



HAL
open science

Modèles statistiques temps-échelle en traitement du signal

Michèle Basseville, Albert Benveniste

► **To cite this version:**

Michèle Basseville, Albert Benveniste. Modèles statistiques temps-échelle en traitement du signal. [Rapport de recherche] RR-0971, INRIA. 1989. inria-00075588

HAL Id: inria-00075588

<https://inria.hal.science/inria-00075588>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tel (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 971

Programme 5

MODELES STATISTIQUES TEMPS-ECHELLE EN TRAITEMENT DU SIGNAL

Michèle BASSEVILLE
Albert BENVENISTE

Février 1989



2978

Modèles Statistiques Temps-Echelle en Traitement du Signal*

Michèle Basseville (IRISA/CNRS), Albert Benveniste (IRISA/INRIA)

RESUME : Dans de nombreuses applications (par exemple reconnaissance de signaux géophysiques ou biomédicaux, analyse pyramidale d'images), il est intéressant d'analyser et de reconnaître des phénomènes se produisant à différentes échelles. Les transformées en ondelettes récemment introduites fournissent une décomposition de signaux en temps et en échelle. Mais à l'heure actuelle il n'existe pas de contexte statistique correspondant. Notre but est de combler cette lacune. Notre point de départ est la théorie des processus stationnaires sur les arbres homogènes, dont on montre qu'il est le contexte adéquat pour un tel traitement statistique du signal multi-échelle. Nous introduisons ici la théorie des systèmes correspondante en étudiant les processus AR.

Multiscale Statistical Signal Processing

ABSTRACT : In many applications (e.g. recognition of geophysical and biomedical signals and multiscale analysis of images), it is of interest to analyse and recognize phenomena occurring at different scales. The recently introduced wavelet transforms provide a time-and-scale decomposition of signals. But no corresponding statistical framework is currently available. Our purpose is to fill this gap. Our starting point is the theory of stationary processes on homogeneous trees which is shown to be the convenient framework for such a statistical multiscale signal processing. Here we introduce the corresponding system theory by investigating AR processes.

* Ce travail est réalisé dans le cadre d'une collaboration avec le MIT/LIDS. Nous remercions Alan Willsky et Ken Chou pour les discussions fructueuses que nous avons eues pendant leur séjour à l'IRISA. Nous remercions aussi Jean-Pierre Conze, Yves Guivarch et Albert Raugi du laboratoire de Probabilités de l'IRMAR (Rennes) de nous avoir indiqué les travaux sur les processus indexés par des arbres. Ce travail est également soutenu par le G.R. CNRS GO134 : "Traitement du Signal et Images". Enfin, nous tenons à féliciter et remercier Huguette Béchu pour la rapidité et l'efficacité avec lesquelles elle a saisi ce texte en LaTeX qu'elle a appris pour la circonstance.

MODELES STATISTIQUES TEMPS-ECHELLE

EN TRAITEMENT DU SIGNAL

Michèle BASSEVILLE

Albert BENVENISTE

Publication Interne n° 446

Décembre 1988



PAPIER RECUPERE ET RECYCLE

Table des matières

1	INTRODUCTION	3
1.1	Transformées en ondelettes	3
1.2	Processus stationnaires indexés par des arbres homogènes	3
1.3	Modèles statistiques pour les processus stationnaires du second ordre indexés par les arbres homogènes	4
2	ARBRES HOMOGENES ET PROCESSUS INDEXES PAR DE TELS ARBRES	5
2.1	Arbre homogène [1]	5
2.2	Processus stationnaires et théorème de Bochner-Arnaud	6
2.3	Ordre partiel sur l'arbre	8
2.4	Opérateurs de déplacement sur \mathcal{T} et causalité	8
2.5	Séries formelles et opérations	10
2.6	Problème 1 : Analogue de la décomposition de Wold	11
2.7	Problème 2 : interpolation aux échelles plus grossières.	12
3	RECURRENCES DE SCHUR-LEVINSON : CAS SCALAIRE	13
3.1	Définition de l'analogue des innovations "aller" et "retour" [9]	13
3.2	Calcul des $F_{t,n}(w)$ et $E_{t,n}(w)$ par récurrence sur l'ordre n (Levinson)	17
3.3	Récurrances scalaires sur les barycentres	20
3.3.1	Récurrances sur les barycentres $e_{t,n}$ et $f_{t,n}$	23
3.4	Calcul explicite des projections	23
3.5	Récurrances de Schur	25
4	RECURRENCES DE LEVINSON : CAS VECTORIEL	27
4.1	Récurrances de Levinson sur les résidus vectoriels.	27
4.1.1	Filtres blanchisseurs.	27
4.1.2	Filtres modélisateurs.	29
4.2	Un critère de stabilité.	30
4.3	Récurrances de Levinson sur les résidus vectoriels normalisés : filtres blanchisseurs	30
4.3.1	Récurrances scalaires normalisées	30
4.3.2	Récurrances vectorielles normalisées	31

4.4	Réurrences de Levinson sur les résidus vectoriels normalisés : filtres modélisateurs	36
4.5	Propriétés des processus autorégressifs et de leur support.	39
4.6	Caractérisation des processus autorégressifs	40
4.7	Une caractérisation des processus réguliers.	41
A	Caractérisation des AR(1)	45
B	Relation entre les paramètres d'un AR(2)	47
C	Propriétés des covariances des innovations aller et retour	48
D	Calcul de $\Sigma_{E,n}^{-1/2}$	51

1 INTRODUCTION

On se propose de construire des modèles statistiques temps-échelle de signaux permettant de faire de l'analyse au sens extraction de l'information en un (petit) nombre fini de paramètres, ce que les transformées en ondelettes actuelles ne permettent pas.

1.1 Transformées en ondelettes

Les nouvelles techniques de décomposition de signaux en bases orthonormées [7] ou non [4] d'ondelettes ont été développées et vivent hors contexte stochastique. Elles sont en effet issues de l'analyse harmonique et non de la théorie des processus. Elles sont semble-t-il bien adaptées à la compression d'information (en sismique par exemple [5]), au sens où elles permettent de reconstruire - avec une très grande précision numérique - un signal décomposé en un nombre fini de points à chacune des échelles considérées (en nombre fini aussi). Elles sont donc aussi bien adaptées à la synthèse (parole [10] ou musique [6]).

Cependant, l'absence de contexte statistique dans le domaine transformé empêche l'utilisation intensive de ces transformations pour l'analyse de signaux et la reconnaissance.

1.2 Processus stationnaires indexés par des arbres homogènes

On cherche donc tout bonnement à combler cette lacune, c'est-à-dire à définir un cadre statistique pour analyser les signaux dans le domaine transformé. Une première solution, que l'on va étudier ici, consiste à utiliser des processus stationnaires du second ordre indicés par des arbres homogènes [1], et en particulier par des arbres dyadiques correspondant naturellement à la décimation effectuée à chaque échelle dans les décompositions en bases orthonormées d'ondelettes [7] : Daubechies étudie en effet les fonctions de base ϕ telles que les transformées :

$$\hat{f}(2^{-n}, m)$$

où

$$\hat{f}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

fournissent une décomposition de f sur une base orthonormée de $L^2(R)$. Le passage d'une échelle à une autre se fait en associant au point $(2^{-n}, m)$ les deux points $(2^{-(n+1)}, 2m)$ et $(2^{-(n+1)}, 2m + 1)$. Donc, le "bon" ensemble d'indices

pour des processus indexés en temps et en échelle est un arbre dyadique (homogène d'ordre 2). Il s'agit de définir les bonnes notions de processus rationnels de façon à obtenir l'analogue dans le cadre temps-échelle des processus AR et ARMA utilisés pour l'étude des séries temporelles. On va voir qu'une copie de la démarche standard (en séries temporelles) pour la paramétrisation AR n'est pas la bonne : pour un ordre n donné, il y a plus de n coefficients qui sont liés par une relation complexe, et a fortiori le passage de l'ordre n à l'ordre $(n + 1)$ ne se fait pas simplement. Par contre, les modèles "en treillis" - récurrences de Schur et de Levinson - semblent fournir la paramétrisation convenable, puisque le passage de l'ordre n à l'ordre $(n + 1)$ se fait au prix d'un seul coefficient supplémentaire. On espère - voir le problème 2 ci-après - que cette modélisation permettra de définir un autre type de décomposition d'un signal en échelle, analogue à [7], mais où la notion d'"innovation" est cette fois adaptée aux statistiques (du second ordre) du signal étudié et non relative à la mesure de Lebesgue, et est sans doute la notion de décomposition temps-échelle utile pour l'analyse et la reconnaissance.

On étudie donc dorénavant le problème des :

1.3 Modèles statistiques pour les processus stationnaires du second ordre indexés par les arbres homogènes

On définit les arbres homogènes et la notion de stationnarité considérée. Pour définir une notion de **causalité** en temps et échelle, on définit un ordre partiel sur l'arbre. D'autre part, pour définir l'analogue de l'opérateur décalage z^{-1} , on introduit un codage des chemins sur l'arbre, c'est-à-dire des opérateurs de déplacement sur l'arbre. Enfin, pour avoir l'analogue de l'opérateur de convolution représenté par les polynômes en z^{-1} , il convient de définir les séries formelles construites sur les mots du langage engendré par les opérateurs de déplacement. L'opérateur de multiplication de ces polynômes par z^{-1} (qui intervient dans les récurrences de Schur) sera remplacé par des opérateurs adéquats sur ces séries formelles.

Ce n'est qu'après toutes ces définitions préliminaires que l'on posera les problèmes que l'on veut résoudre concernant la modélisation des processus stationnaires indexés par un arbre homogène d'ordre 2.

2 ARBRES HOMOGENES ET PROCESSUS INDEXES PAR DE TELS ARBRES

Ce paragraphe est essentiellement consacré à des rappels de [1] et à l'introduction d'une notion de causalité. On pose ensuite les deux problèmes que l'on veut résoudre.

2.1 Arbre homogène [1]

On appelle **arbre homogène d'ordre q** un graphe infini sans cycle \mathcal{T} , non orienté, connexe, dont tous les sommets ont même valence $(q + 1)$; ie de tout sommet partent $(q + 1)$ arêtes. On note $d(s, t)$ le nombre d'arêtes du plus court chemin entre les sommets s et t de \mathcal{T} .

On considère ici les arbres homogènes d'ordre $q = 2$ (voir figure 1), pour les raisons indiquées plus haut. En traitement d'images, on peut obtenir une analyse de type pyramidal en considérant les processus indexés par les arbres homogènes d'ordre 4.

Il est important de remarquer que la "frontière" d'un arbre est non dénombrable, et donc plus grande que l'"intérieur" qui est dénombrable. Nous renvoyons à [3] et [12] pour la géométrie sur de tels arbres. Nous indiquons seulement ici un lemme de prolongement des isométries de l'arbre dont la démonstration est en [12] et que nous utiliserons constamment pour la démonstration de propriétés sur les processus indexés par cet arbre. Par abus de langage, on identifiera \mathcal{T} avec l'ensemble de ses sommets. Nous appellerons dorénavant "automorphisme" de \mathcal{T} toute isométrie de \mathcal{T} sur lui-même, au sens de la distance $d(s, t)$ introduite ci-dessus.

Lemme de prolongement des isométries [12] : *Soit \mathcal{T} l'arbre homogène d'ordre q , A et A' deux sous-ensembles de sommets, et f une isométrie de A sur A' , ie une bijection telle que :*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

pour tout x et y de A . Alors il existe un automorphisme \tilde{f} de \mathcal{T} dont la restriction à A est f . De plus, si \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont deux automorphismes de \mathcal{T} ayant cette propriété, leurs restrictions aux segments joignant deux points quelconques de A coïncident.

2.2 Processus stationnaires et théorème de Bochner-Arnaud

Un processus $(y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ indexé par un arbre homogène \mathcal{T} sera dit **stationnaire** du second ordre s'il existe une fonction r de \mathbb{N} dans \mathbb{R} telle que :

$$\mathbb{E}(y_t y_s) = r(d(t, s)) \quad (1)$$

On remarque que la stationnarité d'un signal entraîne qu'il est semblable à lui-même à toutes les échelles, autrement dit "fractal". Un exemple d'un tel signal se trouve à la figure 10.

Exemple [1] Soit $(w_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un bruit blanc gaussien standard. Alors :

$$y_t = \sum_{s \in \mathcal{T}} c_{d(t,s)} W_s$$

où $(c_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissant assez vite, est un processus stationnaire. Ceci utilise le lemme de prolongement des isométries sur l'arbre \mathcal{T} que nous avons rappelé précédemment. En effet, soient s, t, s', t' des noeuds tels que :

$$d(s, t) = d(s', t')$$

On applique le lemme avec $A = \{s, t\}$ et $A' = \{s', t'\}$ au cours du calcul de covariance suivant, en désignant par \tilde{f} l'automorphisme de \mathcal{T} fourni par ce lemme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_{s'} y_{t'}) &= \sum_u c_{d(s',u)} c_{d(t',u)} \\ &= \sum_{\tilde{f}(u')} c_{d(s',\tilde{f}(u'))} c_{d(t',\tilde{f}(u'))} \\ &= \sum_{u'} c_{d(\tilde{f}^{-1}(s'),u')} c_{d(\tilde{f}^{-1}(t'),u')} \quad \text{car } \tilde{f} \text{ est une isométrie} \\ &= \sum_{u'} c_{d(s,u')} c_{d(t,u')} \\ &= \mathbb{E}(y_s y_t) \end{aligned}$$

Cet exemple est peu intéressant : il correspond aux transformations isotropes qui sont peu utiles pour les applications, car elles font intervenir le "passé" et le "futur" en temps et en échelle. En effet, en pratique on a besoin d'une sorte de causalité pour faire convenablement l'analyse temps-échelle d'un signal donné qui vit à son échelle propre. Nous définissons cette causalité en 2.4.

Remarque sur la structure des matrices de covariance. Considérons les noeuds t_1, t_2, t_3 représentés sur la figure 1, et soit :

$$X = (y_{t_1} y_{t_2} y_{t_3})$$

Alors :

$$\mathbb{E}(X^T X) = \begin{pmatrix} r_0 & r_2 & r_2 \\ r_2 & r_0 & r_2 \\ r_2 & r_2 & r_0 \end{pmatrix}$$

impose à la suite (r_n) une condition qui n'est pas nécessairement satisfaite par les suites positives au sens du théorème de Bochner classique : en effet, cette matrice n'est pas de Toeplitz. On imagine donc aisément que la caractérisation de la fonction de covariance d'un processus stationnaire indexé par l'arbre dyadique est différente de celle d'un processus usuel indexé par \mathbb{Z} . C'est ce que l'on va indiquer maintenant par l'équivalent du théorème de Bochner. On a besoin pour cela d'introduire les polynômes de Dunau [2] [12] ; ils sont définis par la récurrence :

$$\begin{aligned} P_0(X) &= 1, P_1(X) = X \\ X P_n(X) &= \frac{2}{3} P_{n+1}(X) + \frac{1}{3} P_{n-1}(X) \end{aligned}$$

Théorème de "Bochner-Arnaud" [2] [1] : Une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ est la fonction de covariance d'un processus stationnaire (indexé par l'arbre dyadique) si et seulement si il existe une mesure μ positive sur $[-1, 1]$ telle que :

$$r_n = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \mu(dx)$$

μ est alors la mesure spectrale du processus.

