho]^2 \, d\Omega \mid \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = 0, \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2 \right\}$$

Ce problème est un problème de contrôle optimal où le contrôle intervient dans les coefficients de l'équation aux dérivées partielles. Il sera étudié dans un travail ultérieur.

(†) On rappelle que $a = b$ au sens de V' dual de V si $\langle a, v \rangle = \langle b, v \rangle$ pour tout $v \in V$.

De façon analogue, on considère en relation avec (1.19) le problème

$$(2.7) \quad \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_{\Omega} |u - \nabla \varphi|^2 \, d\Omega \mid \begin{aligned} -\Delta \varphi &= -\frac{-1}{+1} |u|^2 \nabla \cdot u - \frac{1}{\gamma+1} u \cdot \nabla (|u|^2) \\ \varphi|_{\Gamma_1} &= \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2 \end{aligned} \right\}$$

où $\mathcal{U} = \left\{ u \in (L^\infty(\Omega))^2 \right\}$ (†)

et on a alors la

Proposition 2.2

On suppose que (2.5) est vérifiée que (1.19), (2.1), (2.2), prises au sens de $H^{-1}(\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ admet au moins une solution.

Alors toute solution de (2.7) est solution de (1.1)-(2.2). Réciproquement toute solution de (1.19)-(2.2) tel que $\nabla \varphi \in (L^\infty(\Omega))^2$ est solution de (2.7).

Démonstration

Comme précédemment pour $u \in \mathcal{U}$, $\Delta \varphi \in H^{-1}(\Omega)$ donc (2.7) est bien posé et a l'optimum $u = \nabla \varphi$. Il faut cependant noter qu'il peut exister des suites minimisantes de (2.7) ayant pour limite $\bar{u} \notin (L^\infty(\Omega))^2$.

Dans ce cas le potentiel correspondant $\bar{\varphi}$ peut ne pas être une solution de (1.19)-(2.2). Pour éviter cette situation il faudra, lors de la résolution numérique de (2.7), imposer une contrainte du type $|u(x)| < m$ pp dans Ω .

Remarque 2.2

L'équation (1.19) peut aussi être comparée au problème

$$(2.8) \quad \min_{v \in L^\infty(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \left[v \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |\nabla \varphi|^2 \right) + \frac{1}{\gamma+1} \nabla \varphi \cdot \nabla (|\nabla \varphi|^2) \right]^2 \, d\Omega \mid \begin{aligned} \Delta \varphi &= v, \\ \varphi|_{\Gamma_1} &= \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2 \end{aligned} \right\}$$

(†) On peut aussi ajouter une contrainte $\nabla \times u = 0$ ou $u = \nabla \psi$

Enfin, pour résoudre (1.20) nous allons considérer le problème

$$(2.9) \min_{v \in L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \right)^2 dx \mid \Delta \varphi = \frac{\partial v}{\partial x}, \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2 \right\}$$

Proposition 2.3

Si (1.20), (2.1), (2.2), prises au sens de $H^1(\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ admet au moins une solution telle que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^4(\Omega)$ alors toute solution de (2.9) est solution de (1.20)-(2.2) et réciproquement.

Démonstration :

Identique aux précédentes car (1.20) se récrit :

$$\Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) ; \text{ et d'autre part ou bien } \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^4(\Omega)$$

ou bien le critère vaut $+\infty$

2.2 Cas des problèmes mêlés de type Cauchy

On s'intéresse aux écoulements transoniques dans les tuyères avec sorties des écoulements supersoniques. On se donne alors φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ à l'entrée de la tuyère et $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ sur les parois. Même avec ce type de condition aux limites on peut utiliser le problème (2.3) à condition de prendre

$$\Phi_m = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = u_1, \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2 ; |\nabla \varphi(\Omega)| \leq m \text{ pp dans } \Omega \right\}$$

(voir ci-dessous pour les définitions de $\Gamma_1, \Gamma_2, u_1, u_2$).

Pour les problèmes (1.19) et (1.20) on peut aussi résoudre (2.7) et (2.9) avec les conditions aux limites appropriées. Mais on peut aussi penser à utiliser l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, mieux adapté

aux conditions aux limites.

On suppose donc que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Ainsi pour résoudre (1.20) avec les conditions aux limites

$$(2.10) \quad \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = u_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2$$

On peut considérer le problème

$$(2.12) \quad \min_v \left\{ \int_{\Omega} \left| v - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right|^2 d\Omega \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial x} ; \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = u_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = u_2 \end{array} \right. \right\}$$

Malheureusement la théorie des équations différentielles hyperboliques sur des ouverts non cylindriques ne permet pas de développer une théorie générale appropriée à l'étude du problème (2.12) ; en particulier pour certain v , l'équation différentielle peut ne pas avoir de solution.

Nous avons cependant tenu à mentionner cette approche car les Laboratoires Aéronautiques possèdent en général des sous-programmes d'intégration numérique d'équations différentielles du type ci-dessus (celle qui régit les écoulements supersoniques, par exemple) il leur est donc assez facile de résoudre le problème (2.12) par les méthodes du paragraphe suivant.

3. RESOLUTION DES PROBLEMES (2.3), (2.7), (2.9) PAR DES METHODES DE GRADIENT.

3.1 Résolution du problème (2.3)

Le problème (2.3) est un problème d'optimisation de la forme

$$(3.1) \quad \min \left\{ E(\varphi) \mid \varphi \in \Phi_m \right\}$$

où

$$(3.2) \quad E(\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla \varepsilon(\varphi)|^2 d\Omega$$

et où $\varepsilon(\varphi)$ est l'unique solution de

$$(3.3) \quad -\Delta \varepsilon = \nabla \cdot (G(|\nabla \varphi|^2) \nabla \varphi) \quad \varepsilon|_{\Gamma} = 0$$

On peut montrer (cf. Lions [7]) que dans certaines conditions E est une forme continûment différentiable sur Φ_m munie de la topologie de $H^1(\Omega)$. Le gradient de E se calcule par identification des termes linéaires du premier ordre en $\delta\varphi$ de la quantité $E(\varphi+\delta\varphi) - E(\varphi)$. Dans ce qui suit on suppose G continûment différentiable dans $[0, m]$. Pour $\varphi, \varphi + \delta\varphi \in \Phi_m$ on a :

$$(3.4) \quad E(\varphi+\delta\varphi) - E(\varphi) = \int_{\Omega} 2 \nabla \varepsilon(\varphi) \nabla (\varepsilon(\varphi+\delta\varphi) - \varepsilon(\varphi)) d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla (\varepsilon(\varphi+\delta\varphi) - \varepsilon(\varphi))|^2 d\Omega$$

D'après (3.3) on note que $\delta\varepsilon = \varepsilon(\varphi+\delta\varphi) - \varepsilon(\varphi)$ satisfait à

$$(3.5) \quad -\Delta \delta\varepsilon = \nabla \cdot [G(|\nabla \varphi|^2) \nabla \delta\varphi + 2 G'(|\nabla \varphi|^2) (\nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi) \nabla \varphi + o(\delta\varphi)]$$

Car G est continûment différentiable. En multipliant (3.5) par $\varepsilon(\varphi)$, et en intégrant par partie, on obtient

$$(3.6) \quad \int_{\Omega} \nabla \varepsilon \nabla \delta\varepsilon d\Omega = - \int_{\Omega} [G(|\nabla \varphi|^2) \nabla \varepsilon \cdot \nabla \delta\varphi + 2 G'(|\nabla \varphi|^2) (\nabla \varphi \cdot \nabla \varepsilon) (\nabla \varphi \cdot \nabla \delta\varphi)] d\Omega + o(\delta\varphi)$$

et d'après (3.4) et le fait que $o(\delta\varepsilon) = o(\delta\varphi)$

$$(3.7) \quad E(\varphi+\delta\varphi) - E(\varphi) = 2 \int_{\Omega} [G(|\nabla\varphi|^2)\nabla\varepsilon \cdot \nabla\delta\varphi + 2G'(|\nabla\varphi|^2)(\nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon)(\nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi)] \, d\Omega + o(\delta\varphi)$$

qui, après intégration par partie peut aussi se récrire

$$(3.8) \quad E(\varphi+\delta\varphi) - E(\varphi) = 2 \int_{\Omega} \nabla \cdot [G(|\nabla\varphi|^2)\nabla\varepsilon + 2G'(|\nabla\varphi|^2)(\nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon)\nabla\varphi] \delta\varphi \, d\Omega - \int_{\Gamma} [G(|\nabla\varphi|^2) \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} + 2G'(|\nabla\varphi|^2)(\nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon) \frac{\partial\varphi}{\partial n}] \delta\varphi \, d\Gamma + o(\delta\varphi)$$

Donc le "gradient" de E (défini par $E(\varphi+\delta\varphi) - E(\varphi) = \langle \nabla E(\varphi), \delta\varphi \rangle$)

$$(3.9) \quad \nabla E(\varphi) = \nabla \cdot (G(|\nabla\varphi|^2)\nabla\varepsilon + 2G'(|\nabla\varphi|^2)(\nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon)\nabla\varphi) - \delta_{\Gamma} [G(|\nabla\varphi|^2) \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} + 2G'(|\nabla\varphi|^2)(\nabla\varphi \cdot \nabla\varepsilon) \frac{\partial\varphi}{\partial n}]$$

$+ o(\delta\varphi)$ est

où δ_{Γ} est la fonction de Dirac au bord Γ de Ω .

