



HAL
open science

Contrôle de domaines temporels

J. Frederic Bonnans, C. Moreno, Ch. Saguez

► **To cite this version:**

J. Frederic Bonnans, C. Moreno, Ch. Saguez. Contrôle de domaines temporels. [Rapport de recherche] RR-0308, INRIA. 1984. inria-00076249

HAL Id: inria-00076249

<https://inria.hal.science/inria-00076249>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 308

**CONTRÔLE
DE DOMAINES TEMPORELS**

**Joseph Frédéric BONNANS
Carlos MORENO
Christian SAGUEZ**

Mai 1984

CONTROLE DE DOMAINES TEMPORELS

J.F. BONNANS^{*}, C. MORENO^{**}, C. SAGUEZ^{***}

RESUME

Cet article étudie des problèmes de contrôle optimal d'une équation parabolique linéaire, lorsque l'observation est l'ensemble des instants pour lesquels un critère de qualité (local en temps) sur l'état n'est pas vérifié. Nous considérons successivement le problème de la minimisation de la mesure et du diamètre de cet ensemble. Nous démontrons l'existence d'un contrôle optimal, et nous étudions l'obtention de conditions d'optimalité. Enfin nous proposons des méthodes numériques de résolution, fondées sur la régularisation des problèmes précédents.

ABSTRACT

This paper studies the optimal control of a linear parabolic system when the observation is the set I of times for which a quality criterion (local in time) is not checked. We successively consider the problem of the minimization of the measure and of the diameter of I . The existence of an optimal control is proven and the question of optimality conditions is studied. We also give some numerical methods, based on the regularization of the preceding problems.

* INRIA, Domaine de Voluceau, BP 105, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay Cédex, France

** Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid (Canto Blanco) Madrid 34, Espagne

*** SIMULOG, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 Le Chesnay, France.



INTRODUCTION

Classiquement, un problème de contrôle optimal se formule comme suit :

- à toute valeur d'une variable de contrôle u est associée à un état $y(u)$ solution d'une équation de la forme :

$$(1) \quad Ay(u) = f + Bu,$$

où A et B sont deux opérateurs, linéaires ou non.

- la variable de contrôle u est assujettie à appartenir à un sous-ensemble admissible \mathcal{U}_{ad} d'un espace vectoriel \mathcal{U} . \mathcal{U}_{ad} traduit les contraintes sur le contrôle et (ou) sur l'état.

- au contrôle est associé un critère :

$$(2) \quad J(u) = \mathcal{J}(y(u), u).$$

Le problème consiste à trouver $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$(3) \quad J(\bar{u}) \leq J(u), \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

D'un point de vue physique, lorsqu'on considère un processus de fabrication, les contraintes sur l'état traduisent en général des conditions pour assurer une bonne qualité du produit et le critère J l'objectif de suivre un état donné (consigne) au moindre coût. La résolution d'un tel problème suppose donc, en particulier, l'existence des contrôles admissibles, c.a.d. que \mathcal{U}_{ad} doit être non vide. Or, au cours du processus de fabrication, il peut apparaître des phénomènes transitoires pendant lesquels il est impossible de vérifier toutes les contraintes. Le problème de contrôle optimal précédent n'a alors plus de sens.

Dans ce cas, on doit considérer un problème de contrôle d'un autre type consistant à minimiser le temps pendant lequel des contraintes ne sont pas vérifiées. Un tel exemple apparaît dans le contrôle du processus de coulée continue d'acier. Pour obtenir un acier de bonne qualité, le refroidissement doit vérifier un certain nombre de contraintes thermiques (gradient de température borné, ...).

Or plusieurs phénomènes (busette bouchée, changement de poche, ...) peuvent entraîner des transitions (au niveau de la vitesse de coulée) qui rendent impossible la vérification de ces contraintes thermiques et par là-même génèrent des défauts dans l'acier en sortie d'installation. Le problème de contrôle revient alors à minimiser les zones de défauts.

Dans cet article nous étudions d'un point de vue théorique et numérique un tel problème dans le cas d'un système gouverné par une équation parabolique linéaire. Si $I(u)$ désigne l'ensemble des instants où les contraintes sur l'état ne sont pas vérifiées par la variable de contrôle u , deux types de critère sont considérés :

- la mesure de Lebesgue de $I(u)$, soit $M(I(u))$.
- le diamètre de $I(u)$, soit $\delta(I(u))$.

Le plan de l'article est le suivant :

- 1 - FORMULATION DU PROBLEME
- 2 - MINIMISATION DE LA MESURE DE LA ZONE DE DEFAUTS
- 3 - MAXIMISATION DE LA LONGUEUR D'UTILISATION

Remarque 1.1 :

On peut avoir, par exemple :

$$Z = V, \quad Cy(u)(t) = y(u)(t),$$

$$Z = H, \quad Cy(u)(t) = y(u)(t),$$

$$Z = V', \quad Cy(u)(t) = \frac{d}{dt} [y(u)](t). \quad \square$$

Nous faisons l'hypothèse

$$(1.3) \quad \{u \in \mathcal{U}_{ad} ; Cy(u)(t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in [0, T]\} = \emptyset.$$

Introduisons l'ensemble $I(u)$ défini par :

$$(1.4) \quad I(u) = \{t \in [0, T] ; Cy(u)(t) \notin Z_{ad}\}.$$

On a donc, par hypothèse, $\mathcal{M}(I(u)) > 0$, $\forall u \in \mathcal{U}_{ad}$ (\mathcal{M} désigne la mesure de Lebesgue).

Considérons les critères suivants :

$$(1.5) \quad J_1(u) = \tilde{J}(u) + \mathcal{M}(I(u)),$$

où $\tilde{J}(u)$ est une fonctionnelle de \mathcal{U} dans \mathbb{R} , convexe, s.c.i., G-différentiable ;

$$(1.6) \quad J_2(u) = \tilde{J}(u) - \delta(u),$$

avec

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta(u) = \text{Sup} \{d \in \mathbb{R}^+, \exists t_1, t_2 \in [0, T], d = t_2 - t_1 \text{ et} \\ Cy(u)(t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in (t_1, t_2)\}. \end{array} \right.$$

Posons alors les problèmes de contrôle optimal (P_i) , $i = 1, 2$:

$$(P_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \bar{u} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ J_i(\bar{u}) \leq J_i(u), \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \end{array} \right.$$

Remarque 1.2

Les deux problèmes considérés permettent d'étudier les deux principaux critères intervenant pour ce type de problèmes.

On aurait également pu considérer comme critère le diamètre de l'ensemble $I(u)$ au sens de la mesure, soit :

$$\delta = \inf \{ t_2 - t_1 ; t_1, t_2 \in [0, T] \text{ et } \mathcal{M}_0(I(u) - [t_1, t_2]) = 0 \}.$$

Ce problème est de même nature que le problème (P_2) .

Dans le cas de la coulée continue, une formulation possible du problème est :

$$(P_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(u) = \tilde{J}(u) - \sum_{i \in \mathcal{J}(u)} (t_{2i} - t_{1i}), \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \end{array} \right.$$

où $\mathcal{J}(u)$ est un sous ensemble de \mathbb{N} vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{\mathcal{Y}}(u)(t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in (t_{2i}, t_{1i}), i \in \mathcal{J}(u), \\ t_{2i} - t_{1i} \geq D, \end{array} \right.$$

D étant la longueur utilisable minimale d'une brame, et

$$\mathcal{M}_0((t_{1i}, t_{2i}) \cap (t_{1j}, t_{2j})) = 0 \text{ si } i, j \in \mathcal{J} \text{ et } i \neq j.$$

Si D est grand, \mathcal{J} peut n'avoir qu'un seul élément : alors (P_3) équivaut à (P_2) .

Si D est nul (P_3) équivaut à (P_1) . Les problèmes (P_1) et (P_2) sont donc des cas limites de (P_3) . Les difficultés mathématiques de (P_3) sont de même nature que celles de (P_1) et (P_2) . \square

2 - ETUDE DU PROBLEME P₁ : MINIMISATION DE LA LONGUEUR DE LA ZONE DE DEFAUTS

2 - 1. Existence d'une solution

On remarque que :

$$(2.1) \quad \mathcal{M}_0(I(u)) = \int_0^T g \left(\left\| \text{Cy}(u)(t) - P_{Z_{ad}} \text{Cy}(u)(t) \right\|_Z^2 \right) dt,$$

avec

$P_{Z_{ad}}$ projection sur l'ensemble Z_{ad} .

et g définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \text{ si } x \leq 0, \\ g(x) &= 1 \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

On notera, par la suite :

$$(2.2) \quad z_u(t) = \left\| \text{Cy}(u)(t) - P_{Z_{ad}} \text{Cy}(u)(t) \right\|_Z^2.$$

Proposition 2.1

L'application $u \rightarrow \mathcal{M}_0(I(u))$ de \mathcal{U} dans \mathbb{R} est f.s.c.i. . \square

Démonstration

Soit $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$ dans \mathcal{U} faible.

Alors on a :

$$y_n = y(u_n) \rightharpoonup \tilde{y} = y(\tilde{u}) \text{ dans } W(0,T) \text{ faible,}$$

et donc $\text{Cy}_n \rightharpoonup \tilde{\text{Cy}}$ dans $L^2(0,T ; Z)$ faible.

On a alors

$$(2.3) \quad \underline{\lim} \left\| \|C_{y_n}(t) - P_{Z_{ad}} C_{y_n}(t)\|_Z^2 \right\| \geq \left\| \|C_{\tilde{y}} - P_{Z_{ad}} C_{\tilde{y}}\|_Z^2 \right\| \text{ p.p. } t \in (0, T);$$

l'inégalité (2.3) porte sur des fonctions de $L^2(0, T)$ et a donc un sens.