De plus, la mesure spectrale du bruit blanc - pour lequel $r(n) = \delta_0(n)$ - est donnée par [12] :

$$\mu(dx) = 1 \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right] \frac{\sqrt{8-9x^2}}{1-x^2} dx$$

Contrairement à ce qui se passe sur \mathbb{Z} , cette mesure n'est pas constante, et ne remplit pas $[-1, 1]$. Ceci est dû au fait que la frontière de l'arbre est "grosse" comme on l'a signalé plus haut. Une autre conséquence de ce fait est qu'il y a beaucoup de processus singuliers (purements déterministes).

En vue de définir une notion de causalité (nouvelle), on va introduire un ordre partiel sur l'arbre, en s'appuyant sur la géométrie des arbres introduite en [1].

2.3 Ordre partiel sur l'arbre

On définit les **bouts** [1] de l'arbre. Un bout est une **classe d'équivalence** de la relation d'équivalence suivante entre **chemins infinis** : deux chemins infinis sont équivalents s'ils ne diffèrent que par un nombre fini de sommets.

D'autre part, un **horocycle** est une **classe d'équivalence** de la relation d'équivalence suivante entre **noeuds** de l'arbre. On choisit une fois pour toutes un bout, que l'on notera dorénavant $-\infty$. On note $t \preceq t'$ lorsque t est plus près que t' d'un noeud commun aux deux chemins qui vont au bout $-\infty$; la relation d'équivalence entre deux noeuds t et t' est définie par : $t \preceq t'$ et $t' \preceq t$. Les horocycles sont donc les trajectoires "orthogonales" aux "rayons" qui mènent au bout. On en a représenté deux consécutifs sur la figure 1. Si on privilégie un bout, on peut faire apparaître plus explicitement la structure dyadique de l'arbre (figure 2) et, sur cette figure, les horocycles sont les horizontales.

Une définition plus formelle des horocycles est la suivante. Soient s et s' deux sommets de \mathcal{T} et ω un bout. Notons :

$$\delta_\omega(s, s') = \lim_{t \rightarrow \omega} [d(s, t) - d(s', t)]$$

δ_ω vérifie : $\delta_\omega(s, s') = \delta_\omega(s, s'') + \delta_\omega(s'', s')$. Les horocycles sont alors les classes d'équivalence de la relation d'équivalence suivante :

$$s \sim_\omega s' \leftrightarrow \delta_\omega(s, s') = 0$$

Dans notre cas, l'**ordre partiel** est celui donné par les horocycles orthogonaux aux chemins conduisant au bout $-\infty$ que nous avons choisi :

- $a \preceq b$ signifiera que a est plus près de $-\infty$ que b .

2.4 Opérateurs de déplacement sur \mathcal{T} et causalité

Pour réaliser un codage des chemins sur \mathcal{T} , on définit les 5 opérateurs suivants (voir figure 2) :

- 0: opérateur "neutre" (ie pas de déplacement);
- γ^{-1} : rapproche de $-\infty$;
- α : éloigne de $-\infty$ vers la droite;
- β : éloigne de $-\infty$ vers la gauche;
- δ : conduit au plus proche voisin sur l'horocycle.

Seuls les opérateurs 0 et δ sont des automorphismes. Pour des raisons de simplification de notation, on introduit l'opérateur $\delta^{(n)}$ (noté ainsi pour son analogie avec δ) défini par récurrence pour $n > 1$ par :

$$\begin{aligned} \text{si } t &= \alpha\gamma^{-1}t \text{ alors } \delta^{(n)}t &= \alpha\delta^{(n-1)}\gamma^{-1}t \\ \text{si } t &= \beta\gamma^{-1}t \text{ alors } \delta^{(n)}t &= \beta\delta^{(n-1)}\gamma^{-1}t \end{aligned} \quad (2)$$

i.e. si $t = m_{\alpha,\beta}\gamma^{-n}t$, alors $\delta^{(n+1)}t = m_{\alpha,\beta}\delta\gamma^{-n}t$ avec $\delta^{(1)} = \delta$. On notera que $|\delta^{(n)}| = 2n$. Ces opérateurs satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}\alpha &= 0 \\ \gamma^{-1}\beta &= 0 \\ \gamma^{-1}\delta &= \gamma^{-1} \\ \delta^2 &= 0 \\ \delta\beta &= \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

L'arbre \mathcal{T} s'identifie à l'espace homogène codé par le langage :

$$\mathcal{L} = (\gamma^{-1})^* \cup \{\alpha, \beta\}^* \delta (\gamma^{-1})^* \cup \{\alpha, \beta\}^*$$

ce qui signifie que \mathcal{T} s'identifie à l'ensemble des points de la forme wt_0 où w est un mot de \mathcal{L} et t_0 un point arbitraire de \mathcal{T} , choisi comme origine. Il y a donc trois types de déplacements d'un noeud t de l'arbre à un autre s :

- "remonter" vers le bout $-\infty$
- 1. "remonter" vers le bout $-\infty$, i.e. nombre fini éventuellement nul de fois γ^{-1}
- 2. "sauter" au point voisin sur l'horocycle, i.e. une fois δ
- 3. "redescendre", i.e. un nombre fini éventuellement nul de fois α et β dans n'importe quel ordre
- "descendre" i.e. un nombre fini (éventuellement nul si $s = t$) de α et β .

Attention : \mathcal{L} n'est pas un semi-groupe, le produit vw n'est pas défini en général, même en faisant appel aux relations entre opérateurs. Toutefois, on notera que les produits δw et $\gamma^{-1}w$ sont bien définis pour w arbitraire dans \mathcal{L} .

Causalité sur \mathcal{L} . Pour les modèles **causaux** (au sens de l'ordre défini sur \mathcal{T} et de ces opérateurs de déplacement), on ne considérera - pour les déplacements du deuxième type - que ceux où on "redescend" au plus autant qu'on

est "remonté". En d'autres termes, si w est un mot du langage \mathcal{L} , on note $|w|$ la longueur de w , avec les conventions suivantes :

$$\begin{cases} |\gamma^{-1}| = |\alpha| = |\beta| = 1 \\ |\delta| = 2 \end{cases}$$

Alors, les déplacements à considérer pour la causalité correspondent à tous les mots du langage $\{\gamma^{-1}\}^*$ et aux mots $w = w_{\alpha,\beta}\delta w_{\gamma^{-1}}$ du langage $\{\alpha,\beta\}^*\delta\{\gamma^{-1}\}^*$ tels que : $|w_{\alpha,\beta}| \leq |w_{\gamma^{-1}}|$. On notera alors $w \preceq 0$.

On remarquera que l'on considère une causalité non stricte en échelle, ie que le "passé" d'un noeud t contient les noeuds situés sur le même horocycle c'est-à-dire à la même "échelle". Cette notion de causalité du "grossier" vers le "fin" permettra, par inversion, de définir des transformées réalisant la décomposition en échelles de moins en moins fines d'un signal donné, tout comme [7] ou [5].

Exemples (se reporter à la figure 2).

$$\begin{aligned} s_1 &= \gamma^{-4}t \\ s_2 &= \delta\gamma^{-3}t \\ s_3 &= \alpha\delta\gamma^{-3}t \\ s_4 &= \alpha\beta\delta\gamma^{-3}t \\ s_5 &= \beta^2\alpha\delta\gamma^{-3}t \\ s_6 &= \delta^{(4)}t \end{aligned}$$

2.5 Séries formelles et opérations

Pour coder les convolutions, à la place de $A_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}$, on utilisera les séries formelles [11] :

$$S = \sum_{w \in \mathcal{L}} s_w w$$

La transformée par S d'un "signal" $(u_t)_{t \in \mathcal{T}}$ sera par définition $((Su)_t)_{t \in \mathcal{T}}$ où :

$$(Su)_t = \sum_{w \in \mathcal{L}} s_w u_{w,t}$$

La notation $S(0)$ signifiera le coefficient du mot de longueur nulle (le neutre 0).

Contrairement au cas des séries temporelles ordinaires, il est faux que le processus Su soit stationnaire si u l'est. Par exemple, si u est un bruit blanc, et si $S = 1 + a\gamma^{-1}$, Su n'est pas stationnaire.

Opérations sur les séries formelles L'analogie de la multiplication de $A_n(z)$ par z^{-1} sera défini par :

$$\gamma S = \sum_{w \in \mathcal{L}} s_{\gamma^{-1}w} \cdot w \quad (4)$$

où l'on utilise les règles de simplification précédentes pour ramener $\gamma^{-1}w$ dans \mathcal{L} . De même, on définit :

$$\delta^{(k)} S = \sum_{w \in \mathcal{L}} s_{\delta^{(k)}w} \cdot w \quad (5)$$

Après ces longs préliminaires, on en vient aux problèmes que l'on se propose de résoudre à propos des processus stationnaires du second ordre indexés par un arbre homogène d'ordre 2.

2.6 Problème 1 : Analogie de la décomposition de Wold

(qui va nous occuper ici longtemps). On cherche à représenter tous les processus stationnaires $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ sous une forme :

$$Y_t = \sum_s c_{t,s} W_s$$

(où $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est un bruit blanc) qui soit l'analogie de la décomposition de Wold pour les séries temporelles :

$$Y_n = \sum_{k \geq 0} c_k W_{n-k}$$

avec respect de la causalité introduite précédemment.

Définition des processus autorégressifs. On dit qu'un processus stationnaire du second ordre $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est autorégressif d'ordre p (vis-à-vis de la notion de causalité introduite), s'il admet une représentation de la forme :

$$Y_t = \sum_{w \preceq 0, |w| \leq p} a_w Y_{wt} + \sigma W_t \quad (6)$$

où W_t est un bruit blanc standard.

Autrement dit, Y_t est combinaison linéaire finie de "voisins" au plus à distance p sur le même horocycle et les horocycles passés.

Remarque 1 illustrant une particularité de la situation. Les AR(1) sont les seuls processus stationnaires de la forme : $Y_t = \sum_s c_{t,s} W_s$, dont les coefficients ne chargent que le chemin menant au bout $-\infty$. En effet, on montre - voir annexe A - que :

$$Y_t = \sum_{s \in]-\infty, t]} a_{d(t,s)} W_s$$

implique :

$$a_{d(t,s)} = a^{d(t,s)}$$

pour un certain a , et donc :

$$Y_t = aY_{\gamma^{-1}t} + W_t$$

Une telle propriété est évidemment fautive pour les séries temporelles.

Remarque 2, qui illustre l'inadéquation des représentations AR(p) pour les processus indexés par les arbres et stationnaires. On considère un processus AR(2) stationnaire $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$. Si on écrit les relations de dépendance entre les 4 coefficients AR qui résultent de la définition de la stationnarité (1), on constate que ces coefficients sont liés par une relation non triviale qui est un polynôme homogène de degré 4 (voir annexe B). Plus généralement, quand l'ordre p de l'AR augmente, le nombre de coefficients et le nombre de relations algébriques qui les relient croissent comme 2^p . Ceci montre que la paramétrisation introduite en (6) est inadéquate.

2.7 Problème 2 : interpolation aux échelles plus grossières.

Ce problème revient en fait à la recherche d'une nouvelle "transformée" ou décomposition temps-échelle adaptée cette fois aux statistiques du signal analysé, ce que ne font pas [4] et [7]. L'obtention d'une telle décomposition peut se faire en deux étapes. Soit $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ un échantillon de signal observé (au sens usuel).

La première étape consiste à estimer un modèle AR(p) et la grille dyadique donnant le positionnement de l'échantillon (Y_n) sur un horocycle de l'arbre. Ce positionnement adapté au signal permet d'éviter le problème de non-invariance par translation des décompositions temps/échelle existantes [4] [7].

La deuxième étape consiste à interpoler le signal étudié à l'aide du modèle obtenu, à tout le cône (ou balai [1]) engendré par le segment d'horocycle 1, N (voir figure 2). Ce problème 2 ne sera pas traité ici.

3 RECURRENCES DE SCHUR-LEVINSON : CAS SCALAIRE

Pour les raisons exposées à la remarque 2 du paragraphe 2.6, on cherche d'autres paramétrisations plus adéquates permettant de faire un calcul explicite :

- de **paramètres** caractérisant le processus ;
- de **filtres "modélisateurs"**, pour synthétiser de tels processus ;
- **des innovations**, pour fabriquer des algorithmes d'identification des paramètres des modèles temps-échelle ainsi définis (et - pourquoi pas ? - plus tard des algorithmes de segmentation automatique en temps et échelle).

On introduit maintenant l'analogue des récurrences de Schur et Levinson qui interviennent dans le calcul des filtres dits en treillis pour les séries temporelles [8] [9]. On montre qu'un de leurs avantages est que le passage de l'ordre n à l'ordre $n + 1$ se fait à l'aide d'un seul coefficient dit de réflexion, le même pour les deux types de récurrence. On verra également que ces coefficients ne sont liés par aucune relation, ce qui nous assurera que la paramétrisation ainsi proposée est la bonne. Il est surprenant de constater que, contrairement au cas des séries temporelles, cette paramétrisation n'est pas seulement une alternative à d'autres paramétrisations canoniques des processus AR, mais semble plutôt être **la seule qui convienne**.

3.1 Définition de l'analogue des innovations "aller" et "retour" [9]

Soit $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un processus stationnaire du second ordre indexé par les sommets d'un arbre homogène d'ordre 2.

Dorénavant, la notation $\mathcal{H}\{\dots\}$ désignera l'espace gaussien engendré par les variables entre accolades.

L'équivalent du passé d'une série temporelle usuelle est défini ici par les espaces :

$$\mathcal{Y}_{t,n} \triangleq \mathcal{H}\{Y_{wt} : w \preceq 0, |w| \leq n\} \quad (7)$$

qui correspondent au passé non strict en échelle lié à la notion de causalité introduite : $\mathcal{Y}_{t,n}$ contient les points sur les horocycles "passés" (ie les échelles plus grossières) et les points voisins sur l'horocycle "présent" (ie à la même

échelle) situés à une distance au plus n du point t . On notera que, pour n pair, on rajoute des points sur l'horocycle, mais pas pour n impair.

On définit la suite de sous-espaces d'innovations retour ou rétrogrades ($\mathcal{F}_{t,n}$) par :

$$\mathcal{Y}_{t,n} = \mathcal{Y}_{t,n-1} \oplus \mathcal{F}_{t,n} \quad (8)$$

L'innovation rétrograde est ici définie comme l'erreur de prédiction rétrograde :

$$F_{t,n}(w) \triangleq Y_{wt} - \mathbb{E}(Y_{wt} | \mathcal{Y}_{t,n-1}) \quad (9)$$

pour tous les mots w du langage \mathcal{L} introduit précédemment tels que $|w| = n$ et $w \preceq 0$. (ie points du passé non strict exactement à distance n). Alors :

$$\mathcal{F}_{t,n} = \mathcal{H} \{F_{t,n}(w) : |w| = n, w \preceq 0\}$$

Soit :

$$F_{t,n} \triangleq \text{col}(F_{t,n}(w))$$

le vecteur formé des $F_{t,n}(w)$ rangés en colonne dans un ordre que l'on va indiquer plus loin, mais qui ne servira que pour les récurrences vectorielles en 4.1, et dont la description peut donc être ignorée en première lecture. On a :

$$\dim F_{t,n} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (10)$$

On remarque que :

$$F_{\gamma^{-1}t, 2m-1} = F_{\gamma^{-1}\delta^{(m)}t, 2m-1} \quad (11)$$

Suivant toujours [9], on introduit le résidu auxiliaire (ou innovation "aller") :

$$E_{t,n}(w) \triangleq Y_{wt} - \mathbb{E}(Y_{wt} | \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-1}) \quad (12)$$

pour tous les mots w de \mathcal{L} tels que $|w| < n$ et $w \succ 0$ (ie points à distance au plus $n-1$ sur l'horocycle "présent"). Ces résidus servent à construire des bases de $\mathcal{Y}_{t,n-1} \ominus \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-2}$.

