



HAL
open science

Onde guidées par une perturbation du demi-espace élastique homogène

Jean Duterte, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Jean Duterte, Patrick Joly. Onde guidées par une perturbation du demi-espace élastique homogène. [Rapport de recherche] RR-2324, INRIA. 1994. inria-00074350

HAL Id: inria-00074350

<https://inria.hal.science/inria-00074350v1>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***ONDES GUIDEES PAR LA PERTURBATION
GEOMETRIQUE LOCALE DU DEMI-ESPACE
ELASTIQUE HOMOGENE***

Jean Duterte, Patrick Joly

N° 2324

Juillet 1994

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,

modélisation

et logiciel numérique



*Rapport
de recherche*

1994

ONDES GUIDÉES PAR LA PERTURBATION GÉOMÉTRIQUE LOCALE DU DEMI-ESPACE ELASTIQUE HOMOGENE

Jean Duterte, Patrick Joly*

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique
Projet Ident

Rapport de recherche n° 2324 — Juillet 1994 — 290 pages

Résumé : Nous nous intéressons au problème de l'existence et du calcul numérique de modes guidés par la perturbation géométrique locale d'un demi-espace élastique 3D homogène. La géométrie du milieu est infinie et invariante dans la direction de propagation. Ce problème se ramène à un problème linéaire de valeurs propres, posé dans la section 2D transverse du guide. Nous présentons une méthode numérique permettant de calculer les relations de dispersion des modes ainsi que de les représenter. Cette méthode a comme principale caractéristique que le domaine de calcul est limité à la seule perturbation, grâce à l'introduction d'une condition aux limites transparentes à l'interface entre le demi-espace et la perturbation. Nous présentons les résultats numériques obtenus avec différents guides d'ondes étudiés par cette méthode.

Mots-clé : Ondes guidées - Espace élastique homogène - Opérateur auto-adjoint - Problème de valeurs propres - Condition aux limites transparentes - Calcul de résidus - Courbes de dispersion.

(Abstract: pto)

WAVES GUIDED BY THE LOCAL GEOMETRIC PERTURBATION OF THE HOMOGENEOUS ELASTIC HALF-SPACE

Abstract: We are interested in the problem of the existence and the numerical approximation of guided surface waves by a local geometrical perturbation of a 3D elastic homogeneous half-space. The geometry of the propagation medium is infinite and invariant by translation in the propagation direction. This problem can be reduced to a linear eigenvalue problem set in the 2D cross section of the propagation medium. We present a numerical method, that allows us to compute the dispersion curves of the modes, and to represent them. The principal characteristic of the method is that it allows us to reduce the computational domain to the geometrical perturbation, by means of the introduction of a transparent boundary condition on the interface with the perfect half-space. We present various numerical results obtained for different guides by this numerical method.

Key-words: Guide waves - Elastic homogeneous half-space - Self adjoint operator - Eigenvalue problem - Transparent boundary condition - Residues - Dispersion curves.

Remerciements

Nous remercions particulièrement Francis Collino pour l'intérêt qu'il a porté à ce sujet, et ses fructueuses suggestions.

Nous remercions aussi Anne-Sophie Bonnet et Christine Poirier de nous avoir apporté leur expérience dans ce domaine de recherche.

Nous remercions François Clément et Jean-Louis Vaudescal pour l'aide qu'ils nous ont donnée pour la partie mise en oeuvre informatique de ce travail.

Nous remercions aussi tous ceux qui ont contribué, même indirectement, à la réalisation de ce travail.

Table des matières

1	Le problème théorique	10
1.1	Position du problème	10
1.1.1	Géométrie du problème physique	10
1.1.2	Plan du chapitre	11
1.2	Formulation du problème	11
1.2.1	Equations du problème	11
1.2.2	Présentation des ondes guidées	12
1.3	Formulation mathématique du problème	13
1.3.1	Passage à un problème 2D	13
1.3.2	Formulation variationnelle du problème	16
1.3.3	Le problème de valeurs propres	17
1.4	Étude spectrale du problème	19
1.4.1	Rappels de théorie spectrale	19
1.4.2	Spectre essentiel de $A(\beta)$	20
1.4.3	Spectre discret de $A(\beta)$	37
2	Reformulation en un problème borné et principe de sa résolution numérique	39
2.1	Le problème équivalent borné, une première formulation	41
2.1.1	Une nouvelle condition aux limites, introduction de l'opérateur $S(\omega, \beta)$	41
2.1.2	Un nouvel opérateur	46
2.1.3	Des difficultés avec l'opérateur de bord $S(\omega, \beta)$	50
2.2	Contournement de la difficulté et reformulation du problème borné	50
2.2.1	Principe de la solution, introduction de l'opérateur $T(\omega, \beta)$	50
2.2.2	Écriture du problème dans la perturbation avec l'opérateur $T(\omega, \beta)$	55
2.3	Les grandes lignes de la méthode numérique	57
2.3.1	Écriture matricielle du problème avec l'opérateur $T(\omega, \beta)$.	57
2.3.2	Retour à l'opérateur $S(\omega, \beta)$	58
2.3.3	Le problème numérique final	59
2.4	Bilan et travail à venir	60

3	Le calcul de l'opérateur $T(\omega, \beta)$	61
3.1	Première écriture de $\hat{T}(\omega, \beta)$	61
3.2	Deuxième écriture de $\hat{T}(\omega, \beta)$	65
4	Calcul de la forme bilinéaire $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ associée à l'opérateur de bord $T(\omega, \beta)$	72
4.1	Expression en Fourier de $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$	72
4.2	Choix effectués pour la discrétisation	74
4.2.1	Choix des espaces d'approximation	74
4.2.2	Transformée de Fourier d'une fonction de base	74
4.2.3	Approximation de $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$	75
4.3	La matrice associée à $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$	76
4.3.1	Formation de la matrice	76
4.3.2	Les intégrales à calculer	79
4.3.3	Quelques propriétés de la matrice $[T]$	80
4.4	Un premier choix numérique important	83
4.5	Reformulation des intégrales à calculer	83
4.5.1	Remarque sur le polynôme $D(k^2)$	83
4.5.2	Nouvelle présentation des intégrales	84
5	Calcul des intégrales $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$	87
5.1	Etude des dénominateurs	88
5.1.1	Etude de la fonction de Rayleigh	88
5.1.2	Application de l'étude de $f(x)$ à $P(k^2)$	97
5.2	Résultats des calculs	104
6	Calcul des autres formes bilinéaires	118
6.1	Calcul de la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$	118
6.1.1	Rappels sur l'élément fini P_1	120
6.1.2	Application à la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$	124
6.1.3	Assemblage de la matrice $[A_h](\beta)$	131
6.2	Calcul de la forme bilinéaire $(u, v)_O$	131
6.3	Discrétisation des opérateurs de couplage C et C^t	132
7	Bilan de la discrétisation et compléments d'ordre numérique	135
7.1	Bilan de la discrétisation à ω et β fixés	135
7.2	Allure de la matrice $[F_h](\omega, \beta)$	137
7.3	Choix de la méthode de calcul des valeurs propres	138
8	La résolution du problème discret: la recherche des modes guidés	140
8.1	Détection des modes guidés pour une valeur de β donnée	141
8.2	Description de la technique de validation de la méthode	142
8.3	Principe du tracé des courbes de dispersion des modes guidés	145

9	Résultats numériques	148
9.1	Validation de la partie éléments finis P1	148
9.1.1	Le guide d'ondes circulaire	148
9.1.2	Le maillage utilisé	152
9.1.3	Exemple d'aspect d'un mode guidé	154
9.2	Le problème modèle: perturbation en forme de triangle	157
9.2.1	Motivation de ce choix	157
9.2.2	La détection des modes guidés pour β fixé	159
9.2.3	La validation définitive de la méthode	163
9.2.4	Courbes de dispersion	165
9.2.5	Allure des modes guidés	166
9.3	Perturbation en forme de vitrail	181
9.3.1	Description de la perturbation	181
9.3.2	Courbes de dispersion	182
9.3.3	Allure des modes guidés	183
A	Détail du calcul des intégrales $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$:	191
A.1	Calcul de $J(p, n)$	191
A.1.1	Cas où $p > 0$	192
A.1.2	Cas où $p = 0$	194
A.2	Calcul de $I(p, n)$ et $I'(p, n)$	205
A.2.1	Cas où $p > 0$	207
A.2.2	Cas où $p = 0$	220
A.3	Calcul de $K(p, n)$	246
A.3.1	Cas où $p > 0$	248
A.3.2	Cas où $p = 0$	260

Introduction

Le domaine mathématique de la propagation des ondes élastiques, régi par les équations de l'élastodynamique, a été largement étudié par de nombreux auteurs, tels Achenbach [1], Auld [3], Eringen et Suhubi [24], Miklowitz [36]. Parmi les ondes se propageant dans des milieux élastiques, figurent les ondes de surfaces, qui ont comme particularités d'être guidées par la surface d'un corps, c'est à dire de se propager parallèlement à celle-ci, et de décroître exponentiellement lorsque l'on s'en éloigne. Pour l'existence de ces ondes, la condition de surface libre qui exprime le fait qu'aucune contrainte n'est exercée sur celle-ci, joue un rôle fondamental.

De telles ondes ont été étudiées pour la première fois par Lord Rayleigh [40], dans le cas du demi-espace homogène isotrope, le cas anisotrope ayant lui été étudié plus récemment par Guillot [26], et Chadwick [19]. Dans ces deux cas, les calculs peuvent être effectués explicitement. Ces études ont été complétées par une analyse numérique dans le cas du demi-espace, menée par Joly [27]. Un autre cas où les calculs peuvent être menés explicitement, est celui de l'extérieur d'un cylindre infini, creux, de section circulaire, plongé dans un milieu homogène élastique: voir les travaux de Boström [14] et [15], Burden [17] et [18] et Midlin [37].

Il n'est pas possible dans tous les cas de mener les calculs analytiquement, et d'autres techniques d'analyse mathématique, utilisant la théorie spectrale, ont été utilisées pour mener à bien l'étude théorique des ondes de surfaces. C'est ce qu'ont fait par exemple dans le cas du cylindre infini, quand la section est quelconque, Bamberger-Joly-Kern [9], ou Wilson et Morrison [44] pour une étude du comportement à hautes fréquences des modes, et dans la cas de la fissure, Joly-Tlili [28]. Nous renvoyons aussi le lecteur aux travaux de Gantesen et Achenbach [2].

Parallèlement à ces études purement théoriques, des méthodes numériques ont été développées pour le calcul de ces ondes. Citons Boström-Burden [16], ou Tlili [41] pour le cas de cavités cylindriques de sections arbitraires, ou encore Lagasse [31] et [32] dans le cas de guides topographiques. C'est dans cette dernière lignée que se situe le travail que nous présentons dans ce rapport.

L'usage des techniques mathématiques et numériques employées pour traiter ces problèmes, n'est pas spécifique aux traitements des ondes de surfaces en l'élasticité. Des problèmes d'ondes guidées les utilisant se rencontrent dans nombre de domaines de la physique, et ont fait l'objet de très diverses études mathématiques. En acoustique, citons par exemples Auld [3], Wilcox [43], Parker et Maugin [38]. En électromagnétisme, Marcuse [34], Bamberger-Bonnet [7], Bonnet [13] et [12], Djelloui [23], et très récemment Poirier [39], se sont intéressés à différents types de guides. Le cas hétérogène en élasticité a été lui étudié par Bamberger-Dermanjian-Joly dans [8]. Le cas de l'hydrodynamique a été abordé par Ursell [42] et Bonnet-Joly [21].

La différence fondamentale entre les cas précédemment cités, (acoustique et électromagnétisme notamment), où l'existence des ondes guidées est uniquement sujette à la présence d'hétérogénéités des coefficients physiques, et l'élasticité, tient dans le fait que le guidage est rendu aussi possible par l'existence d'une condition de surface libre dans ce cas.

Le problème que nous abordons ici, est celui d'un guide topographique, évoqué par Auld [3], constitué par un demi-espace élastique homogène isotrope, géométriquement localement perturbé, et invariant dans une direction d'espace, avec condition de surface libre à l'interface avec le vide. Les ondes guidées seront des solutions particulières se propageant dans la direction d'invariance, harmoniques, caractérisées par leur nombre d'onde β et leur fréquence ω , et dont l'énergie transverse sera essentiellement concentrée dans la zone perturbée du demi-espace. Il s'agit d'un problème sensiblement plus difficile que ceux évoqués plus haut. En particulier, il n'existe à notre connaissance aucun résultat publié sur l'existence, (au sens mathématique du terme), d'ondes de surface dans ce type de situation. Ce qui explique que les études menées sur ce problème soient de natures essentiellement numériques. Citons les travaux de Lagasse [31] et [32], et Maradudin [33].

Nous présentons ici une méthode de calcul numérique destinée à calculer les courbes de dispersion des modes, quand ils existent. L'étude théorique de l'existence des modes ne sera pas abordée ici, et est renvoyée à une publication ultérieure. La méthode couple éléments finis et équations intégrales. Son avantage principal, et par là-même son originalité, est de limiter le domaine de calcul à la seule perturbation du demi-espace, le prix à payer étant que le problème est alors non-linéaire par rapport aux deux paramètres du problème, le nombre d'onde et la fréquence.

L'article est organisé de la façon suivante:

Chapitre 1:

Le problème physique y est décrit, puis formulé mathématiquement: il se présente alors sous la forme d'un problème de valeurs propres posé dans toute la section

du guide, où le carré de la fréquence joue le rôle de valeur propre, et où le nombre d'onde apparaît comme un paramètre.

Chapitre 2:

Le problème précédent est ramené à un problème équivalent borné, c'est à dire posé dans la seule perturbation du guide, grâce à l'introduction d'une condition aux limites transparente à l'interface perturbation-demi-espace.

Chapitre 3:

L'opérateur de bord intervenant dans la condition aux limites transparente, est calculé.

Chapitres 4 et 5:

La discrétisation et les résultats du calcul intégral associé à l'opérateur de bord sont présentés.

Chapitre 6:

La discrétisation par éléments finis de la partie élasticité à l'intérieur de la perturbation est présentée.

Chapitres 7 et 8:

L' algorithme complet de la résolution du problème, le principe de la validation de la méthode, et le traitement de différentes difficultés d'ordre informatique, liées au problème, sont traités.

Chapitre 9:

La validation de la méthode, et l'étude numérique complète de deux guides d'ondes sont présentées.

Annexe:

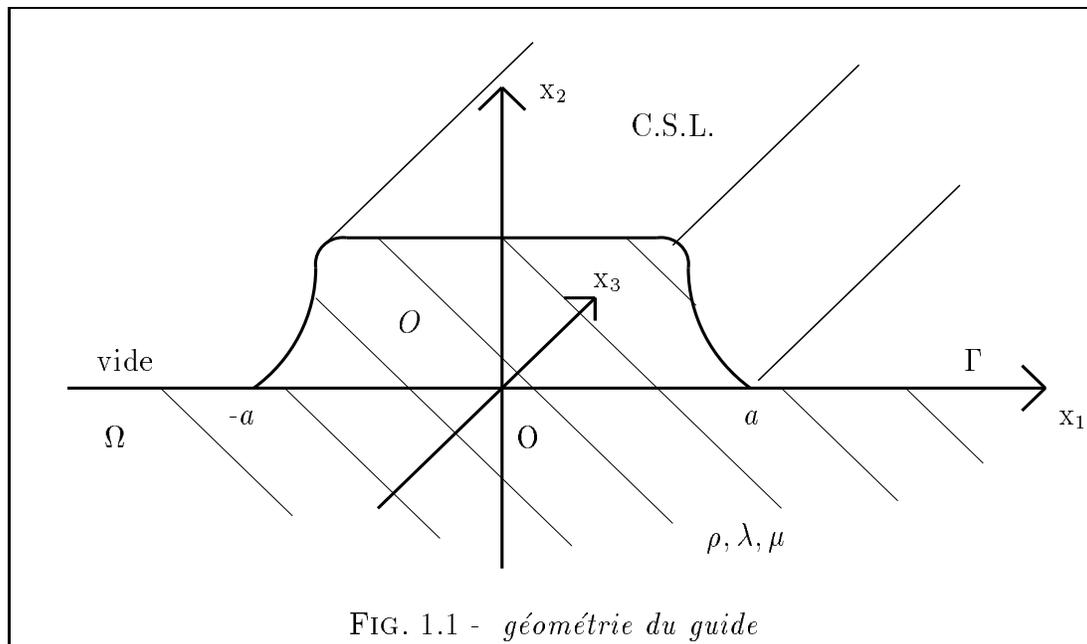
Elle contient le détail des calculs dont les résultats seuls sont donnés au sein du chapitre 5.

Chapitre 1

Le problème théorique

1.1 Position du problème

1.1.1 Géométrie du problème physique



$$(1.1) \quad \Omega = \{ x_2 \leq f(x_1) \}$$

où

$$(1.2) \quad \begin{cases} f(x_1) \geq 0, & |x_1| < a \\ f(x_1) = 0, & |x_1| \geq a \end{cases}$$

On considère un milieu de propagation invariant par translation dans la direction d'espace x_3 , i.e. de la forme $\Omega \times \mathbb{R}$. Sa section est un demi-espace localement perturbé, élastique, homogène et isotrope. Il est caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ constants, et par sa densité ρ , elle aussi constante. La perturbation est décrite à l'aide une fonction $f(x_1)$ qui est continue, positive sur $[-a; a]$ et nulle en dehors. L'interface entre le vide et la matière est $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Nous nous intéressons à un phénomène de propagation d'ondes dans ce milieu: nous nous intéressons à un type particulier de solutions, qui sont les ondes guidées: une telle onde se propage sans déformation dans la direction x_3 : nous espérons obtenir le guidage grâce à la conjonction des deux propriétés suivantes: le fait de mettre une condition de surface libre à l'interface $\Gamma \times \mathbb{R}$ entre la matière et le vide (on montre qu'il n'existe pas d'onde guidée avec la condition de Dirichlet homogène), et le fait d'avoir localement perturbé le demi-espace (on montre qu'il n'existe pas de mode guidé dans le cas du demi-espace parfait).

1.1.2 Plan du chapitre

L'objet de la première partie de ce chapitre est de formuler le problème dans $\Omega \times \mathbb{R}$, puis dans un deuxième temps de présenter le type particulier de solution recherchée: les ondes guidées. Dans la troisième partie, nous nous ramènerons à un problème posé dans la section non bornée Ω du guide. Nous aurons alors affaire à un problème de valeurs propres. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une dernière partie consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur du problème posé dans Ω .

1.2 Formulation du problème

1.2.1 Equations du problème

Nous nous intéressons à un phénomène de propagation dans un milieu élastique: il est décrit par les équations classiques de l'élastodynamique. En tenant compte de la condition de surface libre, notre problème s'écrit:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma(U) = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ \sigma(U) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{C.S.L. sur } \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases}$$

où

- \mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial\Omega$

- $U(x, t)$ est le champ vectoriel de déplacement.
- $x = (x_1, x_2, x_3)$
- Le tenseur des contraintes $\sigma(U)$ est relié au tenseur des déplacements $\varepsilon(U)$ par la loi de Hooke :

$$(1.4) \quad \sigma(U) = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(U) + 2 \mu \varepsilon(U)$$

- Le tenseur des déplacements $\varepsilon(U)$ est, lui, donné par :

$$(1.5) \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

Nous introduisons maintenant trois quantités qui joueront un rôle important dans tout le reste de ce travail: il s'agit d'abord des vitesses V_S et V_P définies par:

$$(1.6) \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Ces vitesses V_S et V_P sont respectivement la vitesse des ondes cisaillement et la vitesse de pression, appelées ondes S et ondes P. Elles sont présentées en détail dans [1] par exemple. Enfin on définit

$$(1.7) \quad \tau = \frac{V_S^2}{V_P^2}$$

En général, on considère que les coefficients λ et μ sont positifs, auquel cas la quantité τ vérifie la propriété suivante:

$$(1.8) \quad \tau \in] 0 ; \frac{1}{2} [$$

1.2.2 Présentation des ondes guidées

Définition 1.1

Une onde guidée par le demi-espace localement perturbé est une solution particulière de (1.3) de la forme :

$$(1.9) \quad U(x, t) = \tilde{u}(x_1, x_2) \exp i(\omega t - \beta x_3)$$

où

- $(\omega, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

- β est le nombre d'onde
- ω est la pulsation de l'onde

L'amplitude de l'onde $\tilde{u}(x_1, x_2) = (\tilde{u}_1(x_1, x_2), \tilde{u}_2(x_1, x_2), \tilde{u}_3(x_1, x_2))$ doit être H^1 intégrable, c'est à dire :

$$(1.10) \quad \int_{\Omega} |\tilde{u}(x_1, x_2)|^2 + |\nabla \tilde{u}(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty$$

L'équation (1.9) exprime le fait que le champ de perturbation est une onde harmonique en temps, se propageant dans la direction x_3 . Une telle onde se propage à la vitesse de phase $c = \omega/\beta$. L'équation (1.10) signifie, du point de vue de la physique, que **l'énergie transverse de l'onde est concentrée dans une région limitée de l'espace**, qui comme nous le constaterons ultérieurement, sera la perturbation du demi-espace. La troisième propriété d'un mode est, comme nous le verrons aussi plus tard, de n'exister que si ω et β sont reliés par une relation, dite **relation de dispersion du mode**.