Supposons en effet que (2.3) ne soit pas vraie, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I_1 , de mesure non nulle, où (2.3) n'est pas vérifiée. Alors on obtient :

$$(2.4) \quad \liminf_{I_1} \int \left\| \|C_{y_n}(t) - P_{Z_{ad}} C_{y_n}(t)\|_Z^2 \right\| dt < \int_{I_1} \left\| \|C_{\tilde{y}} - P_{Z_{ad}} C_{\tilde{y}}\|_Z^2 \right\| dt.$$

Mais l'application

$$y \rightarrow \int_{I_1} \left\| \|C_y - P_{Z_{ad}} C_y\|_Z^2 \right\| dt$$

est convexe continue de $W(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, donc f.s.c.i. et (2.4) est impossible.

Comme g est, par définition, une application croissante, s.c.i., on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\lim} g \left(\left\| \|C_{y_n} - P_{Z_{ad}} C_{y_n}\|_Z^2 \right\| \right) &\geq g \left(\underline{\lim} \left\| \|C_{y_n} - P_{Z_{ad}} C_{y_n}\|_Z^2 \right\| \right) \\ &\geq g \left(\left\| \|C_{\tilde{y}} - P_{Z_{ad}} C_{\tilde{y}}\|_Z^2 \right\| \right) \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement le résultat. \square

Proposition 2.2

On suppose \mathcal{U}_{ad} borné dans \mathcal{U} . Alors le problème (P_1) admet au moins une solution. \square

Ce résultat est une conséquence de la proposition 2.1.

Remarque 2.1

On a pris ici $z_u(t) = \left\| \|C_{y_n}(\cdot, t) - P_{Z_{ad}} C_{y_n}(\cdot, t)\|_Z^2 \right\|$, mais en pratique, on peut choisir arbitrairement $z_u(t)$, sous réserve que $z_u(t) \geq 0$, $z_u(t) = 0$ si et seulement si $C_{y_n}(\cdot, t) \in Z_{ad}$ et $\lim_{u_n} z_{u_n}(t) \geq z_u(t)$ p.p.t, lorsque $u_n \rightarrow u$ dans \mathcal{U} . \square

Remarque 2.2

On peut également pour le problème (P_1) donner la formulation suivante : $I(u)$ peut s'écrire :

$$\text{et (1) } \begin{aligned} I(u) &= \{t \mid z_u(t) > 0\}, \\ M(u) &= \left\| x_{I(u)} \right\|_{L^2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

On retrouve donc un problème de contrôle optimal avec observation de domaine et on peut utiliser les techniques étudiées dans C. Saguez [7]. \square

2- 2. Conditions nécessaires d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous obtenons des conditions nécessaires d'optimalité par rapport à une classe restreinte de contrôles.

Soit \bar{u} une solution du problème (P_1) et $E(\bar{u}) = \{t \in [0, T] ; Cy(\bar{u})(t) \in Z_{ad}\}$.

On considère le problème de contrôle :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{Min } \tilde{J}(u), \\ u \in \mathcal{U}_{ad} ; Cy(u)(t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in E(\bar{u}). \end{cases}$$

Alors \bar{u} est solution du problème (2.5).

(1) On note X_E la fonction caractéristique de l'ensemble E .

On va écrire des conditions d'optimalité pour le problème (2.5).

Si on introduit

$$Lu = Cy(u)(t),$$

$$K = \{z \in L^2(0,T;Z) ; z(t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in E(\bar{u})\},$$

le problème (2.5) s'écrit :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \text{Min } \tilde{J}(u), \\ u \in \mathcal{U}_{ad}, Lu \in K. \end{cases}$$

Le problème (2.6) est convexe. Les solutions \tilde{u} de (2.6) sont donc caractérisées par la condition d'optimalité :

$$(2.7) \quad \partial[\tilde{J}(\tilde{u}) + I_{\mathcal{U}_{ad}}(\tilde{u}) + I_K(L\tilde{u})] \ni 0 \text{ dans } \mathcal{U}'.$$

Sous les conditions :

$$\begin{cases} \tilde{J}(\tilde{u}) \text{ est continue en tout point,} \\ K \text{ est d'intérieur non vide dans } L^2(0,T;Z), \exists u \in \mathcal{U}_{ad} ; Lu \in \overset{\circ}{K}, \end{cases}$$

une expression équivalente à (2.7) est donnée par :

$$(2.8) \quad \nabla \tilde{J}(\tilde{u}) + \partial I_{\mathcal{U}_{ad}}(\tilde{u}) + L^* \partial I_K(L\tilde{u}) \ni 0 \text{ dans } \mathcal{U}'.$$

D'autres conditions peuvent être considérées pour obtenir (2.8).

Remarque 2.3

Si \tilde{J} est nulle, (2.8) est trivialement vérifié. Dans ce cas, si on remplace $\tilde{J}(u)$ par $\frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{U}}^2$ dans (2.5), la solution de (2.5) est encore solution de (P₁) (u n'est pas nécessairement la solution de norme minimale) et (2.7), (2.8) sont alors non triviaux. \square

Remarque 2.4.

Les conditions (2.7), (2.8) n'expriment l'optimalité de \bar{u} que par rapport à la classe restreinte des contrôles vérifiant $Lu \in K$. Elles sont donc incomplètes. \square

2 - 3. Méthodes numériques

2.3.1. Un problème régularisé

Pour $\epsilon > 0$ On introduit le problème régularisé suivant :

$$(2.9)_\epsilon \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J_{1\epsilon}(u), \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \end{array} \right.$$

avec

$$J_{1\epsilon}(u) = \tilde{J}(u) + \int_0^T g_\epsilon(z_u(t)) dt.$$

La fonction $g_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, "approximation de g ", vérifie les hypothèses suivantes :

$$(2.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \text{l'image de } g_\epsilon \text{ est incluse dans } [0,1]. \\ \text{(ii)} \quad g_\epsilon \text{ est une fonction croissante } \forall \epsilon > 0. \\ \text{(iii)} \quad g_\epsilon(x) \rightarrow g(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Remarque 2.5

On peut prendre, par exemple :

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\epsilon+x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $J_{1\epsilon}$ est G-différentiable. La résolution numérique du problème (2.9) peut donc s'effectuer avec des algorithmes du type gradient (ou métrique variable)

avec projection [1]. \square

Proposition 2.3

On suppose \mathcal{U}_{ad} borné dans \mathcal{U} . Alors le problème (2.9) $_{\epsilon}$ admet une solution u_{ϵ} .
Quand $\epsilon \rightarrow 0$, toute valeur d'adhérence faible de $\{u_{\epsilon}\}$ est solution de (P_1) . \square

Démonstration

L'existence d'une solution s'obtient comme dans la démonstration de la proposition 2.2.

Soit \bar{u} une solution de (P_1) et \tilde{u} une valeur d'adhérence faible de $\{u_{\epsilon}\}$. Notons $\bar{z}(t) = z_{\bar{u}}(t)$, $\tilde{z}(t) = z_{\tilde{u}}(t)$, $z_{\epsilon} = z_{u_{\epsilon}}(t)$. Il vient :

$$\tilde{J}(u_{\epsilon}) + \int_0^T g_{\epsilon}(z_{\epsilon}(t)) dt \leq \tilde{J}(\bar{u}) + \int_0^T g_{\epsilon}(\bar{z}(t)) dt,$$

avec (2.10 (iii)), on déduit :

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} [\tilde{J}(u_{\epsilon}) + \int_0^T g_{\epsilon}(z_{\epsilon}(t)) dt] \leq J_1(\bar{u}),$$

et, puisque \tilde{J} est f.s.c.i.,

$$(2.11) \quad \tilde{J}(\tilde{u}) + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T g_{\epsilon}(z_{\epsilon}(t)) dt \leq J_1(\bar{u}).$$

On va utiliser le fait que :

$$(2.12) \quad \tilde{z}(t) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} z_{\epsilon}(t), \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

Soit $\alpha > 0$ et

$$A_{\alpha\epsilon} = \{t \in (0, T) ; z_{\epsilon}(t) \leq \tilde{z}(t) - \alpha\}.$$

L'ensemble $A_{\alpha\epsilon}$ est unique à un ensemble de mesure nulle près et

$$(2.13) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e_{\mathcal{M}}(A_{\alpha\epsilon}) = 0.$$

Or

$$\int_0^T g_\varepsilon(z_\varepsilon(t)) dt = \int_0^T g_\varepsilon(\tilde{z}(t)-\alpha) dt + \int_0^T [g_\varepsilon(z_\varepsilon(t)) - g_\varepsilon(\tilde{z}(t)-\alpha)] dt$$

d'où avec (2.10 (i) (ii)) :

$$\int_0^T g_\varepsilon(z_\varepsilon(t)) dt \geq \int_0^T g_\varepsilon(\tilde{z}(t)-\alpha) dt - \mathcal{M}_\varepsilon(A_{\alpha\varepsilon}),$$

d'où, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, avec (2.10 (iii)) et (2.12) (2.13) :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T g_\varepsilon(z_\varepsilon(t)) dt \geq \int_0^T g(\tilde{z}(t)-\alpha) dt.$$

g étant s.c.i. on vérifie que l'inégalité ci-dessus est encore vraie avec $\alpha = 0$, ce qui joint à (2.11) donne $J_1(\tilde{u}) \leq J_1(\bar{u})$. Donc \tilde{u} est solution de (P_1) . \square

2.3.2. Expression du gradient du critère du problème régularisé

Soit y_ε l'état associé à u_ε et Λ_Z l'isomorphisme canonique de $Z \rightarrow Z'$. On suppose que g'_ε est uniformément bornée sur \mathbb{R} et que C est une application de $L^2(0,T,V) \rightarrow L^2(0,T,Z)$ (ou $L^2(0,T,W) \rightarrow L^2(0,T,Z)$ avec $W = (V,H)_\theta$). Alors l'équation parabolique rétrograde :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dp_u}{dt} + A^* p_u(t) = C^* \Lambda_Z(Cy_u(t) - P_{Z_{ad}}(Cy_u(t))) g'_\varepsilon(z_u(t)), \text{ dans } L^2(0,T,V'), \\ p_u(T) \equiv 0 \text{ dans } H, \end{array} \right.$$

a une solution unique dans $W(0,T)$ et on vérifie que $J_{1\varepsilon}$ est G -différentiable.