Pour résoudre (2.3) on peut donc utiliser l'algorithme suivant

Algorithme 3.1

(3.10) Choisir $\varphi^0 \in \Phi_m$, poser $k = 0$

(3.11) Calculer ε^k solution de $-\Delta\varepsilon^k = \nabla \cdot [G(|\nabla\varphi^k|^2)\nabla\varphi^k]$, $\varepsilon^k|_{\Gamma} = 0$

(3.12) Calculer à l'aide de (3.7) ou (3.8) la solution d^k de

$$\min \left\{ \langle \nabla E(\varphi^k), d \rangle \mid \int_{\Omega} |d|^2 \, d\Omega \leq 1, d|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial d}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$$

(3.13) Calculer λ^k solution de

$$\min_{\lambda} E(\varphi^k + \lambda d^k) - E(\varphi^k)$$

(3.14) poser $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \lambda^k d^k$, $k = k+1$ et retourner en (3.11).

Remarque 3.1

On n'a pas incorporé la contrainte $|\nabla\varphi|_{L^{\infty}} \leq m$ dans l'algorithme pour des raisons de simplicité de l'exposé.

L'algorithme ci dessus est une méthode de gradient (Frank) et Wolfe pour être exact) appliquée au problème (3.1) dans le sous espace Φ_∞ . Si l'étape (3.13) peut être calculée exactement on aura intérêt à utiliser une méthode de gradient conjugué. On rappelle que dans le cas sans contrainte la méthode du gradient conjugué consiste à prendre :

$$(3.15) \quad \varphi^{k+1} = \varphi^k + \lambda h^k$$

avec

$$(3.16) \quad h^k = - \nabla E(\varphi^k) + \frac{h^{k-1}}{\|\nabla E(\varphi^{k-1})\|^2} \langle \nabla E(\varphi^k), \nabla E(\varphi^k) - \nabla E(\varphi^{k-1}) \rangle$$

Remarque 3.2

Il existe des méthodes spécifiques dont nous parlerons au § 4 pour résoudre (3.12) et (3.13).

Proposition 3.1

On se place dans les conditions d'application de la proposition (2.1). On suppose de plus que G est continûment différentiable dans le domaine de travail de l'algorithme. Alors tout point d'accumulation $\bar{\varphi}$ d'une suite φ^k engendrée par l'algorithme (3.1) tel que $\|\bar{\varphi}\|_{L^\infty} < m$; $\|\varphi^k\|_{L^\infty} < m$ est un point stationnaire du problème (2.3). Si de plus ε^k tend vers zéro alors $\bar{\varphi}$ est une solution de (1.16)-(2.2).

Démonstration

La démonstration de la convergence d'un algorithme de gradient est classique : elle repose sur la continue-différentiabilité de l'application $E(\cdot)$. (cf. Yvon [9] pour les problèmes de contrôle distribué). Toutefois nous redonnons l'essentiel de l'argument de la démonstration. $E(\varphi^k + \lambda d^k)$ est continûment différentiable en λ et admet pour dérivée à l'origine $\langle \nabla E(\varphi^k), d^k \rangle$. Donc d'après (3.13) si $\langle \nabla E(\varphi^k), d^k \rangle$ ne tend pas vers zéro λ^k est borné par $\bar{\lambda}$ donc d'après (3.13) et (3.8).

$$E(\varphi^{k+1}) - E(\varphi^k) \leq E(\varphi^k + \bar{\lambda} d^k) - E(\varphi^k) \leq \bar{\lambda} \langle \nabla E(\varphi^k), d^k \rangle + o(\bar{\lambda} d^k)$$

comme d'après (3.12) $\|d^k\| = 1$, il existe $\bar{\lambda}$ petit tel que

$$E(\varphi^{k+1}) - E(\varphi^k) \leq -\frac{\bar{\lambda}}{2} \langle \nabla E(\varphi^k), d^k \rangle$$

Comme la suite $E(\varphi^k)$ est strictement décroissante ceci est incompatible avec $E(\bar{\varphi}) \geq 0$ donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla E(\varphi^k), d^k \rangle = 0$. D'après (3.7) $\langle \nabla E(\varphi), d \rangle$

est continue en φ donc $\langle \nabla E(\bar{\varphi}), \bar{d} \rangle = 0$.

Remarque 3.3

Tous les points stationnaires de (2.3) ne sont pas des solutions de (1.16)-(2.2). La proposition (2.1) peut donc sembler sans intérêt. Toutefois ce type de difficulté est classique en optimisation. L'expérience a montré que si $\tilde{\varphi}$ est une solution de (1.16)-(2.2) alors après un nombre fini d'essais on peut en changeant φ^0 obtenir en général $\tilde{\varphi}$ comme limite de $\{\varphi^k\}$

3.2 Résolution du problème (2.7)

Tout comme (2.3), le problème (2.7) est un problème d'optimisation en dimension infinie. Pour le résoudre par une méthode de descente il faut calculer les termes linéaires du premier ordre en δu de la variation du critère $\delta E = E(u + \delta u) - E(u)$ où

$$(3.19) \quad E(u) = \int_{\Omega} |u - \nabla \varphi(u)|^2 d\Omega$$

$\varphi(u)$ étant la solution du système différentiel dans (2.7). Ce calcul se fait de la même façon que pour (2.3). Cependant l'élimination des termes en $\delta \varphi = \varphi(u + \delta u) - \varphi(u)$ dans δE nécessite l'introduction d'une fonction intermédiaire Ψ solution d'un système différentiel adjoint de φ .

Plutôt que de donner une démonstration rigoureuse de l'évaluation de δE on se propose de faire un calcul formel calqué sur les méthodes du calcul des variations souvent plus familières aux lecteurs. Il convient de noter qu'une justification rigoureuse de ce qui suit est très délicate et qu'il vaut mieux, d'un point de vue théorique, opérer comme dans LIONS [7].

Soit $\Psi(x)$ le multiplicateur de Lagrange associé à l'équation différentielle dans (2.7). L'hamiltonien du système s'écrit :

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} |u - \nabla\varphi|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} \left[(-\Delta\varphi + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |u|^2 \nabla \cdot u + \frac{1}{\gamma+1} u \cdot \nabla(|u|^2)) \right] \Psi \, d\Omega$$

cù encore, d'après la formule de Green

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_{\Omega} |u - \nabla\varphi|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} |u|^2 \nabla \cdot u + \frac{1}{\gamma+1} u \cdot \nabla(|u|^2) \right] \Psi \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Psi \, d\Gamma \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(u, \varphi, \Psi)$ est stationnaire en φ et Ψ , à l'optimum, donc

$\mathcal{H}(u, \varphi + \delta\varphi, \Psi) - \mathcal{H}(u, \varphi, \Psi)$ est du 2ème ordre en $\delta\varphi$ ce qui entraîne, compte tenu des conditions aux limites sur φ

$$\int_{\Omega} 2(u - \nabla\varphi) \cdot \nabla \delta\varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \delta\varphi \cdot \nabla \Psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n} \Psi \, d\Gamma = 0$$

c'est à dire, $\Psi|_{\Gamma_1} = 0$ et

$$(3.20) \quad \int_{\Omega} \nabla \Psi \cdot \nabla \omega \, d\Omega = \int_{\Omega} -2(u - \nabla\varphi) \cdot \nabla \omega \, d\Omega \quad \text{pour tout } \omega \in H^1(\Omega), \omega|_{\Gamma_1} = 0$$

On reconnaît la formulation variationnelle de l'équation

$$(3.21) \quad -\Delta \Psi = +2\nabla \cdot (u - \nabla \varphi), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = -2(u_n \Big|_{\Gamma_2} - u_2), \quad \Psi \Big|_{\Gamma_1} = 0$$

L'équation (3.20) (ou 3.21) définit Ψ de façon unique. Pour cette valeur de Ψ , et pour φ solution du système de (2.7), l'accroissement du coût δE est obtenu par

$$\delta E = \mathcal{H}(u + \delta u, \varphi, \Psi) - \mathcal{H}(u, \varphi, \Psi)$$

c'est-à-dire

$$(3.22) \quad \delta E = \int_{\Omega} \left\{ 2(u - \nabla \varphi) \cdot \delta u + \Psi \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (2u \cdot \delta u \nabla \cdot u + |u|^2 \nabla \cdot \delta u) - \frac{1}{\gamma+1} \delta u \cdot \nabla (|u|^2) + \frac{2}{\gamma+1} u \nabla \cdot (u \cdot \delta u) \right] \right\} d\Omega + o(\delta u)$$

Par intégration par partie on peut éliminer les termes contenant des dérivées de δu :

$$(3.23) \quad \delta E = \int_{\Omega} [2(u - \nabla \varphi) + 2\Psi \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (\nabla \cdot u)u + \frac{\Psi}{\gamma+1} \nabla |u|^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \nabla (|u|^2 \Psi) - \frac{2u}{\gamma+1} \nabla \cdot (\Psi u)] \delta u \, d\Omega - o(\delta u) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \Psi |u|^2 n + \frac{2\Psi}{\gamma+1} u_n u \right) \delta u \, d\Gamma \triangleq \langle \nabla E(u), \delta u \rangle + o(\delta u)$$

La méthode de gradient appliquée au problème (2.7) donne l'algorithme suivant :

Algorithme (3.2)

$$(3.24) \quad \text{Choisir } u^0 \in U \text{ poser } k = 0$$

$$(3.25) \quad \text{Calculer } \varphi^k \text{ solution de}$$

$$-\nabla \varphi^k = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |u^k|^2 \nabla \cdot u^k - \frac{1}{\gamma+1} u^k \cdot \nabla |u^k|^2 ; \quad \varphi^k \Big|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = u_2$$

(3.26) Calculer ψ_1^k solution de

$$-\Delta \psi^k = -2 \nabla \cdot (u^k - \nabla \phi^k), \quad \frac{\partial \phi^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 2(u^k \cdot n \Big|_{\Gamma_2} - u_2) \quad \psi^k \Big|_{\Gamma_1} = 0$$

(3.27) Calculer $\nabla E(u^k)$ par (3.22) ou (3.23)

(3.28) Calculer h^k solution de

$$\min \left\{ \langle \nabla E(u^k), h \rangle \mid \int_{\Omega} |h|^2 \, d\Omega \leq 1 \right\}$$

(3.29) Calculer λ^k solution de

$$\min E(u^k + \lambda h^k) - E(u^k)$$

poser $u^k = u^k + \lambda^k h^k$, $k = k+1$ et retourner en (3.25)

Remarque (3.4)

Pour conserver la propriété : $\nabla \phi^k \in (L^\infty(\Omega))^2$, il faut ajouter dans (3.28) $\|h(\cdot)\|_{L^\infty} < K'$

On obtient alors des propriétés de convergence tout à fait analogues à la proposition (3.1).