Soit :

$$\mathcal{E}_{t,n} \triangleq \mathcal{H} \{E_{t,n}(w) : |w| < n \text{ et } w \succ 0\} \quad (13)$$

On a :

$$\dim E_{t,n} = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \quad (14)$$

où

$$E_{t,n} \triangleq \text{col}(E_{t,n}(w))$$

Les mots w tels que $|w| < n$ et $w \succ 0$ sont de la forme :

$$w = \delta^{(i_1)} \delta^{(i_2)} \dots \delta^{(i_k)} \quad (15)$$

avec

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

et l'on a alors : $|w| = 2i_k$.

L'ordre choisi pour ces mots est l'ordre croissant des $\sum_{j=1}^k 2^{i_j}$. (Cet ordre correspond au sens de la flèche horizontale sur la figure 6, car le point t est représenté à gauche sur l'horocycle. Il serait différent si t était à droite !).

D'autre part, l'ordre choisi pour les mots w tels que $|w| = n$ et $w \preceq 0$ qui interviennent dans $F_{t,n}$ est le suivant. Ces mots sont de la forme : $w = m\gamma^{-k}$. On les range à k croissant, et pour k constant on prend l'ordre des mots pour E . Voir figure 6.

Exemples Dans les schémas des figures 3 à 6, les $E_{t,n}$ sont représentés par des points et les $F_{t,n}$ par des carrés. Quand on change de n les \square peuvent devenir \bullet !

$n = 1$ (voir figure 3)

$$\mathcal{Y}_{t,0} = \mathcal{H}\{Y_t\}$$

$$\begin{aligned} F_{t,1} &= F_{t,1}(\gamma^{-1}) \\ &= Y_{\gamma^{-1}t} - \mathbb{E}(Y_{\gamma^{-1}t}|Y_t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,0} = \mathcal{H}\{Y_{\gamma^{-1}t}\}$$

$$\begin{aligned} E_{t,1} &= E_{t,1}(0) \\ &= Y_t - \mathbb{E}(Y_t|Y_{\gamma^{-1}t}) \end{aligned}$$

$n = 2$ (voir figure 3)

$$\mathcal{Y}_{t,1} = \mathcal{H}\{Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}\}$$

$$\begin{aligned} F_{t,2} &= \begin{pmatrix} F_{t,2}(\delta) \\ F_{t,2}(\gamma^{-2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_{\delta t} & - \mathbb{E}(Y_{\delta t}|Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}) \\ Y_{\gamma^{-2}t} & - \mathbb{E}(Y_{\gamma^{-2}t}|Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,1} = \mathcal{H}\{Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}\}$$

$$\begin{aligned}
E_{t,2} &= E_{t,2}(0) \\
&= Y_t - \mathbb{E}(Y_t | Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t})
\end{aligned}$$

$n = 3$ (voir figure 4)

$$\mathcal{Y}_{t,2} = \mathcal{H}\{Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\delta t}\}$$

$$\begin{aligned}
F_{t,3} &= \begin{pmatrix} F_{t,3}(\delta\gamma^{-1}) \\ F_{t,3}(\gamma^{-3}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Y_{\delta\gamma^{-1}t} - \mathbb{E}(Y_{\delta\gamma^{-1}t} | Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\delta t}) \\ Y_{\gamma^{-3}t} - \mathbb{E}(Y_{\gamma^{-3}t} | Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\delta t}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,2} = \mathcal{H}\{Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}\}$$

$$\begin{aligned}
E_{t,3} &= \begin{pmatrix} E_{t,3}(0) \\ E_{t,3}(\delta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Y_t - \mathbb{E}(Y_t | Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}) \\ Y_{\delta t} - \mathbb{E}(Y_{\delta t} | Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$n = 4$ (voir figure 5)

$$\mathcal{Y}_{t,3} = \mathcal{H}\{Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\delta t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}\}$$

$$F_{t,4} = \begin{pmatrix} F_{t,4}(\delta^{(2)}) \\ F_{t,4}(\delta\delta^{(2)}) \\ F_{t,4}(\delta\gamma^{-2}) \\ F_{t,4}(\gamma^{-4}) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,3} = \mathcal{H}\{Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\gamma^{-4}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}, Y_{\delta\gamma^{-2}t}\}$$

$$E_{t,4} = \begin{pmatrix} E_{t,4}(0) \\ E_{t,4}(\delta) \end{pmatrix}$$

$n = 5$ (voir figure 6)

$$\mathcal{Y}_{t,4} = \mathcal{H}\{Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\delta t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-4}t}, Y_{\delta\gamma^{-2}t}, Y_{\alpha\delta\gamma^{-1}t}, Y_{\beta\delta\gamma^{-1}t}\}$$

$$F_{t,5} = \begin{pmatrix} F_{t,5}(\delta^{(2)}\gamma^{-1}) \\ F_{t,5}(\delta\delta^{(2)}\gamma^{-1}) \\ F_{t,5}(\delta\gamma^{-3}) \\ F_{t,5}(\gamma^{-5}) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,4} = \mathcal{H} \{Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}, Y_{\gamma^{-3}t}, Y_{\delta\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-4}t}, Y_{\delta\gamma^{-2}t}, Y_{\gamma^{-5}t}, Y_{\delta\gamma^{-3}t}, Y_{\alpha\delta\gamma^{-2}t}, Y_{\beta\delta\gamma^{-2}t}\}$$

$$E_{t,5} = \begin{pmatrix} E_{t,5}(0) \\ E_{t,5}(\delta) \\ E_{t,5}(\delta^{(2)}) \\ E_{t,5}(\delta\delta^{(2)}) \end{pmatrix}$$

Remarque importante Il est important de noter que les processus $(E_{t,n})_{t \in \mathcal{T}}$ (n fixé) ne sont pas stationnaires - au sens de la stationnarité sur l'arbre \mathcal{T} - en général. On en verra un contre-exemple élémentaire plus tard. En fait, ils ne deviennent stationnaires - une fois normalisés - que dans le cas des processus $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ autorégressifs d'ordre p et pour $n \geq p$: ce sont en fait alors des bruits blancs.

En général, ils ne sont invariants en loi que par certaines isométries de l'arbre mais pas toutes.

3.2 Calcul des $F_{t,n}(w)$ et $E_{t,n}(w)$ par récurrence sur l'ordre n (Levinson)

En fait, on va montrer qu'il suffit de propager les récurrences concernant les barycentres (ie moyenne par rapport à tous les mots w intervenant dans un même résidu vectoriel), pour calculer les coefficients de réflexion (k_n). On en déduira les récurrences de Schur. On donnera ensuite les formules du filtre blanchisseur qui donne, outre les k_n , la suite d'innovations $(E_{t,n})$.

A cause des changements de dimension et de géométrie des F et des E quand n augmente, on distingue les cas n pair et n impair.

n pair Dans ce cas, $\dim F_{t,n} = 2 \cdot \dim E_{t,n}$.

1. Rappelons que :

$$F_{t,n}(w) = Y_{wt} - \mathbb{E}(Y_{wt} | \mathcal{Y}_{t,n-1})$$

pour

$$|w| = n, w \preceq 0$$

Cas 1.

$$w \prec 0, \text{ ie } w = \tilde{w}\gamma^{-1}$$

Alors, d'après le théorème des trois perpendiculaires :

$$F_{t,n}(w) = Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t} - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t}|\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2}) - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t}|\mathcal{Y}_{t,n-1} \ominus \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2})$$

Par définition, pour n pair, les composantes de $E_{t,n-1}$ forment une base de l'orthogonal de $\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2}$ dans $\mathcal{Y}_{t,n-1}$. Donc, en utilisant de plus la définition des F , on a :

$$\begin{aligned} F_{t,n}(w) &= F_{\gamma^{-1}t,n-1}(\tilde{w}) - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t}|E_{t,n-1}) \\ &= F_{\gamma^{-1}t,n-1}(\tilde{w}) - \mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t,n-1}(\tilde{w})|E_{t,n-1}) \end{aligned}$$

Cas 2

$$w \asymp 0, \text{ ie } w = \tilde{w}\delta^{(\frac{n}{2})},$$

où

$$|\tilde{w}| < n, \tilde{w} \asymp 0$$

Les mêmes arguments donnent :

$$\begin{aligned} F_{t,n}(w) &= Y_{\tilde{w}\delta^{(\frac{n}{2})}t} - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\delta^{(\frac{n}{2})}t}|\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2}) - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\delta^{(\frac{n}{2})}t}|\mathcal{Y}_{t,n-1} \ominus \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2}) \\ &= E_{\delta^{(\frac{n}{2})}t,n-1}(\tilde{w}) - \mathbb{E}(E_{\delta^{(\frac{n}{2})}t,n-1}(\tilde{w})|E_{t,n-1}) \end{aligned}$$

Remarque. Il y a autant de mots w dans chacun des deux cas 1 et 2.

2. D'autre part rappelons que :

$$E_{t,n}(w) = Y_{wt} - \mathbb{E}(Y_{wt}|\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-1})$$

pour

$$|w| < n \text{ et } w \asymp 0$$

Toujours avec les mêmes arguments, on montre que :

$$\begin{aligned} E_{t,n}(w) &= Y_{wt} - \mathbb{E}(Y_{wt}|\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2}) - \mathbb{E}(Y_{wt}|\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-1} \ominus \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-2}) \\ &= E_{t,n-1}(w) - \mathbb{E}(E_{t,n-1}(w)|F_{\gamma^{-1}t,n-1}) \end{aligned}$$

n impair Le cas $n = 1$ est trivial et sera explicité dans la suite. Pour n impair, $\dim F_{t,n} = \dim E_{t,n}$.

1. Pour n impair et $n \geq 3$, la condition :

$$|w| = n \text{ et } w \preceq 0$$

équivalent à :

$$w \prec 0, w = \tilde{w}\gamma^{-1}, |\tilde{w}| = n - 1$$

Alors :

$$\begin{aligned} F_{t,n}(w) &= Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t} - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t} | \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-2}) - \mathbb{E}(Y_{\tilde{w}\gamma^{-1}t} | \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-1} \ominus \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-2}) \\ &= F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\tilde{w}) - \mathbb{E}\left(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\tilde{w}) | E_{t, n-1}, E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}\right) \end{aligned}$$

car, pour n impair, une base de l'orthogonal de $\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-2}$ dans $\mathcal{Y}_{t, n-1}$ est constituée des composantes de $E_{t, n-1}$ et $E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}$.

2. Pour le calcul de :

$$E_{t,n}(w) = Y_{wt} - \mathbb{E}(Y_{wt} | \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-1})$$

où

$$|w| < n, w \asymp 0$$

on va distinguer deux cas - le premier n'existant que pour $n \geq 3$.

Cas 1

$$|w| < n - 1$$

On a alors :

$$E_{t,n}(w) = E_{t, n-1}(w) - \mathbb{E}(E_{t, n-1}(w) | F_{\gamma^{-1}t, n-1})$$

Cas 2

$$|w| = n - 1, \text{ ie } w = \tilde{w}\delta(\frac{n-1}{2}) \text{ avec } |\tilde{w}| < n - 1$$

Toujours avec les mêmes arguments, on obtient :

$$E_{t,n}(w) = E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}(\tilde{w}) - \mathbb{E}\left(E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}(\tilde{w}) | F_{\gamma^{-1}t, n-1}\right)$$

Remarque. Le nombre de mots w est identique dans chacun des deux cas 1 et 2.

Conséquence Il résulte des 6 formules donnant les $F_{t,n}(w)$ et $E_{t,n}(w)$ par récurrence que les grandeurs à calculer sont les projections suivantes :

1. **n pair**

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (F_{\gamma^{-1}t,n-1}(\tilde{w}) | E_{t,n-1}) \\ & \mathbb{E} (E_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}(\tilde{w}) | E_{t,n-1}) \\ & \mathbb{E} (E_{t,n-1}(w) | F_{\gamma^{-1}t,n-1}) \end{aligned}$$

2. **n impair**

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (F_{\gamma^{-1}t,n-1}(\tilde{w}) | E_{t,n-1}, E_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}) \\ & \mathbb{E} (E_{t,n-1}(w) | F_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ & \mathbb{E} (E_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}(\tilde{w}) | F_{\gamma^{-1}t,n-1}) \end{aligned}$$

L'existence d'isométries sur l'arbre et la définition de la stationnarité du processus de départ vont permettre de montrer qu'il suffit de calculer les projections sur les barycentres des coordonnées mentionnées et, mieux, que les formules de récurrence qui suffisent à calculer les coefficients de réflexion sont des récurrences scalaires portant sur ces barycentres.

3.3 Récurrences scalaires sur les barycentres

On définit naturellement les barycentres par :

$$e_{t,n} = 2^{-[\frac{n-1}{2}]} \sum_{|w| < n, w > 0} E_{t,n}(w) \quad (16)$$

$$f_{t,n} = 2^{-[\frac{n}{2}]} \sum_{|w|=n, w \leq 0} F_{t,n}(w) \quad (17)$$

Les processus $(e_{t,n})_{t \in \mathcal{T}}$ et $(f_{t,n})_{t \in \mathcal{T}}$ - n fixé - ne sont pas non plus stationnaires en général. Voir contre-exemple ci-après.

Lemme fondamental : *Les six collections de projections (pour tous les mots w ou \tilde{w} à considérer) nécessaires aux calculs se réduisent en fait à quatre projections seulement. En effet :*

n pair pour tout mot w' tel que $|w'| = n - 1, w' \preceq 0$ et pour tout mot w'' et w tel que $|w''| < n, w'' \succ 0$, on a :

$$\mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(w') | E_{t, n-1}) = \mathbb{E}(E_{\delta(\frac{n}{2})_{t, n-1}}(w'') | E_{t, n-1}) \quad (18)$$

$$= \mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(w_0) | e_{t, n-1}) \quad (19)$$

$$= \mathbb{E}(E_{\delta(\frac{n}{2})_{t, n-1}}(0) | e_{t, n-1}) \quad (20)$$

où w_0 est l'un quelconque des w' , et

$$\mathbb{E}(E_{t, n-1}(w) | F_{\gamma^{-1}t, n-1}) = \mathbb{E}(E_{t, n-1}(0) | f_{\gamma^{-1}t, n-1})$$

n impair pour tout w' et w'' tels que $|w'| < n, w' \succ 0$, on a :

$$\mathbb{E}(E_{t, n-1}(w') | F_{\gamma^{-1}t, n-1}) = \mathbb{E}(E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}(w'') | F_{\gamma^{-1}t, n-1}) \quad (21)$$

$$= \mathbb{E}(E_{t, n-1}(0) | f_{\gamma^{-1}t, n-1}) \quad (22)$$

et, pour tout \tilde{w} tel que $|\tilde{w}| = n, \tilde{w} \preceq 0$, et pour w_0 l'un quelconque des \tilde{w} :

$$\mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\tilde{w}) | E_{t, n-1}, E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}) = \mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(w_0) | \frac{1}{2}(e_{t, n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t, n-1}}))$$

Démonstration : On ne démontre le lemme que pour la première grandeur à calculer, soit :

$$\mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(w) | E_{t, n-1})$$

Les autres s'obtiennent par les mêmes arguments.