De plus :

$$\langle J'_{1\epsilon}(u), v \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \langle \tilde{J}'(u), v \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} + \int_0^T \langle B^* p_u(t), v \rangle_{U; U} dt.$$

La condition nécessaire d'optimalité de (2.9)_ε s'écrit donc :

$$\langle J'_{1\epsilon}(u_\epsilon), v - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \langle \tilde{J}'(u_\epsilon), v - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} + \int_0^T \langle B^* p_{u_\epsilon}(t), v(t) - u_\epsilon(t) \rangle_{U; U} \geq 0,$$

$\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

2.3.3. Exemple 1

On considère l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \\ \lambda \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = h(t) y(0, t), \\ \lambda \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = -h(t) y(1, t), \\ y(x, 0) = y_0(x). \end{array} \right.$$

h est la variable de contrôle, vérifiant $h_m \leq h \leq h_M$. On suppose que C est donnée par : $y \rightarrow y|_\Gamma$ et $Z_{ad} = [y_1, y_2]$

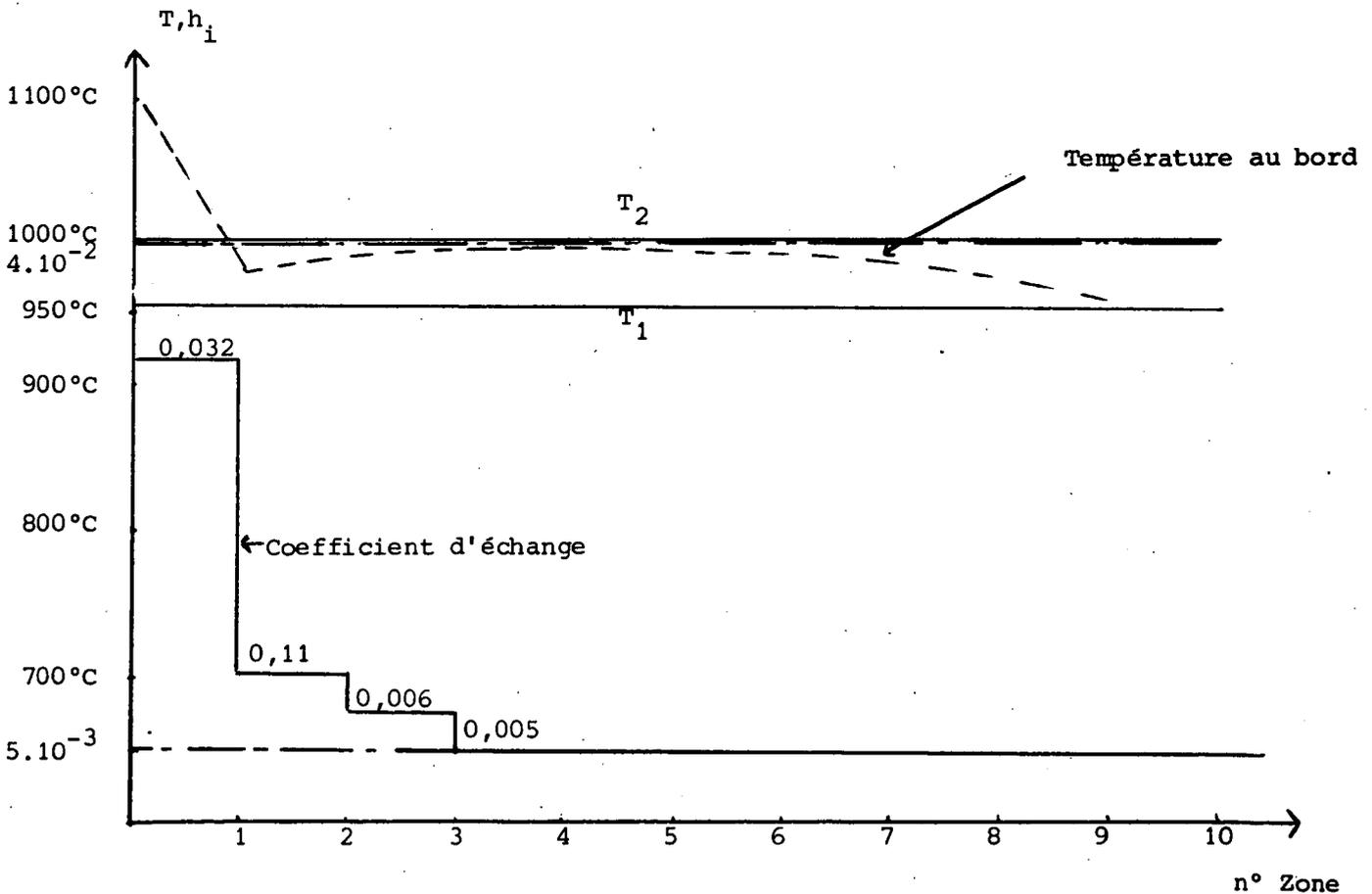
On a pris :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_u(t) = \int_\Gamma [[(y-y_2)^+]^2 + ((y-y_1)^-)^2] dt, \\ g_\epsilon(z) = \frac{z}{\epsilon+z}. \end{array} \right.$$

Les données sont :

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,66 \text{ cal/cm/s/}^\circ\text{C} , \\ \alpha &= 1,216 \text{ cal/cm}^3/\text{}^\circ\text{C} , \\ y_0(x) &= 1100^\circ\text{C} , \\ T &= 10 \text{ s} , \\ y_1 &= 950 \text{ }^\circ\text{C} , \\ y_2 &= 1000 \text{ }^\circ\text{C} , \\ h_m &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ cal/cm}^2 \times \text{ }^\circ\text{C} \times \text{s} . \\ h_M &= 4 \cdot 10^{-2} \text{ cal/cm}^2 \times \text{ }^\circ\text{C} \times \text{s} . \end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants :



On constate que le contrôle optimal permet d'atteindre, en un pas de discrétisation, la zone admissible et de s'y maintenir en autorisant un réchauffement juste à la limite supérieure de 1000°C.

2.3.4. Exemple 2

Soit $Q =]0,1[\times]0,100[$.

On considère l'équation :

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t) + v(x,t), & (x,t) \in Q, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & \forall t \in]0,100[, \\ y(x,0) \equiv 0, \end{cases}$$

avec

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 50, \\ 2 & \text{si } t \geq 50. \end{cases}$$

La solution de (2.1) sera notée $y(v)$. Soit

$$\begin{aligned} Z_{ad} &= \{z \in L^2(0,1) ; z(x) \leq 1, \text{ p.p. } x \in]0,1[\}. \\ \mathcal{U}_{ad} &= \{v \in L^2(Q) ; v(\cdot, t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in]0,t[\}. \end{aligned}$$

Le problème est

$$(2.15) \quad \begin{cases} \text{Max } M_0 \{t \in (0,100) ; y(v,t) \in K\}, \\ v(t) \in \mathcal{U}_{ad}, \text{ p.p. } t \in]0,100[. \end{cases}$$

On note $\|\cdot\|$ la norme de $L^2(0,1)$. Nous définissons le problème régularisé

$$(2.16) \quad \begin{cases} \text{Min } J_\rho(v), \\ v \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

avec

$$J_{\rho}(v) = \int_0^T (1-e^{-\frac{||y(v) - P_{Z_{ad}} y(v)||^2}{\epsilon}}) dt + \rho \int_0^T ||y(v,t) - P_{Z_{ad}}(y(v,t))||^2 dt,$$

où ϵ et ρ sont des petits paramètres ; ϵ est diminué de manière automatique lors de la minimisation de 0,5 à $5 \cdot 10^{-3}$. Nous comparons le résultat avec la solution du problème :

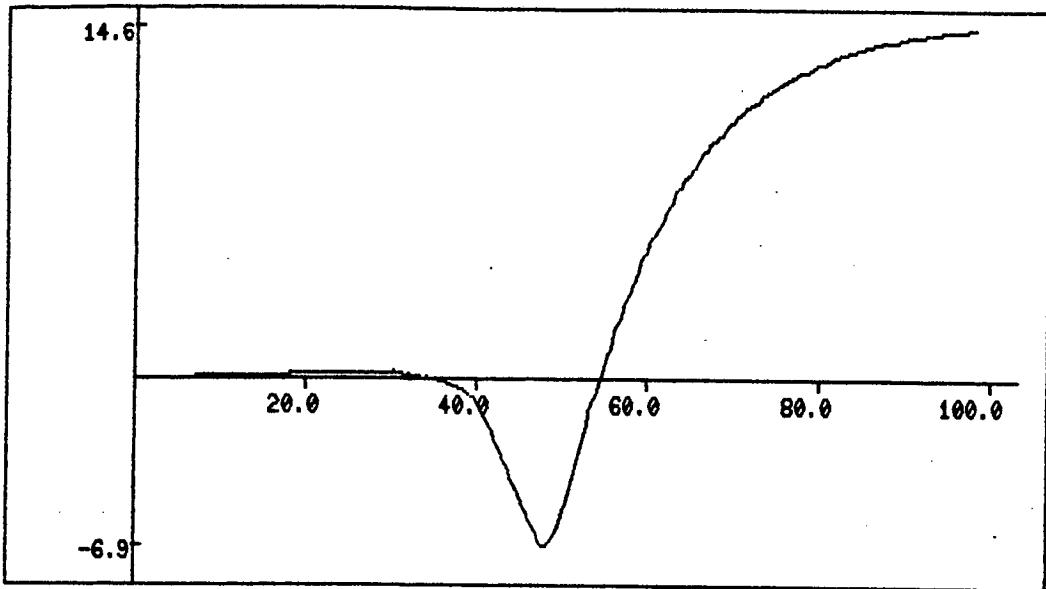
$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \int_0^T ||y(u,t) - P_{Z_{ad}}(y(v,t))||^2 dt \\ v(t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in (0,100). \end{array} \right.$$