Remarque (3.5)

A titre indicatif nous donnons les formules correspondantes au problème (2.8)

$$(3.30) \quad \delta E = 2 \int_{\Omega} \left[\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |\nabla \phi|^2\right) \left(v \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |\nabla \phi|^2\right) + \frac{1}{\gamma+1} \nabla \phi \cdot \nabla (|\nabla \phi|^2) + \Psi\right) \delta v \, d\Omega + o(\delta v) \right]$$

où Ψ est la solution de

$$(3.31) \quad \int_{\Omega} \nabla \Psi \nabla \omega = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\gamma+1} \nabla \omega \nabla |\nabla \phi|^2 + \frac{2}{\gamma+1} \nabla \phi \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \omega) - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \nabla \phi \nabla \omega v \right] \left[v \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |\nabla \phi|^2\right) + \frac{1}{\gamma+1} \nabla \phi \cdot \nabla |\nabla \phi|^2 \right] \, d\Omega$$

pour tout $\omega \in H^1(\Omega)$ tel que $\omega|_{\Gamma_1} = 0$

3.3 Résolution du problème (2.9)

On pose, pour $v \in L^2(\Omega)$

$$(3.32) \quad E(v) = \int_{\Omega} \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \right)^2 dx$$

où φ est la solution de l'équation variationnelle

$$(3.33) \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \omega dx = \int_{\Omega} - \frac{\partial v}{\partial x} \omega dx + \int_{\Gamma_2} u_2 \omega d\Gamma \quad \text{pour tout } \omega \in H^1(\Omega) \text{ tel}$$

que $\omega|_{\Gamma_1} = 0$

avec $\varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1$

Le problème (2.9) se réécrit

$$\min \left\{ E(u) \mid u \in L^2(\Omega) \right\}$$

Evaluons, pour $\delta u \in L^2(\Omega)$ les termes du premier ordre de $\delta E = E(v + \delta v) - E(v)$.

Par définition, si $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}$ sont dans $L^\infty(\Omega)$:

$$(3.34) \quad \frac{1}{2} \delta E = \int_{\Omega} \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \right) \left(2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} - \delta v \right) dx + o(\delta v) + o\left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}\right) + o\left(\delta v \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}\right)$$

De (3.33) on déduit que $\delta \varphi$ est la solution de

$$(3.35) \quad \int_{\Omega} \nabla \delta \varphi \nabla \omega dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \omega dx \quad \text{pour tout } \omega \in H^1(\Omega) \text{ tel}$$

que $\omega|_{\Gamma_1} = 0$

avec $\delta \varphi|_{\Gamma_1} = 0$

De (3.35) avec $\omega = \delta \varphi$ et de l'inégalité de Poincaré on déduit qu'il existe C, C'

$$\text{tel que } \|\delta \varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C' \| \delta v \|_{L^2(\Omega)}$$

Donc $o\left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}\right) = o\left(\delta v \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}\right) = o(\delta v)$

Soit Ψ la solution de l'équation variationnelle

$$(3.36) \quad \int_{\Omega} \nabla \Psi \nabla \omega \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v\right) \quad \forall \omega \in H^1(\Omega), \omega|_{\Gamma_1} = 0$$

avec $\Psi|_{\Gamma_1} = 0$

En portant dans (3.36) $\omega = \delta \varphi$ et dans (3.35) $\omega = \Psi$ on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \left(1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v\right) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \Psi \, d\Omega$$

Ce qui permet de déduire de (3.34) que

$$(3.37) \quad \frac{1}{2} \delta E = \int_{\Omega} - \left[\delta v \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v\right) + \Psi \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right] \, d\Omega + o(\delta v)$$

Algorithme 3.3

Soit $V = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial x}(v) \in L^\infty(\Omega) \right\}$

(3.38) Choisir $v^0 \in V$ poser $k = 0$

(3.39) Calculer φ^k solution de (3.33) avec $v = v^k$

(3.40) Calculer Ψ^k solution de (3.36) avec $v = v^k$, $\varphi = \varphi^k$

(3.41) Calculer δu^k solution de

$$\min_{v \in V} \left\{ \int_{\Omega} - \left[\delta v \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi^k}{\partial x} - v^k + \Psi^k \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right) \right] \, d\Omega \mid \int_{\Omega} \delta v^2 \, d\Omega \leq 1 \right\}$$

(3.42) Calculer λ^k solution de

$$\min \left\{ E(v^k + \lambda \hat{c}v^k) - E(v^k) \right\}$$

poser $v^k = v^k + \lambda^k \hat{c}v^k$ $k = k + 1$ et retourner en (3.39)

Proposition 3.2

Tout point d'accumulation $\bar{\varphi}$ d'une séquence $\{\varphi_i\}$ engendrée par l'algorithme tel que $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \in L^\infty(\Omega)$ est un point stationnaire du problème (2.9). Si $E(v_i)$ tend vers zéro alors $\bar{\varphi}$ est une solution de (1.20)-(2.2).

Remarque 3.6

En un point stationnaire régulier $\bar{u}, \bar{\varphi}$ de (2.9) on a d'après (3.37) :

$$\alpha \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - \bar{v} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} = 0$$

$$\bar{\Psi}|_{\Gamma_2} = 0$$

4. APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

4.1 Discretisation et résolution du problème (2.9)

On se donne une triangulation \mathcal{T}_h de Ω avec h égal au plus grand côté de tous les triangles de \mathcal{T}_h , tel que, en supposant tous les triangles fermés :

$$\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \subset \bar{\Omega}$$

Si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$, $T_1 \cap T_2$ est soit vide soit réduit à un côté commun soit réduit à un sommet commun.

On définit :

$$\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T, \quad \Gamma_h = \partial \Omega_h$$

On choisit \mathcal{T}_h pour que Γ_{1h}, Γ_{2h} soient bien définies (c'est-à-dire que les points communs à Γ_1 et Γ_2 sont des noeuds de la triangulation).

On définit l'espace V_h , approximation de $L^2(\Omega)$ par

$$(4.1) \quad V_h = [v_h \mid v_h \text{ constant sur } T, \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h]$$

On notera par V_{oh} l'ensemble destiné à approximer

$$\left\{ \omega \in H^1(\Omega) \mid \omega|_{\Gamma_1} = 0 \right\} :$$

$$(4.2) \quad V_{oh} = \left\{ \omega_h \in C^0(\bar{\Omega}_h) \mid \omega_h \text{ linéaire sur } T, \forall T \in \mathcal{T}_h ; \omega_h|_{\Gamma_{1h}} = 0 \right\}$$

Tout élément de V_{oh} est complètement déterminé par les valeurs prises sur

$$W_h = \left\{ P \mid P \in \Omega_h \cup \Gamma_{2h}, P \text{ sommet de } \mathcal{T}_h \right\}$$

En supposant les éléments de W_h ordonnés par i on notera pour $w_h \in V_{oh}$,

$$w_i = w_h(P_i), i = 1, \dots, N_h = \dim(V_{oh}), P_i \in \omega_h$$

Pour chaque noeud P_i de W_h on définit $w_{hi} \in V_{oh}$ par

$$w_{hi} \in V_{oh}$$

$$w_{hi}(P_i) = 1$$

$$w_{hi}(P) = 0 \quad \forall P \in W_h - \{P_i\}$$

De façon évidente $\left\{ w_{hi} \right\}_{P_i \in W_h}$ est une base de V_{oh} .

Le problème (2.9) est approché par le problème de contrôle discret ci-dessous. Pour la simplicité de l'exposé on a supposé $\varphi_1 = 0$.

$$(4.3) \quad \min_{v_h \in V_h} \left\{ \int_{\Omega} \left[\alpha \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} - v_h \right]^2 d\Omega \mid \int_{\Omega} \nabla \varphi_h \nabla w_{hi} d\Omega = \int_{\Omega} v_h \frac{\partial w_{hi}}{\partial x} d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_2} (u_2 - v_h n_x) w_{hi} d\Gamma \right. \\ \left. \text{pour tout } P_i \in W_h ; \varphi_h \in V_{oh} \right\}$$

où n_x est la première composante de la normale n à Γ_2 .