1.3 Formulation mathématique du problème

1.3.1 Passage à un problème 2D

Notre problème est posé dans $\Omega \times \mathbb{R}$. En injectant la forme particulière de solution (1.9) dans la première équation du problème (1.3), on obtient le système suivant:

$$(1.11) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 \right) + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ \qquad \qquad \qquad - i\beta \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} - i\beta \tilde{u}_1 \right) \right] = -\rho\omega^2 \tilde{u}_1 \\ \\ \bullet \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 \right) + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right] \\ \qquad \qquad \qquad - i\beta \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_2 \right) \right] = -\rho\omega^2 \tilde{u}_2 \\ \\ \bullet \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_1} - i\beta \tilde{u}_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_2 \right) \right] \\ \qquad \qquad \qquad - i\beta \left[\lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} - i\beta \tilde{u}_3 \right) - 2\mu i\beta \tilde{u}_3 \right] = -\rho\omega^2 \tilde{u}_3 \end{array} \right.$$

On remarque que dans ce système (1.11), les dérivées partielles par rapport à x_3 sont remplacées par le facteur multiplicatif $-i\beta$.

Afin de se ramener à des fonctions réelles, on effectue le changement de variables suivant :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_1 = u_1 \\ \tilde{u}_2 = u_2 \\ \tilde{u}_3 = i u_3 \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors le système équivalent suivant :

$$(1.13) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3 \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] \\ \qquad \qquad \qquad + \beta \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta u_1 \right) \right] = -\rho \omega^2 u_1 \\ \bullet \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3 \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\ \qquad \qquad \qquad + \beta \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta u_2 \right) \right] = -\rho \omega^2 u_2 \\ \bullet \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta u_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta u_2 \right) \right] \\ \qquad \qquad \qquad - \beta \left[\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3 \right) + 2\mu \beta u_3 \right] = -\rho \omega^2 u_3 \end{array} \right.$$

Nous posons :

$$(1.14) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^\beta(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta u_1 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta u_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \beta u_1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \beta u_2 \right) & \beta u_3 \end{pmatrix} \\ \text{tr } \varepsilon^\beta(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \beta u_3 \\ \sigma^\beta(\mathbf{u}) \text{ où } \sigma_{ij}^\beta(\mathbf{u}) = \lambda \delta_{ij} \text{tr } \varepsilon_{ij}^\beta(\mathbf{u}) + 2 \mu \varepsilon_{ij}^\beta(\mathbf{u}), \text{ avec } i, j \in [1; 3] \end{array} \right.$$

Nous formulons alors le problème: “chercher les ondes guidées par un demi-espace élastique localement perturbé” de la façon suivante:

$$\begin{array}{l}
\text{Etant donné } \beta > 0, \text{ trouver } \omega^2 \\
\text{et } u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2)) \text{ vérifiant :} \\
\int_{\Omega} |u(x_1, x_2)|^2 + |\nabla u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty \quad , \quad u \neq 0 \\
\text{et tels que :} \\
(1.15) \quad -\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^{\beta}(u) \right) - \beta \sigma_{ij}^{\beta}(u) = \rho \omega^2 u_i \quad , \quad i = 1, 2 \quad \text{dans } \Omega \\
-\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{3j}^{\beta}(u) \right) + \beta \sigma_{3j}^{\beta}(u) = \rho \omega^2 u_3 \quad \text{dans } \Omega \\
\sigma^{\beta}(u) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma
\end{array}$$

Nous constatons que nous nous sommes déjà ramenés à un problème posé uniquement dans la section Ω du guide. Nous sommes donc passés d'un problème 3D à un problème 2D. De plus, il apparaît comme un problème de valeurs propres pour un opérateur différentiel dont les coefficients dépendent de β et où ω^2 joue le rôle de la valeur propre. Ce choix est l'inverse de celui fait dans certaines applications physiques, où la relation de dispersion s'écrit sous la forme $\beta = F(\omega)$, mais il est tel quel plus agréable à manipuler du point de vue mathématique.

1.3.2 Formulation variationnelle du problème

Nous précisons d'abord le cadre fonctionnel. Nous commençons par poser:

$$H = L^2(\Omega)^3 \quad ; \quad V = H^1(\Omega)^3$$

où H est muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx \text{ pour tout } (u, v) \in H \times H$$

Rappelons que V est dense dans H .

Nous avons utilisé la convention de sommation des indices qui se répètent.

Enfin, en utilisant formule de Green et la condition de surface libre, on montre que (1.15) est équivalent au problème variationnel suivant:

$$(1.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(\beta; u, v) = \omega^2(u, v) \quad (\forall v \in V) \end{array} \right.$$

où $a(\beta; u, v)$ est la forme bilinéaire classique de l'élastodynamique sur $V \times V$ définie par:

$$(1.17) \quad a(\beta; u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\beta}(u) \varepsilon_{ij}^{\beta}(v) dx \quad i, j = 1, 2, 3$$

Cette forme bilinéaire est symétrique et positive sur V . En effet, on a aussi

$$(1.18) \quad a(\beta; u, v) = \lambda \int_{\Omega} \left(\text{tr} \left(\varepsilon^{\beta}(u) \right) \right)^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \left(\varepsilon_{ij}^{\beta}(u) \right)^2 dx \quad i, j = 1, 2, 3$$

La forme bilinéaire $a(\beta; u, v)$ est aussi continue sur V . Nous allons pouvoir alors parler d'opérateur associé à $a(\beta; u, v)$.

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes, valables pour toute la suite de ce travail, sur le domaine Ω :

- (i) Nous supposons que la perturbation O du demi-espace est telle que l'inégalité de Korn dans Ω est vérifiée, ce qui est vrai si ∂O est lipschitzien, ou bien quand l'ouvert O est étoilé (voir [30]). Cette hypothèse est nécessaire pour obtenir le caractère auto-adjoint de l'opérateur associé à la forme bilinéaire $a(\beta; u, v)$.
- (ii) Nous demandons de plus à O de vérifier la propriété du segment, (voir [35]), ceci afin d'avoir l'injection compacte de $H_{loc}^1(\Omega)^3$ dans $L^2(\Omega)^3$. Cette hypothèse est nécessaire pour la détermination du spectre essentiel de l'opérateur associé à la forme bilinéaire $a(\beta; u, v)$.

1.3.3 Le problème de valeurs propres

A la forme bilinéaire $a(\beta; u, v)$ est associé un opérateur $A(\beta)$ défini dans H par

$$(1.19) \quad \forall (u, v) \in D(A(\beta)) \times V, \quad A(\beta; u, v) = a(\beta; u, v)$$

Le domaine de l'opérateur $A(\beta)$ est défini par:

$$(1.20) \quad D(A(\beta)) = \{u \in V / \mathcal{A}(\beta)u \in H ; \sigma^\beta(u) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{A}(\beta)$ est défini par:

$$(1.21) \quad [\mathcal{A}(\beta)u]_i = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\beta(u) \right) + \beta \sigma_{ij}^\beta(u) \right) & i = 1, 2 \\ -\frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{3j}^\beta(u) \right) - \beta \sigma_{3j}^\beta(u) \right) & i = 3 \end{cases}$$

Nous avons alors, quand $u \in D(A(\beta))$:

$$A(\beta) u = \mathcal{A}(\beta)u$$

Et nous pouvons réécrire (1.16) sous la forme équivalente:

$$(1.22) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in D(A(\beta)) \text{ et } \omega^2 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{tel que} \\ A(\beta)u = \omega^2 u \end{array} \right.$$

Théorème 1.1

L'opérateur $A(\beta)$ est non borné, positif, et auto-adjoint.

Preuve:

Le fait qu'il soit positif et non borné provient de la définition même de l'opérateur. Il est aussi auto-adjoint grâce à l'hypothèse (i). \square

Nous constatons immédiatement dans cette formulation du problème de la recherche des ondes guidées possède les aspects suivants:

- Nous sommes bien passés d'un problème 3D à un problème équivalent 2D, posé dans la section non bornée Ω du guide.

- Nous avons bien affaire à un problème de valeurs propres, où ω^2 joue le rôle de la valeur propre et où β apparaît comme un paramètre.
- D'autre part, le problème (1.22) constitue une caractérisation mathématique de la relation de dispersion qui lie β et ω . Des études (semblables à celle que nous allons mener) de telles relations de dispersion peuvent être trouvées dans [41] et [8] par exemple.
- Enfin, ici, nous avons fixé comme paramètre β , mais ce n'est pas une obligation: nous aurions pu fixer ω , et chercher les β solutions de (1.22).

1.4 Etude spectrale du problème

Comme nous avons affaire à un problème de valeurs propres, nous allons procéder à l'étude du spectre de l'opérateur $A(\beta)$. Le fait que la section Ω du guide ne soit pas bornée entraîne que les réponses aux questions de l'existence et du nombre de solutions du problème ne sont pas immédiates et justifie une étude spectrale approfondie.

1.4.1 Rappels de théorie spectrale

- Le spectre de $A(\beta)$ est

$$\sigma(A(\beta)) = \{ z \in \mathbb{C}, A(\beta) - zI \text{ n'admet pas d'inverse borné} \}$$

Comme $A(\beta)$ est auto-adjoint, $\sigma(A(\beta)) \subset \mathbb{R}$.

On note $\rho(A(\beta))$ la résolvante de $A(\beta)$, complémentaire du spectre.

Définition 1.2

Un opérateur A de domaine $D(A) \subset H$ Hilbert à valeurs dans H est à résolvante compacte ssi $(\forall \lambda \in \rho(A))$

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

où $\mathcal{L}(H)$ est l'ensemble des opérateurs compacts fermés de $\mathcal{K}(H)$.

Un tel opérateur A borné inférieurement, auto-adjoint et à résolvante compacte, a un spectre constitué uniquement de valeurs propres de multiplicités finies:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}, \lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \lambda_n \text{ de multiplicité finie}, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

Comme la section Ω du guide n'est pas bornée, nous n'avons pas l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, nous ne sommes donc pas dans le cadre bien connu des opérateurs à résolvante compacte. $A(\beta)$ est alors un opérateur à résolvante non compacte et son spectre n'est pas constitué uniquement de valeurs propres. Nous distinguerons alors à l'intérieur de $\sigma(A(\beta))$ deux parties distinctes et complémentaires appelées spectre essentiel et spectre discret, notées respectivement σ_{ess} et σ_d .

$$(1.23) \quad \begin{cases} \sigma(A(\beta)) = \sigma_{ess} \cup \sigma_d \\ \sigma_{ess} \cap \sigma_d = \emptyset \end{cases}$$

Nous avons les caractérisations suivantes données dans [9] pour ces deux spectres:

$$(1.24) \quad \lambda \in \sigma_{ess}(A(\beta)) \Leftrightarrow \exists (u_n) \in D(A(\beta)) \text{ t.q. } \begin{cases} \|u_n\|_H = 1 \\ \|A(\beta) - \lambda u_n\|_H \rightarrow 0 \\ u_n \rightharpoonup 0 \text{ H faible} \end{cases}$$

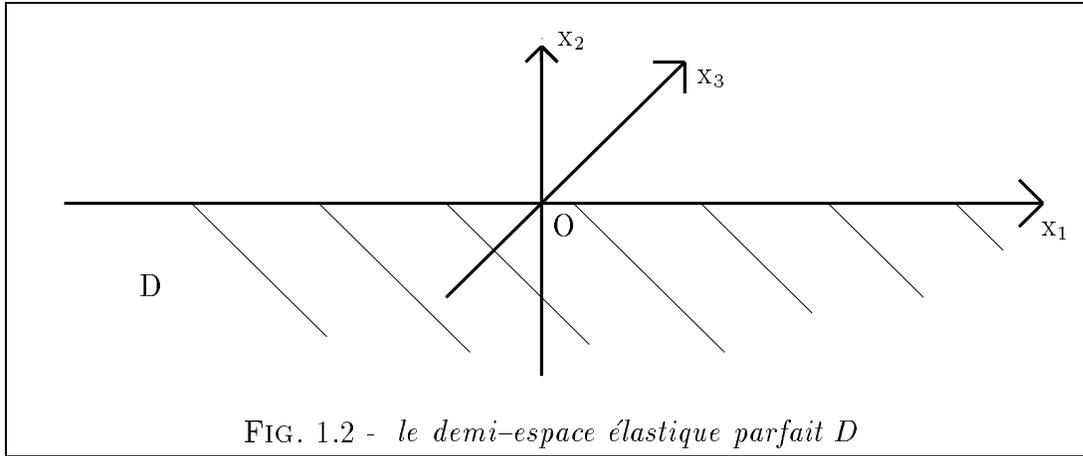
$$(1.25) \quad \lambda \in \sigma_d(A(\beta)) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \text{ valeur propre} \\ \lambda \text{ de multiplicité finie} \\ \lambda \text{ point isolé du spectre} \end{cases}$$

1.4.2 Spectre essentiel de $A(\beta)$

Il est invariant par perturbation compacte. C'est pourquoi nous le déterminons à partir du spectre de l'opérateur qui intervient dans le cas du demi-espace parfait.

Cas du demi-espace parfait

Pour déterminer le spectre essentiel de l'opérateur, on s'intéresse à un problème proche de celui qui nous occupe. Il s'agit du problème de l'élastodynamique dans le demi-espace parfait, que nous noterons D.



La forme bilinéaire qui apparaît dans ce nouveau problème est semblable à celle obtenue précédemment:

$$(1.26) \quad \begin{cases} a_D(\beta; u, v) = \int_D \sigma_{ij}^\beta(u) \varepsilon_{ij}^\beta(v) dx & i, j = 1, 2, 3 \\ (u, v) \in H^1(D)^3 \end{cases}$$

Nous notons A_D l'opérateur associé à $a_D(\beta; u, v)$. On montre, (voir[27]), résultat que nous admettrons ici, que l'opérateur $A_D(\beta)$ a un spectre purement continu:

$$(1.27) \quad \sigma(A_D(\beta)) = \sigma_{ess}(A_D(\beta)) = [V_R^2 \beta^2; +\infty)$$

où V_R est la vitesse de Rayleigh. Nous remarquons que le spectre ponctuel de l'opérateur $A_D(\beta)$ est vide et que par conséquent, il ne peut y avoir de modes guidés dans le cas du demi-espace parfait.

La vitesse de Rayleigh

Son origine est la suivante: considérons cette fois le problème de l'élastodynamique en 2D dans le plan (x_2, x_3) et cherchons des solutions de la forme:

$$u(x_2) \exp i(\omega t - \beta x_3)$$

où $u(x_2) = (u_2(x_2, x_3), u_3(x_2, x_3))$ est exponentiellement décroissante depuis la surface et vérifie:

$$\int_{-\infty}^0 |u(x_2)|^2 + \left| \frac{du(x_2)}{dx_2} \right|^2 dx_2 < +\infty$$

Il s'agit ici encore d'un problème de valeurs propres:

$$(1.28) \quad \tilde{a}(\beta; u, v) = \omega^2 (u, v) \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}_-)$$

où la forme bilinéaire \tilde{a} est donnée par:

$$(1.29) \quad \begin{cases} \tilde{a}(\beta; u, v) = \lambda \int_{-\infty}^0 \left| \frac{du_2}{dx_2} + \beta u_3 \right|^2 dx_2 \\ + 2\mu \int_{-\infty}^0 \left(\left| \frac{du_2}{dx_2} \right|^2 + \beta^2 |u_3|^2 \right) dx_2 + \mu \int_{-\infty}^0 \left| \frac{du_3}{dx_2} - \beta u_2 \right|^2 dx_2 \end{cases}$$

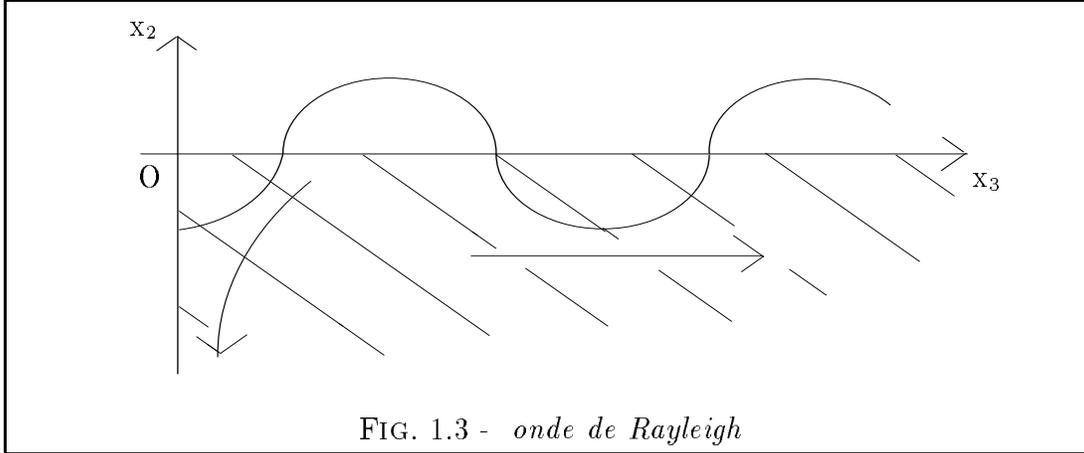


FIG. 1.3 - onde de Rayleigh

Proposition 1.1

Le problème admet une unique valeur propre $\omega = \beta V_R$ où V_R est solution de l'équation de Rayleigh:

$$(1.30) \quad 4 \left(1 - \frac{V^2}{V_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{V^2}{V_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 - \frac{V^2}{V_S^2} \right)^2 = 0$$

Cette équation d'inconnue V provient de la nécessité de vérifier la condition de surface libre. De plus,

$$V_R \in]0; V_S[$$

Pour déterminer V_R , il suffit de déterminer le zéro de $f(x) \in]0; V_S^2[$ où:

$$(1.31) \quad f(x) = \frac{x^3}{V_S^8} - 8 \frac{x^2}{V_S^6} + 8 \frac{x}{V_S^2} \left(\frac{3}{V_S^2} - \frac{2}{V_P^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{V_P^2} - \frac{1}{V_S^2} \right)$$

Cette étude est détaillée dans [27].

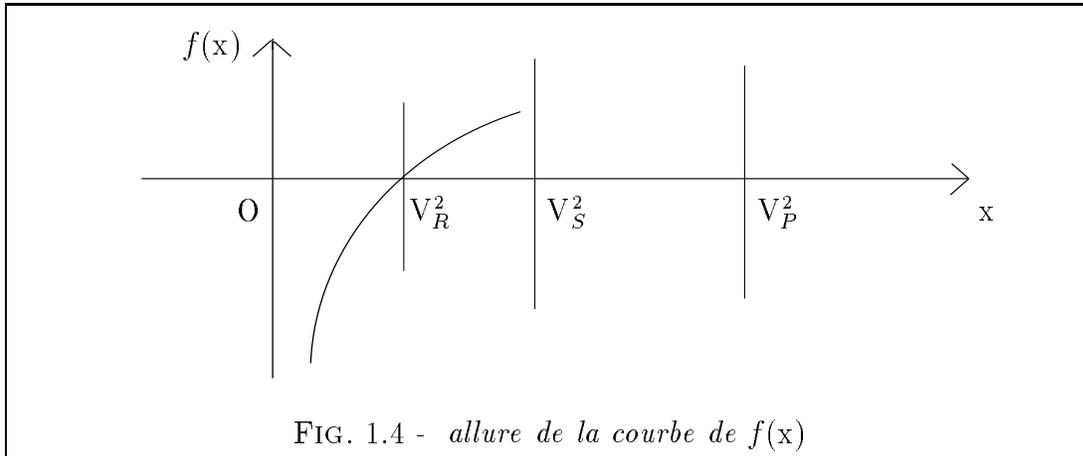


FIG. 1.4 - allure de la courbe de $f(x)$

Détermination du spectre essentiel

Théorème 1.2

$$(1.32) \quad \sigma_{ess} (A(\beta)) = \sigma_{ess} (A_D(\beta)) = [V_R^2 \beta^2 ; +\infty)$$

Démonstration

Elle se fait par une méthode de perturbation compacte et utilise l'hypothèse géométrique (ii) sur Ω .

Nous montrons dans un premier temps l'inclusion:

$$i) \quad \sigma_{ess}(A(\beta)) \subset [V_R^2 \beta^2; +\infty)$$

Le spectre de $A_D(\beta)$ est absolument continu, d'où:

$$d(\beta; u, u) = a_D(\beta; u, u) - \beta^2 V_R^2 \int_D \rho |u|^2 dx \geq 0$$

$$a(\beta; u, u) = a_D(\beta; u, u) + \int_O \sigma_{ij}^\beta(u) \varepsilon_{ij}^\beta(u) dx$$

Par conséquent:

$$a(\beta; u, u) - \beta^2 V_R^2 \|u\|_H^2 = \begin{pmatrix} \left\{ a_D(\beta; u, u) - V_R^2 \int_D \rho |u|^2 dx \right\} \\ + \int_O \sigma_{ij}^\beta(u) \varepsilon_{ij}^\beta(u) dx \\ - \beta^2 V_R^2 \int_O \rho |u|^2 dx \end{pmatrix}$$

Introduisons les formes bilinéaires suivantes:

$$\begin{aligned} a_O(\beta; u, v) &= \int_O \sigma_{ij}^\beta(u) \varepsilon_{ij}^\beta(v) \, dx \\ p(\beta; u, v) &= -\beta^2 V_R^2 \int_O \rho uv \, dx \end{aligned}$$

a_O est positive et nous avons le résultat de compacité suivant sur $p(\beta; u, v)$:

Lemme 1.1 .