La figure 1 représente l'état et le contrôle solution de (2.17) ainsi que la fonction d'erreur

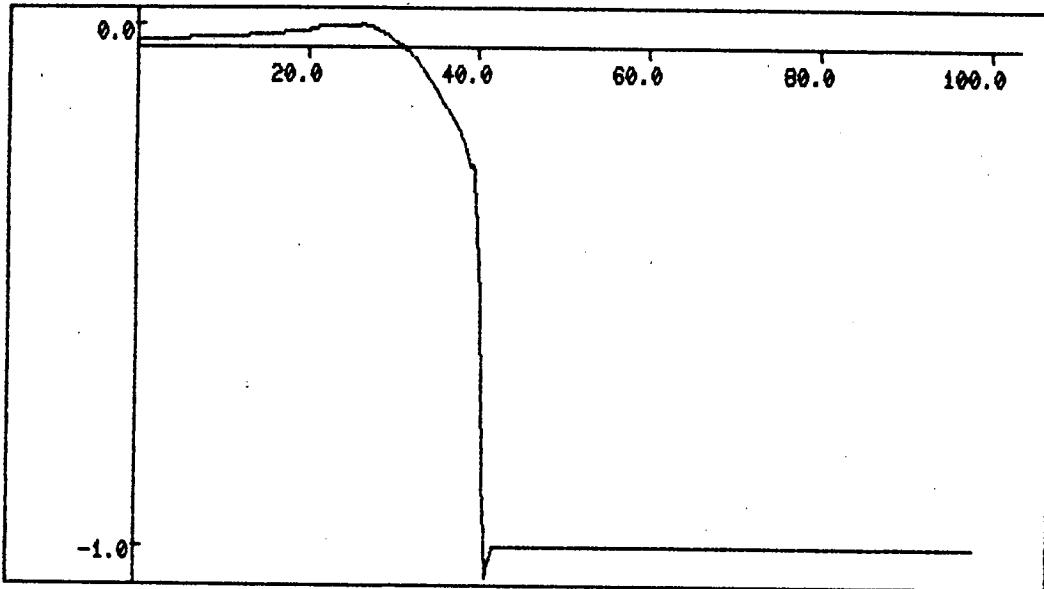
$$e(t) = ||y(t) - P_{Z_{ad}} y(t)||.$$

La figure 2 représente l'estimation de la solution du problème régularisé (2.16) avec $\rho = 10^{-2}$. La fonction d'erreur associée à (2.17) est représentée en pointillés.

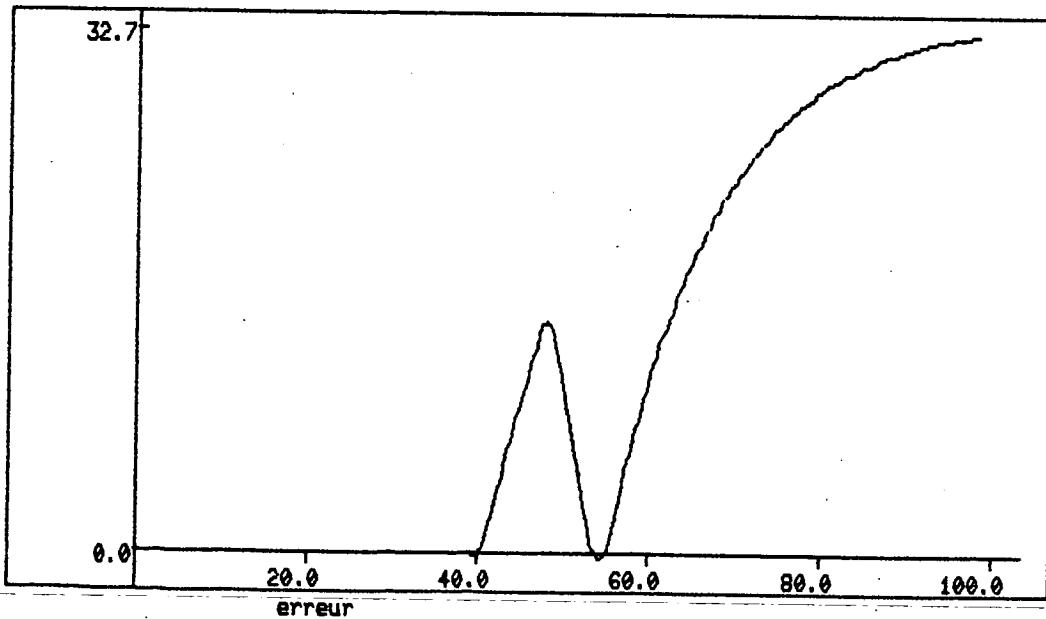
On constate que l'utilisation du problème régularisé (2.16) permet d'obtenir un contrôle meilleur (au sens de (2.15)) que celui qui est solution de (2.17).



etat $y(t, 0.5)$



contrôle $u(t, 0.5)$



erreur

FIGURE 1

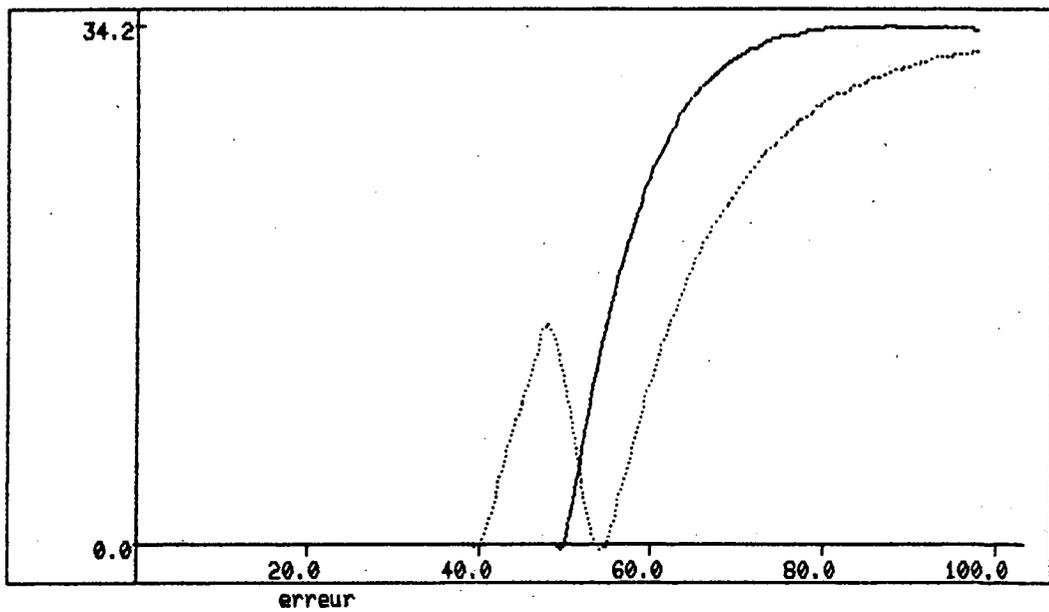
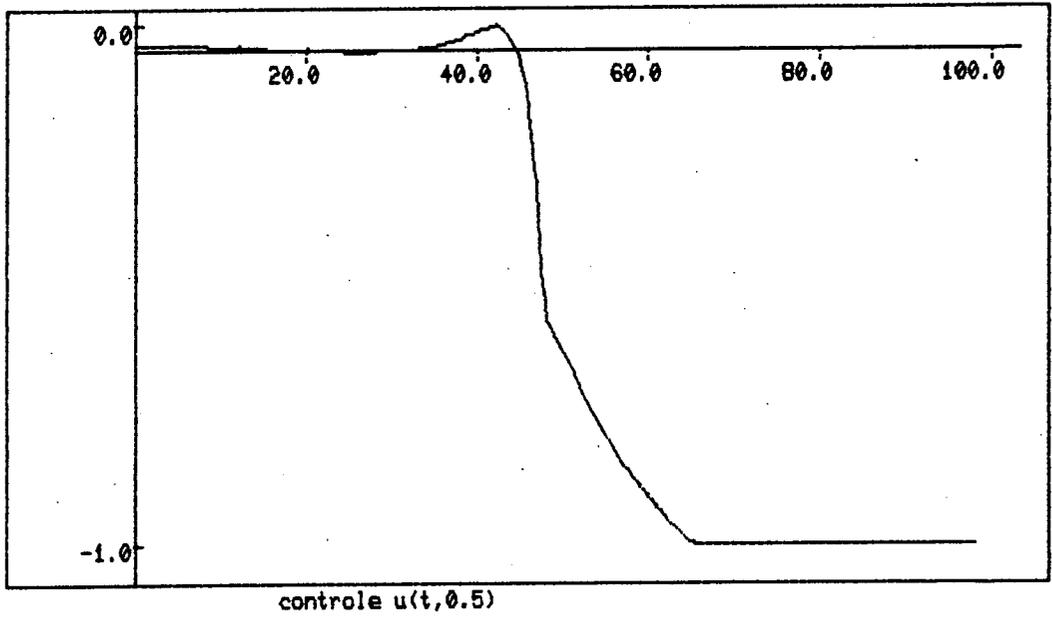
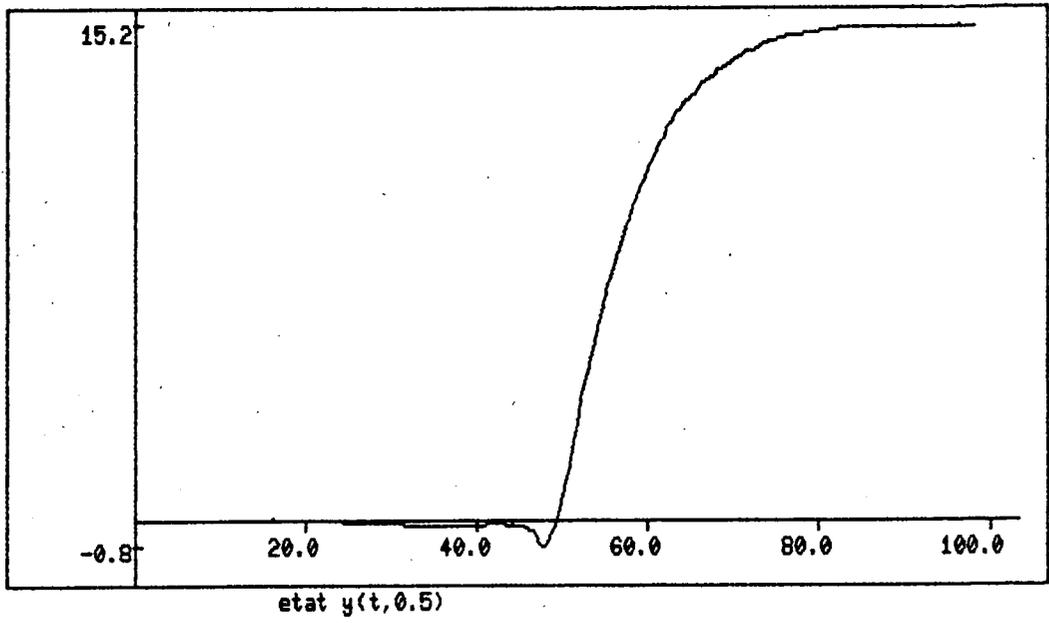