Il faut noter que même lorsque h tend vers zéro, φ_h n'approxime la solution de (3.33) que si v_h tend vers une fonction dont on peut définir la trace sur Γ_2 (ce qui n'est pas le cas si v est seulement dans $L^2(\Omega)$). Si on désire absolument l'équivalence avec (3.33), il faut prendre v_h plus régulier et travailler avec des éléments du 2ème ordre.

L'équation variationnelle du problème (4.3) se résoud facilement en décomposant φ_h sur les fonctions de base w_{hi} .

$$(4.4) \quad \varphi_h = \sum_{i \leq N_h} \alpha_i w_{hi}$$

Les α_i sont alors calculés en résolvant le système linéaire

$$(4.5) \quad \sum_{i \leq N_h} \alpha_i \int_{\Omega} \nabla w_{hi} \nabla w_{hj} \, d\Omega = \int_{\Omega} v_h \frac{\partial w_{hi}}{\partial x} \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} (u_2 - v_h n_x) w_{hj} \, d\Gamma \quad ; \quad j = 1, \dots, N_1$$

l'équation adjointe discrète :

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla w_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial w_{hi}}{\partial x} \left(1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} \right) \left(\alpha \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} - v_h \right) \, d\Omega$$

$$\psi_h \in V_{oh},$$

se résoud de la même façon

on obtient donc l'algorithme suivant

Algorithme 4.2

- (4.7) Choisir une triangulation \mathcal{T}_h choisir $t > 0$ petit.
 Choisir $v_h^0 \in V_h$, poser $k = 0$

(4.8) Calculer φ_h^k solution de l'équation variationnelle (4.5) avec $v_h = v_h^k$

(4.9) Calculer ψ_h^k solution de (4.6) avec $\varphi_h = \varphi_h^k, v_h = v_h^k$

(4.10) Calculer $d = \alpha \left(\frac{\partial \varphi_h^k}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_h^k}{\partial x} - v_h^k - \frac{\partial \psi_h}{\partial x} + \langle \delta_{\Gamma_2}, \psi_h \rangle$

où $\langle \delta_{\Gamma_2}, \psi_h \rangle$ est constant par morceaux sur les triangles et vaut zéro sur tous les triangles sauf ceux qui ont un côté sur Γ_2 où :

$$\langle \delta_{\Gamma_2}, \psi_h \rangle|_{\Gamma} = \frac{1}{\text{aire}(T)} \int_{\Gamma_2 \cap T} \psi_h \, d\Gamma_2$$

(4.11) Calculer λ solution de $\min_{\lambda} E\{v_h + \lambda d\} - E(v_h)$

(on peut calculer λ exactement car $E(v_h + \lambda d)$ est une fonction du 4ème degré en λ dont on connaît une racine).

(4.12) Poser $u_h^{k+1} = v_h^k + \lambda d, k = k+1$ retourner en (4.8) sauf si $\|d\| < \epsilon$.

Remarque 4.2

On peut pour assurer la convergence de l'algorithme inclure dans V_h la contrainte $|v_h| < K, K$ grand. A l'étape (4.12) il faut alors poser $|u_h^{k+1}| = K$ sur tous les triangles où $|v_h^k + \lambda d|$ est plus grand que K .

4.2 Discrétisation du problème (2.3)

Le problème (2.3) est approché par le problème de contrôle discret

$$(4.13) \quad \min_{\varphi_h \in \Phi_h} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \varepsilon_h|^2 \, d\Omega \middle/ \int_{\Omega_h} \nabla \varepsilon_h \nabla w_h \, d\Omega = - \int_{\Omega_h} G(|\nabla \varphi_h|^2) \nabla \varphi_h \nabla w_h \, d\Omega \right. \\ \left. \forall w_h \in V_{oh}; \varepsilon_h \in V_{oh} \right\}$$

où

$$(4.14) \quad \Phi_h = \left\{ \varphi_h \in C^0(\bar{\Omega}_h) \mid \varphi_h \text{ linéaires par morceaux: surtout } T \in \mathcal{T}_h, \right. \\ \left. \varphi_h|_{\Gamma_{1h}} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} |_{\Gamma_{2h}} = u_2 \right\}$$

et ou V_{oh} est défini par (4.2) avec $\Gamma_{1h} = \partial \Omega_h$.

L'équation variationnelle dans (4.13) est résolue comme précédemment par inversion d'un système linéaire sur la base de V_{oh} . On notera que l'évaluation de la dernière intégrale dans (4.13) ne pose pas de problème car $\nabla \varphi_h$ est constant par morceaux.

On trouvera en annexe l'implémentation de la discrétisation dans l'algorithme (3.1).

4.3 Discrétisation du problème (2.7)

On procède pour (2.7) comme pour (2.3) ; l'espace des contrôles u est approximé par u_h , ensemble des fonctions à valeur dans R^2 continues linéaires par morceaux sur Ω_h . Toutefois dans le cas où on conserve la contrainte $\nabla \cdot u = 0$ Il faut prendre certaines précautions quant au nombre de variables indépendantes restantes qui doit rester au moins supérieur au nombre de sommets si l'on veut que le problème discret soit une bonne approximation du problème continu.

Le potentiel φ_h est calculé par l'équation variationnelle

$$(4.15) \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi_h \nabla w_{h_i} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} |u_h|^2 \nabla \cdot u_h + \frac{1}{\gamma+1} u_h \cdot \nabla |u_h|^2 \right) w_{h_i} \, d\Omega + \int_{\Omega} u_h^2 w_{h_i} \, d\Gamma$$

pour tout $i \in W_h \cup \mathcal{U}_h$

où \mathcal{U}_h est l'ensemble des indices des sommets dans Ω_h des triangles des triangles de \mathcal{T}_h qui ont un côté dans Γ_{2h} .

Le potentiel adjoint Ψ_h est aussi calculé par

$$(4.16) \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi_h \nabla w_{h_i} \, d\Omega = \int_{\Omega} 2(u_h \nabla \varphi_h) \cdot w_{h_i} \, d\Omega \quad \text{pour tout } i \in W_h \cup U_h$$

Enfin le sous-problème (3.28) est résolu à l'aide de (3.22) si la contrainte $\text{rot } u = 0$ est maintenue ; sinon il se résout à l'aide de (3.23).

5. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME (2.9)

On a testé la méthode sur 3 exemples :

1. une demi-tuyère divergente a des nombres de Mach de 0.83 et 1.27
2. un demi-profil avec bord d'attaque anguleux $M_{\infty} = 0.96$
3. une demi-tuyère convergente-divergente avec surface de raccordement anguleuse .

Dans les 3 cas on a pris une triangulation de 754 triangles et 420 noeuds. Les équations variationnelles dans (4.13) et (4.14) ont été résolues par la méthode de Cholesky en utilisant un sous-programme IBM-SSP. Chaque itération de l'algorithme (4.1) prend environ 0.4" sur un IBM 370/168. La place mémoire nécessaire pour cette triangulation est de 200 K-octet. Dans les 3 exemples on a choisit v^0 égal à la vitesse d'entrée du fluide.

5.1 Analyse des résultats relatifs à l'exemple 1.

Sur la fig. 1 on a représenté la géométrie de la tuyère, sa triangulation ainsi que la précision avec laquelle au bout de 30 itérations l'équation (1.20) est satisfaite. Sur les fig. 2, 3, 4, 5 on a tracé les isomachs au bout de 2, 7, 14, 30 itérations, pour une entrée subsonique uniforme $M_{\infty} = 0.83$, le potentiel étant imposé constant à la sortie de la tuyère. On voit que 14 itérations sont plus que suffisantes. On notera que les conditions aux limites sur Γ_2 ne sont pas très bien satisfaites (sans que la précision de calcul de l'écoulement soit mauvais) Ceci est dû à l'utilisation de la forme intégrale (4.11) de l'équation (3.33).

Sur la fig.6 on a tracé la courbe de décroissance du critère $E(v_h^k)$ et du gradient $||d(v_h^k)||^2$ (d donné par (4.19)). On trouvera aussi sur cette figure les mêmes courbes relatives à l'exemple 2.

Ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus par Perriau [8]. Les temps de calculs sont aussi de même ordre.

On peut donc conclure de cet exemple que la méthode (4.1) a des performances tout à fait semblables aux méthodes de quasi-linéarisation usuelles (cf. Perriau [8], Gelder [5]) dans le domaine d'application de celles-ci.

Pour tester la méthode sur un cas mixte supersonique-subsonique avec choc on a pris pour Γ_1 l'entrée et la sortie de la demi-tuyère. Le potentiel est donc pris constant à l'entrée et à la sortie de la tuyère. On a d'abord pris $\varphi = 0$ à l'entrée et $\varphi = 0.20$ à la sortie. On a obtenu les figures 6 - 9 sur lesquelles on peut constater que la méthode est très bien adaptée à ce type très complexe d'écoulement. L'équation (1.20) est satis faite, au bout de 60 itérations avec une erreur sur chaque triangle $\epsilon_i = |\alpha(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x} - u|$ inférieur à 0.04. On notera le comportement oscillatoire de la solution dans la zone supersonique. Ceci est très probablement dû à la propagation de l'erreur de position de la ligne de choc comme le prouve la fig.10 où le saut de potentiel a été pris égal à - 0.22. Par construction le choc ne peut en effet se trouver que sur une ligne de discrétisation il conviendrait donc de raffiner le maillage au voisinage du choc.

