



**HAL**  
open science

# Étude mathématique des modes élastiques guides par l'extérieur d'une cavité cylindrique de section arbitraire

Alain Bamberger, Patrick Joly, Michel Kern

► **To cite this version:**

Alain Bamberger, Patrick Joly, Michel Kern. Étude mathématique des modes élastiques guides par l'extérieur d'une cavité cylindrique de section arbitraire. RR-0650, INRIA. 1987. inria-00075903

**HAL Id: inria-00075903**

**<https://inria.hal.science/inria-00075903v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

**IRIA**

UNITÉ DE RECHERCHE  
IRIA-ROQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105

78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tel. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 650

**ÉTUDE MATHÉMATIQUE  
DES MODES ÉLASTIQUES  
GUIDÉS PAR L'EXTÉRIEUR  
D'UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE  
DE SECTION ARBITRAIRE**

**Alain BAMBERGER  
Patrick JOLY  
Michel KERN**

Mars 1987

ETUDE MATHEMATIQUE DES MODES ELASTIQUES  
GUIDES PAR L'EXTERIEUR D'UNE CAVITE  
CYLINDRIQUE DE SECTION ARBITRAIRE

---

PROPAGATION OF ELASTIC SURFACE  
WAVES ALONG A CYLINDRICAL CAVITY  
OF ARBITRARY CROSS SECTION

A. BAMBERGER <sup>1,2</sup>  
P. JOLY <sup>1</sup>  
M. KERN <sup>1</sup>

1 Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.  
2 Centre de Mathématiques appliquées. Ecole Polytechnique.

## RESUME

La propagation d'ondes élastiques guidées par la surface libre d'un cylindre, de section arbitraire, est formulée comme un problème de valeurs propres pour un opérateur auto adjoint non borné.

Nous montrons l'existence d'une suite de valeurs propres, dont les deux premières existent pour toutes valeur du nombre d'onde, alors que les autres ne se propagent qu'au delà d'un certain "nombre d'onde seuil". Nous montrons également que pour tout nombre d'onde fixé, il n'existe qu'un nombre fini de modes.

## ABSTRACT

The propagation of elastic surface waves, guided by the stress free surface of a cylinder of general cross section is formulated as an eigenvalue problem for an unbounded self adjoint operator.

We prove the existence of a hierarchy of guided modes. Two of them propagate for any value of the wave number, whereas all the others only exist beyond a "threshold wave number". For any fixed value of the wave number, there only exist a finite number of modes.

## MOTS CLES

Ondes guidées - Ondes élastiques - Opérateur auto-adjoint - Principe du Min-Max.

## KEY WORDS

Elastic surface waves - Self adjoint operator - Min-Max Principle.

## INTRODUCTION

L'existence d'une onde se propageant à la surface libre d'un demi espace élastique est connue depuis les travaux de Lord Rayleigh ([20]) en 1885. Les propriétés de cette onde, capitale en seismologie ont été étudiées par de nombreux auteurs (en particulier MIKLOWITZ [15], ACHENBACH [2] et les références de ces ouvrages).

De façon générale, une onde de surface est guidée par la surface libre d'un corps, et son amplitude décroît exponentiellement avec la distance à la surface.

Une idée naturelle est de s'intéresser à l'existence de telles ondes à l'extérieur d'une cavité cylindrique plongée dans un milieu infini, élastique et homogène. Le cas d'une cavité de section circulaire a été étudié par BIOT [5] qui s'est intéressé à la propagation du mode axisymétrique. Toujours dans le cas circulaire, MINDLIN [16] a établi que la vitesse de tout mode guidé s'approche de la vitesse de l'onde de Rayleigh à haute fréquence. L'étude complète du guide circulaire n'a été réalisée que récemment par BOSTRÖM et al. [6], qui ont mis en évidence l'existence d'une suite de modes propres. Chacun de ces modes, à l'exception d'un mode de flexion (voir partie I), possède une fréquence de coupure en deçà de laquelle il ne se propage pas.

Dans le cas d'un guide de section quelconque, nous pouvons citer WILSON et MORISSON [23] pour une analyse à haute fréquence, et également l'article de BURDEN [7]. Ce dernier propose une méthode de calcul valable pour une géométrie quelconque. Il généralise qualitativement les résultats obtenus dans le cas du cercle. Certains problèmes inhérents au calcul numérique ne sont pas résolus par ces travaux. En particulier, le comportement à basse fréquence des modes, et l'existence ou non d'une fréquence de coupures pour chaque mode n'est pas éclaircie.

Dans ce travail, notre but est d'étudier, sur un plan théorique, ces modes guidés. Nous établirons leur existence et discuterons leurs propriétés.

Contrairement aux calculs menés par les mécaniciens (par ex. BURDEN [7] ), nous considérerons le nombre d'onde fixé, et considérerons la fréquence comme inconnue. Cette même démarche a été adoptée par BAMBERGER et BONNET [3,4] dans l'étude des modes guidés d'une fibre optique. Nous montrerons alors que le problème se ramène à la détermination des valeurs propres d'un opérateur autoadjoint, non borné (et à résolvante non compacte). L'outil essentiel de ce travail est naturellement la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints.

Si les phénomènes de guide d'ondes jouent un rôle important dans d'autres domaines de la physique (tout particulièrement dans les fibres optiques), il convient de signaler que les ondes de surface sont un phénomène spécifique à l'élastodynamique. Dans les autres domaines de la physique, les ondes ne peuvent être guidées que par des hétérogénéités, ce qui se traduit par des variations de coefficients dans les équations.

En effet, dans le cas des fibres optiques (cf. par ex. MARCUSE [14]), le guidage ne peut avoir lieu que si l'indice du coeur est supérieur à celui de la gaine; il est donc provoqué par un contraste de coefficients. Le problème que nous posons est un problème extérieur, en milieu homogène, avec condition de type Neumann (contrainte normale nulle sur le bord). Il est facile de vérifier que le problème correspondant pour l'opérateur de Laplace, ou pour le système de Maxwell, n'admet pas de solutions qui soit de carré sommable. Enfin, et nous reviendrons sur ce point, c'est bien la condition de surface libre qui rend possible le guidage : le même problème avec déplacements nuls sur le bord (bord encastré), n'admet pas d'ondes guidées.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans la première partie, nous présentons le modèle physique et les principales notations. Nous donnons une description plus complète du guide circulaire dans la seconde partie.

Dans une troisième partie, nous donnerons au problème un cadre mathématique adapté. Nous donnerons différentes expressions de la forme bilinéaire associée à l'opérateur de l'élastodynamique, ainsi que ses principales propriétés.

Nous étudierons le spectre de cet opérateur dans la quatrième partie. Nous y rappelons les principales notions de théorie spectrale dont nous aurons besoin. Nous déterminerons alors le spectre essentiel de l'opérateur et donnerons un encadrement des valeurs propres.

Les résultats les plus importants de l'étude se trouvent dans la cinquième partie : nous caractérisons les valeurs propres par le principe du Min-Max, et mettons en évidence leurs seuils d'apparition.

Ces seuils sont étudiés dans la sixième partie, où nous montrons qu'ils croissent indéfiniment, et qu'ils sont solutions d'un problème de valeurs propres généralisé.

Enfin, dans une septième partie, nous donnerons quelques éléments concernant le comportement à haute fréquence des modes propres.

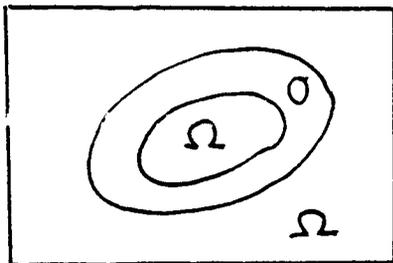
## I - POSITION DU PROBLEME

Nous considérons un ouvert  $O \subset \mathbb{R}^2$ , borné et régulier, et le complémentaire de  $\bar{O}$  noté  $\Omega$ .

Notons  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$ , que nous supposons de classe  $C^1$ . Cette hypothèse est sans doute loin d'être optimale, et nous indiquerons sur chaque résultat s'il nous semble possible de l'affaiblir.

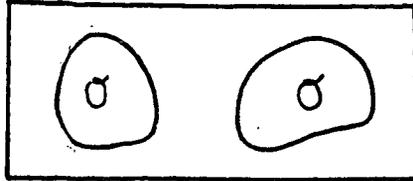
D'autre part, nous ferons l'hypothèse suivante :

- chaque composante connexe de  $O$  est simplement connexe, ce qui équivaut,  $O$  étant borné, à  $\Omega$  connexe. Nous reviendrons ultérieurement sur cette hypothèse, dont on verra qu'elle n'est pas aussi artificielle qu'il y paraît. Signalons simplement qu'elle vise à exclure la situation suivante :

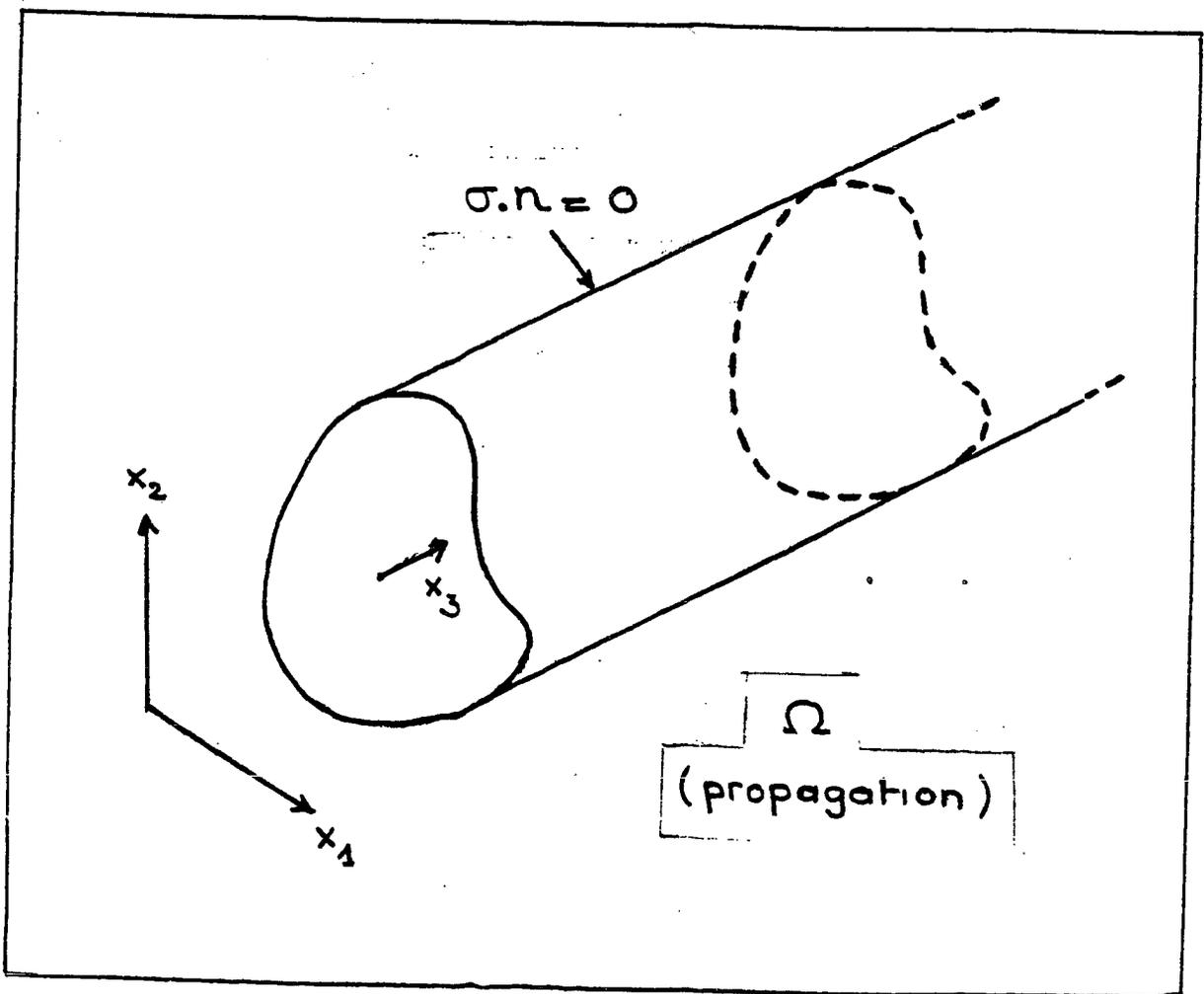


Ici les problèmes intérieur et extérieur sont découplés.

Elle autorise, par contre les cas où l'obstacle  $O$  ne serait pas connexe; par exemple, la situation suivante :



En réalité,  $O$  est la trace dans le plan  $(x_1, x_2)$  d'un cylindre  $O \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ , de génératrices parallèles à  $Ox_3$



REGULARITE DE L'OUVERT  $\Omega$  - AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Dans toute la suite, nous supposerons que l'ouvert  $\Omega$  vérifie l'hypothèse minimale suivante :

- $\Omega$  est un ouvert lipschitzien localement d'un seul côté de sa frontière ( $\Gamma$ ).

Mathématiquement, cela peut se traduire de la manière suivante (la frontière ( $\Gamma$ ) étant compacte) : ([11],[25])

- Il existe  $(n+1)$  ouverts  $\{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n\}$  tels que :

- $\Omega_j$  est borné pour  $1 \leq j \leq n$

- $\Omega \subset \Omega_0 \cup \left( \bigcup_{j \geq 1} \Omega_j \right)$  ;  $\Omega_0 \cap \Gamma = \emptyset$  ;  $\Gamma \subset \bigcup_{j \geq 1} \Omega_j$

- $\Gamma_j = \Gamma \cap \Omega_j$  peut se représenter dans un certain système d'axes  $\mathcal{R}_j$  lié à  $\Omega_j$  (c'est-à-dire après translation et rotation) par :

$$\Gamma_j = \{(x_1, x_2) / x_2 = f_j(x_1), |x_1| < a_j\}$$

où la fonction  $f_j(x_1)$  appartient à l'espace  $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  (ce qui traduit que la frontière  $\Gamma$  est lipschitzienne) telle que  $f_j(0) = 0$ .  
(Un tel choix est toujours possible grâce à une translation)

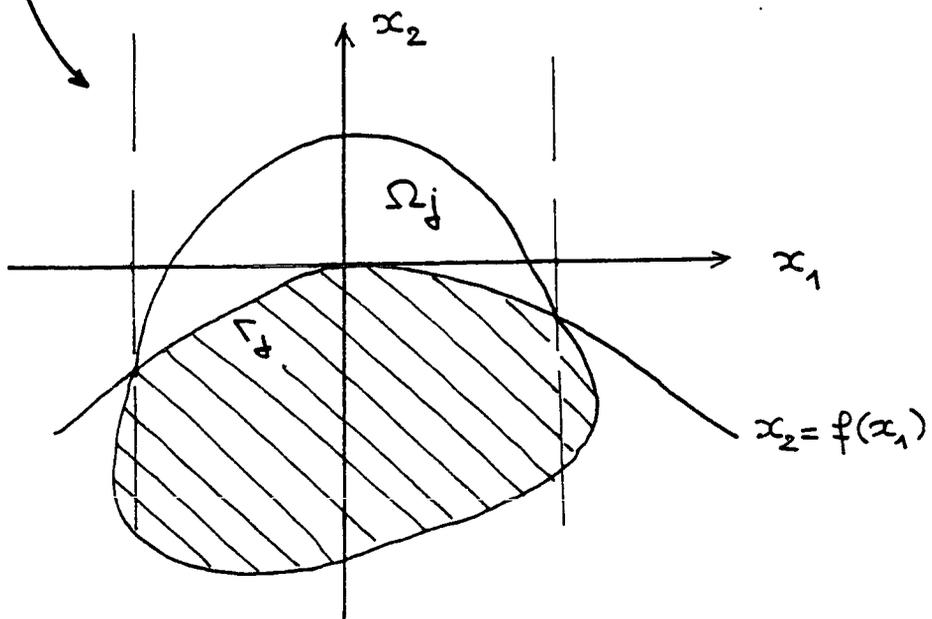
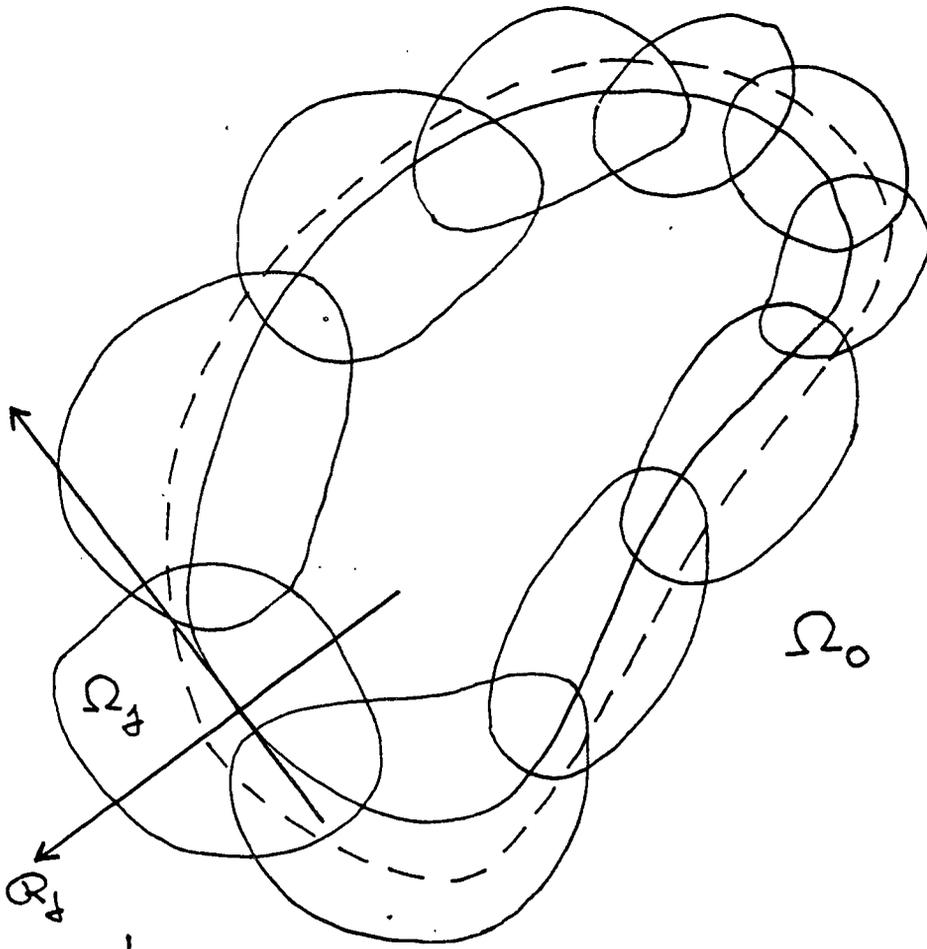
- L'ouvert  $\Omega_j$  peut se représenter, dans le repère local  $\mathcal{R}_j$  par :

$$\Omega_j \cap \Omega = \{(x_1, x_2) / x_2 > f_j(x_1), |x_1| < a_j\}$$

(ce qui traduit le fait que  $\Omega$  est localement d'un seul côté de  $\Gamma$ ).

Nous dirons que la famille  $\{\mathcal{R}_j, f_j, a_j\}_{1 \leq j \leq n}$  définit un système de cartes locales pour  $\Omega$ .

Nous illustrons sur la figure ci-dessous les notions introduites plus haut.



De façon plus générale, nous dirons que (pour  $k \geq 1$ ) :

- l'ouvert  $\Omega$  est de classe  $C^k$  (par morceaux) si chacune des fonctions  $f_j(x_1)$  est de classe  $C^k$  (par morceaux) sur  $\mathbb{R}$ ;
- l'ouvert  $\Omega$  est localement de classe  $C^k$  si l'une au moins des fonctions  $f_j(x_1)$  est de classe  $C^k$ .

Remarques :

Lorsque l'ouvert est de classe  $C^1$ , on peut toujours se ramener (moyennant une translation et une rotation convenables) au cas où :

$$f_j(0) = f'_j(0) = 0 .$$

Un ouvert de classe  $C^1$  ne peut présenter de coins. Par contre, un ouvert localement de classe  $C^\infty$  autorise l'existence de coins.

Avertissement au lecteur

Dans la suite, et nous pensons essentiellement au chapitre 5, nous indiquerons avant l'énoncé de chaque résultat la régularité requise pour l'ouvert  $\Omega$ . Nous ferons pour cela référence aux définitions précisées ci-dessus. Les hypothèses que nous indiquerons ne sont sans doute pas optimales mais néanmoins physiquement raisonnables. Ce sont les hypothèses pour lesquelles nous savons démontrer le résultat.

Nous nous plaçons dans les hypothèses de l'élastodynamique linéaire, dans un milieu homogène et isotrope. Ce milieu est caractérisé par ces coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et sa densité  $\rho$ .  $(\rho, \lambda, \mu)$  sont des constantes strictement positives. Nous définissons également les vitesses :

$$(1.1) \quad \left| \begin{array}{ll} v_P = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2} & : \text{ vitesse des ondes P} \\ v_S = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2} & : \text{ vitesse des ondes S} \end{array} \right.$$

Rappelons également que, à partir des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , on définit le coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$\nu$  ne dépend que du rapport  $V_S/V_P$  et reste compris, strictement, entre 0 et  $\frac{1}{2}$ .

Dans la suite, nous supposons le cylindre extérieur  $\Omega \times \mathbb{R}$  occupé par le matériau élastique, le cylindre intérieur  $0 \times \mathbb{R}$  étant composé de vide.  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  désignera le point courant de  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  et  $x = (x_1, x_2)$  celui de  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout  $x$  dans  $\Omega$ , on définira alors le vecteur déplacement de la particule matérielle occupant la position  $(x, x_3)$  à l'instant  $t$  par :

$$U(x_1, x_2, x_3, t) = (U_1(x_1, x_2, x_3, t), U_2(x_1, x_2, x_3, t), U_3(x_1, x_2, x_3, t)).$$

Nous considérons des champs de déplacements de la forme :

$$U_j(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{u}_j(x_1, x_2) e^{i(\omega t - \beta x_3)} \quad j = 1, 2, 3$$

qui représente un champ harmonique en temps, de pulsation  $\omega$ , se propageant dans la direction  $x_3$  avec le nombre  $\beta$ . Une telle onde se propage avec la vitesse de phase :

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

et son amplitude  $\tilde{u}$  est invariante le long des génératrices du cylindre (nous supposons  $\beta$  réel).

A un tel champ de déplacement est associé un tenseur des déformations,  $\varepsilon^\beta(\tilde{u})$  :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}^\beta(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_i} \right) \quad i = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_{i3}^\beta(\tilde{u}) = \varepsilon_{3i}^\beta(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_i} - i\beta \tilde{u}_i \right) \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon_{33}^\beta(\tilde{u}) = -i\beta \tilde{u}_3 \end{array} \right.$$

Le tenseur des contraintes correspondant,  $\sigma^\beta(\tilde{u})$  est lié à  $\varepsilon^\beta(\tilde{u})$  par la loi de Hooke :

$$(1.4) \quad \tilde{\sigma}_{ij}^\beta(\tilde{u}) = \lambda \operatorname{tr} \tilde{\varepsilon}^\beta(\tilde{u}) \delta_{ij} + 2\mu \tilde{\varepsilon}_{ij}^\beta(\tilde{u}) .$$

Enfin, les équations du mouvement s'écrivent :

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}^\beta(\tilde{u})}{\partial x_j} - i\beta \tilde{\sigma}_{i3}^\beta(\tilde{u}) = -\rho \omega^2 \tilde{u}_i \quad i = 1, 2, 3 .$$

Nous cherchons des champs qui vérifient la condition de surface libre sur  $\Gamma$  :

$$(1.6) \quad \tilde{\sigma}^\beta(\tilde{u}) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma .$$

Nous dirons qu'une solution de (1.5) avec les conditions aux limites (1.6) est un "mode guidé" si elle vérifie :

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} |\tilde{u}_j(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty \quad j = 1, 2, 3 .$$

Cette condition signifie physiquement que les déplacements restent essentiellement concentrés au voisinage de la surface  $\Gamma \times \mathbb{R}$  de l'obstacle.

Nous voyons que la recherche des modes guidés apparaît comme un problème de valeurs propres  $\omega^2$  paramétré par  $\beta$ . Les couples  $(\beta, \omega)$  pour lesquels il existe  $\tilde{u}$  solution de (1.5), (1.6) ne sont pas quelconques. Ils doivent vérifier une "relation de dispersion". Nous verrons qu'il est possible de formuler le problème de façon à le faire apparaître comme un problème de valeurs propres classique.

