



**HAL**  
open science

# Approche par equations integrales d'un probleme d'ondes de surfaces elastiques

Patrick Joly, Jamel Tlili

► **To cite this version:**

Patrick Joly, Jamel Tlili. Approche par equations integrales d'un probleme d'ondes de surfaces elastiques. [Rapport de recherche] RR-1523, INRIA. 1991. inria-00075039

**HAL Id: inria-00075039**

**<https://inria.hal.science/inria-00075039>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.: (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 1523

*Programme 6*  
*Calcul Scientifique, Modélisation et*  
*Logiciels numériques*

### APPROCHE PAR EQUATIONS INTEGRALES D'UN PROBLEME D'ONDES DE SURFACE ELASTIQUES

Patrick JOLY  
Jamel TLILI

Septembre 1991



\* R R - 1 5 2 3 \*

APPROCHE PAR EQUATIONS INTEGRALES  
D'UN PROBLEME D'ONDES DE SURFACE  
ELASTIQUES

AN INTEGRAL EQUATION APPROACH FOR A  
SURFACE ELASTIC WAVES PROBLEM

Patrick JOLY et Jamel TLILI<sup>1</sup>

10 septembre 1991

<sup>1</sup>INRIA domaine de Voluceau, 78153 le Chesnay CEDEX

## Résumé

Dans ce rapport, nous proposons et analysons une nouvelle formulation pour l'étude d'ondes de surface élastiques guidées par l'extérieur d'un obstacle, ou d'une fissure, cylindrique infinie et de section transverse quelconque. Nous ramenons l'étude à l'analyse d'une équation intégrale posée sur une courbe  $\Gamma$  qui représente soit la section de la fissure soit le bord de la section  $\Omega$  de la cavité.

Cette formulation est avant tout destinée à une exploitation numérique pour le calcul des modes guidés par la méthode des éléments finis de surface. Ce travail a été réalisé dans [29]. Nous utilisons également cette nouvelle formulation pour l'obtention de résultats théoriques dans le cas particulier de la fissure plane, pour laquelle la section coïncide avec un segment. Nous établissons dans ce cas particulier des résultats très fins qui prolongent et complètent ceux précédemment obtenus par d'autres méthodes.

### Mots clés

Ondes de surface, Ondes guidées, Elasticité, Relation de dispersion, Equations intégrales, Théorie spectrale, Fissure, Cavité cylindrique.

## Abstract

In this report, we propose and analyse a new formulation for the study of surface waves guided by the exterior of a cylindrical cavity, or a cylindrical crack, with arbitrary cross section. We reduce the study to the analysis of an integral equation posed on a curve  $\Gamma$  which denotes either the cross section of the crack or the boundary of the cross section  $\Omega$  of the cavity.

This formulation is first of all very suitable to the numerical study of the guided modes using the boundary element method. This work has been achieved in [29]. We also use this new formulation for the obtention of theoretical results in the particular case of the plane

crack, for which  $\Gamma$  is a segment. We establish in this case sharp results which extend and complete those previously obtained by other methods.

**Key words**

Surface waves, Guided modes, Elasticity, Dispersion relation, Integral equations, Spectral theory, crack, Cylindrical cavity.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>POSITION DU PROBLEME ET RAPPELS</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>FORMULATION SUR LE BORD DU PROBLEME <math>P_0</math></b>	<b>15</b>
2.1	Une première formulation . . . . .	15
2.1.1	Quelques résultats préliminaires . . . . .	15
2.1.2	L'opérateur sur le bord $\tilde{T}(\omega, \beta)$ . . . . .	18
2.1.3	Equivalence entre le problème de valeurs propre initial et un problème relatif à l'opérateur $\tilde{T}(\omega, \beta)$ . . . . .	25
2.1.4	Un résultat de stricte monotonie sur les valeurs propres de l'opérateur $\tilde{T}(\omega, \beta)$ . . . . .	26
2.2	Une deuxième formulation . . . . .	36
2.2.1	Notations et résultats préliminaires . . . . .	36
2.2.2	L'opérateur sur le bord $T(\omega, \beta)$ . . . . .	40
2.2.3	Lien entre le problème de valeurs propres initial et un problème relatif à l'opérateur de bord . . . . .	45
<b>3</b>	<b>ETUDE DU PROBLEME DE LA FISSURE (<math>P_f</math>)</b>	<b>49</b>
3.1	Quelques notations et rappels . . . . .	50
3.2	L'opérateur de frontière $T(\omega, \beta)$ . . . . .	54
3.3	Une nouvelle formulation du problème de valeurs propres . . . . .	61
3.4	Résultat de monotonie . . . . .	61
<b>4</b>	<b>CAS DE LA FISSURE PLANE</b>	<b>62</b>
4.1	Une expression en Fourier et une décomposition de la forme bilinéaire $b(\omega, \beta, \phi, \psi)$	63

4.2	Etude de l'opérateur normal $T_N(\omega, \beta)$ . . . . .	72
4.3	Etude de l'opérateur tangentiel $T_T(\omega, \beta)$ . . . . .	103

# Chapitre 1

## POSITION DU PROBLEME ET RAPPELS

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu élastique occupant l'extérieur d'un cylindre infini de section bornée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 = \bar{O} \cup \bar{\Omega}, \quad O \cap \Omega = \emptyset \quad \Omega \text{ connexe} \\ \Omega \times \mathbb{R} \quad : \text{domaine de propagation} \\ O \times \mathbb{R} \quad : \text{trou cylindrique} \end{array} \right.$$

La figure 1.1 représente le domaine de propagation.

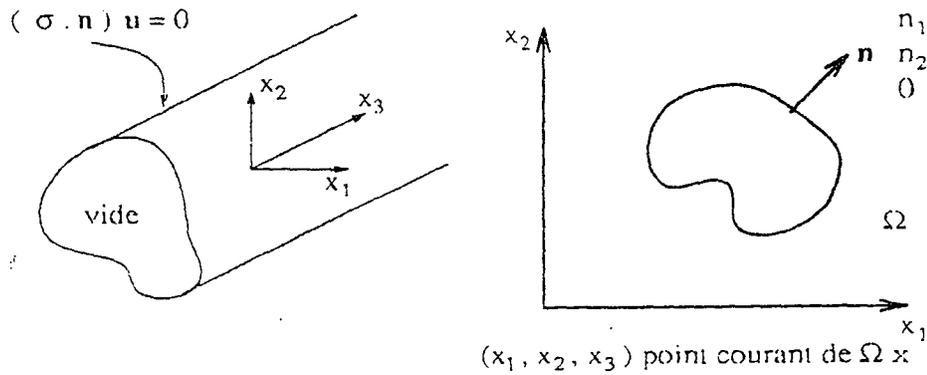


Figure 1.1 : domaine de propagation pour une cavité

On considère la condition de surface libre sur le bord du cylindre (contrainte normale nulle).

$$(1.1) \quad \sigma(u) \cdot n|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0$$

et on s'intéresse aux ondes de surfaces guidées par le bord libre du cylindre, c'est-à-dire aux champs de déplacement  $\tilde{u}(x, t) = (\tilde{u}_1(x, t), \tilde{u}_2(x, t), \tilde{u}_3(x, t))$  solutions des équations de l'élastodynamique (cf. [1], [3] et [13]) dans  $\Omega \times \mathbb{R}$  de la forme :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(x_1, x_2) \exp i(\omega t - \beta x_3) \\ \int_{\Omega} |\tilde{u}(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty \end{cases}$$

qui satisfait la condition (1.1).  $\omega$  et  $\beta$  sont des réels qui représentent la pulsation et le nombre d'onde respectivement.

Nous nous intéresserons également au cas limite du problème précédant correspondant à la dégénérescence de l'ouvert intérieur  $\mathcal{O}$  en une fissure infiniment plate. La figure 1.2 représente une illustration graphique dans le cas d'une fissure.

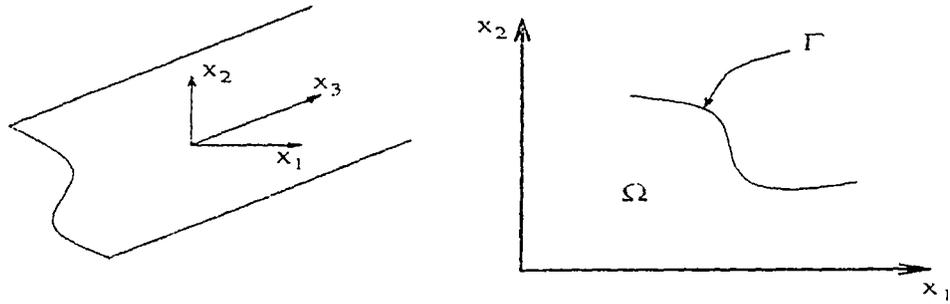


Figure 1.2 : domaine de propagation pour une fissure

Le domaine de propagation  $\Omega$  est alors l'extérieur d'un arc de courbe :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

On peut continuer à donner un sens précis à la condition de surface libre (1.1) (voir pour cela la section 3.1).

On peut montrer [6] que la recherche de solutions du type (1.2) est équivalente à un problème de valeurs propres pour un certain opérateur autoadjoint dans  $L^2(\Omega)^3$ . Plus précisément, nous désignons par  $a(\beta; u, v)$  la forme bilinéaire continue et symétrique sur  $H^1(\Omega)^3$  définie par :

$$(1.3) \quad a(\beta; u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\beta}(u) \varepsilon_{ij}^{\beta}(v) dx$$

où le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}^{\beta}(u)$  est défini par :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ij}^{\beta}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \varepsilon_{i3}^{\beta}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_i} - \beta u_i \right) \\ \varepsilon_{33}^{\beta}(u) = -\beta u_3 \end{cases}$$

et le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}^{\beta}(u)$  est donné par :

$$(1.5) \quad \sigma_{ij}^{\beta}(u) = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3 \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{\beta}(u)$$

On définit alors dans  $L^2(\Omega)^3$  un opérateur autoadjoint positif  $A(\beta)$  défini par :

$$(1.6) \quad \forall (u, v) \in D(A(\beta)) \times H^1(\Omega) \quad (A(\beta)u, v) = a(\beta; u, v)$$

(. , .) désigne le produit scalaire :

$$(1.7) \quad (u, v) = \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx$$

et le domaine de  $A(\beta)$  étant défini par :

$$D(A(\beta)) = \{u \in H^1(\Omega)^3 / A(\beta)u \in L^2(\Omega); \sigma^{\beta}(u) \cdot n|_{\Gamma} = 0\}$$

où l'opérateur différentiel  $\mathcal{A}(\beta)$  est défini par :

$$(1.8) \quad [\mathcal{A}(\beta)u]_i = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^{\beta}(u)) - \beta \sigma_{i3}^{\beta}(u) \right) & i = 1, 2 \\ -\frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{3j}^{\beta}(u)) - \beta \sigma_{33}^{\beta}(u) \right) \end{cases}$$

et , n désignant la normale unitaire à  $(\Gamma) = (\partial\Omega)$ , on a :

$$\sigma^\beta(u).n = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^\beta(u)n_1 + \sigma_{12}^\beta(u)n_2 \\ \sigma_{21}^\beta(u)n_1 + \sigma_{22}^\beta(u)n_2 \\ \sigma_{31}^\beta(u)n_1 + \sigma_{32}^\beta(u)n_2 \end{pmatrix}$$

(qui a un sens dans  $H^{-1/2}(\Gamma)^3$  dès que u est dans  $H^1(\Omega)^3$  et que  $\mathcal{A}(\beta)u$  est dans  $L^2(\Omega)^3$ ).

On peut montrer que la recherche de solutions du type (1.2) équivaut à :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \neq 0 \in D(A(\beta)) \text{ et } \omega^2 \in \mathbb{R}^2 \\ A(\beta)u = \omega^2 u \end{cases}$$

Le champ  $\tilde{u}$  intervenant dans la formule (1.2) étant alors relié à u par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_j = u_j & j = 1, 2 \\ \tilde{u}_3 = i u_3 \end{cases}$$

Ce changement de fonction inconnue permet de ne travailler qu'avec des champs de vecteurs à valeurs réelles. L'équivalence entre (1.9) et la recherche de solutions du type (1.2) s'obtient facilement en reportant(1.2) dans les équations de l'élastodynamique linéaire (voir [17] par exemple).

Le problème à résoudre est donc un problème de valeurs propres dans lequel  $\beta$  apparait comme paramètre,  $\omega^2$  joue le rôle de valeur propre et u celui de fonction propre associée.

Nous désignerons par  $\mathcal{P}_O$  le problème correspondant au trou cylindrique et par  $\mathcal{P}_\Gamma$  le problème correspondant à la fissure. L'analyse mathématique du problème  $\mathcal{P}_O$  a été menée par Bamberger-Joly-Kern [5] et [7]. Les résultats concernant le problème  $\mathcal{P}_\Gamma$  s'en déduisent aisément. Rappelons l'essentiel de ces résultats.

On montre que le spectre essentiel de l'opérateur  $A(\beta)$  est l'intervalle  $\left[ \frac{\mu}{\rho} \beta^2, +\infty \right[$  et que  $A(\beta)$  n'admet pas de valeurs propres dans cet intervalle (i.e il n'y a pas de valeur

propre plongée dans le spectre continu). Il reste alors à donner les résultats concernant le spectre discret de l'opérateur  $A(\beta)$ ,  $\sigma_d(A(\beta))$  :

**Théorème 1.1** ([6]) .

- $\sigma_d(A(\beta)) \subset \left[ \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho}, \beta^2 \frac{\mu}{\rho} \right] \quad 0 < \gamma_0(\beta) < \beta^2$
- $\forall \beta$ ,  $\sigma_d(A(\beta))$  est fini
- $\forall \beta \quad \text{card} \left\{ \sigma_d(A(\beta)) \right\} \geq 2$
- $\exists \beta_m > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\begin{cases} \beta_m < \beta < \beta_{m+1} & \implies \sigma_d(A(\beta)) = \{s_1(\beta), s_2(\beta), \dots, s_m(\beta)\} \\ \beta_m \nearrow +\infty & \end{cases}$$

Le nombre  $\beta_m$  est appelé  $m^{\text{eme}}$  seuil.

- $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $\beta_4 > 0$  dès que  $n$  prend 2 valeurs linéairement indépendantes.
- $\forall m \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \sup \frac{s_m(\beta)}{\beta^2} = c_R^2$   
( $c_R$  désignant la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh).

**Remarque 1.1** .

Dans le cas de la fissure plane (i.e  $\Gamma$  rectiligne) ce théorème n'est à priori plus entièrement vrai. On peut simplement affirmer que le premier seuil  $\beta_1$  est nul. Nous prouverons au chapitre 4 que seul ce premier seuil est nul.

On peut également ajouter à ces résultats un certain nombre de conjectures qui seront confirmées dans certains cas par les résultats numériques, et dont on peut trouver également des éléments de preuve dans la littérature ([18], [27], ...).

**Conjecture 1.1** .

- $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{s_m(\beta)}{\beta^2} = c_R^2$  si  $(\Gamma)$  est régulière.
- $\exists m \in \mathbb{N}^* / \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{s_m(\beta)}{\beta^2} < c_R^2$ , si  $(\Gamma)$  présente des angles rentrants.
- $\beta_3 > 0$  dans tous les cas.

La 1<sup>ère</sup> conjecture sera en fait démontrée au chapitre 4 dans le cas de la fissure plane. Le but de l'analyse numérique du problème est :

- la construction de courbes de dispersion  $\beta \longrightarrow s_m(\beta)^{1/2}$ ,
- l'obtention des champs de déplacement correspondants.

C'est dans ce but que nous allons rechercher une nouvelle formulation, sur le bord  $\Gamma$ , du problème de valeurs propres.

Nous traitons le cas du problème de l'obstacle  $(\mathcal{P}_O)$  au chapitre 2. La section 2.1 est consacrée à l'obtention d'un problème équivalent au problème  $(\mathcal{P}_O)$  dont l'inconnue est la trace  $\phi = u|_\Gamma$  du champ de déplacement. Cette section a pour principal intérêt de fixer le type de résultat atteint (théorème 2.2) mais ne sera pas utilisée telle quelle sur le plan numérique. En effet, pour des raisons d'approximation numérique, il est plus commode de donner une deuxième formulation équivalente au problème  $(\mathcal{P}_O)$ . Cette formulation fait appel à un problème intérieur (i.e. posé dans l'ouvert  $\mathcal{O}$ ) fictif qui amène à construire un champ de déplacement  $u$  défini sur  $\mathcal{O} \cup \Omega$ . La nouvelle inconnue du problème est alors le saut de déplacement à travers  $(\Gamma) : \phi = [u]$ . L'établissement de cette formulation ainsi que l'obtention des résultats correspondant font l'objet de la section 2.2. Nous traitons le cas de la fissure au chapitre 3. Dans ce cas, le choix comme nouvelle inconnue du saut de déplacement à travers  $\Gamma$ ,  $\phi = [u]$ , s'impose de façon naturelle. Les résultats des sections 2.1, 2.2 et 3 sont très semblables et leurs démonstrations sont voisines ce qui peut donner un côté répétitif à la rédaction. Nous avons choisis cependant d'énoncer dans chaque cas les résultats obtenus, ne donnant de nouvelles démonstrations que lorsque des difficultés techniques apparaissent. Cette option a été prise dans un souci de clarté et dans le but de mettre en lumière les nuances existant entre le problème du trou et le problème de la fissure. Dans le chapitre 4, nous traitons avec beaucoup plus de détails le cas de la

fissure plane en mettant à profit de façon essentielle l'utilisation de la transformation de Fourier partielle dans une direction d'espace (la direction parallèle à la fissure dans le plan  $(x_1, x_2)$ ). Nous montrons en particulier comment retrouver sur la seule formulation sur  $\Gamma$ , tous les résultats théoriques de [6], résultats que nous pouvons en outre affiner et compléter de façon substantielle.

Pour situer notre contribution par rapport à la littérature, signalons que les travaux qui traitent de la propagation d'ondes guidées par des cavités, concernent pour la plupart des cas que nous traitons ici à savoir une cavité cylindrique, ou une fissure, infinie dans une direction d'espace. Ce ne sont que les géométries considérées et les méthodes d'approche qui diffèrent d'une étude à une autre. Le seul cas où on obtient une solution quasi-analytique est celui de la cavité circulaire. Ce problème a été étudié successivement par Biot dans [8], Mindlin dans [22] et Böstrom-Burden dans [9]. Le cas particulier de la fissure plane a été étudié par plusieurs auteurs. Gautesen et Achenbach [15] ont étudié le problème d'existence d'ondes guidées pour les modes normaux que nous traiterons ici. Ils ont montré que de telles ondes ne peuvent se propager à des vitesses de phase inférieures à celle de l'onde de Rayleigh. Des résultats analogues ont été obtenus par les mêmes auteurs dans [2] dans le cas d'une fissure semi infinie ( $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ ). Ces travaux sont ceux dont nous sommes les plus proches et les résultats obtenus ici généralisent très largement ceux décrits dans ces articles.

Selon un point de vue moins mathématique, Freund [14] a donné une méthode d'approximation des ondes de surface à haute fréquence pour les modes normaux et tangentiels, tandis que Morrison et Wilson [30], [23] et [24] ont étudié le comportement des modes guidés le long d'un cylindre élastique, homogène et isotrope de section régulière, en s'inspirant des travaux de Keller et Rosenfeld [28].

Signalons enfin un certain nombre d'étude de nature numérique faites par Burden dans [10] et [11] et par Lagasse dans [19] et [20]. Enfin, les résultats développés dans les trois premiers chapitres de ce rapport ont été mis à profit pour la mise au point d'une méthode numérique pour l'étude du cas particulier de la fissure plane [17] d'une part et pour l'étude du cas plus général correspondant à la fissure de section de forme quelconque [29].

Avant d'entrer dans le vif du sujet précisons quelques notations que nous garderons, sauf mention explicite du contraire, dans le reste de l'exposé.

$\Omega$  désignant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Gamma$  sa frontière, courbe lipschitzienne nous désignerons par  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Gamma)$  les espaces de fonctions à valeurs réelles de carré intégrable respectivement dans  $\Omega$  et sur  $\Gamma$  (dans ce cas nous désignons par  $d\sigma$  la mesure superficielle sur  $\Gamma$ ). Pour les normes hilbertiennes associées à ces espaces nous poserons :

- $\forall u \in L^2(\Omega) \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} \rho |u|^2 dx.$
- $\forall \phi \in L^2(\Gamma) \quad |\phi|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} |\phi|^2 d\sigma \quad ^1.$

Nous désignerons par  $H^m(\Omega)$  et  $H^s(\Gamma)$  les espaces de Sobolev usuels définis sur  $\Omega$  et  $\Gamma$  (voir [26], [12]). La norme au sens habituel d'une fonction  $u$  dans  $H^m(\Omega)$  sera notée  $\|u\|_{m,\Omega}$  et la norme d'une fonction  $\phi$  dans  $H^s(\Gamma)$  sera notée  $|\phi|_{s,\Gamma}$ . Enfin le crochet de dualité entre les espaces  $H^{1/2}(\Gamma)^3$  et  $H^{-1/2}(\Gamma)^3$  sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ .

---

<sup>1</sup>Les produits scalaires naturellement associées à ces normes seront bien entendu notés  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  et  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ .

## Chapitre 2

### FORMULATION SUR LE BORD DU PROBLEME

$\mathcal{P}_0$

#### 2.1 Une première formulation

##### 2.1.1 Quelques résultats préliminaires

Nous commençons par rappeler les résultats de coercivité relatifs à la forme bilinéaire  $a(\beta, u, v)$  (voir [6] pour une démonstration), qui sont en fait des variantes de l'inégalité de Korn.

Lemme 2.1 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3 \quad a(\beta; v, v) \geq \frac{\mu}{\rho} \beta^2 \|v\|^2 + \frac{\mu}{\rho} \|\nabla v\|^2 \\ \text{(ii)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)^3 \quad a(\beta; v, v) \geq C_1 \|\nabla v\|^2 - C_2 \beta^2 \|v\|^2 \\ \text{(iii)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)^3 \quad a(\beta; v, v) \geq \frac{\mu}{\rho} \gamma_0(\beta) \|v\|^2 \quad 0 < \gamma_0(\beta) < \beta^2 \end{array} \right.$$

Les constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  ne dépendent que de  $\mu$  et  $\rho$  et la constante  $\gamma_0(\beta)$  vérifie :

$$\gamma_0(\beta) \geq (A\beta^2 - B)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives.

Considérons alors, pour  $\phi$  donné dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$  le problème de Dirichlet non homogène associé à l'opérateur  $A(\beta) - \omega^2$ .

$$(2.1) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u = 0 \\ u|_{\Gamma} = \phi \end{cases}$$

Grâce au lemme 2.1, nous avons le :

**Corollaire 2.1 .**

Pour  $\omega^2 < \beta^2 \frac{\mu}{\rho}$ , le problème (2.1) admet une solution unique dans  $H^1(\Omega)^3$  qui vérifie  $\mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\Omega)^3$ .

**Démonstration .**

Introduisons  $u_0$  dans  $H^1(\Omega)^3$  tel que  $u_0|_{\Gamma} = \phi$  et posons :

$$f = \mathcal{A}(\beta)u_0 - \omega^2 u_0 \in H^{-1}(\Omega)^3$$

En posant  $u = u_0 + v$ , le système (2.1) équivaut à :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v = f \\ v \in H_0^1(\Omega)^3 \end{cases}$$

problème dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{cases} a(\beta; v, w) - \omega^2(v, w) = \langle \rho f, w \rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)^3 \\ v \in H_0^1(\Omega)^3 \end{cases}$$

Le point (i) du lemme 2.1 fournit :

$$a(\beta; v, v) - \omega^2(v, v) \geq \left( \frac{\mu}{\rho} \beta^2 - \omega^2 \right) \|v\|^2 + \frac{\mu}{\rho} \|\nabla v\|^2$$

c'est-à-dire la coercivité de la forme  $a(\beta, \cdot, \cdot) - \omega^2$  lorsque  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho} \beta^2$ . La conclusion est alors immédiate. □

**Corollaire 2.2 .**

Pour  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ , le problème (2.1) définit un opérateur de relèvement  $\tilde{R}(\omega, \beta) : \phi \rightarrow u$  de  $H^{1/2}(\Gamma)^3$  dans  $H^1(\Omega)^3$  tel que :

$$\|\tilde{R}(\omega, \beta)\phi\| \leq \frac{C(1 + \omega^2 + \beta^2)}{\left(\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2\right)} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

$$\|\nabla \tilde{R}(\omega, \beta)\phi\| \leq \frac{C(1 + \omega^2 + \beta^2)}{\left(\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2\right)} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

$$\|A(\beta)\tilde{R}(\omega, \beta)\phi\| \leq \frac{C\omega^2(1 + \omega^2 + \beta^2)}{\left(\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2\right)} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

où  $C$  est une constante positive ne dépendant que de  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Démonstration .**

Dans la démonstration du corollaire 2.1 nous pouvons choisir  $u_0$  tel que :

$$\|u_0\|_{1, \Omega} \leq C_0 |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

Nous avons par ailleurs :

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2\right) \|v\|^2 + \frac{\mu}{\rho} \|\nabla v\|^2 \leq \langle \rho f, v \rangle$$

Mais par définition de  $f$  et par la formule de Green, nous avons, comme  $v \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\langle \rho f, v \rangle = a(\beta; u_0, v) - \omega^2(v_0, v)$$

d'où nous déduisons que :

$$|\langle \rho f, v \rangle| \leq C(1 + \omega^2 + \beta^2) \|u_0\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}$$

ce qui en reportant dans l'inégalité précédente donne :

$$\|v\|_{1, \Omega} \leq \frac{C(1 + \omega^2 + \beta^2)}{\min\left(\frac{\mu}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2\right)} \|u_0\|_{1, \Omega}$$

Il est alors facile de conclure en utilisant le fait que  $R(\omega, \beta)\phi = u_0 + v$

□

**Remarque 2.1 .**

- Bien sûr les estimations obtenues explosent lorsque  $\omega^2 \rightarrow \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ . C'est le comportement à l'infini des solutions, et non la régularité locale, qui explique ce phénomène.
- A la forme bilinéaire  $a(\beta; u, v)$  dans  $H_0^1(\Omega)^3$  correspond à un nouvel opérateur autoadjoint  $A_D(\beta)$ , formellement associé au même opérateur différentiel  $\mathcal{A}(\beta)$ , que  $A(\beta)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left(A_D(\beta)\right) = \{u \in H_0^1(\Omega)^3 / \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\Omega)^3\} \\ A_D(\beta)u = \mathcal{A}(\beta)u \quad \forall u \in D\left(A_D(\beta)\right) \\ \left(A_D(\beta)u, v\right) = a(\beta; u, v) \quad \forall (u, v) \in D\left(A_D(\beta)\right) \times H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

- L'inégalité de coercivité (i) du lemme 2.1 prouve que :

$$\sigma\left(A_D(\beta)\right) \subset \left[\frac{\mu}{\rho}\beta^2, +\infty\right[$$

On peut en fait établir facilement l'égalité :

$$\sigma\left(A_D(\beta)\right) = \left[\frac{\mu}{\rho}\beta^2, +\infty\right[$$

### 2.1.2 L'opérateur sur le bord $\widetilde{T}(\omega, \beta)$

Pour définir l'opérateur de bord  $\widetilde{T}(\omega, \beta)$  rappelons tout d'abord un théorème de traces classique :

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega)^3 \\ \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\Omega)^3 \end{array} \right\} \implies \sigma^\beta(u).n|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$$

Désignons par  $(\sigma^\beta.n)$  l'opérateur :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^\beta \cdot n : H^1(\mathcal{A}(\beta), \Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)^3 \\ u \longrightarrow \sigma^\beta(u) \cdot n|_\Gamma \end{array} \right.$$

avec

$$H^1(\mathcal{A}(\beta), \Omega) = \{u \in H^1(\Omega)^3 / A(\beta)u \in L^2(\Omega)^3\}.$$

Comme  $\tilde{R}(\omega, \beta) \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Omega)^3; H^1(\mathcal{A}(\beta), \Omega))$  (Corollaire 2.1) nous pouvons définir l'opérateur :

$$(2.3) \quad \tilde{T}(\omega, \beta) = (\sigma^\beta \cdot n) \circ \tilde{R}(\omega, \beta)$$

pour lequel on vérifie aisément que :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}(\omega, \beta) \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma)^3; H^{-1/2}(\Gamma)^3) \\ \|T(\omega, \beta)\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}, H^{-1/2})} \leq \frac{C(1 + \omega^2 + \beta^2)}{(\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2)} \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour  $\phi$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$ , nous pouvons définir  $\psi = T(\omega, \beta)\phi$  par :

$$(2.5) \quad \psi = \sigma^\beta(u) \cdot n|_\Gamma$$

où  $u$  est l'unique solution de :

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\beta)u - \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u|_\Gamma = \phi \end{array} \right.$$

Introduisons alors la forme bilinéaire sur  $H^{1/2}(\Gamma)^3$  définie par :

$$\tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \psi) = \langle \tilde{T}(\omega, \beta)\phi, \psi \rangle_\Gamma$$

grâce à la formule de Green il est facile de voir que :

$$(2.7) \quad \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \psi) = a\left(\beta; R(\omega, \beta)\phi, R(\omega, \beta)\psi\right) - \omega^2 \left(R(\omega, \beta)\phi, R(\omega, \beta)\psi\right)$$

et de pouver le :

**Lemme 2.2 .**

*La forme bilinéaire  $\tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \psi)$  est continue et symétrique dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$ .*

Bien sûr, nous pouvons à partir de  $\tilde{b}$ , définir un opérateur symétrique non borné dans  $L^2(\Gamma)$  qui ne sera rien d'autre que la restriction de  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  au domaine :

$$(2.8) \quad D\left(\tilde{T}(\omega, \beta)\right) = \{\phi \in H^{1/2}(\Gamma)^3 / \tilde{T}(\omega, \beta)\phi \in L^2(\Gamma)^3\}$$

et on aura bien sûr :

$$(2.9) \quad \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \psi) = \left(\tilde{T}(\omega, \beta)\phi, \psi\right)_\Gamma$$

Pour montrer que  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est autoadjoint, nous aurons besoin du résultat fondamental suivant, qui établit une inégalité de type Garding relative à la forme bilinéaire  $\tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \psi)$ .

**Lemme 2.3 .**

*Si  $\Omega$  est assez régulier et si  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ , on a les inégalités suivantes, pour tout  $\phi$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$  (les constantes qui intervirrnnent dans les estimations qui suivent sont positives):*

$$(2.10) \quad \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \tilde{C}|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 - \tilde{C}_1(\omega, \beta)|\phi|_\Gamma^2$$

$$(2.11) \quad \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \min\left(0, \gamma_0(\beta)\frac{\mu}{\rho} - \omega^2\right) \tilde{C}_0(\omega, \beta)|\phi|_\Gamma^2$$

avec

$$\lim_{\omega^2 \rightarrow \frac{\mu}{\rho}\beta^2} \tilde{C}_0(\omega, \beta) = +\infty$$

Démonstration .

Nous posons  $u = \tilde{R}(\omega, \beta)\phi$ , par définition même de  $\tilde{b}(\omega, \beta; ., .)$  nous savons que :

$$\tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \psi) = a(\beta; u, u) - \omega^2 \|u\|^2$$

Nous utilisons alors les deux inégalités de coercivité données aux points (ii) et (iii) du lemme 2.1 pour obtenir :

$$\begin{cases} \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq C_1 \|\nabla u\|^2 - C_2 \beta^2 \|u\|^2 - \omega^2 \|u\|^2 \\ \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \left( \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} - \omega^2 \right) \|u\|^2 \end{cases}$$

D'après le théorème de traces :

$$|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \leq C(\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2)$$

Par conséquent nous avons (en posant  $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{C}$ ) :

$$(2.12) \quad \begin{cases} \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \tilde{C}_1 |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 - (C_1 + C_2 + \omega^2) \|u\|^2 \\ \tilde{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \left( \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} - \omega^2 \right) |\phi|_{\Gamma}^2 \end{cases}$$

Pour conclure à partir de ces deux inégalités il s'agit maintenant d'obtenir une estimation de  $\|u\|^2$  en fonction de  $|\phi|_{\Gamma}^2$  (et non plus de  $|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$ ). Pour cela, il est nécessaire de procéder par dualité. Nous savons que, par la formule de Green :

$$\begin{cases} a(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = 0 \\ \forall v \in H_0^1(\Omega)^3 \end{cases}$$

Par une deuxième application de la formule de Green, il vient :

$$(2.13) \quad (u, A(\beta)v) - \omega^2(u, v) = \langle \sigma^\beta(v) \cdot n, \phi \rangle_{\Gamma}$$

Choisissons alors  $v$  solution de problème elliptique :

$$(2.14) \quad \begin{cases} A(\beta)v - \omega^2 v = u & (u \in L^2(\Omega)) \\ v \in H_0^1(\Omega)^3 \end{cases}$$

Si l'ouvert  $\Omega$  est assez régulier, nous savons, d'après les résultats de régularité classiques sur les problèmes elliptiques ([12] et [25]), que :

$$(2.15) \quad v \in H^2(\Omega)^3$$

et que :

$$(2.16) \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq K(\omega, \beta) \|u\|$$

(la constante  $K(\omega, \beta)$  explose lorsque  $\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2 \rightarrow 0$ ).

Par conséquent, par les théorèmes de traces :

$$\begin{cases} \sigma^\beta(u) \cdot n \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \|\sigma^\beta(u) \cdot n\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq K'(\omega, \beta) \|u\| \end{cases}$$

En particulier :

$$\begin{cases} \|\sigma^\beta(u) \cdot n\|_\Gamma \leq K'(\omega, \beta) \|u\| \\ K'(\omega, \beta) \rightarrow +\infty \text{ quand } \beta^2 \frac{\mu}{\rho} - \omega^2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

Finalement, compte tenu de (2.12) et (2.13), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u\|^2 = \langle \sigma^\beta(v) \cdot n, \phi \rangle_\Gamma \\ = (\sigma^\beta(v) \cdot n, \phi)_\Gamma \quad (\text{car } \sigma^\beta(v) \cdot n \in L^2(\Gamma)^2) \\ \leq K'(\omega, \beta) \|u\| \|\phi\|_\Gamma \end{array} \right.$$

D'où :

$$\|u\| \leq K'(\omega, \beta) \|\phi\|_{\Gamma}$$

Il est alors facile de conclure. □

### Remarque 2.2 .

*A priori, on ne peut conclure si l'on n'a pas le résultat de régularité (2.14). En fait on notera que l'on peut se contenter d'un peu moins et d'avoir la régularité :*

$$v \in H^{3/2}(\Omega)$$

*auquel cas, la fin de la démonstration reste valable.*

En utilisant les théorèmes classiques de caractérisation des opérateurs autoadjoints ainsi que la compacité de l'injection de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $L^2(\Gamma)$ , nous pouvons énoncer le :

### Théorème 2.1 .

*Supposons  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$  et  $\Omega$  assez régulier. L'opérateur  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est autoadjoint dans  $L^2(\Gamma)$ , à résolvante compacte. Par ailleurs,*

(i). *Si  $\omega^2 \leq \gamma_0(\beta)\frac{\mu}{\rho}$ ,  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est positif.*

(ii). *Si  $\gamma_0(\beta)\frac{\mu}{\rho} < \omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ ,  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est minoré par une constante négative :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}(\omega, \beta) \geq - \left[ \omega^2 - \gamma_0 \frac{\mu}{\rho} \beta^2 \right] \tilde{C}_0(\omega, \beta) \\ \lim_{\omega^2 \rightarrow \frac{\mu}{\rho} \beta^2} \tilde{C}_0(\omega, \beta) = +\infty \end{array} \right.$$

### Démonstration .

Le fait que  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est autoadjoint est une conséquence directe du lemme 2.3 ainsi que les résultats (i) et (ii) (voir [18], [27] pour une caractérisation des opérateurs autoadjoints).