5.2 Analyse des résultats relatifs à l'exemple 2

L'objectif de l'exemple 2 est de simuler l'écoulement autour d'un profil d'aile en régime transonique. Sur la fig.11 on a représenté la géométrie du domaine, la triangulation et le degré de précision avec lequel l'équation (1.20) est satisfaite au bout de 60 itérations.

Sur les fig.12 et 13 on a tracé les isomachs au bout de 30 et 60 itérations. On peut donner plusieurs arguments pour expliquer l'absence d'onde de choc à l'arrière du profil : l'influence de la paroi supérieure, l'avant pointu du profil, mais aussi le fait que la précision de résolution du problème n'est pas suffisante dans la partie supersonique de l'écoulement où les erreurs se propagent plus rapidement. Il faudrait mettre un poids dans le critère E pour donner plus d'importance à la partie supersonique.

5.3 Analyse des résultats relatifs à l'exemple 3.

L'objet de l'exemple 3 est de montrer que la méthode se comporte aussi bien sur des problèmes à géométrie compliquée en écoulement mixte. On a tracé les isomachs au bout de 60 itérations sur la fig.15. On notera que les directions privilégiées de l'écoulement sont bien celles de la géométrie.

6. REMARQUES DIVERSES ET COMPARAISON DES METHODES.

6.1 Cas des profils portants

Lorsque l'écoulement se fait autour d'un profil non symétrique à bord de fuite, en point de rebroussement, une condition supplémentaire est nécessaire pour définir le potentiel. On utilise la condition de Kutta-Joukowski :

$$(5.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} (F^+) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} (F^-)$$

ou F^+ et F^- sont les deux points (confondus) extrêmes intrados et extrados du bord de fuite.

Dans le cas du problème (2.9) on a donc à résoudre à chaque itération

$$(6.2) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varphi|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\Gamma_2} = u_2$$

avec (6.1)

Une technique standard consiste à décomposer φ sous la forme $\varphi = \varphi^1 + \lambda \varphi^2$ où φ^1, φ^2 sont solutions de systèmes différentiels convenables (cf. Perriau [8]) et λ est un paramètre qu'on ajuste de manière à satisfaire (6.1).

L'utilisation des algorithmes (3.2), (3.3) se fait sans autre modification. L'algorithme (3.1) doit tenir compte de (6.1) dans la définition de Φ .

6.2 Résolution numérique de (2.3)

L'algorithme (2.1) a été programmé conformément aux indications données au § 4.2, et testé sur l'exemple 1 avec la même triangulation ; le mach d'entrée est spécifié uniforme et égal à 0.85 ; le potentiel est donné constant à la sortie de la tuyère.

Les résultats numériques sont très décevants : la méthode est très lente, il faut environ 1000 itérations pour obtenir un résultat à peu près satisfaisant. On a donné sur la fig.16 un graphe de la décroissance du cout au long des itérations.

A posteriori, on peut penser que la lenteur de la méthode provient du fait que la fonction $\varphi \rightarrow E(\varphi)$ est très plate et qu'il est donc très difficile de s'approcher de la solution optimale en φ alors qu'on est tout de suite très près du ε optimal correspondant.

La méthode se conduit donc à peu près comme une méthode de pénalité de l'équation d'état.

6.3 Comparaison des méthodes

Comme on a pu s'en rendre compte, la méthode (2.3) est la plus simple du point de vue théorique : c'est aussi la meilleure pour le passage d'un choc ; cependant nous la déconseillons car elle converge trop lentement.

Lorsque la géométrie du système le permet, la méthode (2.9) est la plus simple et la plus rapide des méthodes car on peut aussi accélérer la convergence en utilisant une méthode de gradient conjugué ; cependant dans le cas des profils portants il faut utiliser une méthode d'éléments finis du 2ème ordre on peut alors préférer traiter l'équation de l'écoulement potentiel incompressible complète et donc résoudre (2.7). Signalons que dans les cas sans chocs on peut préférer résoudre (2.8) à l'aide d'une méthode de gradient conjugué. Les résultats numériques pour ces deux méthodes seront présentés ultérieurement.

6.4 CONCLUSION

Le calcul des écoulements compressibles aux vitesses transoniques par des méthodes d'éléments finis est donc possible grâce à la formulation intermédiaire sous forme de problèmes de contrôle optimal. Ces nouvelles méthodes sont très compétitives avec les méthodes de différences finies déjà existantes et font mieux que les méthodes de quasi linéarisation en éléments finis. Il reste malgré tout un certain nombre de problèmes théoriques à résoudre, comme celui de la propagation des erreurs dans les zones supersoniques.

Il faut aussi maintenant tester les multiples possibilités de ces méthodes sur des problèmes réels en liaison avec les praticiens de la mécanique des fluides (ceux de l'industrie en particulier).

R E F E R E N C E S

- [1] LANDAU, L. et F. LIFCHITZ Mécanique des fluides - édition de Moscou (1953).
- [2] COURANT, R. et K.O. FRIEDRICHS. Supersonic flow and shock waves interscience (1948).
- [3] RICHMEYER, D. et MORTON, K. Difference methods for initial value problems. Interscience (1957)
- [4] JAMESON, A. Iterative solution of transonic flows over airfoils and wings including flows at Mach 1 Com. Pure Appl. math. 1974).
- [5] GELDER, D. Solution of the compressible flow equations Int. J Num. Meth. Eng., Vol 3, pp 35 - 43, 1971.
- [6] DEVRIES, G. et D.H. NORRIE. The application of the finite element technique to potential flow problems. J. Applied. Mech. transaction of ASME 798/Dec. 1971.
- [7] LIONS, J.L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Springer (1968).
- [8] PERRIAUX, J. A.M.D. Company report January. (1974).
- [9] YVON, Thèse doct. Paris 1974.

Algorithme A.1

(A.10) Choisir une triangulation \mathcal{T}_h du type ci-dessus
 Choisir $\varphi_h^0 \in \Phi_h$; choisir $\beta \in]0,1[$, $\varepsilon > 0$ petit. Poser $k = 0$.

(A.11) Calculer $\varepsilon_h^k = \sum_{i < N_h} \beta_i w_{h_i}$ β_i est solution de

$$\int_{\Omega} \beta_i \nabla w_{h_i} \nabla w_{h_j} \, d\Omega = - \int_{\Omega} G(|\nabla \varphi_h^k|^2) \nabla \varphi_h^k \, d\Omega \quad j = 1, \dots, N_h$$

(A.12) Calculer d par (A.1) avec (on utilise (3.7))

$$\alpha_i = \int_{\Omega} [G(|\nabla \varphi_h^k|^2) \nabla \varepsilon_h^k \nabla (w_{h_i} + \delta_i \bar{w}_{h_i}) + 2G'(|\nabla \varphi_h^k|^2) (\nabla \varphi_h^k \cdot \varepsilon_h^k) (\nabla \varphi_h^k \cdot \nabla (w_{h_i} + \delta_i \bar{w}_{h_i}))] \, d\Omega$$

$i \in w_h$ où $\delta_i = 1$ si $i \in \gamma_h$, 0 ailleurs.

(A.13) Calculer le plus petit entier positif j tel que

$$E(\varphi_h^k + \beta^j d) - E(\varphi_h^k) \leq -\frac{1}{2} \beta^j \|d\|^2$$

(A.14) Si $\|d\|^2 < \varepsilon$ terminer sinon poser $\varphi_h^{k+1} = \varphi_h^k + \beta^j d$

$k = k + 1$ et retourner en (A.6)

Remarque A.1

L'algorithme A.1 est maintenant une méthode de gradient sur les α_i et non sur φ_h .

A N N E X E

Les problèmes (2.3) et (4.3) sont de même type puisqu'ils ne diffèrent que par l'ensemble des contrôles admissibles soit Φ_h au lieu de Φ_m .

Pour calculer facilement la solution du programme linéaire dans (3.12) on choisit des fonctions de base supplémentaires continues linéaires par morceaux $\left\{ \bar{w}_{hi} \right\}_{i \in \gamma_h}$ ou γ_h est l'ensemble des indices des

sommets dans Ω_h des triangles de \mathcal{T}_h qui ont un côté dans Γ_{2h}

On peut choisir \mathcal{T}_h de telle sorte que toute combinaison linéaire de la forme (†)

$$(A.5) \quad d = \sum_{i \in W_h} \alpha_i w_{hi} + \sum_{i \in \gamma_h} \alpha_i \bar{w}_{hi}$$

satisfasse

$$(A.7) \quad \frac{\partial d}{\partial n} = 0$$

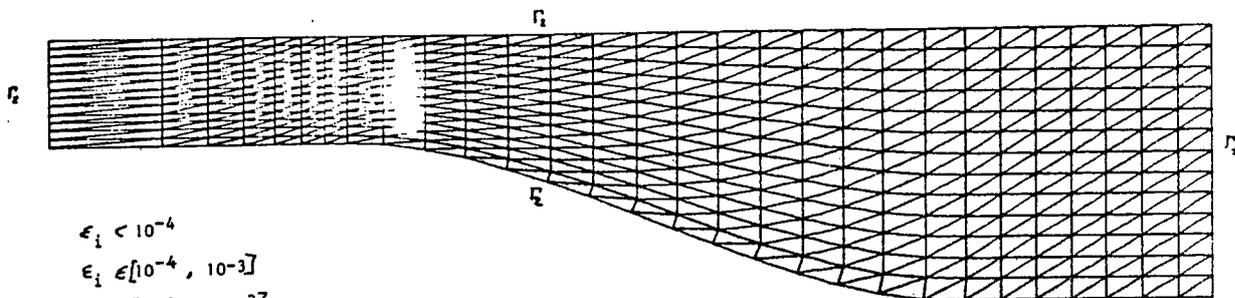
La solution discrète du problème (3.12) est alors, à un facteur multiplicatif près, donnée par (A.6) avec

$$(A.8) \quad \alpha_i = - \langle \nabla E(\varphi^k), w_{hi} + \bar{w}_{hi} \rangle \quad i \in \gamma_h$$

$$(A.9) \quad \alpha_i = - \langle \nabla E(\varphi^k), w_{hi} \rangle \quad i \in W_h - \gamma_h$$