Tout d'abord nous allons nous ramener à un problème portant sur des fonctions à valeurs réelles. Nous écrivons les équations du mouvement en déplacements :

$$(1.8) \quad \left| \begin{array}{l} -\mu \Delta \tilde{u}_1 + \mu\beta^2 \tilde{u}_1 - (\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 \right) = \rho \omega^2 \tilde{u}_1 \\ -\mu \Delta \tilde{u}_2 + \mu\beta^2 \tilde{u}_2 - (\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 \right) = \rho \omega^2 \tilde{u}_2 \\ -\mu \Delta \tilde{u}_3 + \mu\beta^2 \tilde{u}_3 - (\lambda+\mu) (-i\beta) \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 \right) = \rho \omega^2 \tilde{u}_3 \end{array} \right.$$

ainsi que les conditions aux limites :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda (\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) n_1 + \mu (\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}) n_2 = 0 \\ \mu (\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}) n_1 + (\lambda (\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}) n_2 = 0 \\ \mu (\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} - i\beta \tilde{u}_1) n_1 + \mu (\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_2) n_2 = 0 . \end{array} \right.$$

Nous définissons la fonction  $u$  par :

$$u_1 = \tilde{u}_1 \quad u_2 = \tilde{u}_2 \quad u_3 = i\tilde{u}_3 .$$

Les équations (1.3), (1.4), (1.8) et (1.9) se réécrivent alors, en définissant les fonctions  $\varepsilon^\beta(u)$  et  $\sigma^\beta(u)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij}^\beta(u) = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \quad i, j = 1, 2 \\ \varepsilon_{i3}^\beta(u) = \varepsilon_{3i}^\beta(u) = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_3}{\partial x_i} + \beta u_i) \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon_{33}^\beta(u) = -\beta u_3 \\ \sigma_{ij}^\beta(u) = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon^\beta(u)) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^\beta(u) \\ \\ -\mu \Delta u_1 + \mu \beta^2 u_1 - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3) = \rho \omega^2 u_1 \\ -\mu \Delta u_2 + \mu \beta^2 u_2 - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \beta u_3) = \rho \omega^2 u_2 \\ -\mu \Delta u_3 + \mu \beta^2 u_3 - (\lambda + \mu) \beta (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3) = \rho \omega^2 u_3 \\ \\ (\lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) n_1 + \mu (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) n_2 = 0 \\ \mu (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) n_1 + (\lambda (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) n_2 = 0 \end{array} \right.$$

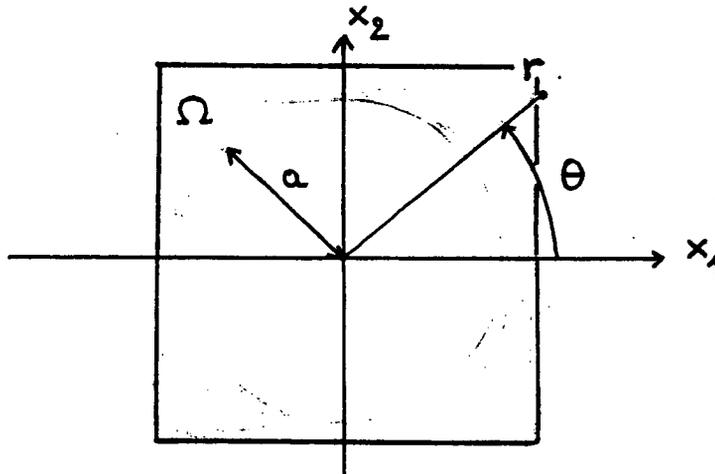
$$\mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \beta u_1 \right) n_1 + \mu \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \beta u_2 \right) n_2 = 0 \dots$$

Bien sûr, l'intérêt de cette transformation est que tous les coefficients de ces équations sont réels. Nous pouvons donc nous ramener à des fonctions à valeurs réelles.

## II - LE GUIDE CIRCULAIRE

Dans le cas où la section droite du cylindre est un cercle de rayon  $a$ , le problème se traite de manière semi-analytique. Il a été résolu par BOSTRÖM et BURDEN' [6], et nous rappelons ici les résultats.

Dans ce cas,  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| > a\}$  et il est naturel de passer en coordonnées polaires  $(r, \theta)$



Les calculs sont simplifiés par un passage en potentiels. Nous cherchons  $u$  de la forme :

$$u = \text{grad } \tilde{\phi} + \text{rot } \tilde{\psi}$$

où les potentiels  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  satisfont des équations d'onde à pulsation  $\omega$  :

$$(2.1) \quad \left| \begin{array}{l} -V_P^2 \Delta \tilde{\phi} + \beta^2 V_P^2 \tilde{\phi} - \omega^2 \tilde{\phi} = 0 \\ -V_S^2 \Delta \tilde{\psi} + \beta^2 V_S^2 \tilde{\psi} - \omega^2 \tilde{\psi} = 0 . \end{array} \right.$$

Suivant MIKLOWITZ ([15], p.215), nous écrivons le potentiel vecteur  $\tilde{\psi}$  sous une forme qui fait jouer un rôle particulier à l'axe  $\vec{e}_3$  :

$$\tilde{\psi} = \tilde{\gamma} \vec{e}_3 + \text{rot}(\tilde{\eta} \vec{e}_3)$$

avec

$$(2.2) \quad \left| \begin{array}{l} -V_S^2 \Delta \tilde{\gamma} + \beta^2 V_S^2 \tilde{\gamma} - \omega^2 \tilde{\gamma} = 0 \\ -V_S^2 \Delta \tilde{\eta} + \eta^2 V_S^2 \tilde{\eta} - \omega^2 \tilde{\eta} = 0 . \end{array} \right.$$

Le problème est ainsi ramené à trois équations scalaires découplées en  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\eta}$ . Le couplage n'intervient que par l'intermédiaire des conditions aux limites.

Suivant toujours MIKLOWITZ [15], nous cherchons les potentiels sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\phi}(r, \theta) = \phi(r) \cos(n\theta) \\ \tilde{\gamma}(r, \theta) = \gamma(r) \sin(n\theta) \\ \tilde{\eta}(r, \theta) = \eta(r) \cos(n\theta) . \end{array} \right.$$

Nous introduisons les quantités adimensionnelles :

$$(2.3) \quad K = \beta a ; \quad \alpha_P^2 = 1 - V^2/V_P^2 \quad ; \quad \alpha_S^2 = 1 - V^2/V_S^2$$

de sorte que :

$$(2.4) \quad \left| \begin{array}{l} \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} = \frac{K^2 \alpha_P^2}{a^2} \\ \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} = \frac{K^2 \alpha_S^2}{a^2} . \end{array} \right.$$

Notons que  $\alpha_P^2$  et  $\alpha_S^2$  ne sont pas supposés positifs. Nous verrons qu'il ne peut y avoir de valeurs propres que s'ils sont effectivement positifs.

Les équations (2.1) et (2.2) s'écrivent alors :

$$(2.5) \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{n^2}{r^2} \phi + \alpha_P^2 \frac{K^2}{a^2} \phi = 0 \\ -\frac{d^2 \gamma}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\gamma}{dr} + \frac{n^2}{r^2} \gamma + \alpha_S^2 \frac{K^2}{a^2} \gamma = 0 \\ -\frac{d^2 \eta}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} + \frac{n^2}{r^2} \eta + \alpha_S^2 \frac{K^2}{a^2} \eta = 0 . \end{array} \right.$$

On reconnaît trois équations de Bessel, dont nous discutons les solutions selon le signe de  $\alpha_P^2$  et  $\alpha_S^2$  :

- Si  $\beta^2 V_S^2 < \omega^2$  (c'est-à-dire  $\alpha_S^2 < 0$ , et donc  $\alpha_P^2 < 0$ ) ce sont des fonctions de Bessel  $J_n$  et  $Y_n$  dont aucune n'est dans  $L^2(\Omega)$ . Il n'y a donc pas de solutions dans ce cas.
- Si  $\beta^2 V_S^2 > \omega^2$ , c'est-à-dire que  $\alpha_S^2 > 0$ , et donc  $\alpha_S$  et  $\alpha_P$  sont réels. Les équations (2.5) sont en fait des équations de Bessel modifiées, dont la seule solution de carré sommable est, à une constante près, la fonction  $K_n$  (fonction de Bessel modifiée).

Nous nous plaçons donc dans la suite de ce paragraphe dans ce deuxième cas. Nous avons alors :

$$(2.6) \quad \left| \begin{array}{l} \phi(r) = A K_n(\alpha_P K \frac{r}{a}) \\ \gamma(r) = B K_n(\alpha_S K \frac{r}{a}) \\ \eta(r) = C K_n(\alpha_S K \frac{r}{a}) . \end{array} \right.$$

A, B et C sont 3 constantes déterminées par les conditions aux limites. On peut montrer que les conditions de surface libre s'écrivent, en potentiels :

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & \cdot (\lambda + 2\mu)\phi''(a) + \lambda\left(\frac{1}{a}\phi'(a) - \frac{n^2}{a^2}\phi(a) - \beta^2\phi(a)\right) \\
 & + 2\mu\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{n}{r}\gamma(r)\right)\right)_{r=a} + k\eta''(a) = 0 \\
 & \cdot \mu\left(\frac{n}{a}\phi'(a) - \frac{n^2}{a^2}\gamma(a) + \frac{n\beta}{a}\eta'(a)\right) + \mu a\left(\frac{d}{dr}\left(-\frac{n}{r^2}\phi(r)\right)\right)_{r=a} \\
 & \cdot \left[-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\gamma'(r)\right) + \beta\frac{d}{dr}\left(-\frac{n^2}{r^2}\eta(r)\right)\right]_{r=a} = 0 \\
 & \cdot \mu(2\beta\phi'(a) + \frac{n\beta}{a}\gamma(a) - \beta^2\eta'(a) - \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\eta(r))\right)_{r=a} \\
 & - \frac{d}{dr}\left(-\frac{n^2}{r^2}\eta(r)\right)_{r=a} = 0 .
 \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.7)  $\phi$ ,  $\gamma$  et  $\eta$  par leurs expressions dans (2.6), nous obtenons un système linéaire homogène en A, B, C. Notant  $M_n(\beta, \omega)$  la matrice correspondante, nous obtenons (au moins en principe) l'équation de dispersion ( $\omega$  est l'inconnue,  $\beta$  le paramètre)

$$(2.8) \quad \det M_n(\beta; \omega) = 0 \quad 0 < \omega < \beta V_S .$$

A notre connaissance, cette équation a été établie pour la première fois par MINDLIN [16], et également par BOSTRÖM et BURDEN [6]. Dans chacun des trois cas, la façon de mener les calculs, et la présentation des résultats, diffèrent. Le courage nous a manqué pour vérifier la cohérence des 3 approches. Toutefois, la cohérence des résultats nous a semblé un signe suffisant.

Nous donnons les expressions des éléments de la matrice  $M_n$ , que l'on obtient à partir de (2.6) et (2.7), au prix de quelques (!) manipulations.

$$\begin{aligned}
 M_{11}^n &= (1+\alpha_S^2)K_n(\alpha_P K) + 2\alpha_P^2 \left( \frac{K_{n+1}(\alpha_P K)}{\alpha_P K} + n(n-1) \frac{K_n(\alpha_P K)}{(\alpha_P K)^2} \right) \\
 M_{12}^n &= 2n\alpha_S^2 \left( (n-1) \frac{K_n(\alpha_S K)}{(\alpha_S K)^2} - \frac{K_{n+1}(\alpha_S K)}{\alpha_S K} \right) \\
 M_{13}^n &= 2\alpha_S \left( \left(1 + \frac{n(n-1)}{(\alpha_S K)^2}\right) K_n(\alpha_S K) + \frac{K_{n+1}(\alpha_S K)}{\alpha_S K} \right) \\
 M_{21}^n &= 2n\alpha_P^2 \left( \frac{K_{n+1}(\alpha_P K)}{\alpha_P K} - (n-1) \frac{K_n(\alpha_P K)}{(\alpha_P K)^2} \right) \\
 (2.9) \quad M_{22}^n &= -\alpha_S^2 \left( \left(1 + \frac{2n(n-1)}{(\alpha_S K)^2}\right) K_n(\alpha_S K) + 2 \frac{K_{n+1}(\alpha_S K)}{\alpha_S K} \right) \\
 M_{23}^n &= -2n\alpha_S \left( (n-1) \frac{K_n(\alpha_S K)}{(\alpha_S K)^2} - \frac{K_{n+1}(\alpha_S K)}{\alpha_S K} \right) \\
 M_{31}^n &= 2\alpha_P \left( n \frac{K_n(\alpha_P K)}{\alpha_P K} - K_{n+1}(\alpha_P K) \right) \\
 M_{32}^n &= n\alpha_S \frac{K_n(\alpha_S K)}{\alpha_S K} \\
 M_{33}^n &= (1+\alpha_S^2) \left( n \frac{K_n(\alpha_S K)}{\alpha_S K} - K_{n+1}(\alpha_S K) \right) .
 \end{aligned}$$

L'étude rigoureuse de cette équation transcendante est loin d'être évidente. Toutefois, comme ce cas particulier vise essentiellement à illustrer l'étude générale qui suit, nous mènerons cette étude sur deux plans :

- sur un plan numérique, pour obtenir une description complète des courbes  $\beta \rightarrow \omega(\beta)$ ;
- du point de vue asymptotique, c'est-à-dire à haute fréquence où nous compléterons les résultats de MINDLIN [16] (voir aussi MORISSON [17],[23]).

Notons au passage que l'équation (2.8) se simplifie quand  $n = 0$ . En effet, dans ce cas, le potentiel  $\gamma = 0$ , ainsi que la composante du déplacement  $u_\theta$ . La relation de dispersion s'écrit :

$$(2.10) \quad (K^2 + \alpha_S^2) \frac{\alpha_P K K_0(\alpha_P K)}{K_1(\alpha_P K)} - 4 K^2 \alpha_P^2 \frac{\alpha_S K K_0(\alpha_S K)}{K_1(\alpha_S K)} = 2\alpha_P^2 (K^2 - \alpha_S^2)$$

qui est la relation de dispersion donnée par BIOT [5]. Au changement de

fonctions  $(K_0, K_1) \rightarrow (J_0, J_1)$  près, elle a la même forme que l'équation de Pochhammer qui régit le problème intérieur (cf. MIKLOWITZ [15]). En fait, comme nous allons le voir, le cas particulier intéressant est, non pas  $n = 0$ , mais  $n = 1$ .

L'étude numérique de l'équation (2.8) donne des résultats en parfait accord avec ceux présentés par BOSTRÖM et BURDEN [6]. Pour chaque  $n \neq 1$ , il existe une valeur  $\beta_n^*$ , que nous appelons le  $n$ -ième seuil, telle que :

- pour  $\beta < \beta_n^*$ , (2.8) n'admet pas de solution
- pour  $\beta \geq \beta_n^*$ , (2.8) admet une unique solution  $\omega_n(\beta)$  qui possède les propriétés suivantes :

- .  $\omega_n(\beta_n^*) = V_S \beta_n^*$

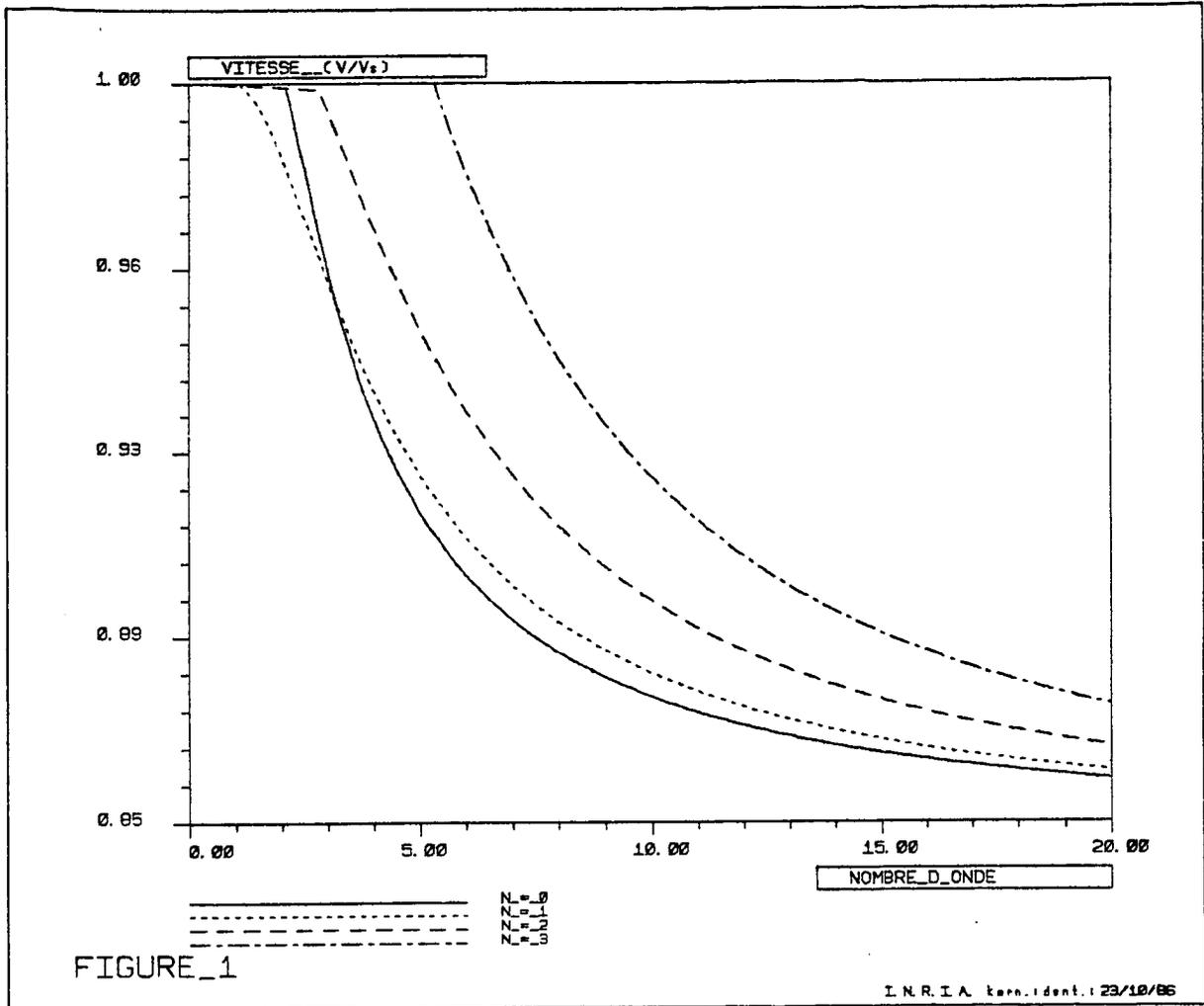
- . la fonction  $\beta \rightarrow \omega_n(\beta)/\beta$  est décroissante

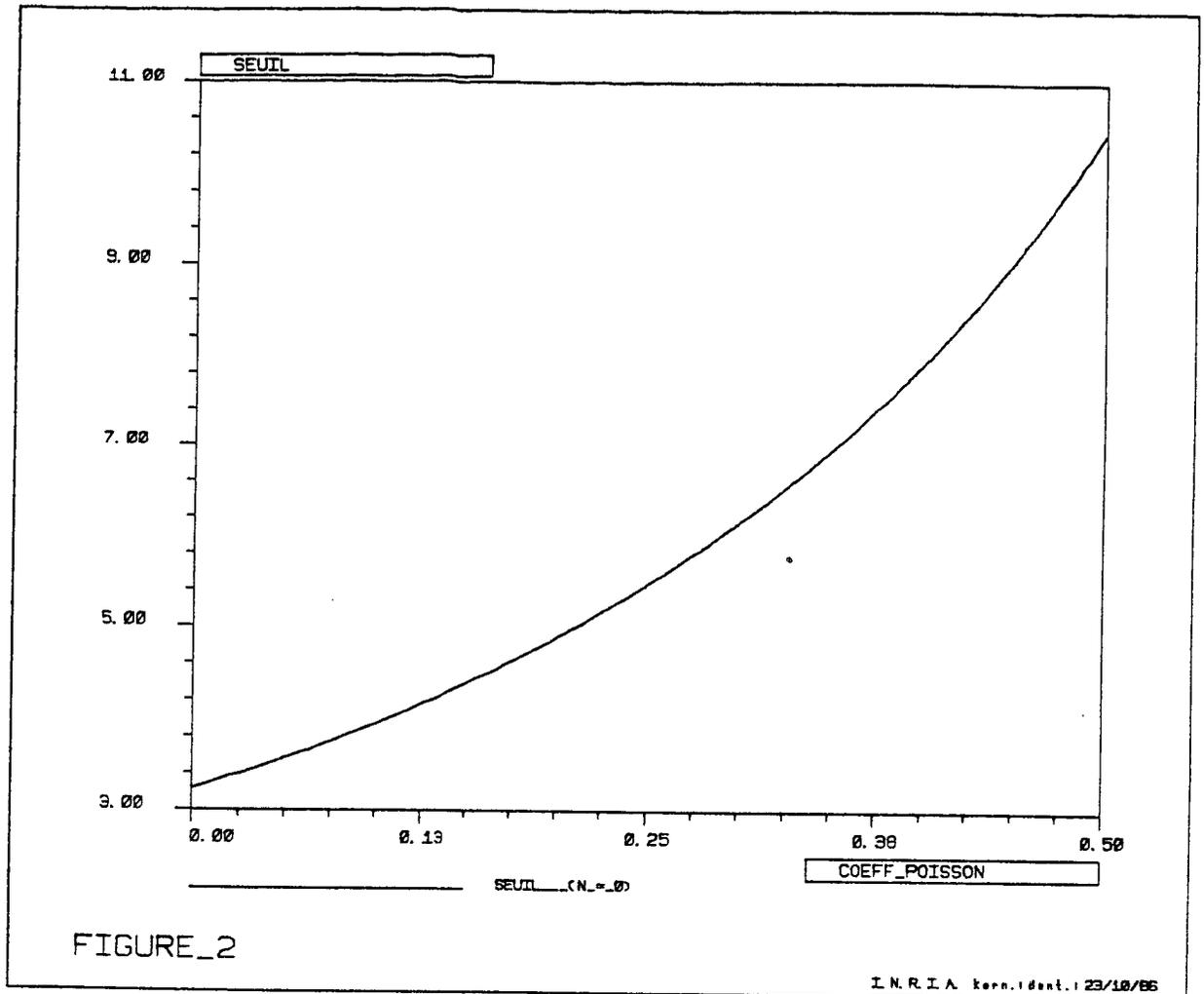
- .  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \omega_n(\beta)/\beta = V_R$  ;  $\forall n$

où  $V_R$  est la vitesse de l'onde de Rayleigh pour le demi-espace.

Comme nous l'avons signalé, la valeur  $n = 1$  est exceptionnelle. Le mode correspondant existe pour toute valeur de  $\beta$ . Ses autres propriétés sont les mêmes que dans le cas général. BOSTRÖM et BURDEN [6] donnent une explication heuristique de l'existence, ou non d'un seuil.

Nous présentons sur la figure 1 les courbes de dispersion correspondant aux premiers modes, pour  $\nu = 0.3$ , et sur la figure 2 nous indiquons comment varient les seuils  $\beta_n^*$  en fonction de  $\nu$  pour ces modes. On retrouve sur ces courbes les propriétés indiquées plus haut, et on constate également que l'espacement des seuils devient régulier pour  $n$  grand.





La plupart de ces résultats ne sont pas démontrés rigoureusement. Les principaux seront, comme on le verra, des conséquences de l'étude générale.

Nous pouvons par contre démontrer le dernier point mentionné plus haut (la convergence des vitesses vers la vitesse de Rayleigh). Nous montrerons également au moins pour  $n$  assez grand, l'existence d'un seuil qui tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ce dernier point est important car il nous sera utile pour établir le résultat correspondant dans le cas d'une géométrie quelconque.

Proposition 2.1

$\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe  $K_n = \beta_n a$  tel que pour  $\beta > \beta_n$ , l'équation des modes guidés admet une solution unique :

$$\omega = \omega_R^n(\beta a)$$

qui vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_R^n(\beta a)}{\beta} = V_R .$$

Démonstration

Nous partons des formules (2.9), en développant la fonction  $K_n$  pour  $K$  grand. On sait (cf. ABRAMOWITZ et STEGUN [1]) que :

$$K_n(x) \sim \sqrt{\pi/2x} e^{-x} \quad x \rightarrow \infty .$$

Un développement asymptotique de la relation de dispersion est :

$$\det M^n \sim \alpha_S^2 \left( \frac{\pi^3}{8\alpha_P \alpha_S K^3} \right)^{1/2} e^{-(\alpha_P + 2\alpha_S)K} [(1 + \alpha_S^2)^2 - 4\alpha_P \alpha_S] .$$

En revenant aux variables primitives, il vient :

$$(2.11) \quad \left(2 - \frac{V^2}{V_S^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{V_P^2}\right)^{1/2} = 0 .$$

On retrouve pour chaque  $n$  l'équation de Rayleigh. Ceci avait été établi pour la première fois par MINDLIN [16].

Pour conclure, nous utilisons le théorème des fonctions implicites. Nous notons  $G$  la fonction de Rayleigh :

$$G(V) = \left(2 - \frac{V^2}{V_S^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{V^2}{V_S^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{V_P^2}\right)^{1/2} .$$

Il est bien connu (cf. JOLY [12]) que l'équation

$$G(V) = 0 \quad V \in ]0, V_S[$$

admet une racine unique, notée  $V_R$  dans l'intervalle  $]0, V_S[$  et que de plus  $G'(V_R) \neq 0$ .

Le théorème des fonctions implicites peut donc s'appliquer. □

L'étude du développement de  $\omega_R^n(\beta a)/\beta$  en fonction de  $\frac{1}{\beta}$  est délicate. BOSTRÖM et BURDEN [6] ont montré que le premier terme du développement en  $\frac{1}{\beta}$  était indépendant de  $n$  et les racines se séparaient à l'ordre 2 en  $\frac{1}{\beta}$ .

Nous ne savons démontrer que partiellement le résultat complémentaire du précédent, c'est-à-dire que nous pouvons démontrer l'existence d'un seuil seulement si  $n$  est assez grand. Pourtant, il suffira d'établir le même résultat dans le cas d'une géométrie quelconque.

### Proposition 2.2

Il existe  $n_0 > 0$  et  $C > 0$  indépendants de  $\beta$  et de  $\omega$  tels que pour  $n \geq n_0$  et  $\beta < Cn$ , l'équation (2.8) n'admet pas de solution.