Pour toute suite (u_n) bornée dans $H^1(O)^3$ et convergeant faiblement dans $L^2(O)^3$ vers une limite u , on a:

$$(1.33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(\beta; u_n, u_n) = p(\beta; u, u)$$

Ce lemme est immédiat grâce à l'injection compacte de $H^1(O)^3$ dans $L^2(O)^3$ et à l'expression simple de $p(\beta; u, v)$.

Soit $\lambda \in \sigma_{ess}$ alors $\exists (u_n)$ vérifiant (1.24). Alors:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [a(\beta; u_n, u_n) - \beta^2 V_R^2 \rho(u_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(A(\beta) - \lambda)u_n, u_n] - \beta^2 V_R^2 = -\beta^2 V_R^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [d(\beta; u_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n) + a_O(\beta; u_n, u_n) - p(\beta; u_n, u_n)] \end{aligned}$$

or si (u_n) est bornée dans $H^1(O)^3$ et tend faiblement vers 0 dans $L^2(O)^3$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\beta; u_n, u_n) = 0$$

ce qui donne

$$-\beta^2 V_R^2 = -\lambda + d(\beta; u_n, u_n) + a_O(\beta; u_n, u_n)$$

Comme $d(\beta; u_n, u_n) + a_O(\beta; u_n, u_n) \geq 0$, on a le résultat. Enfin, comme l'inégalité de Korn est vraie par hypothèse sur O , on a bien (u_n) bornée dans $H^1(O)^3$, ce qui donne i).

Nous montrons maintenant l'inclusion réciproque:

$$ii) \quad \sigma_{ess}(A(\beta)) \supset [V_R^2 \beta^2; +\infty)$$

Nous posons $\Lambda = V_R^2 \beta^2 + k_1^2$ avec $k_1 \in \mathbb{R}^*$. Nous allons construire pour toute valeur de Λ une suite singulière $(u_n) \in D(A(\beta))$ vérifiant (1.24). Nous considérons d'abords l'onde suivante:

$$(1.34) \quad \ddot{u} = u_R(\beta, x_2) \exp(-ik_1 x_1) \exp i(\omega t - \beta x_3) \quad \text{avec} \quad u_R = \begin{pmatrix} u_1^R \\ u_2^R \\ u_3^R \end{pmatrix}$$

Cette onde est l'onde de Rayleigh précédente, se propageant cette fois-ci dans le demi-plan Π , vu de dessus dans la figure (1.5).

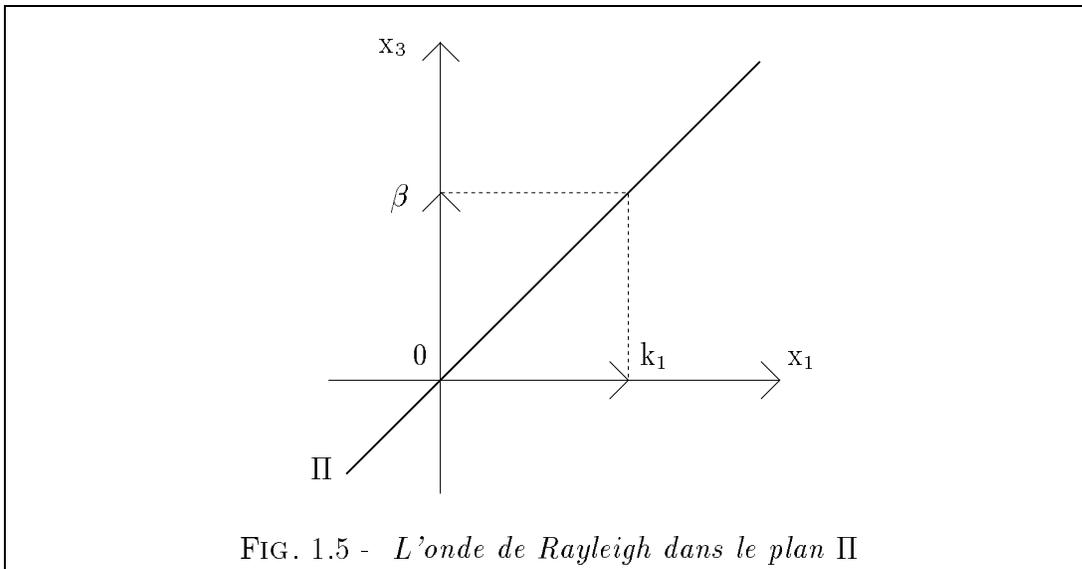


FIG. 1.5 - L'onde de Rayleigh dans le plan Π

Si on voulait fabriquer directement une suite singulière à partir de cette onde \ddot{u} se propageant dans la direction (k_1, β) , on la tronquerait dans la direction x_1 pour la rendre de carré intégrable, et on la translaterait dans cette même direction pour éviter la perturbation O . Nous aurions alors à considérer la suite

$$(1.35) \quad u_n = \frac{C}{\sqrt{n}} u_R(\beta, x_2) \exp(-ik_1 x_1) \theta\left(\frac{x_1}{n}\right) \quad n \geq 1$$

où $\theta(x_1)$ est une fonction C^∞ à support compact, son support évitant la perturbation O du demi-espace, C étant une constante réelle à fixer.

La difficulté qui apparaît alors, est que cette suite (u_n) n'appartient pas au domaine de l'opérateur $A(\beta)$, car elle ne vérifie pas la condition de surface libre.

Pour contourner cet obstacle, nous avons suivi une technique de troncature proposée dans [20]. Nous commençons par établir le lemme suivant, où $\mathbb{R}_-^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_2 \leq 0\}$

Lemme 1.2 .

Il existe une transformation linéaire bornée \mathcal{E} de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ dans $H^2(\mathbb{R}_-^2, \mathbb{R}^3)$ t.q. $\forall h \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, l'extension $u = \mathcal{E}h$ satisfait

$$(1.36) \quad \begin{cases} \mu \varepsilon_{12}^\beta(u)|_{x_2=0} = h_1(x_1) \\ (\lambda + 2\mu) \sigma_{22}^\beta(u)|_{x_2=0} = h_2(x_1) \\ \mu \varepsilon_{23}^\beta(u)|_{x_2=0} = h_3(x_1) \end{cases}$$

De plus, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^$ et si $\text{supp } h$ est compact, l'extension $u = \mathcal{E}h$ peut être choisie telle que*

$$(1.37) \quad \text{supp } u = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_-^2; d(x_1, \text{supp } h) < \varepsilon; |x_2| < 1\}$$

où d est la distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

Preuve du lemme

Soit

$$\gamma_0(v_i) = v_i|_{x_2=0} \quad \gamma_1(v_i) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)_{|x_2=0} \quad i = 1, 2, 3$$

pour tout $v \in H^2(\mathbb{R}_-^2, \mathbb{R}^3)$

Toute extension v de h doit satisfaire le système suivant

$$(1.38) \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \left(\gamma_1(v_1) + \gamma_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right) & = h_1(x_1) \\ (\lambda + 2\mu) \gamma_1(v_2) + \lambda \left(\gamma_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \beta \gamma_0(v_3) \right) & = h_2(x_1) \\ \mu (\gamma_1(v_3) - \beta \gamma_0(v_2)) & = h_3(x_1) \end{cases}$$

Le système (S) de (1.38) a une infinité de solutions. On impose alors en plus

$$(1.39) \quad \gamma_0(v_1) = \gamma_0(v_2) = \gamma_0(v_3) = 0$$

Soit une fonction $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_-)$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(0) = 1$. On obtient alors comme solution u de (S) et (1.39):

$$(1.40) \quad u = \begin{cases} \hat{u}_1(p, x_2) = \frac{1}{\mu} \frac{\alpha(\sqrt{1+p^2} x_2)}{\sqrt{1+p^2}} \hat{h}_1(p) \\ \hat{u}_2(p, x_2) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\alpha(\sqrt{1+p^2} x_2)}{\sqrt{1+p^2}} \hat{h}_2(p) \\ \hat{u}_3(p, x_2) = \frac{1}{\mu} \frac{\alpha(\sqrt{1+p^2} x_2)}{\sqrt{1+p^2}} \hat{h}_3(p) \end{cases}$$

u vérifie immédiatement (1.39), car $\alpha(0) = 0$.

Pour montrer que u vérifie le système (S), on passe en Fourier dans (S), ce qui donne

$$(1.41) \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \quad \widehat{\gamma_1(v_1)} = \hat{h}_1(p) \\ (\lambda + 2\mu) \quad \widehat{\gamma_1(v_2)} = \hat{h}_2(p) \\ \mu \quad \widehat{\gamma_1(v_3)} = \hat{h}_3(p) \end{cases}$$

car

$$\gamma_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right) = ip (\hat{v}_i)_{|x_2=0} = ip \gamma_0(\widehat{v}_i) = 0$$

et

$$\left(\frac{\widehat{\partial u_i}}{\partial x_2} \right)_{|x_2=0} = \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right)_{|x_2=0} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \hat{h}_i(p) \alpha' \left(\sqrt{1+p^2} x_2 \right)_{|x_2=0} & i = 1, 3 \\ \frac{1}{\lambda + 2\mu} \hat{h}_i(p) \alpha' \left(\sqrt{1+p^2} x_2 \right)_{|x_2=0} & i = 2 \end{cases}$$

Comme $\alpha'(0) = 1$, on a bien la vérification de (1.41).

Il faut ensuite vérifier que la transformation \mathcal{E} est bien un opérateur borné de $H^2(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^3)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Il faut par conséquent trouver C' tel que

$$(1.42) \quad \|u\|_{H^2(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^3)} \leq C' \|h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}$$

On a que

$$\|u\|_{H^2} = \|u\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_{L^2}$$

Etant donné que nous disposons de l'expression de $\hat{u}(p, x_2)$, transformée de Fourier dans la direction x_1 de $\hat{u}(x_1, x_2)$, nous avons

$$\begin{cases} \|u_i\|_{H^2} \simeq \|\hat{u}_i\|_{L^2} + \|p \hat{u}_i\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right\|_{L^2} + \|p^2 \hat{u}_i\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_2^2} \right\|_{L^2} + \left\| p \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right\|_{L^2} \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{H^2} &\simeq \left\{ \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_i^2(p, x_2) dp dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ 2 \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} p^2 \hat{u}_i^2(p, x_2) dp dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left\{ \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right)^2(p, x_2) dp dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} p^4 \hat{u}_i^2(p, x_2) dp dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left\{ \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_2^2} \right)^2(p, x_2) dp dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} p^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right)^2(p, x_2) dp dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|u_i\|_{H^2}^2 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} (1+p^2)^2 \hat{u}_i^2(p, x_2) \, dp \, dx_2 \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} (1+p^2) \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right)^2(p, x_2) \, dp \, dx_2 \\
&+ 2 \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_2^2} \right)^2(p, x_2) \, dp \, dx_2
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases}
\hat{u}_i(p, x_2) &= C_i \frac{\alpha(\sqrt{1+p^2} x_2)}{\sqrt{1+p^2}} \hat{h}_i(p) & i = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2}(p, x_2) &= C_i \alpha'(\sqrt{1+p^2} x_2) \hat{h}_i(p) & i = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_2^2}(p, x_2) &= C_i \sqrt{1+p^2} \alpha''(\sqrt{1+p^2} x_2) \hat{h}_i(p) & i = 1, 2, 3
\end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_2^2} \right)^2(p, x_2) \, dp \, dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} C_i^2 (1+p^2) \hat{h}_i^2(p) \alpha''^2(\sqrt{1+p^2} x_2) \, dp \, dx_2 \\
&= C_i^2 \int_{\mathbb{R}} (1+p^2) \hat{h}_i^2(p) \left(\int_{\mathbb{R}_-} \alpha''^2(\sqrt{1+p^2} x_2) \, dx_2 \right) \, dp
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{1+p^2} x_2$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_2^2} \right)^2(p, x_2) \, dp \, dx_2 &= C_i^2 \int_{\mathbb{R}} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \hat{h}_i^2(p) \, dp \int_{\mathbb{R}_-} \alpha''^2(t) \, dt \\
&= C_i^2 \int_{\mathbb{R}_-} \alpha''^2(t) \, dt \|h_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}^2
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} (1+p^2) \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_2} \right)^2(p, x_2) \, dp \, dx_2 &= C_i^2 \int_{\mathbb{R}} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \hat{h}_i^2(p) \, dp \int_{\mathbb{R}_-} \alpha'^2(t) \, dt \\
&= C_i^2 \int_{\mathbb{R}_-} \alpha'^2(t) \, dt \|h_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\mathbb{R}} (1+p^2)^2 \hat{u}_i^2(p, x_2) dp dx_2 &= C_i^2 \int_{\mathbb{R}} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \hat{h}_i^2(p) dp \int_{\mathbb{R}_-} \alpha^2(t) dt \\ &= C_i^2 \int_{\mathbb{R}_-} \alpha^2(t) dt \|h_i\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}^2 \end{aligned}$$

Comme $\alpha(x_2) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_-)$, il existe $C' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que (1.42) soit vérifiée.

Enfin, si h est à support compact, on peut choisir $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$ telle que $\Phi \equiv 1$ sur un petit voisinage de $\text{supp } h$. Alors $\mathcal{E}h = \Phi u$ satisfait (1.36) et (1.39). En effet

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon_{12}^\beta(\Phi u)|_{x_2=0} &= \mu \left(\frac{\partial(\Phi_1 u_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\Phi_2 u_2)}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0} \\ &= \mu \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} u_1 + \Phi_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} u_2 + \Phi_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0} \end{aligned}$$

Or $\gamma_0(u_1) = \gamma_0(u_2) = 0$, ce qui entraîne

$$\mu \varepsilon_{12}^\beta(\Phi u)|_{x_2=0} = \mu \left(\Phi_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Phi_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0}$$

Mais comme sur $\text{supp } h$, $\Phi \equiv 1$, on a

$$\mu \varepsilon_{12}^\beta(\Phi u)|_{x_2=0} = h_1$$

De même, Φu vérifie les autres équations de (1.36). □

Nous appliquons maintenant ce résultat en réutilisant la fonction (1.35) précédente.

On note $h_n(x_1)$ la trace de $u_n(x_1, x_2)$ sur le bord de la section Ω du guide. $h_n(x_1)$ est à support compact et $\text{supp } h_n(x_1) \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_2 = 0\}$, car le support de u_n évite la perturbation. A cette restriction $h_n(x_1)$, nous pouvons lui

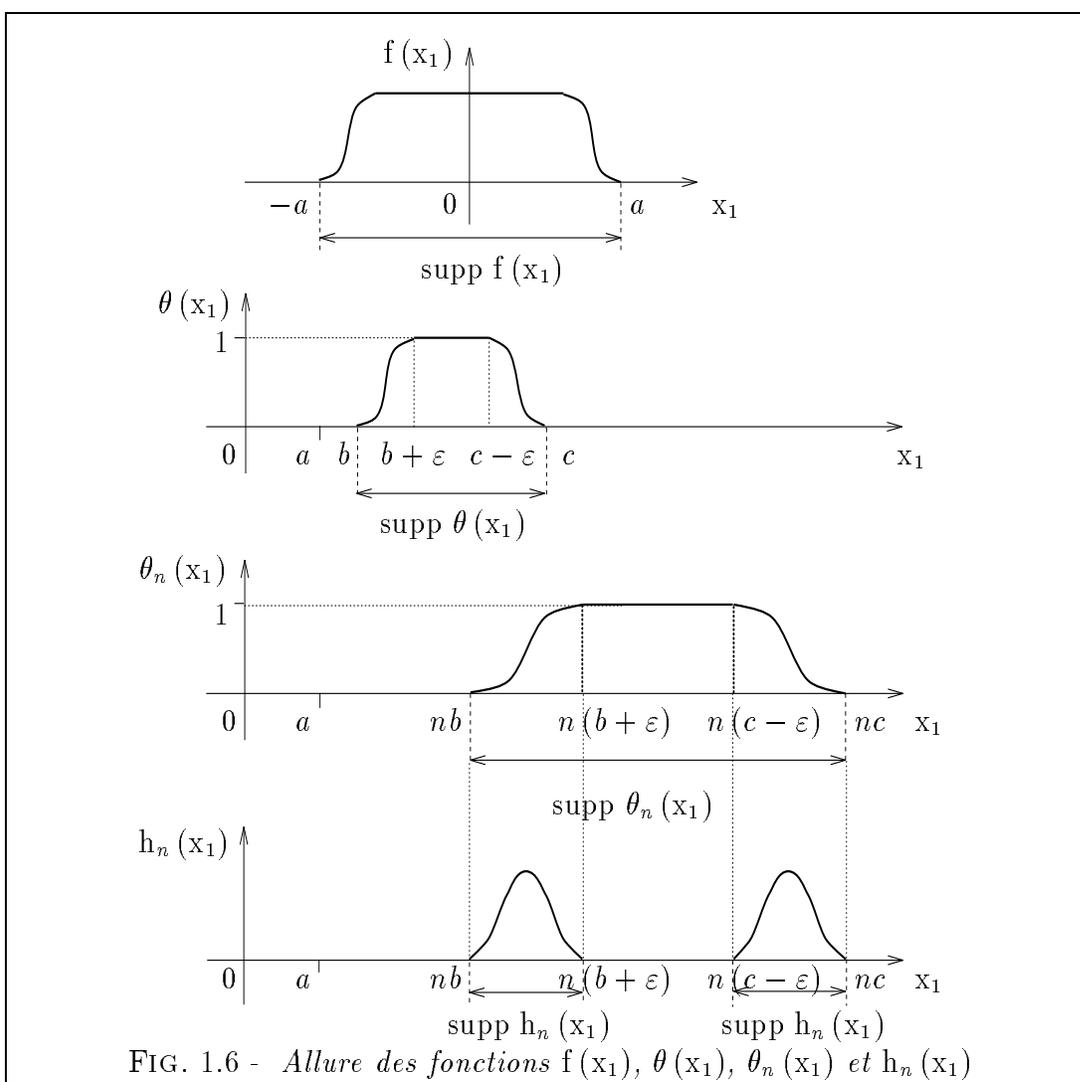
appliquer le lemme précédent, donc en donner un relèvement noté $\tilde{u}_n(x_1, x_2)$, qui aura un support compact dans un voisinage de $h_n(x_1)$.

Remarque:

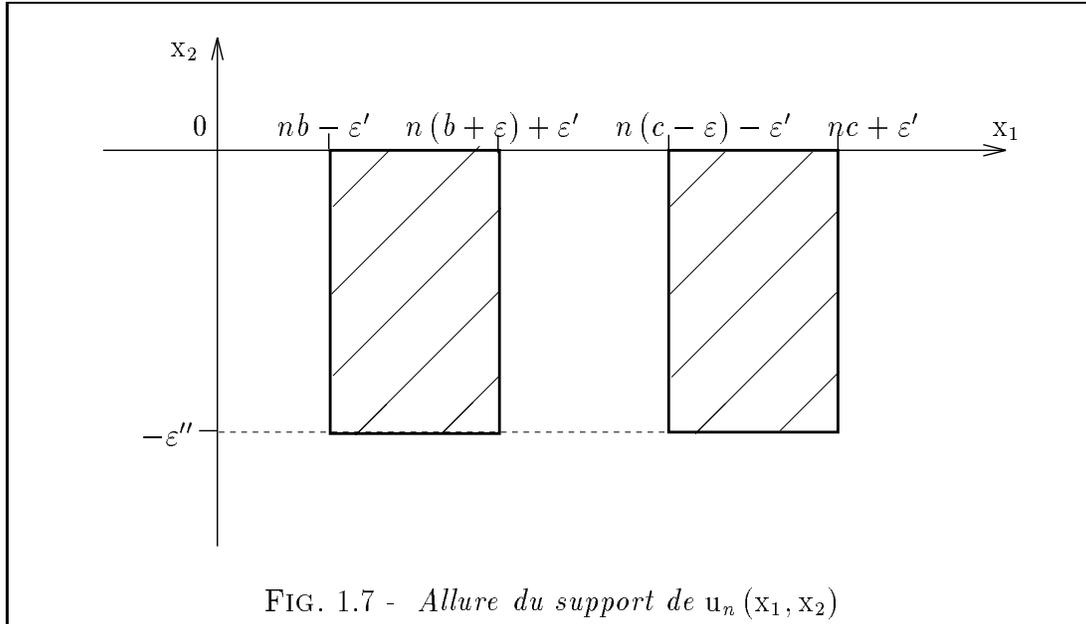
Si $f(x_1)$ est la fonction décrivant la perturbation du demi-espace, avec $\text{supp } f(x_1) \subset [-a; a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, et si $\theta(x_1)$ est telle que

$$\begin{cases} \text{supp } \theta(x_1) \subset [b; c] \text{ avec } b, c \in \mathbb{R}_+^*, a < b < c \\ \theta(x_1) = 1 \text{ sur } [b + \varepsilon; c - \varepsilon] \end{cases}$$

alors les fonctions $f(x_1)$, $\theta(x_1)$, $\theta_n(x_1)$ et $h_n(x_1)$ ont l'allure suivante



Le support de $h_n(x_1)$, décrit par le dernier dessin de la figure (1.6), a cette forme, car quand $\theta_n(x_1) = 1$, $u_n(x_1, x_2)$ vérifie la condition de surface libre. Le support dans \mathbb{R}_-^2 de $\tilde{u}_n(x_1, x_2)$ est décrit par la zone achurée de la figure (1.7).