On obtient donc l'adaptation de l'algorithme (3.1) suivante

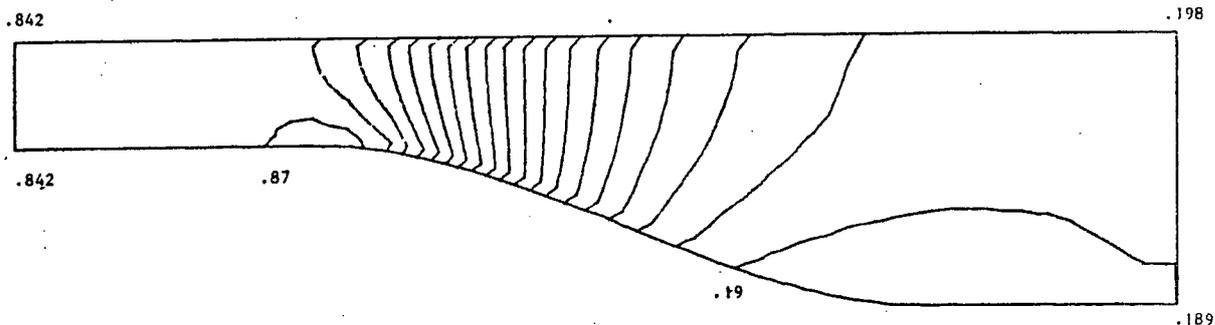
(†) une méthode simple consiste à prendre une triangulation dont les triangles de la frontière Γ_{2h} sont rectangles et à prendre $w_{hi} = 1$ au sommet rectangle et zéro aux autres sommets.



$$\begin{aligned} \epsilon_1 &< 10^{-4} \\ \epsilon_1 &\in [10^{-4}, 10^{-3}] \\ \epsilon_1 &\in [10^{-3}, 5 \times 10^{-3}] \end{aligned}$$

Figure 1. Example 1: triangulation. $\epsilon_1 = \kappa \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu^k, k=14.$

LABORIA- O.PIRONNEAU

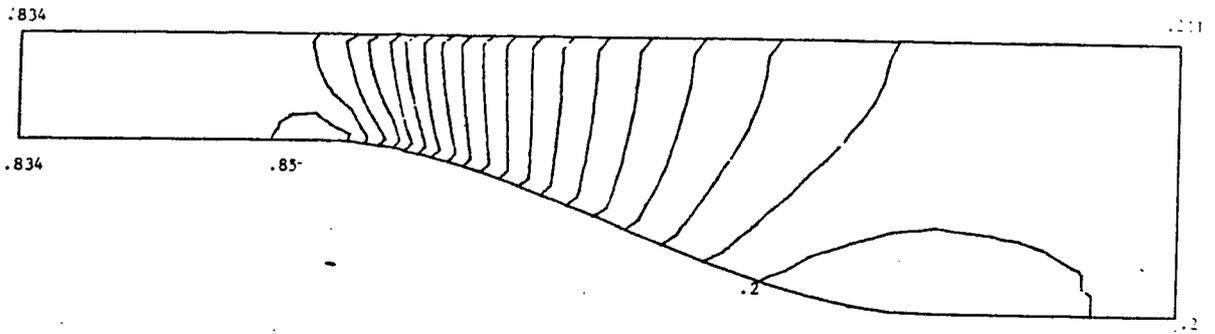


NB D ITERATIONS 2

$$\begin{aligned} E &= 2 \times 10^{-4} \\ |d|^2 &= 2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Figure 2. Isomachs.

LABORIA- O.PIRONNEAU



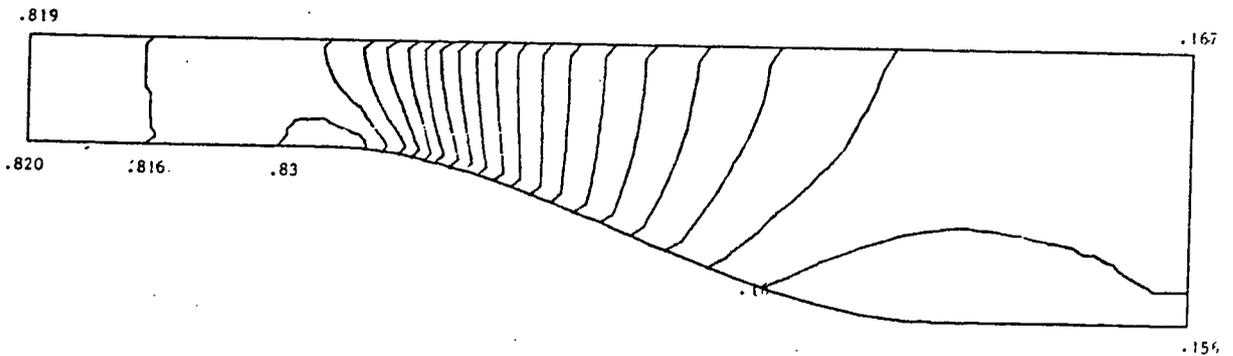
NB D ITERATIONS 14

$E = 2 \times 10^{-6}$

$|\delta|^2 = 6 \times 10^{-7}$

Figure 4. Isomachs.

LABORIA- O. PIRONNEAU



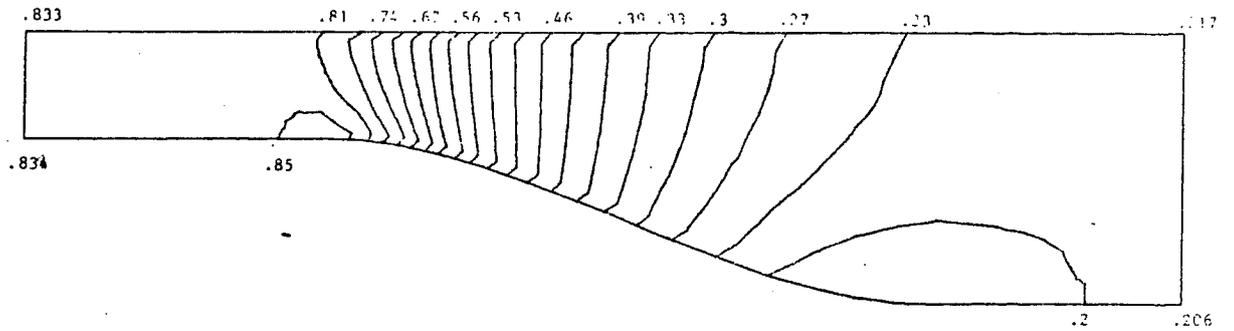
NB D ITERATIONS 7

$E = 10^{-5}$

$|\delta|^2 = 2 \times 10^{-5}$

Figure 3. Isomachs.

LABORIA- O. PIRONNEAU

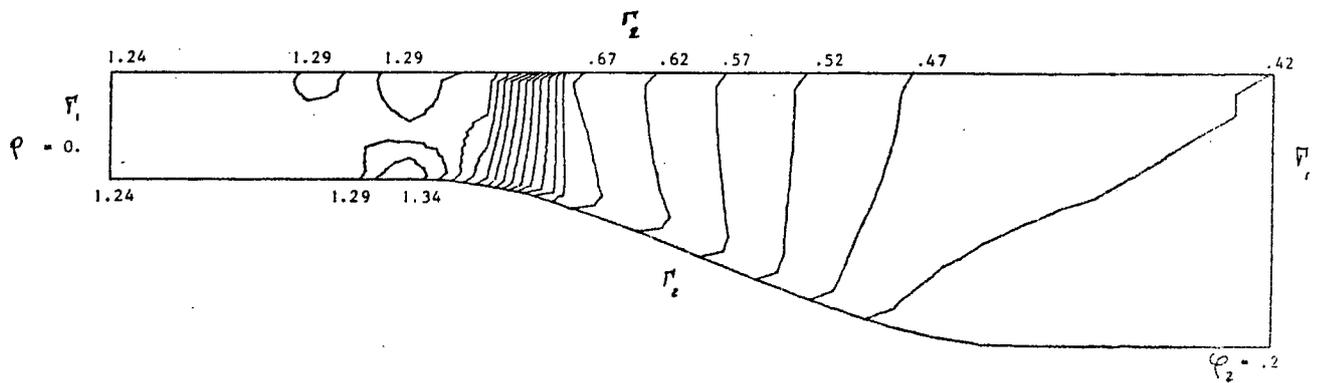


NB D ITERATIONS 30

$E = 1.6 \times 10^{-7}$
 $|d|^2 = 5 \times 10^{-8}$

Figure 8 . Isomachs.

LABORIA- O.PIRONNEAU



NB D ITERATIONS 30

$E = 4.6 \times 10^{-4}$
 $|d|^2 = 1.5 \times 10^{-6}$

Figure 7. Isomachs the shock is not visible because it was smoothed out by the isomach drawing subroutine.