Nous passons des variables  $(\omega, \beta)$  aux variables  $(V, \beta)$  ( $V = \frac{\omega}{\beta}$  est la nouvelle inconnue) et écrivons différemment la relation de dispersion (2.8) en divisant les lignes de  $M_n$  par des coefficients non nuls convenables. Nous introduisons la fonction  $S_n$  :

$$S_n(z) = \frac{K_n(z)}{z K_{n+1}(z)}$$

Nous avons donc l'équivalence :

$$(2.12) \quad \det M_n(\omega, \beta) = 0 \quad 0 < \omega < \beta V_S \iff \det C_n(\beta, V) = 0 \quad 0 < V < V_S$$

où la matrice  $C_n(\beta, V)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 (2.13) \quad & C_{11}^n = [\beta^2(1 + \alpha_S^2) + 2n(n-1)]S_n(\beta\alpha_P) + 2 \\
 & C_{12}^n = 2n[(n-1)S_n(\beta\alpha_S) - 1] \\
 & C_{13}^n = 2\{1 + [\beta^2\alpha_S^2 + n(n-1)]S_n(\beta\alpha_S)\} \\
 & C_{21}^n = 2n\{1 - (n-1)S_n(\beta\alpha_P)\} \\
 & C_{22}^n = -\{2 + [\beta^2\alpha_S^2 + 2n(n-1)]S_n(\beta\alpha_S)\} \\
 & C_{23}^n = 2n\{1 - (n-1)S_n(\beta\alpha_S)\} \\
 & C_{31}^n = 2\{nS_n(\beta\alpha_P) - 1\} \\
 & C_{32}^n = n S_n(\beta\alpha_S) \\
 & C_{33}^n = (1+\alpha_S^2)[nS_n(\beta\alpha_S) - 1].
 \end{aligned}$$

Le calcul montre les deux identités

$$\begin{aligned}
 & \forall n, \forall \beta, \det C_n(\beta, 0) = 0 \\
 & \forall n, \forall V, \det C_n(0, V) = 0.
 \end{aligned}$$

En outre, les fonctions  $C_{ij}^n$  sont paires par rapport à  $C$  et  $\beta$  et régulières en  $V = 0$  et  $\beta = 0$ , de telle sorte que

$$(2.14) \quad \tilde{F}_n(\beta, V) = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{V^2} \det C_n(\beta, V)$$

reste une fonction régulière pour  $\beta = 0$  et  $V \in [0, V_S]$ .

Pour des raisons techniques naturelles, nous sommes conduits à effectuer un changement de variable, en posant :

$$\beta = n x$$

et à introduire la fonction  $F$ , définie par :

$$(2.15) \quad F\left(\frac{1}{n}, x, V\right) = \tilde{F}_n(nx, V) .$$

Ce changement de variable est exploitable dans la mesure où le comportement asymptotique des fonctions  $K_n(nx)$  pour  $n$  grand est connu explicitement.

On a en effet (cf. ABRAMOWITZ et STEGUN [1]) :

$$K_n(nz) = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \frac{e^{-n\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$K'_n(nz) = -\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} e^{-n\eta} \frac{(1+z^2)^{1/4}}{z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

où  $\eta$  est défini par :

$$\eta = (1 + z^2)^{1/2} + \text{Log} \left( \frac{z}{1 + (1+z^2)^{1/2}} \right) .$$

En utilisant alors la relation de récurrence

$$K_{n+1}(nz) = \frac{1}{z} K_n(nz) - K'_n(z)$$

on a alors accès au développement de  $K_{n+1}(nz)$  et par suite à celui de  $S_n(nz)$  :

$$(2.16) \quad S_n(nz) = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \sqrt{1+z^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) .$$

On vérifie alors aisément que, à  $\frac{\beta}{n}$  et  $V$  fixés, les coefficients  $C_{ij}^n$  de la matrice  $C$  admettent une limite finie quand  $n \rightarrow +\infty$  de telle sorte que la fonction  $F\left(\frac{1}{n}, x, V\right)$  se prolonge par continuité en  $F(0, x, V)$ ,  $x > 0$ ,  $V \in [0, V_S]$ . Par suite, si nous continuifions la variable  $\frac{1}{n}$  que nous appelons désormais  $\varepsilon$ , nous définissons une fonction :

$$F(\varepsilon, x, V) \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad x \geq 0, \quad V \in [0, V_S]$$

qui possède les propriétés suivantes (nous utilisons les propriétés d'analyticité

des fonctions  $K_\nu$  par rapport à  $\nu$ , voir OLVER [19]) :

.  $F(.,.,.)$  est  $C^\infty$  pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\nu \in ]0, \nu_S[$ ,  $x \geq 0$

.  $F$  est continue sur  $[0,1] \times [0, +\infty[ \times [0, \nu_S]$ .

Un développement limité, utilisant (2.16), quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  permet de montrer que

$$F(0,0,\nu) = 16\left(\frac{1}{\nu_P^2} - \frac{1}{\nu_S^2}\right) = F_0 < 0 .$$

Soit alors  $M > 0$ . La fonction  $F$  étant continue sur le compact  $[0,1] \times [0,M] \times [0, \nu_S]$  y est donc uniformément continue. Il existe donc  $\alpha > 0$  et  $C > 0$ , tels que :

$$\forall \nu \in [0, \nu_S] \quad \varepsilon < \alpha \quad \text{et} \quad x < C \implies |F(\varepsilon, x, \nu) - F(0,0,\nu)| \leq \frac{|F_0|}{2} .$$

En particulier :

$$\varepsilon < \alpha \quad \text{et} \quad x < C \quad \forall \nu \in [0, \nu_S] \quad F(\varepsilon, x, \nu) < \frac{F_0}{2} < 0$$

et par conséquent, en revenant aux variables initiales, nous avons donc :

$$n \geq n_0 = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1 \quad \text{et} \quad \beta \leq Cn \rightarrow \forall \nu \in [0, \nu_S], \quad F\left(\frac{1}{n}, \frac{\beta}{n}, \nu\right) < 0 .$$

Or, l'équation de dispersion (2.8) est, par construction (et grâce à (2.12), (2.14), (2.15)) équivalente à l'équation :

$$(2.17) \quad F\left(\frac{1}{n}, \frac{\beta}{n}, \nu\right) = 0 \quad \nu \in [0, \nu_S]$$

(2.8) n'a donc pas de solutions pour  $n \geq n_0$  et  $\beta \leq Cn$ . □

### Corollaire 2.1

Pour tout  $\beta$ , le nombre de solutions de l'équation (2.8) est fini.

### Remarque 2.1

Nous définirons, au paragraphe 5, deux familles de seuil :

- les seuils inférieurs, en deçà desquels le problème n'a jamais de solution,

- les seuils supérieurs, au delà desquels il existe toujours des solutions.

Le comportement pour  $n$  grand de ces seuils fera l'objet de la sixième partie. Notons que la proposition 2.2 entraîne le résultat le plus "fort" c'est-à-dire que les seuils inférieurs vont à l'infini avec  $n$ . C'est a fortiori vrai pour les seuils supérieurs.  $\square$

La proposition 2.2 montre que les seuils croissent au moins proportionnellement à  $n$ . Nous voulons donner un argument heuristique qui permet de penser que ce résultat est sans doute optimal.

Pour cela nous admettons que les seuils  $\beta_n^*$  sont caractérisés par la condition :

$$(2.18) \quad \omega_n(\beta_n^*) = \beta_n^* v_S .$$

Nous savons en fait seulement que si  $\beta_n^*$  est un seuil, alors (2.18) a lieu. En portant cette condition dans (2.8), nous obtenons ce que nous pouvons appeler (de façon abusive) l'équation des seuils. Nous écrivons cette équation en posant :

$$(2.19) \quad g = \left(1 - \frac{v_S^2}{v_P^2}\right)^{1/2}, \quad x_n = \frac{\beta_n^* a}{n}$$

$$\frac{1}{ng} \frac{n g x_n K_n(n g x_n)}{K_{n+1}(n g x_n)} = \frac{(2+3/n)x_n^4 + 2x_n^2}{\frac{1}{2(1-1/n)} x_n^4 + \frac{2(2+3/n)}{1-1/n^2} x_n^2 + 4} .$$

Nous développons les deux membres de cette équation pour  $n$  grand, il vient :

$$(2.20) \quad \frac{x^2}{1+(1+gx^2)^{1/2}} = \frac{2x^4+2x^2}{x^4/2 + 4x^2+4} .$$

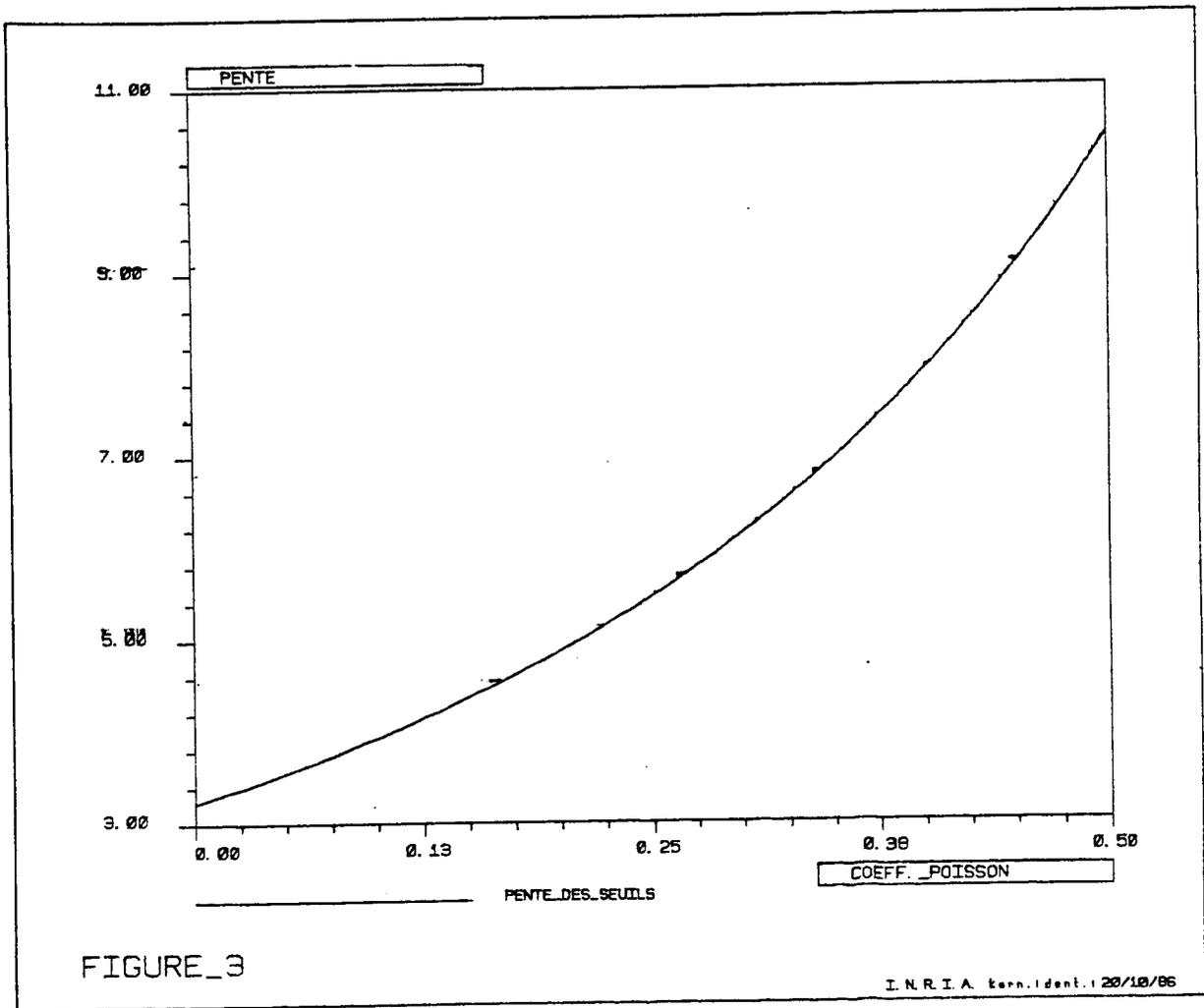
On vérifie aisément que, pour tout  $g \in [0,1[$ , cette équation limite admet une unique solution positive  $x_g$ . Comme à la proposition 2.1, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , l'équation (2.19) admet une racine unique  $x_n$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_g$$

Donc, sous réserve que (2.18) caractérise bien les seuils, nous avons

$$\beta_n^* a \sim n x_g$$

et les seuils sont asymptotiquement proportionnels à  $n$ . La figure 3 représente la variation de la "pente"  $x_g$  en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$ .



Dans la suite de ce travail, nous allons généraliser ces résultats au cas d'une géométrie quelconque.

### III - FORMULATION MATHÉMATIQUE

#### III.1 - Formulation variationnelle du problème

Nous revenons maintenant au problème général :

$$P(\beta, \omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2); u_2(x_1, x_2); u_3(x_1, x_2)) \\ \sum_{i=1}^3 \int |u_i|^2 dx < \infty \end{array} \right.$$

solution de :

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\beta(u) - \beta \sigma_{i3}^\beta(u) = \rho \omega^2 u_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$(3.2) \quad \sigma^\beta(u) \cdot n = 0$$

$\sigma^\beta(u)$  étant défini par (1.4).

Nous posons :

$$V = H^1(\Omega)^3, \quad H = L^2(\Omega)^3$$

et pour  $(u, v) \in V^2$  :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u,v) = \sum_i \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx \quad (|\cdot| \text{ est la norme associée)} \\ a(\beta, u, v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\beta}(u) \cdot \varepsilon_{ij}^{\beta}(v) dx \end{array} \right.$$

$a(\beta, u, v)$  peut s'exprimer en fonction des déplacements :

$$(3.4) \quad \left\{ a(\beta, u, v) = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr} \varepsilon^{\beta}(u) \cdot \operatorname{tr} \varepsilon^{\beta}(v) dx + 2 \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mu \varepsilon_{ij}^{\beta}(u) \varepsilon_{ij}^{\beta}(v) dx . \right.$$

Le problème  $\mathcal{P}(\beta, \omega)$  admet la formulation variationnelle suivante :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in V \\ a(\beta, u, v) = \omega^2(u, v) \quad \forall v \in V . \end{array} \right.$$

De façon usuelle, à  $a(\beta)$  est associé un opérateur  $A(\beta)$ , dont le domaine  $D(A(\beta))$  est dense dans  $V$  (cf. REED-SIMON [21]). Nous avons la :

### Proposition 3.1

$A(\beta)$  est un opérateur autoadjoint et positif dans  $H$ . Le domaine de l'opérateur  $A(\beta)$  est :

$$D(A(\beta)) = \{ u \in V; \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) \in L^2(\Omega), j=1,2; \sigma_{i3}(u) \in L^2(\Omega); i=1,2,3 \}$$

et nous avons, pour  $u \in D(A(\beta))$  :

$$(A(\beta)u)_i = -\frac{1}{\rho} \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) - \beta \sigma_{i3}(u) \right\} \quad i=1,2,3 .$$

L'égalité (3.5) se réécrit donc :

$$(3.6) \quad A(\beta)u = \omega^2 u \quad ; \quad u \in D(A(\beta))$$

qui apparaît bien comme un problème de valeurs propres pour  $A(\beta)$ .

Nous pouvons préciser le programme ébauché au I. Il s'agit d'étudier le spectre de  $A(\beta)$ , ce qui peut se décomposer en 3 étapes principales :

- donner un encadrement a priori des valeurs propres,
- déterminer le spectre essentiel de  $A(\beta)$ , et montrer qu'il ne contient pas de valeurs propres ,
- caractériser les valeurs propres de  $A(\beta)$  grâce au principe de Min-Max. (Toutes les notions introduites ici, spectre - spectre essentiel - principe du Min-Max, sont rappelées au début de la partie 4).

Pour ces différentes étapes, nous utiliserons différentes expressions de la forme bilinéaire  $a(\beta)$ . Naturellement, la première de ces expressions est (3.4) que nous développons, en posant :

$$\begin{aligned}
 a(\beta, u, v) &= \lambda c(\beta; u, v) + \mu b(\beta; u, v) \\
 c(\beta; u, v) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\beta} u \operatorname{div}_{\beta} v \, dx \quad (\operatorname{div}_{\beta} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3) \\
 b(\beta; u, v) &= 2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \beta^2 u_3 v_3 \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \beta u_1 \right) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \beta v_1 \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \beta u_2 \right) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \beta v_2 \right) dx .
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Nous utiliserons également le développement de  $a(\beta, u, v)$  selon les puissances de  $\beta$ . Nous posons :

$$\begin{aligned}
 a(\beta, u, v) &= \beta^2 v_S^2(u, v) + a_0(u, v) + \beta a_1(u, v) + \beta^2 a_2(u, v) \\
 &= t_0(u, v) + \beta t_1(u, v) + \beta^2 t_2(u, v) .
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Nous verrons que le nombre  $\beta^2 v_S^2$  joue un rôle important dans la suite de

l'étude. Ce point est lié au fait que le spectre de l'opérateur "dans tout l'espace" (en l'absence d'obstacle) est l'intervalle  $[\beta^2 V_S^2; +\infty[$  (nous reviendrons sur ce point au § 2). La technique mathématique utilisée consiste à considérer  $A(\beta)$  comme une perturbation de cet opérateur dans tout l'espace, faisant apparaître le terme  $\beta^2 V_S^2 |v|^2$ . C'est l'objet de la

### Proposition 3.2

Nous avons la décomposition

$$\forall (u, v) \in V^2, b(\beta; u, v) = \beta^2 \int_{\Omega} uv + d(\beta; u, v) + p(\beta; u, v)$$

où les formes quadratiques  $d(\beta)$  et  $p(\beta)$  sont données par :

$$(3.9) \quad d(\beta; u, u) = 2 \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\beta u_3}{2} \right|^2 + 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\beta u_3}{2} \right|^2 \right) dx \\ + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx$$

$$(3.10) \quad p(\beta; u, u) = 2\beta \int_{\Gamma} (u_1 n_1 + u_2 n_2) u_3 d\gamma$$

### Démonstration

Pour simplifier la présentation, nous la donnerons sur l'expression de la forme quadratique. Le point de départ est bien entendu (3.7). Nous transformons les deux dernières intégrales par une intégration par parties. Par exemple, pour la première d'entre elles :

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \beta u_1 \right|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|^2 dx + \beta^2 \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + 2\beta \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx \\ = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|^2 dx + \beta^2 \int_{\Omega} |u_1|^2 dx - 2\beta \int_{\Omega} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx \\ + 2\beta \int_{\Gamma} u_1 u_3 n_1 d\gamma .$$

Après avoir effectué la même transformation sur la seconde intégrale, nous réécrivons  $b(\beta; u, u)$  :

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad b(\beta; u, u) &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \\
 &+ \beta^2 \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2) dx \\
 &+ 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 dx + \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} |u_3|^2 dx - 2\beta \int_{\Omega} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx \\
 &+ 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 dx + \frac{\beta^2}{2} \int_{\Omega} |u_3|^2 dx - 2\beta \int_{\Omega} u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx \\
 &+ 2\beta \int_{\Gamma} u_3 (u_1 n_1 + u_2 n_2) d\gamma
 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad b(\beta; u, u) &= \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \\
 &+ 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\beta}{2} u_3 \right|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\beta}{2} u_3 \right|^2 dx \\
 &+ \beta^2 \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2) dx + 2\beta \int_{\Gamma} u_3 (u_1 n_1 + u_2 n_2) d\gamma \quad \square
 \end{aligned}$$

### Remarques 3.1

- Comme nous le verrons ultérieurement, cette décomposition fait apparaître  $p(\beta)$  comme une perturbation compacte de la forme  $d(\beta)$ .

- Dans tout l'espace (c'est-à-dire en l'absence d'obstacle), la même démonstration montre que :

$$(3.13) \quad b(\beta; u, v) = d(\beta; u, v) + \beta^2 \int_{\Omega} u v dx .$$

C'est cette remarque qui permet de montrer que l'opérateur correspondant a un spectre continu qui est l'intervalle  $[\beta^2 v_S^2, +\infty[$ . Il ne possède donc pas de valeurs propres.

- De même, si dans (3.1), la condition de surface libre  $\sigma(u) \cdot n = 0$  est remplacée par une condition "déplacements nuls" :  $u = 0$  sur  $\Gamma$ , le terme de bord

disparaît et la décomposition (3.13) a lieu, entraînant une fois de plus l'absence de valeurs propres.

Dans l'étude des Max-Min, une forme légèrement différente de cette décomposition nous sera utile :

### Corollaire 3.1

Nous pouvons écrire :

$$\forall u \in V, a(\beta; u, u) = \beta^2 V_S^2 |u|^2 + p(\beta; u, u) + b_0(\beta; u, u) + b_1(\beta; u, u) + b_2(\beta; u, u)$$

où  $p(\beta)$  a été définie en (3.10) et

$$\begin{aligned} b_0(\beta; u, u) &= \lambda \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \\ &\quad + \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx \\ b_1(\beta; u, u) &= (\lambda + \mu) \left[ \int_{\Omega} |\beta u_3|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) (\beta u_3) dx \right] \\ b_2(\beta; u, u) &= \mu \int_{\Omega} |\nabla u_3|^2 dx . \end{aligned}$$

### Démonstration

Nous reprenons les calculs de la proposition 3.2, en nous arrêtant à 3.11. Nous développons également la forme  $c(\beta)$  :

$$c(\beta; u, u) = \lambda \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \beta^2 |u_3|^2 dx - 2\lambda \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) (\beta u_3) dx$$

en regroupant ces deux égalités, nous obtenons la décomposition.  $\square$

### Remarque 3.2

On reconnaît dans  $b_0(\beta)$  la forme bilinéaire de l'élasticité 2D.

### III.3 - Propriétés de la forme bilinéaire

Nous donnons dans ce paragraphe quelques résultats qui nous seront utiles par la suite, sur la forme bilinéaire.

Nous avons tout d'abord un résultat de coercivité :

#### Théorème 3.1

Il existe une constante  $\gamma_0 > 0$ , ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$ , telle que :

$$(3.14) \quad \forall v \in V, a(\beta; v, v) \geq \gamma_0 \beta^2 v_S^2 |v|^2.$$

#### Démonstration

Il s'agit ici d'une inégalité de Korn généralisée. Remarquons que puisque  $c(\beta; v, v) \geq 0$ , il suffit d'établir l'inégalité :

$$\forall v \in V \quad b(\beta; v, v) \geq \gamma_0 \beta^2 |v|_0^2$$

où  $|v|_0$  désigne la (vraie) norme dans  $L^2(\Omega)$ .

Nous adapterons à notre cas la démonstration que donne NITSCHKE [18] de l'inégalité de Korn classique. Elle consiste à construire un prolongement convenable de  $v$  à tout l'espace, qui préserve le tenseur des déformations. La démonstration va donc s'appuyer sur l'inégalité dans tout l'espace. Pour cela, nous notons  $\hat{b}$  la forme bilinéaire définie par la même expression que  $b$ , les intégrales étant étendues à tout l'espace :

$$\hat{b}(\beta; u, u) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^2} |\epsilon_{ij}^\beta(u)|^2 dx.$$

#### Lemme 3.1

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2)^3, \hat{b}(\beta; u, u) \geq \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx.$$

Démonstration

Il suffit de reprendre les calculs de la proposition 2.2. Comme nous l'avons noté à la remarque 2.1, le terme de bord disparaît, et nous avons simplement

$$\hat{b}(\beta; u, u) = \beta^2 \int_{\Omega} |u|^2 + \hat{d}(\beta; u, u)$$

où  $\hat{d}(\beta)$  est une forme positive.

L'inégalité en découle immédiatement. □

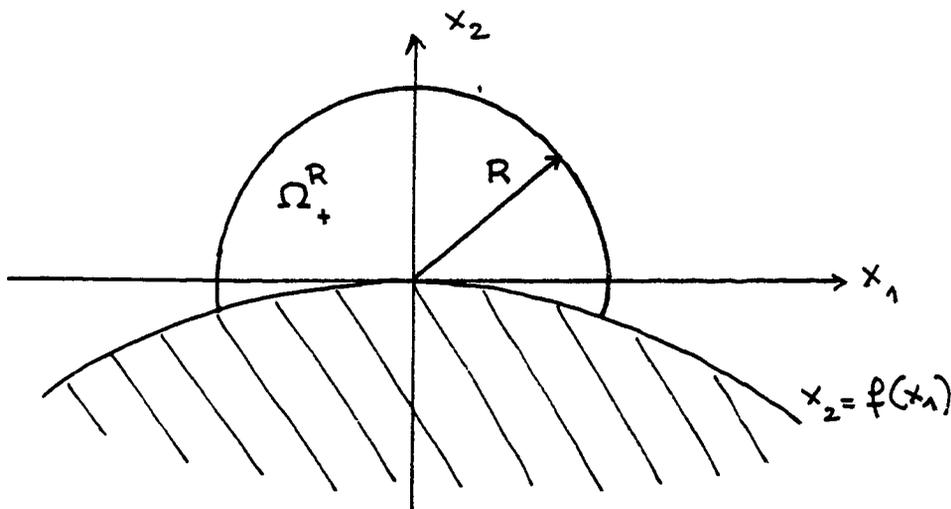
Nous décomposons la suite de la démonstration en plusieurs étapes. Nous considérerons d'abord le cas de domaines particuliers, pour lesquels nous établissons l'existence de prolongements convenables. Nous en déduisons l'inégalité pour ces domaines particuliers, enfin nous en déduisons le cas général. La démonstration que nous donnons ici est valable si l'ouvert  $\Omega$  est de classe  $C^1$  (voir Remarque 3.2).

Les domaines particuliers que nous considérons sont du type :

$$\Omega_+^R = \{x = (x_1, x_2) ; x_2 > f(x_1), |x| < R\}$$

où  $R$  est un réel fixé, et  $f$  une fonction de classe  $C^1$  vérifiant :

$$f(0) = f'(0) = 0.$$



Nous décomposons  $\partial\Omega_+^R$  en  $\partial\Omega_+^R = \Gamma_R \cup \Gamma_0$ , avec

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2), x_2 = f(x_1), |x| < R\}$$

et nous posons

$$K = \sup\{|f'(x_1)|, (x_1, x_2) \in \Omega_+^R\}$$

et

$$V = \{u \in H^1(\Omega_+^R)^3, u|_{\Gamma_R} = 0\}.$$

Par la suite, nous adopterons la notation :

$$|\varepsilon^\beta(v)|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}^\beta(v)|^2 dx \quad v \in H^1(\Omega)^3$$

$$|\nabla v|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \quad v \in H^1(\Omega)^3.$$

Nous avons le

### Lemme 3.2

Il existe un opérateur de prolongement  $P_R \in \mathcal{L}(V, H^1(\mathbb{R}^2)^3)$  vérifiant :

$$|\varepsilon^\beta(P_R u)|_{0,\mathbb{R}^2} \leq C_1 |\varepsilon^\beta(u)|_{0,\Omega_+^R} + C_2 K |\nabla u|_{0,\Omega_+^R}$$

$C_1, C_2$  désignant deux constantes numériques.

### Démonstration

Nous prolongeons tout d'abord les fonctions au domaine :

$$\widetilde{\Omega}_+^R = \{(x_1, x_2), x_2 > f(x_1)\}$$

par un simple prolongement par 0.