Nous allons maintenant montrer que

$$(1.43) \quad \bar{u}_n = u_n - \tilde{u}_n$$

est une bonne suite singulière.

• $\bar{u}_n \in \mathcal{D}(A(\beta))$

$$\begin{cases} \varepsilon_{12}^\beta (\bar{u}_n)|_{x_2=0} = h_1^n - h_1^n = 0 \\ \sigma_{22}^\beta (\bar{u}_n)|_{x_2=0} = h_2^n - h_2^n = 0 \\ \varepsilon_{23}^\beta (\bar{u}_n)|_{x_2=0} = h_3^n - h_3^n = 0 \end{cases}$$

car

$$\begin{cases} \sigma_{i2}^\beta (u_n)|_{x_2=0} = h_i^n, \quad i = 1, 2, 3 \\ \tilde{u}_n = \mathcal{E}h_n \end{cases}$$

Par conséquent, \bar{u}_n vérifie la condition de surface libre sur le bord $\partial\Omega$.

D'autre part, \tilde{u}_n et $u_n \in H^2(\mathbb{R}_-^2; \mathbb{R}^3)$, leurs supports respectifs évitant la perturbation du demi-espace. On a même $\bar{u}_n \in H^2(\Omega)$.

• $\|\bar{u}_n\|_H = C''$ où C'' est une constante réelle strictement positive.

$$\|\bar{u}_n\|_H = \|u_n - \tilde{u}_n\|_H \leq \|u_n\|_H + \|\tilde{u}_n\|_H$$

On peut fixer la constante C dans l'expression (1.35) de u_n , de telle sorte que

$$\|u_n\|_H = 1$$

En effet

$$\|u_n\|_H = \int_{\Omega} \frac{C^2}{n} \theta^2\left(\frac{x_1}{n}\right) u_R^2(\beta, x_2) \, dx_1 \, dx_2$$

On pose $t = \frac{x_1}{n}$. Alors

$$\|u_n\|_H = \int_{\Omega} C^2 \theta^2(t) u_R^2(\beta, x_2) \, dt \, dx_2$$

ce qui permet bien de fixer C .

Nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{u}_n\|_H = 0$

Pour cela, il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n(x_1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)} = 0$, car comme $\tilde{u}_n = \mathcal{E}h_n$, (1.42) est vérifiée. Comme $\|\tilde{u}_n\|_H = \|\tilde{u}_n\|_{L^2(\mathbb{R}_-^2, \mathbb{R}^3)} \leq \|\tilde{u}_n\|_{H^2(\mathbb{R}_-^2, \mathbb{R}^3)}$, ce sera terminé. On a

$$(1.44) \quad \left\{ \begin{aligned} h_1^n(x_1) &= \mu \varepsilon_{12}^\beta (\tilde{u}_n)|_{x_2=0} \\ &= \mu \frac{C}{\sqrt{n}} u_2^R(\beta, 0) \exp(-ik_1 x_1) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \theta\left(\frac{x_1}{n}\right) \right] \\ &+ \mu \frac{C}{\sqrt{n}} \theta\left(\frac{x_1}{n}\right) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\exp(-ik_1 x_1) u_2^R(\beta, 0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\exp(-ik_1 x_1) u_1^R(\beta, 0) \right) \right] \end{aligned} \right.$$

Or comme ù donnée par (1.34) vérifie la condition de surface libre pour le problème de l'élastodynamique posé dans \mathbb{R}_-^2 , et que $\text{supp } \theta(x_1) \cap \text{supp } f(x_1) = \emptyset$, on a que le second crochet de l'expression (1.44) est nul. Alors

$$h_1^n(x_1) = \mu \frac{C}{\sqrt{n}} u_2^R(\beta, 0) \exp(-ik_1 x_1) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \theta \left(\frac{x_1}{n} \right) \right]$$

Par un raisonnement équivalent, on a que

$$\begin{cases} h_2^n(x_1) = \lambda \frac{C}{\sqrt{n}} u_1^R(\beta, 0) \exp(-ik_1 x_1) \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \theta \left(\frac{x_1}{n} \right) \right] \\ h_3^n(x_1) = 0 \end{cases}$$

On note $\begin{cases} A_1 = \mu C u_2^R(\beta, 0) \\ A_2 = \lambda C u_1^R(\beta, 0) \end{cases}$

Alors

$$h_i^n(x_1) = \frac{A_i}{\sqrt{n}} \exp(-ik_1 x_1) \frac{1}{n} \theta' \left(\frac{x_1}{n} \right) \quad , i = 1, 2$$

Par Fourier, on a

$$\hat{h}_i^n(p) = \frac{A_i}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \theta' \left(\frac{x_1}{n} \right) \exp(-i(k_1 + p)x_1) \frac{dx_1}{n} \quad , i = 1, 2$$

On pose $t = \frac{x_1}{n}$. Alors

$$\hat{h}_i^n(p) = \frac{A_i}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \theta'(t) \exp(-in(k_1 + p)t) dt \quad , i = 1, 2$$

On pose $g(t) = \theta'(t)$. Alors

$$\hat{h}_i^n(p) = \frac{A_i}{\sqrt{n}} \hat{g}(n(k_1 + p)) \quad , i = 1, 2$$

$$\|h_i^n(x_1)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{h}_i^n(p)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{A_i^2}{2\pi n} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}^2(n(k_1 + p)) dp \quad , i = 1, 2$$

On pose $\xi = k_1 + p$. Alors

$$\|h_i^n(x_1)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{A_i^2}{2\pi n} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}^2(n\xi) d\xi \quad , i = 1, 2$$

On pose $t = n\xi$. Alors

$$\|h_i^n(x_1)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{A_i^2}{2\pi n^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}^2(t) dt = \frac{A_i^2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} g^2(t) dt, \quad i = 1, 2$$

Etant donné que $g(t) = \theta'(t)$, l'intégrale dans le dernier résultat est une constante et alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_i^n(x_1)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

Enfin,

$$|h_i^n(x_1)|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} p (\hat{h}_i^n)^2(p) dp = \frac{A_i^2}{n} \int_{\mathbb{R}} p \hat{g}^2(n(k_1 + p)) dp, \quad i = 1, 2$$

On pose $s = k_1 + p$. Alors

$$|h_i^n(x_1)|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = \frac{A_i^2}{n} \int_{\mathbb{R}} (s - k_1) \hat{g}^2(ns) ds, \quad i = 1, 2$$

Alors on pose $t = ns$

$$\begin{aligned} |h_i^n(x_1)|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} &= \frac{A_i^2}{n} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t}{n} - k_1\right) \hat{g}^2(t) dt \\ &\leq \frac{A_i^2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} t \hat{g}^2(t) dt + \frac{A_i^2}{n} k_1 \int_{\mathbb{R}} \hat{g}^2(t) dt \\ &\leq \frac{\bar{C}}{n} \left\{ \frac{A_i^2}{n} |\theta'(t)|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}^2 + A_i^2 \|\theta'(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\} \end{aligned}$$

où \bar{C} est une constante réelle. Nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h^n(x_1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)} = 0$$

• $\bar{u}_n \rightarrow 0$ dans H

Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)^3$. Pour n assez grand, on a $\text{supp } \Psi \cap \text{supp } \bar{u}_n = \emptyset$. On conclut par densité.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(\beta) \bar{u}_n - \Lambda \bar{u}_n\|_H = 0$

$$\|A(\beta) \bar{u}_n - \Lambda \bar{u}_n\|_H \leq \|A(\beta) \tilde{u}_n - \Lambda \tilde{u}_n\|_H + \|A(\beta) u_n - \Lambda u_n\|_H$$

Or

$$\|A(\beta) \tilde{u}_n - \Lambda \tilde{u}_n\|_H = \|(A(\beta) - \Lambda I) \mathcal{E} h_n\|_H$$

Et comme $\begin{cases} \mathcal{E} h_n \in H^2(\mathbb{R}_-^2) \\ \{A(\beta) - \Lambda I\} \text{ est continu sur } H^2(\mathbb{R}_-^2) \end{cases}$

$$\|A(\beta) \tilde{u}_n - \Lambda \tilde{u}_n\|_H \leq C \|h_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)}$$

ce qui entraine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A(\beta) \tilde{u}_n - \Lambda \tilde{u}_n\|_H = 0$$

D'autre part, on pose

$$\check{u}_n = u_R(\beta, x_2) \exp(-ik_1 x_1)$$

Alors

$$A(\beta) \check{u}_n - \Lambda \check{u}_n = A(\beta) \check{u}_n - (\beta^2 V_R^2 + k_1^2) \check{u}_n = 0$$

ce qui permet d'obtenir

$$\|A(\beta) u_n - \Lambda u_n\|_H = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{1}{n} \theta' \left(\frac{x_1}{n} \right) B(\beta) \check{u}_n + \frac{1}{n^2} \theta'' \left(\frac{x_1}{n} \right) F(\beta) \check{u}_n \right\} \right\|_H$$

où $B(\beta)$ et $F(\beta)$ sont deux opérateurs différentiels définis par

$$B(\beta) \check{u}_n = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \check{u}_2^n}{\partial x_2} + \beta \check{u}_3^n \right) \\ -(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \check{u}_1^n}{\partial x_2} \right) \\ (\lambda + \mu) \check{u}_1^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(\beta) \check{u}_n = \begin{pmatrix} -(\lambda + 2\mu) \check{u}_1^n \\ -\mu \check{u}_2^n \\ -\mu \check{u}_3^n \end{pmatrix}$$

Ces deux opérateurs sont définis de $H^1(\mathbb{R}_-^2, \mathbb{R}^3)$ dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_-^2, \mathbb{R}^3)$. On note I le support de la fonction $\theta(x_1)$. Alors

$$\|A(\beta) u_n - \Lambda u_n\|_H \leq \frac{1}{n} \left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{1}{n} \theta' \left(\frac{x_1}{n} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|B(\beta) \check{u}_n\|_{L^2(I \times \mathbb{R}_-)}^2 \\ + \left\| \frac{1}{n^2} \theta'' \left(\frac{x_1}{n} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|F(\beta) \check{u}_n\|_{L^2(I \times \mathbb{R}_-)}^2 \end{array} \right\}$$

L'expression dans l'accolade est homogène à une constante, et le facteur en $\frac{1}{n}$ devant cette accolade permet d'obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| A(\beta) u_n - \Lambda u_n \|_{\mathbb{H}} = 0$$

Nous avons montré que toute valeur $\Lambda \in]\beta^2 V_{\mathbb{R}}^2; +\infty)$ est dans le spectre essentiel. Comme le spectre est fermé, $\beta^2 V_{\mathbb{R}}^2 \in \sigma(A(\beta))$. Comme ce point du spectre n'est pas isolé, il est lui aussi dans le spectre essentiel de l'opérateur $A(\beta)$. \square

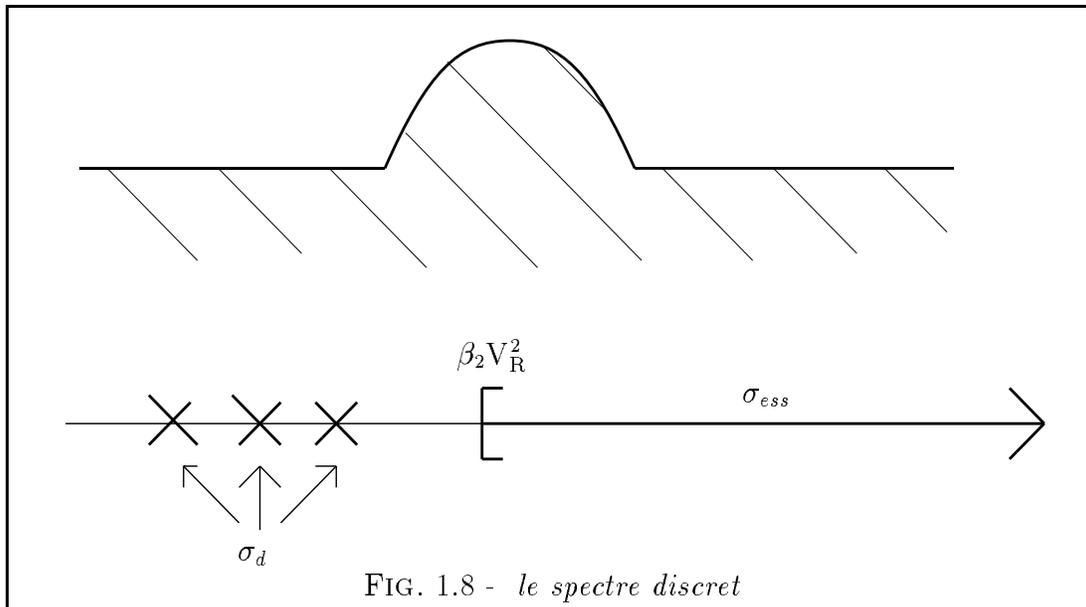
1.4.3 Spectre discret de $A(\beta)$

Il nous importe de savoir si, quand nous perturbons le demi-espace, nous arrivons à créer un spectre discret pour $A(\beta)$, ce qui revient à faire apparaître des modes guidés solutions du problème de valeurs propres (1.22), ayant une vitesse $\omega/\beta < V_{\mathbb{R}}$. Ce sont ces modes que nous calculerons avec la méthode numérique que nous présentons ici.

$$\sigma_d(A(\beta)) \neq \emptyset ?$$

Nous allons voir que, à priori, la forme de la perturbation O et la présence ou non de singularités sur le bord ∂O vont jouer un rôle important dans le contenu de $\sigma_d(A(\beta))$: nous détaillerons dans un article ultérieur les résultats théoriques d'existence obtenus pour des perturbations particulières de formes rectangulaires, triangulaires, ... par exemple, puis à l'aide de ces résultats, pour des géométries plus quelconques.

D'autre part, le problème de l'existence de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel est encore ouvert.

FIG. 1.8 - *le spectre discret*

A ce stade de l'étude, il n'est pas envisageable de traiter numériquement par éléments finis le problème ainsi écrit, car il est posé dans un domaine non borné. La réécriture du problème sous une forme utilisable numériquement est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Reformulation en un problème borné et principe de sa résolution numérique

Plan du chapitre

Si nous voulions résoudre dans l'état actuel le problème posé dans toute la section Ω du guide par une méthode éléments finis, il faudrait utiliser un domaine de calcul "grand" par rapport à la perturbation O , et sur la frontière située "loin" de O , mettre une condition de Dirichlet (l'énergie des solutions étant supposée être concentrée dans O). Mais alors, le traitement numérique risque de devenir coûteux tant du point de vue du maillage que du temps de calcul. De plus, comment quantifier rigoureusement "grand" et "loin"? Cette méthode n'a été utilisée (avec les précautions nécessaires concernant le maillage, donc au prix d'un temps calcul important) que pour valider celle que présentons ici.

Nous allons, afin de pouvoir résoudre numériquement plus rigoureusement le problème, le réécrire sous une forme théorique équivalente, où le domaine de la nouvelle formulation sera désormais limité à la perturbation O . Cette transformation du problème sera l'objet de la première partie de ce chapitre. Elle requiert l'écriture d'une nouvelle condition aux limites entre la perturbation O et le demi-espace parfait D . L'opérateur d'interface $S(\omega, \beta)$ qui entre alors en jeu, n'est malheureusement pas calculable.

Mais dans la seconde partie de ce chapitre, nous verrons que cette difficulté peut être contournée, la condition aux limites naturelle réécrite sous une forme inverse, avec apparition d'un opérateur d'interface $T(\omega, \beta)$ cette fois-ci calculable, dont nous donnerons les principales caractéristiques. Nous écrirons, pour terminer cette partie, la formulation variationnelle du problème borné avec l'opérateur $T(\omega, \beta)$.

Nous pourrions alors décrire dans la troisième partie le principe de la résolution numérique du problème. Nous verrons au passage comment obtenir, avec comme point de départ la formulation variationnelle précédente, la discrétisation de l'opérateur $S(\omega, \beta)$, puis la formulation finale du problème discret. La contrepartie d'avoir alors écrit un problème borné, est que celui-ci n'est pas linéaire par rapport aux deux paramètres ω et β .

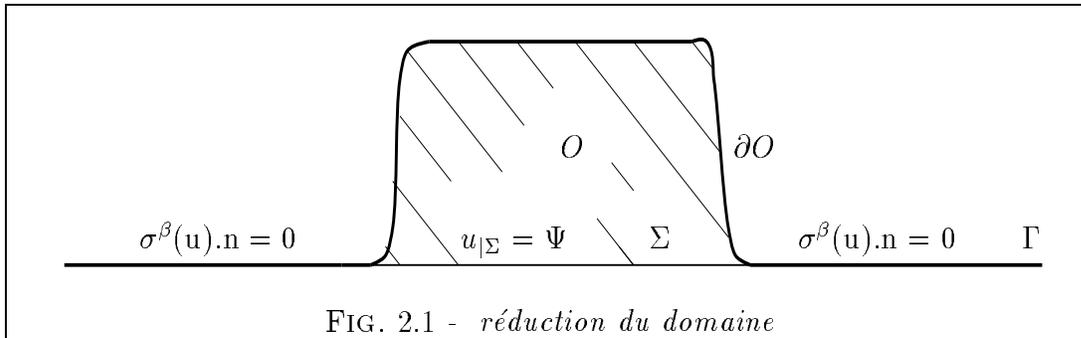
Enfin nous terminerons par le bilan des calculs théoriques et numériques imposés par la méthode proposée.

2.1 Le problème équivalent borné, une première formulation

2.1.1 Une nouvelle condition aux limites, introduction de l'opérateur $S(\omega, \beta)$

Pour limiter le problème à la perturbation O , il faut introduire une condition aux limites à l'interface Σ entre O et le demi-espace inférieur D . Cette condition va relier naturellement le champ de déplacement $u(x, t)$ et le champ de contraintes $\sigma^\beta(u(x, t))$ par l'intermédiaire d'un opérateur d'interface $S(\omega, \beta)$:

$$(2.1) \quad S(\omega, \beta)u|_\Sigma = \sigma^\beta(u).n|_\Sigma$$



Sur la figure (2.1), $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_2 = 0 \text{ et } (x_1, x_2) \notin \Sigma\}$

Afin de définir plus précisément l'opérateur de bord $S(\omega, \beta)$, nous considérons le problème suivant, posé dans le demi-espace inférieur D

$$(2.2) \quad (P1) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\beta) u = \omega^2 u & \text{dans } D \\ u = \Psi & \text{sur } \Sigma \\ \sigma^\beta(u).n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où n désigne la normale extérieure au demi-espace D .

Si l'on parle d'une fonction u qui appartient à $H^1(D)^3$, on peut parler de la restriction de sa trace à un segment Σ du bord de D . C'est pourquoi, dans le problème (P1), nous considérerons que $\Psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^3$.

Par contre, il n'en va pas de même pour $\sigma^\beta(u).n$. Nous savons que si $u \in H^1(D)^3$, alors $\sigma^\beta(u).n \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3$. Mais il n'est pas vrai que l'on a automatiquement $\sigma^\beta(u).n|_\Gamma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$, quand Γ est un intervalle de \mathbb{R} . C'est pourquoi nous prenons la condition aux limites sur Γ dans le problème (P1) au sens faible suivant

$$\sigma^\beta(u).n|_\Gamma = 0 \Leftrightarrow \sigma^\beta(u).n \in H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$

où

$$H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3 \text{ t.q. } \forall \xi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3 \text{ t.q. } \text{supp } \xi \subset \Gamma, \\ \langle \varphi, \xi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} = 0 \end{array} \right\}$$

Nous allons montrer que le problème (P1) est bien posé, qu'il admet une unique solution dans l'espace $H^1(D)^3$, telle que $\mathcal{A}(\beta)u \in L^2(D)^3$. Pour ce faire, nous allons écrire un problème variationnel (P2), admettant une unique solution, et qui sera équivalent au problème (P1).

Nous avons $\Psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^3$. Nous notons γ_0 l'application trace de $H^1(D)^3$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3$. Alors il existe un relèvement $g \in H^1(D)^3$ tel que $\gamma_0(g)|_\Sigma = \Psi$. Soit maintenant le problème variationnel

$$(2.3) \quad (P2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u - g) \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3 = \{v \in H^1(D)^3 \text{ t.q. } \gamma_0(v)|_\Sigma = 0\} \\ \forall v \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3 \quad a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = 0 \end{array} \right.$$

où $a_D(\beta; u, v)$ est la forme bilinéaire classique de l'élastodynamique dans le demi-espace inférieur D .