Pour montrer que  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est à résolvante compacte, il suffit de remarquer que  $(\tilde{T}(\omega, \beta) + z)^{-1}$  est défini par :

$$\phi = (\tilde{T}(\omega, \beta) + z)^{-1} \psi, \quad \psi \in L^2(\Gamma)^3$$

$$\iff \psi = u|_{\Gamma}$$

où

$$\begin{cases} A(\beta)u - \omega^2 u + zu = 0 \\ \sigma^\beta(u) \cdot n|_{\Gamma} = \psi \end{cases}$$

Alors, on utilise le fait que :

$$|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \|u\|_{1, \Omega} \leq C(\omega, \beta) |\psi|_{\Gamma}$$

Donc, si  $\psi_n$  est bornée dans  $L^2(\Gamma)$ ,  $(\tilde{T}(\omega, \beta) + z)^{-1} \psi_n$  est borné dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  et par conséquent, il existe une suite  $\psi_{n_k}$  extraite de  $\psi_n$  telle que,  $(\tilde{T}(\omega, \beta) + z)^{-1} \psi_{n_k}$  converge dans  $L^2(\Gamma)$ .

□

### Corollaire 2.3 .

Le spectre de  $\tilde{T}(\omega, \beta)$  est purement ponctuel :

$$\begin{cases} \sigma(\tilde{T}(\omega, \beta)) = \{\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta), k \in \mathbb{N}\} \\ \tilde{\lambda}_1(\omega, \beta) \leq \tilde{\lambda}_2(\omega, \beta) \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) \leq \dots \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) = +\infty \end{cases}$$

Par ailleurs :

- si  $\omega^2 \leq \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} \beta^2$   $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) \geq 0$
- si  $\gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} < \omega^2 < \frac{\mu}{\rho} \beta^2$   $\tilde{\lambda}_1(\omega, \beta) \geq -\tilde{C}_0(\omega, \beta) \left[ \omega^2 - \frac{\mu}{\rho} \gamma_0(\beta) \right]$

### 2.1.3 Equivalence entre le problème de valeurs propre initial et un problème relatif à l'opérateur $\tilde{T}(\omega, \beta)$

Cette équivalence est résumée par le résultat suivant :

**Théorème 2.2 .**

Lorsque  $\gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} < \omega^2 < \frac{\mu}{\rho} \beta^2$  :

- S'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) = 0$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega^2 = s_m(\beta)$ .
- S'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega^2 = s_m(\beta)$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) = 0$ .

**Démonstration .**

$$(i). \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) = 0 \implies \exists \phi \in L^2(\Gamma), \phi \neq 0 / \tilde{T}(\omega, \beta)\phi = 0$$

Soit alors  $u = R(\omega, \beta)\phi$ , il est clair que :

$$\begin{cases} u \in D(A(\beta)), u \neq 0 \\ A(\beta)u = \omega^2 u \end{cases}$$

$$\implies \exists m / s_m(\beta) = \omega^2;$$

(ii). Réciproquement, si  $s_m(\beta) = \omega^2$ ,  $\exists u \in D(A(\beta))$  telle que  $A_N(\beta)u = \omega^2 u$ , alors soit  $\phi = u|_\Gamma$ , il est facile de voir que  $\phi \neq 0$  car  $\omega^2 \notin \sigma(A_D(\beta))$  et que

$$\phi \in \text{Ker}(\tilde{T}(\omega, \beta)) \implies \exists k / \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) = 0$$

□

Nous avons donc montré que,  $\beta$  étant fixé :

$$\left\{ \omega^2 / \text{Ker}(\tilde{T}(\omega, \beta)) \neq \{0\} \right\} = \left\{ s_1(\beta), s_2(\beta), \dots, s_m(\beta) \right\}.$$

## 2.1.4 Un résultat de stricte monotonie sur les valeurs propres de l'opérateur $\tilde{T}(\omega, \beta)$

Nous allons montrer dans ce paragraphe que, à  $\beta$  fixé, les fonctions :

$$\omega \longrightarrow \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) \quad \omega \in ]0, \beta V_S[ \quad k = 1, 2, \dots$$

sont strictement décroissantes. Un tel résultat est très intéressant, tant du point de théorie que numérique. Il permet en particulier d'affirmer que l'équation en  $\omega$ , à  $\beta$  fixé,  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) = 0$  admet au plus une solution. La monotonie peut être en outre mise à profit sur le plan numérique dans le choix d'un algorithme de résolution de l'équation. Enfin, ce résultat nous sera très utile pour l'étude mathématique du cas de la fissure plane (voir chapitre 4).

Nous introduisons pour établir ce résultat une nouvelle famille d'opérateur autoadjoints à deux paramètres réels  $(\beta, \lambda)$ . Plus précisément, nous posons :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} D(A(\beta, \lambda)) = \{u \in H^1(\Omega)^3 / \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\Omega)^3 \\ \sigma^\beta(u) \cdot n|_\Gamma = \lambda u|_\Gamma \text{ dans } H^{1/2}(\Gamma)^3\} \\ A(\beta, \lambda)u = \mathcal{A}(\beta)u \end{array} \right.$$

On notera que :

- $A(\beta, 0) = \mathcal{A}(\beta)$
- Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $A(\beta, \lambda)$  ne diffère de  $\mathcal{A}(\beta)$  que par son domaine, puisque tous deux sont associés au même opérateurs différentiel  $\mathcal{A}(\beta)$ . En particulier :

$$u \in \mathcal{D}(\Omega)^3 \implies \left\{ \begin{array}{l} u \in D(A(\beta)) \cap D(A(\beta, \lambda)) \\ A(\beta)u = A(\beta, \lambda)u = \mathcal{A}(\beta)u \end{array} \right.$$

La forme bilinéaire continue et symétrique sur  $H^1(\Omega)^3$  associée à l'opérateur  $A(\beta, \lambda)$  s'obtient très facilement par la formule de Green. Nous avons :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (u, v) \in D\left(A(\beta, \lambda)\right) \times H^1(\Omega)^3 \quad \left(A(\beta, \lambda)u, v\right) = a(\beta, \lambda; u, v) \\ a(\beta, \lambda; u, v) = a(\beta; u, v) - \lambda \int_{\Gamma} uv \, d\sigma \end{array} \right.$$

L'application bilinéaire  $(u, v) \longrightarrow \int_{\Gamma} uv \, d\sigma$  de  $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3$  dans  $\mathbb{R}$  est,  $\Gamma$  étant bornée, compacte. En d'autres termes, si  $(u_n, v_n)$  est bornée dans  $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3$ , il existe une suite extraite, toujours notée  $(u_n, v_n)$ , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ dans } H^1(\Omega)^3 \text{ faible} \\ \int_{\Gamma} u_n v_n \, d\sigma \longrightarrow \int_{\Gamma} uv \, d\sigma \end{array} \right.$$

De cette propriété on déduit que, pour tout  $\lambda \neq 0$ ,  $A(\beta, \lambda)$  est une perturbation compacte de  $A(\beta)$ . En particulier (voir [18], [27]), ces deux opérateurs ont le même spectre essentiel, d'où nous déduisons :

$$\sigma_{ess}\left(A(\beta, \lambda)\right) = [\beta^2 V_S^2, +\infty[$$

Par suite, si nous définissons les nombres :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_m(\beta, \lambda) = \max_{\{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}} \min_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}^\perp} \frac{a(\beta, \lambda; v, v)}{\|v\|^2} \\ = \min_{\{v_1, v_2, \dots, v_m\}} \max_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}^\perp} \frac{a(\beta, \lambda; v, v)}{\|v\|^2} \end{array} \right.$$

nous avons pour tout entier  $m \geq 1$ , l'alternative suivante (c'est le principe du min-max) :

- $s_m(\beta) = \beta^2 V_S^2$  : l'opérateur  $A(\beta, \lambda)$  a au plus  $(m-1)$  valeurs propres strictement inférieures à  $\beta^2 V_S^2$ .
- $s_m(\beta, \lambda) < \beta^2 V_S^2$  : l'opérateur  $A(\beta, \lambda)$  a au moins  $m$  valeurs propres strictement inférieures à  $\beta^2 V_S^2$  qui sont  $s_1(\beta, \lambda) \leq s_2(\beta, \lambda) \leq \dots \leq s_m(\beta, \lambda)$

Nous allons maintenant relier les fonctions  $s_m(\beta, \lambda)$  au fonctions  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$ .

**Lemme 2.4 .**

Pour tout  $\beta > 0$  et pour tout couple  $(\omega, \lambda)$  de réels avec  $0 < \omega < \beta V_S$ , les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \exists k \in \mathbb{N}^* / \quad \lambda = \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) \\ (ii) \quad \exists m \in \mathbb{N}^* / \quad \omega^2 = s_m(\beta, \lambda) \end{array} \right.$$

**Démonstration .**

Elle est très semblable à celle du théorème 2.2.

$(i) \implies (ii)$

En effet,  $\lambda = \tilde{\lambda}(\omega, \beta)$  entraîne l'existence d'une fonction  $\phi$  non nulle telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \in D(T(\beta)) \\ T(\omega, \beta)\phi = \lambda\phi \end{array} \right.$$

Nous posons alors :

$$u = \tilde{R}(\omega, \beta)\phi$$

$u \neq 0$  puisque  $u|_{\Gamma} = \phi \neq 0$  et satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta)u = \omega^2 u \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma(u) \cdot n|_{\Gamma} = \tilde{T}(\omega, \beta)\phi = \lambda u|_{\Gamma} \end{array} \right.$$

ce qui signifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in D(A(\beta, \lambda)) \\ A(\beta, \lambda)u = \omega^2 u \end{array} \right.$$

ce qui veut dire, comme  $u \neq 0$ , que  $\omega^2$  est valeur propre de  $A(\beta, \lambda)$  et qu'il existe donc un entier  $m$  tel que  $\omega^2 = s_m(\beta, \lambda)$ .

(ii)  $\implies$  (i)

Réciproquement, si  $\omega^2 = s_m(\beta, \lambda)$ , il existe  $u$  non nul dans  $D(A(\beta, \lambda))$  tel que :

$$A(\beta, \lambda)u = \omega^2 u$$

Soit  $\phi = u|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)^3$ ,  $\phi$  est nécessairement non nul car sinon on aurait  $\sigma^\beta(u).n|_{\Gamma} = \lambda u|_{\Gamma} = 0$  ce qui signifierait que  $u$  est un vecteur propre  $A(\beta)$ . Or nous savons (voir [18]) que les vecteurs propres de  $A(\beta)$  vérifient nécessairement  $u|_{\Gamma} \neq 0$ . Mais par définition de  $\tilde{T}(\omega, \beta)$ , nous avons :

$$\tilde{T}(\omega, \beta) = \sigma^\beta(u).n|_{\Gamma}$$

et par définition de  $D(A(\beta, \lambda))$  :

$$\sigma^\beta(u).n|_{\Gamma} = \lambda u|_{\Gamma} = \lambda \phi$$

ce qui entraîne que  $\tilde{T}(\omega, \beta) = \lambda \phi$  et par conséquent l'existence d'un entier  $k$  tel que  $\lambda = \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$ .

□

Nous énonçons maintenant un résultat de monotonie des fonctions  $\lambda \longrightarrow s_m(\beta, \lambda)$ .

**Lemme 2.5 .**

*Pour tout entier  $m$ , la fonction  $\lambda \longrightarrow s_m(\beta, \lambda)$  est décroissante et strictement décroissante dès que  $s_m(\beta, \lambda) < \beta^2 V_S^2$*

**Démonstration .**

Pour tout  $v$  fixé dans  $H^1(\Omega)^3$ , l'application :

$$\lambda \longrightarrow a(\beta, \lambda; v, v) = a(\beta; v, v) - \lambda \int_{\Gamma} |v|^2 d\sigma$$

est décroissante et par conséquent, en passant aux max-min, on en déduit la décroissance, au sens large, de la fonction  $\beta \longrightarrow s_m(\beta, \lambda)$ .

Supposons maintenant que  $s_m(\beta, \lambda)$  reste constante et égale à  $\omega^2 < \beta^2 V_S^2$  pour  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ . D'après le lemme 2.4 cela signifierait que  $\lambda$  appartient au spectre de  $T(\omega, \beta)$  ce qui est impossible puisque ce spectre est purement discret. Donc la fonction  $s_m(\beta, \lambda)$  est strictement décroissante dès que  $s_m(\beta, \lambda) < \beta^2 V_S^2$ .

□

Il apparait maintenant clairement pourquoi, au moins formellement, les fonctions  $\omega \longrightarrow \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  vont être décroissantes. En effet, elles apparaissent, par le lemme 2.4, comme les applications réciproques des applications  $\lambda \longrightarrow s_m(\beta, \lambda)^{1/2}$  qui sont, d'après le lemme 2.5 décroissantes. La démonstration complète est toutefois assez délicate. Énonçons tout d'abord le :

**Lemme 2.6 .**

*Soit  $k \geq 1$  donné, alors la fonction  $\omega \longrightarrow \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  est strictement décroissante au voisinage de tout point  $\omega$  de l'intervalle  $]0, \beta V_S[$  en lequel  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  est une valeur propre simple de  $\tilde{T}(\omega, \beta)$ .*

**Démonstration .**

Soit  $\omega \in ]0, \beta V_S[$  telle que la valeur propre  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  soit simple. Nous avons donc :

$$(2.20) \quad \tilde{\lambda}_{k-1}(\omega, \beta) < \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) < \tilde{\lambda}_{k+1}(\omega, \beta)$$

D'après le lemme 2.4, il existe  $m \geq 1$  tel que :

$$\lambda = \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) \implies \omega = s_m(\beta, \lambda)^{1/2}$$

Par continuité de la fonction  $\lambda \longrightarrow s_m(\beta, \lambda)^{1/2}$ , il existe  $\delta\lambda > 0$  tel que :

$$\forall l \in ]\lambda - \delta\lambda, \lambda + \delta\lambda[ \quad s_m(\beta, l) < \beta^2 V_S^2$$

ce qui, en vertu du lemme 2.5, prouve que l'application  $l \longrightarrow s_m(\beta, l)^{1/2}$  est continue et strictement décroissante de l'intervalle  $]\lambda - \delta\lambda, \lambda + \delta\lambda[$  dans un intervalle du type :

$$] \omega - \delta \omega_*, \omega + \delta \omega^* [ \subset ] 0, \beta V_S [.$$

Toujours par le lemme 2.4, nous pouvons construire une application :

$$\left\{ \begin{array}{l} k(\xi) : ] \omega - \delta \omega_*, \omega + \delta \omega^* [ \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ \xi \longrightarrow k(\xi) \end{array} \right.$$

telle que :

$$\xi = s_m(\beta, l)^{1/2} \implies l = \tilde{\lambda}_{k(\xi)}(\xi, \beta)$$

Si

$$\xi \longrightarrow r_m(\xi, l) : ] \omega - \delta \omega_*, \omega + \delta \omega^* [ \longrightarrow ] \lambda - \delta \lambda, \lambda + \delta \lambda [$$

désigne l'application réciproque de l'application :

$$s_m(\beta, l)^{1/2} : ] \lambda - \delta \lambda, \lambda + \delta \lambda [ \longrightarrow ] \omega - \delta \omega_*, \omega + \delta \omega^* [,$$

nous avons ainsi construit une fonction  $k(\xi)$  telle que :

$$(2.21) \quad \tilde{\lambda}_{k(\xi)}(\xi, \beta) = r_m(\xi, \beta) \quad \xi \in ] \omega - \delta \omega_*, \omega + \delta \omega^* [$$

Pour conclure la démonstration, il nous suffit de démontrer l'existence d'un réel  $\delta \omega > 0$  tel que :

$$|\xi - \omega| < \delta \omega \implies k(\xi) = k$$

Nous raisonnons par l'absurde. Si un tel  $\delta \omega$  n'existe pas, nous pouvons construire une suite  $\xi_n$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n \in ] \omega - \delta \omega_*, \omega + \delta \omega^* [ \\ \xi_n \longrightarrow \omega \quad (n \longrightarrow +\infty) \\ k(\xi_n) = k_n \neq k \quad \forall n \geq 1 \end{array} \right.$$

Comme l'un des deux ensembles  $\{n/k_n \geq k+1\}$  et  $\{n/k_n \leq k-1\}$  est infini, on peut toujours supposer, quitte à extraire une sous-suite, que, par exemple :

$$k_n = k(\xi_n) \geq k+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'après la croissance de la suite  $\lambda_k(\xi_n, \beta)$  (par rapport à  $k$ ), nous savons que :

$$(2.22) \quad \tilde{\lambda}_{k_n}(\xi_n, \beta) \geq \tilde{\lambda}_{k+1}(\xi_n, \beta)$$

Par ailleurs, comme  $k_n = k(\xi_n)$  nous avons :

$$\tilde{\lambda}_{k_n}(\xi_n, \beta) = r_m(\xi_n, \beta)$$

Comme  $\xi_n \rightarrow \omega$  et comme  $r_m(\xi, \beta)$  est continue par rapport à  $\xi$ , nous déduisons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_{k_n}(\xi_n, \beta) = r_m(\omega, \beta)$$

Mais, nous avons aussi :

$$\omega = s_m(\beta, \lambda)^{1/2} \implies \lambda = r_m(\omega, \beta)$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_{k_n}(\xi_n, \beta) = \lambda = \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$$

Par suite, en passant à la limite dans l'inégalité (2.22), nous déduisons, par continuité de  $\lambda_{k+1}(\xi, \beta)$  par rapport à  $\xi$ , que :

$$\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta) \geq \tilde{\lambda}_{k+1}(\omega, \beta)$$

ce qui est en contradiction avec (2.20).

□

Nous sommes maintenant en mesure de d'énoncer le :

### **Théorème 2.3 .**

*Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $\beta > 0$ , la fonction  $\omega \longrightarrow \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  est strictement croissante dans  $]0, \beta V_S[$ .*

### **Démonstration .**

Avant de détailler la démonstration, donnons le principe et les différentes étapes :

- Nous commençons par remarquer que, en adaptant très légèrement la démonstration précédente, que la conclusion du théorème reste valable au voisinage de tout point  $\omega$  dès qu'il existe un voisinage de ce point dans lequel la multiplicité de  $\tilde{\lambda}_k(\xi, \beta)$  reste constante (et non nécessairement égale à 1).
- Il est facile de prouver que la famille des opérateurs  $T(\omega, \beta)$  dépend analytiquement de  $\omega$ , au sens de Kato [18], dans l'ouvert  $]0, \beta V_S[$ . Par la théorie analytique des perturbations, nous montrons que les fonctions  $\omega \longrightarrow \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  sont analytiques par morceaux dans l'intervalle  $]0, \beta V_S[$ .
- Nous montrons que l'ensemble des points singuliers  $\omega$  n'ayant pas de voisinage dans lequel la multiplicité des valeurs propres reste constante, est un ensemble de points isolés dans  $]0, \beta V_S[$ . Par suite, la fonction  $\omega \longrightarrow \tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  est strictement croissante au voisinage de tout point sauf peut être pour un ensemble de points isolés dans  $]0, \beta V_S[$ . On conclut alors aisément.

Il s'agit maintenant de donner des arguments rigoureux pour les différentes étapes. De façon plus précise nous allons montrer que la fonction  $\tilde{\lambda}_k(\omega, \beta)$  est, en tant que fonction de  $\omega$ , une fonction strictement croissante sur tout intervalle du type  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$ , ce qui établira bien entendu le résultat final.

Dans ce qui suit nous omettrons volontairement de mentionner que les  $\tilde{\lambda}_k$  dépendent éventuellement de  $\beta$  qui n'a ici que le simple rôle de paramètre. Ceci nous permet d'alléger les notations. Par ailleurs, dans ce qui suit l'entier  $k$  est fixé.

Nous commençons par montrer que :

(i). la multiplicité de  $\tilde{\lambda}_k(\omega)$ , pour  $\omega$  variant dans  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$ , est bornée par un nombre  $N_k(\varepsilon)$ . En effet, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , nous désignons par  $\omega_p$  la valeur de  $\omega$  qui réalise le minimum de  $\tilde{\lambda}_p(\omega)$  dans l'intervalle  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$  :

$$\tilde{\lambda}_p(\omega_p) = \min_{[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]} \tilde{\lambda}_p(\omega)$$

Montrons que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_p(\omega_p) = +\infty$ . Si tel n'était pas le cas, par compacité on pourrait extraire une suite  $p_k \rightarrow +\infty$  telle que :

$$\begin{cases} \omega_{p_k} \rightarrow \omega & (k \rightarrow +\infty) \\ \tilde{\lambda}_{p_k}(\omega_{p_k}) \rightarrow \lambda^* & (k \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

Soit alors  $p$  un entier quelconque fixé, pour  $k$  assez grand  $p_k > p$ , nous avons, par croissance de la suite  $p \rightarrow \lambda_p(\omega_{p_k})$  :

$$\tilde{\lambda}_{p_k}(\omega_{p_k}) > \tilde{\lambda}_p(\omega_{p_k})$$

Passons à la limite lorsque  $(k \rightarrow +\infty)$ , la fonction  $\tilde{\lambda}_p$  étant continue, il vient :

$$\lambda^* > \tilde{\lambda}_p(\omega) \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

ce qui contredirait le fait que  $\tilde{\lambda}_p(\omega) \rightarrow +\infty$ , lorsque  $p \rightarrow +\infty$ . Nous avons donc montré que :

$$\tilde{\lambda}_p(\omega_p) \rightarrow +\infty$$

Soit alors  $A(\varepsilon) = \max_{[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]} \tilde{\lambda}_k(\omega)$ , il existe un entier  $N(\varepsilon)$  tel que :

$$p > N(\varepsilon) \implies \tilde{\lambda}_p(\omega_p) > A(\varepsilon) + 1$$

Par suite :

$$\tilde{\lambda}_p(\omega) > \tilde{\lambda}_k(\omega) \quad \forall \omega \in [\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon], \quad \forall p > N(\varepsilon)$$

ce qui montre que la multiplicité de  $\tilde{\lambda}_k(\omega)$  est au plus égale à  $N_k(\varepsilon)$ .

(ii). Analyticité des fonctions  $\tilde{\lambda}_p(\omega)$

L'opérateur  $T(\omega, \beta)$  est un opérateur à résolvante compacte qui est analytique par rapport à  $\omega$  dans un voisinage complexe du segment réel  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$  et autoadjoint sur l'axe réel. Il relève donc de l'application du théorème de Rellich (théorème XII.3 p. 4 dans [18]) grâce auquel nous pouvons écrire que, pour tout réel  $\omega$  dans l'intervalle  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$  il existe un intervalle  $]\omega - \delta, \omega + \delta[$  dans lequel les  $N(\varepsilon)$  fonctions  $\{\tilde{\lambda}_p(\omega), p \leq N(\varepsilon)\}$  sont analytiques. Par compacité de  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$ , nous pouvons trouver  $J$  réels  $(\omega_j, 1 \leq j \leq J)$  et  $J$  réels positifs  $\delta_j$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon] \subset \cup_{1 \leq j \leq J} [\omega_j - \delta_j, \omega_j + \delta_j] \\ \forall 1 \leq p \leq N(\varepsilon) \tilde{\lambda}_p(\omega) \text{ est analytique dans } [\omega_j - \delta_j, \omega_j + \delta_j] \end{array} \right.$$

(iii). Fin de la démonstration

Les fonctions  $\tilde{\lambda}_p(\omega) - \tilde{\lambda}_k(\omega)$ ,  $1 \leq p \leq N(\varepsilon)$ , sont analytiques dans chacun des intervalles  $[\omega_j - \delta_j, \omega_j + \delta_j]$ . De deux choses l'une, pour chaque  $j$  :

- $\tilde{\lambda}_p(\omega) - \tilde{\lambda}_k(\omega)$ , est identiquement nulle sur  $[\omega_j - \delta_j, \omega_j + \delta_j]$ .
- $\tilde{\lambda}_p(\omega) - \tilde{\lambda}_k(\omega)$ , n'a que des zéros isolés dans  $[\omega_j - \delta_j, \omega_j + \delta_j]$ .

Les points singuliers en lesquels la multiplicité de  $\tilde{\lambda}_k(\omega)$  peut changer sont ceux désignés par le deuxième cas. Comme ils sont isolés dans chaque intervalle compact  $[\omega_j - \delta_j, \omega_j + \delta_j]$ , ils sont en nombre fini dans chacun de ces intervalles. Ceux-ci étant également en nombre fini, l'ensemble des points singuliers de  $\tilde{\lambda}_k(\omega)$  dans l'intervalle  $[\varepsilon, \beta V_S - \varepsilon]$  est fini. Il est alors facile de conclure.

□

## 2.2 Une deuxième formulation

### 2.2.1 Notations et résultats préliminaires

Rappelons que nous avons :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 = \bar{\mathcal{O}} \cup \bar{\Omega}, & \mathcal{O} \cap \Omega = \emptyset \\ \bar{\mathcal{O}} \cap \bar{\Omega} = \Gamma \end{cases}$$

Pour tout champ de vecteur  $u$  défini sur  $\mathbb{R}^2$ , nous poserons :

$$(2.23) \quad \begin{cases} u^+ = u|_{\Omega} \\ u^- = u|_{\mathcal{O}} \end{cases}$$

Bien entendu on a l'équivalence :

$$u \in H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3 \iff (u^+ \in H^1(\Omega)^3, u^- \in H^1(\mathcal{O})^3)$$

( Ceci peut être considéré comme définition de  $H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3$ ). Il est clair que tout champ  $u$  de  $H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3$  admet deux traces sur  $(\Gamma)$  :

$$(2.24) \quad \begin{cases} \gamma^+ u = u^+|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\Gamma)^3 \\ \gamma^- u = u^-|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{1/2}(\Gamma)^3 \end{cases}$$

Et nous pouvons donc considérer le saut de  $u$  à travers  $(\Gamma)$  :

$$(2.25) \quad [u] = \gamma^+ u - \gamma^- u \in H^{1/2}(\Gamma)^3$$

L'application  $u \longrightarrow [u]$  étant linéaire et continue de  $H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$ .

On peut remarquer que le noyau de cet application  $u \longrightarrow [u]$  s'identifie de façon très claire avec l'espace  $H^1(\mathbb{R}^2)^3$ . Donc, moyennant un abus de notation que nous utiliserons dans toute la suite, nous pouvons écrire :

$$H^1(\mathbb{R}^2)^3 = \left\{ u \in H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3 / [u] = 0 \right\}$$

Introduisons également les espaces :

$$D(\mathcal{A}(\beta), \Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega)^3 / \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\Omega)^3 \right\}$$

$$D(\mathcal{A}(\beta), \mathcal{O}) = \left\{ u \in H^1(\mathcal{O})^3 / \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\mathcal{O})^3 \right\}$$

$$D(\mathcal{A}(\beta), \Omega \cup \mathcal{O}) = \left\{ u \in H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3 / (u^+, u^-) \in D(\mathcal{A}(\beta), \Omega) \times D(\mathcal{A}(\beta), \mathcal{O}) \right\}$$

A tout champ de  $D(\mathcal{A}(\beta), \Omega \cup \mathcal{O})$ , on peut associer bien entendu deux contraintes normales sur  $(\Gamma)$  :

$$\begin{cases} \sigma^\beta(u^+).n|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)^3 \\ \sigma^\beta(u^-).n|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)^3 \end{cases}$$

le vecteur  $n$  étant par convention orienté de  $\Omega$  vers  $\mathcal{O}$  (il est donc sortant par rapport à  $\Omega$ ). Nous pouvons définir par conséquent le saut de contrainte normale à travers  $\Gamma$  :

$$(2.26) \quad [\sigma^\beta(u).n] = \sigma^\beta(u^+).n|_\Gamma - \sigma^\beta(u^-).n|_\Gamma$$

Notons que si un champ de déplacements  $u$  présente un saut de contrainte normal nul sur  $\Gamma$  :

$$[\sigma^\beta(u).n] = 0$$

on peut définir cette fois sans ambiguïté la contrainte normale de  $u$  sur  $\Gamma$  :

$$\sigma^\beta(u).n|_\Gamma = \sigma^\beta(u^+).n|_\Gamma = \sigma^\beta(u^-).n|_\Gamma$$

Ces notations étant introduites nous considérons le problème suivant :



$$(u, v) \longrightarrow a(\beta; u, v)$$

est continue et coercive sur l'espace  $H^1(\mathbb{R}^2)^3$ .

Nous avons alors le :

**Lemme 2.7 .**

Pour  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ , le problème (2.26) admet une solution  $u$  et une seule dans l'espace  $H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3$ .

**Démonstration .**

Elle est très similaire à celle du lemme 2.1. Pour se ramener à l'application du théorème de Lax-Milgram, il s'agit de construire tout d'abord un bon relèvement de  $u$ . Pour cela on peut procéder comme suit. Nous posons :

$$u_0^+ = \tilde{R}(\omega, \beta)\phi$$

où  $\tilde{R}(\omega, \beta)\phi$  est l'opérateur défini par le lemme 2.1. Autrement dit :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u_0^+ - \omega^2 u_0^+ = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_0^+|_{\Gamma} = \phi & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Soit alors  $u_0$  la fonction de  $H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3$  définie par :

$$\begin{cases} u_0|_{\Omega} = u_0^+ \\ u_0|_{\mathcal{O}} = 0 \end{cases}$$

et soit :

$$\sigma_0 = \sigma^\beta(u_0^+).n|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$$

Il est clair que, par différence  $v = u - u_0$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ [v] = 0 \\ [\sigma^\beta(v).n] = \sigma_0 \end{array} \right.$$

La formulation variationnelle de ce problème étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\beta; v, w) - \omega^2(u, w) = \langle \sigma_0, w \rangle |_\Gamma \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}^2)^3 \\ v \in H^1(\mathbb{R}^2)^3 \end{array} \right.$$

Le résultat d'existence et d'unicité est une conséquence simple du théorème de Lax-Milgram.

□

Posons  $u = R(\omega, \beta)\phi$ , nous définissons ainsi un opérateur de relèvement :

$$R(\omega, \beta) \in \mathcal{L}\left(H^{1/2}(\Gamma)^3; D(\mathcal{A}(\beta); \Omega \cup \mathcal{O})\right)$$

pour lequel on peut d'ailleurs donner des estimations analogues à celles obtenues sur l'opérateur  $\tilde{R}(\omega, \beta)$  (cf. corollaire 2.1).