Il suffit ensuite de définir  $P_R u = \tilde{u}$  dans  $\Omega_-^R = \mathcal{C} \Omega_+^R$ , lorsque  $u$  est une fonction régulière (on sait déjà que  $\tilde{u} = u$  dans  $\Omega_+^R$ ).

Pour cela, nous donnons  $\gamma, \delta > 0$ ,  $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$  dont le choix sera spécifié ultérieurement. Pour  $x_2 < f(x_1)$ ,  $|x| < R$ , nous posons :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \tilde{u}_i(x_1, x_2) = au_i^\gamma(x_1, x_2) + bu_i^\delta(x_1, x_2) & i = 1 \text{ ou } 3 \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2) = pu_2^\gamma(x_1, x_2) + qu_2^\delta(x_1, x_2) \end{cases}$$

où, de façon générale,  $\phi^\alpha$  est le prolongement de  $\phi$  tel que :

$$(3.16) \quad \phi^\alpha(x_1, x_2) = \phi(x_1, f(x_1) + \alpha(f(x_1) - x_2)) \quad (\text{pour } \alpha > 0).$$

Tout d'abord nous avons :

$$(3.17) \quad \int_{\Omega_-^R} |\phi^\alpha(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{\alpha^2} \int_{\Omega_+^R} |\tilde{\phi}(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$$

c'est-à-dire que nous savons par (3.15) et (3.17) contrôler la norme  $L^2$  de  $\tilde{u}$  par celle de  $u$  avec une constante indépendante de  $f$ .

Il s'agit maintenant d'assurer la continuité de  $P_R u$  à travers l'interface

$$(3.18) \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ p + q = 1. \end{cases}$$

Enfin, nous voulons contrôler  $\varepsilon^\beta(\tilde{u})$  par  $\widetilde{\varepsilon^\beta(u)}$  où les fonctions  $\widetilde{\varepsilon_{ij}^\beta(u)}$  sont des prolongements de  $\varepsilon_{ij}^\beta(u)$  définis de manière analogue que les prolongements  $\tilde{u}_j$  donnés en (3.15) à savoir :

$$(3.19) \quad \widetilde{\varepsilon_{ij}^\beta(u)}(x_1, x_2) = A(\varepsilon_{ij}^\beta)^\gamma(x_1, x_2) + B(\varepsilon_{ij}^\beta)^\delta(x_1, x_2)$$

où, suivant le couple  $(i, j)$  nous aurons :

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A,B) = (a,b) \quad \text{pour } (i,j) = (1,1), (1,3), (3,1), (3,3) \\ (A,B) = (p,q) \quad \text{pour } (i,j) = (1,2), (2,1), (2,3), (3,2) \\ (A,B) = (-\gamma p, -\delta q) \quad \text{pour } (i,j) = (2,2) . \end{array} \right.$$

Bien entendu, on peut à nouveau estimer la norme  $L^2$  de  $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^\beta(u)$  dans  $\mathbb{R}^2$  par celle de  $\varepsilon_{ij}^\beta(u)$  dans  $\Omega_R^+$  à l'aide de constantes indépendantes de  $f$ . Soit :

$$(3.21) \quad |\widetilde{\varepsilon}_{ij}^\beta(u)|_{0, \mathbb{R}^2} \leq C |\varepsilon_{ij}^\beta(u)|_{0, \Omega_R^+} .$$

Nous remarquons alors que pour  $x_2 < f(x_1)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^\alpha + (1 + \alpha) f'(x_1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^\alpha \\ \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_2} = -\alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^\alpha . \end{array} \right.$$

Puis, nous calculons successivement les composantes de  $\varepsilon^\beta(\tilde{u})$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\beta(\tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} = a \frac{\partial u_1^\gamma}{\partial x_1} + b \frac{\partial u_1^\delta}{\partial x_1} \\ &= a \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^\gamma + b \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^\delta f'(x_1) [a(1+\gamma) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^\gamma + b(1+\delta) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^\delta] \\ \varepsilon_{11}^\beta(\tilde{u}) &= \widetilde{\varepsilon}_{11}^\beta(u) + f'(x_1) v_{11} \end{aligned}$$

où  $v_{11}$  est une fonction qui vérifie :

$$(3.22) \quad |v_{11}|_{0, \Omega_R^-}^2 \leq C(a, b, \gamma, \delta) \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|_{0, \Omega_R^+}$$

$$\begin{aligned}
\cdot \varepsilon_{22}^{\beta}(\tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} = -\gamma p \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{\gamma} - \delta q \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{\delta} = \widetilde{\varepsilon_{22}^{\beta}(u)} \\
\cdot 2\varepsilon_{21}^{\beta}(\tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} = -\gamma a \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^{\gamma} - \delta b \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^{\delta} + p \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^{\gamma} + q \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^{\delta} + \\
&\quad + f'(x_1) \left[ p(1+\gamma) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{\gamma} + q(1+\delta) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{\delta} \right] .
\end{aligned}$$

Si nous choisissons :

$$(3.23) \quad p = -\gamma a \quad q = -\delta b$$

nous pouvons écrire

$$2\varepsilon_{21}^{\beta}(\tilde{u}) = 2\widetilde{\varepsilon_{21}^{\beta}(u)} + f'(x_1)v_{21}$$

et grâce à (3.17),  $v_{21}$  vérifie l'estimation :

$$(3.24) \quad |v_{21}|_{0, \Omega_{-}^R} \leq C(p, q, \gamma, \delta) \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{0, \Omega_{+}^R}$$

$$\begin{aligned}
\cdot 2\varepsilon_{31}^{\beta}(\tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} + \beta \tilde{u}_1 = a[\varepsilon_{31}^{\beta}(u)]^{\gamma} + b[\varepsilon_{31}^{\beta}(u)]^{\delta} \\
&\quad + f'(x_1) \left[ a(1+\gamma) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^{\gamma} + b(1+\delta) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^{\delta} \right] \\
&= 2\widetilde{\varepsilon_{31}^{\beta}(u)} + f'(x_1)v_{31}
\end{aligned}$$

où  $v_{31}$  vérifie une estimation du type (3.19) avec  $C(a, b, \gamma, \delta)$

$$\cdot 2\varepsilon_{32}^{\beta}(\tilde{u}) = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} + \beta \tilde{u}_2 = -\gamma a \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^{\gamma} - \delta b \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^{\delta} + \beta(pu_2^{\gamma} + qu_2^{\delta})$$

avec le choix (3.23), nous avons simplement :

$$2\varepsilon_{32}^{\beta}(\tilde{u}) = 2\widetilde{\varepsilon_{32}^{\beta}}(u)$$

$$\text{. Enfin, } \varepsilon_{33}^{\beta}(\tilde{u}) = \beta^2 \tilde{u}_3 = \widetilde{\varepsilon_{33}^{\beta}}(u) \text{ .}$$

Donc, si nous pouvons choisir  $(a, b, p, q, \gamma, \delta)$  vérifiant (3.18) et (3.23), nous aurons établi que pour  $x_2 < f(x_1)$  :

$$(3.25) \quad \varepsilon_{ij}^{\beta}(\tilde{u}) = \widetilde{\varepsilon_{ij}^{\beta}}(u) + f'(x_1) v_{ij}^{\beta}$$

avec

$$|v_{ij}|_{0, \Omega_R^-}^2 \leq C |\nabla u|_{0, \Omega_R^+}^2 \text{ .}$$

Par suite, en regroupant (3.21) et (3.25), le résultat sera établi. Or, compte tenu de (3.23), (3.18) se réécrit :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \gamma a + \delta b = -1 \end{cases}$$

Ce système en  $a$  et  $b$  admet une solution unique dès que  $\gamma \neq \delta$ . Nous fixons donc  $\gamma, \delta, \gamma > 0, \delta > 0, \gamma \neq \delta$ . Nous en déduisons  $a$  et  $b$ , puis  $p$  et  $q$  par (3.23). Notons simplement que pour  $\gamma = \delta$ , (3.15) se réduit au prolongement par réflexion classique. Nous voyons que ce prolongement ne suffit pas pour établir notre résultat.  $\square$

Puisque nous avons fait l'hypothèse  $f'(0) = 0$ , le nombre  $K$  tend vers 0 avec  $R$ . Si  $R$  est choisi suffisamment petit (ce qui sera le cas pour la fin de la démonstration), nous pouvons rendre  $K < 1/(2C_2)$ .

### Lemme 3.3

Sous les hypothèses du lemme 2.2, et si  $K$  est suffisamment petit, alors (3.14) est vrai dans  $\Omega_+^R$ .

Démonstration

Nous distinguons les composantes transverses et longitudinales de  $v$  en notant :

$$v = (v_1, v_2, v_3) = (\bar{v}, v_3) .$$

Par définition de  $P_R$ , et grâce au lemme 2.1, nous avons :

$$(3.26) \quad \beta^2 |v|_{0, \Omega_+^R}^2 \leq 2 C_1^2 |\varepsilon^\beta(v)|_{0, \Omega_+^R}^2 + 2 C_2^2 K^2 |\nabla \bar{v}|_{0, \Omega_+^R}^2 + 2 C_2^2 K^2 |\nabla v_3|_{0, \Omega_+^R}^2 .$$

Pour majorer le dernier terme, nous écrivons :

$$(3.27) \quad \left| \begin{aligned} \left| \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \right|^2 &\leq 2 \left| \frac{\partial v_3}{\partial x_j} - \beta v_j \right|^2 + 2\beta^2 |v_j|^2 \\ &= 2 |\varepsilon_{j3}^\beta(v)|^2 + 2 \beta^2 |v_j|^2 \quad j=1,2 \end{aligned} \right.$$

En ce qui concerne le terme  $|\nabla \bar{v}|$ , la démonstration de NITSCHÉ [18] montre que pour des domaines  $\Omega_+^R$ , avec  $K$  suffisamment petit, nous avons l'inégalité de Korn en dimension 2, sous la forme :

$$(3.28) \quad |\nabla \bar{v}|_{0, \Omega_+^R}^2 \leq C_3 \sum_{i,j=1}^2 |\varepsilon_{ij}(\bar{v})|_{0, \Omega_+^R}^2$$

où  $C_3$  est une constante numérique.

Reportant les deux dernières inégalités dans (3.26), nous obtenons :

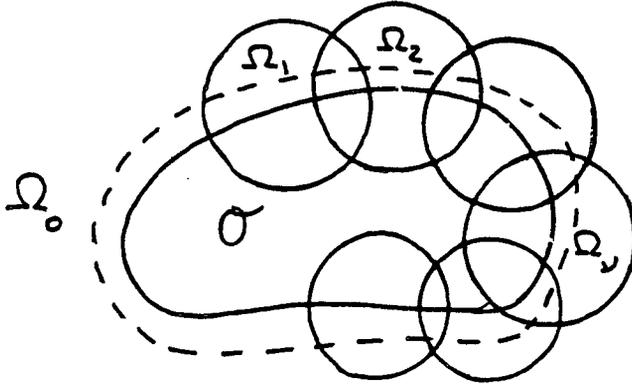
$$\beta^2 |v|_{0, \Omega_+^R}^2 \leq 2 C_1^2 + 2C_4(K^2) |\varepsilon^\beta(v)|_{0, \Omega_+^R}^2 + 4C_2^2 K^2 \beta^2 |\bar{v}|_{0, \Omega_+^R}^2$$

et si  $2C_2 K < 1$ , nous obtenons (3.14), avec  $\gamma_0 = 1 - 4C_2^2 K^2$ . □

Fin de la démonstration du théorème 3.1

Nous considérons maintenant le cas général d'un domaine  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^1$ .

Nous recouvrons  $\partial\Omega$  par des boules  $B_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, N$  centrées sur  $\partial\Omega$ , et nous notons  $\Omega_\nu = \Omega \cap B_\nu$ . A des rotations et des translations près,  $\Omega_\nu$  est un domaine du type considéré aux lemmes 3.2 et 3.3. Puisque ces transformations sont des isométries, elles laissent invariant  $|\varepsilon^\beta(\nu)|_{0, \Omega_\nu}$ . Quitte à augmenter le nombre  $N$  de boules, nous pouvons supposer que, pour tout  $\nu$ ,  $2C_2K_\nu < 1$ . Un tel choix est possible car la frontière  $\Gamma$  est compacte. D'autre part, nous considérons un ouvert  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ , de façon que  $\Omega_0$  et les  $\Omega_\nu$ ,  $\nu=1, \dots, N$  soient un recouvrement de  $\Omega$



Nous associons à ce recouvrement une partition de l'unité  $\phi_\nu$ ,  $\nu=0, \dots, N$  avec

$$\left| \begin{array}{l} \phi_\nu \in C_0^\infty(\Omega_\nu) \\ \text{supp } \Omega_\nu \subset \Omega_\nu \ ; \ \phi_\nu = 0 \ \text{sur } \partial\Omega_\nu / \partial\Omega \\ \sum_\nu \phi_\nu = 1 \end{array} \right.$$

et nous notons  $u_\nu = \phi_\nu u$ ,  $\nu = 0, \dots, N$ , de sorte que  $u = \sum_\nu u_\nu$ .

Après prolongement par 0, nous appliquons le lemme 3.1 à  $u_0$ , et nous obtenons :

$$(3.29) \quad |\varepsilon^\beta(u_0)|^2 \geq \beta^2 |u_0|^2 .$$

Les fonctions  $u_\nu$ ,  $\nu \geq 1$  vérifient les hypothèses du lemme 3.2 (en particulier, elles sont nulles sur la partie circulaire de la frontière). Par conséquent,

$$(3.30) \quad \forall \nu \geq 1, \quad |\varepsilon^\beta(u_\nu)|^2 \geq C_\nu \beta^2 |u_\nu|^2$$

avec  $C_\nu = 1 - 4C_2^2 K_\nu^2$ .

En regroupant ces inégalités, il vient :

$$\beta^2 |u|^2 \leq C \sum_\nu |\varepsilon^\beta(u_\nu)|^2, \quad C = \inf_\nu (1, C_\nu).$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à écrire : pour  $i, j = 1, 2$  :

$$\varepsilon_{ij}^\beta(u_\nu) = \phi_\nu \varepsilon_{ij}^\beta(u) + \frac{1}{2} (u_i \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_i})$$

et pour  $j = 1, 2$  :

$$\varepsilon_{j3}^\beta(u_\nu) = \phi_\nu \varepsilon_{j3}^\beta(u) + u_3 \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_j}$$

ce qui donne :

$$(3.31) \quad |\varepsilon^\beta(u_\nu)| \leq C (|\varepsilon^\beta(u)| + |u|).$$

En regroupant (3.29), (3.30) et (3.31), nous obtenons le théorème pour  $\beta$  assez grand, et donc finalement pour tout  $\beta$ . □

### Remarque 3.2

De la même façon que dans la démonstration de NITSCHÉ [18], ce résultat s'étend au cas de domaines polygonaux, ou lipschitziens.

Une conséquence immédiate du théorème 3.1 est le résultat suivant, que nous utiliserons dans l'étude des seuils.

Corollaire 3.2

Il existe une constante  $\gamma_1 > 0$ , indépendante de  $\beta$ , telle que :

$$\forall v \in V, |\nabla v|_{0,\Omega}^2 \leq \gamma_1 a(\beta; v, v).$$

Démonstration

Il suffit, ici aussi, de prouver :

$$|\varepsilon^\beta(v)|^2 \geq c |\nabla v|^2$$

puisque nous avons

$$a(\beta; v, v) \geq 2\mu |\varepsilon^\beta(v)|^2.$$

Nous reprenons les notations, et la technique du lemme 3.3. Nous majorons  $|\nabla v_3|$  par :

$$\left| \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \right|^2 \leq 2 |\varepsilon_{j3}^\beta(v)|^2 + 2\beta^2 |\bar{v}|^2 \quad j=1,2$$

et  $|\nabla \bar{v}|$  par l'inégalité de Korn en 2D :

$$|\nabla \bar{v}|^2 \leq c_1 \left( \sum_{i,j=1}^2 |\varepsilon_{ij}(\bar{v})|^2 + |\bar{v}|^2 \right).$$

Ces deux inégalités donnent :

$$|\nabla v|^2 \leq c (|\varepsilon^\beta(v)|^2 + \beta^2 |v|^2).$$

Le théorème 3.1 nous permet précisément de majorer le deuxième terme du second membre par le premier, ce qui achève la preuve du corollaire.  $\square$

Le dernier résultat nous permettra, au paragraphe suivant, de caractériser le spectre essentiel de  $A(\beta)$ . C'est un résultat de compacité.

Théorème 3.2

La forme bilinéaire  $p(\beta)$  est compacte dans  $V$ , c'est-à-dire que toute suite  $u_n$  telle que  $\|u_n\|_V$  soit bornée, il est possible d'extraire une sous-suite (encore notée  $u_n$ ) telle que

$$p(\beta; u_n, u_n) \text{ converge.}$$

Démonstration

Soit  $u_n$  vérifiant l'hypothèse du théorème. Par continuité de l'application trace  $\gamma_0$ , la suite  $\gamma_0 u_n$  est bornée dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$ . La frontière  $\Gamma$  étant compacte, il est possible d'extraire de  $u_n$  une sous-suite telle que  $\gamma_0 u_n$  converge dans  $L^2(\Gamma)^3$ . Par ailleurs :

$$p(\beta; u_n, u_n) = 2\beta(n_1 \gamma_0(u_n)_1; \gamma_0(u_n)_3)_{L^2(\Gamma)} + 2\beta(n_2 \gamma_0(u_n)_2; \gamma_0(u_n)_3)_{L^2(\Gamma)} .$$

□

IV - ETUDE DU SPECTRE DE  $A(\beta)$ 

L'objet de ce paragraphe est de décrire le spectre de  $A(\beta)$ , au moins en partie. Plus précisément, nous obtiendrons tout d'abord un encadrement a priori des valeurs propres; par une technique de perturbation, nous déterminerons également le spectre essentiel de  $A(\beta)$ . Nous déduirons de ces deux résultats que notre opérateur ne possède pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel. Le principe de Min-Max nous donne alors une caractérisation des valeurs propres. L'étude de ces valeurs propres fera l'objet d'une étude détaillée au § 5.

Avant de développer ce programme, nous rappelons quelques définitions et résultats standards, de théorie spectrale.

#### IV.1 - RAPPELS DE THEORIE SPECTRALE

Les définitions suivantes sont bien connues (cf. par exemple DAUTRAY-LIONS [9]; DUNFORD-SCHWARTZ [10]; REED-SIMON [21]; SCHECHTER [22]). Comme elles ne sont pas universelles, nous avons préféré les regrouper.

- Le spectre de  $A(\beta)$  est

$$\sigma(A(\beta)) = \{z \in \mathbb{C}, A(\beta) - zI \text{ n'admet pas d'inverse borné}\}$$

Comme  $A(\beta)$  est autoadjoint,  $\sigma(A(\beta)) \subset \mathbb{R}$ .

- Une valeur propre est un nombre  $\lambda$  tel que  $A(\beta) - \lambda I$  n'est pas injectif. L'ensemble des valeurs propres constitue le spectre ponctuel de  $A(\beta)$ .

- Le spectre discret est l'ensemble des valeurs propres isolées dans le spectre, et de multiplicité finie.

$\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A(\beta))$  si et seulement si :

$$- \exists \varepsilon > 0, \ ]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[ \cap \sigma(A(\beta)) = \{\lambda\}$$

$$- \dim\{\psi, A(\beta)\psi = \lambda\psi\} < \infty$$

- Le spectre essentiel  $\sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$  est le complémentaire du précédent dans  $\sigma(A(\beta))$ .

Nous utiliserons les caractérisations suivantes :

-  $\lambda \in \sigma(A(\beta))$  si et seulement si il existe une suite  $u_n \in D(A(\beta))$ , telle que

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{l} |u_n| = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |A(\beta)u_n - \lambda u_n| = 0 \end{array} \right. .$$

-  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$  si et seulement si on ne peut pas trouver de suite  $u_n$  vérifiant (4.1) et contenant une sous-suite fortement convergente dans  $H$ .

La caractérisation des valeurs propres repose, comme nous l'avons annoncé, sur le principe du Min-Max, qui généralise aux opérateurs autoadjoints un résultat bien connu pour les matrices symétriques. L'énoncé que nous en donnons provient de REED-SIMON [21]. Nous définissons le quotient de Rayleigh de  $A(\beta)$  :

$$\forall v \in D(A(\beta)) : R(\beta, v) = \frac{(A(\beta)v, v)}{|v|^2} .$$

Cette définition a en fait un sens pour  $v \in V$  et par densité de  $D(A(\beta))$  dans et continuité de  $a(\beta)$ , nous définissons

$$(4.2) \quad R(\beta, v) = \frac{(a(\beta); v, v)}{|v|^2} \quad \forall v \in V .$$

Nous définissons ensuite, pour  $m = 1, 2, \dots$

$$(4.3) \quad s_m(\beta) = \sup_{v_1 \dots v_{m-1}} \inf_{\substack{v \in [v_1 \dots v_{m-1}]^\perp \\ v \in V}} R(v)$$

où nous notons

$$[v_1, \dots, v_m]^\perp = \{v \in V, (v, v_i) = 0, \forall i \leq m\} .$$

Il est bien connu que, de façon générale, la suite  $s_m(\beta)$  est croissante au sens large et bornée par la borne inférieure du spectre essentiel de  $A(\beta)$  :

$$s_1(\beta) \leq s_2(\beta) \leq \dots \leq s_m(\beta) \dots \leq \inf \sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) .$$

Plus précisément, on sait que la suite  $s_m(\beta)$  converge vers la borne inférieure  $\sigma_*(\beta)$  du spectre essentiel de  $A(\beta)$  :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(\beta) = \sigma_*(\beta) .$$

Le principe du Min-Max permet de caractériser les valeurs de  $A(\beta)$  qui sont strictement inférieures à cette borne inférieure. L'énoncé précis est le suivant :

### Principe de Min-Max

Pour chaque  $m$ , l'alternative suivante a lieu :

- 1)  $A(\beta)$  possède  $m$  valeurs propres (compte tenu des multiplicités) strictement plus petites que la borne inférieure du spectre essentiel, et  $s_m(\beta)$  est la  $m$ -ième de ces valeurs propres.
- 2)  $s_m(\beta)$  est la borne inférieure du spectre essentiel et dans ce cas :

$$\cdot \forall n \geq m, s_n(\beta) = s_m(\beta) = \inf[\sigma_{\text{ess}}(A(\beta))]$$

$\cdot A(\beta)$  a au plus  $m-1$  valeurs propres (compte tenu des multiplicités) plus petites que  $s_m(\beta)$ .

Une caractérisation équivalente des nombres  $s_m(\beta)$  est donnée par :

$$(4.4) \quad s_m(\beta) = \inf_{\substack{V_m \subset V \\ \dim V_m = m}} \sup_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} R(\beta, v) .$$

### IV.2 - Encadrement des valeurs propres de $A(\beta)$

Nous faisons l'hypothèse que l'ouvert  $\Omega$  est de classe  $C^1$ .

#### Proposition 4.1

Toute valeur propre de  $A(\beta)$  vérifie la double inégalité :

$$(4.5) \quad \gamma_0 \beta^2 V_S^2 \leq \omega^2 \leq \beta^2 V_S^2$$

où  $\gamma_0$  est la constante définie au théorème 3.1.

#### Démonstration

Si  $\omega^2$  est valeur propre et  $u$  un vecteur propre correspondant, alors, multipliant par  $u$  l'équation :

$$A(\beta)u = \omega^2 u$$

et intégrant, il vient

$$a(\beta; u, u) = \omega^2(u, u) .$$

La première inégalité est alors une conséquence immédiate du théorème 3.1.

Pour démontrer la seconde, nous introduisons les quantités :

$$\text{rot}^\beta u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta u_2 \\ \beta u_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} . \quad \text{div}^\beta u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3$$

A partir des équations en déplacement (1.10), on montre que ces quantités vérifient les équations :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \mu(\Delta \text{rot}^\beta u - \beta^2 \text{rot}^\beta u) = -\rho \omega^2 \text{rot}^\beta u \\ (\lambda + 2\mu)(\Delta \text{div}^\beta u - \beta^2 \text{div}^\beta u) = -\rho \omega^2 \text{div}^\beta u \end{cases} .$$

Supposons que l'inégalité ne soit pas vérifiée :

$$\beta^2 v_s^2 < \omega^2 .$$

Nous avons donc :

$$\Delta \text{rot}^\beta u = \left( \beta^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \right) \text{rot}^\beta u .$$

Il résulte alors du théorème de Rellich (cf. [31]) que, pour  $R$  tel que :

$$B(0, R) \supset \emptyset$$

alors :  $\text{rot}^\beta u = 0$  ,  $|x| > R$  .

alors :  $\operatorname{rot}^\beta u = 0$  ,  $|x| > R$  .

Par ailleurs, de la première équation (4.6), nous tirons que  $\operatorname{rot}^\beta u$  est analytique dans  $\Omega$ . Comme elle est nulle à l'extérieur de la boule  $B(0,R)$ , et que nous supposons  $\Omega$  connexe, nous en déduisons :

$$(4.7) \quad \operatorname{rot}^\beta u = 0 \text{ dans } \Omega .$$

Nous écrivons cette identité sur la frontière, ce qui est possible si celle-ci est régulière (dans ce cas on sait que  $D(A(\beta)) = H^2(\Omega)^3$ ). Nous en déduisons :

$$(\operatorname{rot}^\beta u)_1 n_2 - (\operatorname{rot}^\beta u)_2 n_1 = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} - \beta(u_1 n_1 + u_2 n_2) = 0 .$$

Par ailleurs, nous réécrivons la 3-ème condition aux limites (1.11) sous la forme :

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} + \beta(u_1 n_1 + u_2 n_2) = 0 .$$

Avec ces deux identités, nous obtenons :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ u_1 n_1 + u_2 n_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

De (4.7), nous déduisons :

$$\beta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3 \right) = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \beta^2 u_3$$

et en reportant dans la troisième équation en déplacements (1.10), une équation vérifiée par  $u_3$  :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -V_P^2 \Delta u_3 + (\beta^2 V_P^2 - \omega^2) u_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \end{array} \right.$$

Nous distinguons 3 cas :

$$- \quad \beta^2 V_S^2 < \omega^2 < \beta^2 V_P^2 :$$

(4.9) est un problème coercif. Donc  $u_3 = 0$  dans  $\Omega$ .

$$- \quad \beta^2 V_P^2 < \omega^2 :$$

nous concluons par le théorème de Rellich comme précédemment.

$$- \quad \text{le cas limite où } \omega^2 = \beta^2 V_P^2 :$$

$u_3$  est une fonction harmonique, mais le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

n'admet pas de solution  $u_3$  dans  $L^2(\Omega)$  puisque  $\Omega$  est non borné.