Ce problème admet une unique solution $u \in H^1(D)^3$. En effet, considérons la forme bilinéaire $a_R(\beta; \tilde{u}, \tilde{v})$ définie sur $H_{0,\Sigma}^1(D)^3 \times H_{0,\Sigma}^1(D)^3$ par

$$a_R(\beta; \tilde{u}, \tilde{v}) = a_D(\beta; \tilde{u}, \tilde{v}) - \omega^2(\tilde{u}, \tilde{v})$$

Cette forme bilinéaire vérifie

$$\begin{aligned} a_R(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) &\geq \beta^2 V_R^2(\tilde{u}, \tilde{u}) - \omega^2(\tilde{u}, \tilde{u}) \\ &\geq (\beta^2 V_R^2 - \omega^2)(\tilde{u}, \tilde{u}) \end{aligned}$$

ce qui donne la coercivité de la forme bilinéaire $a_R(\beta; \tilde{u}, \tilde{v})$.
D'autre part

$$f(\tilde{v}) = a_R(\beta; g, \tilde{v}) - \omega^2(g, \tilde{v})$$

est une forme linéaire définie et continue sur $H_{0,\Sigma}^1(D)^3$. Par conséquent, nous pouvons appliquer le lemme de Lax-Milgram, qui donne l'existence et l'unicité de la solution du problème (P3):

$$(2.4)(P3) \quad \text{Trouver } \tilde{u} \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3 \text{ t.q. } a_R(\beta; \tilde{u}, \tilde{v}) = f(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3$$

Mais alors $u = \tilde{u} + g$, $u \in H^1(D)^3$, est l'unique solution du problème (P2).

Nous allons montrer maintenant l'équivalence des problèmes (P1) et (P2).

Soit u solution du problème (P1), alors

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(D)^3 \\ \mathcal{A}(\beta) u \in L^2(D)^3 \Rightarrow \sigma^\beta(u) \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3 \\ \mathcal{A}(\beta) u = \omega^2 u \end{array} \right.$$

Soit $v \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3$, ce qui implique $\gamma_0(v) = w \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3$, avec $\text{supp } w \subset \Gamma$. Alors, la formule de Green suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} (A(\beta) u, v) &= \int_D \mathcal{A}(\beta) u v \, dx_1 dx_2 \\ &= a_D(\beta; u, v) - \langle \sigma^\beta(u) \cdot n, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} \end{aligned}$$

Mais, par hypothèses,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^\beta(u) \cdot n \in H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \\ \gamma_0(v)|_\Sigma = w|_\Sigma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \sigma^\beta(u) \cdot n, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} = 0$$

Alors u solution de (P1)

$$\Rightarrow a_D(\beta; u, v) = \omega^2(u, v) \quad \forall v \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3$$

$$\Rightarrow u - g \text{ solution de (P3)}$$

$$\Rightarrow u \text{ solution de (P2)}$$

Réciproquement, soit maintenant u solution de (P2). Alors

$$a_D(\beta; u, v) = \omega^2(u, v) \quad \forall v \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3$$

En particulier,

$$a_D(\beta; u, v) = \omega^2(u, v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(D)^3$$

mais alors

$$a_D(\beta; u, v) = \langle \mathcal{A}(\beta)u, v \rangle_{\mathcal{D}'(D)^3, \mathcal{D}(D)^3}$$

et donc

$$\mathcal{A}(\beta)u = \omega^2 u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D)^3$$

Comme $u \in L^2(D)^3$, alors $\mathcal{A}(\beta)u \in L^2(D)^3$

D'autre part, $u = \tilde{u} + g$ avec

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3 & \Rightarrow \gamma_0(\tilde{u})|_{\Sigma} = 0 \\ \gamma_0(g)|_{\Sigma} = \Psi \end{cases}$$

Enfin, il reste à voir que $\sigma^\beta(\beta)(u) \cdot n \in H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$

on a $\mathcal{A}(\beta) u = \omega^2 u$ dans $L^2(D)^3$

soit $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3$ tel que $\text{supp } \varphi \subset \Gamma$.

alors $\exists v \in H^1(D)^3$ tel que $\gamma_0(v) = \varphi$, ce qui donne $\gamma_0(v)|_{\Sigma} = 0$, et donc $v \in H_{0,\Sigma}^1(D)^3$.

On en déduit que

$$(\mathcal{A}(\beta) u, v) = \int_D \mathcal{A}(\beta) u v \, dx_1 dx_2 = \omega^2 (u, v)$$

Par conséquent, quand u est solution du problème (P2),

$$(\mathcal{A}(\beta) u, v) = a_D(\beta; u, v)$$

Or comme la formule de Green est ici encore vérifiée, c'est à dire

$$\begin{aligned} (A(\beta) u, v) &= \int_D \mathcal{A}(\beta) u v \, dx_1 dx_2 \\ &= a_D(\beta; u, v) - \langle \sigma^\beta(u) \cdot n, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\langle \sigma^\beta(u) \cdot n, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} = 0 \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3 \quad \text{avec } \text{supp } \varphi \in \Gamma$$

ce qui implique $u \in H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$, par définition de cet espace. □

Le problème (2.2) donc bien posé, soit u sa solution.

Nous pouvons maintenant définir l'opérateur de bord $S(\omega, \beta)$ de la façon suivante:

$$(2.5) \quad S(\omega, \beta) : \begin{cases} H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^3 & \longrightarrow & H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \\ \Psi = u|_{\Sigma} & \longmapsto & \varphi = \sigma^\beta(u) \cdot n|_{\Sigma} = S(\omega, \beta)\Psi \end{cases}$$

où u est solution du problème (2.2), et où $\sigma^\beta(u) \cdot n|_\Sigma$ est une notation formelle.

A cet opérateur est associée une forme bilinéaire $s(\omega, \beta; u, v)$ définie par le crochet de dualité suivant:

$$(2.6) \quad s(\omega, \beta; u, v) = \langle S(\omega, \beta)u, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3), H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}$$

Nous allons montrer le résultat suivant

Lemme 2.1

$s(\omega, \beta; u, v)$ est une forme bilinéaire positive.

Démonstration

Nous venons de voir que quand u est solution du problème (P2),

$$a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = \langle \sigma^\beta(u) \cdot n, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3), H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \forall v \in H^1(D)^3$$

Prenons $v = u$, ce qui donne

$$a_D(\beta; u, u) - \omega^2(u, u) = s(\omega, \beta; u, u)$$

Or

$$a_D(\beta; u, u) - \omega^2(u, u) \geq (\beta^2 V_R^2 - \omega^2)(u, u) \geq 0$$

ce qui permet de conclure. \square

2.1.2 Un nouvel opérateur

Le problème à l'intérieur de la perturbation O s'écrit alors:

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{trouver } (\omega, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \text{ et } u \neq 0 \in H^1(O)^3 \text{ t.q.} & \\ \mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } O \\ \sigma^\beta(u) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial O - \Sigma \\ \sigma^\beta(u) \cdot n - S(\omega, \beta)u = 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

L'opérateur de l'ensemble du problème (2.7) dépend à cause de la nouvelle condition aux limites des deux paramètres ω et β : c'est pourquoi nous le notons $A(\omega, \beta)$, et son domaine est donné par:

$$(2.8) \quad D(A(\omega, \beta)) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} \in H^1(O)^3 \text{ t.q. } \mathcal{A}(\beta)\mathbf{u} \in L^2(O)^3 & \\ \sigma^\beta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial O - \Sigma \\ \sigma^\beta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - S(\omega, \beta)\mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right\}$$

Il est important dès maintenant de noter que nous avons affaire à un problème de valeurs propres non linéaires par rapport aux deux paramètres ω et β .

Proposition 2.1

Les problèmes (1.22) et (2.8) sont équivalents.

Démonstration

Si le triplet $(\omega, \beta, \mathbf{u})$ est solution de (1.22), alors $(\omega, \beta, \mathbf{u}_O)$ est solution de (2.8). Réciproquement, si $(\omega, \beta, \tilde{\mathbf{u}})$ est solution de (2.8), $\tilde{\mathbf{u}}$ peut être prolongée de façon unique sur tout Ω en une solution \mathbf{u} , associée aux mêmes valeurs de ω et β , en posant \mathbf{u} ainsi

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} & \text{sur } O \\ \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } D \text{ où } \bar{\mathbf{u}} \text{ solution de (P1)} \end{cases}$$

Alors $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$ et vérifie

$$\mathcal{A}(\beta)\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{u}$$

dans O et D . La continuité du champ de contraintes est assurée par la condition aux limites sur Σ du problème (2.8). \square

Par passage à la formulation variationnelle dans le problème (2.7), on obtient la forme bilinéaire $a(\omega, \beta; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ associée à $A(\omega, \beta)$:

$$(2.9) \quad a(\omega, \beta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_O(\beta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + s(\omega, \beta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_O$$

Dans le terme de droite de cette expression (2.9), on trouve

- le terme $a_O(\beta; u, v)$, défini au chapitre précédent, qui correspond à la forme bilinéaire classique de l'élastodynamique pour la perturbation O .
- le terme $s(\omega, \beta; u, v)$ qui est la forme bilinéaire de l'opérateur de bord. Il est à noter que dans son expression, la normale n considérée est toujours celle extérieure au demi-espace D , donc intérieure à la perturbation O , d'où le signe positif devant ce terme (ce qui est contraire aux conventions habituelles pour la formule de Green, mais pratique dans notre cas).
- le terme $\omega^2(u, v)_O$ qui a été passé à gauche dans la première équation de (2.7).

Le problème étant désormais posé en domaine borné, il est naturel d'obtenir le théorème suivant:

Théorème 2.1

$A(\omega, \beta)$ est un opérateur à résolvante compacte.

Démonstration

Nous allons utiliser une technique classique, présentée dans [22]. Il suffit de montrer que pour une valeur λ appartenant à la résolvante $\rho(A(\omega, \beta))$ de l'opérateur $A(\omega, \beta)$, l'opérateur $[A(\omega, \beta) - \lambda I]^{-1}$ est compact.

Il est aisé de voir que l'opérateur $A(\omega, \beta)$ est borné inférieurement. Nous pouvons donc choisir λ tel que $\lambda < -\beta^2 V_R^2$. Soit f_n une suite bornée de $L^2(O)^3$, et posons

$$u_n = [A(\omega, \beta) - \lambda \text{Id}]^{-1} f_n$$

Alors

$$\begin{aligned} [A(\omega, \beta) - \lambda \text{Id}] u_n &= f_n \\ ([A(\omega, \beta) - \lambda \text{Id}] u_n, u_n) &= (f_n, u_n) \\ \int_O [A(\beta) - (\omega^2 + \lambda) \text{Id}] u_n u_n &= \int_O f_n u_n \\ a(\omega, \beta; u_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)_O & \\ = a_O(\beta; u_n, u_n) - \omega^2(u_n, u_n)_O - \lambda(u_n, u_n)_O + s(\omega, \beta; u_n, u_n) &= (f_n, u_n) \end{aligned}$$

Comme la forme bilinéaire $s(\omega, \beta; \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)$ est positive

$$a_O(\beta; \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) - \omega^2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)_O - \lambda(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)_O \leq (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n)$$

Ayant pris λ assez petit, sachant $\omega^2 \leq \beta^2 V_R^2$, alors

$$-\omega^2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)_O - \lambda(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n)_O \geq 0$$

Alors

$$a_O(\beta; \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \leq (\mathbf{f}_n, \mathbf{u}_n)$$

La géométrie de la perturbation étant telle que l'inégalité de Korn est vérifiée, on a

$$\|\mathbf{u}_n\|_{H^1(O)^3} \leq \|\mathbf{f}_n\|_{L^2(O)^3} \leq +\infty$$

La perturbation O étant bornée, l'injection de $H^1(O)^3$ dans $L^2(O)^3$ est compacte, ce qui permet de conclure. \square

Ce théorème entraîne que le spectre de $A(\omega, \beta)$ est constitué d'une suite dénombrable de valeurs propres, suite qui tend vers $+\infty$. Notre problème s'écrit désormais sous les formes équivalentes suivantes:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ "chercher les modes guidés de vitesse } \omega/\beta < V_R'' \\ \bullet \text{ chercher } \omega \text{ et } \beta \text{ t.q. } \omega/\beta < V_R, \text{ et } \mathbf{u} \in D(A(\omega, \beta)) \text{ t.q.} \\ A(\omega, \beta)\mathbf{u} = 0 \\ \bullet \text{ trouver les couples } (\omega, \beta) \text{ admissibles t.q. les valeurs propres} \\ \lambda \text{ de } A(\omega, \beta) \text{ vérifient } \lambda(\omega, \beta) = 0 \end{array} \right.$$

Le travail de discrétisation du problème pourrait être désormais envisagé, malheureusement:

2.1.3 Des difficultés avec l'opérateur de bord $S(\omega, \beta)$

En effet, pour calculer l'opérateur $S(\omega, \beta)$, la technique serait la suivante: on suppose connu le champ de déplacement u sur Σ , et pour trouver le lien avec le champ de contraintes $\sigma^\beta(u).n$, on résoud analytiquement le problème de l'élastodynamique dans le demi-espace D , avec la condition aux limites mixte sur la frontière de D (cf figure (2.1)): or, à cause de cette mixité de la condition aux limites, on ne sait pas résoudre explicitement ce problème dans D .

Nous sommes à priori bloqué par cette impossibilité, mais cette difficulté peut être contournée, et nous allons maintenant détailler comment:

2.2 Contournement de la difficulté et reformulation du problème borné

2.2.1 Principe de la solution, introduction de l'opérateur $T(\omega, \beta)$

Au lieu de vouloir calculer directement $S(\omega, \beta)$, nous allons calculer son inverse $S(\omega, \beta)^{-1}$ que nous noterons $T(\omega, \beta)$. Si l'opérateur $S(\omega, \beta)$ n'est pas calculable, son inverse $S(\omega, \beta)^{-1}$ que nous noterons $T(\omega, \beta)$, l'est. Nous pourrions alors grâce à $T(\omega, \beta)$ reformuler la condition aux limites transparente, puis le problème borné. Nous en donnerons sa formulation variationnelle et nous verrons comment déduire de celle-ci, et de l'inverse de la discrétisation de $T(\omega, \beta)$ notée $T_h(\omega, \beta)$, une discrétisation de $S(\omega, \beta)$ que nous noterons $S_h(\omega, \beta)$. Ce travail peut être résumé par le schéma suivant:

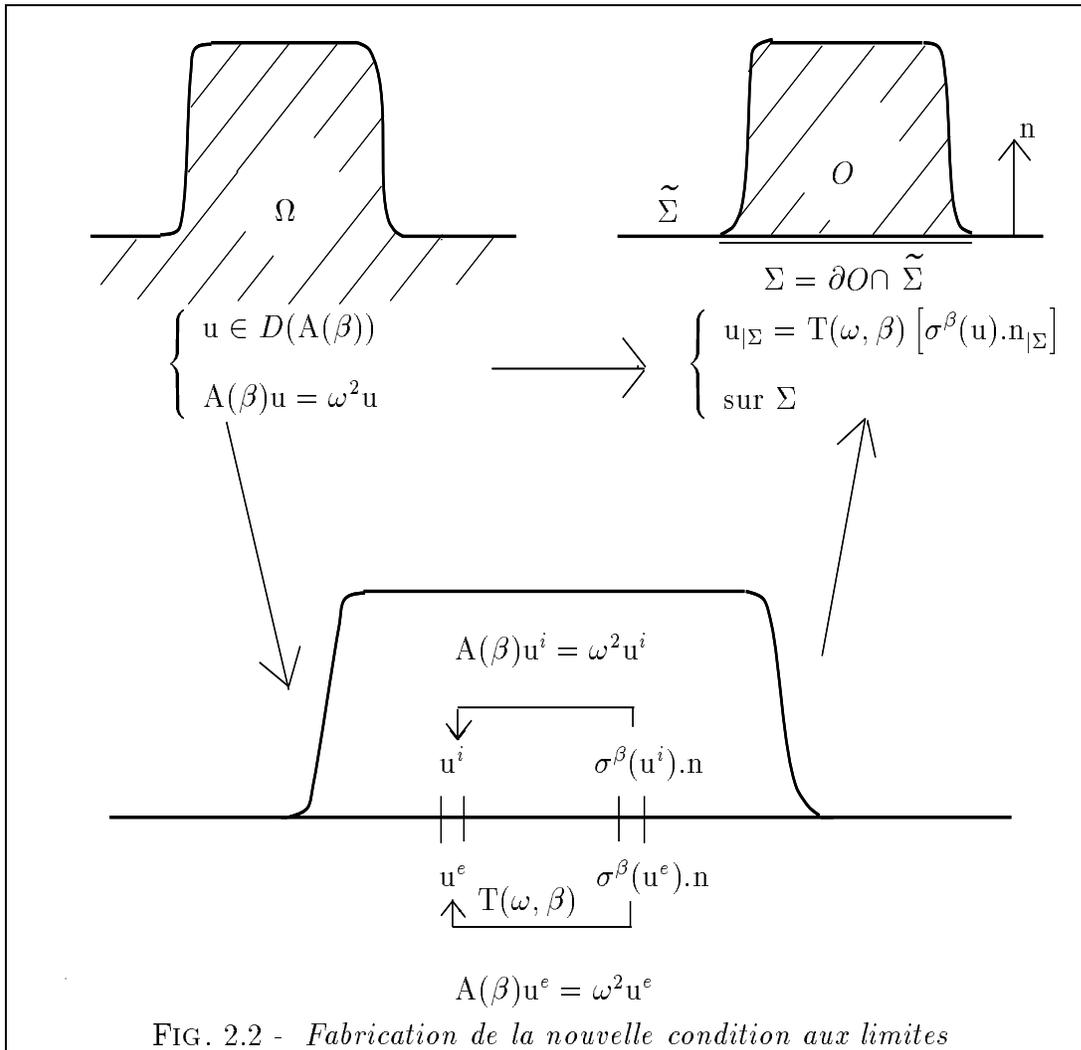
$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} S(\omega, \beta) & \longrightarrow & S(\omega, \beta)^{-1} = T(\omega, \beta) \\ & & \downarrow \\ S_h(\omega, \beta) = (T_h(\omega, \beta))^{-1} & \longleftarrow & (T_h(\omega, \beta)) \end{array} \right.$$

L'avantage est bien sûr que $T(\omega, \beta)$ est bien calculable. Nous allons voir que passer par cet opérateur revient à écrire le problème dans la perturbation avec une nouvelle condition aux limites faisant intervenir cette fois-ci $T(\omega, \beta)$, où moralement

$$T(\omega, \beta) [\sigma^\beta(u).n|_\Sigma] = u|_\Sigma$$

Construction de l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$

Pour définir et calculer ce dernier, nous allons passer par le problème intermédiaire décrit par la figure ci-dessous, c'est à dire réaliser le travail que nous n'avions pas pu faire pour $S(\omega, \beta)$, qui était résoudre analytiquement un problème posé dans le demi-espace inférieur D .



Dans la figure (2.2), $\tilde{\Sigma}$ désigne le bord du demi-espace. Dans le problème intermédiaire, le problème intérieur à la perturbation O et le problème extérieur posé dans le demi-espace D sont reliés par les équations de continuité du champ de déplacement et du champ de contraintes.

Définition de l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$

Comme l'opérateur $T(\omega, \beta)$ va être l'inverse de l'opérateur $S(\omega, \beta)$, nous supposons cette fois-ci que sur l'interface Σ , c'est le champ de contrainte $\sigma^\beta(u^e) \cdot n$ qui est connu (et non plus le champ de déplacement u), et nous le notons φ . Il est naturel, étant donnée la condition de surface libre sur $\partial\Omega$, de prolonger **formellement** le champ de contrainte φ à $\tilde{\Sigma}$ par 0. **Rigoureusement**, ceci revient à se donner comme condition aux limites sur $\tilde{\Sigma}$, un champ de contraintes φ appartenant à l'espace $H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$. La notation $\sigma^\beta(u) \cdot n$ est alors un abus de notation.

Le problème intermédiaire posé dans le demi-espace inférieur s'écrit alors

$$(2.12) \quad (\text{Pe}) \quad \begin{cases} A(\beta)u^e = \omega^2 u^e & \text{dans } \mathbb{R}_-^2 \\ \sigma^\beta(u^e) \cdot n = \varphi & \text{sur } \tilde{\Sigma} \end{cases}$$

où n désigne encore la normale extérieure au demi-espace D .

Nous avons le

Lemme 2.2

Le problème (Pe) admet une unique solution dans l'espace $H^1(D)^3$.

Démonstration

Nous allons montrer que le problème (Pe) est équivalent à un problème variationnel (P4), dont nous montrerons l'unicité de la solution.

Le problème variationnel (P4) que nous considérons est le suivant

$$(2.13) \quad (\text{P4}) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(D)^3 & \text{tel que} \\ a_T(\beta; u, v) = f(v) & \forall v \in H^1(D)^3 \end{cases}$$

où $a_T(\beta; u, v)$ est la forme bilinéaire définie sur $H^1(D)^3 \times H^1(D)^3$ par

$$a_T(\beta; u, v) = a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v)$$

et où f est la forme linéaire continue sur $H^1(D)^3$ définie par

$$f(v) = \langle \varphi, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3}$$

où φ est le champ de contrainte précédent pris dans l'espace $H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$, et où γ_0 désigne l'application trace de $H^1(D)^3$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3$.

Comme $\omega^2 < \beta^2 V_R^2$, la forme bilinéaire $a_T(\beta; u, v)$ est coercive, et le lemme de Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité de la solution u de (P4) dans l'espace $H^1(D)^3$.

Il reste à montrer l'équivalence des problèmes (Pe) et (P4).