LABORIA- O.PIRONNEAU

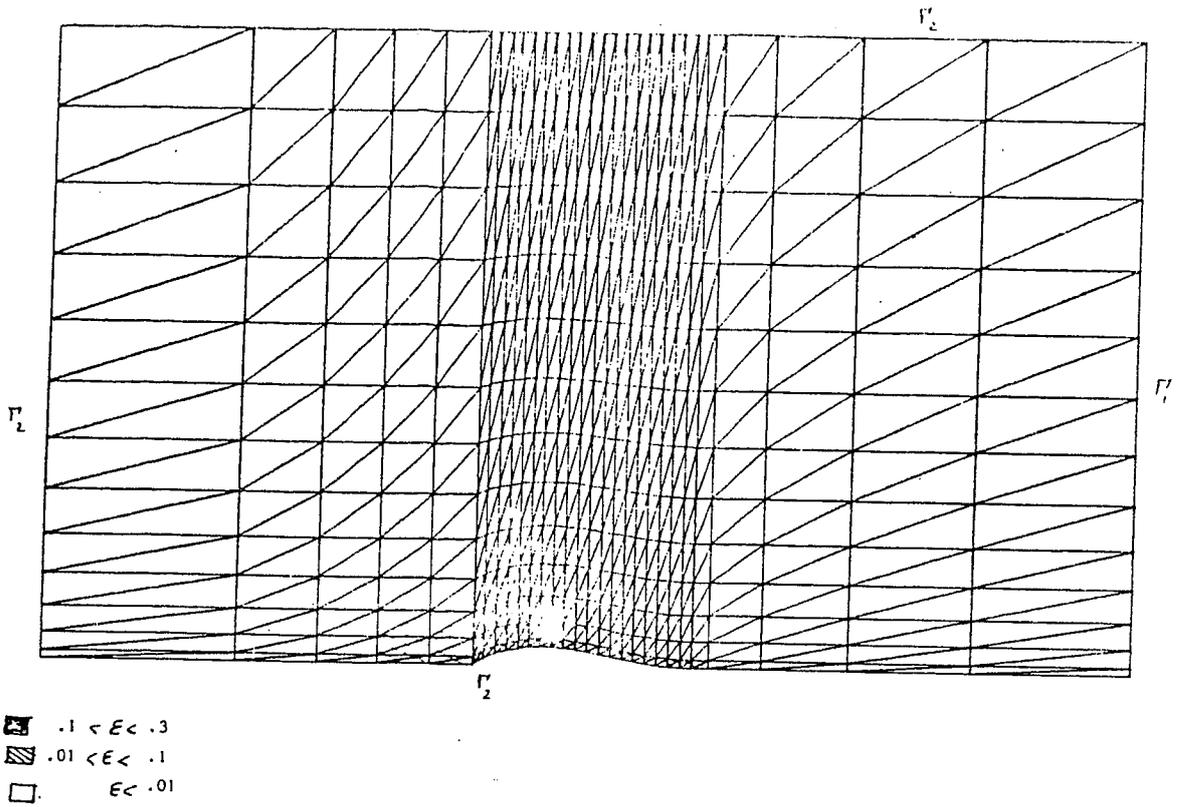
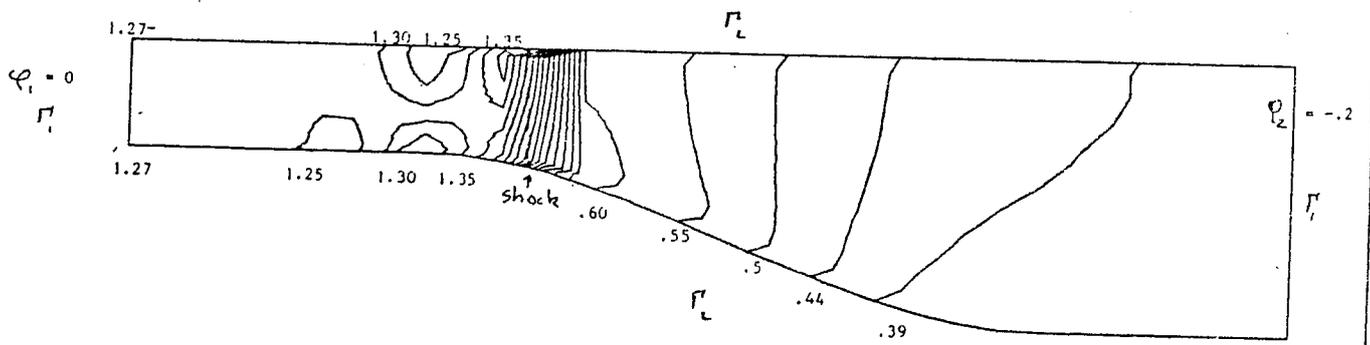


Figure 11. Triangulation of example 2 and precision after 60 iterations.

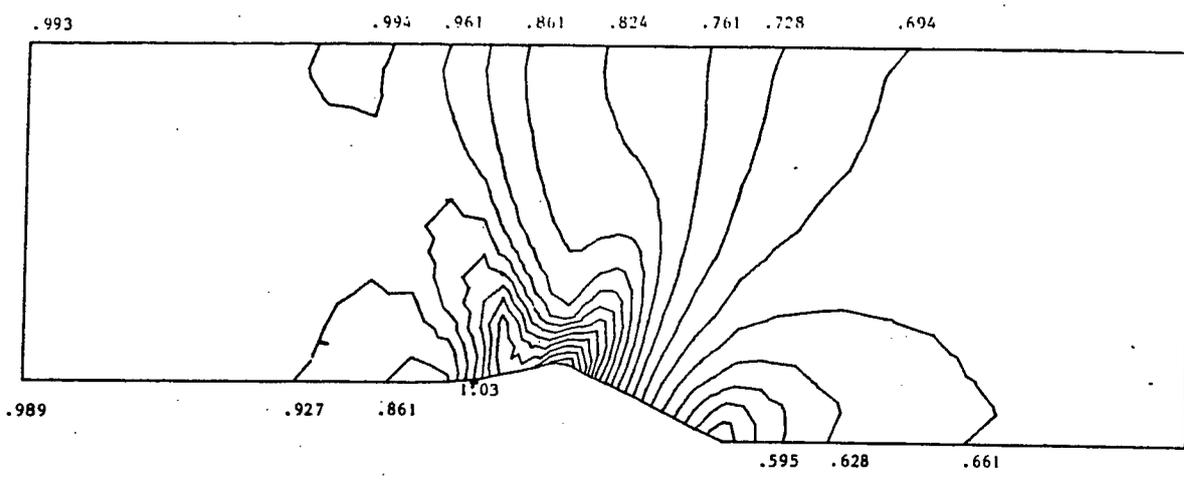
LABORIA- O. PIRONNEAU



NB D ITERATIONS 60
 $E = 4 \times 10^{-4}$
 $(d\phi)^2 = 6 \times 10^{-7}$

Figure 8. Isomachs.

LABORIA- O. PIRONNEAU



NB D ITERATIONS 60

$E = 2 \times 10^{-4}$
 $D^2 = 2 \times 10^{-4}$

Figure 15. Isomachs.

LABORIA- O. PIRONNEAU

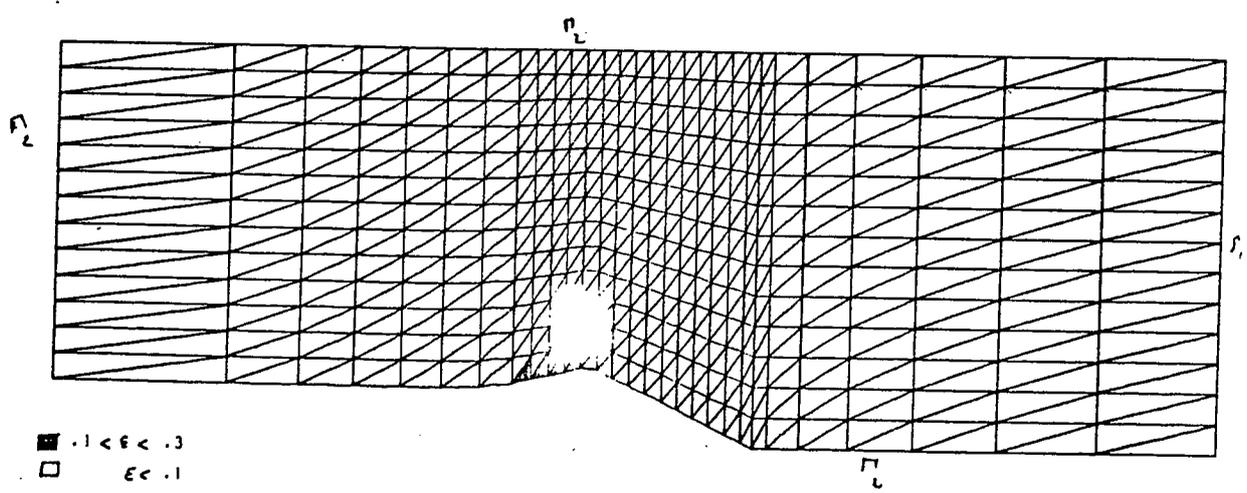


Figure 14. example 3.