Dans tous les cas, nous voyons que  $u_3 = 0$  dans  $\Omega$  et donc, grâce à (4.7), nous concluons que :

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et finalement  $\omega^2$  n'est pas valeur propre. □

Remarque 4.1

Lorsque  $\Omega$  n'est pas connexe, l'argument de prolongement unique ne s'applique plus.

On notera que l'inégalité  $\omega^2 \geq \gamma_0 \beta^2 v_S^2$  reste valable si  $\Omega$  est seulement lipschitzien puisqu'elle est une conséquence du résultat de coercivité donné au théorème 3.1.

IV.3 - Détermination du spectre essentiel de  $A(\beta)$ 

Un théorème bien connu de Weyl exprime que le spectre essentiel "reste invariant par perturbation compacte". Nous allons faire apparaître notre opérateur comme une perturbation de l'opérateur "dans tout l'espace" (c'est-à-dire défini par la même expression formelle, mais en l'absence de cavité). La perturbation étant localisée sur la frontière sera compacte.

Nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème de Weyl puisque l'opérateur  $A(\beta)$  et l'opérateur "dans tout l'espace" agissent sur des fonctions définies sur des ouverts différents. En fait, nous pourrions facilement adapter la démonstration, en construisant explicitement des suites vérifiant le critère (4.1).

Dans tout l'espace, on montre aisément (par transformation de Fourier) que le spectre de l'opérateur est réduit à son spectre essentiel, et est tout l'intervalle  $[\beta^2 v_S^2, +\infty[$ . Nous montrons donc le

Théorème 4.1

Le spectre essentiel  $\sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$  est :

$$\sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) = [\beta^2 v_S^2, +\infty[$$

Démonstration

Nous prouvons séparément les deux inclusions :

$$\underline{I} : \quad \sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) \subset [\beta^2 V_S^2, +\infty[ .$$

Soit donc  $\Lambda \in \sigma(A(\beta))$ ,  $\Lambda < \beta^2 V_S^2$ .

Par hypothèse, il existe une suite  $u^n \in D(A(\beta))$  :

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\beta)u^n - \Lambda u^n = w_n \rightarrow 0 \text{ dans } H \\ |u^n| = 1 . \end{array} \right. .$$

Pour montrer que  $\Lambda$  n'appartient pas au spectre essentiel  $\sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$ , il nous suffit d'extraire de  $u^n$  une sous-suite convergeant fortement dans  $H$ . Pour cela nous extrairons tout d'abord une sous-suite convergeant faiblement dans  $V$  et utiliserons le résultat de compacité établi au théorème 3.2 pour conclure. Multiplions la première égalité de (4.10) par  $u^n$  (scalairement dans  $H$ ).

$$(4.11) \quad a(\beta; u^n, u^n) = (w_n, u^n) + \Lambda |u^n|^2 .$$

Comme  $|u^n| = 1$  et  $w_n$  converge vers 0,  $a(\beta; u^n, u^n)$  est bornée, donc par le corollaire 3.2,  $u^n$  est bornée dans  $V$ .

Quitte à extraire une sous-suite, que nous noterons encore  $u^n$ , nous avons l'existence de  $u \in V$  tel que

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^n \rightharpoonup u \text{ dans } V \text{ faible} \\ u^n \rightharpoonup u \text{ dans } H \text{ faible} . \end{array} \right.$$

Nous pouvons passer à la limite dans :

$$a(\beta; u^n, v) - \Lambda(u^n, v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall v \in V$$

pour obtenir :

$$(4.13) \quad a(\beta; u, v) = \Lambda(u, v) \quad \forall v \in V$$

d'où résulte

$$(4.14) \quad u \in D(A(\beta)) \quad \text{et} \quad A(\beta)u = \Lambda u .$$

Pour prouver la convergence des normes, nous repartons de (4.11), qui donne :

$$(4.15) \quad a(\beta; u^n, u^n) - \Lambda |u^n|^2 \rightarrow 0 .$$

La proposition 2.2 nous donne une décomposition de  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  que nous écrivons :

$$\begin{aligned} a(\beta; v, v) &= \lambda c(\beta; v, v) + \mu d(\beta; v, v) + \mu p(\beta; v, v) + \beta^2 v_S^2 |v|^2 \\ &= e(\beta; v, v) + \mu p(\beta; v, v) + \beta^2 v_S^2 |v|^2 \end{aligned}$$

$e(\beta)$  étant une forme bilinéaire positive et continue sur  $V$ .

Nous réécrivons (4.15)

$$(4.16) \quad e(\beta; u^n, u^n) + (\beta^2 v_S^2 - \Lambda) |u^n|^2 + \mu p(\beta; u^n, u^n) \rightarrow 0$$

et aussi (4.13)

$$(4.17) \quad e(\beta; u, u) + (\beta^2 v_S^2 - \Lambda) |u|^2 + \mu p(\beta; u, u) = 0 .$$

D'autre part, puisque  $u^n$  est bornée dans  $V$ , nous savons que, d'après le

théorème 3.2, nous pouvons en extraire une sous-suite (toujours notée  $u^n$ ) telle que  $p(\beta; u^n, u^n)$  converge vers  $p(\beta; u, u)$ . En soustrayant (4.17) de (4.16), nous voyons que si nous posons :  $q_\Lambda(\beta; v, v) = e(\beta; v, v) + (\beta^2 v_S^2 - \Lambda) |v|^2$ , alors

$$q_\Lambda(\beta; u^n, u^n) \rightarrow q_\Lambda(\beta; u, u) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, puisque

$$q_\Lambda(\beta; u - u^n, u - u^n) = q_\Lambda(\beta; u, u) + q_\Lambda(\beta; u^n, u^n) - 2q_\Lambda(\beta; u, u^n)$$

et puisque  $2q_\Lambda(\beta; u, u^n)$  converge vers  $2q_\Lambda(\beta; u, u)$  d'après la convergence faible de  $u^n$ , nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_\Lambda(\beta; u - u^n; u - u^n) = 0$$

ce qui entraîne, comme  $q_\Lambda(\beta; v, v) \geq (\beta^2 v_S^2 - \Lambda) ||v||^2$  et  $\beta^2 v_S^2 - \Lambda > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u - u^n|^2 = 0.$$

C'est la convergence forte.

II :  $[\beta^2 v_S^2, +\infty[ \subset \sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$  .

Nous allons dans ce cas construire explicitement une suite régulière. Pour obtenir cette suite, l'idée de base est de raisonner comme si nous étions dans tout l'espace, où nous savons que l'onde  $S$  forme une fonction propre généralisée. Il suffit ensuite de tronquer convenablement cette fonction.

Plus précisément, si  $\Lambda > \beta^2 v_S^2$ , nous pouvons écrire :

$$\Lambda = v_S^2(\beta^2 + |k|^2) \quad k \in \mathbb{R}^2 \quad k = (k_1, k_2)$$

et nous définissons la fonction :

$$u_S(k) = \frac{1}{(|k|^2 + \beta^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -k_1 \end{pmatrix} e^{ikx}$$

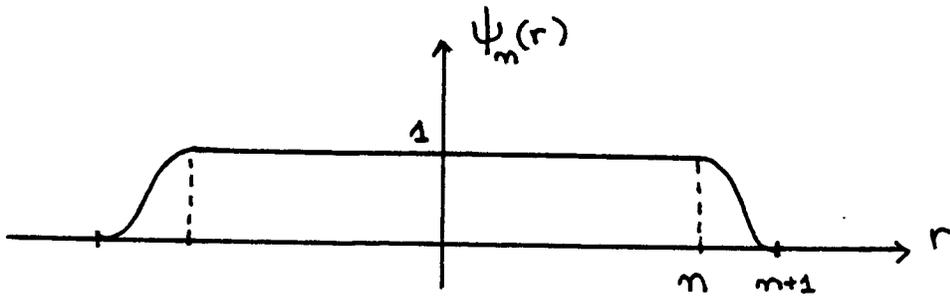
qui correspond à une onde SH.

Au sens des distributions, nous avons l'identité

$$(4.18) \quad A(\beta) (u_S(k)) = \Lambda u_S(k) .$$

Bien entendu, cette fonction n'est pas dans  $D(A(\beta))$ . Nous introduisons donc une suite tronquée  $\psi_n(r)$ , possédant les propriétés suivantes :

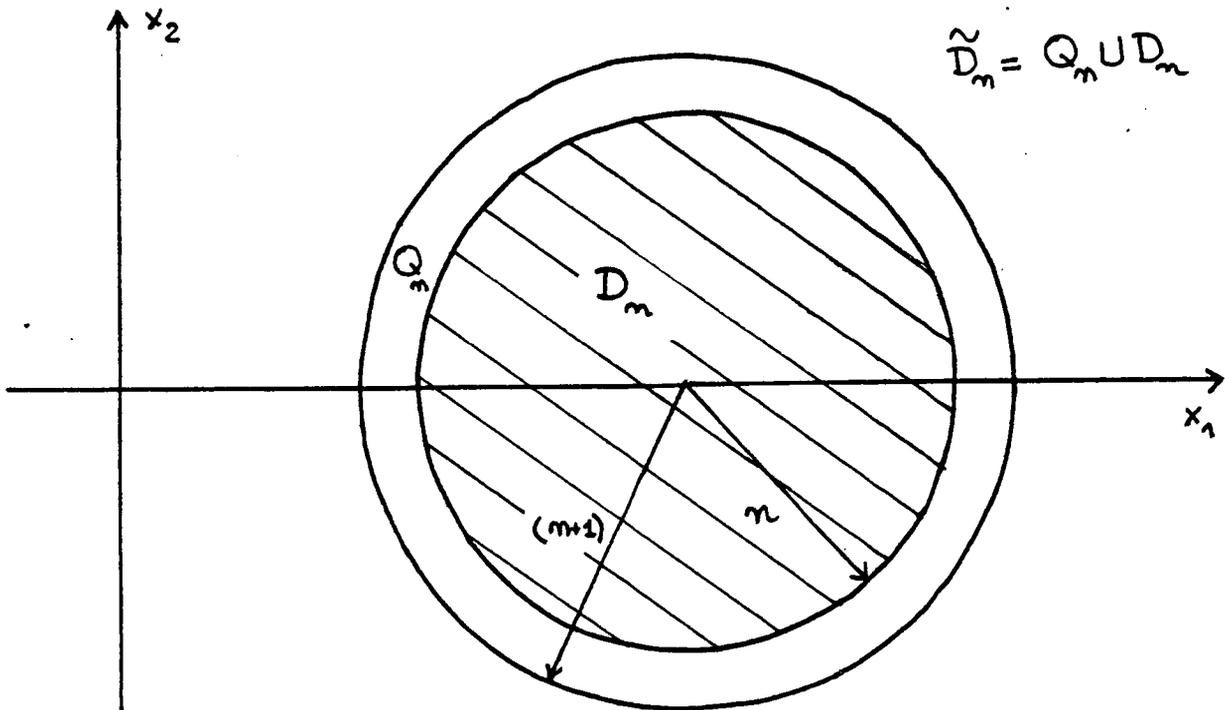
$$(4.19) \quad \left. \begin{array}{l} \psi_n \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}) \\ \psi_n(r) = 0 \quad \text{si } r \geq n+1 \\ \psi_n(r) = 1 \quad \text{si } r \leq n \\ \psi_n(r) \in [0,1] \quad \forall r \geq 0 \\ \|\psi_n\|_{2,\infty} \leq C \quad \forall n \end{array} \right\}$$



Nous introduisons la suite de fonctions :

$$(4.20) \quad \phi_n(x_1, x_2) = \psi_n([ (x_1 - 2n)^2 + x_2^2 ]^{1/2})$$

qui vérifie les propriétés suivantes :



$$(4.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \text{supp } \phi_n \subset \tilde{D}_n \quad ; \quad \phi_n \in [0,1] \\ \phi_n = 1 \quad x \in D_n \\ \text{supp } \nabla \phi_n \subset Q_n \\ \|\phi_n\|_{2,\infty} \leq C \quad \forall n \end{array} \right.$$

Enfin, nous posons :

$$(4.22) \quad u_n = C_n \phi_n u_S(k)$$

où  $C_n$  est choisi de façon que :

$$\|u_n\|_H = 1$$

puisque  $u_n$  est à support dans un disque de rayon  $n+1$ , il est clair que :

$$C_n \sim \frac{C}{n} \quad n \rightarrow \infty .$$

Pour  $n$  assez grand,  $\text{supp } u_n \cap \mathcal{O} = \emptyset$ , donc en particulier  $u_n$  est nul au voisinage de  $\mathcal{O}$ . Donc  $u_n \in D(A(\beta))$ . De plus,

$$(4.23) \quad A(\beta) u_n = \phi_n A(\beta) u_S(k) + P_{k,\beta} (D\phi_n, D^2\phi_n)$$

où  $P_{k,\beta}$  est un polynôme homogène de degré 1 en  $D\phi_n$  et  $D^2\phi_n$ , dérivées premières et secondes de  $\phi_n$ , dont les coefficients sont majorés par  $K(|k|+\beta)$  ( $K$  désignant une constante positive).

Donc, d'après (4.18) et (4.23),

$$|A(\beta)u_n - \lambda u_n| \leq K.C_n(1 + \beta^2 + |k|^2)^{1/2} \|\phi_n\|_{2,\infty}$$

et d'autre part :

$$\text{supp } (A(\beta)u - \lambda u_n) = Q_n \quad (\text{mes } Q_n = \Pi(2n+1)) .$$

Par conséquent :

$$|A(\beta)u_n - \lambda u_n|_H^2 \leq K.n.C_n^2(1 + \beta^2 + |k|^2) \|\phi_n\|_{2,\infty}^2$$

comme  $\|\phi_n\|_{2,\infty}$  est borné, et  $C_n \sim \frac{1}{n}$ , il en résulte :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A(\beta)u_n - \lambda u_n|_H = 0 .$$

Enfin, puisque le support de  $u_n$  part à l'infini,

$$(4.24) \quad u_n \rightharpoonup 0 \text{ faiblement .}$$

Comme nous avons imposé  $|u_n|_H = 1$ ,  $u_n$  ne peut avoir de sous-suite convergant fortement. Donc  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A(\beta))$ . □

#### V - ETUDE DES MAX-MIN. EXISTENCE DES MODES GUIDES

Ce paragraphe achève l'étude spectrale de l'opérateur  $A(\beta)$  par la mise en évidence de ses valeurs propres. Le principe du Min-Max (cf. § 4.1) en donne une caractérisation abstraite. Il nous reste à étudier les nombres  $s_m(\beta)$  définis en (4.3), et à déterminer à quelles conditions ils vérifient l'inégalité :

$$s_m(\beta) < \beta^2 v_S^2 = \inf \sigma_{\text{ess}}(A(\beta)) .$$

Ce seront alors des valeurs propres.

Nous montrons que, pour tout  $m$ ,  $s_m(\beta)$  devient plus petit que  $\beta^2 v_S^2$  si  $\beta$  est assez grand. Ceci définit un nombre  $\beta_m^*$ , le  $m$ -ième seuil, au delà duquel  $A(\beta)$  admet  $m$  valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

Nous pouvons préciser ce résultat, en montrant qu'en fait  $\beta_1^* = \beta_2^*$ , c'est-à-dire que pour toute valeur de  $\beta$ ,  $A(\beta)$  admet 2 valeurs propres  $s_1(\beta)$  et  $s_2(\beta)$ .

### V.1 - Etude générale des $s_m(\beta)$

Rappelons que nous avons (cf. (4.2), (4.3)) :

$$s_m(\beta) = \inf_{\substack{V_m \subset V \\ \dim V_m = m}} \left( \sup_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} \frac{a(\beta; v, v)}{(v, v)} \right).$$

Il est naturel de faire apparaître la quantité  $a(\beta; v, v) - \beta^2 v_S^2 |v|^2$ . Pour cela, nous utilisons la décomposition établie au corollaire 3.2, que nous réécrivons de la façon suivante :

$$(5.1) \quad a(\beta; u, v) - \beta^2 v_S^2 |v|^2 = p(\beta; v, v) + b_0(\beta; v, v) + b_1(\beta; v, v) + b_2(\beta; v, v)$$

avec

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(\beta; v, v) = 2\mu \int_{\Gamma} (v_1 n_1 + v_2 n_2) (\beta v_3) d\gamma \\ b_0(\beta; v, v) = \lambda \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \\ \quad + \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right|^2 dx \\ b_1(\beta; v, v) = (\lambda + \mu) \left\{ \int_{\Omega} |\beta^2 v_3|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) (\beta v_3) dx \right\} \\ b_2(\beta; v, v) = \mu \int_{\Omega} |\nabla v_3|^2 dx \end{array} \right.$$

Nous avons la

Proposition 5.1

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , il existe un nombre  $\beta_m^* \geq 0$ , appelé m-ième seuil, tel que :

$$\forall \beta > \beta_m^* \quad s_m(\beta) < \beta^2 v_S^2$$

Démonstration

Bien évidemment, la proposition revient à démontrer :

$$\inf_{\substack{V_m \subset V \\ \dim V_m = m \\ v \neq 0}} \sup_{v \in V_m} \frac{a(\beta; v, v) - \beta^2 v_S^2 |v|^2}{|v|^2} < 0 .$$

Il suffit donc d'exhiber un sous-espace de  $V$ , de dimension  $m$ , soit  $V_m$ , pour lequel

$$(5.3) \quad \forall v \in V_m, \quad a(\beta; v, v) - \beta^2 v_S^2 |v|^2 < 0 .$$

Les expressions des formes bilinéaires dans (5.2) nous suggèrent d'effectuer le changement d'échelle :  $w_3 = \beta v_3$ , c'est-à-dire d'introduire l'opérateur  $I_\beta$  :

$$(5.4) \quad I_\beta : \begin{cases} L^2(\Omega)^3 \rightarrow L^2(\Omega)^3 \\ (v_1, v_2, v_3) \rightarrow (v_1, v_2, \beta v_3) . \end{cases}$$

On constate alors que :

$$a(\beta; v, v) - \beta^2 v_S^2 |v|^2 = \tilde{a}(\beta; I_\beta v, I_\beta v)$$

ce qui définit  $\tilde{a}(\beta)$ . Nous décomposons  $\tilde{a}(\beta)$  comme  $a(\beta)$  :

$$(5.5) \quad \tilde{a}(\beta; w, w) = \tilde{p}(w, w) + b_0(w, w) + \tilde{b}_1(w, w) + \frac{1}{\beta^2} \tilde{b}_2(w, w)$$

avec

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}(w,w) = 2\mu \int_{\Gamma} (w_1 n_1 + w_2 n_2) w_3 d\gamma \\ \tilde{b}_1(w,w) = (\lambda + \mu) \int_{\Gamma} |w_3|^2 dx + 2(\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right) w_3 dx \\ \tilde{b}_2(w,w) = \mu \int_{\Omega} |\nabla w_3|^2 dx \end{array} \right.$$

et  $b_0$  n'a pas changé puisqu'elle ne dépend que de  $v_1$  et  $v_2$ .

Il nous suffit donc maintenant d'exhiber un espace  $W_m$ , de dimension  $m$ , vérifiant :

$$(5.7) \quad \forall w \in W_m, \tilde{a}(\beta; w, w) < 0$$

et le sous-espace  $V_m = I_{1/\beta} W_m$  vérifiera (5.3).

Il importe de remarquer que dans la décomposition (5.5),  $b_0$  ne dépend que de  $w_1$  et  $w_2$ ,  $\tilde{p}$  ne dépend de  $w_3$  que par ses valeurs sur la frontière,  $\tilde{b}_1$  est indépendant de  $\nabla w_3$ , et que le seul terme qui fasse intervenir  $\beta$  est  $\tilde{b}_2$ .

D'après la proposition 3.2, nous savons que la somme  $b_0 + \tilde{b}_1 + 1/\beta^2 \tilde{b}_2$  est positive. Le seul terme sur lequel nous puissions jouer pour rendre  $\tilde{a}$  négative est  $\tilde{p}$ . En nous appuyant sur ces remarques, nous procéderons de la façon suivante.

Nous fixons une fois pour toute  $w_1$  et  $w_2$ , puis nous choisissons  $w_3|_{\Gamma}$  de façon à rendre  $\tilde{p}$  négative. Puisque  $b_0$  est indépendant de  $w_3$ , un facteur d'homothétie sur la valeur de cette fonction suffit à rendre  $b_0 + \tilde{p}$  négative. Pour que la norme  $L^2$  de  $w_3$  n'augmente pas simultanément, nous prolongeons  $w_3$  à  $\Omega$  sur une "largeur" de plus en plus restreinte, de sorte que  $b_0 + \tilde{p} + \tilde{b}_1$  reste négative. Bien entendu, nous perdons alors tout contrôle sur la norme de  $\nabla w_3$ , mais en choisissant  $\beta$  suffisamment grand, nous rendrons le dernier terme négligeable, et nous aurons vérifié (5.7).

Passons à la mise en oeuvre de ce programme. Nous nous donnons tout d'abord

$m$  vecteurs dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ , soit  $g^1 \dots g^m$ , que nous choisissons orthonormaux dans  $L^2(\Gamma)$  :

$$(5.8) \quad \int_{\Gamma} g^i g^j d\gamma = \delta_{ij} .$$

Avec nos hypothèses sur la régularité de  $\Gamma$  (que l'on peut ici affaiblir), les fonctions  $n_1 g^i$  et  $n_2 g^i$  sont dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  ( $n = (n_1, n_2)$  désigne la normale sortante à  $\Gamma$ , que nous choisissons unitaire). Nous pouvons donc relever ces fonctions dans  $H^1(\Omega)$ , et nous notons  $P$  un relèvement, fixé une fois pour toutes. Nous aurons en outre besoin du lemme technique suivant, que nous admettons provisoirement :

Lemme 5.2

Etant donné  $\varepsilon > 0$ , il existe un opérateur de relèvement :

$$P_{\varepsilon} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega) \text{ vérifiant}$$

$$\text{supp } P_{\varepsilon} g \subset \Omega_{\varepsilon} = \{x \in \Omega, d(x, \Gamma) < \varepsilon\}$$

$$\forall g \in H^{1/2}(\Gamma) \quad , \quad |P_{\varepsilon} g|_{0, \Omega} \leq C \sqrt{\varepsilon} |g|_{0, \Gamma}$$

Nous nous donnons ensuite deux paramètres :  $\eta$  destiné à tendre vers l'infini et  $\varepsilon$  (bien entendu destiné à tendre vers 0!). En augmentant  $\eta$ , nous rendrons  $b_0 + \tilde{p}$  négatif, tandis que  $\varepsilon$  nous permettra de contrôler la norme de  $w_3$ . Nous définissons les fonctions  $w_{\eta, \varepsilon}^i$   $i=1, \dots, n$  par :

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (w_{\eta, \varepsilon}^i)_j = P(n_j g^i) \quad j=1, 2 \\ (w_{\eta, \varepsilon}^i)_3 = \eta P_{\varepsilon}(g^i) . \end{array} \right.$$

Notons tout de suite que  $(w_{\eta, \varepsilon}^i)_1$  et  $(w_{\eta, \varepsilon}^i)_2$  sont indépendants de  $\eta$  et  $\varepsilon$ .

Puisque les  $g^i$  sont indépendants dans  $L^2(\Gamma)$ , les  $w_{\eta,\varepsilon}^i$  forment un système libre de  $V$ . Elles définissent donc une base d'un sous-espace de dimension  $n$  de  $V$ , soit  $W_m$ . Si  $w \in W_m$ , nous notons

$$w = \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i w_{\eta,\varepsilon}^i, \quad \tilde{w}_i \in \mathbb{R}$$

et nous notons  $\tilde{w}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  associé.

$b_0$  définit une forme quadratique sur  $W_m$  à laquelle nous pouvons faire correspondre une matrice  $Q$ , qui sera indépendante de  $\eta$  et  $\varepsilon$ .