Si u est solution de (Pe), alors

$$\begin{cases} u \in H^1(D)^3 \\ \sigma^\beta(u) \cdot n = \varphi \in H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \\ \mathcal{A}(\beta)u = \omega^2 u \Rightarrow \mathcal{A}(\beta)u \in L^2(D)^3 \end{cases}$$

Soit $v \in H^1(D)^3$, quelconque, ce qui entraîne que $\gamma_0(v) \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3$. La formule de Green permet alors d'écrire

$$(\mathcal{A}(\beta)u, v) = a_D(\beta; u, v) - \langle \varphi, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} = \omega^2(u, v)$$

alors

$$a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = \langle \varphi, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} \quad \forall v \in H^1(D)^3$$

Réciproquement, soit maintenant u solution de (P4). Alors

$$a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = \langle \varphi, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} \quad \forall v \in H^1(D)^3$$

En particulier

$$a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = \langle \varphi, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(D)^3$$

mais alors

$$a_D(\beta; u, v) = \langle \mathcal{A}(\beta) u, v \rangle_{\mathcal{D}'(D)^3, \mathcal{D}(D)^3}$$

et donc

$$\mathcal{A}(\beta) u = \omega^2 u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D)^3$$

Comme $u \in L^2(D)^3$, alors $\mathcal{A}(\beta) u \in L^2(D)^3$.

Enfin, comme on a simultanément la formule de Green, et l'expression de la forme linéaire $f(v)$

$$\begin{cases} (\mathcal{A}(\beta) u, v) = a_D(\beta; u, v) - \langle \sigma^\beta(u) \cdot n, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} = \omega^2(u, v) \\ a_D(\beta; u, v) - \omega^2(u, v) = \langle \varphi, \gamma_0(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3} \end{cases}$$

on en déduit que

$$\varphi = \sigma^\beta(u) \cdot n \in H_{0, \Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$

Le problème (Pe) est donc bien posé. \square

Nous définissons alors l'opérateur de bord $T(\omega, \beta)$ de la façon suivante

$$(2.14) \quad T(\omega, \beta) : \begin{cases} H_{0, \Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^3 \\ \varphi = \sigma^\beta(u) \cdot n|_\Sigma & \longmapsto & \Psi = u|_\Sigma = T(\omega, \beta)\varphi \end{cases}$$

où u est solution du problème (2.12).

Principe du calcul de $\mathbf{T}(\omega, \beta)$

Le déroulement du calcul de l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$ est le suivant:

- Etape 1: nous supposons donc connu le champ de contrainte $\sigma^\beta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ sur $\tilde{\Sigma}$ et on le note donc φ . Il est supposé appartenir à l'espace $H_{0, \tilde{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$
- Etape 2: nous pouvons alors, la condition aux limites étant homogène et de type Neumann sur tout $\tilde{\Sigma}$, résoudre le problème extérieur (2.12). Nous verrons que ce problème peut être analytiquement résolu, et donnera un lien explicite entre u^e et $\sigma^\beta(u^e) \cdot \mathbf{n}$.
- Etape 3: pour terminer, il suffira de prendre la trace sur Σ du lien établi précédemment.

Le résultat de ce calcul qui sera détaillé dans le chapitre suivant, est en fait une expression en variables de Fourier de l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$, et nous la noterons $\hat{\mathbf{T}}(\omega, \beta)$.

Caractéristiques de l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$

Cet opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$ est linéaire et continu. Etant donné le résultat précédent concernant la positivité de l'opérateur $\mathbf{S}(\omega, \beta)$, il en découle immédiatement que $\mathbf{T}(\omega, \beta)$ est aussi un opérateur positif. D'ailleurs, les résultats numériques obtenus après discrétisation en calculant les valeurs propres de $\mathbf{T}_h(\omega, \beta)$ le montre aussi. La forme bilinéaire associée à $\mathbf{T}(\omega, \beta)$ est notée $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$. Elle est définie par le crochet de dualité:

$$(2.15) \quad b(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \langle \mathbf{T}(\omega, \beta)\varphi, \Psi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3, H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})^3}$$

2.2.2 Ecriture du problème dans la perturbation avec l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$

L'écriture du problème dans O utilisant la condition aux limites avec $\mathbf{T}(\omega, \beta)$ est équivalente à la précédente (2.7):

$$(2.16) \quad \left| \begin{array}{l} \text{trouver } (\omega, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \text{ et } u \neq 0 \in H^1(O)^3 \text{ t.q.} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } O \\ \sigma^\beta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial O - \Sigma \\ u - \mathbf{T}(\omega, \beta)[\sigma^\beta(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] = 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Afin de faire apparaître un couplage champ de déplacement-champ de contraintes, nous coupons la condition aux limites sur Σ en deux parties: l'inconnue du problème est alors un couple déplacement-contraintes (u, φ) et l'écriture équivalente à (2.16) est:

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\omega, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \text{ et } (u, \varphi) \neq 0 \in H^1(O)^3 \times H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \text{ t.q.} \\ \mathcal{A}(\beta)u - \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } O \\ \sigma^\beta(u).n = 0 \quad \text{sur } \partial O - \Sigma \\ \sigma^\beta(u).n = \varphi \quad \text{sur } \Sigma \\ u - T(\omega, \beta)\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

ce qui correspond à la formulation variationnelle suivante:

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_O(\beta; u, v) - \omega^2(u, v)_O + \langle \varphi, v \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall v \in H^1(O)^3 \\ b(\omega, \beta; \varphi, \Psi) - \langle \Psi, u \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall \Psi \in H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \end{array} \right.$$

Le signe positif devant le terme $\langle \varphi, v \rangle_\Sigma$ provient du fait que la normale extérieure au demi-espace D est intérieure à l'ouvert O sur Σ . Nous notons W l'espace $H^1(O)^3 \times H_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$. La formulation variationnelle de (2.17) donne en regroupant les deux équations de (2.18):

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\omega, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \text{ et } (u, \varphi) \neq 0 \in W \text{ t.q.} \\ d(\omega, \beta; (u, \varphi), (v, \Psi)) = 0 \quad \forall (v, \Psi) \in W \end{array} \right.$$

où

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(\omega, \beta; (u, \varphi), (v, \Psi)) = a_O(\beta; u, v) \\ \quad - b(\omega, \beta; \varphi, \Psi) - \omega^2(u, v)_O \\ \quad + \langle \varphi, v \rangle_\Sigma + \langle \Psi, u \rangle_\Sigma \end{array} \right.$$

Dans cette formule,

- $a_O(\beta; u, v)$ est la forme bilinéaire classique déjà rencontrée lors de l'étude du spectre essentiel

- $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur $T(\omega, \beta)$
- $\omega^2(u, v)_O$ a été passé à gauche pour que notre problème revienne simplement à trouver les couples ω et β qui annulent $d(\omega, \beta; (u, \varphi), (v, \Psi))$
- $\langle \varphi, v \rangle_\Sigma$ et $\langle \Psi, u \rangle_\Sigma$ sont les deux termes de couplage entre le champ de déplacement et le champ de contraintes
- le fait que les rôles des paramètres ω et β sont interchangeables est encore plus clair avec la nouvelle forme bilinéaire $d(\omega, \beta; (u, \varphi), (v, \Psi))$.

2.3 Les grandes lignes de la méthode numérique

2.3.1 Ecriture matricielle du problème avec l'opérateur $T(\omega, \beta)$

Le but est de décrire succinctement comment le problème (2.19) se présente numériquement, sans se perdre dans le détail technique des calculs.

En notant

- Id l'opérateur identité dans l'espace $H^1(O)^3$
- C et C^t les opérateurs de couplage entre déplacement et contraintes

le problème (2.18) s'écrit matriciellement:

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u, \varphi) \neq 0 \in W \text{ et } (\omega, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \text{ qui annulent} \\ \text{les valeurs propres } \bar{\lambda}(\omega, \beta) \text{ du problème :} \\ \left[\begin{array}{c|c} A(\beta) - \omega^2 \text{Id} & C \\ \hline C^t & -T(\omega, \beta) \end{array} \right] \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = \bar{\lambda}(\omega, \beta) \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Nous avons pour discrétiser ce problème à calculer les quantités suivantes:

- $[A_h](\beta)$ la matrice associée à la discrétisation par éléments finis P1 de la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$: elle dépend uniquement du paramètre β .
- $[T_h](\omega, \beta)$ la matrice associée à la discrétisation par éléments finis P0 de la forme bilinéaire $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ de l'opérateur de bord: l'originalité consistant ici à effectuer le calcul intégral lié à cet opérateur de bord en variables de Fourier. La matrice obtenue dépend des deux paramètres β et ω .

- $[C_h]$ la matrice associée à la discrétisation des termes de couplage déplacement contraintes: elle ne dépend pas des paramètres mais uniquement de la discrétisation.
- $[B_h]$ la matrice associée à la discrétisation du produit scalaire entre u et v , donc à l'opérateur Id : elle ne dépend pas des paramètres.
- $[b_h]$ la matrice associée à la discrétisation du produit scalaire entre φ et Ψ : elle ne dépend pas des paramètres mais uniquement de la discrétisation.

Le problème de valeurs propres (2.19) s'écrit alors sous forme discrète:

$$(2.22) \quad \left[\begin{array}{c|c} [A_h](\beta) - \omega^2 [B_h] & [C_h] \\ \hline [C_h]^t & - [T_h](\omega, \beta) \end{array} \right] = \bar{\lambda}_h(\omega, \beta) \left[\begin{array}{c|c} [B_h] & 0 \\ \hline 0 & [b_h] \end{array} \right]$$

Le but numérique est de trouver les valeurs réelles positives de ω et β qui annulent éventuellement les valeurs propres $\bar{\lambda}_h(\omega, \beta)$ de ce problème (2.22), ces valeurs $\bar{\lambda}_h(\omega, \beta)$ approchant les valeurs propres du problème (2.10). Mais ce n'est pas exactement sous cette forme que nous allons résoudre numériquement ce problème.

2.3.2 Retour à l'opérateur $S(\omega, \beta)$

Motivation

Ce retour à l'opérateur de bord $S(\omega, \beta)$ est justifié d'une part par le résultat selon lequel l'opérateur $A(\omega, \beta)$ du problème borné (2.5) est à résolvante compacte, d'autre part le fait qu'il est préférable de travailler numériquement avec des opérateurs faisant perdre de la régularité, que l'inverse, ce qui est le cas avec $T(\omega, \beta)$.

Transformation du problème discret

Au stade où nous en sommes, nous n'avons pas terminé le plan de travail que nous nous étions fixé, résumé par le schéma (2.11): nous en sommes au principe de la discrétisation $T_h(\omega, \beta)$, et il nous reste encore à énoncer comment calculer la discrétisation $S_h(\omega, \beta)$ de la forme bilinéaire $s(\beta; u, v)$. Le processus est le suivant:

Quand on trouve ω et β qui annulent une valeur propre $\bar{\lambda}_h(\omega, \beta)$ de (2.22), et un vecteur propre discret associé (u^h, φ^h) , on a le système suivant qui est vérifié:

$$(2.23) \quad \begin{cases} ([A_h](\beta) - \omega^2 [B_h]) u^h + [C_h] \varphi^h = 0 \\ [C_h]^t u^h - [T_h](\omega, \beta) \varphi^h = 0 \end{cases}$$

Il est facile d'éliminer l'inconnue φ^h et d'écrire (2.23) sous la forme d'une équation:

$$(2.24) \quad ([A_h](\beta) - \omega^2 [B_h]) u^h + ([C_h] [T_h]^{-1}(\omega, \beta) [C_h]^t) u^h = 0$$

La discrétisation $S_h(\omega, \beta)$ de la forme bilinéaire $s(\beta; u, v)$ est alors donnée par la matrice $[S_h](\omega, \beta)$ définie par:

$$(2.25) \quad [S_h](\omega, \beta) = [C_h] [T_h]^{-1}(\omega, \beta) [C_h]^t$$

Cette matrice $[S_h](\omega, \beta)$ dépend bien sûr des deux paramètres ω et β .

2.3.3 Le problème numérique final

Sa formulation

Nous disposons désormais des éléments suffisants pour énoncer sous quelle forme est résolu numériquement ce problème de guide d'ondes. Numériquement, il s'énonce ainsi:

$$(2.26) \quad \begin{cases} \text{Trouver les couples } (\omega, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ qui annulent} \\ \text{les valeurs propres } \lambda_h(\omega, \beta) \text{ du problème :} \\ [F_h](\omega, \beta) = ([A_h](\beta) - \omega^2 [B_h]) + [S_h](\omega, \beta) = \lambda_h(\omega, \beta) [B_h] \end{cases}$$

$[F_h](\omega, \beta)$ est la matrice de rigidité de ce problème de valeurs propres, et elle dépend des deux paramètres ω et β . Les valeurs propres $\lambda_h(\omega, \beta)$ du problème discret (2.26) approchent les valeurs propres du problème continu (2.10).

Sa résolution

Le problème (2.26) est non linéaire par rapport aux deux paramètres ω et β . C'est pourquoi nous le résoudrons par une méthode de type point fixe.

2.4 Bilan et travail à venir

Nous avons décrit dans ce chapitre le principe de la mise en oeuvre numérique du problème de guidage: elle consiste donc à se ramener à un problème borné, puis à le discrétiser afin de le résoudre.

Nous allons dans les cinq chapitres suivant détailler les calculs laissés ici dans l'ombre. Il s'agit du calcul explicite

- de l'opérateur $T(\omega, \beta)$
- de toutes les matrices associées aux différents termes de la forme bilinéaire $d(\omega, \beta; u, v)$
- des matrices qui interviennent dans le problème discret final.

Le lecteur peut passer cette partie technique de la mise en oeuvre de la méthode numérique, pour s'intéresser directement à la technique de résolution du problème non-linéaire (2.26) abordée au chapitre 8.

Chapitre 3

Le calcul de l'opérateur $\mathbb{T}(\omega, \beta)$

Comme annoncé au chapitre précédent, ce n'est pas exactement l'opérateur $\mathbb{T}(\omega, \beta)$ mais une expression en variables de Fourier notée $\widehat{\mathbb{T}}(\omega, \beta)$ que nous allons établir maintenant. Pour ce faire, nous suivons le plan de calcul énoncé lors de ce même chapitre.

Nous donnons ici deux écritures successives de $\widehat{\mathbb{T}}(\omega, \beta)$, qui permettront d'écrire deux variantes de la méthode numérique: avec la seconde écriture, les résultats numériques obtenus sont nettement plus précis et robustes que ceux obtenus avec la première (juste contre-partie de calculs préparatoires lourds à effectuer), celle-ci ayant uniquement servi lors de tests pour valider le code.

3.1 Première écriture de $\widehat{\mathbb{T}}(\omega, \beta)$

La première étape du calcul étant de se donner simplement la contrainte φ sur l'interface $\widetilde{\Sigma}$, on passe directement à la seconde qui est la résolution du problème extérieur à la perturbation. Il s'écrit:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \text{(S)} & A(\beta)u = \omega^2 u \quad \text{dans } D \\ \text{(C)} & \sigma^\beta(u) \cdot n = \varphi \quad \text{sur } \widetilde{\Sigma} \end{cases}$$

Nous commençons par résoudre le système (S) de (3.1):

$$(3.2) \quad \text{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\beta(u) \right) + \beta \sigma_{ij}^\beta(u) \right) = \omega^2 u_i & i = 1, 2 \\ -\frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{3j}^\beta(u) \right) - \beta \sigma_{3j}^\beta(u) \right) = \omega^2 u_3 & i = 3 \end{cases}$$

L'idée est de faire une transformée de Fourier dans la direction x_1 afin de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires:

$$u_j(k, x_2) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx_1) u_j(x_1, x_2) dx_1 \quad j = 1, 2, 3$$

On obtient alors (en notant pour simplifier u la fonction $u(k, x_2)$):

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} k^2 u_1 - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{d^2 u_1}{dx_2^2} - \beta^2 u_1 \right) \\ - ik \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{du_2}{dx_2} - ik \frac{\lambda + \mu}{\rho} \beta u_3 \quad = \omega^2 u_1 \\ \bullet - ik \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{du_1}{dx_2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} \\ + \frac{\mu}{\rho} (k^2 + \beta^2) u_2 - \frac{\lambda + \mu}{\rho} \beta \frac{du_3}{dx_2} \quad = \omega^2 u_2 \\ \bullet ik \frac{\lambda + \mu}{\rho} \beta u_1 + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \beta \frac{du_2}{dx_2} \\ + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \beta^2 u_3 - \frac{\mu}{\rho} \left(-k^2 u_3 + \frac{d^2 u_3}{dx_2^2} \right) \quad = \omega^2 u_3 \end{array} \right.$$

Ce système a déjà été résolu par J.Tlili dans [29]: cette résolution a été inspirée par des techniques mises au point par A.Bamberger pour l'étude d'ondes diffractées en élastodynamique dans [4], [5] et [6].

Le système est posé dans $\mathbb{R}_-^2 = \{(k, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x_2 < 0\}$, et on en cherche les solutions exponentiellement décroissantes.

La solution est une combinaison linéaire de trois solutions particulières indépendantes et prend la forme:

$$(3.4) \quad \left| \begin{aligned} u(k, x_2) &= A_P \begin{pmatrix} ik \\ K_P \\ -\beta \end{pmatrix} \exp(K_P x_2) + A_{SH} \begin{pmatrix} K_S \\ -ik \\ 0 \end{pmatrix} \exp(K_S x_2) \\ &+ A_{SV} \begin{pmatrix} ik\beta \\ \beta K_S \\ k^2 - K_S^2 \end{pmatrix} \exp(K_S x_2) \end{aligned} \right.$$

où $(A_P, A_{SH}, A_{SV}) \in \mathbb{R}^3$, les nombres d'ondes des solutions étant donnés par:

$$(3.5) \quad \begin{cases} K_S = \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ K_P = \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Ces deux racines joueront un rôle important par la suite.

Nous allons maintenant passer à la troisième étape du processus du calcul de $\hat{T}(\omega, \beta)$, qui consiste en un passage à la limite. On pose:

$$(3.6) \quad \begin{cases} u = u(k) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} u(k, x_2) \quad \forall k \\ \sigma^2 = \sigma^\beta \cdot n \quad \text{où} \quad \sigma^\beta \cdot n = [\sigma^\beta(u(k))] \cdot n = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} [\sigma^\beta(u(k, x_2))] \cdot n \\ \text{avec } n = (0, 1, 0) \end{cases}$$

L'opérateur vectoriel $\hat{T}(\omega, \beta)$ relie $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$:

$$u = \hat{T}(\omega, \beta)\sigma^2$$

Par définition de u , on a

$$(3.7) \quad u \begin{cases} u_1 = ik A_P + K_S A_{SH} + ik\beta A_{SV} \\ u_2 = K_P A_P - ik A_{SH} + \beta K_S A_{SV} \\ u_3 = -\beta A_P + (k^2 - K_S^2) A_{SV} \end{cases}$$

Et en utilisant la loi de Hooke et la définition de σ^2 , on a:

$$(3.8) \quad \sigma^2 \begin{cases} \sigma_1^2 = \mu [2ik K_P A_P + (k^2 + K_S^2) A_{SH} + 2ik\beta K_S A_{SV}] \\ \sigma_2^2 = \mu [(k^2 + \beta^2 + K_S^2) A_P - 2ik K_S A_{SH} + 2\beta K_S^2 A_{SV}] \\ \sigma_3^2 = \mu [-2\beta K_P A_P + ik\beta A_{SH} + K_S(k^2 - \beta^2 - K_S^2) A_{SV}] \end{cases}$$

Des deux systèmes (3.7) et (3.8), on déduit facilement une première expression à k et β fixés de $\hat{T}(\omega, \beta)$:

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{T}(\omega, \beta) = \frac{1}{-\mu K_S \mathcal{P}_R(k, \beta)} \times \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{l} 4 \beta^2 K_S K_P \\ - (\beta^2 + K_S^2)^2 \\ + k^2 (K_S^2 - \beta^2) \end{array} & \begin{array}{l} ik K_S \times \\ [2 K_S K_P \\ - (k^2 + \beta^2 + K_S^2)] \end{array} & \begin{array}{l} ik\beta \times \\ [4 K_S K_P \\ - (k^2 + \beta^2 + 3 K_S^2)] \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} -ik K_S \times \\ [2 K_S K_P \\ - (k^2 + \beta^2 + K_S^2)] \end{array} & \begin{array}{l} K_S K_P \times \\ (k^2 + \beta^2 - K_S^2) \end{array} & \begin{array}{l} -\beta K_S \times \\ [2 K_S K_P \\ - (k^2 + \beta^2 + K_S^2)] \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} ik\beta \times \\ [k^2 + \beta^2 + 3 K_S^2 \\ - 4 K_S K_P] \end{array} & \begin{array}{l} -\beta K_S \times \\ [2 K_S K_P \\ - (k^2 + \beta^2 + K_S^2)] \end{array} & \begin{array}{l} 4 k^2 K_S K_P \\ - (k^2 + K_S^2)^2 \\ + \beta^2 (K_S^2 - k^2) \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \right.$$

où $\mathcal{P}_R(k, \beta)$ désigne la fonction de Rayleigh dont l'expression est:

$$(3.10) \quad \mathcal{P}_R(k, \beta) = (k^2 + \beta^2 + K_S^2)^2 - 4 K_S K_P (k^2 + \beta^2)$$

La matrice de l'opérateur $\widehat{T}(\omega, \beta)$ est hermitienne. Nous introduisons maintenant ce que nous appellerons la fonction "conjuguée" de Rayleigh, (le signe - devient simplement un signe +), que nous noterons $\overline{\mathcal{P}}_R(k, \beta)$:

$$(3.11) \quad \overline{\mathcal{P}}_R(k, \beta) = (k^2 + \beta^2 + K_S^2)^2 + 4 K_S K_P (k^2 + \beta^2)$$

Nous introduisons alors le produit de ces deux fonctions, qui est un polynôme par rapport à la variable k^2 :

$$(3.12) \quad D(k^2) = \mathcal{P}_R(k, \beta) \times \overline{\mathcal{P}}_R(k, \beta)$$

3.2 Deuxième écriture de $\widehat{T}(\omega, \beta)$

Nous allons mettre l'opérateur $\widehat{T}(\omega, \beta)$ sous une forme telle que le dénominateur de chaque terme ne soit plus une somme de polynômes en k et de racines K_S ou K_P , mais apparaisse comme un produit du polynôme $D(k^2)$ avec ces mêmes racines K_S ou K_P . C'est pourquoi nous avons introduit les deux définitions précédentes, et afin d'obtenir ce résultat, nous multiplions $\widehat{T}(\omega, \beta)$ par:

$$\overline{\mathcal{P}}_R(k, \beta) / \overline{\mathcal{P}}_R(k, \beta)$$

Les avantages de cette transformation sont que d'une part, malgré la lourdeur des expressions obtenues, nous avons des quantités plus simples à manipuler grâce au dénominateur, et que d'autre part, elle permettra d'écrire une méthode numérique plus précise.