### 2.2.2 L'opérateur sur le bord $T(\omega, \beta)$

Comme le saut de contrainte normale de  $R(\omega, \beta)\phi$  à travers  $(\Gamma)$  est nul nous pouvons définir :

$$(2.29) \quad T(\omega, \beta)\phi = \sigma^\beta\left(R(\omega, \beta)\phi\right).n|_\Gamma$$

Grâce au théorème de traces, nous définissons ainsi un opérateur linéaire continu (pour  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ ) :

$$T(\omega, \beta) \in \mathcal{L}\left(H^{1/2}(\Gamma)^3, H^{-1/2}(\Gamma)^3\right)$$

Soit  $b(\omega, \beta; \cdot, \cdot)$  la forme bilinéaire associée à  $T(\omega, \beta)$  :

$$b(\omega, \beta; \phi, \psi) = \langle T(\omega, \beta)\phi, \psi \rangle_{\Gamma}$$

grâce à la formule de Green, il est facile d'établir que :

$$b(\omega, \beta; \phi, \psi) = a\left(\beta; R(\omega, \beta)\phi, R(\omega, \beta)\psi\right) - \omega^2(\phi, \psi)$$

(où  $a(\beta; \cdot, \cdot)$  a été définie en (2.22)) ce qui établit le :

**Lemme 2.8 .**

*La forme bilinéaire  $(\phi, \psi) \rightarrow b(\omega, \beta; \phi, \psi)$  est continue et symétrique sur l'espace  $H^{1/2}(\Gamma)^3$ .*

Il s'agit maintenant de montrer que l'opérateur  $T(\omega, \beta)$  est autoadjoint dans  $L^2(\Gamma)^3$ . Nous posons :

$$D\left(T(\omega, \beta)\right) = \left\{ \phi \in H^{1/2}(\Gamma)^3 / T(\omega, \beta)\phi \in L^2(\Gamma)^3 \right\}$$

Bien sûr pour  $(\phi, \psi)$  dans  $D\left(T(\omega, \beta)\right) \times H^{1/2}(\Gamma)$ , il vient :

$$b(\omega, \beta; \phi, \psi) = \left( T(\omega, \beta)\phi, \psi \right)_{\Gamma}$$

Pour établir le caractère autoadjoint de l'opérateur  $T(\omega, \beta)$ , nous utiliserons de façon essentielle le résultat suivant :

**Lemme 2.9 .**

*Lorsque  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ , on a, pour tout  $\phi$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)^3$  les inégalités :*

$$(i). \quad b(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq C_1 |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 - C_2(\omega, \beta) |\phi|_{\Gamma}^2$$

$$(ii). \quad b(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq C_0(\omega, \beta) \inf \left( \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} - \omega^2, 0 \right) |\phi|_{\Gamma}^2$$

où la constante  $C_0(\omega, \beta)$  vérifie :

$$C_0(\omega, \beta) = C(1 + \beta) \max \left( 1, \left( \frac{\mu}{\rho} \beta^2 - \omega^2 \right)^{-1} \right)$$

**Démonstration .**

Par l'utilisation du théorème de traces et du lemme 2.1, il est immédiat d'obtenir l'équivalent des inégalités (2.12) à savoir :

$$\begin{cases} \bar{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \bar{C}_1 |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 - (C_1 + C_2 + \omega^2) \|u\|^2 \\ \bar{b}(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \left( \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} - \omega^2 \right) \|u\|^2 \end{cases}$$

Il reste alors simplement à obtenir, par dualité une estimation de  $\|u\|$  en fonction de  $|\phi|_{\Gamma}$  ce qui cette fois peut se faire explicitement. En effet introduisons  $v$ , unique solution de :

$$(2.30) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v = u & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ v \in H^1(\mathbb{R}^2)^3 \end{cases}$$

Multiplions (2.30) par  $\rho u$  (scalairment) et intégrons sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} \mathcal{A}(\beta)v u dx + \int_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\beta)v u dx - \omega^2 \|v\|^2$$

Par la formule de Green, il vient comme  $[u] = \phi$  :

$$\|u\|^2 = a(\beta; u, v) - \omega^2 \|v\|^2 + \langle \sigma^{\beta}(v).n, \phi \rangle_{\Gamma}$$

Mais par ailleurs nous savons que :

$$\mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega \cup \mathcal{O}$$

Après multiplication par  $\rho u$  et intégration sur  $\Omega \cup \mathcal{O}$ , nous obtenons grâce à la formule de Green :

$$a(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = 0$$

(Nous avons utilisé le fait que  $[u] = 0$ ). Par conséquent :

$$(2.31) \quad \|u\|^2 = \langle \sigma^\beta(v).n, \phi \rangle_\Gamma \leq |\sigma^\beta(v.n)|_\Gamma |\phi|_\Gamma$$

Nous savons par le théorème de traces que :

$$(2.32) \quad |\sigma^\beta(v).n|_\Gamma \leq C(1 + \beta)\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}$$

Mais si nous résolvons (2.30) en utilisant la transformation de Fourier en espace, il vient ( $v(x) \longrightarrow \hat{v}(\xi)$ ) :

$$\hat{A}(\beta, \xi)\hat{v}(\xi) - \omega^2\hat{u}(\xi)$$

où  $\hat{A}(\beta, \xi)$  est une matrice hermitienne définie positive dont les valeurs propres sont :

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\mu}{\rho}(\beta^2 + |\xi|^2) & \text{valeur propre double} \\ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}(\beta^2 + |\xi|^2) & \text{valeur propre simple} \end{array} \right.$$

En écrivant  $\hat{v} = (\hat{A}(\beta, \xi) - \omega^2)^{-1}\hat{u}$ , nous obtenons facilement, uniformément en  $\xi$  :

$$|\hat{v}(\xi)| \leq \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}(\beta^2 + |\xi|^2) - \omega^2} |\hat{u}(\xi)|$$

Par conséquent :

$$(1 + |\xi|^2)|\hat{v}(\xi)| \leq \frac{1 + |\xi|^2}{\frac{\mu}{\rho}(\beta^2 + |\xi|^2) - \omega^2} |\hat{u}(\xi)|$$

Mais il est clair que :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \frac{1 + |\xi|^2}{\frac{\mu}{\rho}(\beta^2 + |\xi|^2) - \omega^2} = \sup \left( \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2}, 1 \right)$$

Donc :

$$(1 + |\xi|^2)|\hat{v}(\xi)| \leq \sup \left( \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2}, 1 \right) |\hat{u}(\xi)|$$

d'où nous tirons aisément :

$$(2.33) \quad \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sup \left( \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2}, 1 \right) \|u\|$$

Par conséquent en reportant (2.33) dans (2.32) puis dans (2.31), il vient :

$$\|u\| \leq C(1 + \beta) \sup \left( \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2}, 1 \right) |\phi|_{\Gamma}$$

La démonstration du lemme se conclut alors aisément. □

### Remarque 2.3 .

*Contrairement à ce qui se passe pour le lemme 2.3, nous n'avons pas besoin d'hypothèse de régularité sur  $\Gamma$  (autre que celle pour lesquelles le théorème de traces dans  $H^2(\mathbb{R}^2)$  est vrai) pour obtenir le résultat.*

A partir du lemme 2.9, nous déduisons, en procédant comme au paragraphe 2.1, les deux résultats suivants :

### Théorème 2.4 .

*L'opérateur  $T(\omega, \beta)$  est autoadjoint dans  $L^2(\Gamma)$  et à résolvante compacte. De plus :*

(i). *si  $\omega^2 \leq \gamma_0(\beta)\frac{\mu}{\rho}$ ,  $T(\omega, \beta)$  est positif.*

(ii). *si  $\gamma_0(\beta)\frac{\mu}{\rho} \leq \omega^2 < \beta^2\frac{\mu}{\rho}$ , alors  $T(\omega, \beta) \geq -\left(\omega^2 - \gamma_0(\beta)\frac{\mu}{\rho}\right)C_0(\omega, \beta)$ .*

**Corollaire 2.4 .**

*Le spectre de  $T(\omega, \beta)$  est purement ponctuel :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(T(\omega, \beta)) = \{\lambda_k(\omega, \beta), k \in \mathbb{N}^*\} \\ \lambda_1(\omega, \beta) \leq \lambda_2(\omega, \beta) \leq \dots \leq \lambda_k(\omega, \beta) \leq \dots < +\infty \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k(\omega, \beta) = +\infty \end{array} \right.$$

*Par ailleurs :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ si } \omega^2 \leq \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho}, \quad \lambda_1(\omega, \beta) \geq 0 \\ \cdot \text{ si } \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} < \omega^2 < \beta^2 \frac{\mu}{\rho}, \quad \lambda_1(\omega, \beta) \geq \left( \omega^2 - \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} \right) C_0(\omega, \beta) \end{array} \right.$$

**2.2.3 Lien entre le problème de valeurs propres initial et un problème relatif à l'opérateur de bord**

Comme nous allons le voir, l'introduction d'un problème intérieur fictif engendre quelques difficultés. En effet, introduisons les valeurs propres du problème intérieur (i.e. dans  $\mathcal{O}$ ) associé à l'opérateur  $\mathcal{A}(\beta)$  et à la condition de surface libre  $\sigma(\beta) \cdot n|_{\Gamma} = 0$ . Cet opérateur est autoadjoint dans  $L^2(\mathcal{O})^3$  à résolvante compacte. Son spectre est donc purement ponctuel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_1(\beta) \leq \nu_2(\beta) \leq \dots \leq \nu_j(\beta) \leq \dots < +\infty \\ \lim_{j \rightarrow +\infty} \nu_j(\beta) = +\infty \end{array} \right.$$

A  $\nu_j(\beta)$ , est associée  $w_j(\beta) \in H^1(\mathcal{O})^3$  satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(\beta)w_j(\beta) = \nu_j(\beta)w_j(\beta) \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ \sigma^\beta(w_j(\beta)) \cdot n|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

Comme la suite  $\nu_j(\beta)$  tend vers  $+\infty$ , l'intersection de  $\{\nu_j(\beta), j \in \mathbb{N}^*\}$  avec l'intervalle  $\left]0, \frac{\mu}{\rho}\beta^2\right[$  est un ensemble fini que nous noterons :

$$\{\nu_j(\beta), 1 \leq j \leq N_i(\beta)\}$$

Rappelons que l'ensemble des valeurs propres du problème extérieur est :

$$\{s_m(\beta), 1 \leq m \leq N(\beta)\} \subset \left]0, \frac{\mu}{\rho}\beta^2\right[$$

Nous sommes en mesure d'énoncer le :

**Théorème 2.5 .**

On a pour  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ , l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

$$(i). \exists k \in \mathbb{N}^* / \lambda_k(\omega, \beta) = 0$$

$$(ii). \begin{cases} \exists m \in \{1, 2, \dots, N(\beta)\} / \omega^2 = s_m(\beta) \\ \text{ou} \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, N_j(\beta)\} / \omega^2 = \nu_j(\beta) \end{cases}$$

**Démonstration .**

$$(i) \implies (ii)$$

Si  $\lambda_k(\omega, \beta) = 0$ , il existe  $\phi$  non nul tel que  $T(\omega, \beta)\phi = 0$ . Posons alors  $u = R(\omega, \beta)\phi$ . Il est clair que  $u \neq 0$ . D'autre part les fonctions  $u^+ = u|_{\Omega}$  et  $u^- = u|_{\mathcal{O}}$  satisfont :

$$(2.34) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u^+ = \omega^2 u^+ \\ \sigma^\beta(u^+) \cdot n = 0 \end{cases}$$

$$(2.35) \quad \begin{cases} A(\beta)u^- = \omega^2 u^- \\ \sigma^\beta(u^-) \cdot n = 0 \end{cases}$$

Si  $\omega^2$  n'est pas valeur propre du problème intérieur nous déduisons de (2.34) que  $u^- = 0$ . Dans ce cas  $u^+|_\Gamma = [u] = \phi$ . Comme  $\phi \neq 0$ ,  $u^+$  est non nul et (2.23) prouve que  $\omega^2$  est valeur propre du problème extérieur.

$$(ii) \implies (i)$$

Si  $\omega^2 = \nu_j(\beta)$ , considérons la fonction  $u$  de  $H^1(\Omega \cup \mathcal{O})^3$  définie par :

$$\begin{cases} u|_{\mathcal{O}} = w_j(\beta) \\ u|_{\Omega} = 0 \end{cases}$$

Il est facile de voir que si  $\phi = w_j(\beta)|_\Gamma$  :

$$\begin{cases} A(\beta)u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \cup \mathcal{O} \\ [u] = \phi \\ [\sigma^\beta(u) \cdot n] = 0 \end{cases} ;$$

ce qui montre que  $u = R(\omega, \beta)\phi$  et comme par ailleurs  $\sigma^\beta(u) \cdot n = 0$ , nous en déduisons :

$$T(\omega, \beta)\phi = 0$$

d'où le résultat car nécessairement  $\phi \neq 0$  (on ne peut être à la fois valeur propre du problème intérieur avec condition de Neumann  $\sigma^\beta(u) \cdot n = 0$  et condition de Dirichlet  $u|_\Gamma = 0$ ).

Si  $\omega^2 = s_m(\beta)$ , on peut recommencer le même raisonnement en considérant  $u$  définie par :

$$\begin{cases} u|_{\mathcal{D}} & = & 0 \\ u|_{\Omega} & = & u_m(\beta) \end{cases}$$

où  $u_m(\beta)$  est une fonction propre du problème extérieur associé à  $s_m(\beta)$ .

Nous avons donc montré que l'ensemble des  $\omega^2$  dans l'intervalle  $]0, \frac{\mu}{\rho}\beta^2[$  qui annulent les valeurs propres de  $T(\omega, \beta)$  coïncident avec la réunion des valeurs propres du problème extérieur et des valeurs du problème intérieur situées dans ce même intervalle. □

Pour terminer nous énonçons sans démonstration (le lecteur se reportera simplement aux lemmes 2.5 et 2.6 ainsi qu'au théorème 2.3), le résultat de monotonie relatif aux fonctions  $\lambda_k(\omega, \beta)$ .

### **Théorème 2.6 .**

*Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $\beta > 0$ , la fonction  $\omega \longrightarrow \lambda_k(\omega, \beta)$  est strictement décroissante dans l'intervalle  $]0, \beta V_S[$ .*

## Chapitre 3

### ETUDE DU PROBLEME DE LA FISSURE ( $\mathcal{P}_\Gamma$ )

Comme on va le voir, l'étude du problème ( $\mathcal{P}_\Gamma$ ) est très similaire à celle du problème ( $\mathcal{P}_\mathcal{O}$ ) lorsque l'on introduit un problème intérieur fictif. Il y a toutefois quelques différences essentielles qu'il est bon de souligner dès maintenant :

- le choix du saut de déplacement  $\phi = [u]$  à travers la fissure  $\Gamma$  comme nouvelle inconnue est cette fois naturel.
- contrairement au cas traité dans la section 2.2, on aboutit à un problème au bord rigoureusement équivalent au problème initial.
- le fait de traiter le cas d'une fissure amène à travailler dans un cadre légèrement différent. Ainsi l'espace fonctionnel  $H^{1/2}(\Gamma)$  est remplacé par l'espace  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  dont la définition et les principales propriétés peuvent être trouvées dans [21]. Nous nous contenterons de préciser que :
  - une fonction de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  est une fonction de  $H^{1/2}(\Gamma)$  qui doit satisfaire un certain comportement aux pointes de la fissure. "Moralement", cette condition exprime que cette fonction s'annule aux pointes de la fissure. Les fonctions de  $H^{1/2}(\Gamma)$  n'étant pas continues, cette condition ne peut s'exprimer que sous forme intégrale [21].
  - si  $(\Gamma)$  apparaît comme une partie compacte d'une courbe  $(\tilde{\Gamma})$  sans extrémités, l'application "prolongement par 0" applique continuellement l'espace  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\tilde{\Gamma})$ .

### 3.1 Quelques notations et rappels

Soit  $\Gamma$  un arc de courbe lipchitzien et borné de  $\mathbb{R}^2$ . Au besoin, nous utiliserons une représentation paramétrique de  $\Gamma$  au moyen d'une abscisse curviligne  $s$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \{ x_1 = f(s), x_2 = g(s) \mid (f, g) \in W^{1,\infty}(0, L) \\ f'(s)^2 + g'(s)^2 = 1, \quad \forall s \in [0, L] \} \end{array} \right.$$

$L$  désignant alors la longueur de l'arc  $\Gamma$ . Nous désignons par  $x(s)$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse curviligne  $s$  et par  $n(s)$  le vecteur normal à  $\Gamma$  défini, pour presque tout  $s$ , par :

$$n(s) = (-g'(s), f'(s))$$

Nous poserons :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

A toute fonction  $u$  de  $C^0(\bar{\Omega})$ , nous associerons les traces  $u^+$  et  $u^-$  sur  $\Gamma$  définies presque partout par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x(s) + \varepsilon n(s)) \\ u^-(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x(s) - \varepsilon n(s)) \end{array} \right.$$

et le saut de  $u$  à travers ( $\Gamma$ )

$$\phi(s) = u^+(s) - u^-(s)$$

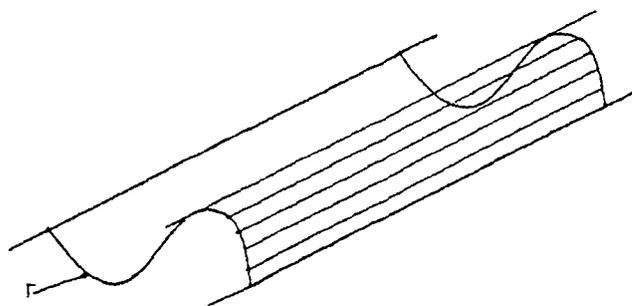


Figure 3.1 : forme de la fissure

Notons que comme  $u \in C^0(\bar{\Omega})$

$$\begin{cases} u^+(0) = u^-(0) \implies \phi(0) = 0 \\ u^+(L) = u^-(L) \implies \phi(L) = 0 \end{cases}$$

Rappelons alors que les applications :

$$\gamma^+ : u \in C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow \gamma^+ u = u^+ \in L^2(\Gamma)$$

$$\gamma^- : u \in C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow \gamma^- u = u^- \in L^2(\Gamma)$$

$$S : u \in C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow Su = [u] = \phi \in L^2(\Gamma)$$

se prolongent de manière unique en des applications linéaires continues :

$$\begin{cases} \gamma^+ \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^{1/2}(\Gamma)) \\ \gamma^- \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H^{1/2}(\Gamma)) \\ S \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); H_{00}^{1/2}(\Gamma)) \end{cases}$$

ces applications étant surjectives. D'autres part, moyennant un abus de notation, nous avons :

$$\begin{cases} \text{Ker } \gamma^+ \cap \text{Ker } \gamma^- = H_0^1(\Omega) \\ \text{Ker } S = H^1(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Pour tout couple  $(u, v)$  dans  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  nous définissons :

$$(3.1) \quad a(\beta; u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^{\beta}(u) \sigma_{ij}^{\beta}(v) dx$$

De même  $\mathcal{A}(\beta)$  représentant toujours l'opérateur différentiel défini par (1.8), nous disons qu'une fonction  $u$  de l'espace

$$D(\mathcal{A}(\beta)) = \{u \in H^1(\Omega) / \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(\Omega)\}$$

vérifie, au sens généralisé, la condition de Neumann.

$$(3.2) \quad \sigma^\beta(u) \cdot n|_\Gamma = 0$$

si et seulement si

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega \mathcal{A}(\beta)u \cdot v \, dx = a(\beta; u, v)$$

En effet, on peut donner un sens rigoureux à  $\sigma^\beta(u) \cdot n|_\Gamma$  en posant, pour tout champ de vecteur  $u$  de classe  $C^1$  dans  $\bar{\Omega}$

$$\left| \begin{array}{l} \{\sigma^\beta(u^+) \cdot n\}(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^\beta(u(x(s) + \varepsilon n(s))) \cdot n(s) \\ \{\sigma^\beta(u^-) \cdot n\}(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^\beta(u(x(s) - \varepsilon n(s))) \cdot n(s) \\ [\sigma^\beta(u) \cdot n](s) = \{\sigma^\beta(u^+) \cdot n\}(s) - \{\sigma^\beta(u^-) \cdot n\}(s) \end{array} \right.$$

On a alors la formulation de Green, valable pour  $(u, v) \in C^2(\bar{\Omega})^3 \times C^1(\bar{\Omega})^3$ :

$$\left| \begin{array}{l} \int_\Omega \mathcal{A}(\beta)u \cdot v \, dx = a(\beta; u, v) + \int_0^L (\sigma^\beta(u^+) \cdot n) v^+ \, ds \\ \qquad \qquad \qquad - \int_0^L (\sigma^\beta(u^-) \cdot n) v^- \, ds \end{array} \right. ;$$

A l'aide de cette formule de Green, il est alors facile de montrer que les applications

$$\left| \begin{array}{l} u \longrightarrow \sigma^\beta(u^+) \cdot n \\ u \longrightarrow \sigma^\beta(u^-) \cdot n \\ u \longrightarrow [\sigma^\beta(u) \cdot n] \end{array} \right.$$

définies dans  $C^2(\bar{\Omega})^3$  se prolongent de manière unique en des applications linéaires continues :



- Si  $[\sigma^\beta(u) \cdot n] = 0$

$$(3.4) \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}(\beta)u v \, dx = a(\beta; u, v) + \langle \sigma^\beta(u) \cdot n, [v] \rangle_{\Gamma}$$

- Si  $[v] = 0$  ( $u|_{\Gamma} = u^+|_{\Gamma} = u^-|_{\Gamma}$  a un sens)

$$(3.5) \quad \int_{\Omega} \mathcal{A}(\beta)u v \, dx = a(\beta; u, v) + \langle [\sigma^\beta(u) \cdot n], v \rangle_{\Gamma}$$

L'opérateur autoadjoint  $A(\beta)$  du problème est alors défini de façon claire par :

$$\begin{cases} D(A(\beta)) = \{u \in D(\mathcal{A}(\beta)) \mid \sigma^\beta(u) \cdot n|_{\Gamma} = 0\} \\ A(\beta)u = \mathcal{A}(\beta)u \quad \forall u \in D(\mathcal{A}(\beta)) \end{cases}$$

et est naturellement associé à la forme bilinéaire  $a(\beta; \cdot, \cdot)$

$$(A(\beta)u, v) = a(\beta; u, v) \quad \forall (u, v) \in D(A(\beta)) \times H^1(\Omega)^3$$

Le problème de valeurs propres s'écrit :

$$\begin{cases} A(\beta)u = \omega^2 u \\ u \in D(A(\beta)) \end{cases}$$

### 3.2 L'opérateur de frontière $T(\omega, \beta)$

Considérons le problème auxiliaire suivant :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma^\beta(u) \cdot n]|_{\Gamma} = 0 \\ [u]|_{\Gamma} = \phi & \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3 \\ u \in D(\mathcal{A}(\beta)) \end{cases}$$

**Lemme 3.1 .**

Pour  $\omega^2 < \beta^2 \frac{\mu}{\rho}$  et  $\phi$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3$ , le problème (3.6) admet une solution et une seule dans l'espace  $H^1(\bar{\Omega})^3$ .

**Démonstration .**

(i). Unicité de la solution

Soit  $u$  une solution associée à  $\phi = 0$ , par la formule de Green, il est facile de voir que :

$$a(\beta; u, u) = \omega^2 \|u\|^2$$

L'unicité est alors une conséquence directe du résultat de coercivité (i) du lemme 2.1 car  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ .

(ii). Existence de la solution

Nous prolongeons  $(\Gamma)$  en  $(\tilde{\Gamma})$  de façon à partager le plan en en :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 = \bar{\Omega}^+ \cup \bar{\Omega}^- & \Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset \\ \partial\Omega^+ = \partial\Omega^- = (\tilde{\Gamma}) \end{cases}$$

Nous avons donné une illustration graphique de ces frontières sur la figure 3.2.

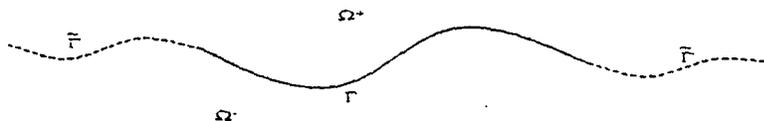


Figure 3.2 : Illustration graphique

Nous supposons, ce qui est loisible puisque  $(\Gamma)$  est de classe  $W^{1,\infty}$ , que  $(\tilde{\Gamma})$  est également de classe  $W^{1,\infty}$ . Soit  $\tilde{\phi}$  la fonction définie sur  $(\tilde{\Gamma})$  par :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(x) = \phi(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \tilde{\phi}(x) = 0 & \text{si } x \notin \Gamma \end{cases}$$

D'après les propriétés de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , nous savons que :

$$\phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3 \implies \tilde{\phi} \in H^{1/2}(\tilde{\Gamma})$$

Alors, d'après le corollaire 2.1 (il suffit de remplacer  $\Omega$  par  $\Omega^+$  et  $\Gamma$  par  $\tilde{\Gamma}$ ), le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u^+ - \omega^2 u^+ = 0 \\ u^+|_{\Gamma} = \tilde{\phi} \end{cases}$$

admet une solution unique  $u^+$  dans  $H^1(\Omega^+)^3$ .

Soit alors  $u_0$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} u_0(x) = u^+(x) & \text{si } x \in \Omega^+ \\ u_0(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega^- \end{cases}$$

vérifie bien entendu :

$$\begin{cases} u_0 \in H^1(\Omega)^3 \\ u_0|_{\Gamma} = \phi \\ \mathcal{A}(\beta)u_0 - \omega^2 u_0 = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \mathcal{A}(\beta)u_0 - \omega^2 u_0 = 0 & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$$

Posons maintenant :

$$\sigma = \sigma^\beta(u^+) \cdot n|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\tilde{\Gamma})^3$$

Si nous posons  $(S) = (\tilde{\Gamma}) - (\Gamma)$  nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u_0 - \omega^2 u_0 = \sigma|_S \otimes \delta(S) & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^3 \\ [\sigma^\beta(u_0) \cdot n]|_{\Gamma} = \sigma & \text{dans } H^{-1/2}(\tilde{\Gamma})^3 \end{cases}$$

Si nous faisons le changement de fonction inconnue :

$$u = u_0 + v$$

le problème à résoudre s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v = \sigma|_S \otimes \delta(S) & \text{dans } \Omega \\ \{v\}|_\Gamma = 0 \\ [\sigma^\beta(v) \cdot n]|_\Gamma = -\sigma|_\Gamma \end{cases}$$

C'est un problème dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{cases} a(\beta; v, w) - \omega^2(v, w) = - \langle \sigma, w \rangle|_\Gamma \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ v \in H^1(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram permet alors de montrer que ce problème admet une solution (unique), ce qui achève la démonstration.

□

Nous désignons par  $R(\omega, \beta)\phi$  l'unique solution de (3.6), il est alors clair que :

$$R(\omega, \beta) \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3; D(\mathcal{A}(\beta))\right)$$

Il suffit de reprendre la démonstration du lemme et de remarquer que chacun des passages :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi \longrightarrow \tilde{\phi} & \text{de } H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3 \text{ dans } H^{1/2}(\tilde{\Gamma})^3 \\ \tilde{\phi} \longrightarrow (u^+, \mathcal{A}(\beta)u^+) & \text{de } H^{1/2}(\tilde{\Gamma})^3 \text{ dans } H^1(\Omega^+)^3 \times L^2(\Omega^+)^3 \\ u^+ \longrightarrow u_0 & \text{de } H^1(\Omega^+)^3 \text{ dans } H^1(\Omega)^3 \\ (u^+, \mathcal{A}(\beta)u^+) \longrightarrow \sigma & \text{de } H^1(\Omega^+)^3 \times L^2(\Omega^+)^3 \text{ dans } H^{-1/2}(\tilde{\Gamma})^3 \end{array} \right.$$

est linéaire et continu.

On peut d'ailleurs obtenir sur  $R(\omega, \beta)$  des estimations analogues à celles énoncées au corollaire 2.2. Quoi qu'il soit on peut,  $R(\omega, \beta)$  étant défini, définir l'opérateur :

$$T(\omega, \beta) \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3; H^{-1/2}(\Gamma)^3\right)$$

par :

$$(3.7) \quad T(\omega, \beta)u = \left[ \sigma^\beta (R(\omega, \beta)\phi) \cdot n \right]$$

Désignons par  $b(\omega, \beta; \phi, \phi)$  la forme bilinéaire sur  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3$  définie par :

$$(3.8) \quad b(\omega, \beta; \phi, \phi) = \langle T(\omega, \beta)\phi, \psi \rangle_\Gamma$$

Comme  $R(\omega, \beta)\phi$  vérifie  $\left[ \sigma^\beta (R(\omega, \beta)\phi) \cdot n \right] = 0$ , en appliquant la formule de Green (formule (3.4)) nous voyons que :

$$b(\omega, \beta; \phi, \psi) = a(R(\omega, \beta)\phi, R(\omega, \beta)\psi) - \omega^2 (R(\omega, \beta)\phi, R(\omega, \beta)\psi)$$

ce qui démontre la symétrie de la forme bilinéaire  $b(\omega, \beta; \phi, \psi)$ .

Pour démontrer que  $b(\omega, \beta; \phi, \psi)$  définit un opérateur autoadjoint sur  $L^2(\Gamma)^3$ , nous introduisons :

$$D(T(\omega, \beta)) = \{ \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3 / T(\omega, \beta)\phi \in L^2(\Gamma)^3 \}$$

Nous avons alors besoin de l'équivalent du lemme 2.9 à savoir :

**Lemme 3.2 .**

Lorsque  $\omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ , on a, pour tout  $\phi$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3$  les inégalités :

$$(i). \quad b(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq C_1 |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 - C_2(\omega, \beta) |\phi|_\Gamma^2$$

$$(ii). \quad b(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq C_0(\omega, \beta) \inf \left( \gamma_0(\beta) \frac{\mu}{\rho} - \omega^2, 0 \right) |\phi|_\Gamma^2$$

où la constante  $C_0(\omega, \beta)$  vérifie :

$$C_0(\omega, \beta) = C(1 + \beta) \max \left( 1, \left( \frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2 \right)^{-1} \right)$$

Démonstration .

Soit  $u = R(\omega, \beta)\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$  (nous confondons ici  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$  et  $L^2(\Omega)^3$ ). Soit  $v$  solution unique de :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v & = u \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ v & \in H^1(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Nous avons vu (preuve du lemme 2.6) que  $v \in H^2(\mathbb{R}^2)$  et que :

$$\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq \max\left(1, \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

et donc que, par le théorème des traces :

$$(3.9) \quad |\sigma^\beta(v) \cdot n|_\Gamma \leq C(1 + \beta) \max\left(1, \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

En tant que distribution dans  $\Omega$ ,  $v$  vérifie :

$$(3.10) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta)v - \omega^2 v & = u & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ [\sigma^\beta(v) \cdot n] & = 0 & \text{sur } \Gamma \\ [v]|_\Gamma & = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Par ailleurs, nous savons que :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u & = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\sigma^\beta(u) \cdot n] & = 0 & \text{sur } \Gamma \\ [u]|_\Gamma & = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Nous multiplions la première équation de (3.11) par  $v$  et nous intégrons sur  $\Omega$ . D'après la formule de Green (3.4), nous avons :

$$(3.12) \quad a(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = 0$$

Nous multiplions maintenant la première équation de (3.10) par  $u$  et nous intégrons sur  $\Omega$ . En utilisant (3.5), il vient :

$$a(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) + \langle \sigma^\beta(v) \cdot n, \phi \rangle_\Gamma = \|u\|^2$$

Soit encore, compte tenu de (3.12) :

$$\|u\|^2 = \left( \sigma^\beta(v) \cdot n, \phi \right)_\Gamma \leq |\sigma^\beta(v) \cdot n|_\Gamma \cdot |\phi|_\Gamma$$

Mais, grâce à (3.9), il vient :

$$\|u\| \leq C(1 + \beta) \max \left( 1, \frac{1}{\frac{\mu}{\rho}\beta^2 - \omega^2} \right) |\phi|_\Gamma$$

On conclut comme dans les sections précédentes.

□

A l'aide de ce résultat, nous pouvons maintenant énoncer le :

### **Théorème 3.1 .**

*L'opérateur  $T(\omega, \beta)$ , de domaine  $D(T(\omega, \beta))$ , est autoadjoint et positif dans  $L^2(\Gamma)^3$  et à résolvante compacte. Par ailleurs :*

(i). *Si  $\omega^2 \leq \frac{\mu}{\rho}\gamma_0(\beta)$ ,  $T(\omega, \beta)$  est positif.*

(ii). *Si  $\frac{\mu}{\rho}\gamma_0(\beta) < \omega^2 < \frac{\mu}{\rho}\beta^2$ ,  $T(\omega, \beta)$  est minoré par une constante négative :*

$$\begin{cases} T(\omega, \beta) \geq -C_0(\omega, \beta) \left[ \omega^2 - \frac{\mu}{\rho}\gamma_0(\beta) \right] \\ \lim_{\omega^2 \rightarrow \frac{\mu}{\rho}\beta^2} C_0(\omega, \beta) = +\infty \end{cases}$$

**Corollaire 3.1 .**

*Le spectre de  $T(\omega, \beta)$  est purement ponctuel :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(T(\omega, \beta)) = \{ \lambda_k(\omega, \beta), k \in \mathbb{N} \} \\ \lambda_1(\omega, \beta) \leq \lambda_2(\omega, \beta) \leq \dots \leq \lambda_k(\omega, \beta) \leq \dots \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k(\omega, \beta) = +\infty \end{array} \right.$$

*et en outre :*

- Si  $\omega^2 \leq \frac{\mu}{\rho} \gamma_0(\beta)$ ,  $\lambda_1(\omega, \beta) \geq 0$ .
- Si  $\frac{\mu}{\rho} \gamma_0(\beta) < \omega^2 < \frac{\mu}{\rho} \beta^2$ ,  $\lambda_1(\omega, \beta) \geq -C_0(\omega, \beta) \left[ \omega^2 - \frac{\mu}{\rho} \gamma_0(\beta) \right]$

La démonstration de ce corollaire est analogue à celles du théorème 2.1 et du corollaire 2.3.

### 3.3 Une nouvelle formulation du problème de valeurs propres

Nous nous intéressons donc au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\beta)u = \omega^2 u \\ u \in D(A(\beta)) \end{array} \right.$$

Nous pouvons énoncer le :

**Théorème 3.2 .**

Lorsque  $\frac{\mu}{\rho} \gamma_0(\beta) < \omega^2 < \frac{\mu}{\rho} \beta^2$ ,

- (i). S'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda_k(\omega, \beta) = 0$ , il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega^2 = s_m(\beta)$
- (ii). S'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega^2 = s_m(\beta)$ , il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda_k(\omega, \beta) = 0$

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 2.2.

### 3.4 Résultat de monotonie

Nous avons à nouveau le résultat de monotonie :

**Théorème 3.3 .**

*Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $\beta > 0$ , la fonction  $\omega \longrightarrow \lambda_k(\omega, \beta)$  est strictement décroissante dans l'intervalle  $]0, \beta V_S[$*

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 2.3.

## Chapitre 4

### CAS DE LA FISSURE PLANE

#### Notations relatives au chapitre 4

- $\Gamma$  est identifiée au segment  $[0, L]$  et sur  $\Gamma$  la variable  $x_1$  sera (en général) notée  $x$ .
- Si  $\phi$  est une fonction définie sur  $[0, L]$ , nous noterons  $\tilde{\phi}$  sa prolongée par 0 et par  $\hat{\phi}$  la transformée de Fourier de  $\tilde{\phi}$ :

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L \phi(x) \exp -ikx \, dx$$

- $\| \cdot \|$  désigne la norme usuelle de  $L^2(\Gamma)$  ( ou  $L^2(\Gamma)^N$  )
- $( \cdot , \cdot )$  désigne le produit scalaire associé
- $\| \cdot \|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$  désigne la norme dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  (ou  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^3$ ) définie par :

$$\| \phi \|_{\frac{1}{2}, \Gamma} = \int (1 + |k|^2)^{1/2} |\hat{\phi}(k)|^2 \, dk$$

- $|\cdot|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$  désigne la semi-norme

$$|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 = \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 \, dk$$

Ce paragraphe s'inscrit dans la continuité du paragraphe 3 dans lequel nous avons traité le cas de la fissure quelconque. Nous reprendrons donc les notations de ce paragraphe. Dans le cas qui nous intéresse, la fissure ( $\Gamma$ ) peut être identifiée à un segment  $[0, L]$ ,  $L$  désignant la longueur de la fissure. De façon plus précise :

$$(\Gamma) = \left\{ (x_1, 0), \quad 0 \leq x_1 \leq L \right\}$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2 - \Gamma$$

---

Figure 4.1 : Section de la fissure

Notre but dans ce paragraphe est de mettre à profit la géométrie particulière de notre problème pour étudier de façon précise, grâce à l'utilisation de la transformation de Fourier partielle dans la direction  $x_1$ , les propriétés de l'opérateur  $T(\omega, \beta)$ .