FIGURE 2

2 - 4. Application à un problème de temps optimal

On reprend les notations du paragraphe 1. On définit :

$$t(u) = \sup \{t \in [0, T] ; Cy_u(\sigma) \notin Z_{ad}, \text{ p.p. } \sigma \in (0, T)\},$$

On considère le problème ;

$$(2.18) \quad \begin{cases} \min t(u), \\ u \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$

Le problème (2.18) est un problème de type temps optimal, Z_{ad} étant la cible. Nous allons voir comment les résultats précédents permettent d'obtenir de façon constructive une suite minimisante de (2.18) et donc une méthode numérique de résolution.

Définition 2.1.

On appelle solution généralisée du problème (2.18), un élément $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que, étant donné $\bar{t} = \{\inf t(u), u \in \mathcal{U}_{ad}\}$, il existe une suite $\{u^n\}$ de \mathcal{U}_{ad} telle que $u^n \rightarrow u$ dans \mathcal{U} faible et $t(u^n) \rightarrow \bar{t}$. \square

Considérons la suite $\{t^k, u^k\}$ générée comme suit :

0) Choisir $u^0 \in \mathcal{U}_{ad}$, $k = 0$, $t^0 = t(u^0)$.

1) $k = k+1$.

Calculer u^k , solution du problème :

$$\begin{cases} \text{Max } M_0(I_k(u)), \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

où $I_k(u) = \{t \in (0, t^{k-1}) ; Cy_u(t) \in Z_{ad}\}$.

2) $t^k = \text{Sup} \{t \in [0, t^{k-1}] ; Cy_{u^k}(\sigma) \notin Z_{ad} \text{ p.p. } \sigma \in (0, t)\}$.

Retour en 1). \square

Proposition 2.4

Toute valeur d'adhérence de la suite $\{u^k\}$ générée par l'algorithme précédent est solution généralisée de (4.1). \square

Démonstration

Il faut montrer que $\{u^k\}$ est une suite minimisante de (2.18), donc que $t^k \rightarrow \bar{t}$. Notons que t^k est décroissante. Si $\tilde{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} t^k > \bar{t}$, il existe $\tilde{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que :

$$\alpha = \mathcal{M}_0 \{t \in (0, \tilde{t}) ; Cy_{\tilde{u}}(t) \in Z_{ad}\} > 0.$$

Or nécessairement $t^{k+1} \leq t^k - \mathcal{M}_0(I_k(u))$; donc $\mathcal{M}_0(I_k(u)) \rightarrow 0$, et en particulier $\alpha > \mathcal{M}_0 I_k(u^k)$, $\forall k > k_0$; mais ceci est en contradiction avec la définition de u^k . \square

Remarque 2.6

On déduit de la proposition précédente, des méthodes numériques pour les problèmes de temps optimal. \square

Remarque 2.7

On a un résultat du même type pour le problème :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } t_1(u), \\ u \in \mathcal{U}_{ad}, \end{array} \right.$$

où

$$t_1(u) = \text{sup} \{t \in (0, T] ; Cy_u(\sigma) \in Z_{ad}, \forall \sigma \in (0, t)\}.$$

Notons que (2.19) admet une solution. \square

3 - MAXIMISATION DE LA LONGUEUR UTILISABLE

3 - 1. Existence d'un contrôle optimal

On étudie ici le problème (P₂) du paragraphe 1. On vérifie aisément qu'il existe t₁, t₂ dans [0, T] tels que la quantité δ(u) définie en (1.7) s'écrit δ(u) = t₂ - t₁ et que :

$$(3.1) \quad Cy(u, t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in (t_1, t_2).$$

On notera :

$$\tau(u) = \{(t_1, t_2) \in [0, T] ; \delta(u) = t_2 - t_1 \text{ et (3.1)}\}.$$

Notons que si δ(u) > 0, τ(u) est un ensemble fini.

Proposition 3.1

L'application u → δ(u) est faiblement semi-continue supérieurement (f.s.c.s) de U dans R. □

Démonstration

Soit {uⁿ} une suite d'éléments de U tendant faiblement vers u. Soit (t₁ⁿ, t₂ⁿ) ∈ τ(uⁿ). Il existe une sous-suite, encore indicée par n, telle que (δ(uⁿ), t₁ⁿ, t₂ⁿ) tend vers (δ, t₁, t₂) avec δ = t₂ - t₁. Pour tout ε > 0, il existe n₀ ∈ N tel que, si n > n₀ :

$$Cy(u^n, t) \in Z_{ad}, \text{ p.p. } t \in [t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon], \quad \forall \varepsilon \geq 0. \quad \square$$

La proposition 3.1 permet d'obtenir des théorèmes d'existence pour le problème (P₂). Ainsi :

Proposition 3.2

On suppose J̃ convexe, s.c.i. et U_{ad} borné. Alors le problème (P₂) admet au moins une solution. □

3 - 2. Conditions nécessaires d'optimalité

3.2.1. Introduction

En reprenant les méthodes du paragraphe 2 on peut exprimer l'optimalité d'une solution de (P_2) par rapport à une classe restreinte de contrôles. Le point de vue adopté ici est différent. En supposant une régularité plus grande des données et de la solution optimale, on obtient des conditions d'optimalité plus précises. On étudie d'abord la différentiabilité de l'instant de passage à la frontière du convexe Z_{ad} , puis on en déduit les conditions nécessaires d'optimalité.

3.2.2. Différentiabilité de l'instant de passage à la frontière du convexe Z_{ad}

Soit $u_0 \in \mathcal{U}$ et $t_0 \in]0, T[$ tel que au voisinage de t_0 , $Cy(u_0, t) \in Z_{ad}$ si $t \leq t_0$ et $Cy(u_0, t) \notin Z_{ad}$ si $t > t_0$ (on pourrait considérer le cas symétrique). On étudie dans cette partie l'existence et la régularité de l'application qui, à $v \in \mathcal{U}$ (voisin de u_0), fait correspondre un $t(v)$ voisin de t_0 , tel que $Cy(v, t(v)) \in \partial Z_{ad}$. Dans le but d'exprimer les conditions d'optimalité, on va chercher des conditions suffisantes pour que $v \rightarrow t(v)$ soit G-différentiable.

On suppose que $t_0 \in]0, T[$ et (on note de la même manière la restriction d'une fonction à valeurs dans $[0, T]$ à un sous-ensemble de $[0, T]$)

$$(3.2) \quad \exists \varepsilon > 0 ; Cy(u_0, t) \in C^1(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon, Z).$$

Ceci est vérifié en particulier si

$$(3.3) \quad \exists \alpha > 0 ; f \in H^1(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha; V') \text{ et } u_0 \in H^1(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha; U).$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$C \text{ est telle que si } y \in C^1(t - \varepsilon, t + \varepsilon; H), \text{ alors } z = Cy \in C^1(t - \varepsilon, t + \varepsilon; Z).$$

Le convexe Z_{ad} vérifie :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{Z}_{ad} \neq \emptyset, \\ \text{il existe une application continue } \vec{n} : \partial Z_{ad} \rightarrow Z' \text{ telle que :} \\ \text{pour tout } h \in \partial Z_{ad}, \|\vec{n}(h)\|_Z = 1 \text{ et il existe un voisinage } \mathcal{V}(h) \text{ de} \\ h \text{ dans } Z \text{ et } M_0 > \text{ tels que :} \\ |\langle g - h, \vec{n}(h) \rangle_Z| \leq M_0 \|g - h\|_Z^2, \forall g \in \mathcal{V}(h) \cap \partial Z_{ad}. \end{array} \right.$$

L'hypothèse (3.5) apparait comme une hypothèse de régularité sur ∂Z_{ad} , $\vec{n}(h)$ étant la normale à ∂Z_{ad} en h . On supposera que \vec{n} est la normale extérieure.

Notons $y_0(t) = y(u_0, t)$, $z_0 = Cy_0$, $\vec{n}_0 = \vec{n}(z_0(t_0))$ et $w_0 = \left\langle \frac{dz_0(t_0)}{dt}, \vec{n}_0 \right\rangle_Z$.

On suppose que :

$$(3.6) \quad w_0 \neq 0.$$

Enfin on introduit

$$\mathcal{U}_1 = \{u \in \mathcal{U}; u \in H^1(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha; U)\},$$

\mathcal{U} est muni de sa norme naturelle. Soit $\beta > 0$, on note :

$$\mathcal{B}_1(0, \beta) = \{v \in \mathcal{U}_1; \|v\|_{\mathcal{U}_1} \leq \beta\}.$$

Theorème 3.1.