Afin de simplifier quelque peu ces expressions, nous introduisons les quantités:

$$(3.13) \quad \alpha_S = \frac{\omega}{V_S} \quad \text{et} \quad \alpha_P = \frac{\omega}{V_P}$$

Les calculs donnent alors pour les termes de $\widehat{T}(\omega, \beta)$ que nous noterons T_{ij} :

$$\begin{aligned}
(3.14) \quad T_{11} &= \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} \left[\begin{aligned} &k^6 (-4\alpha_S^2) \\ &+ k^4 (16\beta^2\alpha_P^2 + 8\alpha_S^4 - 24\beta^2\alpha_S^2) \\ &+ k^2 (32\beta^4\alpha_P^2 - 16\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 - 5\alpha_S^6 \\ &\quad - 36\beta^4\alpha_S^2 + 32\beta^2\alpha_P^4) \\ &+ (\alpha_S^8 - 8\beta^2\alpha_S^6 - 16\beta^4\alpha_S^2\alpha_P^2 \\ &\quad + 24\beta^4\alpha_S^4 + 16\beta^6\alpha_P^2 - 16\beta^6\alpha_S^2) \end{aligned} \right] \\
&+ \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} \left[\begin{aligned} &k^6 (-4\alpha_S^2) \\ &+ k^4 (4\alpha_S^2)(\alpha_S^2 - 2\beta^2 + \alpha_P^2) \\ &+ k^2 (4\alpha_S^2)(\beta^2\alpha_S^2 - \beta^4 - \alpha_S^2\alpha_P^2 + \beta^2\alpha_P^2) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.15) \quad T_{12} &= \frac{ik}{\mu D(k^2)} \left[\begin{aligned} &k^4 (8\alpha_P^2 - 4\alpha_S^2) \\ &+ k^2 (6\alpha_S^4 - 8\alpha_S^2\alpha_P^2 \\ &\quad + 16\beta^2\alpha_P^2 - 8\beta^2\alpha_S^2) \\ &+ (6\beta^2\alpha_S^4 - \alpha_S^6 - 4\beta^4\alpha_S^2 \\ &\quad - 8\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 + 8\beta^4\alpha_P^2) \end{aligned} \right] \\
&+ \frac{ik}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S K_P} \left[\begin{aligned} &k^6 (4\alpha_S^2) \\ &+ k^4 2\alpha_S^2(6\beta^2 - 3\alpha_S^2 - 2\alpha_P^2) \\ &+ k^2 2\alpha_S^2(6\beta^4 + \alpha_S^4 - 6\beta^2\alpha_S^2 \\ &\quad - 4\beta^2\alpha_P^2 + 3\alpha_S^2\alpha_P^2) \\ &+ 2\alpha_S^2(2\beta^6 + 3\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 - 3\alpha_S^2\beta^4 \\ &\quad - 2\beta^4\alpha_P^2 - \alpha_S^4\alpha_P^2 + \beta^2\alpha_S^4) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$(3.16) \quad T_{21} = \overline{T_{12}} = -T_{12}$$

$$(3.17) \quad \left| \begin{array}{l} T_{23} = T_{32} = -\frac{\beta}{ik} T_{12} \end{array} \right.$$

$$(3.18) \quad \left| \begin{array}{l} T_{22} = \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} [\quad k^6 (-4\alpha_S^2) \\ \quad + k^4 (4\alpha_S^2)(\alpha_S^2 + \alpha_P^2 - 3\beta^2) \\ \quad + k^2 (4\alpha_S^2)(2\beta^2\alpha_S^2 + 2\beta^2\alpha_P^2 \\ \quad \quad - 3\beta^4 - \alpha_S^2\alpha_P^2) \\ \quad + (4\alpha_S^2)(\beta^4\alpha_S^2 + \beta^4\alpha_P^2 - \beta^6 \\ \quad \quad - \beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2)] \\ + \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} [\quad k^6 (-4\alpha_S^2) \\ \quad + k^4 \alpha_S^2(4\alpha_S^2 + 4\alpha_P^2 - 12\beta^2) \\ \quad + k^2 \alpha_S^2(8\beta^2\alpha_P^2 + 8\beta^2\alpha_S^2 \\ \quad \quad - 4\alpha_S^2\alpha_P^2 - 12\beta^4 - \alpha_S^4) \\ \quad + \alpha_S^2(\alpha_S^4\alpha_P^2 - 4\beta^6 - \beta^2\alpha_S^4 \\ \quad \quad - 4\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 + 4\alpha_P^2\beta^4 + 4\alpha_S^2\beta^4)] \end{array} \right.$$

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} T_{13} = \frac{ik\beta}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} [\quad k^4 4(4\alpha_P^2 - 3\alpha_S^2) \\ \quad + k^2 4(4\alpha_S^4 - 4\alpha_S^2\alpha_P^2 - 6\beta^2\alpha_S^2 \\ \quad \quad + 8\beta^2\alpha_P^2) \\ \quad + (16\beta^2\alpha_S^4 - 12\alpha_S^2\beta^4 \\ \quad \quad + 16\beta^4\alpha_P^2 - 3\alpha_S^6 - 16\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2)] \\ + \frac{ik\beta}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} [\quad k^4 (4\alpha_S^2) \\ \quad + k^2 (4\alpha_S^2)(2\beta^2 - \alpha_S^2 - \alpha_P^2) \\ \quad + (4\alpha_S^2)(\beta^4 + \alpha_S^2\alpha_P^2 - \beta^2\alpha_S^2 \\ \quad \quad - \beta^2\alpha_P^2)] \end{array} \right.$$

$$(3.20) \quad \left| \begin{array}{l} T_{31} = \overline{T_{13}} = -T_{13} \end{array} \right.$$

$$(3.21) \quad \left| \begin{array}{l} T_{33} = \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} [\begin{array}{l} k^6 \quad 16(\alpha_P^2 - \alpha_S^2) \\ + \quad k^4 \quad 4(8\beta^2 \alpha_P^2 - 9\beta^2 \alpha_S^2 - 4\alpha_S^2 \alpha_P^2 \\ \quad \quad \quad + 6\alpha_S^4) \\ + \quad k^2 \quad 8(2\beta^4 \alpha_P^2 - 2\beta^2 \alpha_S^2 \alpha_P^2 - \alpha_S^6 \\ \quad \quad \quad - 3\beta^4 \alpha_S^2 + 4\beta^2 \alpha_S^4) \\ + \quad \quad \quad (8\beta^4 \alpha_S^4 + \alpha_S^8 - 4\beta^6 \alpha_S^2 \\ \quad \quad \quad - 5\beta^2 \alpha_S^6) \end{array}] \\ \\ + \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} [\begin{array}{l} k^4 \quad (-4\beta^2 \alpha_S^2) \\ + \quad k^2 \quad (-4\beta^2 \alpha_S^2)(2\beta^2 - \alpha_S^2 - \alpha_P^2) \\ + \quad \quad \quad (-4\beta^2 \alpha_S^2)(\beta^4 + \alpha_S^2 \alpha_P^2 - \beta^2 \alpha_S^2) \\ + \quad \quad \quad -\beta^2 \alpha_P^2) \end{array}] \end{array} \right.$$

Nous condensons cette écriture des éléments T_{ij} en introduisant des coefficients indicés suivant les termes T_{ij} . Ils dépendent des deux paramètres ω et β . Ceci donne:

$$(3.22) \quad \left| \begin{array}{l} T_{11} = \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} [\begin{array}{l} C_1^{11} k^6 + C_2^{11} k^4 + C_3^{11} k^2 + C_4^{11} \end{array}] \\ + \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} [\begin{array}{l} C_5^{11} k^6 + C_6^{11} k^4 + C_7^{11} k^2 \end{array}] \end{array} \right.$$

avec

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{11} = -4\alpha_S^2 \\ C_2^{11} = 16\beta^2\alpha_P^2 + 8\alpha_S^4 - 24\beta^2\alpha_S^2 \\ C_3^{11} = 32\beta^4\alpha_P^2 - 16\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 - 5\alpha_S^6 - 36\beta^4\alpha_S^2 + 32\beta^2\alpha_P^4 \\ C_4^{11} = \alpha_S^8 - 8\beta^2\alpha_S^6 - 16\beta^4\alpha_S^2\alpha_P^2 + 24\beta^4\alpha_S^4 + 16\beta^6\alpha_P^2 - 16\beta^6\alpha_S^2 \\ C_5^{11} = -4\alpha_S^2 \\ C_6^{11} = (4\alpha_S^2)(\alpha_S^2 - 2\beta^2 + \alpha_P^2) \\ C_7^{11} = (4\alpha_S^2)(\beta^2\alpha_S^2 - \beta^4 - \alpha_S^2\alpha_P^2 + \beta^2\alpha_P^2) \end{array} \right.$$

$$(3.24) \quad \left| \begin{array}{l} T_{12} = \frac{ik}{\mu D(k^2)} \quad [\quad C_1^{12} k^4 + C_2^{12} k^2 + C_3^{12} \quad] \\ + \frac{ik}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S K_P} \quad [\quad C_4^{12} k^6 + C_5^{12} k^4 + C_6^{12} k^2 + C_7^{12} \quad] \end{array} \right.$$

avec

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{12} = 8\alpha_P^2 - 4\alpha_S^2 \\ C_2^{12} = 6\alpha_S^4 - 8\alpha_S^2\alpha_P^2 + 16\beta^2\alpha_P^2 - 8\beta^2\alpha_S^2 \\ C_3^{12} = 6\beta^2\alpha_S^4 - \alpha_S^6 - 4\beta^4\alpha_S^2 - 8\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 + 8\beta^4\alpha_P^2 \\ C_4^{12} = 4\alpha_S^2 \\ C_5^{12} = 2\alpha_S^2(6\beta^2 - 3\alpha_S^2 - 2\alpha_P^2) \\ C_6^{12} = 2\alpha_S^2(6\beta^4 + \alpha_S^4 - 6\beta^2\alpha_S^2 - 4\beta^2\alpha_P^2 + 3\alpha_S^2\alpha_P^2) \\ C_7^{12} = 2\alpha_S^2(2\beta^6 + 3\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 - 3\alpha_S^2\beta^4 - 2\beta^4\alpha_P^2 - \alpha_S^4\alpha_P^2 + \beta^2\alpha_S^4) \end{array} \right.$$

$$(3.26) \quad \left| \quad T_{21} = \overline{T_{12}} = -T_{12} \quad \right.$$

$$(3.27) \quad \left| \quad T_{23} = T_{32} = -\frac{\beta}{ik} T_{12} \quad \right.$$

$$(3.28) \quad \left| \begin{array}{l} T_{23} = \frac{-\beta}{\mu D(k^2)} \quad [\quad C_1^{12} k^4 + C_2^{12} k^2 + C_3^{12} \quad] \\ + \frac{-\beta}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S K_P} \quad [\quad C_4^{12} k^6 + C_5^{12} k^4 + C_6^{12} k^2 + C_7^{12} \quad] \end{array} \right.$$

$$(3.29) \quad \left| \begin{array}{l} T_{13} = \frac{ik\beta}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} \quad [\quad C_1^{13} k^4 + C_2^{13} k^2 + C_3^{13} \quad] \\ + \frac{ik\beta}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} \quad [\quad C_4^{13} k^4 + C_5^{13} k^2 + C_6^{13} \quad] \end{array} \right.$$

avec

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{13} = 4(4\alpha_P^2 - 3\alpha_S^2) \\ C_2^{13} = 4(4\alpha_S^4 - 4\alpha_S^2\alpha_P^2 - 6\beta^2\alpha_S^2 + 8\beta^2\alpha_P^2) \\ C_3^{13} = (16\beta^2\alpha_S^4 - 12\alpha_S^2\beta^4 + 16\beta^4\alpha_P^2 - 3\alpha_S^6 - 16\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2) \\ C_4^{13} = 4\alpha_S^2 \\ C_5^{13} = 4\alpha_S^2(2\beta^2 - \alpha_S^2 - \alpha_P^2) \\ C_6^{13} = 4\alpha_S^2(\beta^4 + \alpha_S^2\alpha_P^2 - \beta^2\alpha_S^2 - \beta^2\alpha_P^2) \end{array} \right.$$

$$(3.31) \quad \left| \quad T_{31} = \overline{T_{13}} = -T_{13} \quad \right.$$

$$(3.32) \quad \left| \begin{array}{l} T_{22} = \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} \quad [\quad C_1^{22} k^6 + C_2^{22} k^4 + C_3^{22} k^2 + C_4^{22} \quad] \\ + \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} \quad [\quad C_5^{22} k^6 + C_6^{22} k^4 + C_7^{22} k^2 + C_8^{22} \quad] \end{array} \right.$$

avec

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{22} = -4\alpha_S^2 \\ C_2^{22} = 4\alpha_S^2(\alpha_S^2 + \alpha_P^2 - 3\beta^2) \\ C_3^{22} = 4\alpha_S^2(2\beta^2\alpha_S^2 + 2\beta^2\alpha_P^2 - 3\beta^4 - \alpha_S^2\alpha_P^2) \\ C_4^{22} = 4\alpha_S^2(\beta^4\alpha_S^2 + \beta^4\alpha_P^2 - \beta^6 - \beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2) \\ C_5^{22} = -4\alpha_S^2 \\ C_6^{22} = \alpha_S^2(4\alpha_S^2 + 4\alpha_P^2 - 12\beta^2) \\ C_7^{22} = \alpha_S^2(8\beta^2\alpha_P^2 + 8\beta^2\alpha_S^2 - 4\alpha_S^2\alpha_P^2 - 12\beta^4 - \alpha_S^4) \\ C_8^{22} = \alpha_S^2(\alpha_S^4\alpha_P^2 - 4\beta^6 - \beta^2\alpha_S^4 - 4\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 + 4\alpha_P^2\beta^4 + 4\alpha_S^2\beta^4) \end{array} \right.$$

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{33} = \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_S} [C_1^{33} k^6 + C_2^{33} k^4 + C_3^{33} k^2 + C_4^{33}] \\ + \frac{1}{\mu D(k^2)} \frac{1}{K_P} [C_5^{33} k^4 + C_6^{33} k^2 + C_7^{33}] \end{array} \right.$$

avec

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^{33} = 16(\alpha_P^2 - \alpha_S^2) \\ C_2^{33} = 4(8\beta^2\alpha_P^2 - 9\beta^2\alpha_S^2 - 4\alpha_S^2\alpha_P^2 + 6\alpha_S^4) \\ C_3^{33} = 8(2\beta^4\alpha_P^2 - 2\beta^2\alpha_S^2\alpha_P^2 - \alpha_S^6 - 3\beta^4\alpha_S^2 + 4\beta^2\alpha_S^4) \\ C_4^{33} = 8\beta^4\alpha_S^4 + \alpha_S^8 - 4\beta^6\alpha_S^2 - 5\beta^2\alpha_S^6 \\ C_5^{33} = -4\beta^2\alpha_S^2 \\ C_6^{33} = -4\beta^2\alpha_S^2(2\beta^2 - \alpha_S^2 - \alpha_P^2) \\ C_7^{33} = -4\beta^2\alpha_S^2(\beta^4 + \alpha_S^2\alpha_P^2 - \beta^2\alpha_S^2 - \beta^2\alpha_P^2) \end{array} \right.$$

Nous disposons maintenant de l'expression en Fourier de l'opérateur de bord $T(\omega, \beta)$. Nous allons nous intéresser maintenant à la discrétisation du problème. La partie de cette discrétisation consacrée à l'opérateur de bord est de loin la moins classique et la plus délicate: nous allons y consacrer le chapitre suivant.

Chapitre 4

Calcul de la forme bilinéaire $\mathbf{b}(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ associée à l'opérateur de bord $\mathbf{T}(\omega, \beta)$

Plan du chapitre

Nous allons désormais passer à la discrétisation de la formulation variationnelle (2.19), afin d'aborder la mise en oeuvre numérique du problème. La partie essentielle de ce travail de discrétisation concerne l'opérateur intégral de bord: nous allons y consacrer deux chapitres: nous commencerons dans celui-ci par la discrétisation de la forme bilinéaire $\mathbf{b}(\omega, \beta; (u, \varphi), (v, \Psi))$. Le calcul de la matrice discrète qui lui est associée, y est effectué jusqu'au moment d'entamer la partie calcul intégral: le point important est que nous ne procéderons pas à la recherche de noyaux intégrables, mais que nous ferons le calcul en variables de Fourier.

4.1 Expression en Fourier de $\mathbf{b}(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$

Nous rappelons que $\mathbf{b}(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur $\mathbf{T}(\omega, \beta)$ et qu'elle est définie par le crochet de dualité (2.15).

Nous avons donc à calculer une intégrale du type:

$$(4.1) \quad \mathbf{b}(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \int_{\Sigma} (\mathbf{T}(\omega, \beta)\varphi, \Psi) \, dx_1 \quad \text{où } (\varphi, \Psi) \in \mathbf{H}_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 \times \mathbf{H}_{0,\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$$

Cette intégrale est exprimée en variables physiques i.e.

$$(4.2) \quad b(x_1; \omega, \beta; \varphi(x_1), \Psi(x_1)) = \int_{\Sigma} (T(\omega, \beta)\varphi(x_1), \Psi(x_1)) dx_1$$

Mais la seule expression de $T(\omega, \beta)$ dont nous disposons est en variables de Fourier. L'expression (4.2) devient en appliquant la transformée de Fourier dans la direction x_1 et en utilisant le théorème de Plancherel:

$$(4.3) \quad b(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [T(\widehat{\omega, \beta})\varphi](k), \overline{\widehat{\Psi}}(k) dk$$

La fonction définie sur Σ qui nous intéresse est:

$$\phi(x_1) = T(\omega, \beta) [\sigma^\beta(u).n]$$

Alors:

$$\widehat{\phi}(k) = T(\omega, \beta) [\widehat{\sigma^\beta(u).n}]$$

Mais comme $\widehat{\phi} = u$ où u est la fonction définie au chapitre précédent en même temps que σ^2 , et qui est reliée à celle-ci par:

$$u = u(k) = \widehat{T}(\omega, \beta) \sigma^2 = [\widehat{T}(\omega, \beta) \sigma^2](k)$$

Nous avons bien une expression de $\widehat{\phi}$ connue explicitement et où intervient l'opérateur $\widehat{T}(\omega, \beta)$. Nous avons donc une intégrale de la forme suivante à calculer:

$$(4.4) \quad b(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [(\widehat{T}(\omega, \beta))(k) \widehat{\varphi}(k) \overline{\widehat{\Psi}}(k)] dk$$

On pose:

$$(4.5) \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, on écrit $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ sous la forme:

$$(4.6) \quad \left| b(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}} [(T_{ij}(\omega, \beta))(k) \widehat{\varphi}_j(k) \overline{\widehat{\Psi}_i}(k)] dk \right.$$

où les termes $T_{ij}(\omega, \beta)$ sont les termes de $\widehat{T}(\omega, \beta)$ calculés dans la dernière partie du chapitre précédent.

4.2 Choix effectués pour la discrétisation

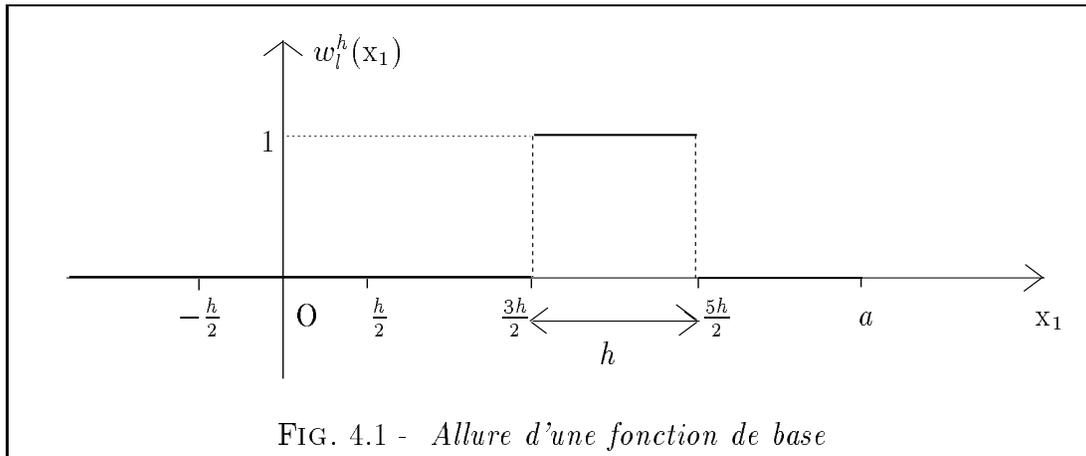
4.2.1 Choix des espaces d'approximation

Nous allons faire une discrétisation par éléments finis 1-D de la forme bilinéaire $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$.