Nous adopterons, en ce qui concerne les traces les notations de la figure 4.2, avec :

$$\phi = [u] = u^+ - u^-$$

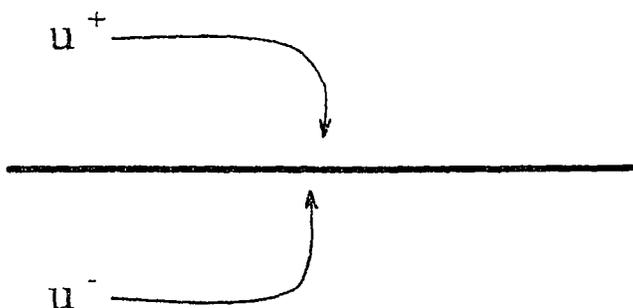


Figure 4.2 : Notations

Nous introduisons également les vitesses  $V_P$  et  $V_S$  des ondes P et S définies respectivement par :

$$V_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$V_S^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

#### 4.1 Une expression en Fourier et une décomposition de la forme bilinéaire $b(\omega, \beta, \phi, \psi)$

Nous donnons directement ici le résultat des calculs. Pour l'obtention des formules qui suivent, le lecteur pourra se référer aux travaux de Bamberger [4], qui traite le cas d'une

fissure plane, ou à [17] et [29], où nous reprenons le principe des calculs de [4] pour obtenir les résultats qui suivent. On montre ainsi que si  $\hat{\phi}(k)$  désigne la transformée de Fourier de  $\tilde{\phi}$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tilde{\phi}(x) = \phi(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \tilde{\phi}(x) = 0 & \text{si } x \notin \Gamma \end{cases}$$

(( $\Gamma$ ) est ici identifiée à un segment de  $\mathbb{R}$ ), alors on a l'expression :

$$(4.2) \quad \begin{cases} b(\omega, \beta; \phi, \psi) = \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} \int_{\mathbb{R}} \left( A(\omega, \beta; k) \hat{\phi}_T(k), \hat{\psi}_T(k) \right) dk \\ + \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{P_R(\omega, \beta; k)}{K_P(\omega, \beta; k)} \hat{\phi}_2(k) \overline{\hat{\psi}_2(k)} dk \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) & \in \mathbb{R}^3 & \text{(champ total)} \\ \phi_T = (\phi_1, \phi_3) & \in \mathbb{R}^2 & \text{(champ tangentiel)} \\ \phi_2 & \in \mathbb{R} & \text{(champ normal)} \end{cases}$$

La matrice  $2 \times 2$   $A(\omega, \beta; k)$  est donnée par :

$$(4.3) \quad A(\omega, \beta; k) = \frac{1}{K_S(\omega, \beta; k)} \begin{bmatrix} (P_R - \beta^2 P_C)(\omega, \beta; k) & \beta k P_C(\omega, \beta; k) \\ \beta k P_C(\omega, \beta; k) & (P_R - k^2 P_C)(\omega, \beta; k) \end{bmatrix}$$

avec

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_P = \left( k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} \right)^{1/2} \\ K_S = \left( k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right)^{1/2} \\ P_R = 4(k^2 + \beta^2)K_P K_S - \left( 2k^2 + 2\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right)^2 \\ P_C = 4K_P K_S + 3\frac{\omega^2}{V_S^2} - 4(k^2 + \beta^2) \end{array} \right.$$

Un calcul rapide montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}(A(\omega, \beta; k)) = \frac{1}{K_S} (2P_R - (k^2 + \beta^2)P_C) \\ \text{Det}(A(\omega, \beta; k)) = \frac{P_R}{K_S^2} (P_R - (k^2 + \beta^2)P_C) \end{array} \right.$$

de telle sorte que les deux valeurs propres de la matrice  $A(\omega, \beta; k)$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_S} P_R(\omega, \beta, k) \\ \frac{1}{K_S} \left\{ P_R(\omega, \beta; k) - (k^2 + \beta^2)P_C(\omega, \beta; k) \right\} \end{array} \right.$$

Mais, un rapide calcul à partir des formules (4.4) permet d'établir que :

$$\frac{1}{K_S} \left\{ P_R(\omega, \beta; k) - (k^2 + \beta^2)P_C(\omega, \beta; k) \right\} = \frac{\omega^2}{V_S^2} K_S(\omega, \beta; k)$$

Nous posons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_P(\omega, \beta; k) = \frac{\mu}{2} K_S(\omega, \beta; k) \\ \lambda_{SH}(\omega, \beta; k) = \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} \frac{P_R(\omega, \beta; k)}{K_S(\omega, \beta; k)} \\ \lambda_{SV}(\omega, \beta; k) = \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} \frac{P_R(\omega, \beta; k)}{K_P(\omega, \beta; k)} \end{array} \right.$$

On établit très facilement que :

$$\begin{cases} \lambda_{SV}(\omega, \beta; k) \geq \lambda_{SH}(\omega, \beta; k) \\ \lambda_P(\omega, \beta; k) \geq 0 \end{cases}$$

Si nous notons :

$$\begin{cases} \text{Im} \{ \lambda_P(\omega, \beta) \} &= \{ \lambda \in \mathbb{R} / \lambda = \lambda_P(\omega, \beta; k), k \in \mathbb{R} \} \\ \text{Im} \{ \lambda_{SH}(\omega, \beta) \} &= \{ \lambda \in \mathbb{R} / \lambda = \lambda_{SH}(\omega, \beta; k), k \in \mathbb{R} \} \\ \text{Im} \{ \lambda_{SV}(\omega, \beta) \} &= \{ \lambda \in \mathbb{R} / \lambda = \lambda_{SV}(\omega, \beta; k), k \in \mathbb{R} \} \end{cases}$$

où  $\text{Im}(\lambda)$  désigne l'image de  $\lambda$ , il est bien clair que :

$$\sigma(T(\omega; \beta)) \subset \text{Im} \{ \lambda_P(\omega, \beta) \} \cup \text{Im} \{ \lambda_{SH}(\omega, \beta) \} \cup \text{Im} \{ \lambda_{SV}(\omega, \beta) \}$$

Il est par ailleurs intéressant de préciser le comportement des fonctions  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{SH}$ , et  $\lambda_{SV}$  lorsque  $|k| \rightarrow +\infty$ .

En ce qui concerne la fonction  $\lambda_P$ , on a immédiatement :

$$\lambda_P(\omega, \beta; k) \sim \frac{\mu}{2}|k| \quad |k| \rightarrow +\infty$$

Par ailleurs, en développant au voisinage de  $|k| = +\infty$ , nous avons :

$$\begin{cases} K_P &= |k| \left( 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} \right) + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \right) \\ K_S &= |k| \left( 1 + \frac{1}{2k^2} \left( \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right) + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \right) \\ K_P K_S &= |k|^2 + \frac{1}{2} \left( 2\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right) + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \\ 4(k^2 + \beta^2)K_P K_S &= 4k^4 + 2k^2 \left( 4\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right) + O(1) \\ \left( 2k^2 + 2\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right)^2 &= 4k^4 + 4k^2 \left( 2\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right) + O(1) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$P_R(\omega, \beta; k) = 2k^2\omega^2 \left( \frac{1}{V_S^2} - \frac{1}{V_P^2} \right) + O(1)$$

Par suite, en posant  $a = \frac{V_S^2}{V_P^2} \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right]$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \lambda_{SH}(\omega, \beta; k) \sim \mu(1-a)|k| & |k| \rightarrow +\infty \\ \lambda_{SV}(\omega, \beta; k) \sim \mu(1-a)|k| & |k| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Comme par ailleurs les fonctions  $\lambda_P$ ,  $\lambda_{SH}$  et  $\lambda_{SV}$  sont, à  $(\omega, \beta)$  fixés, des fonctions régulières de  $k$ , nous savons que :

$$\begin{cases} (\lambda_P)_*(\omega, \beta) = \inf_{k \in \mathbb{R}} \lambda_P(\omega, \beta; k) & > -\infty \\ (\lambda_{SH})_*(\omega, \beta) = \inf_{k \in \mathbb{R}} \lambda_{SH}(\omega, \beta; k) & > -\infty \\ (\lambda_{SV})_*(\omega, \beta) = \inf_{k \in \mathbb{R}} \lambda_{SV}(\omega, \beta; k) & > -\infty \end{cases}$$

Alors, en posant :

$$\lambda_*(\omega, \beta) = \min \{ (\lambda_P)_*(\omega, \beta), (\lambda_{SH})_*(\omega, \beta), (\lambda_{SV})_*(\omega, \beta) \}$$

on retrouve le fait que  $T$  est un opérateur pseudo différentiel d'ordre 1, autoadjoint dans  $L^2(\Gamma)^3$  et borné inférieurement. Plus précisément, le spectre de  $T(\omega, \beta)$  vérifie :

$$\sigma(T(\omega, \beta)) \subset \left[ \lambda_*(\omega, \beta), +\infty \right[$$

**Remarque 4.1** .

*Le fait que  $T(\omega, \beta)$  ne soit pas borné ne résulte pas directement du fait que les fonctions  $\lambda_{SH}$ ,  $\lambda_{SV}$  et  $\lambda_P$  ne sont pas bornées puisqu'on ne peut pas faire décrire à  $\hat{\phi}(k)$  l'espace  $L^2(\mathbb{R})^3$  en entier mais seulement l'espace des transformées de Fourier des fonctions  $\tilde{\phi}(x)$  dans  $H^1(\mathbb{R})^3$  à support dans  $[0, L]$ . Toutefois, ceci n'influe pas dans la mesure où on peut arbitrairement décaler le spectre de telles fonctions.*

*Soit  $\tilde{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})^3$  à support inclus dans  $[0, L]$ , sa transformée de Fourier  $\hat{\phi}$  vérifie :*

$$\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^3, \quad \hat{\phi} \neq 0$$

et il existe donc un ensemble  $[a, b]$  et  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall k \in [a, b], \quad |\hat{\phi}(k)| > \delta$$

Pour  $M > 0$ , posons  $\tilde{\phi}_M(x) = \tilde{\phi}(x) \exp iMx$  nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_M \in C_0^\infty(\mathbb{R}); & \text{supp } \tilde{\phi}_M \subset [0, L] \\ \hat{\phi}_M(k) = \hat{\phi}(k - M) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\forall k \in [a + M, b + M] \quad |\hat{\phi}(k)| > \delta$$

Soit alors  $C(\omega, \beta; A) = \inf_{k \geq A} \lambda_{\bar{S}}(\omega, \beta; k)$ , nous savons que  $C(\omega, \beta; A) \rightarrow +\infty$  lorsque  $M \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, en posant  $\phi_M = \tilde{\phi}_M|_{[0, L]}$  :

$$\begin{cases} b(\omega, \beta; \phi_M, \phi_M) \geq \int_{a+M}^{b+M} \lambda_{\bar{S}}(\omega, \beta; k) |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ \geq (b - a) \delta^2 C(\omega, \beta; a + M) \end{cases}$$

Ce qui montre que :

$$\begin{cases} b(\omega, \beta; \phi_M, \phi_M) \rightarrow +\infty & (M \rightarrow +\infty) \\ \|\phi_M\| = \|\phi\| \end{cases}$$

et on retrouve par conséquent le fait que  $T(\omega, \beta)$  est non borné. Quoiqu'il en soit, les valeurs propres de l'opérateur  $T(\omega, \beta)$  vérifient donc :

$$\begin{cases} \lambda_*(\omega, \beta) \leq \lambda_1(\omega, \beta) \leq \dots \leq \lambda_k(\omega, \beta) \leq \dots < +\infty \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k(\omega, \beta) = +\infty \end{cases}$$

Dans toute la suite, il sera particulièrement utile de travailler avec des paramètres et des variables adimensionnalisés à l'aide desquels toutes les quantités que nous avons introduites pourront être exprimés. Ces paramètres sont :

- la vitesse de phase adimensionnalisée :

$$x = \frac{\omega}{\beta V_S} \in [0, 1]$$

- le nombre d'onde adimensionnel :

$$y = \frac{k}{\beta} \in \mathbb{R}$$

- le coefficient :

$$a = \frac{V_S^2}{V_P^2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

On vérifie aisément que :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{V_S^2}{\omega^2} P_R(\omega, \beta; k) = \frac{\beta^2}{x^2} F_R(x, y) \\ F_R(x, y) = 4(1+y^2)(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} \\ \quad - (2+2y^2-x^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{V_S^2}{\omega^2} (k^2 + \beta^2) P_C(\omega, \beta; k) = \frac{\beta^2}{x^2} F_C(x, y) \\ F_C(x, y) = (1+y^2) \left\{ 4(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} - 4(1+y^2) + 3x^2 \right\} \end{cases}$$

à partir de quoi, on voit facilement que les quantités adimensionnelles  $\frac{1}{\mu\beta} \lambda_P(\omega, \beta; k)$ ,  $\frac{1}{\mu\beta} \lambda_S^+(\omega, \beta; k)$  et  $\frac{1}{\mu\beta} \lambda_S^-(\omega, \beta; k)$  ne dépendent que de  $a$ ,  $x$  et  $y$ .

Venons en maintenant à une décomposition de la forme bilinéaire  $b(\omega, \beta; \phi, \psi)$  (et par conséquent à l'opérateur  $T(\omega, \beta)$ ) qui va nous permettre de partager l'étude ultérieure en deux parties.

Posons  $H = L^2(\Gamma)^3 = \{\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)\}$ . Nous avons :

$$H = H_T \oplus H_N$$

$$\begin{cases} H_T = \{(\phi_1, 0, \phi_3), (\phi_1, \phi_3) \in L^2(\Gamma)^2\} \\ H_N = \{(0, \phi_2, 0), \phi_2 \in L^2(\Gamma)\} \end{cases}$$

Alors on a la décomposition :

$$\forall \phi \in H \quad \phi = \phi_T + \phi_N$$

$$\begin{cases} \phi_T = (\phi_1, 0, \phi_3) \\ \phi_N = (0, \phi_2, 0) \end{cases}$$

L'équation (4.2) se réécrit de manière évidente :

$$(4.7) \quad b(\omega, \beta; \phi, \phi) = b_T(\omega, \beta; \phi_T, \phi_T) + b_N(\omega, \beta; \phi_N, \phi_N)$$

Bien sûr, on a une décomposition de l'opérateur  $T(\omega, \beta)$  sous la forme :

$$(4.8) \quad T(\omega, \beta) = T_T(\omega, \beta) \oplus T_N(\omega, \beta)$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \sigma(T(\omega, \beta)) &= \sigma(T_T(\omega, \beta)) \cup \sigma(T_N(\omega, \beta)) \\ \begin{cases} \sigma(T_T(\omega, \beta)) &= \{\lambda_1^{(T)}(\omega, \beta), \lambda_2^{(T)}(\omega, \beta), \dots, \lambda_n^{(T)}(\omega, \beta) \dots\} \\ \sigma(T_N(\omega, \beta)) &= \{\lambda_1^{(N)}(\omega, \beta), \lambda_2^{(N)}(\omega, \beta), \dots, \lambda_n^{(N)}(\omega, \beta) \dots\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_n^{(T)}(\omega, \beta) \longrightarrow +\infty & (n \rightarrow +\infty) \\ \lambda_n^{(N)}(\omega, \beta) \longrightarrow +\infty & (n \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

D'autre part, grâce au principe du Max-Min, nous savons que les valeurs propres des opérateurs  $T_T$  et  $T_N$  sont caractérisées par :

$$(4.9) \quad \left. \begin{aligned} \lambda_n^{(T)}(\omega, \beta) &= \max_{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \subset L^2(\Gamma)^3} \min_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}^\perp} \frac{b_T(\omega, \beta; \phi, \phi)}{|\phi|_\Gamma^2} \\ &= \min_{\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset H^{1/2}(\Gamma)^3} \max_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^\perp} \frac{b_T(\omega, \beta; \phi, \phi)}{|\phi|_\Gamma^2} \\ \lambda_n^{(N)}(\omega, \beta) &= \max_{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \subset L^2(\Gamma)^3} \min_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}^\perp} \frac{b_N(\omega, \beta; \phi, \phi)}{|\phi|_\Gamma^2} \\ &= \min_{\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset H^{1/2}(\Gamma)^3} \max_{v \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^\perp} \frac{b_N(\omega, \beta; \phi, \phi)}{|\phi|_\Gamma^2} \end{aligned} \right\}$$

où nous avons posé :

$$(4.10) \quad \left. \begin{aligned} \{v_1, v_2, \dots, v_n\} &= \left\{ v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \{ \alpha_j \} \in \mathbb{R}^n \right\} \\ \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^\perp &= \left\{ v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) / (v, v_j)_\Gamma = 0, 1 \leq j \leq n \right\} \end{aligned} \right\}$$

D'autre part, du résultat général de monotonie par rapport à  $\omega$  (cf théorème 3.3) nous déduisons que les fonctions ( $\beta$  étant fixé) :  $\omega \longrightarrow \lambda_m^T(\omega, \beta)$  et  $\omega \longrightarrow \lambda_m^N(\omega, \beta)$ ,  $\omega \in ]0, \beta V_S[$ , sont strictement décroissantes.

Par ailleurs, l'application  $(\omega, \beta) \longrightarrow T(\omega, \beta)$  est de classe  $C^\infty$  de l'ensemble  $\{\beta > 0, \omega < \beta V_S\}$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma)^3, H^{-1/2}(\Gamma)^3)$ . Nous en déduisons que les fonctions  $\omega \longrightarrow \lambda_m^T(\omega, \beta)$  et  $\omega \longrightarrow \lambda_m^N(\omega, \beta)$  sont continues et relèvent donc de l'application du théorème des valeurs intermédiaires.

## 4.2 Etude de l'opérateur normal $T_N(\omega, \beta)$

Nous identifierons dans ce paragraphe  $H_N$  à  $L^2(\Gamma)$  et l'opérateur  $T_N(\omega, \beta)$  à celui défini par :

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} D(T_N(\omega, \beta)) = H_0^1(\Gamma) \\ (T_N(\omega, \beta)\phi, \psi) = b_N(\omega, \beta; \phi, \psi) \quad \forall (\phi, \psi) \in H_0^1(\Gamma) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma) \\ b_N(\omega, \beta; \phi, \psi) = \frac{\mu}{2} \frac{V_S^2}{\omega^2} \int \frac{P_R(\omega, \beta; k)}{K_P(\omega, \beta; k)} \hat{\phi}(k) \overline{\hat{\psi}(k)} dk \end{array} \right.$$

(Rappelons que, pour définir les transformées de Fourier  $\phi(k)$  et  $\psi(k)$  les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  ont été prolongées par 0 en dehors du segment  $[0, L]$  des formules (4.9) montrent que le signe des valeurs propres  $\lambda_m^N(\omega, \beta)$  est relié de façon directe à celui de la forme bilinéaire  $b_N(\omega, \beta; \phi, \psi)$ . Or nous pouvons écrire, grâce à (4.5) :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{2} \frac{V_S^2}{\omega^2} \frac{P_R(\omega, \beta; k)}{K_P(\omega, \beta; k)} = \frac{\mu}{2} \frac{\beta}{x^2} G_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) \quad x = \frac{\omega}{\beta V_S} \in ]0, 1[ \\ G_R(x, y) = \frac{F_R(x, y)}{(1 - ax^2 + y^2)^{1/2}} \end{array} \right.$$

Et donc :

$$(4.13) \quad b_N(\omega, \beta; \phi, \psi) = \frac{\mu}{2} \frac{\beta}{x^2} \int G_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk$$

De telle sorte que l'étude du signe de la fonction  $G_R(x, y)$  est essentielle pour l'étude du signe de  $b_N(\omega, \beta; \phi, \psi)$ .

Introduisons la fonction de Rayleigh :

$$(4.14) \quad R(x) = 4(1 - x^2)^{1/2} (1 - ax^2)^{1/2} - (2 - x^2)^2 \quad x \in [0, 1]$$

Il est bien connu que  $R(x)$  a un seul zéro dans l'intervalle  $]0, 1]$  qui est  $x = x_R$ , la formule  $c_R = x_R V_S = x_R \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$  définissant la vitesse des ondes de Rayleigh.

Plus précisément (voir figure 4.4) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R(0) = R(x_R) = 0 & \\ R(x) > 0 & \text{pour } x \in ]0, x_R[ \\ R(x) < 0 & \text{pour } x \in ]x_R, 1[ \end{array} \right.$$

Or, la fonction  $F_R(x, y)$  est liée à la fonction de Rayleigh  $R(x)$  par la formule :

$$(4.15) \quad F_R(x, y) = (1 + y^2)^2 R\left(\frac{x}{(1 + y^2)^{1/2}}\right)$$

Comme d'après (4.12),  $G_R(x, y)$  est du signe de  $F_R(x, y)$  on a en fait deux situations :

$$(i) \quad x \leq x_R \implies \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad G_R(x, y) \geq 0$$

$$(ii) \quad x > x_R \implies \left\{ \begin{array}{ll} G_R(x, y) < 0 & \text{pour } 0 \leq y < \left(\frac{x^2}{x_R^2} - 1\right)^{1/2} \\ G_R(x, y) > 0 & \text{pour } y > \left(\frac{x^2}{x_R^2} - 1\right)^{1/2} \end{array} \right.$$

ce qui correspond aux deux cas de figures représentés ci dessous :

Du point (i), nous déduisons immédiatement un premier résultat :

**Lemme 4.1 .**

Lorsque  $\omega^2 \leq \beta^2 c_R^2$ , on a :

$$\forall \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) \quad b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq 0$$

et par conséquent :

$$0 \leq \lambda_1^N(\omega, \beta) \leq \lambda_2^N(\omega, \beta) \leq \dots \leq \lambda_n^N(\omega, \beta) \leq \dots < +\infty$$

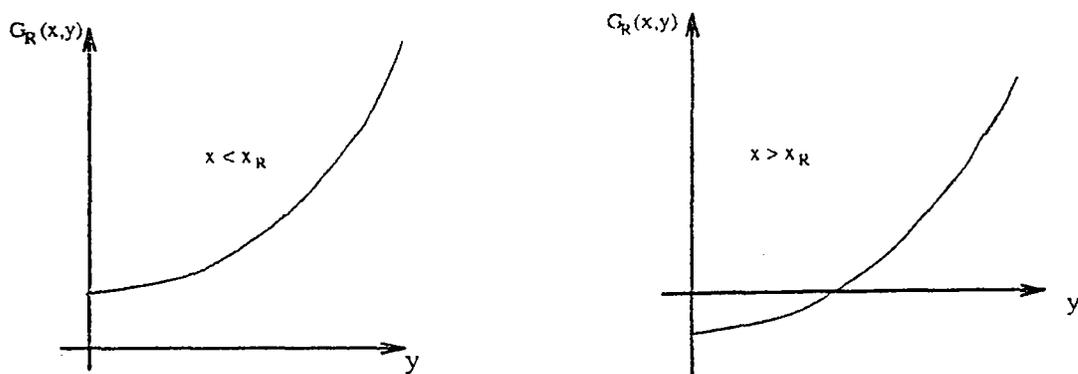


Figure 4.3 : Variations de la fonction  $y \rightarrow G_R(x,y)$

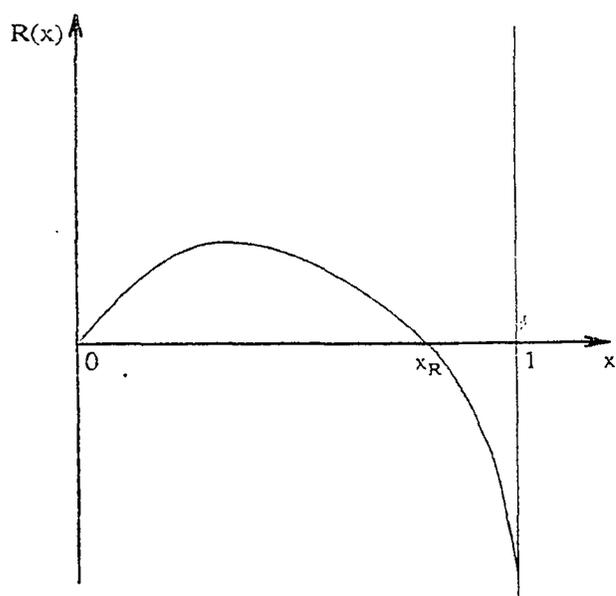


Figure 4.4 : Graphe de la fonction de Rayleigh  $R(x)$

Pour compléter ce lemme, il nous faut étudier ce qui se passe lorsque  $\omega^2 > \beta^2 c_R^2$  c'est à dire lorsque :

$$x_R < x < 1$$

Commençons par préciser le comportement de la fonction  $y \rightarrow G_R(x, y)$  au voisinage de 0 et  $+\infty$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_R(x, 0) = \frac{R(x)}{(1-ax^2)^{1/2}} \\ G_R(x, y) \sim 2(1-a)x^2y \quad y \rightarrow +\infty \\ G_R(x, y) = G_R(x, 0) + C_0(x)y^2 + O(y^4) \quad (y \rightarrow 0) \end{array} \right.$$

où  $C_0(x)$  est donnée par :

$$C_0(x) = \left\{ \frac{3-4ax^2}{2(1-ax^2)} R(x) - \frac{x}{2} R'(x) \right\} (1-ax^2)^{-1/2}$$

On notera que comme  $\lim_{x \rightarrow 1} R'(x) = -\infty$ , il vient :

$$\lim_{x \rightarrow 1} C_0(x) = +\infty$$

Introduisons donc la fonction :

$$(4.16) \quad C(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^+} \left| \left\{ \frac{G_R(x, y) - G_R(x, 0)}{y^2} \right\} \right|$$

D'après ce qui précède, nous savons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x < 1 \quad C(x) < +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} C(x) = +\infty \quad (\text{car } C(x) > C_0(x)) \end{array} \right.$$

Revenons à l'étude de  $b_N(\omega, \beta; \phi, \phi)$ . Nous avons :

$$(4.17) \quad \left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\beta\mu} b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) &= \int G_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ &= G_R(x, 0) \int |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ &\quad + \int \left\{ G_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) - G_R(x, 0) \right\} |\hat{\phi}(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

Après avoir remarqué que :

$$\left| G_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) - G_R(x, 0) \right| \leq \frac{k^2}{\beta^2} C(x)$$

il vient, d'après Plancherel :

$$\frac{2x^2}{\beta\mu} b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) \leq \frac{R(x)}{(1-ax^2)^{1/2}} \|\phi\|^2 + \frac{C(x)}{\beta^2} \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|^2$$

Soient alors  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m) \in H_0^1([0, L])^m$  les  $m$  premières fonctions propres de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2}$  dans  $H_0^1(\Gamma)$ . Nous savons que :

$$\forall \phi \in [\phi_1, \dots, \phi_m] \quad \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|^2 \leq \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \|\phi\|^2$$

Par conséquent, en reportant dans (4.17), il vient :

$$\forall \phi \in [\phi_1, \dots, \phi_m] \quad b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) \leq \left[ \frac{R(x)}{(1-ax^2)^{1/2}} + \frac{m^2 \pi^2 C(x)}{\beta^2 L^2} \right] \|\phi\|^2$$

Ce qui prouve que  $b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) < 0$  dès que :

$$\beta^2 L^2 > m^2 \pi^2 (1-ax^2)^{1/2} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|$$

Grâce à (4.9), nous pouvons donc énoncer le :

**Lemme 4.2 .**

Lorsque  $\beta^2 c_R^2 < \omega^2 < \beta^2 V_S^2$ , alors si  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$  :

$$\beta L > m\pi(1-ax^2)^{1/4} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|^{1/2} \implies \lambda_m^N(\omega, \beta) < 0$$

Dans le même ordre d'idée, la fonction :

$$(4.18) \quad C_1(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{G_R(x, y) - G_R(x, 0)}{y} \right|$$

vérifie :

$$C_1(x) < +\infty \quad \forall x \in ]0, 1]$$

En effet, d'après (4.16), la fonction :

$$y \longrightarrow \frac{G_R(x, y) - G_R(x, 0)}{y} = \psi_R(x, y)$$

est continue pour tout  $x \in ]0, 1]$  et vérifie :

$$\begin{cases} \psi_R(x, 0) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_R(x, y) = 2(1-a)x^2 > 0 \end{cases}$$

Donc le maximum de  $\psi_R(x, y)$  est atteint soit en  $+\infty$  soit en  $y^* > 0$  à partir de quoi il est facile de voir que  $C_1(x)$  reste borné y compris lorsque  $x$  tend vers 1. Ecrivons que :

$$\left| G_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) - G_R(x, 0) \right| \leq \frac{|k|}{\beta} \left| \psi_R\left(x, \frac{k}{\beta}\right) \right| \leq C_1(x) \frac{|k|}{\beta}$$

Nous obtenons à partir de (4.13), en utilisant Cauchy Schwartz et Plancherel que :

$$\frac{2x^2}{\beta\mu} b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) \leq \frac{R(x)}{(1-ax^2)^{1/2}} \|\phi\|^2 + \frac{C_1(x)}{\beta} \|\phi\| \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|$$

D'où nous déduisons :

$$\begin{cases} b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) \leq \left\{ \frac{R(x)}{(1-ax^2)^{1/2}} + \frac{m\pi C_1(x)}{\beta L} \right\} \|\phi\| \\ \forall \phi \in [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m] \end{cases}$$

ce qui montre que sur l'espace  $[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$ ,  $b_N(\omega, \beta; \phi, \phi)$  reste négative dès que :

$$\beta L > m \pi (1-ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right|$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

**Lemme 4.3 .**

Lorsque  $\beta^2 c_R^2 < \omega^2 < \beta^2 V_S^2$ , si  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$  :

$$\beta L > m\pi(1 - ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right|^{1/2} \implies \lambda_m^N(\omega, \beta) < 0$$

Notons que aucun des deux résultats du lemme 4.2 et du lemme 4.3 n'est plus fort que l'autre dans la mesure où :

• Lorsque  $x \rightarrow 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - ax^2)^{1/4} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|^{1/2} \rightarrow +\infty \\ (1 - ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right| \text{ a une limite finie} \end{array} \right.$$

de telle sorte que pour  $x$  assez proche de 1 :

$$(1 - ax^2)^{1/4} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|^{1/2} > (1 - ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right|$$

• Lorsque  $x \rightarrow x_R$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - ax^2)^{1/4} |C(x)|^{1/2} \text{ a une limite finie } > 0 \\ (1 - ax^2)^{1/2} |C_1(x)| \text{ a une limite finie } > 0 \\ \frac{1}{R(x)} \text{ tend vers } +\infty \end{array} \right.$$

de telle sorte que pour  $x$  assez proche de  $x_R$  :

$$(1 - ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right| > (1 - ax^2)^{1/4} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|^{1/2}$$

Notre résultat optimal va donc être obtenu en introduisant la fonction :

$$(4.19) \quad S(a, x) = \pi \min \left\{ (1 - ax^2)^{1/4} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|^{1/2}, (1 - ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right| \right\}$$

définie et continue sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times ]x_R, 1]$

Par ailleurs nous savons que :

- Pour  $x$  assez proche de 1  $S(a, x) = (1 - ax^2)^{1/2} \left| \frac{C_1(x)}{R(x)} \right|$
- Pour  $x$  assez proche de  $x_R$   $S(a, x) = (1 - ax^2)^{1/4} \left| \frac{C(x)}{R(x)} \right|$

La figure 4.5 représente les variations de  $S(a, x)$ , lesquelles correspondent à la courbe en pointillé.

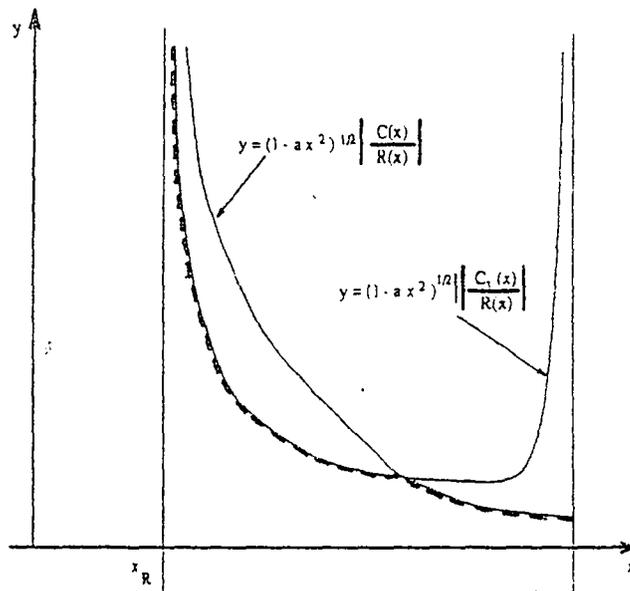


Figure 4.5 : Illustration graphique de la fonction  $S(a, x)$

En particulier comme :

$$|R(x)| \sim a_R |(x - x_R)| \quad x \rightarrow x_R$$

Nous déduisons que :

$$(4.20) \quad S(a, x) \sim \pi \left( \frac{a_R(1-x_R^2)C(x_R)}{|x-x_R|} \right)^{1/2} = \frac{S_R}{|x-x_R|^{1/2}}$$

et nous pouvons réunir les résultats des lemmes 4.2 et 4.3 dans le :

**Lemme 4.4 .**

Pour tout  $m \geq 1$ , et pour tout couple  $(\omega, \beta)$  tel que  $\beta^2 c_R^2 < \omega^2 < \beta^2 V_S^2$ , on a, en posant  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$  :

$$\beta L > m\pi S(a, x) \implies \lambda_m^N(\omega, \beta) < 0$$

Nous allons maintenant essayer de localiser un peu mieux la région où la fonction  $\lambda_m^N(\omega, \beta)$  est positive. L'idée consiste à montrer que, pour  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$  fixé, la fonction  $\lambda_m^N(\omega, \beta)$  deviendra positive pour  $\beta$  assez petit. Il s'agit donc d'étudier le signe de  $\lambda_m^N(\omega, \beta)$  lorsque  $\beta \rightarrow 0$  à  $x$  fixé. Or lorsque  $\beta$  tend vers 0,  $y = \frac{|k|}{\beta}$  tend vers  $+\infty$ . Il est donc naturel, pour cette étude, de faire intervenir le comportement asymptotique de la fonction  $G_R(x, y)$  au voisinage de  $y = \pm\infty$ .

Précisons donc le comportement asymptotique de  $G_R(x, y)$  lorsque  $y \rightarrow +\infty$ . Nous avons :

$$G_R(x, y) = 2(1-a)x^2y + O\left(\frac{1}{y}\right) \quad y \rightarrow +\infty$$

La fonction  $\{G_R(x, y) - 2(1-a)x^2y\}$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ . Comme par ailleurs elle est régulière nous pouvons poser :

$$(4.21) \quad C_\infty(x) = \max_{y \geq 0} |G_R(x, y) - 2(1-a)x^2y|$$

qui définit une fonction positive et continue de  $x$  lorsque  $x$  décrit  $[x_R, 1]$ .