On montre d'abord que :

$$\mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(w) | E_{t, n-1})$$

ne dépend pas de w . Cette propriété est démontrée en annexe C à l'aide de l'existence d'isométries convenables de l'arbre et du lemme de prolongement des isométries.

On montre ensuite qu'il suffit de projeter sur le barycentre $e_{t, n-1}$. Pour cela, on utilise un argument qui tient à la structure propre de la matrice de covariance des vecteurs de la base de l'espace sur lequel on projette. En effet, soit :

$$\Sigma_{E, n} \triangleq \text{cov} E_{t, n}$$

la matrice de covariance de $E_{t,n}$. Alors, pour tout n , $\Sigma_{E,n}$ admet $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

comme vecteur propre. Ceci découle de la structure dyadique de $\Sigma_{E,n}$ qui est de la forme :

$$\Sigma_{E,n} = \Sigma^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\alpha_0, \dots, \alpha_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor})$$

où :

$$\Sigma^d (\alpha_0, \dots, \alpha_d) = \begin{bmatrix} \Sigma^{d-1} (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) & \alpha_d \mathbf{U} \\ \alpha_d \mathbf{U} & \Sigma^{d-1} (\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}) \end{bmatrix}$$

et où les α_i sont des coefficients que l'on ne précise pas et $\mathbf{U} = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$.

On vérifie de plus que les matrices de cette forme sont diagonalisables dans la base des suites de Haar que nous donnons ici pour la dimension 8 :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La démonstration de cette propriété de structure se fait avec la même démarche qu'à l'annexe C ; elle s'appuie sur la structure dyadique de l'arbre et l'existence d'isométries laissant globalement invariantes les lois jointes des grandeurs projetées et de la base de l'espace sur lequel on projette. On montre à l'annexe D que cette structure de $\Sigma_{E,n}$ permet de ramener de manière arborescente le calcul de $\Sigma_{E,n}^{-1/2}$ à des calculs scalaires. L'algorithme obtenu est $O(l \log l)$ si l est la dimension de $\Sigma_{E,n}$. Le fait que $\mathbf{1}$ soit vecteur propre de $\Sigma_{E,n}$ se vérifie par récurrence de manière triviale.

Soit maintenant un vecteur X tel que :

$$X = \sum_{\substack{|w'| < n \\ w' \succ 0}} \lambda_{w'} E_{t,n-1}(w')$$

où

$$\sum_{\substack{|w'| < n \\ w' \succ 0}} \lambda_{w'} = 0$$

Alors X est orthogonal à $e_{t,n-1}$. En effet :

$$\mathbb{E}(Xe_{t,n-1}) = \text{cste} \cdot \left(\lambda_{w'_1}, \dots, \lambda_{w'_{2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} \right) \Sigma_{E,n} \mathbf{1} = 0$$

Donc l'orthogonal de $e_{t,n-1}$ dans $\mathcal{E}_{t,n-1}$ contient tous les X de cette forme. Et, réciproquement, tout X de $\mathcal{E}_{t,n-1}$ est combinaison linéaire des $E_{t,n-1}(w)$ et ne peut être orthogonal à $e_{t,n-1}$ que si les coefficients sont de somme nulle. On a donc caractérisé $\mathcal{E}_{t,n-1} \ominus e_{t,n-1}$. Mais la projection d'un F sur un X de cette forme est nulle. En effet :

$$\mathbb{E} \left(F_{\gamma^{-1}t,n-1}(w) \left(\sum_{w'} \lambda_{w'} E_{t,n-1}(w') \right) \right) = \left(\sum_{w'} \lambda_{w'} \right) \mathbb{E} (F_{\gamma^{-1}t,n-1}(w) E_{t,n-1}(w'_0))$$

puisque les covariances de F et E ne dépendent pas de w' . Donc la projection de F sur X est nulle, et il suffit donc, pour projeter F sur \mathcal{E} , de le projeter sur e ; ce que l'on voulait démontrer.

3.3.1 Récurrences sur les barycentres $e_{t,n}$ et $f_{t,n}$

En moyennant les récurrences pour $E_{t,n}(w)$ et $F_{t,n}(w)$ sur les w licites, et en utilisant le lemme fondamental, on obtient :

n pair

$$\begin{aligned} e_{t,n} &= e_{t,n-1} - \mathbb{E}(e_{t,n-1} | f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ f_{t,n} &= \frac{1}{2} (f_{\gamma^{-1}t,n-1} + e_{\delta(\frac{n}{2})_{t,n-1}}) - \frac{1}{2} \mathbb{E} (f_{\gamma^{-1}t,n-1} + e_{\delta(\frac{n}{2})_{t,n-1}} | e_{t,n-1}) \end{aligned}$$

n impair, $n > 1$

$$\begin{aligned} e_{t,n} &= \frac{1}{2} (e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t,n-1}}) - \frac{1}{2} \mathbb{E} (e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t,n-1}} | f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ f_{t,n} &= f_{\gamma^{-1}t,n-1} - \mathbb{E} \left(f_{\gamma^{-1}t,n-1} \middle| \frac{1}{2} (e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t,n-1}}) \right) \end{aligned}$$

$n = 1$

$$\begin{cases} e_{t,n} = e_{t,n-1} - \mathbb{E}(e_{t,n-1} | f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ f_{t,n} = f_{\gamma^{-1}t,n-1} - \mathbb{E}(f_{\gamma^{-1}t,n-1} | e_{t,n-1}) \end{cases}$$

3.4 Calcul explicite des projections

On introduit les coefficients k_n dits de réflexion, qui sont les corrélations des vecteurs à projeter avec ceux sur lesquels on projette, et on montre qu'ils sont identiques pour les 2 formules sur e et f .

n pair

$$\begin{cases} e_{t,n} = e_{t,n-1} - k_n f_{\gamma^{-1}t,n-1} \\ f_{t,n} = \frac{1}{2} \left(f_{\gamma^{-1}t,n-1} + e_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1} \right) - k_n e_{t,n-1} \end{cases} \quad (23)$$

où :

$$\begin{aligned} k_n &= \text{cor}(e_{t,n-1}, f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ &= \text{cor}\left(e_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}, e_{t,n-1}\right) \\ &= \text{cor}\left(e_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}, f_{\gamma^{-1}t,n-1}\right) \end{aligned}$$

Démonstration : $n-1$ étant impair, $e_{t,n-1}$, $e_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}$ et $f_{\gamma^{-1}t,n-1}$ sont barycentres du même nombre de composantes, et l'existence d'isométries convenables entre ces coordonnées permet de montrer (voir Annexe C) qu'ils ont même variance, à savoir :

$$\mathbb{E}(e_{t,n-1}^2) = \mathbb{E}(e_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^2) = \mathbb{E}(f_{\gamma^{-1}t,n-1}^2) \triangleq \sigma_{n-1}^2$$

On en déduit que le coefficient de projection k_n est en fait une corrélation.

Les deux premières formules pour k_n découlent du lemme fondamental. La dernière résulte des deux premières pour $t = \delta(\frac{n}{2})s$. D'autre part, l'égalité des variances des e et des f conduit aux expressions :

$$\begin{cases} \sigma_{e,n}^2 = (1 - k_n^2) \sigma_{n-1}^2 \\ \sigma_{f,n}^2 = \left(\frac{1+k_n}{2} - k_n^2 \right) \sigma_{n-1}^2 \end{cases} \quad (24)$$

D'où une condition nécessaire sur les coefficients de réflexion pour éviter la singularité des résidus :

$$-\frac{1}{2} < k_n < 1 \text{ pour } n \text{ pair} \quad (25)$$

n impair Pour $n > 1$:

$$\begin{cases} e_{t,n} = \frac{1}{2} \left(e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1} \right) - k_n f_{\gamma^{-1}t,n-1} \\ f_{t,n} = f_{\gamma^{-1}t,n-1} - \frac{1}{2} k_n \left(e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1} \right) \end{cases} \quad (26)$$

où

$$k_n = \text{cor}\left(\frac{1}{2} \left(e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1} \right), f_{\gamma^{-1}t,n-1}\right)$$

Pour $n = 1$, la demi-somme est remplacée par $e_{t,0}$.

Démonstration: Elle est semblable à celle pour n pair. n étant impair, on a comme précédemment :

$$\mathbb{E}(e_{t,n}^2) = \mathbb{E}(f_{\gamma^{-1}t,n}^2) \triangleq \sigma_n^2$$

D'autre part, par un argument d'isométrie, on montre (annexe C) que les résidus $\frac{1}{2} \left(e_{t,n-1} + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1} \right)$ et $f_{\gamma^{-1}t,n-1}$ ont même variance. On en déduit que k_n est un coefficient de corrélation. Son expression se déduit du lemme fondamental. Enfin, l'égalité des variances permet de montrer que :

$$\sigma_n^2 = (1 - k_n^2) \sigma_{f,n-1}^2 \quad (27)$$

D'où la condition nécessaire :

$$-1 < k_n < 1 \text{ pour } n \text{ impair} \quad (28)$$

3.5 Récurrences de Schur

Comme en [8], on en déduit les récurrences dites de Schur. On définit les séries formelles de corrélations croisées par :

$$P_n \triangleq \text{cov}(Y_t, e_{t,n}) \triangleq \sum_{w \leq 0} \mathbb{E}(Y_t e_{wt,n}) \cdot w \quad (29)$$

$$Q_n \triangleq \text{cov}(Y_t, f_{t,n}) \triangleq \sum_{w \leq 0} \mathbb{E}(Y_t f_{wt,n}) \cdot w \quad (30)$$

En utilisant les deux opérateurs sur les séries formelles définis au début, les récurrences sur e et f permettent l'obtention de P_n et Q_n par récurrence :

n pair

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} - k_n \gamma Q_{n-1} \\ Q_n = \frac{1}{2} \left(\gamma Q_{n-1} + \delta(\frac{n}{2}) P_{n-1} \right) - k_n P_{n-1} \end{cases} \quad (31)$$

où

$$k_n = \frac{\gamma Q_{n-1}(0) + \delta(\frac{n}{2}) P_{n-1}(0)}{2P_{n-1}(0)}$$

n impair

$$\begin{cases} P_n &= \frac{1}{2} (P_{n-1} + \delta^{(\frac{n-1}{2})} P_{n-1}) - k_n \gamma Q_{n-1} \\ Q_n &= \gamma Q_{n-1} - k_n \frac{1}{2} (P_{n-1} + \delta^{(\frac{n-1}{2})} P_{n-1}) \end{cases} \quad (32)$$

où

$$k_n = \frac{2\gamma Q_{n-1}(0)}{P_{n-1}(0) + \delta^{(\frac{n-1}{2})} P_{n-1}(0)}$$

Pour $n = 1$, la demi-somme des P_{n-1} est remplacée par P_0 .

Dans les formules précédentes, la notation $S(0)$ - où est S est une série formelle - signifie le coefficient du mot vide (de longueur 0).

Remarque. Par définition,

$$P_0 = Q_0 = \sum_{w \leq 0} r_{|w|} \cdot w$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$k_1 \triangleq \frac{\gamma Q_0(0)}{P_0(0)} = \frac{r_1}{r_0} \text{ et } |k_1| \leq 1$$

comme dans le cas usuel des séries chronologiques. Pour calculer "à la main" les coefficients de réflexion k_n ultérieurs, il faut bien prendre garde à ne simplifier qu'au dernier moment, à l'aide des k_i précédents, les expressions obtenues.

Exemple, qui illustre le caractère non-stationnaire des processus d'innovations "aller" et retour" E et F

$$\begin{aligned} e_{t,1} &= E_{t,1}(0) \\ &= Y_t - k_1 Y_{\gamma^{-1}t} \text{ où } k_1 = \frac{r_1}{r_0} \end{aligned}$$

On en déduit :

• d'une part :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e_{t,1} e_{\delta t,1}) &= \mathbb{E}((Y_t - k_1 Y_{\gamma^{-1}t})(Y_{\delta t} - k_1 Y_{\gamma^{-1}\delta t})) \\ &= r_2 - 2k_1 r_1 + k_1^2 r_0 \\ &= r_2 - \frac{r_1^2}{r_0} \end{aligned}$$

- d'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_{t,1}e_{\gamma-2t,1}) &= \mathbb{E}((Y_t - k_1Y_{\gamma-1t})(Y_{\gamma-2t} - k_1Y_{\gamma-3t})) \\
&= (1 + k_1^2)r_2 - k_1(r_1 + r_3) \\
&= r_2 - \frac{r_1^2}{r_0} + \frac{r_1(r_1r_2 - r_0r_3)}{r_0^2}
\end{aligned}$$

En général, ces deux grandeurs sont différentes, et donc $(e_{t,1})_{t \in \mathcal{T}}$ n'est pas stationnaire. Il n'y a égalité (et donc stationnarité) que si :

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_1}{r_0}$$

et donc si $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est un processus AR(1) (voir annexe A).

4 RECURRENCES DE LEVINSON : CAS VECTORIEL

Nous abordons maintenant les récurrences vectorielles.

4.1 Récurrences de Levinson sur les résidus vectoriels.

Les récurrences vectorielles - ie sur les $E_{t,n}$ et $F_{t,n}$ et non pas seulement sur les barycentres $e_{t,n}$ et $f_{t,n}$ - sont nécessaires pour compléter la description du filtre blanchisseur qui, partant du signal $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$, fournit les coefficients (k_n) et le bruit blanc qui excite ce filtre. Cette information sera en fait à proprement parler fournie par les récurrences portant sur les innovations **normalisées**, que nous verrons plus loin; en effet, seules ces dernières fournissent des composantes indépendantes pour les innovations, et donc permettent d'obtenir finalement le bruit blanc désiré. Toutefois, les récurrences portant sur les résidus non normalisés sont plus simples, et suffisent pour étudier les questions de stabilité.

4.1.1 Filtres blanchisseurs.

On note

$$\mathbf{1}_* = \frac{1}{\sqrt{\dim \mathbf{l}}} \mathbf{1}$$

Alors

$$\mathbf{U}_* = \mathbf{1}_* \mathbf{1}_*^T$$

a pour valeurs propres $(1, 0, \dots, 0)$. D'autre part, on utilisera fréquemment les identités du type :

$$\begin{aligned} U_* U_* &= U_* \\ f^* &= \mathbf{1}_*^T F^* = \frac{1}{\sqrt{\dim F}} \sum_w F^*(w) \\ \mathbf{1}_* f^* &= U_* F^* \end{aligned}$$

On va démontrer que les récurrences vectorielles s'écrivent de la manière suivante :

n pair

$$\begin{cases} E_{t,n} = E_{t,n-1} - k_n U_* F_{\gamma^{-1}t,n-1} \\ F_{t,n} = \begin{bmatrix} E_{\delta^{(\frac{n}{2})}t,n-1} \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1} \end{bmatrix} - k_n \begin{bmatrix} U_* \\ U_* \end{bmatrix} E_{t,n-1} \end{cases} \quad (33)$$

n impair Pour $n > 1$

$$\begin{cases} E_{t,n} = \begin{bmatrix} E_{t,n-1} \\ E_{\delta^{(\frac{n-1}{2})}t,n-1} \end{bmatrix} - k_n U_* F_{\gamma^{-1}t,n-1} \\ F_{t,n} = F_{\gamma^{-1}t,n-1} - k_n U_* \begin{bmatrix} E_{t,n-1} \\ E_{\delta^{(\frac{n-1}{2})}t,n-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (34)$$

Pour $n = 1$, les formules s'écrivent :

$$\begin{cases} e_{t,1} = e_{t,0} - k_1 f_{\gamma^{-1}t,0} \\ f_{t,1} = f_{\gamma^{-1}t,0} - k_1 e_{t,0} \end{cases}$$

Remarques : l'ordre utilisé pour ranger les composantes est décrit en 3.1. Il découle de ces formules que les résidus d'ordre n sont entièrement déterminés par exactement n coefficients de réflexion, bien que les espaces d'innovations d'ordre n soient de dimension de l'ordre de $2^{\frac{n}{2}}$. Ce fait très surprenant est la conséquence du très grand nombre de symétries présentes dans l'arbre T comme on peut le voir sur la figure 1.