Sous les hypothèses (3.2), (3.4), (3.5), (3.6) il existe $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $v \in \mathcal{U}_1$ tel que $\|v\|_{\mathcal{U}_1} < \beta$, le problème :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } t \in]t_0 - \gamma, t_0 + \gamma[, \text{ tel que :} \\ y(u_0 + v, t) \in \partial Z_{ad}, \end{array} \right.$$

admet une solution unique notée $t(v)$. L'application $v \rightarrow t(v)$ est G-différentiable dans $\mathcal{B}_1(0, \beta)$ et :

$$\left\langle \frac{dt(u)}{dv}(0), v \right\rangle = - \frac{1}{w_0} \int_0^T \langle B^* p(t), v(t) \rangle_{U, U} dt,$$

où $p \in L^2(0, T; V)$ est solution unique de :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \int_0^T \langle p, \frac{dy}{dt} + Ay \rangle_{V, V} dt = \langle Cy(t_0), \vec{n}_0 \rangle_{Z, Z} \\ \forall y \in W(0, T) ; y(0) = 0. \quad \square \end{cases}$$

Le théorème est démontré par une succession de lemmes.

Lemme 3.1

Sous les hypothèses du théorème 3.1, il existe $\varepsilon > 0$ et $c_1 > 0$ tels que ⁽¹⁾ :

$$|t - t_0| < \varepsilon \implies d(z_0(t), \partial Z_{ad}) \geq c_1 |t - t_0|.$$

Démonstration

Si $g \in \partial Z_{ad}$, on a :

$$(3.9) \quad \begin{cases} \|z_0(t) - g\|_H \geq | \langle z_0(t) - g, \vec{n}_0 \rangle_Z | \\ \geq | \langle z_0(t) - z_0(t_0), \vec{n}_0 \rangle_Z | - | \langle z_0(t_0) - g, \vec{n}_0 \rangle_Z | \end{cases}$$

Par définition

$$w_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \left\langle \frac{z_0(t) - z_0(t_0)}{t - t_0}, \vec{n}_0 \right\rangle,$$

donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, si $|t - t_0| < \varepsilon_1$, on a :

$$| \langle z_0(t) - z_0(t_0), \vec{n}_0 \rangle_Z | \geq \frac{1}{2} |w_0| |t - t_0|.$$

(1) On note $d(., E)$ la distance à l'ensemble E .

D'où, avec (3.9), dont le dernier terme est minoré en utilisant (3.5) :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \varepsilon_1 > 0 \text{ et un voisinage } \mathcal{V}_0 \text{ de } z_0(t_0) \text{ dans } Z, \text{ tels que :} \\ \text{si } |t-t_0| < \varepsilon_1 \text{ et } g \in \mathcal{V}_0 \cap \partial Z_{ad}, \text{ on a pour un } M_0 > 0 : \\ \|z_0(t) - g\|_Z \geq \frac{1}{2} |w_0| |t-t_0| - M_0 \|y_0(t_0) - g\|_Z^2. \end{array} \right.$$

D'autre part, soit $c_2 = 2 \left\| \frac{dz}{dt}(t_0) \right\|_Z$. Il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que, si $|t-t_0| < \varepsilon_2$, on a :

$$\|z_0(t) - z_0(t_0)\|_Z \leq c_2 |t-t_0|,$$

d'où

$$(3.11) \quad \|z_0(t) - g\|_Z \geq \|z_0(t_0) - g\|_Z - c_2 |t-t_0|.$$

D'où avec (3.10), pour $|t-t_0| < \varepsilon_3 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $g \in \mathcal{V}_0 \cap \partial Z_{ad}$, l'inégalité

$$(3.12) \quad \|z_0(t) - g\|_Z \geq \theta(|t-t_0|)$$

où

$$\delta = \|z_0(t_0) - g\|_Z,$$

$$\theta(\alpha) = \max\left(\frac{|w_0|}{2} \alpha - M_0 \delta^2, \delta - c_2 \alpha\right).$$

Les deux fonctions de α ci-dessus sont affines, la première est croissante et l'autre décroissante. Elles sont égales pour

$$\alpha_0 = \frac{\delta + M_0 \delta^2}{\frac{|w_0|}{2} + c_2},$$

et

$$\begin{aligned} \theta(\alpha_0) &= \frac{|w_0|}{|w_0| + 2c_2} (\delta + M_0 \delta^2) - M_0 \delta^2, \\ &= \delta \frac{|w_0| - 2c_2 M_0 \delta}{|w_0| + 2c_2}. \end{aligned}$$

$\theta(\alpha)$ admet donc la minorante affine

$$\theta_1(\alpha) = \frac{\theta(\alpha_0)}{\alpha_0} \alpha = \frac{|w_0| - 2c_2 M_0 \delta}{2(1 + M_0 \delta)} \alpha,$$

En utilisant y et g , sous les hypothèses assurant (3.12), on obtient :

$$\|z_0(t) - g\|_Z \geq \frac{|w_0| - 2c_2 M_0 \|z_0(t_0) - g\|_Z}{2(1 + M_0 \|z_0(t_0) - g\|_Z)} |t - t_0|.$$

Soit $\beta = \inf (1/M_0, |w_0|/(4c_2 M_0))$. Si $g \in \mathcal{U}_0 \cap \partial K$, $\|z_0(t_0) - g\|_Z \leq \beta$ et $|t - t_0| < \varepsilon_3$ on en déduit que :

$$(3.13) \quad \|z_0(t) - g\|_Z \geq \frac{|w_0|}{8} |t - t_0|,$$

ce qui prouve le lemme. \square

Lemme 3.2

Sous les hypothèses du théorème 3.1, il existe $\varepsilon > 0$ et $c_2 > 0$ tels que si $t_1 \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ vérifie $Cy(u, t_1) \in \partial Z_{ad}$, alors :

$$|t_1 - t_0| \leq c_2 \|u - u_0\|_{\mathcal{U}}. \quad \square$$

Démonstration

On vérifie facilement que $d(\cdot, \partial Z_{ad})$ est une fonction contractante donc

$$d(z(u_0, t_1), \partial Z_{ad}) \leq d(z(u, t_1), \partial Z_{ad}) + \|z(u_0, t_1) - z(u, t_1)\|_Z.$$

Si $z(u, t_1) \in \partial Z_{ad}$, en utilisant le lemme 3.1 on en déduit que si $|t_1 - t_0| < \varepsilon_1$:

$$c_1 |t - t_0| \leq \|z(u_0, t_1) - z(u, t_1)\|_Z.$$

Le lemme se déduit alors de la continuité de l'application $u \rightarrow z(u)$ de \mathcal{U} dans $C(0, T; Z)$ et de (3.4). \square

Lemme 3.3

Sous les hypothèses du théorème 3.1, il existe $\epsilon > 0$ et $\beta > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}(0, \beta)$, la relation :

$$(3.14) \quad Cy(u_0 + v, t_1) \in \partial Z_{ad}$$

admet une solution unique dans $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. \square

Démonstration

Supposons que $w_0 > 0$. (le cas $w_0 < 0$ se traitant d'une manière identique). Pour tout $\epsilon > 0$ il existe alors t_1 et t_2 tels que $t_0 - \epsilon < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \epsilon$ et tel que $z(t_1) \in \overset{\circ}{Z}_{ad}$ et $z(t_2) \in Z - Z_{ad}$. L'application $v \rightarrow z(u+v, t)$ étant continue de \mathcal{U} dans Z , et $\overset{\circ}{Z}_{ad}$ et $Z - Z_{ad}$ étant des ouverts de Z , on aura $z(u+v, t_1) \in \overset{\circ}{Z}_{ad}$ et $z(u+v, t_2) \in Z - Z_{ad}$ dès que $\|v\|_{\mathcal{U}}$ est assez petit. Soit alors $\tilde{t} = \sup \{t \in [t_1, t_2] ; z(u+v, t) \in Z_{ad}\}$. Nécessairement $z(u+v, \tilde{t}) \in \partial Z_{ad}$ et (3.14) possède donc une solution.

Vérifions maintenant l'unicité de la solution de (3.14). Supposons que (3.14) a deux solutions t_1 et t_2 . D'après le lemme 3.2, en se restreignant à un voisinage de 0 dans \mathcal{U} , on peut imposer à t_1 et t_2 d'être dans un intervalle du type $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. De plus l'application $v \rightarrow z(u+v, .)$ étant continue de \mathcal{U} dans $C(0, T; Z)$, on a, en notant $z(t) = z(u+v, t)$:

$$\|z(t_1) - z_0(t_0)\|_Z \leq \|z(t_1) - z_0(t_1)\|_Z + \|z_0(t_1) - z_0(t_0)\|_Z$$

$$\leq c_3 \|v\|_{\mathcal{U}} + \|z_0(t_1) - z_0(t_0)\|_Z, \quad i = 1, 2.$$

Le lemme 3.2 et la continuité de $z(t)$ dans Z , impliquant donc qu'on peut imposer l'appartenance de $z(t_1)$ à un voisinage de $z_0(t_0)$ dans Z dès que $v \in \mathcal{U}_2$, voisinage

de 0 dans \mathcal{U} . Ceci permet d'appliquer (3.5). Posons $\vec{n}_1 = \vec{n}(z(t_1))$, alors

$$|\langle z(t_1) - z(t_2), \vec{n}_1 \rangle| \leq M_0 \|z(t_1) - z(t_2)\|_Z^2,$$

pour une constante M_0 convenable. Si de plus $v \in \mathcal{V}_3$, borné de \mathcal{U}_1 , il existe $c_4 > 0$ tel que :

$$\|z(t_1) - z(t_2)\|_Z \leq c_4 |t_2 - t_1|.$$

Donc, avec le lemme 3.2,

$$\|z(t_1) - z(t_2)\|_Z \leq 2c_2c_4 \|v\|_{\mathcal{U}},$$

d'où, si $u \in \mathcal{V}_3 \cap \mathcal{V}_2$, en posant $c_5 = 2c_2c_4M_0$:

$$|\langle z(t_1) - z(t_2), \vec{n}_1 \rangle| \leq c_5 \|v\|_{\mathcal{U}}^2.$$

Divisons par $|t_1 - t_2|$, avec le lemme 3.2, il vient :

$$\left| \left\langle \frac{z(t_1) - z(t_2)}{t_1 - t_2}, \vec{n}_1 \right\rangle \right| \leq \frac{c_5}{c_2} \|v\|_{\mathcal{U}}.$$

L'hypothèse de continuité de \vec{n} dans (3.8) jointe au lemme 3.2 et à la régularité de $u \rightarrow y(u, \cdot)$ permettent de passer à la limite quand $\|v\|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0$, ce qui donne $|w_0| \leq 0$, contraire à l'hypothèse. \square

L'application $v \rightarrow t(v)$ est donc définie univoquement dans un voisinage \mathcal{V}_4 de 0 dans \mathcal{U}_1 . On est maintenant en mesure de prouver le théorème 3.1.