Ecrivons maintenant :

$$(4.22) \quad \left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\beta\mu} b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) &= 2(1-a) \frac{x^2}{\beta} \int k |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ &+ \int \left\{ G_R \left( x, \frac{k}{\beta} \right) - 2(1-a)x^2 \frac{|k|}{\beta} \right\} |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ &\geq 2(1-a) \frac{x^2}{\beta} \int \left\{ |k| |\hat{\phi}(k)|^2 - C_\infty(x) \|\phi\|^2 \right\} dk \end{aligned} \right.$$

Soit  $E$  l'opérateur autoadjoint associé à la forme bilinéaire :

$$e(\phi, \psi) = \int |k| \hat{\phi}(k) \bar{\hat{\psi}}(k) dk \quad (\phi, \psi) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$$

Alors  $E$  est un opérateur défini positif à résolvante compacte. En effet :

(i).  $E$  est positif de manière évidente.

$$E\phi = 0 \implies e(\phi, \phi) = 0$$

$$(ii). \quad \begin{aligned} &\implies \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk = 0 \\ &\implies \phi = 0 \quad (\text{dans } L^2(0, L)) \end{aligned}$$

(iii). Soit  $\phi_n$  une suite de  $H_0^1(0, L)$  telle que :

$$e(\phi_n, \phi_n) + \|\phi_n\|^2 \leq 1$$

Par Fourier il vient :

$$\int (1 + |k|) |\hat{\phi}_n(k)|^2 dk < +\infty$$

Par conséquent, la suite  $\tilde{\phi}_n$  est bornée dans  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Par compacité, quitte à extraire une sous suite, toujours notée  $\tilde{\phi}_n$ ,  $\phi_n$  converge dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R})$  donc en particulier, comme  $\phi_n = \tilde{\phi}_n|_{[0, L]}$

$$\phi_n \longrightarrow \phi \quad \text{dans } L^2(0, L)$$

ce qui établit que  $E$  est à résolvante compacte.

Le spectre de  $E$  est donc purement ponctuel :

$$\begin{cases} \sigma(E) = \{ \nu_1(L), \nu_2(L), \dots, \nu_m(L), \dots \} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \nu_m(L) = +\infty \end{cases}$$

Remarquons que, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{cases} e(\phi, \phi) = \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ \leq \left( \int |\hat{\phi}(k)|^2 dk \right)^{1/2} \left( \int |k|^2 |\hat{\phi}(k)|^2 dk \right)^{1/2} \\ \leq \| \phi \| \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\| \end{cases}$$

D'où

$$\frac{e(\phi, \phi)}{\| \phi \|} \leq \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|$$

Et par conséquent, par le principe du Max-Min :

$$\nu_m(L) \leq \frac{m\pi}{L}$$

On peut également montrer (cf [16]) l'existence d'une constante  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0, \pi[$  telle que :

$$\nu_m(L) \geq \frac{\alpha m}{L}$$

D'autre part, par un très simple argument d'homogénéité, on démontre que  $\nu_m$  est proportionnel à  $\frac{1}{L}$ . Autrement dit :

$$\begin{aligned} \nu_m(L) &= \text{dps } \frac{\nu_m}{L} \\ \alpha m &\leq \nu_m \leq m\pi \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\left| \begin{array}{l} \forall \phi \in [w_1, w_2, \dots, w_m, \dots]^4 \\ b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq \left\{ 2(1-a)x^2 \frac{\nu_m}{\beta L} - C_\infty(x) \right\} \|\phi\|^2 \end{array} \right.$$

Par conséquent  $b_N(\omega, \beta; \phi, \phi) > 0$  dès que :

$$\beta L \leq 2\nu_m \frac{(1-a)x^2}{C_\infty(x)}$$

grâce au principe du Min-Max, nous déduisons le :

**Lemme 4.5 .**

Pour  $\beta^2 c_R^2 < \omega^2 < \beta^2 V_S^2$  et  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$ , on a :

$$\beta L < 2\nu_m \frac{(1-a)x^2}{C_\infty(x)} \implies \lambda_m^N(\omega, \beta) > 0$$

**Remarque 4.2 .**

Notons en particulier que comme  $\nu_1 > 0$ , nous avons en posant :

$$\beta_1^* = 2 \frac{\nu_1}{L} \min_{x \in [x_R, 1]} \left\{ \frac{(1-a)x^2}{C_\infty(x)} \right\} > 0$$

$$\beta < \beta_1^* \implies \lambda_m^N(\omega, \beta) > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Ceci exprime que même le premier seuil (la définition précise sera donnée au théorème 4.2) associé aux modes normaux est strictement positif.

Nous allons résumer la situation. Pour tout entier  $m$ , on a :

$$\lambda_m^N(\omega, \beta) < 0 \text{ pour } (\omega, \beta) \in R_m^{(1)} \cup R_m^{(2)}$$

$$R_m^{(1)} = \{ (\omega, \beta) / \omega^2 < \beta^2 c_R^2 \}$$

$$R_m^{(2)} = \left\{ (\omega, \beta) / \beta^2 c_R^2 \leq \omega^2 < \beta^2 V_S^2, \beta L < 2\nu_m \frac{(1-a)x^2}{C_\infty(x)} \right\}$$

$$\lambda_m^N(\omega, \beta) > 0 \text{ pour } (\omega, \beta) \in R_m^{(3)}$$

$$R_m^{(3)} = \{ (\omega, \beta) / \beta^2 c_R^2 \leq \omega^2 < \beta^2 V_S^2, \beta L > m S(a, x) \}$$

Nous donnons l'allure des régions  $R_m^{(1)}$ ,  $R_m^{(2)}$  et  $R_m^{(3)}$  sur le dessin de la figure 4.6 dans le plan  $(x, \beta L)$ .

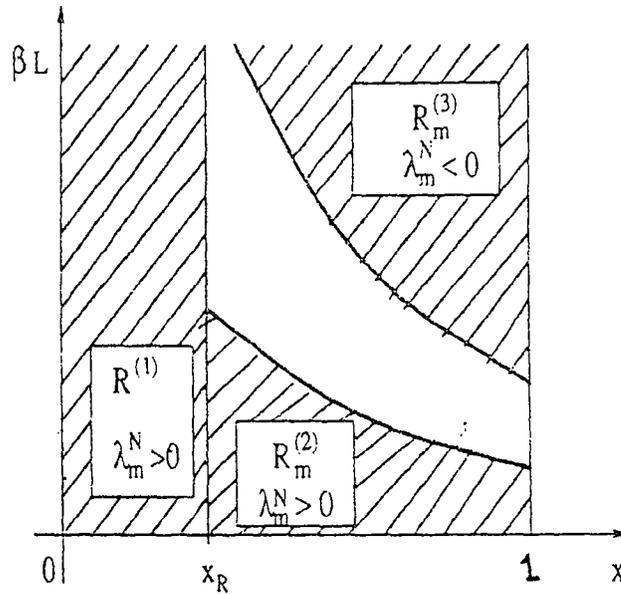


Figure 4.6 : Signe de la fonction  $\lambda_m^N(\omega, \beta)$

Nous introduisons maintenant deux nombres importants :

$$(4.24) \quad \begin{cases} s^*(a) = \min_{x \in ]x_R, 1]} S(a, x) \\ s_*(a) = \min_{x \in ]x_R, 1]} \frac{2(1-a)x^2}{C_\infty(x)} \end{cases}$$

Remarque 4.3 .

Sur la figure 4.6, nous avons fait comme si ce minimum était atteint en  $x = 1$ ; rien ne prouve que ce soit le cas même si, il semble que cela soit vrai au vu des calculs numériques

Nous pouvons d'ores et déjà énoncer le :

Lemme 4.6 .

(i). Pour  $\beta L \leq \nu_m^0 s_*(a)$ , l'équation  $\lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $[0, \beta V_S]$ .

(ii). Pour  $\beta L > \nu_m^0 s_*(a)$ , l'équation  $\lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$  a une unique solution  $\omega$  dans l'intervalle  $[\beta c_R, \beta V_S]$ , solution que nous noterons  $\omega = \omega_m^N(\beta)$ .

Démonstration .

(i) est évident et (ii) est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires, puis que, à  $\beta$  fixé, la fonction  $x \rightarrow \lambda_m^N(\omega, \beta)$  est continue et strictement décroissante pour  $x < 1$ .

□

Introduisons maintenant :

$$(4.25) \quad s^*(a, x) = \min_{y \in ]x_R, x]} S(a, y)$$

On définit ainsi pour  $x \in ]x_R, 1]$  une fonction monotone décroissante (au sens large) qui vérifie en outre, compte tenu du comportement de la fonction  $S(a, x)$  au voisinage de  $x = x_R$ , la propriété :

$$\exists x_s \in ]x_R, 1[ \quad s^*(a, x) = S(a, x) \quad \text{pour } x < x_s$$

La fonction  $s^*(a, x)$  étant monotone, nous pouvons définir sa fonction réciproque  $F(a, \cdot)$  en tant que fonction éventuellement discontinue.  $F(a, \cdot)$  est définie de façon unique si on ajoute que  $F(a, \cdot)$  est continue à droite. Il suffit de définir  $F(a, \beta L)$  par :

$$F(a, \beta L) = \inf \{ x \in ]x_R, 1] / s^*(a, x) = \beta L \}$$

(sachant que cet ensemble est soit un point soit un segment). Il est alors facile de voir que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta L \rightarrow F(a, \beta L) \quad \text{est décroissante} \\ \beta L \rightarrow F(a, \beta L) \quad \text{est continue à droite} \\ \beta L < s^*(a) \implies F(a, \beta L) = 1 \\ \lim_{\beta L \rightarrow +\infty} F(a, \beta L) = x_R \end{array} \right.$$

et même plus précisément :

$$(4.26) \quad F(a, \beta L) = x_R + \frac{s_R^2}{\beta^2 L^2} + o\left(\frac{1}{\beta^2 L^2}\right)$$

La figure 4.7 représente une illustration graphique de ces résultats.

Il est clair que, pour  $x > x_R$  :

$$x = \frac{\omega}{\beta V_S} > F\left(a, \frac{\beta L}{m}\right) \implies \lambda_m^N(\omega, \beta) < 0$$

Nous en déduisons bien sûr que si nous désignons, pour  $\beta L > m s^*(a)$ , par  $\omega_m^N(\beta)$  l'unique solution (cf. lemme 4.6) de l'équation  $\lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$ , alors :

$$x_R < \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta V_S} < F\left(a, \frac{\beta L}{m}\right)$$

Comme  $F\left(a, \frac{\beta L}{m}\right) \rightarrow x_R$  lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$ , nous en déduisons que :

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta} = c_R$$

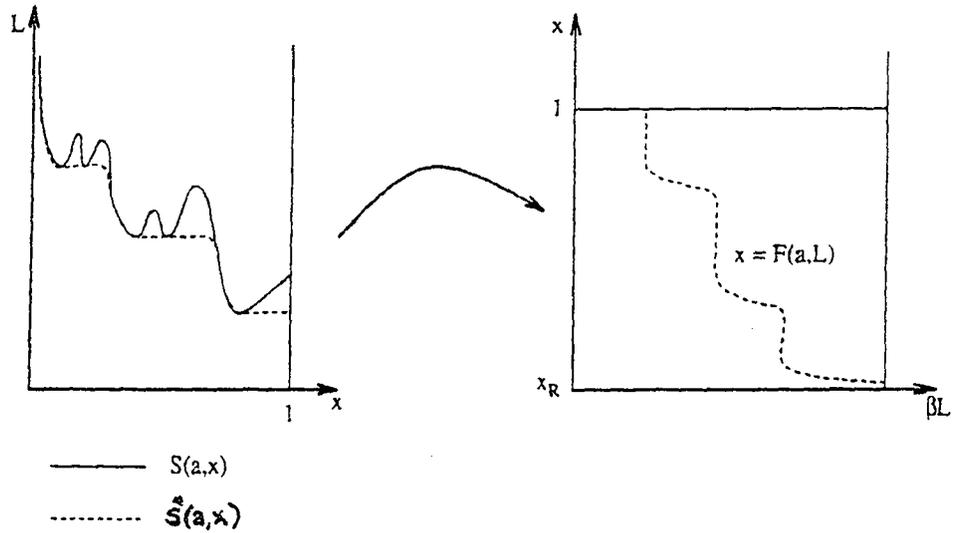


Figure 4.7 : Allure des fonctions  $S$ ,  $s^*$  et  $F$

Mieux, grâce au comportement de la fonction  $F(a, \cdot)$  au voisinage de  $+\infty$ , nous pouvons donner un encadrement de la vitesse de phase  $\frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta}$  lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$ . Nous énonçons le :

Lemme 4.7 .

Pour tout  $m \geq 1$ , la fonction  $\beta \rightarrow \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta}$  tend vers  $c_R$  lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$  et on a l'encadrement :

$$c_R < \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta} < c_R + m^2 \frac{s_R^2 V_S}{\beta^2 L^2} + o\left(\frac{m^2}{\beta^2 L^2}\right)$$

L'unicité de la solution de l'équation  $\lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$  a été obtenue grâce à la stricte monotonie de la fonction  $\omega \rightarrow \lambda_m^N(\omega, \beta)$ . Nous allons maintenant obtenir un nouveau résultat de stricte monotonie, cette fois par rapport à la variable  $\beta$ , qui va nous permettre de préciser certaines propriétés des fonctions  $\omega_m^N(\beta)$  que nous résumerons dans le théorème 4.2.

Attention, alors que le résultat de monotonie par rapport à  $\omega$  est un résultat général, valable également pour le cas d'une fissure ou d'un obstacle quelconque, le résultat que nous allons maintenant énoncer est à priori spécifique du cas de la fissure plane.

Lemme 4.8 .

Pour toute fonction  $\phi$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ , l'application,  $x$  étant fixé :

$$\beta \longrightarrow \frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} b(x\beta V_S, \beta; \phi, \phi)$$

est strictement décroissante.

**Démonstration .**

$x$  étant fixé, nous avons vu que si  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$  :

$$\frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} b(x\beta V_S, \beta; \phi, \phi) = \int G_R \left( x, \frac{k}{\beta} \right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk$$

Pour établir le résultat annoncé, il suffit donc d'étudier, à  $x$  fixé, la croissance de l'application  $y \longrightarrow G_R(x, y)$ ,  $y \geq 0$ . Nous avons la formule :

$$\left| \begin{aligned} G_R(x, y) &= \frac{4(1+y^2)(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{-1/2} - [2(1+y^2) - x^2]^2}{(1+y^2-ax^2)^{1/2}} \\ &= \Phi(a, x; 1+y^2) \end{aligned} \right.$$

où nous avons défini :

$$\Phi(a, x; r) = 4r(r-x^2)^{1/2} - (2r-x^2)^2(r-ax^2)^{-1/2}$$

Désignons par  $\Phi'(a, x; r)$  la dérivée de  $\Phi$  par rapport à  $r$ . Nous avons :

$$\left| \begin{aligned} \Phi'(a, x; r) &= 4(r-x^2)^{1/2} + 2r(r-x^2)^{-1/2} \\ &\quad - 4(2r-x^2)(r-ax^2)^{-1/2} + \frac{1}{2}(2r-x^2)^2(r-ax^2)^{-3/2} \end{aligned} \right.$$

Nous allons démontrer que :

$$\forall a \leq \frac{1}{2}, \forall x \leq 1, \forall r \geq 1 \quad \Phi'(a, x; r) < 0$$

Commençons par noter que :

$$\Phi'(a, x; r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} (a+1)x^2 r^{-1/2}$$

Donc pour tout  $(a, x)$ ,  $\Phi'(a, x; r) > 0$  pour  $r$  assez grand.

Observons maintenant les variations de  $\Phi'(a, x; r)$  par rapport à  $a$ ,  $r$  et  $x$  étant fixés. La monotonie de  $\Phi'(a, x; r)$  par rapport à  $a$  est la même que celle de la fonction :

$$Y \longrightarrow (2r - x^2)Y^3 - 8Y = \Psi(Y)$$

(il suffit de constater que  $Y(a) = (r - ax^2)^{-1/2}$  est une fonction croissante de  $a$ ). Or  $\Psi'(Y)$  s'annule si et seulement si  $Y$  est solution de l'équation :

$$3(2r - x^2)Y^2 = 8 \quad (\text{avec } Y = Y(a))$$

Comme  $Y = (r - ax^2)^{-1/2}$ , ceci nous mène à l'équation :

$$6r - 3x^2 = 8r - 8ax^2$$

C'est à dire à :

$$2r = (8a - 3)x^2$$

Mais cette égalité est impossible puisque :

$$\begin{cases} 2r \geq 2 \\ a \leq \frac{1}{2}, \quad x^2 \leq 1 \implies (8a - 3)x^2 \leq 1 \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction  $a \longrightarrow \Phi'(a, x; r)$  est monotone puisque :

$$\frac{\partial}{\partial a} (\Phi'(a, x; r)) = \frac{1}{2} \Psi'(Y(a)) Y'(a)$$

et que  $\Psi'(Y(a))$  et  $Y'(a)$  ont un signe constant. En fait, comme  $Y(a)$  varie dans l'intervalle  $[0, (1 - ax^2)^{-1/2}]$ , il suffit de regarder le signe de  $\Psi'(0)$ . Mais  $\Psi'(0) = -8 \implies \Psi'(Y(a)) < 0$  pour tout  $a$ . Finalement, nous avons démontré que :

$$\left| \begin{array}{l} \forall (x, r) \in [0, 1] \times [1, +\infty[, \text{ l'application :} \\ \\ a \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \Phi'(a, x; r) \\ \\ \text{est strictement décroissante} \end{array} \right.$$

Or pour  $a = \frac{1}{2}$ , l'expression de  $\Phi'$  se simplifie :

$$\Phi' \left( \frac{1}{2}, x; r \right) = 2(r - x^2)^{-1/2}(3r - 2x^2) - 6 \left( r - \frac{x^2}{2} \right)^{1/2}$$

Comme nous savons que  $\Phi'(a, x; r)$  est strictement positif lorsque  $r$  est grand, il suffit de montrer (par continuité par rapport à  $r$ ) que  $\Phi' \left( \frac{1}{2}, x; r \right)$  ne s'annule jamais lorsque  $r \in [1, +\infty[$  pour démontrer que  $\Phi'(a, x, r)$  est toujours strictement positif. Or

$$\begin{aligned} \Phi' \left( \frac{1}{2}, x; r \right) = 0 &\iff (3r - 2x^2)^2 = 9 \left( r - \frac{x^2}{2} \right)^2 (r - x^2) \\ &\iff -12rx^2 + 4x^4 = -\frac{27}{2}rx^2 + \frac{9}{2}x^4 \\ &\iff r = \frac{x^2}{3} \end{aligned}$$

ce qui est impossible pour  $(r, x) \in [1, +\infty[ \times [0, 1]$ . Donc :

$$\forall x \in [0, 1], \forall r \geq 0 \quad \Phi' \left( \frac{1}{2}, x; r \right) > 0$$

ce qui prouve la croissance de  $\Phi$  par rapport à  $r$  et par suite celle de  $G$  par rapport à  $y$ .  
Le lemme est donc établi. □

Grâce au principe du Min-Max, nous déduisons le :

**Lemme 4.9 .**

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ , la fonction  $\beta \longrightarrow \frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} \lambda_m^N(x\beta V_S, \beta)$  est décroissante au sens large.

En fait nous allons voir que nous pouvons obtenir un résultat de stricte décroissance.  
En effet, soit  $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ , nous avons en posant :

$$c(\beta; \phi, \phi) = \frac{2x^2}{\mu\beta} b(x\beta V_S, \beta; \phi, \phi)$$

$$\begin{aligned}
c(\beta_1; \phi, \phi) - c(\beta_2; \phi, \phi) &= \int \left\{ G_R \left( x, \frac{k}{\beta_1} \right) - G_R \left( x, \frac{k}{\beta_2} \right) \right\} |\phi(k)|^2 dk \\
&= \int \left( \int_{\frac{|k|}{\beta_2}}^{\frac{|k|}{\beta_1}} \frac{\partial G_R}{\partial y}(x, \xi) d\xi \right) |\phi(k)|^2 dk
\end{aligned}$$

Mais nous avons, en reprenant les notations de la démonstration du lemme 4.8,

$$\frac{\partial G_R}{\partial y}(x, \xi) = 2\xi \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a, x; 1 + \xi^2)$$

Mais nous avons vu que,  $(a, x)$  étant fixés :

$$\begin{cases} \Phi'(a, x; r) > 0 & \forall r \geq 1 \\ \Phi'(a, x; r) \sim \frac{(a+1)x^2}{r^{1/2}} & r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Il existe donc une constante  $C > 0$  telle que :

$$\Phi'(a, x; r) \geq Cr^{-1/2}$$

Par suite :

$$\forall \xi \geq 0 \quad \frac{\partial G_R}{\partial y}(x, \xi) \geq \frac{2C\xi}{(1 + \xi^2)^{1/2}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{|k|}{\beta_2}}^{\frac{|k|}{\beta_1}} \frac{\partial G_R}{\partial y}(x, \xi) d\xi &\geq C \int_{\frac{|k|}{\beta_2}}^{\frac{|k|}{\beta_1}} \frac{2\xi}{(1 + \xi^2)^{1/2}}(x, \xi) d\xi \\
&= 2C \left[ \left( 1 + \frac{|k|^2}{\beta_1^2} \right)^{1/2} - \left( 1 + \frac{|k|^2}{\beta_2^2} \right)^{1/2} \right] \\
&= 2C \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right) \frac{|k|^2}{\left( 1 + \frac{|k|^2}{\beta_1^2} \right)^{1/2} + \left( 1 + \frac{|k|^2}{\beta_2^2} \right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Mais notons que :

$$\left( 1 + \frac{|k|^2}{\beta^2} \right)^{1/2} \leq \max \left( 1, \frac{1}{\beta} \right) (1 + |k|^2)^{1/2}$$

Par conséquent, en posant :

$$C(\beta_1, \beta_2) = 2C \min(1, \beta_1) \min(1, \beta_2)$$

Nous obtenons la majoration :

$$\int_{\frac{|k|}{\beta_2}}^{\frac{|k|}{\beta_1}} \frac{\partial G_R}{\partial y}(x, \xi) d\xi \geq C(\beta_1, \beta_2) \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right) \frac{|k|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}}$$

De telle sorte que :

$$c(\beta_1; \phi, \phi) \geq c(\beta_2; \phi, \phi) + C(\beta_1, \beta_2) \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right) \int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk$$

Nous avons besoin à ce niveau d'un résultat d'analyse fonctionnelle donné par le :

**Lemme 4.10 .**

*Il existe une constante  $C(L)$  telle que :*

$$\forall \phi \in H_0^1(0, L) \quad \int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk \geq C(L) \|\phi\|^2$$

**Démonstration .**

Il existe sans doute une preuve à caractère abstrait à partir d'un argument de compacité.

Nous avons choisi une démonstration plus explicite. Notons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} (1 + |k|^2)^{1/2} &\leq 1 + |k|^2 \\ \Rightarrow \int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk &\geq \int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{1 + |k|^2} dk \end{aligned}$$

Soit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \widehat{A\phi}(k) = \frac{|k|^2}{1 + |k|^2} \hat{\phi}(k) \end{array} \right.$$

Nous avons simplement :

$$A \tilde{\phi} = - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2}$$

où  $\tilde{\psi}$  est l'unique solution dans  $H^2$  de

$$-\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \tilde{\psi} = \tilde{\phi}$$

Notons que  $A\tilde{\phi} = -\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} = \tilde{\phi} - \tilde{\psi}$ . Il vient :

$$\int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk = (A\tilde{\phi}, \tilde{\phi}) = \|\tilde{\phi}\|^2 - (\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$$

Soit encore comme :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(x) = \phi(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ \tilde{\phi}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(4.27) \quad \int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk = \|\phi\|^2 - \int_0^L \phi(x) \tilde{\psi}(x) dx$$

Mais nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(x) = \int_0^L G(x-y) \phi(y) dy \\ G(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \end{cases}$$

Par suite :

$$|\tilde{\psi}(x)|^2 \leq \left[ \int_0^L G(x-y) dy \right] \left[ \int_0^L G(x-y) \phi^2(y) dy \right]$$

Mais :

$$\int_0^L G(x-y) dy = \int_{x-L}^x G(\xi) d\xi$$

Posons alors :

$$C_L = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left( \int_{x-L}^x G(\xi) d\xi \right)$$

Nous obtenons :

$$\int |\tilde{\psi}(x)|^2 dx \leq C_L \int_0^L G(x-y) \phi^2(y) dy$$

D'où nous déduisons :

$$\int_0^L |\tilde{\psi}(x)|^2 dx \leq C_L \int_0^L \left( \int_0^L G(x-y) dx \right) \phi^2(y) dy$$

D'où :

$$\left( \int_0^L |\tilde{\psi}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_L \left( \int_0^L |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Dans notre cas, il est clair que :

$$\begin{aligned} C_L &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans (4.27), il vient :

$$\begin{aligned} \int \frac{|k|^2 |\phi(k)|^2}{(1 + |k|^2)^{1/2}} dk &\geq (1 - C_L) \\ &\geq e^{\frac{1}{2}} \|\phi\|^2 \end{aligned}$$

Ce qui établit le lemme avec  $C(L) = e^{\frac{1}{2}}$

□

#### Remarque 4.4 .

- En utilisant l'inégalité  $(1 + |k|^2)^{1/2} \leq 1 + |k|^2$ , nous n'avons pas modifié le résultat qualitativement mais simplement perdu au niveau de la constante  $C(L)$ . On peut en fait s'attendre à ce que la meilleure constante possible tende vers 0 quand  $L \rightarrow +\infty$  moins vite que  $e^{-L}$ . En fait on peut conjecturer que la meilleure constante  $C(L)$  vérifie  $C(L) \sim \frac{C}{L}$  ( $L \rightarrow +\infty$ ).
- Essentiellement, le point de la démonstration consiste à raffiner l'inégalité classique  $\|G * \phi\|_{L^2} \leq \|G\|_{L^1} \|\phi\|_{L^2}$  lorsque  $\phi$  est une fonction à support compact.

Grâce à ce lemme, nous obtenons :

$$\frac{c(\beta_1, \phi, \phi)}{\|\phi\|^2} \geq \frac{c(\beta_2, \phi, \phi)}{\|\phi\|^2} + C(L)C(\beta_1, \beta_2) \left( \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right)$$

D'où, par le principe du min-max :

$$\lambda_m^N(\beta_1) \geq \lambda_m^N(\beta_2) + C(L)C(\beta_1, \beta_2) \left( \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right)$$

Nous avons donc établi le :

**Théorème 4.1 .**

Pour tout entier  $m$ , et tout  $x$  fixé dans  $[x_R, 1]$ , la fonction

$$\beta \longrightarrow \frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} \lambda_m^N(x\beta V_S, \beta)$$

est strictement décroissante.

**Remarque 4.5 .**

Nous obtenons en outre une estimation de la dérivée en  $\beta$  de la fonction  $\frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} \lambda_m^N(x\beta V_S, \beta)$ .

En effet, posons  $\mu_m^N(x, \beta) = \frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} \lambda_m^N(x\beta V_S, \beta)$ , il vient :

$$\frac{\mu_m^N(x, \beta_1) - \mu_m^N(x, \beta_2)}{\beta_2 - \beta_1} \geq C(L)C(\beta_1, \beta_2) \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_1^2 \beta_2^2}$$

En passant à la limite lorsque  $\beta_2 \rightarrow \beta_1 (= \beta)$ , il vient :

$$\frac{d}{d\beta} \left( \mu_m^N(x, \beta) \right) \leq - \frac{2C(L)C(\beta, \beta)}{\beta^3}$$

Soit encore :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{d\beta} \left\{ \mu_m^N(x, \beta) \right\} \leq -2 \frac{CC(L)}{\beta} \quad \text{pour } \beta < 1 \\ \frac{d}{d\beta} \left\{ \mu_m^N(x, \beta) \right\} \leq -2 \frac{CC(L)}{\beta^3} \quad \text{pour } \beta \geq 1 \end{array} \right.$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre principal résultat, qui récapitulé les précédents :

**Théorème 4.2 .**

Pour tout entier  $m$ , il existe un réel strictement positif  $\beta_m^N$  ( $m^{\text{ème}}$  seuil) tel que :

(i). pour  $\beta < \beta_m^N$ , l'équation en  $\omega : \lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $[0, \beta V_S]$ .

(ii). Pour  $\beta \geq \beta_m^N$ , l'équation en  $\omega : \lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$  admet une solution et une seule dans l'intervalle  $[0, \beta V_S]$  :

$$\omega = \omega_m^N(\beta)$$

Pour tout  $m$ , la fonction  $\omega_m^N(\beta)$  a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \longrightarrow \omega_m^N(\beta) \text{ est continue} \\ \omega_m^N(\beta_m^N) = \beta_m^N V_S \\ \beta \longrightarrow \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta} \text{ est strictement décroissante} \\ \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta} = c_R \end{array} \right.$$

Enfin, la suite  $\beta_m^N$  a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \beta_1^N \leq \beta_2^N \leq \dots \leq \beta_m^N \leq \dots < +\infty \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} \beta_m^N = +\infty \\ C_1 m \leq \beta_m^N L \leq C_2 m \end{array} \right.$$

où  $C_1$  et  $C_2$  désignent deux constantes strictement positives.

**Démonstration .**

Pour tout  $m$ , considérons l'ensemble :

$$B_m = \{ \beta \in \mathbb{R}^+ / \exists \omega \in [0, \beta V_S[ / \lambda_m^N(\omega, \beta) = 0 \}$$

Nous savons déjà, d'après le lemme 4.6 que

$$[\nu_m^0 s_*(a), +\infty[ \subset B_m \subset [ms^*(a), +\infty[$$

Le fait que  $B_m$  soit un intervalle du type  $[\beta_m^N, +\infty[$  résulte du fait que la fonction

$$\beta \longrightarrow \mu_m^N(x, \beta) = \frac{2}{\mu} \frac{x^2}{\beta} \lambda_m^N(x\beta V_S, \beta)$$

est strictement décroissante,  $x$  variant dans l'intervalle  $[x_R, 1]$ . En effet:

$$\beta \in B_m \implies \exists x \in ]x_R, 1[ \text{ such that } \mu_m^N(x, \beta) = 0.$$

Par décroissance stricte de  $\mu_m^N$  en fonction de  $\beta$ , il vient :

$$\forall \beta' > \beta, \quad \mu_m^N(x, \beta') < 0$$

Mais  $\mu_m^N(x_R, \beta') > 0$ , donc il existe  $x'$  tel que :

$$x_R < x' < x \text{ et } \mu_m^N(x', \beta') = 0$$

ce qui prouve que  $\beta'$  appartient à  $B_m$ .

On montre du même coup que la fonction  $\beta \rightarrow \omega_m^N(\beta)$  ainsi définie est strictement décroissante. La continuité de cette fonction vient de la continuité de  $(\omega, \beta) \rightarrow \lambda_m^N(\omega, \beta)$ .

Ce sont les mêmes raisons qui entraînent que :

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_m^N} \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta} = \beta_m^N V'_S$$

En effet, posons  $x_m(\beta) = \frac{\omega_m(\beta)}{\beta V'_S}$  et

$$x_m^l = \lim_{\beta \rightarrow \beta_m^N} x_m(\beta)$$

Supposons  $x_m^l < 1$ , on se trouve alors nécessairement dans la situation illustrée par la figure 4.8 qui entrainerait  $\lambda_m^N(\omega, \beta) = 0$  pour tout  $\omega$  tel que  $x_m^l \beta V'_S < \omega < \beta V'_S$ , ce qui est bien sûr impossible puisque cette fonction décroît strictement avec  $\beta$ .

Le fait que  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\omega_m^N(\beta)}{\beta} = c_R$  a déjà été établi au lemme 4.7 et les propriétés de la suite des seuils  $(\beta_m^N)$  se déduisent directement du lemme 4.6

□

Nous allons maintenant caractériser les seuils  $\beta_m^N$  comme étant les zéros des valeurs propres d'un opérateur  $S_N(\beta)$ , autoadjoint à résolvante compacte. Plus précisément, considérons la forme bilinéaire continue sur  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  définie par :

$$(4.28) \quad s_N(\beta; \phi, \psi) = \int G_S \left( \frac{k}{\beta} \right) \phi(k) \bar{\psi}(k) dk$$

où la fonction  $G_S(y)$  est donnée par :

$$(4.29) \quad G_S(y) = \frac{4y(1+y^2)(1-\alpha+y^2)^{1/2} - (2y^2+1)^2}{(1-\alpha+y^2)^{1/2}}$$

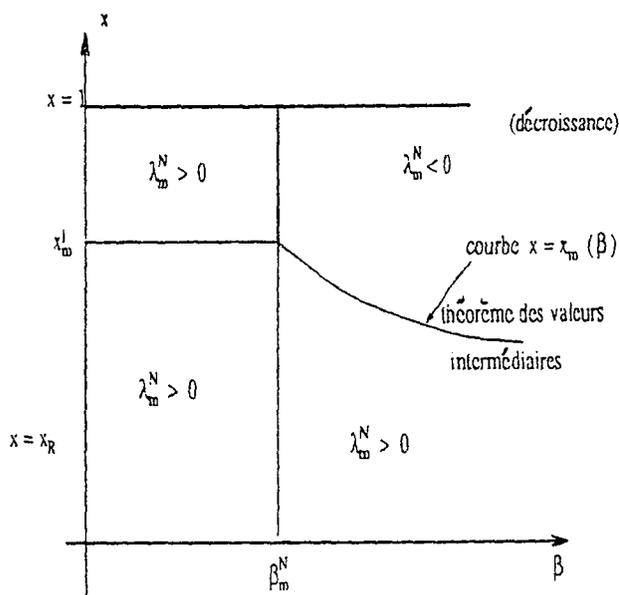


Figure 4.8 : Signe de  $\lambda_m^N$

Il est facile de montrer que  $s_N(\beta; \phi, \psi)$  définit un opérateur autoadjoint à résolvante compacte, soit  $S_N(\beta)$ , de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(S_N(\beta)) = H_0^1(\Gamma) \\ (S_N(\beta)\phi, \psi) = s_N(\beta; \phi, \psi) \quad \forall (\phi, \psi) \in H_0^1(\Gamma) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right.$$

Le spectre de  $S_N(\beta)$  est donc purement ponctuel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(S_N(\beta)) = \{s_j^N(\beta), 1 \leq j < +\infty\} \\ s_1^N(\beta) \leq s_2^N(\beta) \leq \dots \leq s_j^N(\beta) \leq \dots < +\infty \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m^N(\beta) = +\infty \end{array} \right.$$

En fait, il est facile de lire sur la formule (4.28) que la forme bilinéaire  $b_N(\omega, \beta; \dots)$  à priori définie pour  $0 \leq \omega \leq \beta V_S$  se prolonge par continuité au domaine fermé  $0 \leq \omega \leq \beta V_S$  et que par construction (en effet  $G_S(y) = G_R(1, y)$ ) :

$$s_N(\beta, ; \phi, \psi) = b_N(\beta V_S, \beta; \phi, \psi)$$

De façon équivalente, l'opérateur  $T_N(\omega, \beta)$  se prolonge par continuité sur la droite  $\omega = \beta V_S$  et  $T_N(\beta V_S, V_S) = S_N(\beta)$ . Nous allons établir le :

**Lemme 4.11 .**

Il existe deux fonctions continues strictement positives  $C_1(a)$  et  $C_2(a)$ ,  $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  telles que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad s_m^N(\beta) = 0 \iff \beta = \beta_m^*, \quad \frac{\nu_m}{L} C_1(a) < \beta_m^* < \frac{m}{L} C_2(a)$$

**Démonstration .**

Elle comporte plusieurs étapes :

- (i). Pour tout  $\phi$ , l'application  $\beta \longrightarrow s_N(\beta; \phi, \phi)$  est strictement décroissante. Ceci est une conséquence du fait que :

$$(4.30) \quad G_S(y) = G_R(1, y)$$

Nous avons démontré que l'application  $y \longrightarrow G_R(x, y)$  était croissante pour tout  $x$  dans  $[x_R, 1]$ , c'est donc en particulier le cas pour  $G_S(y)$ , d'où le résultat en vertu de (4.28). Cette propriété, jointe au principe du max-min permet d'établir que la fonction  $\beta \longrightarrow s_m^N(\beta)$  est, pour tout  $m$ , décroissante au sens large. On montre en fait, en reprenant la démonstration du théorème 4.1, que cette fonction est strictement décroissante.