Démonstration : Nous nous contentons de montrer les formules dans le cas pair, le cas impair se traite de manière analogue. On part de la formule de

Levinson :

$$\begin{aligned}
 E_{t,n} &= E_{t,n-1} - \mathbb{E}(E_{t,n-1} | F_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\
 &= E_{t,n-1} - \lambda \mathbf{1} f_{\gamma^{-1}t,n-1} \\
 &= E_{t,n-1} - \lambda U_* F_{\gamma^{-1}t,n-1}
 \end{aligned}$$

où la seconde égalité résulte du lemme fondamental. Si nous prémultiplions cette égalité par $\frac{1}{\dim E_{t,n-1}} \mathbf{1}^T$, elle se réduit à la formule correspondante pour les barycentres des innovations, d'où il s'ensuit que $\lambda = k_n$.

4.1.2 Filtrés modélisateurs.

Ils s'obtiennent immédiatement à partir des filtres blanchisseurs.

n pair

$$\begin{pmatrix} E_{t,n-1} \\ F_{t,n} \end{pmatrix} = \Sigma(k_n) \begin{pmatrix} E_{t,n} \\ E_{\delta(\frac{n}{2})t,n} \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1} \end{pmatrix} \quad (35)$$

où

$$\Sigma(k_n) \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 & k_n U_* \\ -k_n U_* & I & (k_n - k_n^2) U_* \\ -k_n U_* & 0 & (I - k_n^2 U_*) \end{bmatrix}$$

n impair : Pour $n > 1$:

$$\begin{pmatrix} E_{t,n-1} \\ E_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1} \\ F_{t,n} \end{pmatrix} = \Sigma(k_n) \begin{pmatrix} E_{t,n} \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1} \end{pmatrix} \quad (36)$$

où

$$\Sigma(k_n) \triangleq \begin{bmatrix} I & k_n U_* \\ -k_n U_* & (I - k_n^2 U_*) \end{bmatrix}$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} e_{t,0} \\ f_{t,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ -k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{t,1}^* \\ f_{\gamma^{-1}t,0}^* \end{pmatrix}$$

La figure 8 montre le diagramme de deux sections du filtre modélisateur faisant passer de l'ordre $2n+1$ à l'ordre $2n-1$. D'autre part, la figure 9 montre un bloc diagramme global d'un filtre modélisateur d'ordre 7. De façon à rendre plus lisible les diverses dimensions utilisées pour U_* dans ce schéma, nous notons U_n pour mentionner que l'opérateur U_* utilisé est de dimension 2^n .

4.2 Un critère de stabilité.

Théorème sur la stabilité des filtres modélisateurs : *les conditions*

$$-1 < k_{2n+1} < 1, \quad -\frac{1}{2} < k_{2n} < 1 \quad (37)$$

sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que le filtre modélisateur de coefficients de réflexion $(k_n)_{1 \leq n \leq N}$ soit asymptotiquement stable. Dans la suite, nous appellerons conditions de stabilité ces conditions.

Démonstration: Se reportant au schéma de la figure 8, une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour le filtre modélisateur est que **tous les circuits figurant dans ce réseau soient de gain strictement contractant** (on notera que tous ces circuits sont étiquetés par l'opérateur γ^{-1} , ce qui en garantit la calculabilité). Sur cette figure, on rencontre deux types de circuit, dont les gains respectifs sont

$$-k_{2n}k_{2n-1}U_{n-1}$$

dont le rayon spectral est égal à $|k_{2n}k_{2n-1}|$, et

$$-k_{2n+1} \begin{bmatrix} -k_{2n}U_{n-1} & I \\ -k_{2n}U_{n-1} & 0 \end{bmatrix} U_n = -\frac{k_{2n+1}}{2} \begin{bmatrix} 1 - k_{2n} & 1 - k_{2n} \\ -k_{2n} & -k_{2n} \end{bmatrix} \otimes U_{n-1}$$

(où \otimes désigne le produit de Kronecker) dont le rayon spectral est égal à $|k_{2n+1} \frac{1-2k_{2n}}{2}|$. Sachant enfin que les boîtes finales comportent un circuit de gain k_1 , on en déduit le théorème.

4.3 Récurrences de Levinson sur les résidus vectoriels normalisés : filtres blanchisseurs

L'intérêt pratique de ces formules est limité dans la mesure où il suppose l'observation d'un signal à toutes les échelles, ce qui est rarement le cas. Cependant, il permettra de faire de l'extraction et de la compression (en un nombre fini de paramètres) de l'information de manière automatique à partir de l'ensemble des signaux résultant de la décomposition temps échelle en bases orthonormées d'ondelettes de Daubechies [7] par exemple. Dans tout ce qui suit, * en exposant désigne les grandeurs normalisées par leur variance.

4.3.1 Récurrences scalaires normalisées

Par définition :

$$e_{i,0}^* = f_{i,0}^* = \frac{1}{\sigma_0} Y_t$$

n pair

$$\begin{cases} e_{t,n}^* = \frac{1}{\sqrt{1-k_n^2}} (e_{t,n-1}^* - k_n f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*) \\ f_{t,n}^* = \frac{1}{\sqrt{1+k_n-k_n^2}} \left(\frac{1}{2} (f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^*) - k_n e_{t,n-1}^* \right) \end{cases}$$

(les racines carrées existent puisque $-1/2 < k_n < 1$).

n impair

$$\begin{cases} e_{t,n}^* = \frac{1}{\sqrt{1-k_n^2}} \left(\frac{1}{2} (e_{t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}^*) - k_n f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) \\ f_{t,n}^* = \frac{1}{\sqrt{1-k_n^2}} \left(f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* - k_n \frac{1}{2} (e_{t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}^*) \right) \end{cases}$$

Pour $n = 1$, la demi-somme des e^* est remplacée par $e_{i,0}^*$.

4.3.2 Récurrences vectorielles normalisées

On va démontrer que les récurrences vectorielles normalisées s'écrivent de la manière suivante :

n pair

$$\begin{cases} E_{t,n}^* = \Sigma_{E,n}^{*-1/2} [E_{t,n-1}^* - k_n \mathbb{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*] \\ F_{t,n}^* = \Sigma_{F,n}^{*-1/2} \left[\begin{pmatrix} E_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \end{pmatrix} - \sqrt{2} k_n \mathbb{1}_* e_{t,n-1}^* \right] \end{cases} \quad (38)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_{E,n}^* &\triangleq \Sigma_{E,n-1}^{-1/2} \Sigma_{E,n}^{1/2} \\ &= I - k_n^2 \mathbb{U}_* \end{aligned}$$

et

$$\Sigma_{F,n}^* = \begin{pmatrix} I - k_n^2 \mathbb{U}_* & (k_n - k_n^2) \mathbb{U}_* \\ (k_n - k_n^2) \mathbb{U}_* & I - k_n^2 \mathbb{U}_* \end{pmatrix}$$

n impair Pour $n > 1$, soit

$$h_{n-1} \triangleq \text{cor} \left(e_{t,n-1}^*, e_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t,n-1}}^* \right) = \frac{k_{n-1}}{1+k_{n-1}} \quad (39)$$

alors

$$\begin{cases} E_{t,n}^* = \Sigma_{E,n}^{*-1/2} \left[\begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ E_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t,n-1}}^* \end{pmatrix} - k_n \sqrt{1+h_{n-1}} \mathbb{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right] \\ F_{t,n}^* = \Sigma_{F,n}^{*-1/2} \left[F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* - k_n \sqrt{\frac{2}{1+h_{n-1}}} \mathbb{1}_* \frac{1}{2} \left(e_{t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n-1}{2})_{t,n-1}}^* \right) \right] \end{cases} \quad (40)$$

où

$$\Sigma_{E,n}^* = \begin{pmatrix} I - k_n^2 \frac{1+h_{n-1}}{2} \mathbb{U}_* & (h_{n-1} - k_n^2 \frac{1+h_{n-1}}{2}) \mathbb{U}_* \\ (h_{n-1} - k_n^2 \frac{1+h_{n-1}}{2}) \mathbb{U}_* & I - k_n^2 \frac{1+h_{n-1}}{2} \mathbb{U}_* \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_{F,n}^* &\triangleq \Sigma_{F,n-1}^{\frac{-1}{2}} \Sigma_{F,n}^{\frac{1}{2}} \\ &= I - k_n^2 \mathbb{U}_* \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, les formules s'écrivent :

$$\begin{cases} e_{t,1}^* = \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2}} \left(e_{t,0}^* - k_1 f_{\gamma^{-1}t,0}^* \right) \\ f_{t,1}^* = \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2}} \left(f_{\gamma^{-1}t,0}^* - k_1 e_{t,0}^* \right) \end{cases} \quad (41)$$

Démonstration :

n pair : on part de la formule de Levinson :

$$E_{t,n} = E_{t,n-1} - \mathbb{E} (E_{t,n-1} | F_{\gamma^{-1}t,n-1})$$

où l'on normalise $E_{t,n-1}$:

$$\Sigma_{E,n-1}^{\frac{-1}{2}} E_{t,n} = E_{t,n-1}^* - \mathbb{E} (E_{t,n-1}^* | F_{\gamma^{-1}t,n-1})$$

Soit

$$\Sigma_{E,n}^{*\frac{1}{2}} \triangleq \Sigma_{E,n-1}^{\frac{-1}{2}} \Sigma_{E,n}^{+\frac{1}{2}}$$

Alors :

$$\Sigma_{E,n}^{*\frac{1}{2}} E_{t,n}^* = E_{t,n-1}^* - \mathbb{E} (E_{t,n-1}^* | F_{\gamma^{-1}t,n-1})$$

Or d'après le lemme fondamental :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(E_{t,n-1}|F_{\gamma^{-1}t,n-1}) &= \mathbb{E}(E_{t,n-1}|f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ &= \lambda \mathbf{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(E_{t,n-1}^*|F_{\gamma^{-1}t,n-1}) &= \mathbb{E}(E_{t,n-1}^*|f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ &= \Sigma_{E,n-1}^{-1/2} \mathbb{E}(E_{t,n-1}|f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ &= \lambda \Sigma_{E,n-1}^{-1/2} \mathbf{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1} \\ &= \lambda' \mathbf{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{1}_*$ est vecteur propre de $\Sigma_{E,n-1}$.

Il reste maintenant à montrer que $\lambda' = k_n$. Or, de :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(E_{t,n-1}^*|f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*) &= \mathbb{E}(E_{t,n-1}^*|f_{\gamma^{-1}t,n-1}) \\ &= \lambda' \mathbf{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}\end{aligned}$$

on déduit que $\mathbb{E}(E_{t,n-1}^*(w) f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*)$ est indépendant de w . Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(E_{t,n-1}^*(w) f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\dim E_{t,n-1}} \sum_w E_{t,n-1}^*(w)\right) f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dim E_{t,n-1}}} \mathbb{E}(e_{t,n-1}^* f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dim E_{t,n-1}}} k_n\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(E_{t,n-1}^*|f_{\gamma^{-1}t,n-1}) &= \mathbb{E}(E_{t,n-1}^*|f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*) \\ &= \mathbb{E}(E_{t,n-1}^*(w) f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*) \mathbf{1}_{f_{\gamma^{-1}t,n-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dim E_{t,n-1}}} k_n \mathbf{1}_{f_{\gamma^{-1}t,n-1}} \\ &= k_n \mathbf{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}\end{aligned}$$

D'où $\lambda' = k_n$. CQFD.

La formule pour $F_{t,n}^*$ s'obtient de la même façon ; le $\sqrt{2}$ vient de ce que l'on a empilé 2 vecteurs $\mathbf{1}_*$ normalisés.

Calcul des matrices de covariance. Le calcul précédent montre que :

$$\mathbb{E} \left(E_{t,n-1}^* \cdot f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) = k_n \mathbf{1}_*$$

On en déduit $\Sigma_{E,n}^*$. D'autre part :

$$\Sigma_{F,n}^* \triangleq \text{cov} \begin{pmatrix} E_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^* & - k_n \mathbf{1}_* e_{t,n-1}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* & - k_n \mathbf{1}_* e_{t,n-1}^* \end{pmatrix}$$

(le $\sqrt{2}$ a disparu car les $\mathbf{1}_*$ sont 2 fois plus petits dans cette écriture). Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \cdot e_{t,n-1}^* \right) &= \mathbb{E} \left(E_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^* \cdot e_{t,n-1}^* \right) \\ &= k_n \mathbf{1}_* \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(E_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^*, F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) &= \mathbb{E} \left(E_{\delta(\frac{n}{2})t,n-1}^* \cdot f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) \cdot \mathbf{1}_*^T \\ &= k_n \mathbf{U}_* \end{aligned}$$

D'où $\Sigma_{F,n}^*$.

n impair: On a à calculer :

$$\mathbb{E} \left(E_{t,n-1}^* | f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) = \underbrace{\text{cor} \left(e_{t,n-1}^*, f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right)}_A \cdot \mathbf{1}_* f_{\gamma^{-1}t,n-1}^*$$

Or

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E} \left(e_{t,n-1}^* \cdot f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{2} \left(e_{t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}^* \right) \cdot f_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \right) \\ &\triangleq k_n \sqrt{\text{var} \left(\frac{1}{2} \left(e_{t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}^* \right) \right)} \\ &= k_n \sqrt{\frac{1 + h_{n-1}}{2}} \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $A = k_1$. D'où la formule pour $E_{t,n}^*$ (même remarque que précédemment pour $\sqrt{2}$).

Comme $\sqrt{\frac{2}{1+h_{n-1}}} \cdot \frac{1}{2} \left(e_{t,n-1}^* + e_{\delta(\frac{n-1}{2})t,n-1}^* \right)$ est normalisé, on en déduit la formule pour $F_{t,n}^*$.