D'autre part, nous avons :

$$\left| \begin{aligned} \tilde{p}(w_{\eta,\varepsilon}^i; w_{\eta,\varepsilon}^j) &= \mu \eta \int_{\Gamma} [(g^i n_1) n_1 + (g^j n_2) n_2] g^j d\gamma \\ &= \mu \eta \delta_{ij} \end{aligned} \right.$$

et la matrice associée à  $p$  est  $\mu\eta I$ , grâce à (5.8). Si donc nous choisissons  $\eta$  assez grand, la forme  $b_0 + \tilde{p}$  peut être rendue négative, c'est-à-dire :

$$(5.10) \quad \exists \gamma_\eta > 0, \quad b_0(w,w) + \tilde{p}(w,w) < -\gamma_\eta |w|^2.$$

En ce qui concerne  $\tilde{b}_1$ , nous avons pour  $w \in V$  :

$$|\tilde{b}_1(w,w)| \leq (\lambda + \mu) |w_3|_0^2 + 2(\lambda + 2\mu) |w_3|_0 (|w_1|_1 + |w_2|_1).$$

Si maintenant

$$w = \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i w_{\eta,\varepsilon}^i, \quad w_{\eta,\varepsilon}^i \in W_m,$$

alors  $|w_1|_1 + |w_2|_1 \leq C |\tilde{w}|$ ,  $C$  étant indépendante de  $\varepsilon$ . De même :

$$|w_3|_0^2 \leq \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{w}_i|^2 \right) \sum_{i=1}^m |(w_{\eta,\varepsilon}^i)_3|^2 = |\tilde{w}|^2 \left( \sum_{i=1}^m \eta^2 |p_\varepsilon(g^i)|^2 \right)$$

$$C \eta^2 \varepsilon |\tilde{w}|^2 \left( \sum_{i=1}^m |g^i|_{0,\Gamma}^2 \right) \leq C \varepsilon |\tilde{w}|^2$$

C ne dépendant que de  $m$  et de  $\eta$  (qui est maintenant fixé), nous en déduisons :

$$(5.11) \quad |\tilde{b}_1(w,w)| \leq C \varepsilon^{1/2} |\tilde{w}|^2 .$$

Par conséquent :

$$b_0(w,w) + \tilde{p}(w,w) + \tilde{b}_1(w,w) \leq (-\gamma_\eta + C \varepsilon^{1/2}) |\tilde{w}|^2$$

et nous choisissons, par exemple,  $\varepsilon = (\gamma_\eta/2C)^2$ , de sorte que

$$b_0(w,w) + \tilde{p}(w,w) + \tilde{b}_1(w,w) \leq -\frac{\gamma_\eta}{2} |\tilde{w}|^2 .$$

Nous avons donc maintenant fixé  $\eta$  et  $\varepsilon$ . Nous n'avons aucun contrôle sur  $|\nabla w_3|_0$ . Nous devons donc jouer sur  $\beta$  pour contrôler  $1/\beta^2 \tilde{b}_2(w,w)$  :

$$\frac{1}{\beta^2} |\tilde{b}_2(w,w)| \leq \frac{C}{\beta^2} |\tilde{w}|^2 \left( \sum_{i=1}^m |\nabla(w_{\eta,\varepsilon}^i)_3|^2 \right) \leq \frac{C(\eta,\varepsilon)}{\beta^2} |\tilde{w}|^2 .$$

Pour  $\beta$  assez grand, nous aurons bien :

$$\tilde{a}(\beta;w,w) < -\delta_m(\eta,\varepsilon,\beta) |\tilde{w}|^2 < 0$$

pour un certain  $\delta_m(\eta,\varepsilon,\beta) > 0$ . □

Pour conclure, donnons une démonstration constructive du lemme 5.2.

#### Démonstration du lemme 5.2

Nous démontrons tout d'abord le lemme lorsque l'ouvert  $\Omega$  est défini par :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq f(x)\}$$

de frontière :

$$\Gamma = \{(x,f(x)) , x \in \mathbb{R}\} .$$

Nous faisons sur  $f$  l'hypothèse

$$f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) .$$

Pour construire notre opérateur  $P_\varepsilon$ , nous introduisons l'application :

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^2 = \{(x,y), y \geq 0\}$$

$$(x,y) \rightarrow (x, y-f(x)) = \Phi(x,y) .$$

Notons que  $\Phi$  est inversible avec :

$$\Phi^{-1}(x,y) = (x, y+f(x))$$

et que la Jacobien de  $\Phi$  est égal à 1 en tout point de  $\Omega$  de telle sorte que l'opérateur

$$J : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^2)$$

$$v(x,y) \rightarrow (Jv)(x,y) = v(\Phi(x,y))$$

est une isométrie inversible de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ .

De plus, pour  $\tilde{v}$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$

$$(J^{-1}\tilde{v})(x,y) = v(\Phi^{-1}(x,y)) = \tilde{v}(x, y+f(x)) .$$

Remarquons en outre que :

$$\frac{\partial}{\partial x}(Jv(x,y)) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y-f(x)) - f'(x) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y-f(x))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Jv(x,y)) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y-f(x))$$

ce qui montre que  $J$  applique continuellement  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\mathbb{R}_+^2)$  avec :

$$\|J\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}_+^2))} \leq C(1 + \|f\|_{1,\infty}) .$$

De la même manière, on montre que  $J^{-1}$  applique continuellement  $H^1(\mathbb{R}_+^2)$  dans  $H^1(\Omega)$  avec

$$\|J^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}_+^2), H^1(\Omega))} \leq C(1 + \|f\|_{1,\infty}) .$$

En deuxième lieu, nous construisons un opérateur de relèvement :

$$R_\varepsilon : H^{1/2}(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R}_+^2)$$

$$\tilde{\phi}(x) \rightarrow R_\varepsilon \tilde{\phi}(x, y)$$

où, en utilisant la transformation de Fourier partielle dans la direction  $x$  ( $\tilde{v}(x, y) \rightarrow \hat{v}(k, y)$ )

$$\left| \begin{array}{l} R_\varepsilon \hat{\tilde{\phi}}(k, y) = \hat{\phi}(k) \frac{\text{ch}(|k|(y-\varepsilon))}{\text{ch}|k|\varepsilon} \quad y \in ]0, \varepsilon[ \\ R_\varepsilon \tilde{\phi}(x, y) = 0 \quad y \geq \varepsilon \end{array} \right.$$

(Remarquons que dans la bande  $\{0 < y < \varepsilon\}$ ,  $R_\varepsilon \tilde{\phi}$  n'est autre que la solution de  $\Delta(R_\varepsilon \tilde{\phi}) = 0$ , avec  $(R_\varepsilon \tilde{\phi})(x, 0) = \tilde{\phi}(x)$  et  $(R_\varepsilon \tilde{\phi})(x, \varepsilon) = 0$ ). Nous avons

$$\|R_\varepsilon \tilde{\phi}\|_{0, \mathbb{R}_+^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(k)|^2 \left( \int_0^\varepsilon \text{ch}^2(|k|(y-\varepsilon)) dy \right) \frac{dk}{\text{ch}^2|k|\varepsilon} .$$

Or, un simple calcul montre que

$$\int_0^\varepsilon \text{ch}^2|k|(y-\varepsilon) dk = \varepsilon \left( \frac{1}{2} + \frac{\text{sh} 2|k|\varepsilon}{4|k|\varepsilon} \right) .$$

La fonction  $x \rightarrow 1/\text{ch}^2 x (1/2 + \text{sh} 2x/4x)$  est uniformément bornée sur  $\mathbb{R}$ , par conséquent :

$$|\mathbb{R}_\varepsilon \phi|_{0, \mathbb{R}_+^2}^2 \leq C\varepsilon \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(k)|^2 dk = C\varepsilon |\phi|_{0, \mathbb{R}}^2 .$$

Pour conclure, nous introduisons l'opérateur :

$$I : H^{1/2}(\mathbb{R}) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

$$\tilde{v}(x) \rightarrow Iv(M) = \tilde{v}(x) \quad \text{en } M = (x, f(x))$$

qui est linéaire et continu de  $H^2(\mathbb{R})$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  par définition même de  $H^{1/2}(\Gamma)$  (cf. [11]). En outre, le caractère lipschitzien de  $f$  entraîne également que  $I$  est linéaire continu (d'inverse continu) de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\Gamma)$  et que :

$$\left| \begin{array}{l} \|I\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}); L^2(\Gamma))} \leq C \|f\|_{1, \infty} \\ \|I^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma); L^2(\mathbb{R}))} \leq C \|f\|_{1, \infty} \end{array} \right.$$

Alors, il est facile de vérifier que l'opérateur

$$P_\varepsilon = J^{-1} \circ R_\varepsilon \circ I^{-1}$$

convient pour notre ouvert  $\Omega$  considéré. Pour achever la démonstration, il suffit de raisonner comme au théorème 3.1, à l'aide d'une partition de l'unité et de cartes locales du type  $y = f(x)$ . □

Nous pouvons joindre la proposition 5.1 au théorème 4.1 pour énoncer, grâce au principe du Max-Min (voir § 4.1), le :

#### Théorème 5.1

Il existe  $\beta_m^* \geq 0$ , tel que pour  $\beta > \beta_m^*$ , l'opérateur  $A(\beta)$  admet  $m$  valeurs propres qui sont les nombres  $s_1(\beta), \dots, s_m(\beta)$ , comptées avec leur multiplicité.

La relation de dispersion caractérisant les valeurs propres de  $A(\beta)$  est donc :

$$(5.12) \quad \left| \begin{array}{l} \omega_m(\beta)^2 = s_m(\beta) \\ s_m(\beta) < \beta^2 v_S^2 . \end{array} \right.$$

La proposition 5.1 définit en réalité deux nombres

$$(5.13) \quad \left| \begin{array}{l} \beta_m^0 = \sup\{\beta_m \quad \forall \beta \leq \beta_m, s_m(\beta) = \beta^2 v_S^2\} \\ \beta_m^* = \inf\{\beta_m \quad \forall \beta > \beta_m^*, s_m(\beta) < \beta^2 v_S^2\} . \end{array} \right.$$

Les deux suites  $\beta_m^0$  et  $\beta_m^*$  sont clairement toutes deux croissantes au sens large.

$\beta_m^0$  est le m-ième seuil inférieur et  $\beta_m^*$  le m-ième seuil supérieur. Bien entendu,

$$0 \leq \beta_m^0 \leq \beta_m^* .$$

Nous ne savons pas dire si cette inégalité est une égalité. L'étude numérique de la relation de dispersion du guide circulaire laisse penser que c'est effectivement le cas pour cette géométrie particulière.

Nous pouvons affiner le résultat du théorème 5.1 en démontrant que deux modes se propagent pour toute valeur de  $\beta$ , ce qui revient à exprimer que :

$$(5.14) \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 0 .$$

De façon équivalente, nous avons la :

### Proposition 5.2

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour tout } \beta > 0, \\ s_1(\beta) < \beta^2 v_S^2 \\ s_2(\beta) < \beta^2 v_S^2 . \end{array} \right.$$

Démonstration

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer la proposition pour  $s_2(\beta)$ , puisque l'on sait déjà que  $s_1(\beta) \leq s_2(\beta)$ . Nous utiliserons la même définition de  $s_2(\beta)$  qu'à la proposition 4.1. Nous devons donc exhiber un espace  $V_2$  de dimension 2 tel que :

$$\forall \beta, \forall v \in V_2, a(\beta; v, v) < \beta^2 v_S^2 |v|^2.$$

Nous utiliserons une fois de plus de façon essentielle la proposition 3.2. Nous écrivons :

$$a(\beta; v, v) - \beta^2 v_S^2 |v|^2 = p(\beta; v, v) + q_0(\beta; v, v) + q_1(\beta; v, v)$$

où  $p(\beta)$  est donné par (3.10) et

$$(5.15). \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0(\beta; v, v) = (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \beta^2 |v_3|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla v_3|^2 dx \\ q_1(\beta; v, v) = (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right|^2 dx \\ \quad - 2(\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right|^2 dx. \end{array} \right.$$

Puisque la proposition 3.2 nous dit que  $q_0 + q_1$  est une forme positive, notre ressource est encore une fois de jouer sur  $p$ .

Il est bien connu par les mécaniciens que les modes sont "d'autant plus guidés que  $\beta$  est grand". A la limite, si un mode guidé doit exister pour  $\beta \rightarrow 0$ , la fonction correspondant doit tendre vers une constante. Raisonnant comme si  $v_1$  et  $v_2$  étaient constantes le terme  $q_1(v, v)$  disparaît. Si, de plus  $v_3$  est fixée, nous pouvons jouer sur les valeurs de  $v_1$  et  $v_2$  pour rendre  $p + q_0$  négatif.

Une fois de plus, nous nous donnons  $R$  et  $\eta$  deux paramètres réels et nous fixons également  $R_0 > 0$ , de sorte que  $\emptyset \subset B(0, R_0) \cdot (\emptyset, \text{rappelons le, est l'obstacle})$ .

Nous considérons une fonction  $v_R$ , égale à 1 sur  $B(0, R_0)$ , nulle pour  $|x| > R$ , et que nous raccordons continûment de façon à minimiser le gradient de  $v_R$ . De façon classique (cf. BAMBERGER-BONNET [3]), cela correspond à prendre  $v_R$  radiale et :

$$(5.16) \quad R_0 < r < R : v_R(r) = \frac{\text{Log } r/R}{\text{Log } R_0/R}$$

de sorte que :

$$(5.17) \quad \int_{R_0}^R |\nabla v_R|^2 r dr = \frac{1}{\text{Log } R/R_0} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Nous fixons ensuite un relèvement dans  $H^1(\Omega)$  de  $n_1$  et  $n_2$ , soit  $\bar{v}_1$  et  $\bar{v}_2$ . Nous considérons le sous-espace  $V_2$  de  $V$  :

$$V_2 = \{v \in V, \exists (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2, v = (\eta\gamma_1 v_R; \eta\gamma_2 v_R; \gamma_1 \bar{v}_1 + \gamma_2 \bar{v}_2)\}$$

c'est donc un sous-espace de dimension 2.

Pour  $v \in V_2$ , nous réécrivons les différentes formes quadratiques :

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{aligned} p(\beta; v, v) &= -2\mu\beta\eta \int_{\Gamma} (\gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2)(\gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2) d\gamma \\ q_0(\beta; v, v) &= (\lambda+2\mu) \int_{\Omega} \beta^2 |\gamma_1 \bar{v}_1 + \gamma_2 \bar{v}_2|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\gamma_1 \nabla \bar{v}_1 + \gamma_2 \nabla \bar{v}_2|^2 dx \\ q_1(\beta; v, v) &= \lambda \int_{\Omega} \left| \gamma_1 \frac{\partial v_R}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial v_R}{\partial x_2} \right|^2 dx + 2\mu\eta^2 \int_{\Omega} \left| \gamma_1 \frac{\partial v_R}{\partial x_2} + \gamma_2 \frac{\partial v_R}{\partial x_1} \right|^2 dx \\ &\quad - 2(\lambda+\mu)\beta\eta \int_{\Omega} \left( \gamma_1 \frac{\partial v_R}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial v_R}{\partial x_2} \right) (\gamma_1 \bar{v}_1 + \gamma_2 \bar{v}_2) dx \\ &\quad + 2\mu\eta^2 \int_{\Omega} \left( \gamma_1^2 \left| \frac{\partial v_R}{\partial x_1} \right|^2 + \gamma_2^2 \left| \frac{\partial v_R}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx. \end{aligned} \right.$$

Nous choisissons  $\eta$  assez grand pour que la forme bilinéaire  $q_0(\beta) + p_1(\beta)$  soit négative sur  $V_2$ . Notons que cette forme est indépendante du choix de  $R$ .

Ensuite, nous majorons  $q_1$  :

$$|q_1(v,v)| \leq C |\nabla v_R|^2 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}.$$

Grâce à (5.17), il suffit de prendre  $R$  assez grand pour que  $p_0(\beta) + q_1(\beta) + q_1(\beta)$  reste négative, ce qui achève la démonstration.  $\square$

Notons que pour étendre la démonstration au cas où l'ouvert  $\Omega$  est seulement supposé localement  $C^2$ , il suffit de remplacer les relèvements  $\bar{v}_1$  et  $\bar{v}_2$  de  $n_1$  et  $n_2$  par des relèvements de  $\phi n_1$  et  $\phi n_2$  où  $\phi$  désigne une fonction régulière à support dans la partie  $C^2$  de la frontière et positive.  $\square$

## VI - ETUDE DES SEUILS

L'objet de ce paragraphe est de montrer que les seuils définis précédemment tendent vers l'infini avec  $m$ . En particulier, pour chaque valeur de  $\beta$ , l'opérateur  $A(\beta)$  n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. Il suffirait de montrer que les seuils inférieurs  $\beta_m^0$  tendent vers l'infini, toutefois le résultat plus faible sur les seuils supérieurs est plus simple, et nous l'établirons tout d'abord.

Les deux propriétés sont une conséquence d'un résultat de comparaison entre les valeurs propres de  $A(\beta)$  pour des domaines  $\Omega$  différents.

### VI.1 - Un résultat de comparaison

Il utilise une partition de  $\Omega$  en deux ouverts, et la décomposition correspondante des espaces fonctionnels. Nous introduisons donc :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

$$H_j = L^2(\Omega_j)^3, \quad V_j = H^1(\Omega_j)^3 \subset H_j \quad j=1,2.$$

Dans la suite, nous identifierons tout élément de  $H_j$  avec son prolongement à  $\Omega$  par 0 (qui est dans  $H$ ).

Ceci permet d'écrire

$$(6.1) \quad H_j \subset H \quad \text{et} \quad H = H_1 \oplus H_2$$

mais par contre, on n'a pas :  $V_j \subset V$  (les fonctions prolongées par 0 ne sont pas a priori dans  $V$ ), et l'on a seulement

$$(6.2) \quad V \subset V_1 \oplus V_2 .$$

En décomposant les intégrales sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on voit que

$$\forall v \in H, v = v_1 + v_2 : |v|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2$$

et

$$\forall v \in V, v = v_1 + v_2 : a(\beta; v, v) = a_1(\beta; v_1, v_1) + a_2(\beta; v_2, v_2)$$

$a_1$  et  $a_2$  étant les formes bilinéaires définies par la même expression que  $a$ , les intégrales étant prises sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  au lieu de  $\Omega$ . Enfin, notons que pour  $(p, q)$  dans  $\mathbb{N}^2$  :

$$(6.3) \quad H_1^p \times H_2^q \subset H^{p+q} .$$

Nous avons tout d'abord besoin d'un simple lemme technique :

#### Lemme 6.1

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $H$

$$(V_1 \oplus V_2) \cap F^\perp = (V_1 \cap F^\perp) \oplus (V_2 \cap F^\perp) .$$

L'orthogonalité étant à prendre par rapport au produit scalaire de  $H$ .

#### Démonstration

Soit  $x \in (V_1 \oplus V_2) \cap F^\perp$ . Nous écrivons :

$$x = x_1 + x_2, \quad x_j \in V_j \quad \text{et} \quad (x, \rho) = 0 \quad \forall \rho \in F .$$

Décomposant  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_j \in H_j$ , nous avons donc :

$$(x_1, \rho_1) + (x_2, \rho_2) + (x_1, \rho_2) + (x_2, \rho_1) = 0 \quad \forall \rho \in F .$$

Mais, par la définition du produit scalaire, nous avons :

$$(x_1, \rho_2) = (x_2, \rho_1) = 0 \quad (\text{supports disjoints})$$

dès que  $x_1 \in H_1$  ,  $\rho_2 \in H_2$  ,  $x_2 \in H_2$  ,  $\rho_1 \in H_1$  .

Reste donc

$$(x_1, \rho_1) + (x_2, \rho_2) = 0 \quad \forall \rho \in F .$$

Choisissant successivement  $\rho = \rho_j \in H_j \cap F$ , il vient

$$(x_1, \rho_1) = (x_2, \rho_2) = 0 \quad \forall \rho_1 \in F \cap H_1 ; \forall \rho_2 \in F \cap H_2 .$$

Par conséquent

$$x_1 \in V_1 \cap F^\perp \quad ; \quad x_2 \in V_2 \cap F^\perp$$

et  $x = x_1 + x_2 \in (V_1 \cap F^\perp) + (V_2 \cap F^\perp)$  .

D'autre part, la somme est directe car la somme  $V_1 \oplus V_2$  l'est.

Réciproquement, soit

$$x = x_1 + x_2 \quad , \quad x_j \in V_j \cap F^\perp$$

et soit  $\rho \in F$ .

Alors,

$$(x, \rho) = (x_1, \rho) + (x_2, \rho) = 0 + 0 = 0$$

et  $x \in (V_1 \oplus V_2) \cap F^\perp$ . □

Nous définissons maintenant les nombres  $s_m^j(\beta)$  correspondant à la partition de  $\Omega$ :

$$(6.4) \quad s_m^j(\beta) = \sup_{F \in H_j^{m-1}} \inf_{v_j \in V_j \cap F^\perp} \frac{a_j(\beta; v_j, v_j)}{|v_j|^2} \quad j=1,2 .$$

Nous identifions ici tout élément  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  de  $H^m$  au sous-espace de dimension  $m$  engendré par  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Autrement dit, un élément  $F$  quelconque de  $H^m$  désigne un sous-espace de  $H$  de dimension  $m$ .

Nous avons la :

Proposition 6.1

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \text{Min}(s_p^1(\beta), s_q^2(\beta)) \leq s_{p+q}(\beta) .$$

Démonstration

Nous suivons ici une démarche due à COURANT et HILBERT [8] (cf. Thm VI 4, p. 409).

Nous introduisons encore quelques notations. Tout d'abord :

$$s_m^*(\beta) = \sup_{F \in H^{m-1}} \inf_{v \in (V_1 \oplus V_2) \cap F^\perp} \left( \frac{a_1(\beta; v_1, v_1) + a_2(\beta; v_2, v_2)}{|v_1|^2 + |v_2|^2} \right) .$$

Puisque l'inf. du quotient de Rayleigh de  $s_m^*(\beta)$  est pris sur un espace plus grand que pour  $s_m(\beta)$  (cf. (6.2)), nous avons

$$(6.4) \quad s_m^*(\beta) \leq s_m(\beta) .$$

De même, soit :

$$s_{p+q}^{**}(\beta) = \sup_{\substack{F \in H_1^p \times H_2^q \\ \dim F = p+q-1}} \inf_{v \in (V_1 \oplus V_2) \cap F^\perp} \left( \frac{a_1(\beta; v_1, v_1) + a_2(\beta; v_2, v_2)}{|v_1|^2 + |v_2|^2} \right) .$$

Cette fois, en comparant  $s_{p+q}^{**}(\beta)$  et  $s_{p+q}^*(\beta)$ , c'est un sup que l'on prend sur un espace plus grand (cf. (6.3)) :

$$(6.5) \quad s_{p+q}^{**}(\beta) \leq s_{p+q}^*(\beta) .$$

En joignant (6.4) et (6.5), nous obtenons :

$$(6.6) \quad s_{p+q}^{**}(\beta) \leq s_{p+q}(\beta) .$$

Pour démontrer la proposition, il nous suffit de prouver que :

$$(6.7) \quad \text{Min}(s_p^1(\beta), s_q^2(\beta)) \leq s_{p+q}^{**}(\beta) .$$

Grâce au lemme 6.1, nous avons de plus :

$$s_{p+q}^{**}(\beta) = \sup_{\substack{F \in H_1^p \times H_2^q \\ \dim F = p+q-1}} \left[ \inf_{\substack{v_1 \in V_1 \cap F_1^\perp \\ v_2 \in V_2 \cap F_2^\perp}} \frac{a_1(\beta; v_1, v_1) + a_2(\beta; v_2, v_2)}{|v_1|^2 + |v_2|^2} \right]$$

où nous avons noté  $F = (F_1, F_2)$ ,  $F_1 \in H_1^p$ ,  $F_2 \in H_2^q$ ,  $F_j^\perp$  désignant l'orthogonal de  $F_j$  dans  $H_j$ .

Notons alors, pour  $F_j \subset H_j$

$$(6.8) \quad r_j(F_j) = \inf_{v_j \in V_j \cap F_j^\perp} \frac{a_j(\beta; v_j, v_j)}{|v_j|^2} \quad j=1, 2 .$$

Il est immédiat que, pour  $(v_1, v_2) \in V_1 \cap F_1$

$$\begin{aligned} a_1(\beta; v_1, v_1) + a_2(\beta; v_2, v_2) &\geq r_1(F_1) |v_1|^2 + r_2(F_2) |v_2|^2 \\ &\geq \text{Min}(r_1(F_1), r_2(F_2)) (|v_1|^2 + |v_2|^2) \end{aligned}$$

et par conséquent, en passant à l'inf (sur  $V_1 \cap F_1^\perp \times V_2 \cap F_2^\perp$ )

$$\inf_{v_1, v_2} \frac{a_1(\beta; v_1, v_1) + a_2(\beta; v_2, v_2)}{|v_1|^2 + |v_2|^2} \geq \text{Min}(r_1(F_1); r_2(F_2))$$

puis en passant au sup sur  $(F_1, F_2)$

$$(6.9) \quad s_{p+q}^{**}(\beta) \geq \sup_{F_1, F_2} \text{Min}(r_1(F_1); r_2(F_2)) .$$

Nous nous donnons maintenant  $\varepsilon > 0$ . Il existe deux sous-espaces  $F_1^*$  et  $F_2^*$  tels que (voir (6.4))

$$\left| \begin{array}{l} s_p^1(\beta) \leq r_1(F_1^*) + \varepsilon \\ s_q^2(\beta) \leq r_2(F_2^*) + \varepsilon . \end{array} \right.$$

Nous en déduisons :

$$\text{Min}(s_p^1(\beta); s_q^2(\beta)) \leq \varepsilon + \text{Min}(r_1(F_1^*); r_2(F_2^*))$$

et donc, grâce à (6.9) :

$$\text{Min}(s_p^1(\beta); s_q^2(\beta)) \leq \varepsilon + s_{p+q}^{**}(\beta) .$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon$ , nous en déduisons (6.7), puis la proposition.  $\square$

## VI.2 - Comportement des seuils supérieurs

En combinant la proposition précédente avec l'étude du guide circulaire (proposition 2.2), nous pouvons montrer facilement que les seuils supérieurs tendent vers l'infini avec  $m$ .

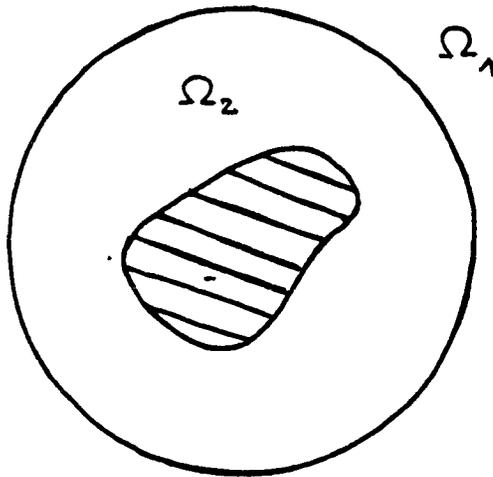
Théorème 6.1

Pour tout  $\beta > 0$ , le nombre  $N(\beta)$  de valeurs propres de l'opérateur  $A(\beta)$  est fini.