LABORIA- O. PIRONNEAU

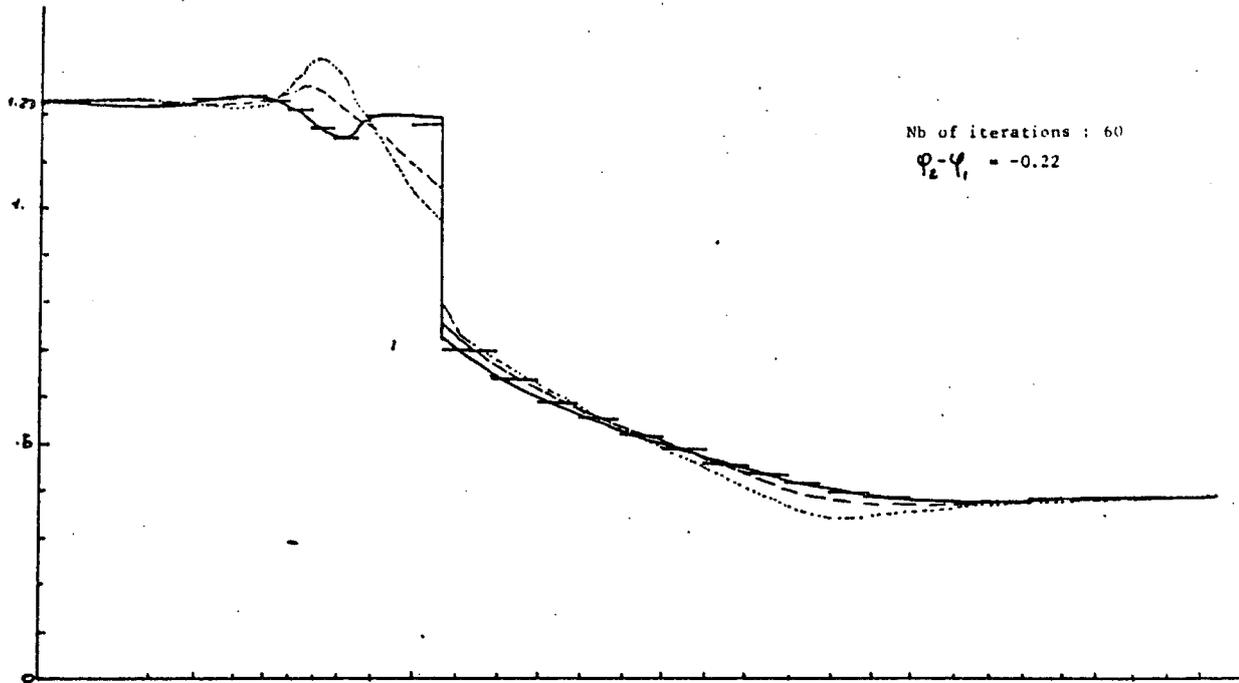


Figure 10. Same as for fig. 9 with a different $\varphi_2 - \varphi_1$.

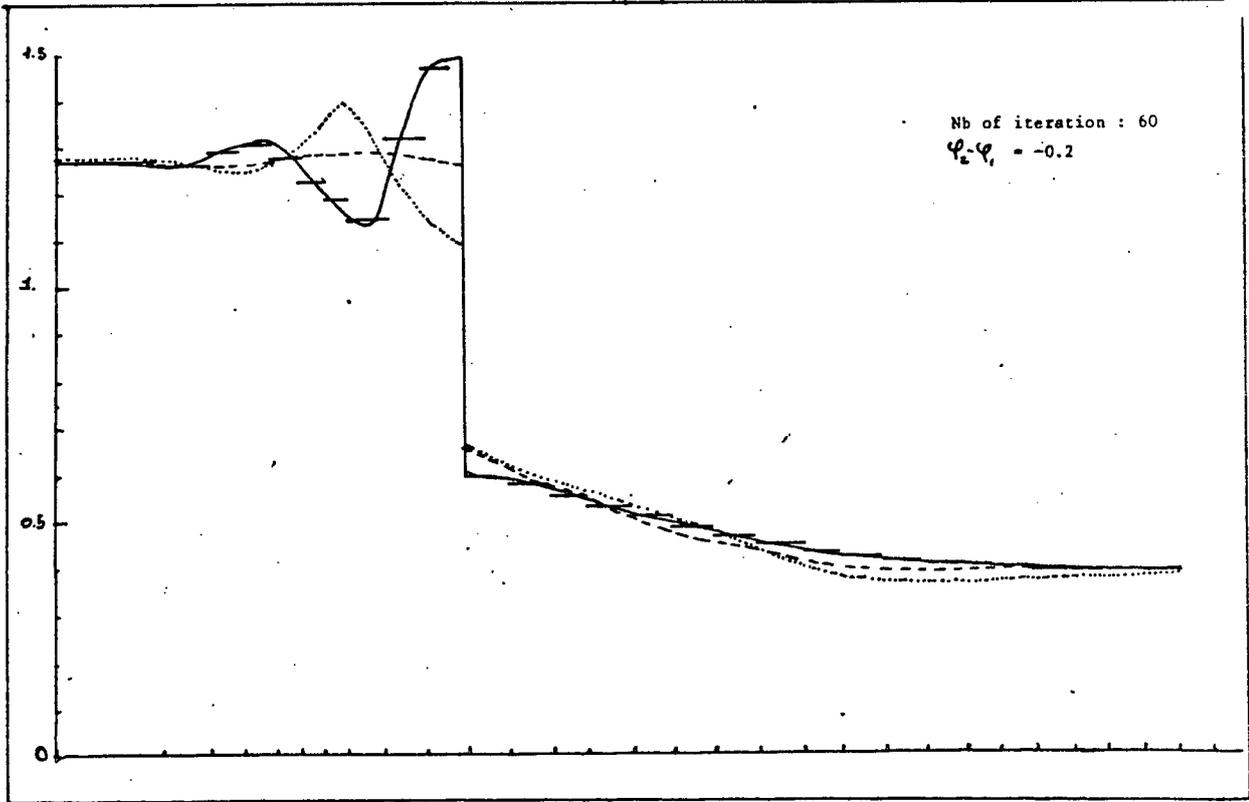


Figure 9. Variation of the Mach along 3 lines of discretisation. The horizontal segments are the step function, given by the computer, from which the continuous line was extrapolated.

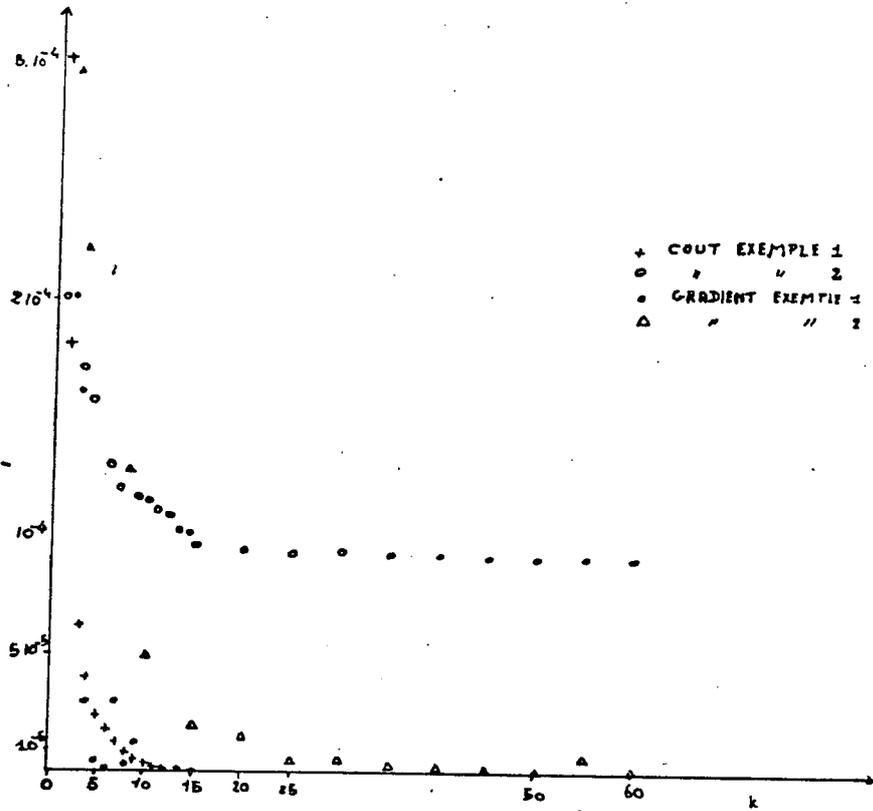


Figure 6. E and $|dE/dk|$ are drawn as functions of the index of iterations k for example 1 and 2.

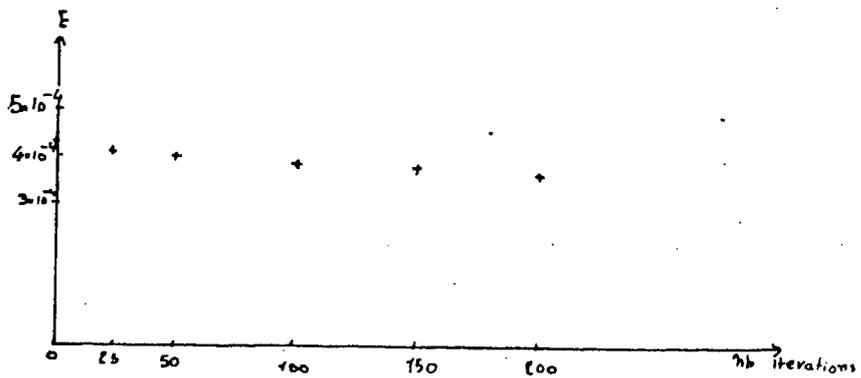


Figure 18. Cost as a function of k for Problem (2.3)