Calcul de h_{n-1} . ($n-1$) étant pair, on utilise le cas précédent.

$$\begin{aligned} h_{n-1} &= \mathbf{1}_*^T \cdot \text{cov} \left(E_{t,n-1}^*, E_{\delta^{(\frac{n-1}{2})}, t, n-1}^* \right) \cdot \mathbf{1}_* \\ &= \mathbf{1}_*^T \Sigma_{E,n-1}^{*-1/2} \underbrace{\Sigma_{F,n-1}^*(2,1)}_{\text{bloc}(2,1)} \Sigma_{E,n-1}^{*-1/2} \mathbf{1}_* \end{aligned}$$

d'où :

$$h_{n-1} = \mathbf{1}_*^T \left(I - k_{n-1}^2 U_* \right)^{-1/2} \left(k_{n-1} - k_{n-1}^2 \right) U_* \left(I - k_{n-1}^2 U_* \right)^{-1/2} \mathbf{1}_*$$

or :

$$\left(I - k_{n-1}^2 U_* \right)^{-1/2} = I + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k_{n-1}^2}} - 1 \right) U_*$$

ce qui donne :

$$h_{n-1} = \left(k_{n-1} - k_{n-1}^2 \right) V^T U_* V$$

où

$$V = \left[I + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k_{n-1}^2}} - 1 \right) U_* \right] \mathbf{1}_*$$

Comme $U_* U_* = U_*$, on peut remplacer I par U_* dans cette expression, qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} h_{n-1} &= \frac{k_{n-1} - k_{n-1}^2}{1 - k_{n-1}^2} \\ &= \frac{k_{n-1}}{1 + k_{n-1}} \end{aligned}$$

Calcul des matrices de covariances. Le calcul de $\Sigma_{E,n}^*$ utilise le calcul de covariance fait pour h_{n-1} . On en déduit les expressions annoncées.

Calcul des $\Sigma^{*-1/2}$ Ce calcul repose sur les 2 formules suivantes :

$$\left(I + k U_* \right)^{-1/2} = I + \left(\frac{1}{\sqrt{1+k}} - 1 \right) U_* \text{ pour } k > -1$$

(qui a déjà été utilisée pour le calcul de h_{n-1}) ; et, pour S et T symétriques :

$$\begin{pmatrix} S & T \\ T & S \end{pmatrix}^{-1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X+Y & X-Y \\ X-Y & X+Y \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} X &= (S + T)^{-1/2} \\ Y &= (S - T)^{-1/2} \end{aligned}$$

On rappelle que le calcul de $\Sigma_{E,n}^{-1/2}$ se ramène à des calculs scalaires. Voir annexe D.

Remarque : Pour n pair, il faut calculer :

$$\begin{aligned} & \left(I + (k_n - 2k_n^2) U_* \right)^{-1/2} \\ & \left(I - k_n U_* \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

et

$$\left(I - k_n^2 U_* \right)^{-1/2}$$

La première racine existe car $-1/2 < k_n < 1$.

Pour n impair, on doit calculer :

$$\begin{aligned} & \left(I + (h_{n-1} - k_n^2(1 + h_{n-1})) U_* \right)^{-1/2} \\ & \left(I - h_{n-1} U_* \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

et

$$\left(I - k_n^2 U_* \right)^{-1/2}$$

Or on a toujours $-1 < h < 1$ pour $k^2 < 1$ et donc $h - k^2(1 + h) > -1$, et ces racines existent.

4.4 Récurrences de Levinson sur les résidus vectoriels normalisés : filtres modélisateurs

Ces formules permettent de générer un signal $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ($= (e_{t,0})_{t \in \mathcal{T}}$) à partir de la donnée d'une suite finie de coefficients de réflexion (k_n) et du bruit blanc excitateur. Elles s'écrivent de la manière suivante :

n pair

$$\begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ F_{t,n}^* \end{pmatrix} = \Sigma_*(k_n) \begin{pmatrix} E_{t,n}^* \\ E_{\delta(\frac{\pi}{2})_{t,n}}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \end{pmatrix} \quad (42)$$

où

$$\Sigma_*(k_n) \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{E,n}^{*1/2} & 0 & k_n U_* \\ \Sigma_{F,n}^{*-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -k_n \sqrt{1-k_n^2} U_* & \Sigma_{E,n}^{*1/2} \\ -k_n \sqrt{1-k_n^2} U_* & 0 \end{pmatrix} & (k_n - k_n^2) U_* \\ & (I - k_n^2 U_*) \end{bmatrix}$$

est appelée matrice de scattering et vérifie la relation :

$$\Sigma_*(k_n) \begin{pmatrix} I & h_n U_* & 0 \\ h_n U_* & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \Sigma_*^T(k_n) = I, h = \frac{k}{1+k}$$

n impair : Pour $n > 1$:

$$\begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ E_{\delta^{(\frac{n-1}{2})t,n-1}}^* \\ F_{t,n}^* \end{pmatrix} = \Sigma_*(k_n) \begin{pmatrix} E_{t,n}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \end{pmatrix} \quad (43)$$

où

$$\Sigma_*(k_n) \triangleq \begin{pmatrix} \Sigma_{E,n}^{*1/2} & k_n \sqrt{1+h_{n-1}} U_* \\ \frac{-k_n U_*}{\sqrt{1+h_{n-1}} \sqrt{1-k_n^2}} \Sigma_{E,n}^{*1/2} & (I - k_n^2 U_*)^{1/2} \end{pmatrix}$$

vérifie la relation :

$$\Sigma_*(k_n) \Sigma_*^T(k_n) = \begin{pmatrix} I & h_{n-1} U_* & 0 \\ h_{n-1} U_* & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} e_{t,0}^* \\ f_{t,1}^* \end{pmatrix} = \Sigma_*(k_1) \begin{pmatrix} e_{t,1}^* \\ f_{\gamma^{-1}t,0}^* \end{pmatrix}$$

et

$$\Sigma_*(k_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-k_1^2} & k_1 \\ -k_1 & \sqrt{1-k_1^2} \end{pmatrix}$$

vérifie :

$$\Sigma_*(k_1) \Sigma_*^T(k_1) = I$$

Démonstration

n pair. On part des formules de Levinson vectorielles normalisées que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} E_{t,n-1}^* = \Sigma_{E,n}^{*1/2} E_{t,n}^* + k_n \cup_* F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \\ F_{t,n}^* = \Sigma_{F,n}^{*-1/2} \begin{bmatrix} E_{\delta(\frac{\gamma}{2})t,n-1}^* - k_n \cup_* E_{t,n-1}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* - k_n \cup_* E_{t,n-1}^* \end{bmatrix} \end{cases}$$

soit encore en remplaçant $E_{t,n-1}^*$ et $E_{\delta(\frac{\gamma}{2})t,n-1}^*$:

$$\begin{cases} E_{t,n-1}^* = \Sigma_{E,n}^{*1/2} E_{t,n}^* + k_n \cup_* F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \\ F_{t,n}^* = \Sigma_{F,n}^{*-1/2} \begin{bmatrix} \Sigma_{E,n}^{*1/2} \left(E_{\delta(\frac{\gamma}{2})t,n}^* - k_n \cup_* E_{t,n}^* \right) + (k_n - k_n^2) \cup_* F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \\ (I - k_n^2 \cup_*) F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* - k_n \Sigma_{E,n}^{*1/2} \cup_* E_{t,n}^* \end{bmatrix} \end{cases}$$

On obtient le résultat annoncé en utilisant le fait que :

$$\Sigma_{E,n}^{*\frac{1}{2}} = I - \left(1 - \sqrt{1 - k_n^2} \right) \cup_*$$

La relation satisfaite par $\Sigma_*(k_n)$ vient de ce que les covariances des paires et triplets de résidus sont respectivement :

$$\begin{aligned} \text{cov} \begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ F_{t,n}^* \end{pmatrix} &= I \\ \text{cov} \begin{pmatrix} E_{t,n}^* \\ E_{\delta(\frac{\gamma}{2})t,n}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n}^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & h_n \cup_* & 0 \\ h_n \cup_* & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De la même façon, on introduit la matrice de scattering inverse qui sert au filtre blanchisseur :

$$\begin{pmatrix} E_{t,n}^* \\ F_{t,n}^* \end{pmatrix} = \Theta(k_n) \begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ E_{\delta(\frac{\gamma}{2})t,n-1}^* \\ F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \end{pmatrix}$$

où :

$$\Theta(k_n) = \begin{pmatrix} \Sigma_{E,n}^{*-1/2} & 0 & -\frac{k_n}{\sqrt{1-k_n^2}} \cup_* \\ \Sigma_{F,n}^{*-1/2} \begin{pmatrix} -k_n \cup_* & 0 & I \\ -k_n \cup_* & I & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

n impair. On suit la même démarche que pour n pair en partant des formules de Levinson vectorielles normalisées écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ E_{\delta^{(\frac{n-1}{2})t,n-1}}^* \end{pmatrix} = \Sigma_{E,n}^{*1/2} E_{t,n}^* + k_n \sqrt{1+h_{n-1}} U_* F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* \\ F_{t,n}^* = \Sigma_{F,n}^{*-1/2} \left[F_{\gamma^{-1}t,n-1}^* - \frac{k_n}{\sqrt{1+h_{n-1}}} U_* \begin{pmatrix} E_{t,n-1}^* \\ E_{\delta^{(\frac{n-1}{2})t,n-1}}^* \end{pmatrix} \right] \end{cases}$$

On obtient le résultat annoncé en utilisant le fait que :

$$\Sigma_{F,n}^{*-1/2} U_* = \frac{1}{\sqrt{1-k_n^2}} U_*$$

La relation satisfaite par la matrice de scattering tient au même argument que précédemment.

4.5 Propriétés des processus autorégressifs et de leur support.

Nous donnons ici pêle-mêle diverses propriétés des processus autorégressifs et du support de leur filtre modélisateur. La démonstration de ces résultats est immédiate, et laissée au lecteur.

- Si $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est un processus autorégressif (définition en II.6) d'ordre p , alors les coefficients de réflexion k_n sont nuls pour $n \geq p+1$, et les innovations aller et retour normalisées $E_{t,p}^*$ et $F_{t,p}^*$ sont des bruits blancs standard.

- Soit

$$P_p = \sum_{\substack{w \in \mathcal{L} \\ w \neq 0}} p_w \cdot w$$

la série formelle de Schur d'ordre p , et soit $w = w_{\alpha\beta} \delta \gamma^{-k}$ la décomposition d'un mot intervenant dans P_p . Alors :

$$p_w = 0 \text{ dès que } |w|_{\alpha\beta} > p-3$$

Autrement dit, P_p a son support dans un cylindre de rayon $(p-1)$ autour du chemin conduisant au bout $-\infty$. On en déduit que le filtre modélisateur d'un processus $AR(p)$ a son support dans un cylindre de

rayon $(p - 1)$ autour du chemin conduisant au bout $-\infty$. Inversement, tout processus dont le filtre modélisateur est de support contenu dans un tel cylindre est nécessairement $AR(p)$. Voir la figure 7 pour le cylindre correspondant à un $AR(2)$.

4.6 Caractérisation des processus autorégressifs

Les formules de Levinson et de Schur ont permis de montrer que la donnée d'une suite finie de covariances $(r_n)_{n \geq 0}$ permet de fabriquer une suite finie de coefficients de réflexion $(k_n)_{n \geq 1}$, et qu'un processus autorégressif d'ordre p est caractérisé par exactement p tels coefficients. Nous montrons maintenant la réciproque de ce résultat.

Théorème sur la paramétrisation des processus autorégressifs: *La donnée d'une suite finie de coefficients de réflexion $(k_n)_{1 \leq n \leq p}$ tels que :*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < k_n < 1 & \text{pour } n \text{ pair} \\ -1 < k_n < 1 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

permet de reconstruire une fonction de covariance unique (r_n) , admettant comme coefficients de réflexion la suite donnée prolongée par 0.

Ce théorème achève de remplir le programme que nous nous étions fixé, à savoir de montrer que les coefficients de réflexion constituent la **bonne paramétrisation** des processus AR , et, plus généralement, des processus réguliers.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate à partir des formules de récurrence de Schur:

Lemme sur la régularité de la transformation de la covariance vers les coefficients de réflexion: *on considère l'application Ψ qui, à une suite (r_n) de covariances, associe la suite correspondante (k_n) de coefficients de réflexion. Alors, son jacobien satisfait aux formules suivantes :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_n}{\partial r_m} &= 0 \text{ pour } n < m \\ \frac{\partial k_{2n}}{\partial r_{2n}} &= \frac{1}{2^{n-1} P_{2n-1}(0)} \neq 0 \\ \frac{\partial k_{2n+1}}{\partial r_{2n+1}} &= \frac{1}{2^{n-1} (P_{2n}(0) + \delta^{(n)} P_{2n}(0))} \neq 0 \end{aligned}$$

où les P_n sont les séries de Schur.

Démonstration du théorème. Le filtre modélisateur étant stable, si on l'alimente en entrée par du bruit blanc, sa sortie (y_t) est bien définie (de covariance finie). Nous devons donc seulement montrer que le processus ainsi construit est bien stationnaire sur l'arbre.

Soient donc deux couples (s, t) et (s', t') tels que $d(s, t) = d(s', t')$. Il nous faut montrer que la fonction

$$\Phi : K = (k_n)_{1 \leq n \leq p} \longrightarrow \mathbb{E}(y_t y_s) - \mathbb{E}(y_{t'} y_{s'})$$

est identiquement nulle. Les formules du filtre modélisateur montrent que Φ est une fraction rationnelle. Par conséquent, il nous suffit de montrer que Φ s'annule sur un ouvert non vide de \mathbb{R}^p . Mais, comme $\Phi(K) = 0$ si K est associé à un processus stationnaire, il nous suffit de montrer que l'ensemble des K associés à un processus stationnaire contient un ouvert non vide de \mathbb{R}^p .

Or la fonction Ψ introduite dans le lemme est également rationnelle, et, d'après le lemme, son Jacobien est triangulaire et partout inversible. Il nous suffit donc de montrer que l'ensemble des suites $(r_n)_{0 \leq n \leq p}$ pouvant être prolongées en une fonction de covariance pour un processus stationnaire contient un ouvert non vide de \mathbb{R}^p . Mais cette propriété est caractérisée par une famille finie de conditions de la forme

$$\mathcal{R}(r_0, \dots, r_p) \geq 0$$

où $\mathcal{R}(r_0, \dots, r_p)$ désigne une matrice dont les éléments sont choisis parmi les r_0, \dots, r_p . L'ensemble des $(p+1)$ -uplets satisfaisant aux conditions ci-dessus est non vide (il contient en effet la covariance du bruit blanc), et est par conséquent d'intérieur non vide au vu des inégalités qui le définissent. CQFD

4.7 Une caractérisation des processus réguliers.

Nous dirons qu'un processus (y_t) est **régulier** (ou **purement non déterministe**) si aucune combinaison linéaire d'éléments de l'horocycle de t ne peut être prédite exactement à l'aide d'observations dans le passé strict, ou de manière équivalente à l'aide d'un argument de martingales, si :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{inf}(\Sigma_{E,n}) > 0 \quad (44)$$

où $\lambda_{inf}(A)$ désigne la plus petite valeur propre de A , et où $\Sigma_{E,n}$ est la covariance de $E_{t,n}$. La démonstration des formules (38) et (40) de récurrence sur les résidus vectoriels normalisés montre que, pour n impair,

$$\Sigma_{E,n} = \Sigma_{F,n} \quad (45)$$

et que, pour tout $N > 0$,

$$\lambda_{inf}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{F,n}) = \prod_{n=1}^N \lambda_{inf}(\Sigma_{F,n}^*) \quad (46)$$

cette dernière égalité résultant de la structure propre particulière des matrices $\Sigma_{F,n}$ et $\Sigma_{F,n}^*$. Mais on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{inf}(\Sigma_{F,2n-1}^*) &= 1 - k_{2n-1}^2 \\ \lambda_{inf}(\Sigma_{F,2n}^*) &= \min(1 - k_{2n}, 1 + k_{2n} - 2k_{2n}^2) \\ &\sim 1 - |k_{2n}| \end{aligned}$$

pour $|k_{2n}|$ petit. On en déduit le résultat suivant :

Théorème sur la caractérisation des processus réguliers : *le processus (y_t) est régulier si et seulement si la suite de ses coefficients de réflexion est telle que :*

$$\sum_{n=1}^N (k_{2n-1}^2 + |k_{2n}|) \quad (47)$$

converge vers une limite finie lorsque N tend vers l'infini.