- (ii).

$$s_m^N(\beta) < 0 \quad \text{pour} \quad \beta \geq \frac{m}{L} C_2(a)$$

Nous remarquons que  $G_S(0) = -\frac{1}{(1-a)^{1/2}} < 0$ . Mieux, au voisinage de  $y = 0$ , nous avons :

$$G_S(y) = -\frac{1}{(1-a)^2} + 4y + o(y^2)$$

Par ailleurs, au voisinage de  $+\infty$ , il vient :

$$G_S(y) \sim 2(1-a)y$$

Par conséquent, la fonction :

$$D_S(y) = \frac{1}{y} \left\{ G_S(y) + \frac{1}{(1-a)^2} \right\}$$

est une fonction continue de  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} D_S(0) & = 4 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} D_S(y) & = 2(1-a) \end{cases}$$

Nous posons :

$$(4.31) \quad C_S(a) = \max_{y \in \mathbb{R}} D_S(y)$$

Nous écrivons alors :

$$\begin{cases} s_N(\beta; \phi, \phi) = -\frac{1}{(1-a)^2} \int |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ \quad + \frac{1}{\beta} \int k D_S\left(\frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk \end{cases}$$

Par conséquent,

$$s_N(\beta; \phi, \phi) = -\frac{1}{(1-a)^2} \|\phi\|^2 + C_S(a) \|\phi\| \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|$$

Lorsque  $\phi$  appartient à l'espace  $V_m$  engendré par les  $m$  premières valeurs propres de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2}$  dans  $H_0^1(0, L)$ , nous avons donc :

$$s_N(\beta; \phi, \phi) \leq \left\{ -\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{m\pi}{\beta L} C_S(a) \right\} \|\phi\|^2$$

Par conséquent, par le principe du min-max,  $s_m^N(\beta) < 0$  dès que :

$$\beta L \geq m\pi(1-a)^2 C_S(a) = mC_2(a)$$

(iii).

$$s_m^N(\beta) \text{ pour } \beta < \frac{\nu_m}{L} C_1(a)$$

Nous écrivons maintenant que :

$$G_S(y) = 2(1-a)y + o\left(\frac{1}{y}\right) \quad y \longrightarrow +\infty$$

et que par conséquent :

$$G_S(y) = 2(1-a)y + D_S^\infty(y)$$

où  $D_S^\infty(y)$  tend vers 0 lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ . Nous posons alors :

$$(4.32) \quad C_S^\infty(a) = \max_{y \geq 0} |D_S^\infty(y)| > 0$$

Nous avons :

$$\left| \begin{aligned} s_N(\beta; \phi, \phi) &= 2 \frac{(1-a)}{\beta} \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\ &+ \int D_S^\infty\left(\frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

et par conséquent :

$$(4.33) \quad s_N(\beta; \phi, \phi) \geq -\frac{2(1-a)}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma} - C_S^\infty(a) \|\phi\|^2$$

Si  $W_{m-1}$  désigne le sous espace vectoriel de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  engendré par les  $(m-1)$  premières fonctions propres de l'opérateur  $E$ , nous déduisons de (4.33) que :

$$\forall \phi \in W_{m-1}^\perp \quad s_N(\beta; \phi, \phi) \geq \left( \frac{2(1-a)\nu_m}{\beta L} - C_S^\infty(a) \right) \|\phi\|^2$$

Donc, par le principe du max-min nous voyons que  $s_m^N(\beta) > 0$  dès que :

$$\beta L < \frac{2(1-a)}{C_S^\infty(a)} \nu_m = \nu_m C_1(a)$$

La conclusion de la démonstration résulte directement des points (i), (ii) et (iii) et du théorème des valeurs intermédiaires.

Les nombres  $\beta_m^*$  prennent tout leur intérêt grâce au :

### Théorème 4.3

$$\forall m \geq 1 \quad \beta_m^N = \beta_m^*$$

Démonstration .

Le résultat est intuitif et les difficultés de démonstration sont purement techniques. Commençons par remarquer que la fonction

$$\Phi(x, y) = \frac{G_R(x, y) - G_S(y)}{(1 + y^2)^{1/2}(1 - x^2)^{1/2}}$$

se prolonge "par continuité" sur la droite  $x = 1$  par

$$\Phi(1, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 4 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \Phi(x, y) = 2(1 - a)(x^2 - 1)$$

On en déduit que la fonction  $\Phi$  est bornée :

$$|\Phi(x, y)| \leq C \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$$

En conséquence, nous avons, pour tout  $\phi$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$

$$\left| \frac{2}{\mu\beta} b(\omega, \beta; \phi, \phi) - s_N(\beta; \phi, \phi) \right| \leq C \left( 1 - \frac{\omega^2}{\beta^2 V_S^2} \right)^{1/2} \int (1 + |k|^2)^{1/2} |\hat{\phi}(k)|^2 dk$$

Le principe du Min-Max nous fournit alors (nous omettons les détails) :

$$\left| \frac{2}{\mu\beta} \lambda_m^N(\omega, \beta) - s_m^N(\beta) \right| \leq C \left( 1 + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\beta^2 V_S^2} \right)^{1/2}$$

En particulier, pour tout  $\beta > \beta_m^N$  il vient, comme  $\lambda_m^N(\omega_m^N(\beta), \beta) = 0$  :

$$|s_m^N(\beta)| \leq C \left( 1 + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{\omega_m^N(\beta)^2}{\beta^2 V_S^2} \right)^{1/2}$$

Mais nous avons :

$$\lim_{\beta \searrow \beta_m^N} \left( 1 - \frac{\omega_m^N(\beta)^2}{\beta^2 V_S^2} \right)^{1/2} = 0$$

Par conséquent, par continuité de la fonction  $s_m^N(\beta)$  :

$$s_m^N(\beta) = 0$$

ce qui entraîne, compte tenu des propriétés de la fonction  $s_m^N(\beta)$ , que  $\beta_m^N = \beta_m^*$

□

### 4.3 Etude de l'opérateur tangentiel $T_T(\omega, \beta)$

Nous identifions dans ce paragraphe l'espace  $H_T$  à  $L^2(\Gamma)$  et désignons par  $\phi = (\phi_1, \phi_3)$  l'élément générique de  $L^2(\Gamma)^2$ .

Rappelons que, par définition,  $T_T(\omega, \beta)$  est l'opérateur autoadjoint dans  $L^2(\Gamma)^2$  défini par la forme bilinéaire :

$$(4.34) \quad \begin{cases} b_T(\omega, \beta; \phi, \psi) &= \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} \int \left( A(\omega, \beta; k) \hat{\phi}(k), \hat{\psi}(k) \right) dk \\ \left( T_T(\omega, \beta) \phi, \psi \right) &= b_T(\omega, \beta; \phi, \psi) \end{cases}$$

où  $A(\omega, \beta; k)$  désigne la matrice hermitienne  $2 \times 2$  définie par la formule (4.3). Rappelons que les directions propres de la matrice  $A(\omega, \beta; k)$  sont :

$$(4.35) \quad \begin{cases} e_{SH}(k, \beta) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} k \\ \beta \end{pmatrix} & \text{associé à } \lambda_{SH}(\omega, \beta; k) = \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} \frac{P_R(\omega, \beta; k)}{K_S(\omega, \beta; k)} \\ e_P(k, \beta) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ k \end{pmatrix} & \text{associé à } \lambda_P(\omega, \beta; k) = \frac{\mu V_S^2}{2 \omega^2} K_S(\omega, \beta; k) \end{cases}$$

Compte tenu des propriétés d'homogénéité de la matrice  $A(\omega, \beta; k)$ , nous pouvons écrire :

$$(4.36) \quad b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) = \frac{\mu \beta}{2 x^2} \int \left( A_R \left( x, \frac{k}{\beta} \right) \hat{\phi}(k), \hat{\phi}(k) \right) dk$$

où la matrice hermitienne  $A_R(x, y)$  est définie par :

$$(4.37) \quad A_R(x, y) = \begin{bmatrix} G_R^{(1)}(x, y) & C(x, y) \\ C(x, y) & G_R^{(3)}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$(4.38) \quad \begin{cases} G_R^{(1)}(x, y) = \frac{4y^2(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} - (2+2y^2-x^2)^2 - 3x^2 + 4(1+y^2)}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} \\ G_R^{(3)}(x, y) = \frac{4(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} - (2+2y^2-x^2)^2 + 4y^2(1+y^2) - 3x^2y^2}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} \\ C(x, y) = \frac{y(4(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} + 3x^2 - 4(1+y^2))}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} \end{cases}$$

Les valeurs propres de  $A_R(x, y)$  étant données par :

$$(4.39) \quad \begin{cases} G_P(x, y) = x^2(1+y^2-x^2)^{1/2} \\ G_{SH}(x, y) = \frac{4(1+y^2)(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} - (2+2y^2-x^2)^2}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} = \frac{F_R(x, y)}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} \end{cases}$$

Il est facile de voir que :

$$\begin{cases} G_P(x, y) \geq 0 & \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, +\infty[ \\ G_{SH}(x, y) \geq 0 & \forall y \in [0, +\infty[, \quad \text{pour } x \leq x_R \end{cases}$$

En particulier :

$$x \leq x_R \implies b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq 0 \quad \forall \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$$

Nous en déduisons le :

**Lemme 4.12 .**

Pour  $x = \frac{\omega}{\beta V_S} \leq x_R$ , on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \lambda_m^T(\omega, \beta) > 0$$

Nous allons maintenant établir l'équivalent du lemme 4.3, c'est à dire déterminer une région du plan  $(x = \frac{\omega}{\beta V_S}, \beta)$  dans laquelle on peut affirmer que la fonction  $\lambda_m^T(\omega, \beta)$  est strictement négative. A nouveau, nous allons utiliser de façon essentielle le principe du max-min. La situation ici est légèrement plus compliquée que pour le cas de l'opérateur  $T_N(\omega, \beta)$  car on travaille avec des champs tests vectoriels. Or, ici, nous allons voir que les deux composantes du champ  $\phi$  ne jouent pas le même rôle. Dans le cas de l'opérateur  $T_N(\omega, \beta)$ , nous avons pu montrer que la fonction  $\lambda_m^N(\omega, \beta)$  devenait négative pour  $\beta$  assez grand en mettant à profil le comportement de la fonction  $G_R(x, y)$  au voisinage de  $y = 0$ . Le point essentiel était que  $G_R(x, 0) < 0$  pour  $x_R < x \leq 1$ . Ici c'est également le comportement au voisinage de  $y = 0$  de la matrice  $A_R(x, y)$  qui va être déterminant. Or nous avons :

$$\begin{cases} G_R^{(1)}(x, 0) = 0 \\ G_R^{(3)}(x, 0) = \frac{R(x)}{(1-x)^{1/2}} < 0 \quad \text{pour } x_R < x < 1 \end{cases}$$

Pour rendre  $b(\omega, \beta; \phi, \phi)$  négatif, il est naturel de travailler avec des champs tests de la forme :

$$(4.40) \quad \phi = (0, \phi_3) \quad \phi_3 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

pour lesquels seule la fonction  $G_R^{(3)}$  intervient :

$$(4.41) \quad b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) = \frac{\mu \beta}{2 x^2} \int G_R^{(3)}\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\phi_3(k)|^2 dk$$

avec

$$G_R^{(3)}(x, y) = \frac{4(1+y^2-x^2)^{1/2}(1+y^2-ax^2)^{1/2} - (2+2y^2-x^2)^2 + 4y^2(1+y^2) - 3x^2y^2}{(1+y^2-x^2)^{1/2}}$$

La propriété importante de la fonction  $G_R^{(3)}$  vient donc de son comportement au voisinage de  $y = 0$  qui est analogue à celui de  $G_R(x, y)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} G_R^{(3)}(x, 0) = \frac{R(x)}{(1-x^2)^{1/2}} \\ G_R^{(3)}(x, y) = G_R^{(3)}(x, 0) + C_0^{(3)}(x)y^2 + O(y^4) \\ C_0^{(3)}(x) = C_0(x) - \{4(1-x^2)^{1/2}(1-ax^2)^{1/2} - 4 + 3x^2\} \end{array} \right.$$

Introduisons la fonction :

$$(4.42) \quad C^{(3)}(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{G_R^{(3)}(x, y) - G_R^{(3)}(x, 0)}{y^2} \right|$$

Elle satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{(3)}(x) < +\infty \quad \forall x < 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} C^{(3)}(x) = +\infty \end{array} \right.$$

Cette dernière propriété vient du fait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{(3)}(x) \geq C_0^{(3)}(x) \sim -\frac{1}{2}R'(x)(1-a)^{-1/2} \quad x \rightarrow 1 \\ \sim (1-x^2)^{-1/2} \quad x \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

En fait, on peut voir qu'il existe une constante  $C^{(3)}$  positive telle que :

$$(4.43) \quad C^{(3)}(x) \leq C^{(3)}(1-x^2)^{-1/2}$$

En effet, il suffit de voir que l'application :

$$(x, y) \longrightarrow (1 - x^2)^{1/2} \frac{G_R^{(1)}(x, y) - G_R^{(1)}(x, 0)}{y^2}$$

est de classe  $C^1$  pour  $(x, y) \in [0, 1] \times [1, +\infty[$  et qu'elle est bornée lorsque  $y \rightarrow +\infty$  uniformément par rapport à  $x$ . Quoiqu'il en soit, nous pouvons énoncer le :

**Lemme 4.13 .**

Pour  $\beta^2 c_R^2 < \omega^2 < \beta^2 V_S^2$ , alors, si  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$

$$\beta L > m\pi(1 - x^2)^{1/4} \left| \frac{C^{(3)}(x)}{R(x)} \right|^{1/2} \implies \lambda_m^{(T)}(\omega, \beta) < 0$$

**Démonstration .**

Il suffit en fait de se rapporter à la démonstration du lemme 4.2.

□

Notons que si nous posons :

$$(4.44) \quad B(x) = \pi(1 - x^2)^{1/4} \left| \frac{C^{(3)}(x)}{R(x)} \right|^{1/2} \quad x \in ]x_R, 1[$$

alors, du fait de (4.43), on a :

$$\begin{cases} B(x) \geq B_* > 0 & \forall x \in ]x_R, 1[ \\ B(x) \longrightarrow +\infty & x \longrightarrow x_R \end{cases}$$

Nous pouvons donner l'allure de la région :

$$\{(x, \beta) / \beta L > m B(x)\}$$

sur la figure 4.9

Avant de passer à l'étude des régions où les fonctions  $\lambda_m^{(T)}$  sont positives, ce qui nous permettra de minorer les seuils d'apparition des modes guidés correspondants, nous allons

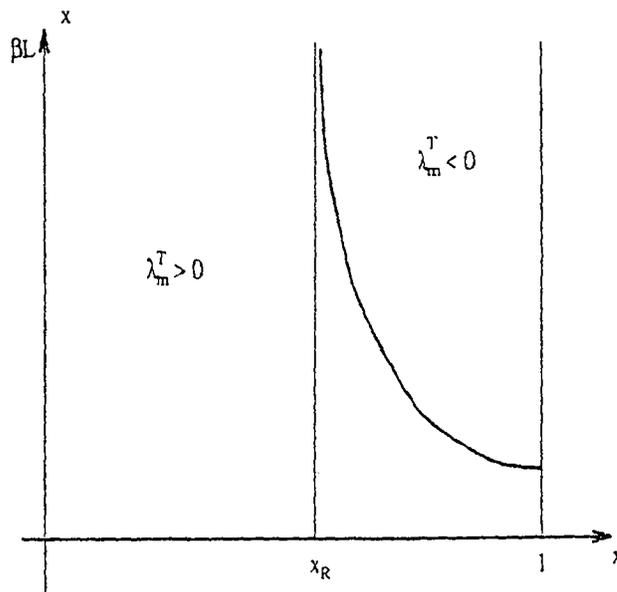


Figure 4.9 : Signe de  $\lambda_m^T$

nous intéresser plus particulièrement à la première valeur propre  $\lambda_1^T(\omega, \beta)$ . Cette valeur propre joue un rôle particulier car nous allons voir qu'elle change de signe en fonction de  $\omega$  pour toutes les valeurs de  $\beta$  donc en particulier lorsque  $\beta \rightarrow 0$ . Cela se traduira en pratique par l'existence d'un mode guidé sans fréquence de coupure (i.e. par la nullité du premier seuil). En outre, en établissant cette propriété, nous allons être capable de préciser le comportement de la courbe de dispersion associée à ce mode au voisinage de  $\beta = 0$ , c'est à dire au voisinage des basses fréquences. Notre premier résultat dans cette direction est donné par le :

**Lemme 4.14** .

Il existe une fonction  $F_*(\beta) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$(i). F_*(\beta) \sim \frac{A_*}{\beta^2 L^2} \exp -\frac{\alpha}{\beta^2 L^2} \quad \beta \rightarrow 0$$

où  $\alpha$  est donné par :

$$\alpha = 4 \min_{\phi \in H_{00}^{1/2}(0,1)} \frac{|\phi|_{\frac{1}{2}}^2}{|\int \phi(x) dx|^2}$$

(ii).  $1 - F_*(\beta) > x_R \quad \forall \beta > 0$

telle que :

$$1 - F_*(\beta) \leq x = \frac{\omega}{\beta V_S} \leq 1 \implies \lambda_1^N(\omega, \beta) < 0$$

**Démonstration .**

Nous travaillons toujours avec des champs tests de la forme :

$$\phi = (0, \phi_3) \quad \phi_3 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

Nous poserons  $\phi_3 = \phi$ , pour ne pas surcharger les notations (dans cette démonstration, la fonction  $\phi$  est donc exceptionnellement scalaire).

Nous notons que :

(4.45)

$$\begin{cases} G_R^{(3)}(x, y) = \frac{\Psi(x, y)}{(1 - x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \Psi(x, y) = 4(1 + y^2 - x^2)^{1/2}(1 + y^2 - ax^2)^{1/2} - (2 + 2y^2 - x^2)^2 + 4y^2(1 + y^2) - 3x^2y^2 \end{cases}$$

$\Psi(x, y)$  est une fonction continue sur  $[0, 1] \times [0, +\infty[$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1] \times [0, +\infty[ \setminus \{(1, 0)\}$  et qui vérifie en outre :

$$\begin{cases} \Psi(x, 0) = R(x) & (< 0 \text{ pour } x < x_R) \\ \Psi(x, y) \sim x^2y^2 & y \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

En fait, nous pouvons écrire :

$$(4.46) \quad \begin{cases} G_R^{(3)}(x, y) = 4(1 + y^2 - ax^2)^{1/2} + \frac{X(x, y)}{(1 - x^2 + y^2)^{1/2}} \\ X(x, y) = -(2 - x^2)^2 + y^2(x^2 - 4) \end{cases}$$

Cette fois  $X(x, y)$  est bien entendu de classe  $C^\infty$  et de plus :

$$X(x, 0) = -(2 - x^2)^2 < 0$$

ce qui entraîne, et c'est le point essentiel que :

$$(4.47) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} G_R^{(3)}(x, y) = -\infty$$

Nous utilisons (4.46) pour écrire :

$$\left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\mu\beta} x^2 b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) &= -(2 - x^2)^2 \int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk \\ &+ \int \left\{ 4 \left(1 - ax^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2} + \frac{k^2(x^2 - 4)}{\beta^2 \left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} \right\} |\phi(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

Comme  $x^2 - 4 < 0$ , nous avons :

$$\left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\mu\beta} x^2 b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) &\leq -(2 - x^2)^2 \int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk \\ &+ 4 \int \left(1 - ax^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2} |\phi(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

Comme  $\left(1 - ax^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \leq (1 - ax^2)^{1/2} + \frac{|k|}{\beta}$ , il vient :

$$(4.48) \quad \left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\mu\beta} x^2 b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) &\leq -(2 - x^2)^2 \int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk \\ &+ 4(1 - ax^2)^{1/2} \|\phi\|^2 + \frac{4}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \end{aligned} \right.$$

Occupons nous de la première intégrale. Par le changement de variable  $k = \beta y$  nous obtenons :

$$\int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk = \beta \int \frac{|\phi(\beta y)|^2}{(1 - x^2 + y^2)^{1/2}} dy$$

Pour étudier le comportement de cette dernière intégrale, nous écrivons :

$$(4.49) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\phi(\beta y)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy = \int_{-y^*}^{y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy + \int_{|y|>y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy$$

$y^*$  étant un paramètre strictement positif. Mais :

$$(4.50) \quad \left| \int_{|y|>y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy \leq [1-x^2+(y^*)^2]^{-1/2} \int_{|y|>y^*} |\phi(\beta y)|^2 dy \right. \\ \left. \leq \frac{1}{(1-x^2+(y^*)^2)^{1/2}} \int |\phi(\beta y)|^2 dy \right.$$

Par ailleurs :

$$\left| \int_{-y^*}^{y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy = |\phi(0)|^2 \int_{-y^*}^{y^*} \frac{dy}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} \right. \\ \left. + \int_{-y^*}^{y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2 - |\phi(0)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy \right.$$

D'autre part :

$$\left| \begin{aligned} \phi(\beta y) - \phi(0) &= \int_0^{\beta y} \phi'(\xi) d\xi \\ \left| |\phi(\beta y)| - |\phi(0)| \right| &\leq \beta y \sup_{k \in \mathbb{R}} |\phi'(k)| \\ &\leq \beta y \left[ \int_{\Gamma} x |\phi(x)| dx \right] \end{aligned} \right.$$

Donc

$$|\phi(\beta y)|^2 - |\phi(0)|^2 \leq \beta y \|x\phi\|_{L^1} (2|\phi(0)| + \beta y \|x\phi\|_{L^1})$$

Par conséquent, comme  $y \leq (1-x^2+y^2)^{1/2}$

$$\int_{-y^*}^{y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2 - |\phi(0)|^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} dy \leq 2\beta |\phi(0)| \|x\phi\|_{L^1} + \beta^2 y^* \|x\phi\|_{L^1}^2$$

Enfin, en posant  $1-x^2 = \varepsilon^2$  et  $y = t\varepsilon$ , il vient :

$$\int_{-y^*}^{y^*} \frac{dy}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} = 2 \int_0^{y^*} \frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}} = 2 \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{\varepsilon} \right)$$

Nous avons donc le résultat :

$$(4.51) \quad \left| \int_{-y^*}^{y^*} \frac{|\phi(\beta y)|^2 dy}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} + 2|\phi(0)|^2 \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) \right| \\ \leq 2\beta|\phi(0)| \|\phi\|_{L^1} + \beta^2 y^* \|\phi\|_{L^2}^2$$

Et par conséquent, compte tenu de (4.50) :

$$(4.52) \quad \left| \int \frac{|\phi(\beta y)|^2 dy}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} - 2|\phi(0)|^2 \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) \right| \\ \leq \frac{\|\phi\|^2}{(1-x^2+(y^*)^2)^{1/2}} + 2\beta|\phi(0)| \|\phi\|_{L^1} + \beta^2 y^* \|\phi\|_{L^2}^2 \\ = 2C(x, \beta, y^*, \phi) \quad (\text{par définition})$$

De (4.48) et (4.52), nous déduisons :

$$(4.53) \quad \left| \frac{2x^2}{\mu\beta} b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \leq -2\beta(2-x^2)^2 |\phi(0)|^2 \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) \right. \\ \left. + 2\beta(2-x^2)^2 C(x, \beta, y^*, \phi) \right. \\ \left. + 4(1-ax^2)^{1/2} \|\phi\|^2 + \frac{4}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \right.$$

Par conséquent,  $b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) < 0$  dès que :

$$\operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) \geq \frac{\theta(x, \beta, y^*, \phi)}{\beta|\phi(0)|^2}$$

$$\theta(x, \beta, y^*, \phi) = C(x, \beta, y^*, \phi) + \frac{1}{2(2-x^2)^2} \left\{ (1-ax^2)^{1/2} \|\phi\|^2 + \frac{4}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \right\}$$

Nous pouvons obtenir aisément une majoration de  $\theta(x, \beta, y^*, \phi)$  uniforme par rapport à  $x$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x, \beta, y^*, \phi) \leq \theta^*(\beta, y^*, \phi) \\ \theta^*(\beta, y^*, \phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\|\phi\|^2}{y^*} + \beta^2 y^* \|x\phi\|_{L^1}^2 + 2\beta |\phi(0)| \|x\phi\|_{L^1} \right) \\ \quad + \frac{1}{2} (1 - ax_R^2)^{1/2} \|\phi\|^2 + \frac{2}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \end{array} \right.$$

Nous choisissons maintenant  $y^*$  de façon à rendre  $\theta^*(\beta, y^*, \phi)$  minimum :

$$y^* = \frac{1}{\beta} \frac{\|\phi\|}{\|x\phi\|_{L^1}} = y^*(\beta, \phi)$$

auquel cas on a :

$$\left. \begin{array}{l} \theta^*(\beta, y^*(\beta, \phi), \phi) = \theta^*(\beta, \phi) \quad (\text{par définition}) \\ \\ = \beta \|\phi\| \|x\phi\|_{L^1} + \beta |\phi(0)| \|x\phi\|_{L^1} \\ \\ + \frac{1}{2} (1 - ax_R^2) \|\phi\|^2 + \frac{2}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 \end{array} \right\}$$

Nous savons que  $b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) < 0$  dès que :

$$\text{Argsh} \left( \frac{y^*(\beta, \phi)}{(1 - x^2)^{1/2}} \right) \geq \frac{\theta^*(\beta, \phi)}{\beta |\phi(0)|^2}$$

Ce qui équivaut à :

$$(1 - x^2)^{1/2} \leq \frac{y^*(\beta, \phi)}{\text{sh} \left( \frac{\theta^*(\beta, \phi)}{\beta |\phi(0)|^2} \right)}$$

Soit encore à :

$$(4.54) \quad x \geq 1 - F_*(\beta, \phi)$$

Un rapide calcul montre que, lorsque  $\beta \rightarrow 0$  :

$$(4.55) \quad F_*(\beta, \phi) \sim 2y^*(\beta, \phi)^2 \exp - \left[ \frac{2}{\beta^2} \left( \frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}}{|\phi(0)|} \right)^2 \right]$$

Il nous reste à choisir  $\phi$  de façon à rendre  $F_*(\beta, \phi)$  maximum au voisinage de  $\beta = 0$ .  
 Pour cela, observons que :

$$\alpha(L) = \inf_{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)} \frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2}{|\int_{\Gamma} \phi(x) dx|^2} > 0$$

En effet :

$$\frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2}{|\int_{\Gamma} \phi(x) dx|^2} = \frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2}{\|\phi\|^2} \cdot \frac{\|\phi\|^2}{|\int_{\Gamma} \phi(x) dx|^2}$$

Or

$$\frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2}{\|\phi\|^2} \geq \frac{\nu_1}{L} \text{ avec } \nu_1 > 0 \text{ (cf section 4.2)}$$

D'autres part, par Cauchy-Schwartz :

$$\left( \int_0^L \phi(x) dx \right)^2 \leq L \|\phi\|^2$$

De telle sorte que :

$$\alpha(L) \geq \frac{\nu_1}{L^2}$$

En fait, par un argument d'homogénéité il est clair que :

$$\begin{cases} \alpha(L) = \frac{\alpha}{L^2} \\ \alpha = 4 \inf_{\phi \in H_{00}^{1/2}(0,1)} \frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}}{|\int_0^1 \phi(x) dx|^2} \end{cases}$$

En fait, cet inf est un minimum. En effet, toujours par homogénéité, il est clair que :

$$\inf_{\phi \in H_{00}^{1/2}(0,1)} \frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}}{|\int_0^1 \phi(x) dx|^2} = \inf_{\phi \in H_0} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}$$

où nous avons posé :

$$H_0 = \left\{ \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma) / \int_0^1 \phi(x) dx = 1 \right\}$$

Or  $H_0$  est un hyperplan fermé de  $H_{00}^{1/2}(0, 1)$  et l'application  $\phi \longrightarrow |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2$  est strictement convexe. Le minimum de cet application est donc atteint en un unique point de  $H_0$ , soit  $\phi_0$ . Nous choisissons maintenant  $\phi(x) = \phi_0\left(\frac{x}{L}\right)$ , nous avons :

$$\frac{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2}{\left|\int_0^1 \phi(x) dx\right|^2} = \frac{\alpha}{L^2}$$

Nous obtenons alors le résultat annoncé avec :

$$A_* = 2 \frac{\int_0^1 \phi_0(x)^2 dx}{\left(\int_0^1 x \phi_0(x) dx\right)^2}$$

□

Ce résultat nous permet d'affirmer, via le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation  $\lambda_1^T(\omega, \beta) = 0$  admet, pour toute valeur de  $\beta$ , une solution unique  $\omega_1(\beta)$  et qu'en outre cette solution vérifie :

$$(4.56) \quad \frac{\omega_1(\beta)}{\beta} > V_S(1 - F_*(\beta))$$

ce qui nous fournit une majoration de  $\frac{\omega_1(\beta)}{\beta}$ .

Nous allons maintenant obtenir un résultat qui va nous donner une majoration, assez fine, de  $\frac{\omega_1(\beta)}{\beta}$ . Ce résultat est le suivant :

**Lemme 4.15**

*Il existe une fonction  $F^*(\beta) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :*

$$(i). \quad F^*(\beta) \sim \frac{A^*}{\beta^2 L^2} \exp -\frac{\alpha q(a)}{\beta^2 L^2} \quad \beta \longrightarrow 0$$

*où  $A^*$  est une constante adimensionnelle et  $q(a) < 1$*

$$(ii). \quad F^*(\beta) \leq 1 - x_R \quad \forall \beta > 0$$

*telle que :*

$$x_R < x = \frac{\omega}{\beta V_S} < 1 - F^*(\beta) \implies \lambda_1^T(\omega, \beta) > 0$$

Démonstration .

Nous travaillons cette fois à nouveau avec des fonctions tests  $\phi$  vectorielles, c'est à dire de la forme  $(\phi_1, \phi_3) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$ . Nous posons maintenant :

$$(4.57) \quad G_R^-(x, y) = \min \left( G_P(x, y), G_{SH}(x, y) \right)$$

Nous avons évidemment :

$$b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi)$$

où nous avons posé :

$$(4.58) \quad \frac{2x^2}{\mu\beta} b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) = \int G_R^-\left(x, \frac{x}{\beta}\right) |\phi(k)|^2 dk$$

L'étude des fonctions  $G_P(x, y)$  et  $G_{SH}(x, y)$  permet de démontrer que :

$$\begin{cases} G_R^-(x, y) = G_{SH}(x, y) & \text{pour } 1 + y^2 \leq x^2 \left( \frac{6 - 16a}{8 - 16a} \right) \\ G_R^-(x, y) = G_P(x, y) & \text{pour } 1 + y^2 \geq x^2 \left( \frac{6 - 16a}{8 - 16a} \right) \end{cases}$$

Compte tenu des formules (4.39), nous pouvons écrire :

$$(4.59) \quad G_R^-(x, y) = \frac{F_R^-(x, y)}{(1 - x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$(4.60) \quad \begin{cases} F_R^-(x, y) = F_R(x, y) & \text{pour } 1 + y^2 \leq x^2 \left( \frac{6 - 16a}{8 - 16a} \right) \\ F_R^-(x, y) = x^2(1 - x^2 + y^2) & \text{pour } 1 + y^2 \geq x^2 \left( \frac{6 - 16a}{8 - 16a} \right) \end{cases}$$

Nous avons démontré (lemme 4.8) que pour  $x \geq x_R$ , la fonction  $y \rightarrow G_R(x, y) = F_R(x, y)(1 - x^2 + y^2)^{-1/2}$  est croissante. Par suite, il est clair que les fonctions :

$$\begin{cases} y \longrightarrow x^2(1 - x^2 + y^2) \\ y \longrightarrow F_R(x, y) \end{cases}$$

sont croissantes, il en est de même pour  $F_R^-(x, y)$ . Par ailleurs comme  $F_R^-(x, y) = F_R^-(x, 0) = R(x)$ , nous pouvons écrire :

$$(4.61) \quad F_R^-(x, y) = R(x) + \Gamma(x, y)$$

où la fonction  $\Gamma(x, y)$  est positive, croissante par rapport à  $y$ , continue et identiquement nulle en  $x = 0$ .

Quoi qu'il en soit, nous pouvons écrire :

$$\left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\mu\beta} b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi) &= R(x) \int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk \\ &+ \int \frac{\Gamma\left(x, \frac{k}{\beta}\right)}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} |\phi(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

ce qui fait apparaître  $\frac{2x^2}{\mu\beta} b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi)$  comme la somme de deux termes, le premier étant négatif et le second étant positif. Pour des raisons purement techniques, nous ne travaillerons pas directement avec cette écriture. Nous utiliserons en fait une décomposition un peu différente en écrivant, à l'aide d'un paramètre  $\rho > 0$  :

$$R(x) = r(x) - \rho + \rho$$

Et par suite :

$$\begin{aligned}
 (4.62) \quad \left. \begin{aligned}
 \frac{2x^2}{\mu\beta} b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi) &= [R(x) - \rho] \int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk \\
 &+ \int \frac{\rho + \Gamma\left(x, \frac{k}{\beta}\right)}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} |\phi(k)|^2 dk \\
 &= I_1 + I_2
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

où  $I_1$  est négatif et  $I_2$  est positif. Pour obtenir un résultat de positivité de  $b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi)$ , il nous faut minorer  $I_2$  et majorer  $|I_1|$ .