Démonstration du théorème 3.1

Pour étudier la G-différentiabilité, on pose $u_\alpha = u_0 + \alpha v$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathcal{U}_1$. Alors $y(u_\alpha) = y_0(u_0) + \alpha \hat{y}$, où \hat{y} est solution de l'équation linéaire :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{y}}{dt}(t) + A\hat{y}(t) = Bv(t), & t \in]0, T[, \\ \hat{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Notons $z = \mathcal{C}\mathcal{Y}$. D'après les résultats précédents, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $0 < \alpha < \alpha_0$ l'équation $(z_0 + \alpha z)(t) \in \partial Z_{ad}$ admet, au voisinage de t_0 , une solution unique t_α . Puisque $(z_0 + \alpha z)(t)$ est alors dans un voisinage arbitrairement petit de $z_0(t_0)$ dans Z on peut écrire :

$$|\langle (z_0 + \alpha z)(t_\alpha) - z_0(t_0), \vec{n}_0 \rangle| \leq M_0 \| (z_0 + \alpha z)(t_\alpha) - z_0(t_0) \|_Z^2,$$

pour $M_0 > 0$ convenable. En divisant par $|t_\alpha - t_0|$, on obtient :

$$(3.16) \quad \left| \langle \frac{z_0(t_\alpha) - z_0(t_0)}{t_\alpha - t_0}, \vec{n}_0 \rangle + \frac{\alpha}{t_\alpha - t_0} \langle z(t_\alpha), \vec{n}_0 \rangle \right| \leq \\ \leq 2M_0 \left(\frac{\|z_0(t_\alpha) - z_0(t_0)\|_Z^2}{|t_\alpha - t_0|} + \frac{\alpha^2}{|t_\alpha - t_0|} \|z(t_\alpha)\|_Z^2 \right).$$

Etudions d'abord le cas où $\langle z(t_0), \vec{n}_0 \rangle = 0$. Puisque $z \in H^1(0, T; H)$, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\left| \langle \frac{z(t_\alpha)}{t_\alpha - t_0}, \vec{n}_0 \rangle \right| = \left| \langle \frac{z(t_\alpha) - z(t_0)}{t_\alpha - t_0}, \vec{n}_0 \rangle \right| \leq \beta.$$

Passant à la limite dans (3.16) quand $\alpha \rightarrow 0$, il vient alors :

$$|w_0| \leq 2M_0 \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{|t_\alpha - t_0|} \|z(t_\alpha)\|_Z^2 \right).$$

Puisque $|w_0| \neq 0$ et $\alpha \|z(t_\alpha)\|_Z^2 \rightarrow 0$, ceci implique $\frac{\alpha}{|t_\alpha - t_0|} \rightarrow +\infty$, c'est à dire :

$$\frac{dt_\alpha}{d\alpha} (\alpha = 0) = 0.$$

Si au contraire $\langle z(t_0), \vec{n}_0 \rangle_Z \neq 0$, on réécrit (3.16) sous la forme :

$$(3.17) \quad |w_0 + \varepsilon_1(\alpha) + \frac{\alpha}{t_\alpha - t_0} \langle z(t_\alpha), \vec{n}_0 \rangle| \leq 2M_0 \frac{\alpha}{|t_\alpha - t_0|} \|z(t_\alpha)\|_Z^2 + \varepsilon_2(\alpha)$$

où $\varepsilon_1(\alpha)$ et $\varepsilon_2(\alpha)$ sont des fonctions de α tendant vers zéro quand $\alpha \rightarrow 0$.

On obtient alors :

$$\frac{dt}{d\alpha}(\alpha = 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{t_\alpha - t_0}{\alpha} = -\frac{1}{w_0} \langle z(t_0), \vec{n}_0 \rangle .$$

Ceci est encore vrai si $\langle z(t_\alpha), \vec{n}_0 \rangle = 0$, d'après l'étude précédente de ce cas.

Donc :

$$\left\langle \frac{dt(u)}{du} (u_0), v \right\rangle_{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1} = -\frac{1}{w_0} \langle z(t_0), \vec{n}_0 \rangle ,$$

où z est solution de (3.15).

Vérifions que (3.8) a une solution unique. Soit ϕ , l'application continue de $L^2(0, T; V')$ dans $W(0, T)$ définie par :

$$\phi : f \rightarrow y$$

telle que :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = f & \text{dans } L^2(0, T, V'), \\ y(0) \equiv 0. \end{cases}$$

On vérifie que (3.8) équivaut à :

$$\langle p, f \rangle_{L^2(0, T; V), L^2(0, T; V')} = \langle C\phi(f)(t_0), \vec{n}_0 \rangle_{Z, Z'} ,$$

Donc (3.8) a une solution unique p dans $L^2(0, T; V)$. Il vient alors

$$\left\langle \frac{dt(u)}{du} (u_0), v \right\rangle_{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1} = -\frac{1}{w_0} \int_0^T \langle p, B^* v \rangle , \quad \forall v \in \mathcal{U}_1 ,$$

d'où le résultat. \square

3.2.3. Conditions d'optimalité dans le cas d'un contrôle optimal régulier

Soit \bar{u} une solution de (P_2) telle que :

$$d(\bar{u}) = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 ,$$

avec $\bar{y} = y_{\bar{u}}$ vérifiant :

$$\bar{y}(t) \in Z_{ad}, \forall t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2].$$

Nous utilisons l'espace fonctionnel ($\epsilon > 0$ donné) :

$$\hat{\mathcal{U}} = \{v \in \mathcal{U} ; \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} [\|\frac{d}{dt} v(\bar{t}_1 + t)\|_{\mathcal{U}}^2 + \|\frac{d}{dt} v(\bar{t}_2 + t)\|_{\mathcal{U}}^2] dt < +\infty .$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$(3.18) \quad \bar{t}_2 > \bar{t}_1 ,$$

$$(3.19) \quad \bar{z}(t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [\bar{t}_1 - \epsilon, \bar{t}_1 + \epsilon] \text{ et } [\bar{t}_2 - \epsilon, \bar{t}_2 + \epsilon],$$

$$(3.20) \quad \bar{u} \in \hat{\mathcal{U}} \text{ et } (\bar{u} + \hat{\mathcal{U}}) \cap \mathcal{U}_{ad} \text{ est dense dans } \mathcal{U}_{ad}.$$

Définissons :

$$\begin{cases} \vec{n}_i = \vec{n}(\bar{z}(t_i)) \\ w_i = \langle \frac{d\bar{z}}{dt}(t_i), \vec{n}_i \rangle \end{cases} \quad i = 1, 2 .$$

Dans un premier temps, faisons l'hypothèse :

$$(3.21) \quad \bar{z}(t) \in \overset{\circ}{Z}_{ad}, \forall t \in]\bar{t}_1, \bar{t}_2[.$$

Alors

Théorème 3.2

On suppose \tilde{J} convexe, continue, G-différentiable. Sous les hypothèses (3.4)

et (3.5) et (3.18) à (3.21), et si $w_1 w_2 \neq 0$, \bar{u} vérifie :

$$(3.22) \quad \langle \tilde{J}'(\bar{u}), v - \bar{u} \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} + \int_0^T \langle B^* \bar{p}(t), v(t) - \bar{u}(t) \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

où $\bar{p} \in L^2(0, T, V)$ est solution unique de :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\bar{p}(t)}{dt} + A^* \bar{p}(t) = \frac{1}{w_1} \delta(t_1) \vec{n}_1 - \frac{1}{w_2} \delta(t_2) \vec{n}_2 \text{ dans } \mathcal{D}(0, T; V'), \\ \bar{p}(t) \equiv 0 \text{ sur }]t_2, T[. \end{array} \right.$$

Démonstration

Posons

$J(u) = \tilde{J}(u) + I \mathcal{U}_{ad}$. Par définition de \bar{u} , il vient, pour ε assez petit

$$J(\bar{u} + v) - (t_2(\bar{u} + v) - t_1(\bar{u} + v)) \geq J(\bar{u}) - (\bar{t}_2 - \bar{t}_1),$$

pour tout $v \in B_{\mathcal{U}}(0, \varepsilon_1)$, $(t_i(\bar{u} + v))$, $i = 1, 2$, étant définis de manière unique

d'après le théorème 3.1). En changeant v en σv et en passant à la limite, on en déduit, p étant solution de (3.23) :

$$J(v) - J(\bar{u}) + \int_0^T \langle B^* \bar{p}(t), v(t) - \bar{u}(t) \rangle_{U^*U} dt \geq 0, \forall v \in B_{\mathcal{U}}(\bar{u}, \varepsilon_1) \cap \mathcal{U}_{ad}.$$

L'inégalité reste vraie pour tout v de $\hat{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}_{ad}$, et donc, d'après (3.20) pour tout $v \in \mathcal{U}_{ad}$. On en déduit (3.22). \square

Étudions maintenant le cas où (3.20) n'est pas vérifiée. Si $\bar{t}_2 > \bar{t}_1$, et si $w_1 \neq 0$ et $w_2 \neq 0$, on montre facilement avec (3.5) qu'il existe \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 tels que :

$$(3.24) \quad \bar{t}_1 < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \bar{t}_2,$$

$$(3.25) \quad y(\bar{u}, t) \in \overset{\circ}{Z}_{ad} \text{ si } t \in]\tilde{t}_1, \tilde{t}_1[\text{ ou } t \in]\tilde{t}_2, \tilde{t}_2[.$$

Notons

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{U}; y(u, t) \in Z_{ad}, \forall t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]\}.$$

Alors si :

$$(3.26) \quad \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{K} \text{ est dense dans } \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{K}$$

on a le résultat :

Théorème 3.3

Sous les hypothèses (3.4), (3.5), (3.18) à (3.20) et (3.26), si \tilde{J} est convexe, continue, G-différentiable,, $w_1 \neq 0$ et $w_2 \neq 0$, \bar{u} vérifie :

$$\langle \tilde{J}'(u), v-u \rangle_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} + \int_0^T \langle B^* \bar{p}(t), v(t) - \bar{u}(t) \rangle_{U, U} dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \cap \mathcal{K}$$

où \bar{p} est solution de (3.21). \square

Démonstration

La démonstration est identique à celle du théorème 3.2, la condition $v \in \mathcal{K}$ servant à imposer la relation $d(v) = t_2(v) - t_1(v)$. \square

3 - 4. Méthode numérique

La fonctionnelle $u \rightarrow \delta(u)$ n'est pas continue (à moins d'imposer certaines contraintes sur l'état) et le choix d'une méthode pour la résolution numérique du problème 2 n'est donc pas trivial. Voici une méthode fondée sur la régularisation du problème.