Démonstration

Pour appliquer la proposition précédente, nous fixons  $R > 0$ , tel que  $B(0,R) \supset \mathcal{C} \Omega$ . Nous choisissons alors :

$$\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus B(0,R) \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1 .$$

Démonstration

D'après le résultat de comparaison, nous avons

$$\forall m, \forall \beta \quad s_{2m}(\beta) \geq \text{Min}(s_m^1(\beta), s_m^2(\beta)) .$$

Or nous savons que :

. Dans le cas du guide circulaire le nombre des valeurs propres est fini pour tout  $\beta$  (cf. corollaire 2.1). Par conséquent :

$$s_m^1(\beta) = \beta^2 V_S^2 \quad \text{pour } m > M_1(\beta) .$$

. Les  $s_m^2(\beta)$  sont les valeurs propres d'un problème elliptique intérieur. Nous savons donc que  $s_m^2(\beta)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . En particulier :

$$s_m^2(\beta) > \beta^2 V_S^2 \quad \text{pour } m > M_2(\beta) .$$

Posons alors  $M(\beta) = \text{Max}(M_1(\beta), M_2(\beta))$ , nous avons ainsi :

$$\forall m > M(\beta) \quad \text{Min}(s_m^1(\beta), s_m^2(\beta)) = \beta^2 V_S^2 .$$

Par conséquent :

$$\forall m > M(\beta) \quad s_{2m}(\beta) = \beta^2 V_S^2$$

ce qui montre que le nombre  $N(\beta)$  des valeurs propres de  $A(\beta)$  est inférieur à  $2M(\beta)$ . □

### Corollaire 6.1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m^* = +\infty .$$

### Démonstration

Supposons le résultat faux. Comme la suite  $\beta_m^*$  est croissante, elle aurait une limite, soit  $\bar{\beta}^*$ .

Si  $\beta \geq \bar{\beta}^*$ , alors  $\forall m, \beta \geq \beta_m^*$  et  $A(\beta)$  admet au moins  $m$  valeurs propres, donc une infinité, ce qui contredit le théorème 6.1. □

### Remarque

Le corollaire 6.1 ne précise pas comment le seuil  $\beta_m^*$  tend vers  $+\infty$ . Notre conjecture est que leur croissance est asymptotiquement proportionnelle à  $m$ , comme c'est le cas pour le guide circulaire, au moins lorsque la frontière  $(\Gamma)$  est suffisamment régulière.

### VI.3. Comportement des seuils inférieurs

Nous montrons que ceux-ci tendent également vers  $+\infty$ . Bien que ceci entraîne

le résultat précédent, nous avons préféré séparer les deux démonstrations, le premier résultat étant plus simple.

Nous utiliserons ici encore le résultat de comparaison (proposition 6.1), et nous montrerons que l'on peut rendre les valeurs propres du problème intérieur (correspondant au  $\Omega_2$  du théorème 6.2) uniformément grands. Pour ce faire, nous avons besoin d'estimer la dérivée de ces nombres.

Nous reprenons la décomposition du théorème 6.1 et les notations de la proposition 6.1. Nous nous intéressons aux valeurs propres de l'opérateur  $A_2(\beta)$  qui correspond à un problème intérieur, et est donc à résolvante compacte. On sait alors que ses valeurs propres sont exactement obtenues par le principe de Max-Min (cf. DAUTRAY-LIONS [9]), ce sont donc les nombres  $s_m^2(\beta)$  (voir 6.4).

#### Lemme 6.2

Les nombres  $s_m^2(\beta)$  sont dérivables presque-partout et leur dérivée vérifie :

$$(6.10) \quad \left| \frac{ds_m^2}{d\beta} \right| \leq C(s_m^2(\beta))^{1/2} + \beta \quad \text{pp } \beta$$

#### Démonstration

La famille d'opérateurs  $A_2(\beta)$  est visiblement holomorphe en  $\beta$ . La dérivabilité de  $s_m(\beta)$  découle alors des résultats de KATO [13].

Pour établir (6.10), nous suivrons la méthode de BAMBERGER-BONNET [3]. Nous décomposons  $a_2(\beta)$  de la même façon qu'en (3.8) :

$$a_2(\beta; v, v) = t_0^2(v, v) + \beta t_1^2(v, v) + \beta^2 t_1^2(v, v)$$

d'où immédiatement :

$$(6.11) \quad a_2(\beta; v, v) - a_2(\beta'; v, v) = (\beta - \beta') [ t_1^2(v, v) + (\beta + \beta') t_2^2(v, v) ] .$$

On vérifie aisément sur (3.8) qu'il existe une constante  $C$ , ne dépendant que des propriétés mécaniques et du domaine  $\Omega_1$ , telle que :

$$(6.12) \quad t_1^2(v, v) \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \quad \forall v \in V_1$$

$$t_2^2(v, v) \leq C \|v\|_{L^2(\Omega_1)}^2$$

et par l'analogie du corollaire (3.1) :

$$(6.13) \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq C_1 a_2(\beta; v, v) .$$

Reportant (6.12) et (6.13) dans (6.11), il vient :

$$a_2(\beta; v, v) - a_2(\beta'; v, v) \leq C |\beta - \beta'| \left( [a_2(\beta; v, v)]^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + |\beta + \beta'| \|v\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \right)$$

Nous raisonnons alors comme dans [ 3 ] pour obtenir :

$$\left| \frac{ds_m^2}{d\beta} \right| \leq C (s_m^2(\beta))^{1/2} + \beta) . \quad \square$$

Notons une fois de plus que la constante  $C$  ne dépend que du domaine  $\Omega_2$  et des constantes mécaniques. Elle est indépendante de  $m$ .

### Théorème 6.2

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m^0 = +\infty .$$

### Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant la suite  $\beta_m^0$  bornée. Puisqu'elle est croissante, elle converge, et nous notons  $\bar{\beta}$  sa limite. Nous avons alors la propriété suivante :

$$(6.14) \quad (\forall \varepsilon > 0, \forall M \in \mathbb{N}, \exists \beta \in ]\bar{\beta} - \varepsilon, \bar{\beta} + \varepsilon[ \text{ tel que } \text{card}\{m, s_m(\beta) < \beta^2 v_S^2\} \geq M) .$$

En effet,  $\varepsilon$  et  $M$  étant fixés, il existe  $N_0$  tel que  $\beta_{N_0}^0 > \bar{\beta} - \varepsilon$ , et comme la suite  $\beta_m^0$  est croissante, si  $N_1 = \text{Max}(M, N_0)$ , alors  $\beta_{N_1}^0 > \bar{\beta} - \varepsilon$  et  $N_1 \geq M$ .

Par définition de  $\beta_{N_1}^0$ , il existe  $\beta \in ]\beta_{N_1}^0, \bar{\beta}[$  tel que

$$s_{N_1}(\beta) < \beta^2 v_S^2$$

et donc également, puisque  $s_m(\beta)$  est croissante en  $m$  :

$$s_M(\beta) < \beta^2 v_S^2$$

ce qui prouve (6.14).

En utilisant le résultat de comparaison et l'inégalité différentielle (6.10), nous allons prouver que (6.14) est en fait impossible.

Il suffit de s'intéresser aux valeurs de  $\beta \in [\bar{\beta}-\varepsilon, \bar{\beta}+\varepsilon]$ , que nous noterons pour simplifier  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ .

#### Lemme 6.3

Il existe des constantes  $C, C'$  telles que

$$(6.15) \quad \forall \beta \in [\beta_1, \beta_2], \quad s_m^2(\beta) \geq s_m^2(\beta_1) + C\beta^2 + C'.$$

#### Démonstration

Nous parlons de l'inégalité (6.10). Comme  $\beta$  varie dans un compact, il est commode de l'affaiblir en

$$\left| \frac{ds_m^2}{d\beta} \right| \leq C(s_m^2(\beta))^{1/2} + \beta_2 \quad \forall \beta \in [\beta_1, \beta_2].$$

Cette inégalité différentielle s'intègre en :

$$2 \left| \sqrt{s_m^2(\beta) + \beta_2} - \sqrt{s_m^2(\beta_1) + \beta_2} \right| \leq C(\beta - \beta_1)$$

d'où en particulier :

$$\sqrt{s_m^2(\beta) + \beta_2} \geq \sqrt{s_m^2(\beta_1) + \beta_2} - C(\beta - \beta_1)$$

et (6.15) s'en déduit aisément. □

Fin de la démonstration du théorème 6.2.

Les valeurs propres  $s_m^2(\beta)$  du problème intérieur tendent vers l'infini avec  $m$ . Un nombre  $S$  étant fixé, il est possible de choisir  $M(S)$  de façon que, pour  $m \geq M(S)$ , le second membre de (6.15) soit  $\geq S$ . Donc :

$$(6.16) \quad \forall S, \exists M(S), m \geq M(S) \rightarrow \forall \beta \in [\beta_1, \beta_2], s_m^2(\beta) \geq S.$$

Nous utilisons maintenant la proposition 2.2 :

Il existe  $M_1$  tel que, pour  $m \geq M_1$  on ait :

$$s_m^1(\beta) = \beta^2 V_S^2 \quad \forall \beta \in [\beta_1, \beta_2]$$

(c'est une conséquence de la proposition 2.2 car  $\beta$  varie dans un compact).

Si maintenant nous choisissons  $S \geq \beta_2^2 V_S^2$ ,  $m \geq \text{Max}(M_1, M(S))$ , et utilisons la proposition 6.1, nous obtenons :

$$s_{2m}(\beta) \geq \text{Min}(s_m^1(\beta), s_m^2(\beta)) = \beta^2 V_S^2 \quad \forall \beta \in [\beta_1, \beta_2].$$

Donc, pour tout  $\beta$  dans  $[\beta_1, \beta_2]$ ,  $A(\beta)$  admet moins de  $2m$  valeurs propres, ce qui contredit (6.14) si  $2m \geq M$ . □

#### VI.4. L'équation des seuils

Nous montrons dans ce paragraphe que les seuils sont solutions d'un problème de valeurs propres généralisé. Comme nous ne saurons pas dire si les seules solutions de ce problème sont les seuils, il ne s'agit pas d'une caractérisation.

Le principe du Min-Max ne permet pas de détailler le cas " $\omega(\beta) = \beta V_S$ ". Nous mènerons donc une étude directe, inspirée de BAMBERGER-BONNET [3]. Nous posons :

$$(6.17) \quad q(\beta; u, v) = a(\beta; u, v) - \beta^2 v_S^2(u, v) \quad \forall (u, v) \in V.$$

Utilisant la proposition (3.2), nous avons :

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} q(\beta; u, v) = e(\beta; u, v) + \mu p(\beta; u, v) \\ e(\beta; u, v) = \lambda \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3 \right|^2 dx + \\ \quad + 2\mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\beta}{2} u_3 \right|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\beta}{2} u_3 \right|^2 dx \\ \quad + \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 dx + \mu \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \\ p(\beta; u, v) = 2\beta \int_{\Gamma} (u_1 n_1 + u_2 n_2) u_3 d\gamma \end{array} \right.$$

(p( $\beta$ ) a été définie en (3.10)).

Nous voyons qu'en fait  $q(\beta)$  est définie sur un espace plus grand que  $V$ , à savoir l'espace :

$$(6.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(\beta) = \{ (u_1, u_2, u_3) \in L_{loc}^2(\Omega)^3, \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\beta}{2} u_3 \right) \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \\ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \in L^2(\Omega), \quad \forall u_3 \in L^2(\Omega) \} \end{array} \right.$$

Suivant [3], nous dirons que  $u$  est une fonction propre généralisée pour la valeur propre  $\beta^2 v_S^2$  si et seulement si le problème :

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in W(\beta), \quad u \neq 0 \\ q(\beta; u, v) = 0 \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

admet une solution.

Nous dirons également que  $\beta$  est solution de l'équation des seuils s'il existe une fonction propre généralisée pour  $\beta^2 V_S^2$ . Cette définition est justifiée par le :

### Théorème 6.3

Les seuils  $\beta_m^*$  et  $\beta_m^0$  sont solutions de l'équation des seuils.

### Démonstration

Nous traitons tout d'abord le cas des seuils supérieurs. Nous considérons une suite  $\beta^n$  telle que

$$\left| \begin{array}{l} \beta^n > \beta_m^* \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = \beta_m^* \end{array} \right.$$

Par définition de  $\beta_m^*$ ,  $s_m(\beta^n)$  est, pour tout  $n$ , valeur propre de  $A(\beta^n)$ . Nous notons  $u^n$  un vecteur propre correspondant, que nous normalisons par la condition :

$$(6.21) \quad |u^n|_{L^2(\Gamma)} = 1$$

(un tel choix est possible car pour une valeur propre, nous savons que  $p(\beta; u^n, u^n) \neq 0$ ).

Nous avons donc :

$$(6.22) \quad a(\beta^n; u^n, v) = s_m(\beta^n)(u^n, v) \quad \forall v \in V.$$

Prenons dans cette égalité  $v = u^n$ . Nous obtenons :

$$e(\beta^n; u^n, u^n) = (s_m(\beta^n) - (\beta^n)^2 \cdot V_S^2) |u^n|^2 - \mu p(\beta^n; u^n, u^n).$$

Nous avons vu au chapitre 4 que toute valeur propre vérifie

$$s_m(\beta^n) < (\beta^n)^2 v_s^2$$

nous en déduisons, grâce à Cauchy-Schwartz :

$$(6.23) \quad e(\beta^n; u^n, u^n) \leq \mu |u^n|_{L^2(\Gamma)}^2 \in \mathbb{C}.$$

Les quantités suivantes sont donc bornées :

$$(6.24) \quad \left| \begin{array}{l} \left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\beta^n}{2} u_3^n \right|_{L^2(\Omega)} \quad i = 1, 2 \\ \left| \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} \right|_{L^2(\Omega)} \\ |\nabla u_3^n|_{L^2(\Omega)} \\ |u^n|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{par hypothèse.} \end{array} \right.$$

Nous n'avons pas de résultat de convergence dans tout l'ouvert  $\Omega$ . Nous passerons par des résultats locaux.

Nous considérons donc un ouvert du type :

$$\Omega_R = \Omega \cap B(0, R) \quad R > 0.$$

Nous avons tout d'abord le résultat suivant, dont la démonstration est classique (cf. [9]) :

$$(6.25) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Si } \Gamma \subset \partial\Omega_R, \text{ mes}(\Gamma) > 0, \text{ alors} \\ (|u_3|_{\Gamma}^2 + |\nabla u_3|_{L^2(\Omega_R)}^2)^{1/2} \\ \text{définit sur } H^1(\Omega_R) \text{ une norme équivalente à sa norme usuelle.} \end{array} \right.$$

Par conséquent, la suite  $u_3^n$  reste bornée dans  $H^1(\Omega_R)$ , et donc en fait, il existe  $u_3 \in H_{loc}^1(\Omega)$  :

$$u_3^n \rightarrow u_3 \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ faible}$$

$$u_3^n \rightarrow u_3 \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^2(\Omega) \text{ fort .}$$

Par conséquent, les suites :

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1^n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1}, |u_1^n|_{\Gamma}, |u_2^n|_{\Gamma}$$

restent bornées dans  $L^2(\Omega_R)$ . Pour en déduire la convergence locale de  $u_1^n$ ,  $u_2^n$ , nous adaptons (6.25) au cas "élastique".

$$\text{Nous notons } \bar{u} = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_R)^2$$

$$\varepsilon(\bar{u}) = (\varepsilon_{ij}^{\beta}(u))_{i,j=1,2} .$$

#### Lemme 6.4

Soit  $\Omega_R$  un ouvert borné,  $\Gamma \subset \partial\Omega_R$ ,  $\text{mes}(\Gamma) > 0$  ; la quantité

$$\left( | \bar{u} |_{L^2(\Gamma)}^2 + | \varepsilon(\bar{u}) |_{L^2(\Omega_R)}^2 \right)^{1/2}$$

définit une norme sur  $H^1(\Omega_R)$ , équivalente à la norme usuelle de  $H^1(\Omega_R)$ .

#### Démonstration

Grâce à l'inégalité de Korn, il nous suffit de vérifier l'existence d'une constante  $C > 0$ , telle que :

$$\forall \bar{u} \in H^1(\Omega_R), \quad | \bar{u} |_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq C \left( | \varepsilon(\bar{u}) |_{L^2(\Omega_R)}^2 + | \bar{u} |_{\Gamma}^2 \right) .$$

De façon classique, nous raisonnons par l'absurde, en supposant l'existence d'une suite  $\bar{u}^p \in H^1(\Omega)$ , telle que :

$$(6.25)' \quad \left| \begin{array}{l} | \bar{u}^p |_{L^2(\Omega_R)} = 1 \\ | \varepsilon(\bar{u}^p) |_{L^2(\Omega_R)}^2 + | \bar{u}^p |_{\Gamma}^2 \leq \frac{1}{p} . \end{array} \right.$$

Il existe  $\bar{u} \in H^1(\Omega_R)$ , tel que

$$\bar{u}^P \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{dans } H^1(\Omega_R) .$$

Par continuité des traces,  $\bar{u}^P|_\Gamma \rightharpoonup \bar{u}|_\Gamma$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ , et puisque  $\partial\Omega_R$  est compacte :

$$\bar{u}^P|_\Gamma \rightarrow \bar{u}|_\Gamma \quad \text{dans } L^2(\partial\Omega) \text{ fort .}$$

Bien entendu :

$$\bar{u}^P \rightarrow \bar{u} \quad \text{dans } L^2(\Omega_R) \text{ fort .}$$

Passant alors à la limite :

$$(6.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\bar{u}|_{L^2(\Omega_R)} = 1 \\ \varepsilon(\bar{u}) = 0 \\ \bar{u}|_\Gamma = 0 . \end{array} \right.$$

Les deux dernières conditions entraînent  $\bar{u} = 0$  ( $\varepsilon(\bar{u}) = 0$  entraînent que  $\bar{u}$  est un déplacement rigide, et  $\bar{u}|_\Gamma = 0 \rightarrow \bar{u} = 0$ ). Ceci contredit évidemment  $|\bar{u}|_{L^2(\Omega)} = 1$ . □

#### Suite de la démonstration du théorème 6.4

Grâce au lemme 6.4, nous avons la convergence faible dans  $H_{loc}^1(\Omega_R)^2$  de  $(u_1^n, u_2^n)$  vers  $(u_1, u_2) \in H_{loc}^1(\Omega_R)$ . Comme précédemment :

$$(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2) \quad \text{dans } L_{loc}^2(\Omega_R) \text{ fort .}$$

Enfin, par continuité des traces et compacité de la frontière,

$$u_1^n|_\Gamma \rightarrow u_1|_\Gamma \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \text{ fort, et donc } |u_1|_\Gamma = 1 .$$

Par ailleurs, nous déduisons de (6.24) les convergences faibles de :

$$(6.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} - \frac{\beta^n}{2} u_3^n \rightharpoonup \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\beta_m^*}{2} u_3 \quad (i=1,2) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^n}{\partial x_1} \rightharpoonup \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \text{" " " } \\ \nabla u_3^n \rightharpoonup \nabla u_3 \quad \text{" " " } \end{array} \right.$$

Nous pouvons passer à la limite dans (6.22), pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W(\beta) \\ a(\beta_m^*; u, v) = \beta_m^{*2} V_S^2(u, v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$q(\beta_m^*; u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$$

cette égalité étant en fait vraie pour  $v \in V$ , par densité. De plus,  $u \neq 0$ , puisque  $|u|_\Gamma = 1$ .

Ceci prouve que  $\beta_m^*$  vérifie l'équation des seuils.

La démonstration pour  $\beta_m^0$  est analogue. En effet, par définition de  $\beta_m^0$ , il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que

$$\forall \beta \in ]\beta_m^0, \beta_m^0 + \varepsilon[ \quad , \quad s_m(\beta) < \beta^2 V_S^2 .$$

On construit la suite  $\beta^n$  dans  $]\beta_m^0, \beta_m^0 + \varepsilon[$ , et la démonstration est la même que pour  $\beta_m^*$  (cf. [3]). □

Remarque 6.1

Il semble que ce résultat ne soit pas optimal. Cette remarque nous est suggérée par au moins deux indications :

- dans le cas du guide circulaire (cf. Chapitre 2), il est possible de calculer les déplacements, au moins pour le cas  $n = 0$ . On peut vérifier que dans ce cas, les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  perdent leur caractère  $L^2$  lorsque  $\beta$  tend vers le seuil, alors que la composante  $u_3$  reste dans  $L^2$ , et reste même exponentiellement décroissante.
- Pour le problème des fibres optiques, traité par BAMBERGER-BONNET [3], il a été possible de prouver que la composante  $H_3$  du champ reste dans  $L^2$ . Ceci est dû à la condition supplémentaire  $\operatorname{div} H = 0$ .

Ceci nous conduit à penser que, dans notre cas, le même résultat peut être vrai; c'est-à-dire que  $u_3 \in L^2(\Omega)$ . Dans ces conditions, l'espace où se trouvent les fonctions propres généralisées serait :

$$\hat{W} = \{ (\bar{u}; u_3) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)^3, \varepsilon(\bar{u}) \in L^2(\Omega); u_3 \in H^1(\Omega) \}$$

espace qui est plus "sympathique" que  $W(\beta)$ . □

Remarque 6.2

Pour atténuer la remarque précédente, nous pouvons nous ramener à un espace fixe, par le simple changement de fonction inconnue.

$$\tilde{u}_3 = \beta u_3.$$

L'espace limite est alors :

$$\tilde{W} = \{ (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega), \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \tilde{u}_3 \right) \in L^2(\Omega) \quad i=1,2$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \in L^2(\Omega), \quad \forall \tilde{u}_3 \in L^2(\Omega) \right\}$$

et le problème limite est :

$$(6.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{W} \\ \tilde{q}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{\beta^2} \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}}_3 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_3 \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{W} \end{array} \right.$$

avec

$$(6.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \lambda \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} - \tilde{\mathbf{u}}_3 \right) \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_2}{\partial x_2} - \tilde{\mathbf{v}}_3 \right) dx \\ + 2\mu \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}_3 \right) \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_3 \right) + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_3 \right) \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_3 \right) \right] dx \\ + \mu \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_2}{\partial x_1} \right) dx \\ + \mu \int_{\Gamma} (\tilde{\mathbf{u}}_1 n_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2 n_2) \tilde{\mathbf{v}}_3 + (\tilde{\mathbf{v}}_1 n_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2 n_2) \tilde{\mathbf{u}}_3 d\gamma . \end{array} \right.$$

Cette formulation fait apparaître (6.26) comme un problème de valeurs propres généralisé, posé sur un espace indépendant de  $\beta$ . □

## VII - COMPORTEMENT A HAUTE FREQUENCE DES VITESSES

Au chapitre 2, nous avons montré la convergence des vitesses  $v_m(\beta) = \frac{\omega_m(\beta)}{\beta}$  vers la vitesse de l'onde de Rayleigh, dans le cas où  $\Omega$  était l'extérieur d'un disque.

Nous pensons que ce résultat est général, au moins dans le cas où l'ouvert est régulier. Cette conjecture s'appuie sur des travaux de MORRISON et WILSON [17],[23] qui se sont intéressés à la propagation à haute fréquence le long des génératrices d'un cylindre. Effectuant un développement asymptotique des vitesses (à haute fréquence), ils ont vérifié que le premier terme de ce développement était solution de l'équation de Rayleigh (2.11). Leur calcul suppose l'ouvert de classe  $C^2$ . Dans un esprit très différent, LAGASSE [24] a envisagé le cas d'un dièdre. Un calcul par éléments finis l'a amené à conclure à l'existence d'ondes se propageant le long de la "ligne de crête", et dont l'énergie est

confinée dans un voisinage du coin. La vitesse de telles ondes, qui sont non dispersives, serait strictement inférieure à la vitesse de Rayleigh.

La démonstration de ces conjectures fera l'objet d'un travail ultérieur. Nous voulons donner ici des résultats partiels, c'est-à-dire que nous montrerons que si  $\beta$  est assez grand, la vitesse des ondes guidées devient plus petite que  $v_R$ .

Nous distinguerons les cas où l'ouvert contient une partie régulière, en un sens à préciser, et celui où la frontière comporte un coin. Dans le premier cas, l'idée consiste à tronquer convenablement l'onde de Rayleigh, alors que dans le second, nous utiliserons les champs mis en évidence par LAGASSE [24],[29].

### VII.1- Rappels sur les propriétés de l'onde de Rayleigh

Nous aurons besoin, par la suite, d'un certain nombre de ces propriétés. Il nous a semblé commode de les rappeler, et de fixer ainsi les notations. Nous suivons l'exposition de JOLY [12].

Nous considérons dans  $\mathbb{R}^2$  le demi-plan :

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x_2, x_3) , x_3 > 0\}$$

et nous nous intéressons au problème de l'élastodynamique en 2 dimensions. Nous cherchons des champs :

$$u(x_2, x_3, t) = \tilde{u}(x_3) e^{i(\beta x_2 - \omega t)} , \quad \tilde{u} = (u_2, u_3) .$$

Ici encore, nous cherchons des ondes guidées par la surface, c'est-à-dire dont l'amplitude est concentrée au voisinage du bord :

$$\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}_+)^2 .$$

Bien évidemment, il s'agit encore d'un problème de valeurs propres pour la forme bilinéaire  $\tilde{a}(\beta)$  :

$$(7.1) \quad \left| \begin{aligned} \tilde{a}(\beta, \tilde{u}, \tilde{u}) &= \lambda \int_0^\infty \left| \frac{du_3}{dx_3} + \beta u_2 \right|^2 dx_3 + 2\mu \int_0^\infty \left( \left| \frac{du_3}{dx_3} \right|^2 + \beta^2 |u_2|^2 \right) dx_3 \\ &+ \mu \int_0^\infty \left| \frac{du_2}{dx_3} + \beta u_3 \right|^2 dx_3 \end{aligned} \right.$$

$$(7.2) \quad \tilde{a}(\beta, \tilde{u}, \tilde{v}) = \omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}_+).$$

On montre que ce problème admet une unique valeur propre  $\omega_R(\beta) = V_R \beta$  où  $V_R$  est la racine de l'équation de Rayleigh :

$$\left( 2 - \frac{V^2}{V_S^2} \right)^2 - 4 \left( 1 - \frac{V^2}{V_S^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{V^2}{V_P^2} \right)^{1/2} = 0$$

comprise entre 0 et  $V_S$ .