La fonction  $y \rightarrow \rho + \Gamma(x, y)$  vérifiant :

$$\left. \begin{aligned}
 \rho + \Gamma(x, y) &\sim x^2 y^2 & y \rightarrow +\infty \\
 \rho + \Gamma(x, y) &\geq \rho & \forall y > 0
 \end{aligned} \right\}$$

La fonction  $y \rightarrow K_\rho(x, y) = \frac{\rho + \Gamma(x, y)}{y(1 - x^2 + y^2)^{1/2}}$  satisfait :

$$\left. \begin{aligned}
 K_\rho(x, y) &\sim \frac{\rho}{(1 - x^2)^{1/2} y} & \forall y > 0 \\
 K_\rho(x, y) &\rightarrow x^2 & y \rightarrow +\infty
 \end{aligned} \right\}$$

Par conséquent, comme  $\Gamma(x, y)$  ne s'annule jamais :

$$(4.63) \quad C_\rho(x) = \min_{y=0} K_\rho(x, y) > 0$$

Remarquons que comme  $\Gamma(x, y)$  vérifie :

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma(x, y) &\sim C_0(x) y^2 & y \rightarrow 0 \\
 \Gamma(x, y) &\sim 2(1 - a) x^2 y^2 & y \rightarrow +\infty
 \end{aligned} \right\}$$

Nous pouvons introduire :

$$(4.64) \quad \gamma = \min_{x \in [x_{K,1}], y > 0} \frac{\Gamma(x, y)}{y^2} > 0$$

de telle sorte que :

$$K_\rho(x, y) \geq \frac{\rho + \gamma y^2}{y(1 + y^2)^{1/2}}$$

Et par conséquent :

$$(4.65) \quad C_\rho(x) > \min_{y > 0} \frac{\rho + \gamma y^2}{y(1 + y^2)^{1/2}}$$

Or un rapide calcul montre que :

$$(4.66) \quad f(\rho) = \min_{y > 0} \left( \frac{\rho + \gamma(x)y^2}{y(1 + y^2)^{1/2}} \right) = \begin{cases} 2[\rho(\gamma - \rho)]^{1/2} & \text{pour } \rho \leq \gamma^2 \\ \gamma & \text{pour } \rho \geq \gamma^2 \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$(4.67) \quad C_\rho(x) \geq f(\rho)$$

Quoi qu'il en soit, nous avons :

$$\frac{\Gamma\left(x, \frac{k}{\beta}\right) + \rho}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} \geq C_\rho(x) \frac{|k|}{\beta}$$

Par conséquent nous avons :

$$(4.68) \quad I_2 \geq \frac{C_\rho(x)}{\beta} \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk = \frac{C_\rho(x)}{\beta} |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2$$

Par ailleurs, comme  $\rho + |R(x)| \leq \rho + |R(1)| = \rho + 1$  :

$$(4.69) \quad |I_1| \leq (1 + \rho) \int \frac{|\phi(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} dk$$

Nous utilisons maintenant une estimation déjà obtenue dans la démonstration du lemme précédent (voir équation (4.52)) :

$$\int \frac{|\phi(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{k^2}{\beta^2})^{1/2}} dk \leq \beta \left\{ 2|\phi(0)|^2 \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) + 2C(x, \beta, y^*, \phi) \right\}$$

Par conséquent on a le résultat de positivité de  $b(\omega, \beta; \phi, \phi) = I_1 + I_2$  dès que :

$$(4.70) \quad 2 \frac{|\phi(0)|^2}{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2} \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) + \frac{2C(x, \beta, y^*, \phi)}{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2} \leq \frac{C_o(x)}{\beta^2(\rho + 1)}$$

Posons alors :

$$(4.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(L) = \sup_{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2} \frac{|\int_0^L \phi(x) dx|^2}{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2} = \alpha(L)^{-1} \\ M_1(L) = \sup_{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2} \frac{\|\phi\|^2}{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2} \\ M_2(L) = \sup_{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2} \frac{|\int_0^L \phi(x) dx| \int_0^L x |\phi(x)| dx}{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2} \\ M_3(L) = \sup_{\phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2} \frac{\int_0^L x |\phi(x)|^2 dx}{|\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2} \end{array} \right.$$

Comme  $C$  est donné par :

$$C(x, \beta, y^*, \phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\|\phi\|^2}{(1-x^2 + (y^*)^2)^{1/2}} + 2\beta |\phi(0)| \|x\phi\|_{L^1} + \beta^2 y^* \|x\phi\|_{L^1}^2 \right)$$

Un majorant du membre gauche de l'inégalité (4.70) est donné par :

$$\left\{ 2M(L) \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) + \frac{M_1(L)}{2y^*} + \beta M_2(L) + \beta^2 y^* \frac{M_3(L)}{2} \right\}$$

En choisissant :

$$y^* = \left( \frac{M_1(L)}{M_3(L)} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\beta}$$

ce majorant s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ 2M(L) \operatorname{Argsh} \left( \frac{y^*}{(1-x^2)^{1/2}} \right) + s^*(\beta) \right\} \\ s^*(\beta) = \beta \{ M_2(L) + 2(M_1(L)M_3(L))^{1/2} \} \end{array} \right.$$

D'autre part, grâce à (4.67), un minorant du terme de droite de l'inégalité (4.70) est donné par :

$$\frac{f(\rho)}{1+\rho} \cdot \frac{1}{\beta^2}$$

Choisissons alors  $\rho = \rho^*$  tel que :

$$\frac{f(\rho^*)}{1+\rho^*} = \max_{\rho>0} \frac{f(\rho)}{1+\rho}$$

Un rapide calcul montre que :

$$\rho^* = \frac{\gamma}{2+\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{f(\rho^*)}{1+\rho^*} = \frac{\gamma}{(2+\gamma)(1+\gamma)^{1/2}} = \Gamma \quad (= \Gamma(a))$$

Nous savons alors que  $b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi)$  est nul pour tout  $\phi$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  dès que :

$$(4.72) \quad 2M(L) \operatorname{Argsh} \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{M_1(L)}{M_3(L)} \right)^{1/2} (1-x^2)^{1/2} \right] + s^*(\beta) \leq \frac{\Gamma}{\beta^2}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{M_1(L)}{M_3(L)} (1-x^2)^{-1} \leq \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{\Gamma}{2M(L)\beta^2} - \frac{s^*(\beta)}{2M(L)} \right]$$

Soit encore :

$$(1-x^2) \geq \frac{\frac{1}{\beta^2} \frac{M_1(L)}{M_3(L)}}{\operatorname{sh}^2 \left[ \frac{\Gamma}{2M(L)\beta^2} - \frac{s^*(\beta)}{2M(L)} \right]}$$

ce qui peut s'écrire bien entendu :

$$x \geq 1 - F^*(\beta)$$

Pour obtenir un équivalent de  $F^*(\beta)$ , il suffit de voir que  $(1 - x^2) \sim 2F^*(\beta)$  pour obtenir :

$$F^*(\beta) \sim \frac{1}{\beta^2} \frac{M_1(L)}{M_3(L)} \exp \left[ -\frac{\Gamma}{2M(L)} \cdot \frac{1}{\beta^2} \right]$$

Pour achever totalement la démonstration du résultat, il suffit de remarquer que, pour une simple raison d'homogénéité on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(L) = ML^2 = \frac{L^2}{\alpha} \\ M_1(L) = M_1L = \frac{L}{\nu_1} \\ M_2(L) = M_2L^2 \\ M_3(L) = M_3L^3 \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors le résultat annoncé avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^* = \frac{M_1}{M_3} \\ q(a) = \frac{\Gamma(a)}{2} \end{array} \right.$$

□

Nous pouvons maintenant résumer la situation concernant la première valeur propre  $\lambda_1(\omega, \beta)$ . En regroupant les résultats des lemmes 4.15 et 4.16 à celui du lemme 4.17 pour  $m = 1$ , nous avons pu construire deux fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta L \longrightarrow X^+(a, \beta L) \quad \beta > 0 \quad (a \in [0, \frac{1}{2}]) \\ \beta L \longrightarrow X^-(a, \beta L) \quad \beta > 0 \quad (a \in [0, \frac{1}{2}]) \end{array} \right.$$

telles que :

(i).

$$X^+(a, \beta) \geq X^-(a, \beta) \quad \forall (a, \beta) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R}^+$$

(ii).

$$\begin{cases} 1 - X^+(a, \beta) \sim \frac{A^*}{\beta^2 L^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta^2 L^2}\right) & \beta \rightarrow 0 \\ 1 - X^-(a, \beta) \sim \frac{A_*}{\beta^2 L^2} \exp\left(-\frac{\alpha q(a)}{\beta^2 L^2}\right) & \beta \rightarrow 0 \end{cases}$$

(iii).

$$\begin{cases} X^-(a, \beta) \geq x_R & \text{pour tout } (a, \beta) \text{ et pour} \\ X^-(a, \beta) = x_R & \beta L \text{ assez grand} \end{cases}$$

(iv).

$$\begin{cases} X^+(a, \beta) > x_R & \text{pour tout } (a, \beta) \text{ et pour} \\ X^-(a, \beta) = x_R + \frac{t_R^2 V_S}{\beta^2 L^2} + o\left(\frac{1}{\beta^2 L^2}\right) & \beta L \text{ assez grand} \end{cases}$$

pour lesquelles on a le résultat suivant :

$$\begin{cases} \forall x > X^+(\beta L, a) & \lambda_1^T < 0 \\ \forall x > X^-(\beta L, a) & \lambda_1^T > 0 \end{cases}$$

Nous donnons une illustration graphique sur la figure 4.10.

Nous ne détaillerons pas ici la construction des fonctions  $X^+$  et  $X^-$  qui est purement technique. La seule difficulté consiste à raccorder correctement les lemmes précédents. Quoiqu'il en soit, nous pouvons d'ores et déjà énoncer le :

**Lemme 4.16 .**

*Pour tout  $\beta > 0$ , l'équation  $\lambda_1(\omega, \beta)$  admet une solution et une seule  $\omega = \omega_1(\beta)$  dans l'intervalle  $[0, \beta V_S[$  qui vérifie :*

$$X^-(a, \beta) \leq \frac{\omega_1(\beta)}{\beta} \leq X^+(a, \beta)$$

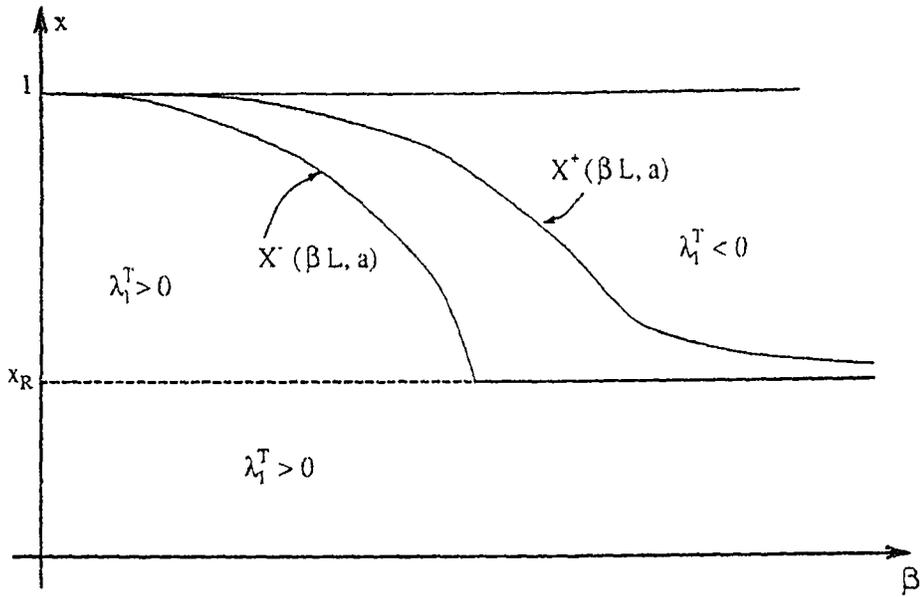


Figure 4.10 : Allure des fonctions  $X^+$  et  $X^-$  au voisinage de  $\beta = 0$

#### Commentaire 4.1 .

Du lemme 4.16, on déduit en particulier que :

- $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\omega_1(\beta)}{\beta} = +\infty$  et plus précisément :

$$c_R < \frac{\omega_1(\beta)}{\beta} < c_R + \frac{t_R^2 V_S}{\beta^2 L^2} + o\left(\frac{1}{\beta^2 L^2}\right)$$

- La courbe de dispersion  $\beta \rightarrow \frac{\omega_1(\beta)}{\beta}$  décolle très lentement de la droite  $\frac{\omega}{\beta} = V_S$  au voisinage de  $\beta = 0$ . On peut en fait conjecturer l'existence de deux constantes  $A$  et  $\delta$  positives telles que :

$$1 - \frac{\omega_1(\beta)}{\beta V_S} \sim \frac{A}{\beta^2 L^2} \exp\left(-\frac{\delta}{\beta^2 L^2}\right) \quad (\beta \rightarrow 0)$$

Nous allons maintenant prouver que seul le premier seuil est nul (contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une fissure non plane ou d'un obstacle d'intérieur non vide) en établissant l'existence d'un nombre d'onde  $\beta_* > 0$  tel que :

$$\beta < \beta_* \implies \lambda_2(\omega, \beta) > 0 \quad \forall \omega \in [0, \beta V_S]$$

Le résultat que nous allons établir est le suivant :

**Lemme 4.17 .**

Il existe une fonction continue et strictement positive de la variable  $x$ , soit  $P(x, a)$  définie pour  $x \in [x_R, 1]$  telle que :

$$\beta L \leq P(x, a) \implies \lambda_2(\omega, \beta) > 0$$

En particulier si  $P_*(a) = \min_{x \in [x_R, 1]} P(x, a)$ , alors

$$\beta L \leq P_*(x, a) \implies \lambda_2(\omega, \beta) = 0$$

**Démonstration .**

Par la caractérisation Max-Min de  $\lambda_2(\omega, \beta)$ , nous savons que si nous pouvons trouver un espace  $V_1$  de dimension 1 inclus dans  $L^2(\Gamma)$  tel que :

$$\forall \phi \in V_1^T, \quad b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi) > 0$$

alors, cela signifie que  $\lambda_2^T(\omega, \beta) > 0$ .

Pour obtenir un tel résultat, nous allons travailler à l'aide d'une nouvelle expression de  $b_T(\omega, \beta; \phi, \phi)$  faisant appel aux projecteurs spectraux de la matrice  $A(\omega, \beta; k)$ .

Les deux directions propres de cette matrice sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{SH}(k, \beta) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} k \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{pour } \lambda_{SH}(\omega, \beta; k)) \\ e_P(k, \beta) = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ k \end{pmatrix} \quad (\text{pour } \lambda_P(\omega, \beta; k)) \end{array} \right.$$

auquelles nous associons les deux projecteurs spectraux :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi} = (e_{SH}(k, \beta), \hat{\phi}) e_{SH}(k, \beta) \\ P_P(k, \beta) \hat{\phi} = (e_P(k, \beta), \hat{\phi}) e_P(k, \beta) \end{array} \right.$$

et nous avons l'identité :

$$\left| \begin{aligned} (A(\omega, \beta; k) \hat{\phi}, \hat{\phi}) &= \lambda_{SH}(\omega, \beta; k) |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}|^2 \\ &+ \lambda_P(\omega, \beta; k) |P_P(k, \beta) \hat{\phi}|^2 \end{aligned} \right.$$

à partir de laquelle nous pouvons écrire :

$$\left| \begin{aligned} \frac{2x^2}{\mu\beta} b_\Gamma(\omega, \beta; \phi, \phi) &= \int G_P \left( x; \frac{k}{\beta} \right) |P_P(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \\ &+ \int G_{SH} \left( x; \frac{k}{\beta} \right) |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

Soit  $\phi = (\phi_1, \phi_3)$  dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$  tel que :

$$\int \phi_3(x) dx = 0$$

En posant :

$$\psi_3(x) = \int_0^x \phi_3(\xi) d\xi$$

nous voyons que :

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_3 &\in H^{3/2}(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma) \\ \phi_3 &= \frac{d\psi_3}{dx} \end{aligned} \right.$$

Par suite, il est facile de voir que :

$$|P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 = \frac{|k|^2}{|k|^2 + \beta^2} |\hat{\phi}_1(k) + i\beta \hat{\psi}_3(k)|^2$$

Par ailleurs, par Cauchy-schwartz :

$$|\psi_3(x)|^2 \leq x \int_0^L \phi_3(x)^2 dx$$

donc :

$$\|\psi_3\|^2 \leq \|\phi_3\|^2 \frac{L^2}{2}$$

Soit maintenant  $V_1$  le sous espace de dimension 1 de  $L^2(\Gamma)^2$  engendré par le vecteur  $(0, 1)$ , nous avons donc établi que :

$$\phi \in V_1^T \implies \begin{cases} \phi_3 = \frac{d\psi_3}{dx} \\ \|\psi_3\|^2 \leq \frac{l^2}{2} \|\phi_3\|^2 \\ |P_{SH}(k, \beta)\hat{\phi}(k)|^2 = \frac{|k|^2}{|k|^2 + \beta^2} |(\hat{\phi}_1 + i\beta\hat{\psi}_3)(k)|^2 \end{cases}$$

Considérons maintenant un champ test quelconque  $\phi$  dans  $V_1^T$ , notre but est de montrer que pour  $\beta$  assez petit (indépendamment de  $\phi$ ) :

$$b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) > 0$$

comme :

$$G_P(x, y) = x^2(1 + y^2 - x^2)^{1/2}$$

nous voyons que :

$$G_P(x, y) \geq x^2 y$$

de telle sorte que :

$$(4.73) \quad \int G_P\left(x; \frac{k}{\beta}\right) |P_P(k, \beta)\phi(k)|^2 dk \geq \frac{x^2}{\beta} \int |k| |P_P(k, \beta)\phi(k)|^2 dk$$

Par ailleurs, nous savons que :

$$G_{SH}(x, y) = \frac{F_R(x, y)}{(1 + y^2 - x^2)^{1/2}}$$

où la fonction  $F_R(x, y)$  vérifie :

$$F_R(x, y) = 2(1 - a)x^2 y^2 + O(1) \quad y \longrightarrow +\infty$$

Par suite nous pouvons écrire :

$$(4.74) \quad \begin{cases} G_{SH}(x, y) = 2(1-a)x^2y + \frac{D_{SH}(x, y)}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} \\ D_{SH}(x, y) = O(1) \quad (y \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

Nous écrivons :

$$\left| \int D_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk = 2(1-a) \frac{x^2}{\beta} \int |k| |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \right. \\ \left. + \int \frac{D_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right)}{\left(1-x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \right.$$

En utilisant l'identité :

$$\left| \begin{aligned} |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 &= \frac{|k|^2}{|k|^2 + \beta^2} |\hat{\phi}_1(k) + i\beta \hat{\psi}_3(k)|^2 \\ &= \frac{y^2}{1+y^2} |\hat{\phi}_1(k) + i\beta \hat{\psi}_3(k)|^2 \end{aligned} \right.$$

nous obtenons, comme  $y \leq (1+y^2-x^2)^{1/2}$  :

$$\frac{|P_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right) \hat{\phi}(k)|^2}{(1+y^2-x^2)^{1/2}} \leq \frac{y}{1+y^2} |\hat{\phi}_1(k) + i\beta \hat{\psi}_3(k)|^2$$

Par conséquent :

$$(4.75) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \int \frac{D_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right)}{\left(1-x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \right| \\ &\leq \int \frac{|k|}{\beta} \frac{|D_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right)|}{\left(1 + \frac{|k|^2}{\beta^2}\right)} |\hat{\phi}_1(k) + i\beta \hat{\psi}_3(k)|^2 dk \end{aligned} \right.$$

La fonction  $(x, y) \rightarrow \frac{y}{1+y^2} D_{SH}(x, y)$  est continue et converge vers 0 lorsque  $y$  tend vers  $+\infty$ , donc, en posant :

$$(4.76) \quad C_{SH}(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \frac{y}{1+y^2} |D_{SH}(x, y)|$$

nous définissons une fonction strictement positive et continue de la variable  $x$ .

$$(4.77) \quad \left| \int \frac{D_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right)}{\left(1-x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \right| \leq$$

$$\leq 2C_{SH}(x)(\|\phi_1\|^2 + \beta^2\|\phi_3\|^2)$$

$$\leq 2C_{SH}(x)\left(\|\phi_1\|^2 + \frac{\beta^2 L^2}{2}\|\phi_3\|^2\right)$$

$$\leq (2 + \beta^2 L^2)C_{SH}(x)\|\phi\|^2$$

Par conséquent, en utilisant (4.74) et (4.77), il vient :

$$(4.78) \quad \left| \int G_{SH}\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \right| \geq$$

$$\leq 2(1-a)\frac{x^2}{\beta} \left[ \int |k| |P_{SH}(k, \beta) \hat{\phi}(k)|^2 dk \right] - (2 + \beta^2 L^2)C_{SH}(x)\|\phi\|^2$$

Nous regroupons les inégalités (4.73) et (4.78) pour obtenir  $\phi$  dans  $V_1^\perp$  :

$$(4.79) \quad \left| b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq 2(1-a)\frac{x^2}{\beta} \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk - (2 + \beta^2 L^2)C_{SH}(x)\|\phi\|^2 \right.$$

$$\left. \geq \left\{ 2(1-a)\frac{\nu_1 x^2}{\beta L} - (2 + \beta^2 L^2)C_{SH}(x) \right\} \|\phi\|^2 \right.$$

Désignons alors par  $P(a, x)$  l'unique solution de l'équation en  $Y$  :

$$2(1-a)\frac{\nu_1 x^2}{Y} = (2 + Y^2)C_{SH}(x)$$

La figure 4.11 donne une illustration graphique de la solution  $P(a, x)$ .

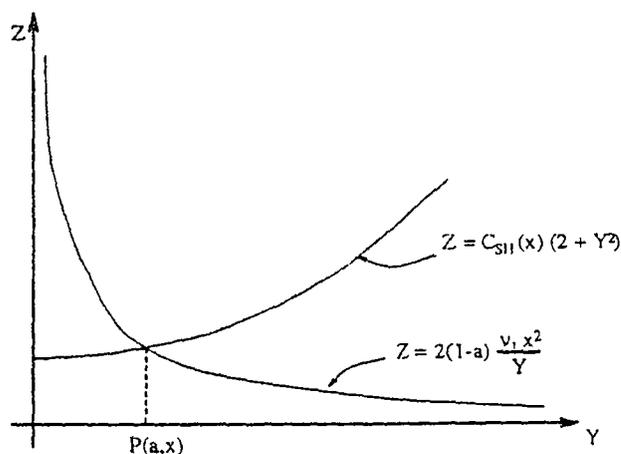


Figure 4.11 : allure des courbes  $Z = C_{SH}(x)(2 + Y^2)$  et  $Z = 2(1 - a) \frac{\nu_1 x^2}{Y}$

Nous définissons ainsi une fonction strictement positive et continue de la variable  $x$  pour laquelle :

$$\beta L < P(a, x) \implies 2(1 - a) \frac{\nu_1 x^2}{\beta L} - (2 + \beta^2 L^2) C_{SH}(x) > 0$$

Le lemme est donc démontré. □

La généralisation du résultat précédent à tout entier  $m$  va nous permettre une minoration des seuils que nous définirons par la suite. Nous allons en fait préciser la région dans laquelle la fonction  $\lambda_m(\omega, \beta)$  est strictement positive.

Lemme 4.18 .

Pour tout entier  $m \geq 0$ , et pour  $\beta^2 c_R^2 < \omega^2 \leq \beta^2 V_S^2$ , nous avons  $\left(x = \frac{\omega}{\beta V_S}\right)$  :

$$\beta L > \nu_m \cdot Q(a, x) \implies \lambda_{2m+3}^T(\omega, \beta) > 0$$

où  $Q(a, x)$  désigne une fonction continue et strictement positive des variables  $x$  et  $a$ .

Démonstration .

Nous allons construire un sous espace particulier de dimension  $2m + 2$  (sous espace de  $L^2(\Gamma)^2$ ), établir certaines propriétés des fonctions appartenant à l'orthogonal de ce sous

espace pour finalement travailler avec des champs test dans cet orthogonal et conclure à l'aide du principe du Max-Min.

Soit  $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$  une base de fonctions propres dans  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$  de l'opérateur  $E$  défini au paragraphe précédent. Nous avons :

$$\begin{cases} Ew_m &= \frac{\nu_m}{L} w_m \\ \int_{\Gamma} w_p w_q dx &= \delta_{pq} \end{cases}$$

Nous définissons les fonctions de  $L^2(\Gamma)^2$  :

$$v_m(x) = \int_0^x w_m(\xi) d\xi \in L^2(\Gamma)$$

Considérons alors les  $(2m + 2)$  fonctions de  $L^2(\Gamma)^2$  suivantes :

$$\begin{cases} \phi_0^{(1)} = (1, 0) & \phi_0^{(2)} = (0, 1) \\ \phi_0^{(j)} = (v_j, 0) & \phi_0^{(j+1)} = (0, v_j) \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

et désignons par  $V_{2m+2}$  le sous espace de  $L^2(\Gamma)$  de dimension  $2m + 2$  engendré par ces fonctions. Soit  $\phi$  un élément de  $V_{2m+2}^\perp$ . En posant :

$$\psi(x) = \int_0^x \phi(\xi) d\xi$$

il est facile de voir que :

$$\begin{cases} \psi \in H^{3/2}(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma) \\ \frac{d\psi}{dx} = \phi \end{cases}$$

Par transformation de Fourier (après avoir prolongé  $\phi$  et  $\psi$  par 0 en dehors de  $[0, L]$ ), nous avons :

$$|\hat{\phi}(k)| = |k| |\hat{\psi}(k)|$$

Par ailleurs,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont orthogonales à toutes les fonctions  $w_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . En effet, pour  $l = 1, 2$  :

$$\begin{aligned}
 (\psi_l, w_j) &= \left( \psi_l, \frac{dw_j}{dx} \right) \\
 &= - \left( v_j, \frac{d\psi_l}{dx} \right) \\
 &= -(v_j, \phi_l) = 0
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(4.80) \quad \phi \in V_{2m+3}^\perp \implies \int |k| |\hat{\psi}(k)|^2 dk \geq \frac{\nu_m}{L} \int |\hat{\psi}(k)|^2 dk$$

Etudions alors  $b(\omega, \beta; \phi, \phi)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2}{\mu\beta} b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) &\geq \frac{2x^2}{\mu\beta} b_T^-(\omega, \beta; \phi, \phi) \\
 &= \int G_R^-\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk
 \end{aligned}$$

D'après (4.57), le comportement (à  $x$  fixé) de la fonction  $y \rightarrow G_R^-(x, y)$  pour  $y \rightarrow +\infty$  est le même que celui de la fonction  $G_{SH}(y)$ .

Comme pour la fonction  $G_{SH}(x, y)$ , nous pouvons écrire :

$$(4.81) \quad \begin{cases} G_R^-(x, y) = x^2 y + \frac{D_R^-(x, y)}{(1 - x^2 + y^2)^{1/2}} \\ D_R^-(x, y) = O(1) \quad y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
 \int G_R^-\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk &= \frac{x^2}{\beta} \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \\
 &+ \int \frac{D_R^-\left(x, \frac{k}{\beta}\right)}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} |\hat{\phi}(k)|^2 dk
 \end{aligned}$$

Comme  $|\hat{\phi}(k)| = |k||\hat{\psi}(k)|$  et  $|k| \left(1 - x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \leq \beta$ , il vient :

$$\frac{|\hat{\phi}(k)|^2}{\left(1 - x^2 + \frac{k^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} \leq \beta |k| |\hat{\phi}(k)|^2$$

Par conséquent en posant :

$$(4.82) \quad c_R(x) = \max_{y \geq 0} |D_R^-(x, y)| \quad (\in C^0([0, 1]))$$

Nous obtenons :

$$(4.83) \quad \left| \int G_R^-\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk \geq \frac{x^2}{\beta} \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \right. \\ \left. - c_R(x) \beta \int |k| |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Holder :

$$\left| \int |k| |\hat{\psi}(k)|^2 dk = \int |k| |\hat{\psi}(k)|^{2/3} |\hat{\psi}(k)|^{4/3} dk \right. \\ \left. \leq \left( \int |k|^3 |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right)^{1/3} \left( \int |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right)^{2/3} \right. \\ \left. = \left( \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \right)^{1/3} \left( \int |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right)^{2/3} \right.$$

pour obtenir l'inégalité :

$$\int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \geq \frac{\left( \int |k| |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right)^3}{\left( \int |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right)^2}$$

Soit encore, compte tenu de (4.80) :

$$(4.84) \quad \int |k| |\hat{\phi}(k)|^2 dk \geq \left(\frac{\nu_m}{L}\right)^2 \int |k| |\hat{\psi}(k)|^2 dk$$

En reportant dans (4.83), nous obtenons :

$$(4.85) \quad \int G_R^-\left(x, \frac{k}{\beta}\right) |\phi(k)|^2 dk \geq \left\{ \frac{x^2}{\beta} \left(\frac{\nu_m}{L}\right)^2 - c_R(x)\beta \right\} \int |k| |\psi(k)|^2 dk$$

Par conséquent dès que  $\beta \geq \frac{x}{c_R(x)^{1/2}} \left(\frac{\nu_m}{L}\right)$ , nous avons :

$$\forall \phi \in V_{2m+3}^\perp \quad b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq 0$$

Le résultat est alors une conséquence directe de la caractérisation Max-Min de  $\lambda_{2m+3}^{(T)}(\omega, \beta)$ , en posant :

$$(4.86) \quad Q(a, x) = \frac{x}{c_R(x)^{1/2}}$$

□

Dans la formule (4.86), la dépendance de  $Q(a, x)$  par rapport à  $a$  est cachée dans  $c_R(x)$  qui, en toute rigueur, dépend également de  $a$ .

Le résultat du lemme nous servira à minorer les seuils associés aux modes tangentiels (seuils dont la définition sera donnée par le théorème 4.4 à venir et que nous noterons  $\beta_m^{(T)}$ ) et donc à préciser comment  $\beta_m^{(T)}$  tend (au moins) vers  $+\infty$ .

Plus précisément, en posant :

$$Q^*(a) = \sup_{x \in [x_R, 1]} Q(a, x)$$

nous savons que :

$$\beta L > Q^*(a) \nu_m \implies \lambda_{2m+3}^T(\omega, \beta) > 0$$

ce qui entrainera que l'équation  $\lambda_{2m+3}^T(\omega, \beta) = 0$  n'aura pas de solution  $\omega$  dans l'intervalle  $]0, \beta V_S[$  dès que  $\beta L$  sera plus grand que  $Q^*(a) \nu_m$  ce qui entrainera que :

$$\beta_{2m+3}^{(T)} > \nu_m \frac{Q^*(a)}{L}$$

Ceci établit en particulier que  $\beta_m^{(T)}$  tend vers  $+\infty$  puisque la suite  $\nu_m$  tend elle même vers  $+\infty$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat de ce chapitre :

**Théorème 4.4 .**

Pour tout entier  $m \geq 1$ , il existe  $\beta_m^T \geq 0$  ( $m^{\text{ème}}$  seuil) tel que :

- (i). pour  $\beta < \beta_m^T$ , l'équation en  $\omega$ ,  $\lambda_m^T(\omega, \beta) = 0$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $[0, \beta V_S]$
- (ii). Pour  $\beta \geq \beta_m^T$ , l'équation en  $\omega$  :  $\lambda_m^T(\omega, \beta) = 0$  admet une solution et une seule dans l'intervalle  $[0, \beta V_S]$  :

$$\omega = \omega_m^T(\beta)$$

La fonction  $\omega_m^T(\beta)$  a les propriétés énoncées aux lemmes 4.14, 4.15 et 4.16 et pour tout  $m \geq 1$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \longrightarrow \omega_m^T(\beta) \text{ est continue} \\ \omega_m^T(\beta) > \beta c_R \text{ pour tout } \beta \\ \omega_m^T(\beta_m^T) = \beta_m^T V_S \\ c_R < \frac{\omega_m^T(\beta)}{\beta} < c_R + m^2 \frac{t_R^2 V_S}{\beta^2 L^2} + o\left(\frac{m^2}{\beta^2 L^2}\right) \quad (\beta \longrightarrow +\infty) \end{array} \right.$$

Enfin, la suite  $\beta_m^T$  a les propriétés suivantes :

$$\beta_1^T = 0 < \beta_2^T \leq \beta_3^T \leq \dots \leq \beta_m^T \leq \dots < +\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \beta_m^T = +\infty$$

$$C_1 m < \beta_m^T < C_2 m$$

où  $C_1$  et  $C_2$  désignent deux constantes strictement positives ne dépendant que de  $a$ .

**Démonstration .**

D'après les lemmes 4.13 et 4.18, joints aux théorèmes des valeurs intermédiaires, nous savons que l'équation  $\lambda_m^T(\omega, \beta) = 0$  admet une solution unique pour  $\beta$  assez grand, aucune

pour  $\beta$  assez petit. Par ailleurs, nous savons que pour tout  $\beta$ , le nombre de solutions de cette équation est 0 ou 1. Pour conclure les points (i) et (ii), il nous reste à démontrer que l'ensemble :

$$(4.87) \quad E_m = \{ \beta / \exists \omega \in ]0, \beta V_S[ \text{ tel que } \lambda_m^{(T)}(\omega, \beta) = 0 \}$$

est un intervalle du type  $]\beta_m^{(T)}(\omega, \beta), +\infty[$ . Pour cela, nous ne pouvons pas reprendre la même démarche qu'au théorème 4.2, car nous n'avons pas établi la monotonie des fonctions  $\lambda_m^{(T)}(x\beta V_S, \beta)$  par rapport à  $\beta$  (bien qu'un tel résultat soit probablement exact - voir conjecture ci-après).