3.4.1. Une méthode de pénalisation

Soit le problème de contrôle suivant :

- le contrôle est $(u, t_1, t_2) \in \bar{\mathcal{U}} \times [0, T]^2$,
- $y(u)$ désigne la solution de (1.1).

Le problème est :

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J_1(u) - (t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} I_{Z_{ad}}(Cy_u(t)) dt, \\ \text{sous les contraintes } u \in \mathcal{U}_{ad}; (t_1, t_2) \in [0, T]^2, \end{array} \right.$$

où $I_{Z_{ad}}$ désigne la fonction indicatrice du convexe Z_{ad} , et le dernier terme du critère revient à imposer la contrainte $Cy(u, t) \in Z_{ad}$ p.p. $t \in [t_1, t_2]$. Les problèmes (P_2) et (3.27) sont donc équivalents au sens où

$$\{ \bar{u} \text{ solution de } (P_2) \} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\bar{t}_1, \bar{t}_2) \in [0, T]; (\bar{u}, \bar{t}_1, \bar{t}_2) \text{ est} \\ \text{solution de (3.27)}. \end{array} \right.$$

On a alors $d(\bar{u}) = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$.

La formulation (3.27) suggère l'approximation suivante : soit $\varepsilon > 0$, on définit le problème :

$$(3.27)_\varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \tilde{J}(u) - (t_2 - t_1) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \|(I - P_{Z_{ad}})(Cy_u(t))\|_2^2 dt, \\ u \in \mathcal{U}_{ad}, (t_1, t_2) \in [0, T]^2. \end{array} \right.$$

Pour simplifier l'étude on supposera que :

$$(3.28) \quad \mathcal{U}_{ad} \text{ est borné dans } \mathcal{U}.$$

Alors on a le résultat :

Théorème 3.4

(i) Pour ε donné le problème (3.27) $_\varepsilon$ admet, sous l'hypothèse (3.28), au moins une solution $(u_\varepsilon, t_{1\varepsilon}, t_{2\varepsilon})$.

(ii) Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, toute valeur d'adhérence faible de $(u_\varepsilon, t_{1\varepsilon}, t_{2\varepsilon})$, soit $(\bar{u}, \bar{t}_1, \bar{t}_2)$, est solution de (3.27). \square

Démonstration

(1) Une suite minimisante du problème $(3.27)_\varepsilon$, (u_n, t_1^n, t_2^n) est bornée et il existe donc (\bar{u}, t_1, t_2) tel que :

$$u^n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{dans } \mathcal{U} \text{ faible,}$$

$$(t_1^n, t_2^n) \rightarrow (t_1, t_2) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Donc, pour $n > n_0$ et $\alpha > 0$ "petit" avec $y^n = y_{u^n}$, on a :

$$\int_{t_1+\alpha}^{t_2-\alpha} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy^n(t)) \right\|_Z^2 dt \leq \int_{t_1^n}^{t_2^n} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy^n(t)) \right\|_Z^2 dt,$$

Le terme de gauche étant f.s.c.i., il vient quand $n \rightarrow \infty$:

$$(3.29) \quad \int_{t_1+\alpha}^{t_2-\alpha} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy^n(t)) \right\|_Z^2 dt \leq \liminf \int_{t_1^n}^{t_2^n} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy^n(t)) \right\|_Z^2 dt.$$

Par continuité (3.29) reste également vraie pour $\alpha = 0$. On en déduit que le critère du problème $(3.27)_\varepsilon$ est f.s.c.i. et que (\bar{u}, t_1, t_2) est donc solution de $(3.27)_\varepsilon$.

(ii) $(u_\varepsilon, t_{1\varepsilon}, t_{2\varepsilon})$ étant solution de $(3.26)_\varepsilon$, on a facilement :

$$J_1(u_\varepsilon) - (t_{2\varepsilon} - t_{1\varepsilon}) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_{1\varepsilon}}^{t_{2\varepsilon}} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy(u_\varepsilon, t)) \right\|_Z^2 dt$$

$$\leq J_1(\bar{u}) - (\bar{t}_2 - \bar{t}_1),$$

où $(\bar{u}, \bar{t}_1, \bar{t}_2)$ est solution de (3.26). Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient :

$$\int_{t_{1\varepsilon}}^{t_{2\varepsilon}} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy_u(t)) \right\|_Z^2 dt \leq c_1 \varepsilon,$$

pour $c_1 > 0$ convenable. Si $(t_{1\varepsilon}, t_{2\varepsilon}) \rightarrow (t_1, t_2)$, on en déduit que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_{t_1+\alpha}^{t_2-\alpha} \left\| (I - P_{Z_{ad}})(Cy_u(t)) \right\|_Z^2 dt \leq c_6 \varepsilon,$$

et si $u_\epsilon \rightarrow u$ on en déduit que $Cy_u(t) \in Z_{ad}$, p.p. $t \in [t_1, t_2]$, d'où la conclusion. \square

Remarque 3.1

Le critère de (3.27) $_\epsilon$ est une fonction continue de (u, t_1, t_2) et, dans le cas où C est l'injection canonique de $W(0, T)$ dans $C(0, T, H)$, ce critère est même différentiable, ce qui permet d'envisager la résolution numérique de (3.27) $_\epsilon$ par des méthodes classiques (gradient avec projection). Dans ce dernier cas, les conditions d'optimalité ont une forme très simple :

Proposition 3.3

Si $(u_\epsilon, t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon})$ est solution de (3.27) $_\epsilon$, si $Z = H$ et si C est l'injection canonique $W(0, T) \rightarrow C(0, T, H)$ alors $(u_\epsilon, t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon})$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité (si $t_{2\epsilon} > t_{1\epsilon}$) :

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \|(I - P_{Z_{ad}}) y(u_\epsilon, t_2)\|_H^2 = 2\epsilon & \text{si } t_2 > T, \\ \text{ou} \\ \|(I - P_{Z_{ad}}) y(u_\epsilon, T)\|_H^2 \leq 2\epsilon & \text{si } t_2 = T ; \end{array} \right.$$

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \|(I - P_{Z_{ad}}) y(u_\epsilon, t_1)\|_H^2 = 2\epsilon & \text{si } t_1 > 0, \\ \text{ou} \\ \|(I - P_{Z_{ad}}) y(u_\epsilon, 0)\|_H^2 \leq 2\epsilon & \text{si } t_1 = 0 ; \end{array} \right.$$

$$(J'_1(u_\epsilon), v - u_\epsilon)_{\mathcal{U}} + \frac{1}{\epsilon} \int_{t_{1\epsilon}}^{t_{2\epsilon}} \langle B^* p_\epsilon, v(t) - u_\epsilon(t) \rangle_{U; U} dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

où $p_\epsilon \in W(0, T)$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dp_\epsilon}{dt}(t) + A^* p_\epsilon(t) = \chi_{[t_{1\epsilon}, t_{2\epsilon}]}(t) \times (y(u_\epsilon, t) - P_{Z_{ad}} y(u_\epsilon, t)), t \in [0, T], \\ p_\epsilon(T) = 0, \end{array} \right.$$

avec

$$X_{[t_{1\varepsilon}, t_{2\varepsilon}]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_{1\varepsilon}, t_{2\varepsilon}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

La vérification est immédiate. \square

Les relations (3.29) et (3.30) étant simples, la minimisation de

$$J_\varepsilon(u, t_1, t_2) = J_1(u) - (t_2 - t_1) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \left\| (I - P_{Z_{ad}}) y(u, t) \right\|_H^2 dt$$

à u donné par rapport à (t_1, t_2) est aisée. Le problème (3.27) $_\varepsilon$ peut donc être résolu en alternant des pas de minimisation globale en (t_1, t_2) avec des pas de gradient avec projection sur u . Ceci évite de garder comme variable le triplet hétérogène (u, t_1, t_2) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.P. BERTSEKAS (1976). On the Goldstein-Levitin-Polyak gradient projection method. IEEE Trans. AC 21, p. 174-183.
- [2] J.F. BONNANS, E. CASAS (à paraître). Contrôle de systèmes non linéaires comportant des contraintes distribuées sur l'état. Rapport INRIA.
- [3] I. EKELAND, R. TEMAM (1974). Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, Gauthier-Villars, Paris.
- [4] M. LARRECQ, J.P. BIRAT, C. SAGUEZ, J. HENRY (1982). Optimization of casting and cooling conditions on steel continuous casters. Implementation of optimal strategies on slab and bloom casters. (3^{re} P.T.D. Conf.).
- [5] J.L. LIONS (1968). Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Gauthiers-Villars.
- [6] C. SAGUEZ (1980). Contrôle optimal de systèmes à frontière libre. Thèse U.T.C. Compiègne.