Nous notons  $u^R$  la fonction propre correspondante, normalisée par  $\int_0^\infty \rho |u^R|^2 dx_3 = 1$ , dont l'expression est (cf. JOLY [12]) :

$$(7.3) \quad \left| \begin{aligned} u_2^R(x_3) &= C_2 \sqrt{\beta} \left( e^{-\beta \alpha_P x_3} + \left( \frac{V_R^2}{2V_S^2} - 1 \right) e^{-\beta \alpha_S x_3} \right) \\ u_3^R(x_3) &= C_3 \sqrt{\beta} \left( \left( 1 - \frac{V_R^2}{2V_S^2} \right) e^{-\beta \alpha_P x_3} - e^{-\beta \alpha_S x_3} \right) \end{aligned} \right.$$

$C_2$  et  $C_3$  désignant des constantes indépendantes de  $\beta$ , et :

$$\alpha_P^2 = 1 - \frac{V_R^2}{V_P^2} \quad \alpha_S^2 = 1 - \frac{V_R^2}{V_S^2}.$$

Avec la normalisation que nous avons choisie :

$$(7.4) \quad \tilde{a}(\beta, u^R, u^R) = \beta^2 V_R^2.$$

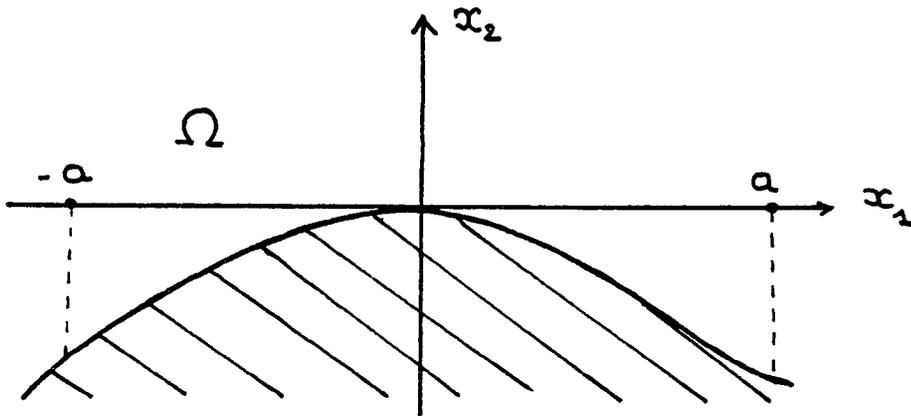
### VII.2 - Cas d'un ouvert régulier

Nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  contient une partie  $\Omega_0$  de la forme :

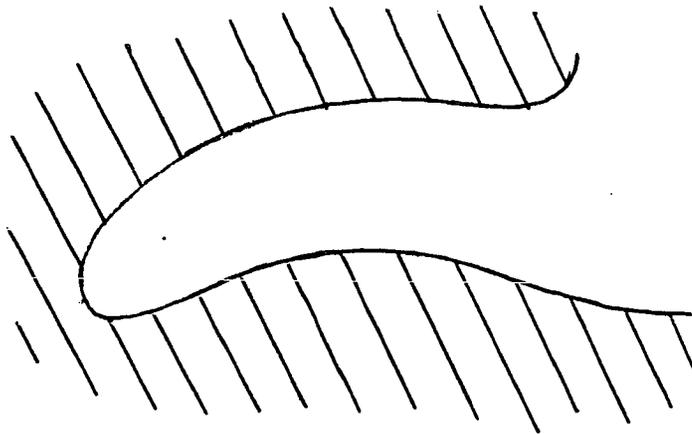
$$(7.5) \quad \Omega_0 = \{(x_1, x_2) \text{ , } |x_1| < a \text{ , } x_2 > f(x_1)\}$$

$a$  étant un réel positif donné, et  $f$  une fonction :

$$f \in C^1([-a, a]) \text{ , } f(0) = f'(0) = 0 \text{ .}$$



Cette hypothèse exclut la situation suivante :



mais cette restriction peut être levée, en tronquant les fonctions dans la direction  $x_2$ , puisque pour  $\beta$  grand, l'onde de Rayleigh se concentre au voisinage de la surface.

Nous gardons donc l'hypothèse (7.5).

Nous nous restreignons à des champs de forme particulière : soit  $\phi \in H_0^1(-a, a)$  fixée. Nous considérons :

$$(7.6) \quad u(x_1, x_2) = \phi(x_1) (0, u_2^R(x_2 - f(x_1)), u_3^R(x_2 - f(x_1))) .$$

Donnons tout d'abord l'expression de  $a(\beta; u, u)$  pour un tel champ.

#### Lemme 7.1

Pour  $u$  donné par (7.6),  $\phi \in H_0^1(-a, a)$  :

$$(7.7) \quad \begin{aligned} a(\beta; u, u) &= \beta^2 v_R^2 \left( \int_{-a}^a |\phi|^2 dx_1 \right) + \left( \int_{-a}^a |\phi'|^2 dx_1 \right) \\ &+ \left( \int_{-a}^a |\phi|^2 |f'|^2 dx_1 \right) \left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &- 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{-a}^a \phi(x_1) \phi'(x_1) f'(x_1) (u^R \cdot \frac{du^R}{dx_3})(x_3) dx_1 dx_3 \end{aligned}$$

#### Démonstration

C'est un simple calcul. Remplaçant  $u$  par l'expression (7.6) dans (3.7), il vient :

$$\begin{aligned} a(\beta; u, u) &= \lambda \int_{\Omega_0} |\phi(x_1)|^2 \left| \frac{du_2^R}{dx_2} + \beta u_3^R \right|^2 (x_2 - f(x_1)) dx_1 dx_2 \\ &+ 2\mu \int_{\Omega_0} |\phi(x_1)|^2 \left[ \left| \frac{du_2^R}{dx_2} \right|^2 + \beta^2 |u_3^R|^2 \right] (x_2 - f(x_1)) dx_1 dx_2 \\ &+ \mu \int_{\Omega_0} |\phi(x_1)|^2 \left| \frac{du_3^R}{dx_2} + \beta u_2^R \right|^2 (x_2 - f(x_1)) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi(x_1) u_2^R(x_2 - f(x_1))) \right|^2 dx_1 dx_2 \\
& + \mu \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (\phi(x_1) u_3^R(x_2 - f(x_1))) \right|^2 dx_1 dx_2 .
\end{aligned}$$

Developpons l'avant-dernière intégrale, par exemple.

$$\begin{aligned}
I &= \left| \frac{\partial}{\partial x_1} [\phi(x_1) u_2^R(x_2 - f(x_1))] \right|^2 \\
&= \left| \phi'(x_1) u_2^R(x_2 - f(x_1)) - \phi(x_1) f'(x_1) (u_2^R)'(x_2 - f(x_1)) \right|^2 \\
&= |\phi'(x_1)|^2 |u_2^R(x_2 - f(x_1))|^2 + |\phi(x_1)|^2 |f'(x_1)|^2 |(u_2^R)'(x_2 - f(x_1))|^2 \\
&\quad - 2(\phi\phi'f')(x_1) [(u_2^R)'u_2^R](x_2 - f(x_1)) .
\end{aligned}$$

Nous effectuons ensuite dans chacune des intégrales le changement de variables  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 - f(x_1))$ , et utilisons le théorème de Fubini.

On reconnaît en facteur de  $\int_{-a}^a |\phi|^2$  la quantité  $\tilde{a}(\beta; u^R, u^R)$ , qui vaut  $\beta^2 V_R^2$ , en vertu de (7.4).

De même,  $|u^R|^2$ , qui vaut 1, est en facteur de  $\int_{-a}^a |\phi'|^2$ . □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

### Théorème 7.1

Soit  $V_m(\beta) = \omega_m(\beta)/\beta$  la vitesse de propagation du  $m$ -ème mode.

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} V_m(\beta) \leq V_R$$

### Démonstration

Nous devons démontrer que, pour  $\varepsilon \geq 0$  fixé,

$$\exists \tilde{\beta}_m, \beta \geq \tilde{\beta}_m \rightarrow \frac{s_m(\beta)}{\beta^2} \leq V_R^2 + \varepsilon$$

puisque, pour  $\beta \geq \beta_m^*$ ,  $s_m(\beta) = \omega_m(\beta)^2$ . Nous utiliserons pour cela la caractérisation (4.4) de  $s_m(\beta)$  comme Min-Max.

$$s_m(\beta) = \inf_{\substack{V_m \subset V \\ \dim V_m = m}} \sup_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} \frac{a(\beta; v, v)}{|v|^2}.$$

Nous nous restreindrons à des champs de la forme (7.6), et c'est donc par l'intermédiaire de  $\phi$  que nous définissons l'espace  $V_m$ .

Nous pouvons jouer sur deux paramètres :  $a$ , que nous choisissons aussi petit que possible, et  $\beta$  qui doit tendre vers l'infini.

Nous nous donnons maintenant  $m$  fonctions  $(\phi_1, \dots, \phi_m) \in H_0^1(-a, a)$ , et notons :

$$\Phi_m(a) = \text{vect}(\phi_1, \dots, \phi_m).$$

Puis nous notons  $V_m(a)$  l'espace :

$$V_m(a) = \{u \text{ définis par (7.6), } \phi \in \Phi_m(a)\}.$$

Pour calculer le quotient de Rayleigh associé à un élément de  $V_m(a)$ , nous utilisons le lemme 7.1 et le fait que

$$|u|_{L^2(\Omega_0)} = |\phi|_{L^2(-a, a)}$$

puisque  $u^R$  a été choisie normalisée. Nous majorons la dernière intégrale par Cauchy-Schwartz, et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{a(\beta; u, u)}{|u|^2} &\leq V_R^2 + \frac{1}{\beta^2} q(a; \phi, \phi) \times \frac{1}{\beta^2} \left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \sup_{|x_1| \leq a} |f'(x_1)|^2 \\ &\quad + 2 \frac{1}{\beta} q(a; \phi, \phi)^{1/2} \times \frac{1}{\beta} \left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \sup_{|x_1| \leq a} |f'(x_1)|. \end{aligned}$$

Nous posons :

$$q(a; \phi, \phi) = \frac{\int_{-a}^a |\phi'|^2 dx_1}{\int_{-a}^a |\phi|^2 dx_1}$$

$q(a; \phi, \phi)$  est la forme bilinéaire qui correspond à l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx_1}$  sur  $H_0^1(-a, a)$ .

Remarquons que l'on peut écrire :

$$(7.8) \quad \frac{a(\beta; u, u)}{\beta^2 |u|^2} \leq V_R^2 + \left[ \frac{1}{\beta} q(a; \phi, \phi) \right]^{1/2} + \frac{1}{\beta} \left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \sup_{|x_1| \leq a} |f'(x_1)|^2 .$$

Pour alléger les notations, posons :

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(a) = \sup_{\phi \in \Phi_m(a)} q(a; \phi, \phi)^{1/2} \\ \eta(a) = \sup_{|x_1| \leq a} |f'(x_1)| . \end{array} \right.$$

Puisque nous supposons  $f'(0) = 0$ , nous avons

$$\lim_{a \rightarrow 0} \eta(a) = 0 .$$

(7.8) donne donc :

$$\sup_{u \in V_m(a)} \frac{a(\beta; u, u)}{\beta^2 |u|^2} \leq V_R^2 + \left[ \frac{1}{\beta} Q(a) + \frac{1}{\beta} \left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \eta(a) \right]^2$$

et par conséquent :

$$(7.10) \quad V_m^2(\beta) \leq V_R^2 + \left[ \frac{1}{\beta} Q(a) + \frac{1}{\beta} \left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \eta(a) \right]^2 .$$

Nous utilisons maintenant les propriétés de l'onde de Rayleigh, c'est-à-dire (7.3).

Il existe  $C > 0$ , tel que :

$$\left| \frac{du^R}{dx_3} \right|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C \beta$$

de sorte que

$$v_m(\beta)^2 \leq v_R^2 + \left(\frac{1}{\beta} Q(a) + C\eta(a)\right)^2$$

$\varepsilon$  étant donné nous fixons  $a_0 > 0$  tel que :

$$C \eta(a) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \quad \forall a < a_0 .$$

Nous avons alors :

$$(7.11) \quad v_m(\beta)^2 \leq v_R^2 + \left(\frac{1}{\beta} Q(a_0) + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon}\right)^2 .$$

Nous choisissons ensuite  $\tilde{\beta}_m(\varepsilon)$  de façon que :

$$\beta \geq \tilde{\beta}_m(\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{\beta} Q(a) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} .$$

Par conséquent

$$\beta \geq \tilde{\beta}_m(\varepsilon) \rightarrow v_m(\beta)^2 \leq v_R^2 + \varepsilon . \quad \square$$

### Remarque 7.1

Ce résultat fournit bien évidemment une nouvelle démonstration de la proposition 5.1.

### VII.3 - Cas d'un ouvert contenant un coin

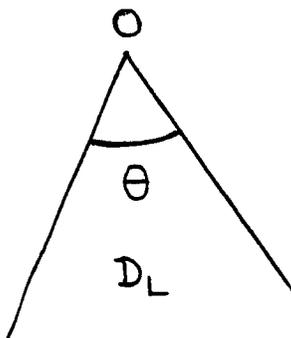
Nous voulons montrer dans ce paragraphe qu'il ne sera pas possible, en général, d'améliorer le résultat précédent, c'est-à-dire que l'inégalité du théorème 7.1 peut être stricte.

Nous nous basons pour cela sur des calculs effectués par LAGASSE ([24],[29]) qui mettent en évidence l'existence d'une onde guidée par le coin d'un dièdre (pourvu que l'angle de celui-ci soit suffisamment aigu), et dont la vitesse est strictement inférieure à la vitesse de Rayleigh.

Les calculs de LAGASSE sont évidemment effectués sur un domaine borné, mais le caractère guidé de l'onde est clair, de même que sa décroissance rapide vers l'intérieur du dièdre. Par ailleurs, un argument physique simple montre qu'une onde se propageant dans un dièdre infini doit être non dispersive, puisque celui-ci ne possède pas de longueur caractéristique.

Enfin, comme nous l'avons noté, la propagation n'est possible que si l'angle du dièdre est inférieur à un angle critique, soit  $\theta_1$ . Il semble que  $\theta_1 = 90^\circ$ , mais nous n'avons pas d'argument pour le justifier.

Fixons les notations pour décrire le champ construit par LAGASSE, et nous nous plaçons dans le cas  $\beta = 1$ .



Nous notons  $D_L$  le dièdre de sommet  $O$ , d'angle  $\theta$ , et

$$\hat{D}_L = D_L \cap B(0, R)$$

$\hat{D}_L$  contient le domaine du calcul numérique.

Nous notons également  $a_L$  et  $\hat{a}_L$  les formes bilinéaires définies comme en 3.4 sur  $H^1(D_L)^3$  et sur  $\hat{V}_L$  respectivement, ou

$$\hat{V}_L = \{u \in H^1(D_L)^3, u = 0 \text{ sur } |\mathbf{x}| = R\}.$$

LAGASSE a construit une fonction  $\hat{u}_L$ , telle que si  $\hat{\lambda}_1$  est la première valeur propre du problème posé sur  $\hat{D}_L$  :

$$\hat{\lambda}_1 \leq \frac{\hat{a}_L(1, \hat{u}_L, \hat{u}_L)}{|\hat{u}_L|^2}$$

(c'est une conséquence du principe du Min-Max et de ce que l'espace d'approximation utilisé est un espace d'éléments finis conformes).

Le résultat établi est essentiellement :

$$\frac{\hat{a}_L(1, \hat{u}_L, \hat{u}_L)}{|\hat{u}_L|^2} < v_R^2 .$$

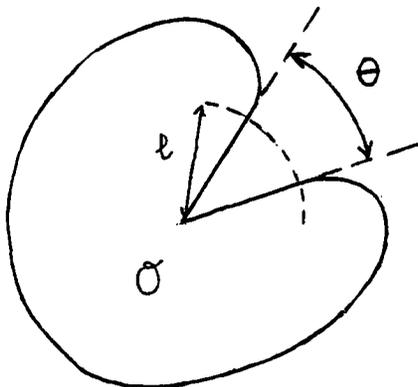
Comme la fonction  $\hat{u}_L$  est nulle sur  $\partial\hat{D}_L \cap \{|x|=R\}$ , son prolongement par 0, soit  $u_L$ , est dans  $H^1(D_L)$ , de sorte que si nous notons :

$$v_L^2 = \frac{a_L(1, u_L, u_L)}{|u_L|^2} = \frac{\hat{a}_L(1, \hat{u}_L, \hat{u}_L)}{|u_L|^2}$$

alors  $v_L < v_R$ .

D'autre part, par construction,  $\text{supp } u_L \subset B(0, R)$ .

Nous considérons maintenant le cas où la frontière  $\Gamma$  possède un coin :



Nous notons  $l$  sa "longueur" .

Nous avons alors le :

Théorème 7.2

Sous l'hypothèse  $\theta < \theta_1$ , alors

$$\limsup v_1(\beta) < v_R .$$

Démonstration

Introduisons l'opérateur  $I_\beta$  :

$$I_\beta u(x) = u(\beta x)$$

et considérons la fonction  $u_\beta = I_\beta u_L$  prolongée par 0 à l'extérieur du dièdre.

Pour  $\beta$  assez grand, nous aurons  $\text{supp } u_\beta \subset B(0, \ell)$  et donc  $u_\beta \in H^1(\Omega)$ .

Il est immédiat de vérifier que :

$$a(\beta, u_\beta, u_\beta) = a_L(1, u_L, u_L)$$

et 
$$|u_\beta|^2 = \frac{1}{\beta^2} |u_L|^2$$

de sorte que

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{a(\beta, u_\beta, u_\beta)}{|\beta|^2} = \frac{a_L(1, u_L, u_L)}{|u_L|^2} = v_L^2 < v_R^2 .$$

Donc, toujours par le principe de Min-Max : si  $\beta$  est assez grand, nous avons :

$$\frac{\omega_1(\beta)^2}{\beta^2} = v_1(\beta)^2 \leq v_L^2 < v_R^2$$

d'où :  $\limsup_{\beta \rightarrow \infty} v_1(\beta) \leq v_L < v_R$  . □

Remarques

. Il semble que  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ .

. LAGASSE et al. [29] ont également étudié les modes supérieurs, pour lesquels il semble que la propagation ne soit possible qu'au dessous d'un angle  $\theta_m$ , tel que

$$\theta_m = \frac{\pi}{2m}.$$

La démonstration précédente pourrait se généraliser. □

CONCLUSION

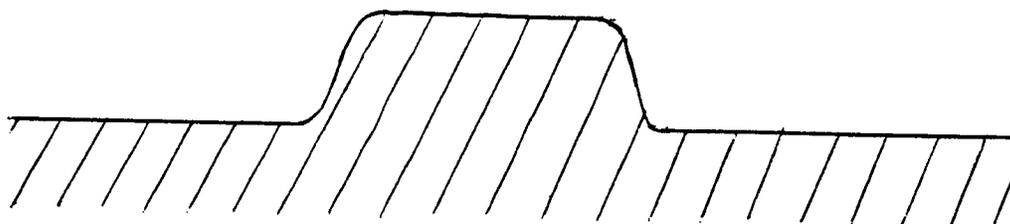
Nous avons décrit dans ce travail un modèle de propagation d'ondes de surface élastiques à l'extérieur d'une cavité cylindrique de section arbitraire. Nous avons montré l'existence d'une famille de tels modes. Nous savons que deux d'entre eux possèdent un nombre d'onde de coupure nul, alors que chacun des autres modes ne se propage qu'au delà d'un nombre d'onde minimal, que nous appelons le seuil. Nous savons enfin que pour chaque nombre d'onde, seul un nombre fini de modes peut se propager.

Cette étude était un premier pas en vue de la description des phénomènes d'onde de surface. Nous envisageons des prolongements dans différentes directions :

- Tout d'abord, nous désirons compléter l'étude à haute fréquence ébauchée au chapitre 7. Nous cherchons à confirmer les calculs de MORISSON [17],[23] dans le cas d'un ouvert régulier, d'une part, de LAGASSE [24] dans le cas d'un coin d'autre part. Citons également des travaux dus à KELLER-KARAL [27] et ROSENFELD-KELLER [28] permettant d'obtenir un développement asymptotique à haute fréquence. Il nous semble que l'approche rigoureuse de ce problème passe par une représentation intégrale des modes guidés. Une telle représentation fournit en outre une méthode numérique pour le calcul de ces modes, s'inspirant de celle suivie par ZIANI et DEVYS [29] pour une fibre optique.

- Nous nous intéressons ensuite à des guides d'ondes plus généraux. Un cas particulièrement important en vue des applications est celui des guides topographiques, utilisés dans la fabrication des lignes à retard (cf. LAGASSE and al. [30]).

Un exemple simple est présenté sur la figure ci-dessous :



La principale difficulté de ce problème vient de ce que c'est "une perturbation du demi-espace", tandis que le cas que nous avons étudié était "une perturbation de l'espace entier". En particulier, la vitesse  $V_R$  joue le rôle de  $V_S$  dans notre étude, et il n'apparaît pas évident de la faire intervenir dans l'expression de la forme bilinéaire. DERMENJIAN et GUILLOT [32] ont étudié la diffraction d'ondes élastiques dans un demi espace perturbé quand la perturbation est à support compact. Ils ont donné des propriétés des valeurs propres sans toutefois s'intéresser à leur existence effective. Le cas que nous envisageons n'est plus une perturbation compacte, et il faudrait étendre et préciser ces résultats.

- Enfin, une généralisation réside dans l'étude de matériaux anisotropes, ou transversalement isotropes. Ce problème semble plus difficile. La propagation d'une onde de Rayleigh dans un demi espace transversalement isotrope, dans un plan parallèle à la surface libre, a été étudié par GUILLOT [33].

Il nous semble que le cas le plus simple est celui d'un milieu isotrope dans un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Ce serait un premier pas pour l'étude des phénomènes piezo-électriques (cf. AULD [26]).

REFERENCES

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN : "Handbook of Mathematical functions", Dover Publications (1968).
- [2] J.D. ACHENBACH : "Wave propagation in elastic solids", North Holland, Amsterdam, (1973).
- [3] A. BAMBERGER, A.S. BONNET : "Calcul des modes guidés d'une fibre optique. Analyse mathématique", Ecole Polytechnique, CMAP. Rapport interne n° 143 (1986).
- [4] A. BAMBERGER, A.S. BONNET, R. DJELLOULI : "Calcul des modes guidés d'une fibre optique. Différentes formulations mathématiques du problème". Ecole Polytechnique. CMAP. Rapport interne n° 142 (1986).
- [5] M. BIOT : "Propagation of elastic waves in a liquid-filled cylindrical bore, surrounded by an elastic solid", J. Appl. Physics 24, 515-521 (1953).
- [6] A. BOSTRÖM, A.D. BURDEN : "Propagation of elastic surface waves and their excitation by a point force", J. Acoust. Soc. Amer. 72, 998-1004, (1982).
- [7] A.D. BURDEN : "The propagation of elastic surface waves along cylindrical cavities of general cross section", Wave. Motion 7, 153-168 (1982).
- [8] R. COURANT, D. HILBERT : "Methods of Mathematical Physics", Vol. I, Wiley (1962).
- [9] R. DAUTRAY, J.L. LIONS : "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Vol. 2, Masson (1985).
- [10] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ : "Linear operators", Part II, Wiley (1963).

- [11] Ch. GOULAOUIC, J. CEA : "Cours d'Analyse Fonctionnelle", Université de Rennes (1968).
- [12] P. JOLY : "Analyse numérique des ondes de Rayleigh", Thèse de 3-ème cycle, Université Paris IX (1983).
- [13] T. KATO : "Perturbations theory for linear operators", Springer (1966).
- [14] D. MARCUSE : "Theory of dielectric optical waveguides", Academic Press (1974).
- [15] J. MIKLOWITZ : "The theory of elastic waves and waveguides", North-Holland (1980).
- [16] I.A. MINDLIN : "Free elastic waves on the surface of a tube of infinite thickness", J. Appl. Math. Mech., 27, pp. 823-828 (1963).
- [17] J.A. MORRISON : "Propagation of high frequency surface waves along cylinders of general cross section", J. Math. Phys. 16, pp. 1786-1794 (1975).
- [18] J.A. NITSCHKE : "On Korn's second inequality", RAIRO Analyse Numérique 15, pp. 237-248 (1981).
- [19] F. OLVER : "Asymptotics and special functions", Academic Press (1974).
- [20] Lord RAYLEIGH : "On waves propagating along the plane surface of an elastic solid", Proc. London Math. Soc. 17, pp. 4-11 (1885).
- [21] M. REED, B. SIMON : "Methods of modern mathematical physics", vol. I et IV, Academic Press (1981).
- [22] M. SCHECHTER : "Operator methods in quantum mechanics", North-Holland (1981).
- [23] L.O. WILSON, J.A. MORRISON : "Propagation of high frequency elastic surface waves along cylinders of general cross section", J. Math. Phys. 16, pp. 1795-1805 (1975).

- [24] P.E. LAGASSE : "Higher order finite element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves", J. Acoust. Soc. Amer. 53, pp. 1116-1122 (1973).
- [25] R.A. ADAMS : "Sobolev spaces", Academic Press (1975).
- [26] B.A. AULD : "Acoustic fields and waves in solids", Wiley Interscience (1973).
- [27] J.B. KELLER, F. KARAL : "Geometrical theory of elastic surface wave propagation and excitation", J. Acoust. Soc. Amer. 36, pp. 32-40 (1964).
- [28] G. ROSENFELD, J.B. KELLER : "Wave propagation in elastic rods of arbitrary cross section", J. Acoust. Soc. Amer., 55, pp. 555-561 (1974).
- [29] P. LAGASSE, I.M. MASON, E.A. ASH : "Acoustic surface wave guides - Analysis and assesment", IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 21, pp. 225-236 (1973).
- [30] A. ZIANI, C. DEVYS : "Méthode intégrale pour le calcul des modes guidés d'une fibre optique", Rapport interne n° 129, Centre de Mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique (1985).
- [31] F. RELICH : "Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + ku = 0$  in unendlichen Gebieten", Jber. Deutsche Math. Verein. 53, pp. 57-64 (1943).
- [32] Y. DERMENJIAN, J.C. GUILLOT : Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. The limiting absorption principle. Rapport INRIA n° 491 (1986).
- [33] J.C. GUILLOT : Existence and uniqueness of a Rayleigh wave propagating along the free boundary of a transversely isotropic elastic half space. Math. Meth. in the Appl. Sci. 8 (1986).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