Nous allons faire une démonstration par l'absurde en utilisant un résultat général abstrait établi dans [7]. Nous introduisons :

$$(4.88) \quad \begin{cases} \beta_m^+ = \inf \{ \beta / \forall \beta' > \beta, \beta' \in E_m \} \\ \beta_m^- = \inf E_m \end{cases}$$

Bien sûr  $\beta_m^- \leq \beta_m^+$ . Il s'agit de montrer que  $\beta_m^- = \beta_m^+$ . Nous supposons maintenant que :

$$\beta_m^- < \beta_m^+$$

Nous construisons la fonction  $\tilde{\omega}_m(\beta)$  définie par :

$$(4.89) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_m(\beta) = \omega_m^T(\beta) & \text{si } \beta \in E_m \\ \tilde{\omega}_m(\beta) = \beta V_S & \text{sinon} \end{cases}$$

$\omega_m^T(\beta)$  désignant l'unique solution de  $\lambda_m^T(\omega, \beta) = 0$  dans  $]0, \beta V_S[$  lorsque  $\beta \in E_m$ . Des propriétés de continuité de la fonction  $\lambda_m(\omega, \beta)$ , nous déduisons que la fonction  $\tilde{\omega}_m(\beta)$  est continue, que  $\tilde{\omega}_m(\beta^+) = \beta_m^+ V_S$  et que  $E_m$  est caractérisé par :

$$E_m = \{ \beta / \tilde{\omega}_m(\beta) < \beta V_S \}$$

si  $\beta_m^- < \beta_m^+$ , il est facile d'établir l'existence d'une suite  $\beta_m^{(p)}$ , croissante tel que :

$$(4.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq p < +\infty \quad \beta_m^- < \beta_m^{(p)} < \beta_m^+ \\ \bar{\omega}_m(\beta_m^{(p)}) < \beta_m^{(p)} V_S \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \beta_m^{(p)} = \beta_m^* \quad (\leq \beta_m^+) \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{\omega}_m(\beta_m^{(p)}) = \beta_m^* V_S \end{array} \right.$$

En effet, il suffit d'appliquer de façon itérative le théorème des valeurs intermédiaires. Si  $\beta_m^- < \beta_m^+$ , il existe  $\beta_m^{(1)} \in ]\beta_m^-, \beta_m^+[$  tel que  $\beta_m^{(1)} \in E_m$ , c'est à dire tel que  $\bar{\omega}_m(\beta_m^{(1)}) < \beta_m^{(1)} V_S$ . La fonction  $f_m(\beta) = \beta^2 V_S^2 - \bar{\omega}_m(\beta)$  étant une fonction continue, positive ou nulle vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_m(\beta_m^{(1)}) > 0 \\ f_m(\beta_m^+) = 0 \end{array} \right.$$

Il existe  $\beta_m^{(2)} \in ]\beta_m^{(1)}, \beta_m^+[$  tel que :

$$f_m(\beta_m^{(2)}) = \frac{1}{2} f_m(\beta_m^{(1)})$$

Et ainsi de suite, on construit par récurrence la suite  $\beta_m^{(p)}$  par :

$$(4.91) \quad \beta_m^{(p+1)} \in ]\beta_m^{(p)}, \beta_m^+[$$

$$f_m(\beta_m^{(p+1)}) = \frac{1}{2} f_m(\beta_m^{(p)})$$

La suite  $\beta_m^{(p)}$  étant croissante (strictement) et majorée (par  $\beta_m^+$ ), elle converge vers une limite  $\beta_m^* \leq \beta_m^+$  et en passant à la limite, nous tirons de (4.91) l'égalité :

$$f_m(\beta_m^*) = 0 \implies \bar{\omega}_m(\beta_m^*) = \beta_m^* V_S$$

Maintenant nous utilisons le théorème 3.2, nous savons que, pour tout  $p \geq 1$ , il existe un entier  $k_p$  tel que :

$$(4.92) \quad \omega_m(\beta_m^{(p)})^2 = s_{k_p}(\beta_m^{(p)})$$

Mais la suite des entiers  $k_p$  varie dans un ensemble fini. Cela est dû au fait que (cf §1) :

$$s_k(\beta) < \beta^2 V_S^2 \iff \beta > \beta_k^* \text{ avec } \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k^* = +\infty$$

Si la suite  $k_p$  était non bornée, on pourrait toujours en extraire une suite, que nous noterons toujours  $k_p$ , tendant vers  $+\infty$ .

D'après (4.92), nous aurions donc :

$$s_{k_p}(\beta_m^{(p)}) < \beta_m^{(p)2} V_S^2 \implies \beta_m^{(p)} > \beta_{k_p}^*$$

Par suite  $\beta_m^{(p)}$  tendrait vers  $+\infty$ , ce qui contredit le fait que  $\beta_m^{(p)} \leq \beta_m^+$ . Par suite, la suite  $k_p$  prenant un nombre fini de valeurs, il existe un entier  $k$  qui est "atteint" par cette suite un nombre infini de fois. Par suite quitte à extraire de  $\beta_m^{(p)}$  une sous suite toujours notée  $\beta_m^{(p)}$ , nous savons que :

$$(4.93) \quad \tilde{\omega}_m(\beta_m^{(p)})^2 = s_k(\beta_m^{(p)})$$

donc :

$$(4.94) \quad f_m(\beta_m^{(p)})^2 = \beta^2 V_S^2 - s_k(\beta_m^{(p)})$$

Mais dans [7] on a démontré que la fonction  $\beta \longrightarrow \beta^2 V_S^2 - s_k(\beta)$  était croissante au sens large. Par suite, nous avons :

$$(4.95) \quad f_m(\beta_m^{(p+1)})^2 \geq f_m(\beta_m^{(p)})$$

ce qui contredit (4.91) puisque, par ailleurs, nous savons que ces deux nombres sont différents de 0. Ceci prouve que donc que  $\beta_m^- = \beta_m^+$  et établit donc les points (i) et (ii) du théorème avec  $\beta_m^{(T)} = \inf E_m$ .

Les autres résultats énoncés dans le théorème s'établissent très facilement, en raisonnant comme au paragraphe 4.2. Ce sont des conséquences directes des lemmes 4.14 à 4.18.

□

### Remarques et commentaires.

La démonstration utilisée ici pour montrer que l'ensemble des valeurs de  $\beta$  pour lesquelles l'équation  $\lambda_m^{(T)}(\omega, \beta) = 0$  a une solution dans l'intervalle  $]0, \beta V_S[$  est un intervalle  $]\beta_m^+, +\infty[$  aurait pu également marcher, pour le théorème 4.2, avec l'équation  $\lambda_m^{(N)}(\omega, \beta) = 0$ . Toutefois, nous disposons du résultat de décroissance des fonctions  $\beta \longrightarrow \lambda_m^{(N)}(\omega, \beta)$  qui fournissait un argument de démonstration beaucoup plus simple que celui utilisé ici. En outre, nous tirons de ce résultat une information supplémentaire intéressante, à savoir la décroissance des fonctions  $\frac{\omega_m^{(T)}(\beta)}{\beta}$  en fonction de  $\beta$ . Il est plus que probable que ce résultat de décroissance de la vitesse de phase en fonction du nombre d'onde reste vrai pour les modes tangentiels. Nous énonçons la :

### Conjecture 4.1 .

Pour tout  $m \geq 1$ , la fonction  $\beta \longrightarrow \frac{\omega_m^{(T)}(\beta)}{\beta}$  est strictement décroissante de l'intervalle  $]\beta_m^{(T)}, +\infty[$  dans l'intervalle  $[c_R, V_S[$ .

Pour établir ce résultat, il suffirait donc d'établir la décroissance, à  $x$  fixé, des fonctions  $\beta \longrightarrow \lambda_m^{(T)}(x\beta V_S, \beta)$  ( $x \in ]0, 1[$ ). Pour cela, il suffirait d'établir que la forme quadratique  $\phi \longrightarrow b_T(x\beta V_S, \beta; \phi, \phi)$  est, pour tout  $\phi$  fixé une fonction décroissante de  $\beta$ . Comme :

$$b_T(x\beta V_S, \beta; \phi, \phi) = \frac{\mu \beta}{2 x^2} \int \left( A_R \left( x, \frac{k}{\beta} \right) \phi(k), \phi(k) \right) dk$$

Il suffit de démontrer que les valeurs propres de la matrice  $\frac{\partial A_R}{\partial y}(x, y)$  sont des fonctions positives. Il est facile de calculer sur le papier la matrice  $\frac{\partial A_R}{\partial y}(x, y)$ . Le calcul de ses valeurs propres est beaucoup plus long et fastidieux mais peut se faire à l'aide d'un programme de calcul formel (MACSYMA). Nous avons utilisé les expressions fournies par ce programme

(expressions que nous ne donnerons pas ici - ce serait inutile) pour représenter, pour différentes valeurs du paramètres  $x$ , les variations des valeurs propres de  $\frac{\partial A_R}{\partial y}(x, y)$  en fonction de  $y$ . Les courbes ci-dessous, suggèrent que les valeurs propres restent bien positives lorsque  $y$  parcourt  $[0, +\infty[$  et lorsque  $x$  parcourt  $]x_R, 1[$ .

En fait, il est facile de montrer que, pour  $y$  assez grand, (il suffit de faire tendre  $y$  vers  $+\infty$ ).

$$\begin{cases} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial A_R}{\partial y}(x, y) \right) > 0 \\ \det \left( \frac{\partial A_R}{\partial y}(x, y) \right) > 0 \end{cases}$$

ce qui prouve la positivité des valeurs propres pour  $y$  grand. Pour conclure, il suffirait de prouver que l'équation :

$$\det \left( \frac{\partial A_R}{\partial y}(x, y) \right) = 0$$

n'a pas de solution pour  $y > 0$ . Il s'agit là d'un travail de romain devant lequel nous avons baissé les bras.

Nous allons maintenant donner une propriété des seuils correspondant aux modes guidés associés à l'opérateur tangentiel  $T_T(\omega, \beta)$ . Comme dans le cas de l'opérateur normal  $T_T(\omega, \beta)$ , l'idée consiste à faire tendre  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$  vers 1 par valeurs inférieures.

Situons tout de suite la difficulté qui intervient ici. Si on se donne un champ de vecteurs  $\phi$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)^2$ , on a :

$$(4.96) \quad \int_{\Gamma} \phi_3 dx \neq 0 \implies \lim_{\frac{\omega}{\beta V_S} \rightarrow 1} b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) = -\infty$$

Mais nous savons déjà que le premier seuil est 0. Il ne nous reste plus qu'à caractériser les autres. Pour cela, il nous suffit de travailler dans l'espace de Hilbert :

$$(4.97) \quad H_1 = \left\{ \phi \in L^2(\Gamma)^2 / \int_{\Gamma} \phi_3 dx = 0 \right\}$$

qui est un sous espace fermé de  $L^2(\Gamma)^2$ . On notera que :

$$H_1 = [(0, 1)]^\perp$$

Nous définissons alors la forme bilinéaire sur  $H_1$  :

$$(4.98) \quad s_T(\beta; \phi, \phi) = \lim_{x \rightarrow 1} b_T(x\beta V_S, \beta; \phi, \phi)$$

qui est définie simplement par :

$$(4.99) \quad s_T(\beta; \phi, \phi) = \int \left( A_T \left( \frac{|k|}{\beta} \right) \hat{\phi}(k), \hat{\phi}(k) \right)$$

où la matrice hermitienne  $A_T(y)$  est définie par :

$$(4.100) \quad A_T(y) = \begin{bmatrix} G_T^{(1)}(y) & C_T(y) \\ C_T(y) & G_T^{(3)}(y) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} G_T^{(1)}(y) = 4y^2(1 - a + y^2)^{1/2} - 4y^3 \\ G_T^{(3)}(y) = 4(1 - a + y^2)^{1/2} - 3y - \frac{1}{y} \\ C_T(y) = 4y(1 - a + y^2)^{1/2} - 4y^2 - 1 \end{cases}$$

On notera que seul le terme  $G_T^{(3)}(y)$  est singulier en  $y = 0$  ( $\lim_{y \rightarrow 0} G_T^{(3)}(y) = +\infty$ ). Si nous posons :

$$V_1 = H_1 \cap H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$$

alors il est facile de voir que  $s_T(\beta; \phi, \phi)$  définit une forme bilinéaire continue et symétrique sur  $V_1$  (muni de la topologie de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$ ). Le seul terme délicat à traiter est le terme :

$$\int G_T^{(3)}\left(\frac{k}{\beta}\right) |\phi_3(k)|^2 dk$$

Mais ce terme se traite sans problème en procédant comme dans la démonstration du lemme 4.14 (il faut couper l'intégrale en deux morceaux) compte tenu du fait que  $\int_{\Gamma} \phi_3(x) dx = 0$  et donc que  $\hat{\phi}_3(0) = 0$ .

Maintenant, par le théorème de Lax-Milgram, la forme bilinéaire  $s_T(\beta; \phi, \psi)$  définit un opérateur autoadjoint à résolvante compacte sur l'espace  $H_1$ , soit  $s_T(\beta)$ . Le seul point délicat à vérifier est l'existence d'une constante positive  $C_-(\beta)$  telle que :

$$s_T(\beta; \phi, \phi) \geq -C_-(\beta) |\phi|^2$$

L'existence de cette constante s'obtient aisément toujours par l'astuce utilisée dans la démonstration du lemme 4.14. Nous pouvons donc écrire :

$$(4.101) \quad \begin{cases} \sigma(S_T(\beta)) = \{s_T^1(\beta), \dots, s_T^m(\beta), \dots\} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} s_T^m(\beta) = +\infty \end{cases}$$

Nous savons d'autre part que les fonctions  $\beta \rightarrow s_T^m(\beta)$  sont des fonctions continues de  $\beta$ . Comme dans le cas des modes normaux, l'idée consiste à montrer que l'on obtient les seuils en résolvant les équations  $s_T^m(\beta) = 0$ . Le résultat précis est le suivant :

**Théorème 4.5**

- Tout seuil  $\beta_m^T$  annule une des valeurs propres de l'opérateur  $S_T(\beta)$ , pour  $m \geq 2$ .
- Si  $\phi_m(\beta)$  désigne un vecteur du noyau de l'opérateur  $T_T(\beta)$  pour  $\omega = \omega_m^T(\beta)$ ,  $\beta > \beta_m^T$ , alors :

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_m^T} \left| \int_{\Gamma} (\phi_m)_3(\beta) d\sigma \right| = 0$$

et plus précisément, il existe une constante  $C_m > 0$  telle que :

$$\left| \int_{\Gamma} (\phi_m)_3(\beta) d\sigma \right| \leq C_m \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{\omega_m^T(\beta)}{\beta V_S} \right) \right|^{-1}$$

**Démonstration .**

Elle est basée sur le résultat suivant, que nous admettons provisoirement :

**Lemme 4.19 .**

Il existe une constante  $C(\omega, \beta)$  positive, dépendant continuellement de  $\omega$  et  $\beta$  pour  $\beta > 0$ ,  $0 \leq \omega \leq \beta V_S$  telle que :

(4.102)

$$\left| \begin{array}{l} \forall \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2 \\ b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) = -C(\omega, \beta) \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{\omega}{\beta V_S} \right) \right| \left( \int_{\Gamma} \phi_3 d\sigma \right)^2 + \bar{b}_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \end{array} \right.$$

où la forme bilinéaire  $\bar{b}_T(\omega, \beta; ., .)$ , à priori définie pour  $0 \leq \omega < \beta V_S$  se prolonge par continuité à la droite  $\omega = \beta V_S$  et vérifie :

$$(4.103) \quad \forall \phi \in V_1 \quad \bar{b}_T(\beta V_S, \beta; \phi, \phi) = s_T(\beta; \phi, \phi) \quad \forall \phi \in V_1$$

Soit alors  $\phi_m(\beta)$ , pour  $\beta > \beta_m^T$ , dans le noyau de  $T_T(\omega_m^T(\beta), \beta)$ , nous avons donc :

$$(4.104) \quad b_T(\omega_m^T(\beta), \beta; \phi_m(\beta), \psi) = 0 \quad \forall \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$$

Normalisons  $\phi_m(\beta)$  par la condition :

$$(4.105) \quad \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{\omega_m^T(\beta)}{\beta V_S} \right) \right| \left| \int_{\Gamma} (\phi_m)_3(\beta) d\sigma \right|^2 + \int_{\Gamma} |\phi_m(\beta)|^2 d\sigma = 1$$

En faisant  $\psi = \phi_m(\beta)$  dans (4.104), il vient compte tenu de (4.102) :

(4.106)

$$C_m(\beta) \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{\omega_m^T(\beta)}{\beta V_S} \right) \right| \left( \int_{\Gamma} (\phi_m)_3(\beta) d\sigma \right)^2 + \bar{b}_T(\omega, \beta; \phi_m(\beta), \phi_m(\beta)) = 0$$

où nous avons posé :

$$C_m(\beta) = C(\omega_m^T(\beta), \beta)$$

Mais il est facile de voir que si :

$$\begin{cases} 0 < \beta_* \leq \beta \leq \beta^* \\ \beta c_R \leq \omega \leq \beta V_S \end{cases}$$

alors il existe deux constantes positives  $C_1(\beta_*, \beta^*)$  et  $C_2(\beta_*, \beta^*)$  telles que :

$$(4.107) \quad \tilde{b}_T(\omega, \beta; \phi, \phi) \geq C_1(\beta_*, \beta^*) |\phi|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2 - C_2(\beta_*, \beta^*) \|\phi\|^2$$

compte tenu de (4.105), (4.106) et (4.107) nous en déduisons que si  $\beta$  varie dans l'intervalle  $[\beta_m^T, \beta^*]$  (nous choisissons  $\beta^* > \beta_m^T > 0$ , alors, comme nécessairement  $\beta c_R \leq \omega_m(\beta) \leq \beta V_S$ , nous pouvons affirmer que :

$$(4.108) \quad \phi_m(\beta) \text{ est bornée dans } H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$$

Par compacité, on peut trouver une suite  $\beta^{(p)}$  telle que :

$$\begin{cases} \beta^{(p)} \searrow \beta_m^T \\ \phi_m(\beta^{(p)}) \longrightarrow \phi_m \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ fort} \\ \phi_m(\beta^{(p)}) \rightharpoonup \phi_m \text{ dans } H_{00}^{1/2}(\Gamma) \text{ faible} \end{cases}$$

Réécrivons (4.104) pour  $\beta = \beta^{(p)}$  sous la forme :

$$(4.109) \quad \tilde{b}_T(\omega_m^T(\beta^p), \beta^p; \phi_m(\beta^p), \psi) - C_m(\beta^p) \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{\omega_m^T(\beta^p)}{\beta^p V_S} \right) \right| \left( \int (\phi_m)_3(\beta^p) d\sigma \right) \left( \int \psi_3 d\sigma \right) = 0$$

Choisissons  $(\int \psi_3 d\sigma) \neq 0$ . En utilisant l'inégalité (4.107) et le fait que  $\Phi_m(\beta)$  soit bornée dans  $H_{00}(\Gamma)^2$ , nous voyons que :

$$\left| \int (pPhi_m)_3(\beta^p) d\sigma \right| \leq C_m \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{\omega_m^T(\beta^p)}{\beta^p V_S} \right) \right|^{-1}$$

En particulier, par passage à la limite quand  $\beta^p \rightarrow 0$

$$\int (\phi_m)_3 d\sigma = 0 \implies \Phi_m \in V_1$$

Dans ce cas nous choisissons  $\psi$  fixé dans l'espace  $V_1$  et nous avons :

$$\tilde{b}_T(\omega_m^T(\beta^p), \beta^p; \phi_m(\beta^p), \psi) = 0$$

Nous pouvons passer à la limite lorsque  $\beta^p \rightarrow 0$ , la convergence faible de la suite  $\Phi_m(\beta^p)$  étant suffisante. Ceci nous donne comme  $\Phi_m$  et  $\psi$  sont dans  $V_1$  :

$$s_T(\beta; \phi_m, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in V_1$$

Pour conclure, il reste à montrer que  $\phi_m \neq 0$ . Pour cela, il suffit de passer à la limite dans l'égalité de normalisation [?].

□

Démonstration du lemme 4.19.

Nous reprenons les idées du lemme 4.14. Remarquons que :

$$A_T(y) = A_T^0(y) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

où la matrice  $A_T^0(y)$  est régulière en  $y = 0$ . De la même façon, nous avons (cf. démonstration du lemme 4.14) :

$$A(x, y) = A^0(x, y) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2-x^2)^2}{(1-x^2+y^2)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

où la matrice  $A^0(x, y)$  est régulière, y compris lorsque  $(x, y) \rightarrow [0, 1]$ . La forme bilinéaire sur  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$

$$\int \left( A^0 \left( x, \frac{|k|}{\beta} \right) \hat{\phi}(k), \hat{\phi}(k) \right) dk$$

est bien sûr régulière en  $x$  et  $\beta$  et vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int A^0 \left( x, \frac{|k|}{\beta} \right) |\hat{\phi}(k)|^2 dk = \int \left( A_T^0 \left( \frac{|k|}{\beta} \right) \hat{\phi}(k), \hat{\phi}(k) \right) dk$$

Il reste à traiter le terme :

$$-(2-x^2)^2 \int \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk$$

Nous écrivons :

$$\int \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk = \int_{|k|>1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk + \int_{|k|<1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk$$

Soit encore :

$$\left| \int \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk = \int_{|k| \geq 1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk + \int_{|k| < 1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2 - |\hat{\phi}_3(0)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk \right.$$

$$\left. + 2\beta \operatorname{Argsh} \left( \frac{\beta}{(1-x^2)^{1/2}} \right) \left( \int_{\Gamma} \phi_3 d\sigma \right)^2 \right.$$

Nous vérifions aisément que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \int \frac{|\phi_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk - 2\beta \operatorname{Argsh} \left( \frac{\beta}{(1-x^2)^{1/2}} \right) \left( \int_{\Gamma} \phi_3 d\sigma \right)^2 \right\} =$$

$$= \beta \left( \int_{|k| \geq 1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{|k|} dk + \int_{|k| \leq 1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2 - |\hat{\phi}_3(0)|^2}{|k|^2} dk \right).$$

Par conséquent, si nous posons (avec  $x = \frac{\omega}{\beta V_S}$ ) :

$$\left| \frac{2x^2}{\mu\beta} \tilde{b}_T(\omega, \beta; \phi, \psi) = \int \left( A^0 \left( x, \frac{|k|}{\beta} \right) \hat{\phi}(k), \hat{\phi}(k) \right) dk \right.$$

$$\left. - (2-x^2)^2 \int_{|k| \geq 1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk \right.$$

$$\left. - (2-x^2)^2 \int_{|k| \geq 1} \frac{|\hat{\phi}_3(k)|^2 - |\hat{\phi}_3(0)|^2}{(1-x^2 + \frac{|k|^2}{\beta^2})^{1/2}} dk \right.$$

Nous avons :

$$b_T(\omega, \beta; \phi, \phi) = \bar{b}_T(\omega, \beta; \phi, \phi) - \bar{C}(\omega, \beta) \left( \int_{\Gamma} \phi_3 d\sigma \right)^2$$

avec

$$\bar{C}(\omega, \beta) = \frac{\mu V_S^2 \beta^4}{\omega^2} \operatorname{Argsh} \left( \frac{\beta}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2 V_S^2}\right)^{1/2}} \right)$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

- $\bar{C}(\omega, \beta) \sim \frac{\mu V_S^2 \beta^4}{\omega^2} \left| \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{\omega}{\beta V_S} \right) \right| \quad \omega \rightarrow \beta V_S.$
- $\bar{b}_T(\beta V_S, \beta; \phi, \phi) = s_T(\beta; \phi, \phi) \quad \forall \phi \in V_1$

□

#### Remarque 4.6 .

Notre résultat est notablement moins précis que celui que nous avons obtenu (théorème 4.3) pour les modes normaux. En particulier, nous n'avons énoncé qu'une condition nécessaire pour qu'un réel  $\beta > 0$  soit le seuil d'un mode tangentiel. Le fait que nous n'avons pu obtenir un condition nécessaire et suffisante vient avant que nous n'avons pas de résultat d'unicité pour les équations  $s_T^m(\beta) = 0$ . Un tel résultat est cependant probable. Il suffirait d'établir la monotonie des fonctions  $\beta \rightarrow s_T^m(\beta)$ . Cette monotonie est facile à prouver "numériquement". La démonstration rigoureuse est sans doute très pénible et très fastidieuse (voir les commentaires qui suivent la démonstration du théorème 4.4). D'autre part, nous ne savons pas relier l'indice  $m$  du seuil avec le numéro de l'équation  $s_l(\beta)$  à résoudre. Il y a simplement une relation de monotonie évidente entre  $l$  et  $m$ . Cette lacune est due au fait que nous n'avons pas utilisé un raisonnement passant par les Max-Min comme au théorème 4.3. L'utilisation de cet outil est en effet rendu délicat par le changement d'espace entre  $H_{00}^{1/2}(\Gamma)^2$  et  $V_1$  lorsque l'on passe à la limite au voisinage d'un seuil.

## CONCLUSION

Nous avons donné dans ce travail une approche par équations intégrales d'un problème de propagation d'ondes de surface élastiques guidées par l'extérieur d'une cavité, ou d'une fissure, cylindrique infinie et de section arbitraire. Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas limite correspondant à la dégénérescence de la cavité en une fissure. Nous avons donné une nouvelle formulation du problème en introduisant un opérateur, de type intégral, défini sur le bord du domaine de propagation. Cet opérateur dépend de deux paramètres réels qui sont la fréquence  $\omega$  et le nombre d'onde  $\beta$ . Il est autoadjoint, à résolvante compacte et borné inférieurement. Nous avons établi l'équivalence mathématique entre la détermination des relations de dispersion des ondes guidées et la recherche des zéros dans le plan  $(\beta, \omega)$  des valeurs propres de cet opérateur. Nous avons d'ailleurs montré un résultat de dépendance monotone des valeurs propres de cet opérateur en fonction de la fréquence  $\omega$ . Ce résultat est très intéressant tant du point de vue mathématique que numérique.

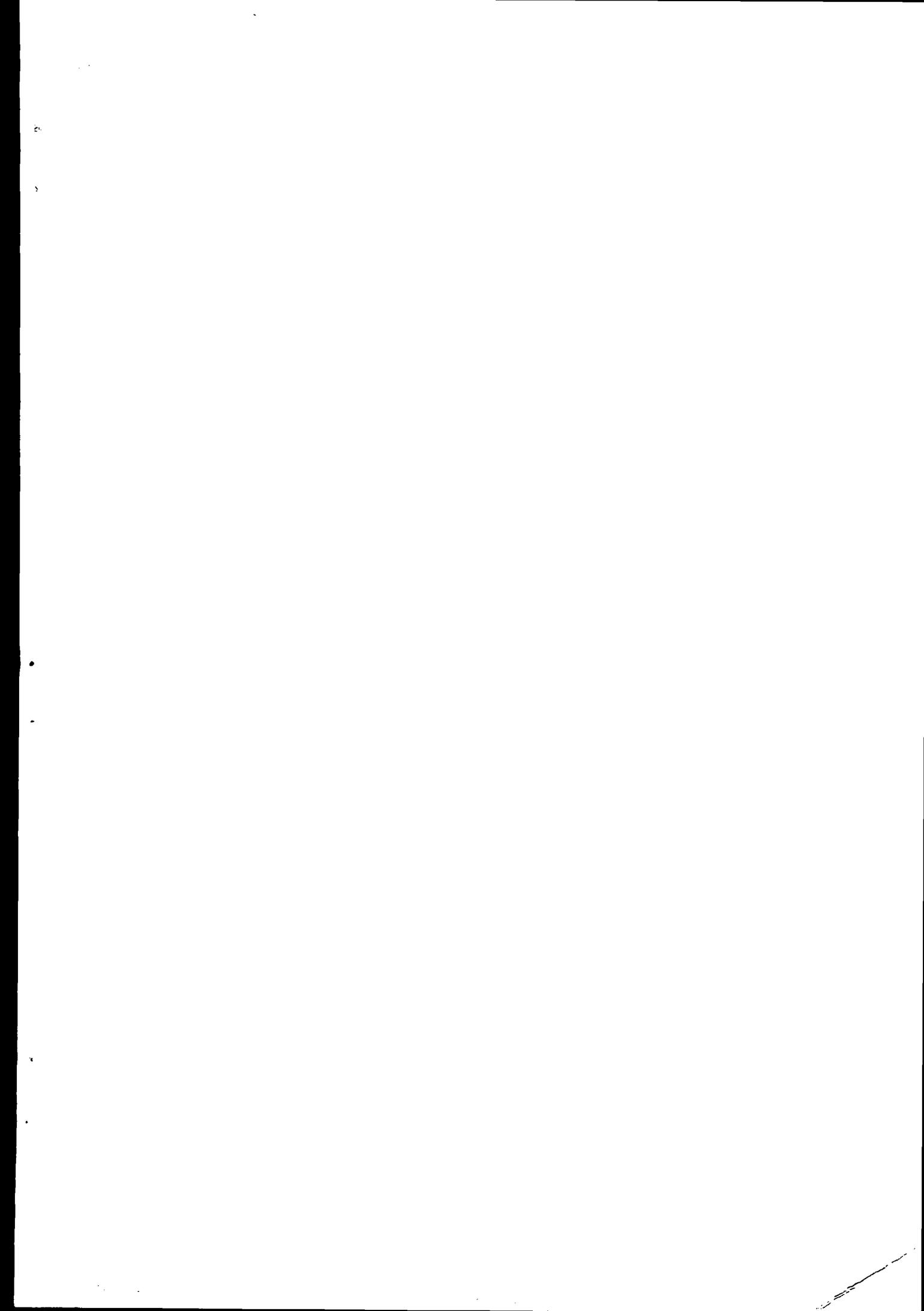
Le cas particulier de la fissure plane a fait l'objet d'une étude approfondie. Dans ce cas, la géométrie particulière de la fissure plane permet d'obtenir des résultats plus fins grâce à l'utilisation de la transformation de Fourier partielle selon la direction de la fissure. Nous obtenons dans ce cas une décomposition de l'opérateur de bord en la somme d'un opérateur normal, représentant les modes normaux, et d'un opérateur tangentiel, représentant les modes tangentiels. On peut alors mener la théorie complète de l'existence et du comportement des modes guidés. Nous avons ainsi pu compléter et généraliser les résultats de la littérature en insistant notamment sur les propriétés des seuils (nombres d'ondes critiques en deçà desquels les modes ne peuvent se propager).

# Bibliographie

- [1] J. D. ACHENBACH. - *Wave Propagation in Elastic Solids*. - North Holland, 1980.
- [2] J. D. ACHENBACH ET A. K. GAUTESEN. - Elastic Surface Waves Guided by the Edge of a Slit. *J. Sound Vibr.*, vol. 53, 1977, pp. 407-416.
- [3] B. A. AULD. - *Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids*. - Wiley-Interscience, 1973, volume I et II.
- [4] A. BAMBERGER. - *Approximation de la Diffraction d'Ondes Elastiques, une Nouvelle Approche (I)*. - Rapport technique, Ecole Polytechnique, CMAP, 1983. Rapport Interne n° 91.
- [5] A. BAMBERGER, P. JOLY ET M. KERN. - Propagation d'Ondes Elastiques Guidées par la Surface Libre d'une Cavité de Section Arbitraire. *C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 304, n° 3, 1987, pp. 59-62. - série I.
- [6] A. BAMBERGER, P. JOLY ET M. KERN. - *Propagation d'Ondes Elastiques Guidées par la Surface Libre d'une Cavité de Section Arbitraire*. - Rapport de recherche n° 650, I.N.R.I.A., 1987.
- [7] A. BAMBERGER, P. JOLY ET M. KERN. - Propagation of Elastic Surface Waves along a Cylindrical Cavity of Arbitrary Cross Section. *R.A.I.R.O. Modél. Math. Anal. Numér.*, vol. 25, 1991, pp. 1-30.
- [8] M. BIOT. - Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid. *J. Appl. Physics*, vol. 23, 1952, pp. 997-1005.

- [9] A. BOSTROM ET A. D. BURDEN. - Propagation of Elastic Surface Waves and their Excitation by a Point Force. *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 72, 1982, pp. 914-1004.
- [10] A. D. BURDEN. - Propagation of Elastic Surface Waves along a Cylindrical Cavity of General Cross Section. *Wave Motion*, vol. 7, 1985, pp. 153-168.
- [11] A. D. BURDEN. - The Null-Field Approach and the Propagation of Elastic Surface Waves along Cylindrical Cavities. *Applied Scientific Research*, vol. 42, 1985, pp. 333-346.
- [12] R. DAUTRAY ET J. L. LIONS. - *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. - Masson, 1985, volume 2.
- [13] A. C. ERINGEN ET E. S. SUHUBI. - *Elastodynamics*. - Academic Press, 1974, volume I et II.
- [14] L. B. FREUND. - Surface Waves Guided by a Slit in an Elastic Solid. *J. Appl. Mech.*, vol. 39, 1972, pp. 1027-1032.
- [15] A. K. GAUTESEN ET J. D. ACHENBACH. - On the Existence of Surface Waves Guided by a Slit Edge of a Slit. *J. Appl. Math.*, vol. 35, 1977, pp. 301-306.
- [16] P. JOLY ET O. POISSON. - *Calcul de Pôles de Résonance associés à la diffraction d'Ondes Acoustiques et Élastiques par des Obstacles en Dimension 2*. - Rapport de recherche, I.N.R.I.A., 1991.
- [17] P. JOLY ET J. TLILI. - *Approche par Equations Intégrales d'un Problème d'Ondes de Surface Élastiques*. - Rapport de recherche, I.N.R.I.A., à paraître.
- [18] T. KATO. - *Perturbation Theory for Linear Operators*. - Springer, 1966.
- [19] P. E. LAGASSE. - Higher Order Finite Element Analysis of Topographic Guides Supporting Elastic Surface Waves. *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 53, 1973, pp. 1116-1122.
- [20] P. E. LAGASSE, I. M. MASON ET E. A. ASH. - Acoustic Surface Waveguides - Analysis and assessment. *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, vol. 21, 1973, pp. 225-236.

- [21] J. L. LIONS ET E. MAGENES. - *Problèmes aux limites non Homogènes et Applications*. - Dunod, 1968, volume 1.
- [22] I. A. MINDLIN. - Free Elastic Waves on the Surface of a Tube of Infinite Thickness. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 27, 1963, pp. 823-828.
- [23] J. A. MORRISON. - Propagation of High Frequency Surface Waves Along Cylinders of General Cross Section. *J. Math. Physics*, vol. 16, 1975, pp. 1786-1794.
- [24] J. A. MORRISON. - High Frequency Approximations for Elastic Surface Waves Propagating Along Cylinders of General Cross Section. *J. Math. Physics*, vol. 17, 1976, pp. 958-963.
- [25] J. C. NEDELEC. - *Approximation des Equations Intégrales en Mécanique et en Physique*. - Rapport technique, Ecole Polytechnique, CMAP, 1977. Cours de l'Ecole d'Eté CEA-EDF-INRIA.
- [26] J. NEČAS. - *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. - Masson, 1967.
- [27] M. REED ET B. SIMON. - *Methods of Modern Mathematical Physics*. - Academic Press, 1981, volume 1 et 4.
- [28] G. ROSENFELD ET J. B. KELLER. - Wave Propagation in Elastic Rods of Arbitrary Cross Section. *J. Comput. System Sci.*, vol. 4, 1970, pp. 15-28.
- [29] J. TLILI. - *Calcul Numérique d'Ondes de Surface Elastiques Guidées par une fissure*. - Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1991. Thèse d'université.
- [30] L. O. WILSON ET J. A. MORRISON. - Propagation of High Frequency Elastic Surface Waves along Cylinders of General Cross Section. *J. Math. Physics*, vol. 16, 1975, pp. 1795-1805.



**ISSN 0249-6399**