Références

- [1] J.P. ARNAUD, G. LETAC : "La formule de représentation spectrale d'un processus gaussien stationnaire sur un arbre homogène". Publi. Labo. Stat. and Proba. UA 745. Toulouse.
- [2] J.P. ARNAUD : "Fonctions sphériques et fonctions définies positives sur l'arbre homogène". C.R.A.S. t.290, série A (14 Janv. 1980), p.99-101.
- [3] P. CARTIER : "Géométrie et analyse sur les arbres". Séminaire Bourbaki, n407, Février 1972.
- [4] I. DAUBECHIES, A. GROSSMANN, Y. MEYER : "Painless non-orthogonal expansions". Jal Math. Phys., vol.27, p.1271-1283, 1986.
- [5] P. GOUPILLAUD, A. GROSSMANN, J. MORLET : "Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis". Geoplotation, vol.23, p.85-102. 1984/85, Elsevier.
- [6] R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET, A. GROSSMANN : "Analysis of sound patterns through wavelet transforms". Int. Jal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence. Special Issue on Expert Systems and Pattern Analysis, 1987.
- [7] I. DAUBECHIES : "Orthonormal bases of compactly supported wavelets". Research Report AT and T Bell Labs., 1987. A paraitre dans Communications in Pure and Applied Mathematics.
- [8] A. BENVENISTE : "Introduction : Estimation et factorisation spectrale, quelques points de vue féconds". in "Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal". Vol.2, p.231-266. Editions du CNRS, 1982.
- [9] A. BENVENISTE : "Méthodes d'orthogonalisation en treillis pour le problème de la réalisation stochastique". ibidem, vol.2, p.267-308.
- [10] R. KRONLAND-MARTINET. Proc. Colloque "Ondelettes". Marseille, Dec. 87.
- [11] J. BERSTEL, C. REUTENAUER : "Les séries rationnelles et leurs langages". Masson 1984. Collection "Etudes et Recherches en Informatique".

- [12] J.L. DUNAU : "Etude d'une classe de marches aléatoires sur l'arbre homogène" dans "Arbres homogènes et Couples de Gelfand", J.P. Arnaud, J.L. Dunau, G. Letac. Publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités, Univ. Paul Sabatier, Toulouse, no02-83, Juin 1983.

A Caractérisation des AR(1)

Nous allons montrer que les AR(1) sont les seuls processus stationnaires à réponse impulsionnelle infinie dont les coefficients ne chargent qu'une "droite" (ie le chemin menant au bout $-\infty$ choisi).

En effet, soit :

$$Y_t = \sum_{s \in]-\infty, t]} a_{d(t,s)} W_s$$

un tel processus, où $(W_s)_{s \in \mathcal{T}}$ est un bruit blanc standard. Ecrivons les conditions sous lesquelles il est stationnaire.

Soient t_1 et t_2 deux sommets, et t l'intersection des chemins menant respectivement de t_1 et t_2 au bout. Notons :

$$\begin{aligned} n_1 &= d(t_1, t) \\ n_2 &= d(t_2, t) \end{aligned}$$

Puisque W est un bruit blanc, on a :

$$\begin{aligned} r(t_1, t_2) &= \mathbb{E}(Y_{t_1} Y_{t_2}) \\ &= \sum_{s_1 \in]-\infty, t_1]} \sum_{s_2 \in]-\infty, t_2]} a_{d(t_1, s_1)} a_{d(t_2, s_2)} \mathbb{E}(W_{s_1} W_{s_2}) \\ &= \sum_{s \in]-\infty, t]} a_{d(t_1, s)} a_{d(t_2, s)} \\ &= \sum_{m \geq 0} a_{n_1+m} a_{n_2+m} \end{aligned}$$

La stationnarité s'exprime par :

$$\begin{aligned} r(t_1, t_2) &= r(d(t_1, t_2)) \\ &= r(d(t_1, t) + d(t_1, t_2)) \\ &= r(n_1 + n_2) \end{aligned}$$

On a donc :

$$r(n_1 + n_2) = \sum_{m \geq 0} a_{n_1+m} a_{n_2+m}$$

pour $n_1 \geq 0$ et $n_2 \geq 0$.

En particulier, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} r(2n) &= r(n+n) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_{n+m}^2 \\ &= r(2n-2) - a_{n-1}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r(2n) &= r((n+1) + (n-1)) \\ &= \sum_{m \geq 0} a_{m+n+1} a_{m+n-1} \\ &= r(2n-2) - a_{n-2} a_n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2$$

ou encore $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \text{cste}$.

Donc $a_n = a^n$, et la relation :

$$Y_t = \sum_{s \in]-\infty, t]} a^{d(t,s)} W_s$$

entraîne :

$$Y_t = a Y_{\gamma^{-1}t} + W_t.$$

CQFD.

B Relation entre les paramètres d'un AR(2)

Soit $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ un processus autorégressif d'ordre 2 indexé par l'arbre dyadique \mathcal{T} . On peut, par définition, le paramétrer de la manière suivante :

$$a_0 Y_t = a_1 Y_{\gamma^{-1}t} + a_2 Y_{\gamma^{-2}t} + a_3 Y_{\delta t} + W_t \quad (*)$$

où $(W_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est un bruit blanc standard. Nous allons montrer que les quatre coefficients autorégressifs a_0, a_1, a_2, a_3 sont liés par une relation algébrique qui est un polynôme homogène de degré 4. Cette relation s'obtient en écrivant les conditions nécessaires pour que le processus $(Y_t)_{t \in \mathcal{T}}$ soit stationnaire.

Calculons tout d'abord les covariances $\mathbb{E}(Y_t W_t)$ et $\mathbb{E}(Y_{\delta t} W_t)$.

Remarquons que :

$$a_0 Y_{\delta t} = a_1 Y_{\gamma^{-1}t} + a_2 Y_{\gamma^{-2}t} + a_3 Y_t + W_{\delta t}$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} a_0 \mathbb{E}(Y_t W_t) &= a_3 \mathbb{E}(Y_{\delta t} W_t) + 1 \\ a_0 \mathbb{E}(Y_{\delta t} W_t) &= a_3 \mathbb{E}(Y_t W_t) + 1 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t W_t) &= \frac{a_0}{a_0^2 - a_3^2} \\ \mathbb{E}(Y_{\delta t} W_t) &= \frac{a_3}{a_0^2 - a_3^2} \end{aligned}$$

Multipliant (*) successivement par $Y_t, Y_{\gamma^{-1}t}, Y_{\gamma^{-2}t}$ et $Y_{\delta t}$, et utilisant la définition de la stationnarité et les covariances que l'on vient de calculer, on obtient le système :

$$\begin{cases} a_0 r_0 &= a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_2 + \frac{a_0}{a_0^2 - a_3^2} \\ a_0 r_1 &= a_1 r_0 + a_2 r_1 + a_3 r_1 \\ a_0 r_1 &= a_1 r_1 + a_2 r_0 + a_3 r_2 \\ a_0 r_2 &= a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_0 + \frac{a_3}{a_0^2 - a_3^2} \end{cases}$$

Ce système en r_0, r_1, r_2 n'a de solution que si le déterminant en est nul ; c'est-à-dire si les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 satisfont la relation :

$$\begin{vmatrix} -a_0 & a_1 & a_2 + a_3 & -a_0 \\ a_1 & a_2 + a_3 - a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_3 - a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & a_2 - a_0 & -a_3 \end{vmatrix} = 0$$

qui est un polynôme homogène de degré 4.

C Propriétés des covariances des innovations aller et retour

Nous montrons ici que les covariances de $F_{\cdot}(w)$ et $E_{\cdot}(w)$ ne dépendent pas du mot w considéré, et que les barycentres ont même variance. Ces propriétés sont utilisées en 3.3.

1. Montrons que, pour n pair,

$$G_{t,n}(w) \triangleq \mathbb{E}(F_{\gamma^{-1}t,n-1}(w) | E_{t,n-1})$$

où w est tel que $w \preceq 0$ et $|w| = n - 1$, ne dépend pas de w . Les autres cas se traitent de la même façon.

Par définition :

$$G_{t,n}(w) = \mathbb{E}([Y_{w\gamma^{-1}t} - \mathbb{E}(Y_{w\gamma^{-1}t} | \mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t,n-1})] | E_{t,n-1}) \in \mathcal{F}_{t,n}$$

(Sur la figure 5, on veut montrer que les projections des deux * sur l'ensemble des deux • sont égales).

Soit $\mathcal{T}_{t,n} = \{s = vt; |v| \leq n, v \preceq 0\}$.

Les mots w que l'on considère sont tels que $|w| = n - 1$ et $w \preceq 0$, donc de la forme :

$$w = \gamma^{1-n}$$

ou

$$w = m_{\alpha,\beta} \delta \gamma^{-p+1}$$

avec $|m_{\alpha,\beta}| + 2 + p = n$. Dans le premier cas, on veut pouvoir échanger $\delta \gamma^{-n+3}$ avec γ^{-n+1} . Dans le second cas, on veut échanger $m_{\alpha,\beta} \delta \gamma^{-p+1}$ avec $(\gamma^{-1} m_{\alpha,\beta}) \delta \gamma^{-p}$, où $(\gamma^{-1} m_{\alpha,\beta})$ est un mot à réduire avec les règles de simplification de \mathcal{L} . On définit donc une isométrie ϕ de $\mathcal{T}_{t,n}$ de la manière suivante. Dans le premier cas :

$$\begin{cases} \phi(\delta \gamma^{-n+2} t) & = \gamma^{-n} t \\ \phi(\gamma^{-n} t) & = \delta \gamma^{-n+2} t \\ \phi(s) & = s \text{ sinon} \end{cases}$$

ϕ est une isométrie de $\mathcal{T}_{t,n}$ dans lui-même qui laisse $\mathcal{T}_{t,n-1}$ invariant. On peut la prolonger - d'après le lemme de prolongement - en un automorphisme de \mathcal{T} .

Le couple $(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\delta\gamma^{-n+3}), E_{t, n-1})$ est égal point à point au couple $(F_{\gamma^{-1}\phi(t), n-1}(\gamma^{-n+1}), E_{\phi(t), n-1})$ puisque $\phi(t) = t$ sur $\mathcal{T}_{t, n-1}$.

ϕ étant un automorphisme, Y_t et $Y_{\phi(t)}$ ont même loi, et il résulte de l'égalité des couples précédents que l'opérateur de projection de

$F_{\gamma^{-1}\phi(t), n-1}(\gamma^{-n+1})$ sur $E_{\phi(t), n-1}$ est identique à l'opérateur de projection de $F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\gamma^{-n+1})$ sur $E_{t, n-1}$. Comme $E_{\phi(t), n-1} = E_{t, n-1}$, les projections sont identiques, et donc :

$$\mathbb{E} \left(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\delta\gamma^{-n+3}) | E_{t, n-1} \right) = \mathbb{E} \left(F_{\gamma^{-1}t, n-1}(\gamma^{-n+1}) | E_{t, n-1} \right)$$

Dans le deuxième cas, on effectue le même raisonnement avec l'isométrie ϕ de $\mathcal{T}_{t, n}$ qui laisse $\mathcal{T}_{t, n-1}$ invariant et qui échange

$m_{\alpha\beta}\delta\gamma^{-pt}$ avec $(\gamma^{-1}m_{\alpha, \beta})\delta\gamma^{-p-1}t$.

2. Montrons l'égalité des variances des barycentres e et f dans le cas n impair. Le cas n pair se traite de la même façon.

On a à montrer que :

$$\mathbb{E} \left(e_{t, n}^2 \right) = \mathbb{E} \left(e_{\delta(\frac{n+1}{2})t, n}^2 \right)$$

et

$$\mathbb{E} \left(e_{t, n}^2 \right) = \mathbb{E} \left(f_{\gamma^{-1}t, n}^2 \right)$$

L'ensemble d'indices à considérer est $\mathcal{T}_{t, n+1}$.

Pour la première égalité, on utilise le codage suivant :

$$\text{pour } s \in \mathcal{T}_{t, n+1} : s = \left(\delta^{(q_k)} \dots \delta^{(q_2)} \delta^{(q_1)} \right) \gamma^{-pt}$$

où le mot entre parenthèses est à réduire et est en fait de longueur $2q_1$, et où :

$$\begin{cases} q_1 > q_2 > \dots > q_k \\ 2q_1 + p \leq n + 1 \end{cases}$$

L'isométrie de $\mathcal{T}_{t, n+1}$ définie par :

$$\phi(s) = \delta^{(q_1)} s$$

échange les points "gauche" et "droit" de l'horocycle (voir figure 5) et laisse globalement invariant $\mathcal{Y}_{\gamma^{-1}t, n-1}$ (sur lequel on projette pour calculer les E et donc les e). On termine comme en 1) en utilisant le fait que e_t et $e_{\phi(t)}$ ont même loi.

Pour la deuxième égalité, on utilise le codage :

$$\text{pour } s \in \mathcal{T}_{t, n+1} : s = m_{\alpha, \beta} \gamma^{-\frac{n+1}{2} - p_t}$$

où :

$$\begin{cases} -\frac{n+1}{2} \leq p \leq \frac{n+1}{2} \\ |m_{\alpha, \beta}| + \frac{n+1}{2} + p \leq n + 1 \end{cases}$$

et l'isométrie ϕ de $\mathcal{T}_{t, n+1}$ telle que :

$$\phi(s) = m_{\alpha, \beta} \gamma^{-\frac{n+1}{2} + p_t}$$

et on termine par le même raisonnement.

D Calcul de $\Sigma_{E,n}^{-1/2}$

On montre ici que le calcul de $\Sigma_{E,n}^{-1/2}$ s'effectue par récurrence à partir d'un calcul scalaire.

On utilise pour cela la formule suivante. Pour S et T symétriques :

$$\begin{pmatrix} S & T \\ T & S \end{pmatrix}^{-1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X+Y & X-Y \\ X-Y & X+Y \end{pmatrix}$$

où

$$X = (S+T)^{-1/2} \text{ et } Y = (S-T)^{-1/2}.$$

D'autre part, $\Sigma_{E,n}$ est de la forme :

$$\Sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = \begin{pmatrix} \Sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) & \alpha_k \mathbb{U}_k \\ \alpha_k \mathbb{U}_k & \Sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \end{pmatrix}$$

où $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et $\mathbb{U} = \mathbb{1}\mathbb{1}^T$.

L'application de la formule précédente montre que l'on a besoin des

$$\Sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) + \alpha_k \mathbb{U}_k$$

et

$$\Sigma(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) - \alpha_k \mathbb{U}_k$$

dont on constate qu'elles sont encore de la même forme, puisqu'elles sont respectivement égales à :

$$\Sigma_+ = \Sigma(\alpha_0 + \alpha_k, \dots, \alpha_{k-1} + \alpha_k)$$

et

$$\Sigma_- = \Sigma(\alpha_0 - \alpha_k, \dots, \alpha_{k-1} - \alpha_k).$$

Notons alors :

$$\text{Bloc}(X, Y, k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X+Y & X-Y \\ X-Y & X+Y \end{pmatrix}$$

Le calcul de $\Sigma_E^{-1/2}$ se fait par la récurrence suivante :

$$\Sigma^{-1/2}(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = \begin{cases} \alpha_0^{-1/2} & \text{si } k = 0 \\ \text{Bloc}(\Sigma_+^{-1/2}, \Sigma_-^{-1/2}, k-1) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

LISTE DES FIGURES

1. arbre homogène d'ordre 2 - deux horocycles successifs.
2. arbre dyadique lorsqu'un bout est privilégié.
3. $n=1$ et $n=2$
4. $n=3$
5. $n=4$
6. $n=5$
7. cylindre de rayon 1, support de la convolution.
8. bloc-diagramme de 2 sections successives du filtre modélisateur
9. bloc-diagramme du filtre modélisateur.
10. exemple d'un signal AR(1) où $k_1 = 0.99$.

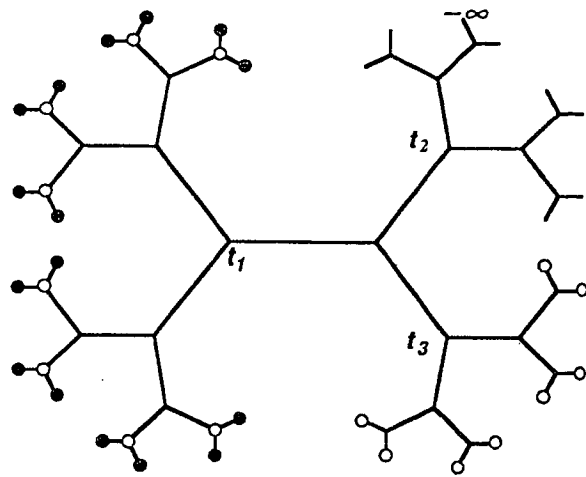


figure 1: deux horocycles successifs: \circ

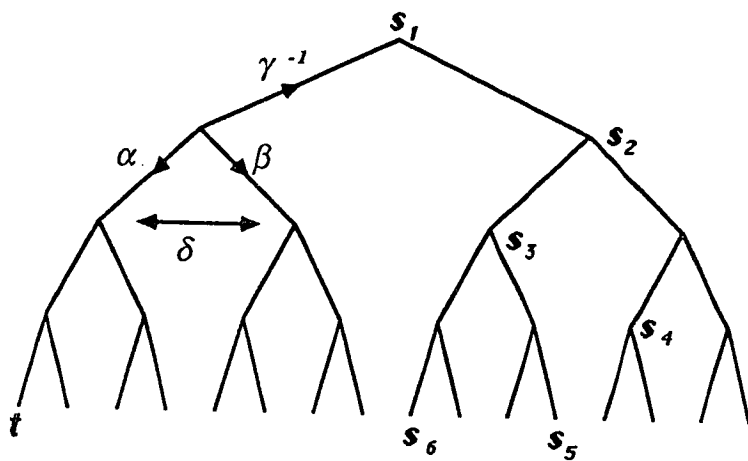


figure 2

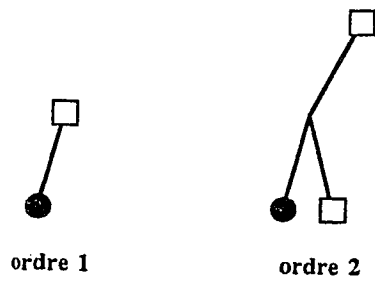


figure 3

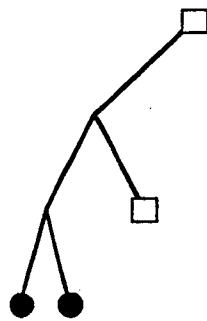


figure 4: ordre 3

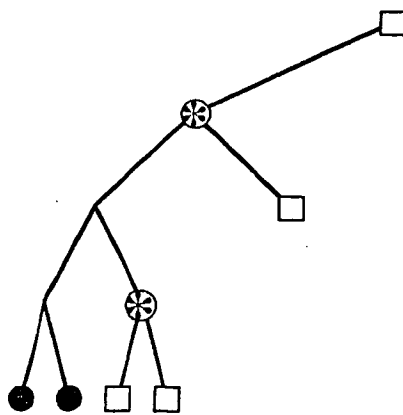


figure 5: ordre 4

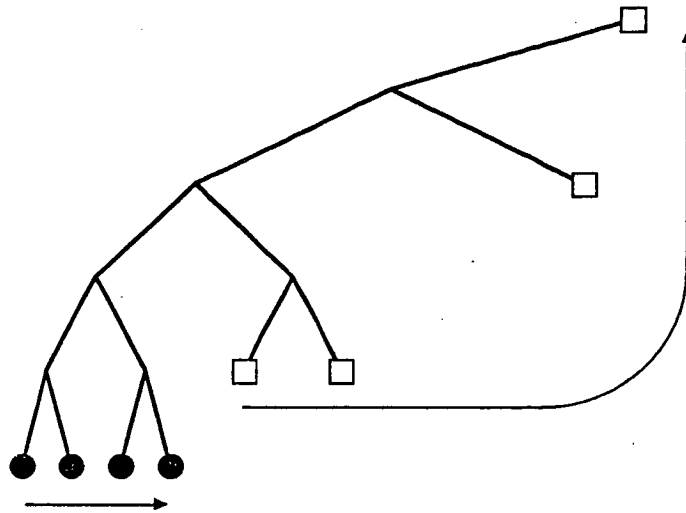


figure 6: ordre 5

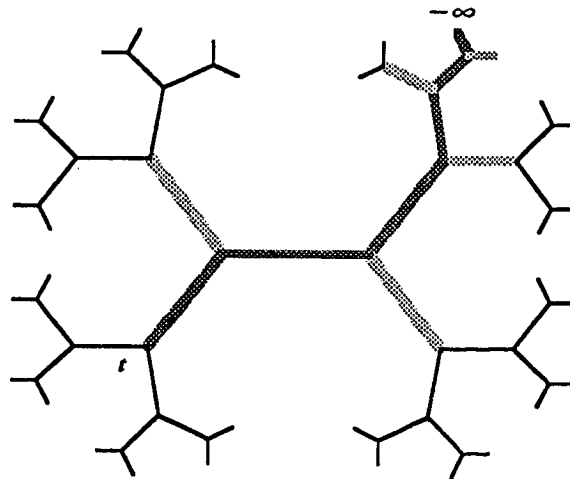


figure 7: cylindre de rayon 1,
support du filtre modélisateur

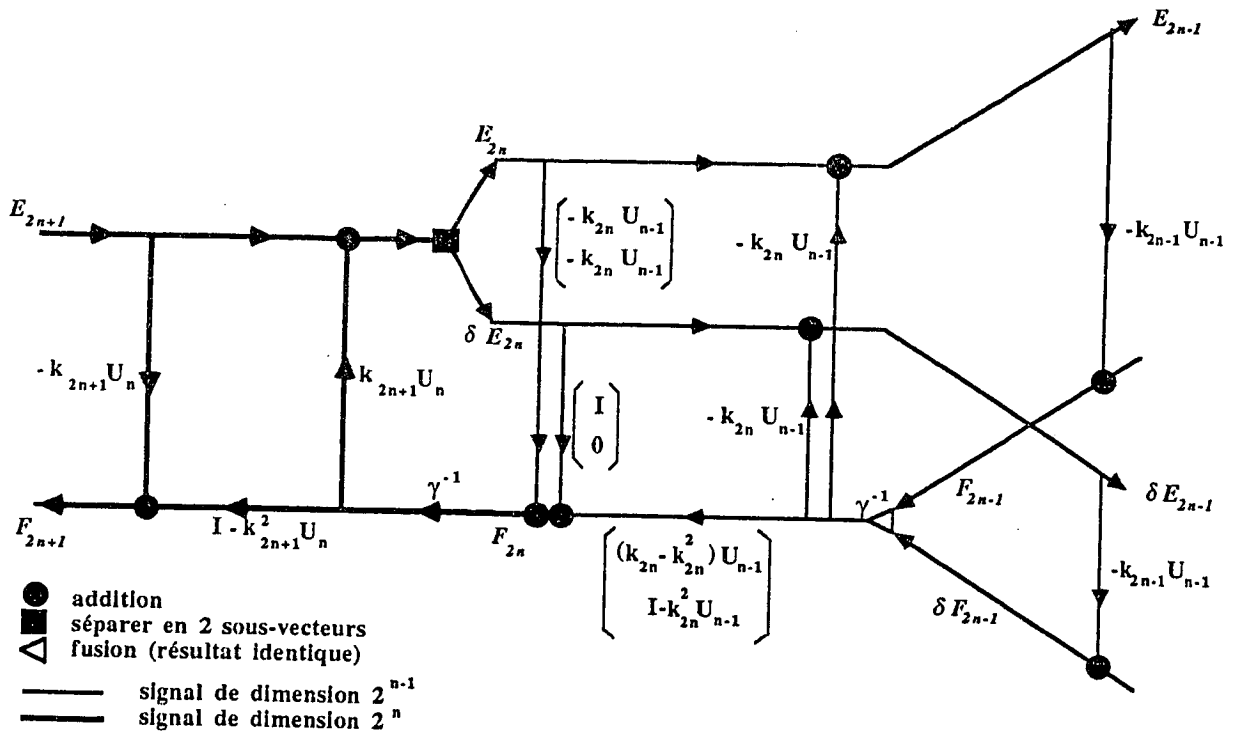


figure 8: deux sections successives du filtre modélisateur

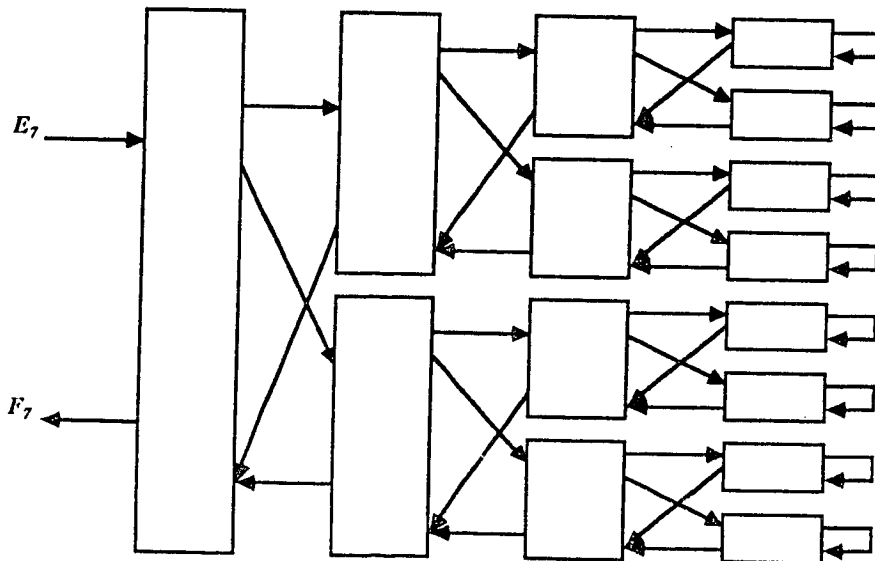
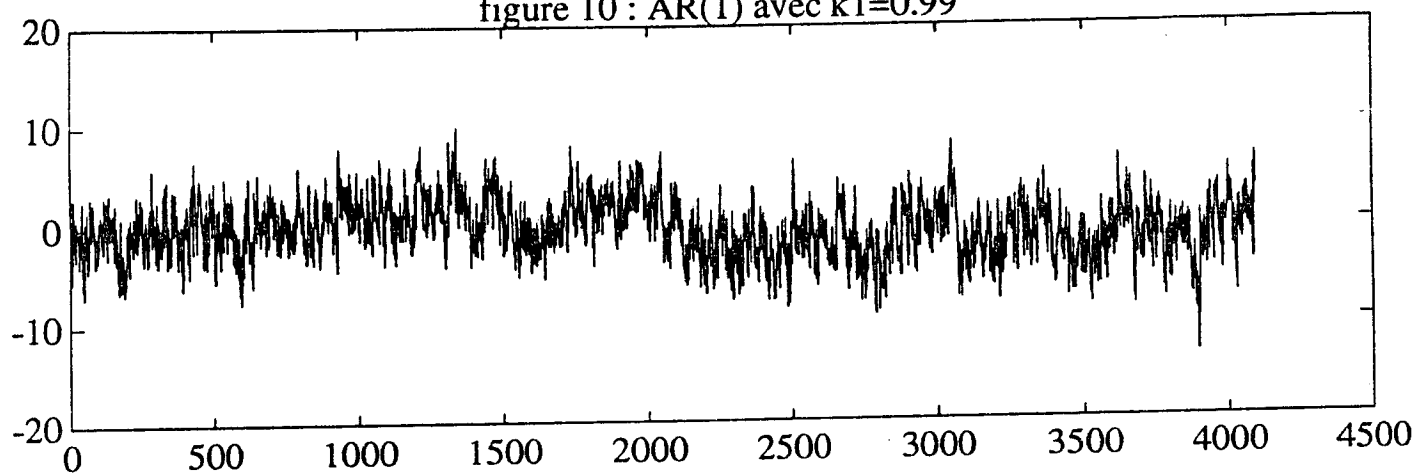


figure 9: schéma d'un filtre modélisateur d'ordre 7

figure 10 : AR(1) avec $k_1=0.99$



LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES

- PI 438 - **A PROPOS DE LA RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE DANS UN CORPS FINI : ALGORITHMES ET MACHINES PARALLELES**
Hervé LE VERGE, Patrice QUINTON, Yves ROBERT, Gilles VILLARD
22 Pages, Novembre 1988.
- PI 439 - **ALPHA DU CENTAUR : A PROTOTYPE ENVIRONMENT FOR THE DESIGN OF PARALLEL REGULAR ALGORITHMS**
Pierrick GACHET, Patrice QUINTON, Christophe MAURAS, Yannick SAOUTER
20 Pages, Novembre 1988.
- PI 440 - **CONSTRUCTION METHODIQUE D'UN ALGORITHME REPARTI DE DETECTION DE LA TERMINAISON**
Jean-Michel HELARY, Michel RAYNAL
18 Pages, Décembre 1988.
- PI 441 - **LES GRAPHS A MOTIF**
Didier CAUCAL
46 Pages, Décembre 1988.
- PI 442 - **CAUSAL TREES**
Philippe DARONDEAU, Pierpaolo DEGANO
44 Pages, Décembre 1988.
- PI 443 - **TROIS IMPLANTATIONS DU RECUPERATEUR DE MEMOIRE DE LA MACHINE MALI**
Michel LE HENAFF, Hervé SANSON
118 Pages, Décembre 1988.
- PI 444 - **ANALYSE FACTORIELLE LISSEE ET ANALYSE FACTORIELLE DES DIFFERENCES LOCALES**
Brigitte ESCOPIER, Habib BENALI
34 Pages, Décembre 1988.
- PI 445 - **MULTISCALE STATISTICAL SIGNAL PROCESSING**
Michèle BASSEVILLE, Albert BENVENISTE
16 Pages, Décembre 1988.
- PI 446 - **MODELES STATISTIQUES TEMPS-ECHELLE EN TRAITEMENT DU SIGNAL**
Michèle BASSEVILLE, Albert BENVENISTE
60 Pages, Décembre 1988.