Nous avons décidé, étant donné que les fonctions de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)^3$ sont peu régulières, de les approcher par des polynômes constants par morceaux appartenant à l'espace discret $P_0(\Sigma)^3$. Une base de cet espace est construite de la façon suivante:

on découpe l'intervalle $[-a; a] = \Sigma$ en N intervalles identiques de longueur h , et on prend comme fonctions de base les N fonctions notées w_l^h , $l \in [1, N]$, constantes par morceaux, ayant comme support le l -ième intervalle, égales à 1 sur celui-ci. La dimension de $P_0(\Sigma)$ est alors N .

La figure ci-dessous représente une fonction de base de $P_0(\Sigma)$ quand N est impair:



Le choix d'un pas de discrétisation **constant** sur Σ va nous permettre d'obtenir un gain de temps calcul important.

4.2.2 Transformée de Fourier d'une fonction de base

Les N fonctions de base de $P_0(\Sigma)$ sont numérotées de la façon suivante:

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{lll} w_1^h & \text{a pour support} & [-a; -a + h] \\ w_2^h & \text{a pour support} & [-a + h; -a + 2h] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_l^h & \text{a pour support} & [-a + (l - 1)h; -a + lh] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-1}^h & \text{a pour support} & [-a + (N - 2)h; -a + (N - 1)h] \\ w_N^h & \text{a pour support} & [a - h; a] \end{array} \right.$$

Le calcul de la transformée de Fourier d'une fonction de base w_l^h donne:

$$(4.8) \quad \hat{w}_l^h(k) = \frac{2 \exp(ika)}{k} \exp(-iklh) \exp\left(i\frac{kh}{2}\right) \sin\left(\frac{kh}{2}\right)$$

Le produit de la transformée de Fourier d'une fonction de base w_n^h par la conjuguée de la transformée de Fourier d'une fonction de base w_m^h donne:

$$(4.9) \quad \hat{w}_n^h(k) \overline{\hat{w}_m^h(k)} = \frac{4}{k^2} \exp(-iknh) \exp(ikmh) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)$$

En notant

$$(4.10) \quad \left| \begin{array}{l} p = m - n \end{array} \right.$$

on obtient:

$$(4.11) \quad \left| \hat{w}_n^h(k) \overline{\hat{w}_m^h(k)} = \frac{4}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \right.$$

4.2.3 Approximation de $\mathbf{b}(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$

On approche les fonctions $\varphi(x_1)$ et $\Psi(x_1)$ par $\varphi^h(x_1)$ et $\Psi^h(x_1)$ qui appartiennent à $P_0(\Sigma)^3$ et où:

$$(4.12) \left\{ \begin{array}{l} \varphi^h = \begin{pmatrix} \varphi_1^h \\ \varphi_2^h \\ \varphi_3^h \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi^h = \begin{pmatrix} \Psi_1^h \\ \Psi_2^h \\ \Psi_3^h \end{pmatrix} \\ \varphi_j^h = \sum_{n=1}^N \varphi_{j,n}^h w_{j,n}^h, j = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad \Psi_i^h = \sum_{m=1}^N \Psi_{i,m}^h w_{i,m}^h, i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

Nous avons indiqué par i et j les fonctions de bases w_n^h et w_m^h , sachant que:

$$w_{j,n}^h = w_n^h \quad \forall j \in [1, 3]$$

$$w_{i,m}^h = w_m^h \quad \forall i \in [1, 3]$$

car ces indices vont être importants dans le calcul vectoriel qui va suivre.

Nous approcherons $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ par la forme bilinéaire $b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ qui est donnée par:

$$(4.13) \quad b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [\mathbb{T}(\omega, \beta) \widehat{\varphi^h}](k), \overline{\widehat{\Psi^h}}(k) dk$$

4.3 La matrice associée à $b(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$

4.3.1 Formation de la matrice

Nous explicitons désormais cette expression (4.13) jusqu'à faire apparaître clairement la matrice associée à la forme bilinéaire $b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$, matrice notée $[\mathbb{T}_h](\omega, \beta)$, que l'on calculera numériquement.

Pour toute la suite, on note entre accolades les vecteurs, et par l'exposant t les matrices et vecteurs transposés. En particulier, les vecteurs des degrés de liberté de φ et Ψ seront notés:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\varphi_1^h\}_n \\ \{\varphi_2^h\}_n \\ \{\varphi_3^h\}_n \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\Psi_1^h\}_m \\ \{\Psi_2^h\}_m \\ \{\Psi_3^h\}_m \end{array} \right\}$$

Nous allons écrire $b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ sous la forme:

$$(4.14) \quad b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \begin{pmatrix} \{\Psi_1^h\}_m \\ \{\Psi_2^h\}_m \\ \{\Psi_3^h\}_m \end{pmatrix} \bullet \left[T_h \right](\omega, \beta) \times \begin{pmatrix} \{\varphi_1^h\}_n \\ \{\varphi_2^h\}_n \\ \{\varphi_3^h\}_n \end{pmatrix}$$

Le point de départ du calcul est l'expression suivante:

$$b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}} \left[(T_{ij}(\omega, \beta))(k) \widehat{\varphi}_j^h(k) \overline{\widehat{\Psi}_i^h(k)} \right] dk$$

$$b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}} \left[(T_{ij}(\omega, \beta))(k) \left(\sum_{n=1}^N \varphi_{j,n}^h \widehat{w}_{j,n}^h \right) \left(\sum_{m=1}^N \Psi_{i,m}^h \overline{\widehat{w}_{i,m}^h} \right) \right] dk$$

$$b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi_{j,n}^h \Psi_{i,m}^h \int_{\mathbb{R}} \left[(T_{ij}(\omega, \beta))(k) \widehat{w}_{j,n}^h \overline{\widehat{w}_{i,m}^h} \right] dk$$

$$b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \times \int_{\mathbb{R}} ($$

$$\begin{aligned} & [T_{11} \varphi_{1,n}^h \widehat{w}_{1,n}^h \Psi_{1,m}^h \overline{\widehat{w}_{1,m}^h} + T_{12} \varphi_{2,n}^h \widehat{w}_{2,n}^h \Psi_{1,m}^h \overline{\widehat{w}_{1,m}^h} + T_{13} \varphi_{3,n}^h \widehat{w}_{3,n}^h \Psi_{1,m}^h \overline{\widehat{w}_{1,m}^h} \\ & + T_{21} \varphi_{1,n}^h \widehat{w}_{1,n}^h \Psi_{2,m}^h \overline{\widehat{w}_{2,m}^h} + T_{22} \varphi_{2,n}^h \widehat{w}_{2,n}^h \Psi_{2,m}^h \overline{\widehat{w}_{2,m}^h} + T_{23} \varphi_{3,n}^h \widehat{w}_{3,n}^h \Psi_{2,m}^h \overline{\widehat{w}_{2,m}^h} \\ & + T_{31} \varphi_{1,n}^h \widehat{w}_{1,n}^h \Psi_{3,m}^h \overline{\widehat{w}_{3,m}^h} + T_{32} \varphi_{2,n}^h \widehat{w}_{2,n}^h \Psi_{3,m}^h \overline{\widehat{w}_{3,m}^h} + T_{33} \varphi_{3,n}^h \widehat{w}_{3,n}^h \Psi_{3,m}^h \overline{\widehat{w}_{3,m}^h}] \end{aligned}$$

) dk

$$b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{array}{l} \left\{ \sum_{n=1}^N \left(T_{11} \varphi_{1,n}^h \widehat{w}_{1,n}^h \overline{\widehat{w}}_{1,m}^h + T_{12} \varphi_{2,n}^h \widehat{w}_{2,n}^h \overline{\widehat{w}}_{1,m}^h + T_{13} \varphi_{3,n}^h \widehat{w}_{3,n}^h \overline{\widehat{w}}_{1,m}^h \right) \right\}_m^t \\ \left\{ \sum_{n=1}^N \left(T_{21} \varphi_{1,n}^h \widehat{w}_{1,n}^h \overline{\widehat{w}}_{2,m}^h + T_{22} \varphi_{2,n}^h \widehat{w}_{2,n}^h \overline{\widehat{w}}_{2,m}^h + T_{23} \varphi_{3,n}^h \widehat{w}_{3,n}^h \overline{\widehat{w}}_{2,m}^h \right) \right\}_m^t \\ \left\{ \sum_{n=1}^N \left(T_{31} \varphi_{1,n}^h \widehat{w}_{1,n}^h \overline{\widehat{w}}_{3,m}^h + T_{32} \varphi_{2,n}^h \widehat{w}_{2,n}^h \overline{\widehat{w}}_{3,m}^h + T_{33} \varphi_{3,n}^h \widehat{w}_{3,n}^h \overline{\widehat{w}}_{3,m}^h \right) \right\}_m^t \\ \bullet \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \Psi_1^h \right\}_m \\ \left\{ \Psi_2^h \right\}_m \\ \left\{ \Psi_3^h \right\}_m \end{array} \right\} \end{array} \right) dk$$

ce qui donne finalement

$$b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{array}{l} \left\{ \Psi_1^h \right\}_m \\ \left\{ \Psi_2^h \right\}_m \\ \left\{ \Psi_3^h \right\}_m \end{array} \right) \bullet \left(\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} [T_{11} \widehat{w}_{1,n}^h \overline{\widehat{w}}_{1,m}^h]_{m,n} & [T_{12} \widehat{w}_{2,n}^h \overline{\widehat{w}}_{1,m}^h]_{m,n} & [T_{13} \widehat{w}_{3,n}^h \overline{\widehat{w}}_{1,m}^h]_{m,n} \\ [T_{21} \widehat{w}_{1,n}^h \overline{\widehat{w}}_{2,m}^h]_{m,n} & [T_{22} \widehat{w}_{2,n}^h \overline{\widehat{w}}_{2,m}^h]_{m,n} & [T_{23} \widehat{w}_{3,n}^h \overline{\widehat{w}}_{2,m}^h]_{m,n} \\ [T_{31} \widehat{w}_{1,n}^h \overline{\widehat{w}}_{3,m}^h]_{m,n} & [T_{32} \widehat{w}_{2,n}^h \overline{\widehat{w}}_{3,m}^h]_{m,n} & [T_{33} \widehat{w}_{3,n}^h \overline{\widehat{w}}_{3,m}^h]_{m,n} \end{array} \right] \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \varphi_1^h \right\}_n \\ \left\{ \varphi_2^h \right\}_n \\ \left\{ \varphi_3^h \right\}_n \end{array} \right\} \end{array} \right) dk$$

Nous sommes parvenus à mettre $b_h(\omega, \beta; \varphi, \Psi)$ sous la forme désirée et avons alors à calculer la matrice $[T_h](\omega, \beta)$ de taille $3N \times 3N$ suivante:

$$[T_h](\omega, \beta) = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \left[\int_{\mathbb{R}} T_{11} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} & \left[\int_{\mathbb{R}} T_{12} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} & \left[\int_{\mathbb{R}} T_{13} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} \\ \left[\int_{\mathbb{R}} T_{21} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} & \left[\int_{\mathbb{R}} T_{22} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} & \left[\int_{\mathbb{R}} T_{23} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} \\ \left[\int_{\mathbb{R}} T_{31} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} & \left[\int_{\mathbb{R}} T_{32} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} & \left[\int_{\mathbb{R}} T_{33} \hat{w}_n^h \overline{\hat{w}_m^h} \right]_{m,n} \end{bmatrix}$$

Soit la matrice $[T]$ définie par

$$(4.15) \quad [T_h](\omega, \beta) = \frac{1}{2\pi} [T]$$

Nous devons procéder au calcul de $[T]$, qui est une matrice composée de neuf blocs $[T_{ij}^h]_{m,n}$; $i, j \in [1, 3]$, de taille $N \times N$ chacun. Nous avons alors:

$$(4.16) \quad [T] = \begin{bmatrix} [T_{11}^h]_{m,n} & [T_{12}^h]_{m,n} & [T_{13}^h]_{m,n} \\ [T_{21}^h]_{m,n} & [T_{22}^h]_{m,n} & [T_{23}^h]_{m,n} \\ [T_{31}^h]_{m,n} & [T_{32}^h]_{m,n} & [T_{33}^h]_{m,n} \end{bmatrix}$$

Les éléments $(T_{ij}^h)_{mn}$ de chaque bloc $[T_{ij}^h]_{m,n}$ de la matrice $[T]$ sont donnés par la formule:

$$(4.17) \quad (T_{ij}^h)_{m,n} = \int_{\mathbb{R}} T_{ij}(k) \hat{w}_n^h(k) \overline{\hat{w}_m^h(k)} dk \quad m, n \in [1, N]$$

4.3.2 Les intégrales à calculer

Etant donné (4.11) et (4.10), chaque bloc $[T_{ij}^h]_{m,n}$ de la matrice $[T]$ est Toeplitz: c'est la conséquence importante du fait d'avoir choisi un pas de discrétisation h **constant** sur le bord Σ . Comme la matrice $[T]$ est **pleine**, ceci apporte un gain de temps de calcul important, car nous avons alors pour chaque bloc un seul élément par diagonale à calculer, noté $(T_{ij}^h)_p$ qui à la forme suivante:

$$(4.18) \quad (T_{ij}^h)_p = \int_{\mathbb{R}} T_{ij}(k) \frac{4}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk$$

Comme $p = m - n$, on a $|p| \in [0, N - 1]$, le signe de p varie de la façon suivante dans chaque bloc:

$$(4.19) \quad \left[\begin{array}{cccc} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array} \right] \begin{array}{l} p < 0 \\ p = 0 \\ p > 0 \end{array}$$

Il reste encore à vérifier si les intégrales sont bien calculables. Or la seconde écriture des expressions T_{ij} montrent clairement que les fonctions à intégrer tendent vers 0 à l'infini. De plus, grâce à une étude des dénominateurs de ces expressions, (qui sera exposée au début du chapitre suivant), et en particulier du polynôme $D(k^2)$, nous nous placerons dans le cas où la valeur du paramètre τ ne gênera pas l'intégrabilité. Enfin, le produit (4.11) étant continu, il ne sera pas gênant non plus.

4.3.3 Quelques propriétés de la matrice [T]

Nous allons maintenant montrer que les blocs de la matrice [T] sont soit symétriques, soit antisymétriques, et que la matrice [T] est globalement symétrique et réelle.

Le fait que les blocs de la matrice [T] soient symétriques, soit antisymétriques, dépend uniquement de la parité des fonctions à intégrer. Or, quand on regarde les expressions des éléments T_{ij} de $\hat{T}(\omega, \beta)$ établies à la fin du chapitre précédent, on a que

- $T_{11}(k)$ est une fonction paire et réelle.
- $T_{12}(k)$ est une fonction impaire et imaginaire pure.
- $T_{21}(k)$ est la fonction conjuguée de $T_{12}(k)$.
- $T_{23}(k)$ est une fonction paire et réelle.

- $T_{32}(k)$ est égale à $T_{23}(k)$.
- $T_{13}(k)$ est une fonction impaire et imaginaire pure.
- $T_{31}(k)$ est la fonction conjuguée de $T_{13}(k)$.
- $T_{22}(k)$ est une fonction paire et réelle.
- $T_{33}(k)$ est une fonction paire et réelle.

Comme on multiplie ces fonctions par la fonction paire

$$\frac{4}{k^2} \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right) dk$$

et encore par

$$\exp(ikph) = \cos(kph) + i \sin(kph)$$

il en résulte que

- les blocs $\left[T_{11}^h \right]_{m,n}$, $\left[T_{22}^h \right]_{m,n}$ et $\left[T_{33}^h \right]_{m,n}$ sont symétriques.
- les blocs $\left[T_{23}^h \right]_{m,n}$ et $\left[T_{32}^h \right]_{m,n}$ sont égaux et symétriques.
- les blocs $\left[T_{12}^h \right]_{m,n}$ et $\left[T_{21}^h \right]_{m,n}$ sont opposés et antisymétriques.
- les blocs $\left[T_{13}^h \right]_{m,n}$ et $\left[T_{31}^h \right]_{m,n}$ sont opposés et antisymétriques.

De plus, tous les blocs sont réels.

La conséquence immédiate de ce qui précède est que la matrice T_h à calculer est **une matrice pleine**, de taille $3N \times 3N$, **réelle et symétrique**.

Une autre conséquence de ces propriétés de symétrie est que nous n'aurons à calculer les intégrales (4.18) que pour $p \geq 0$.

Nous résumons tout ceci dans le schéma suivant:

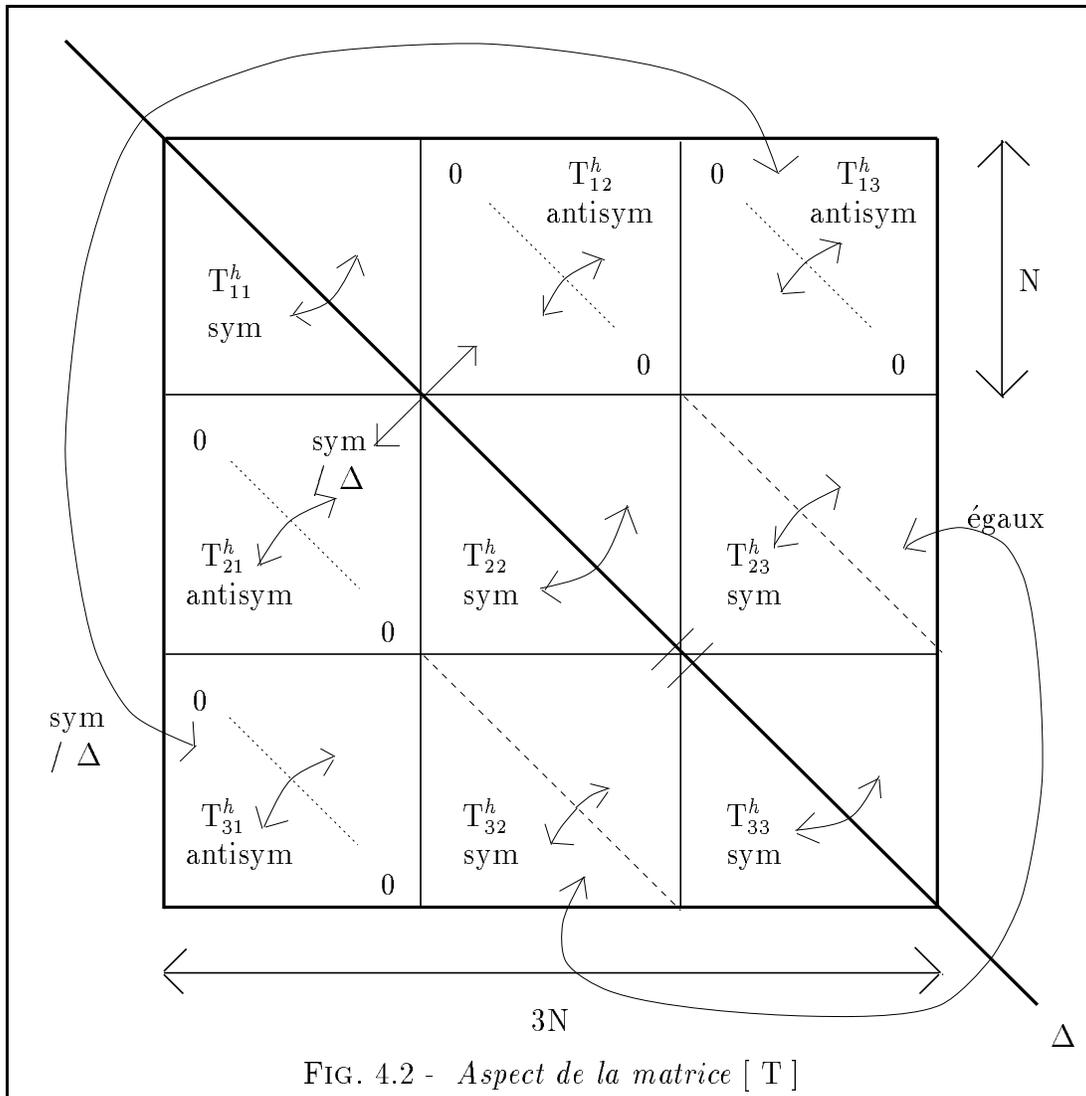


FIG. 4.2 - Aspect de la matrice $[T]$

4.4 Un premier choix numérique important

Nous avons à calculer numériquement les intégrales données par (4.18). La technique habituelle dans ce type de calcul consiste à revenir aux variables réelles en procédant à **la recherche de noyaux intégrables**. Ces méthodes, conçues par A. Bamberger et J.C. Nédélec, ont été par utilisées par exemple par J.Tlili dans [41].

Ici, nous sommes **au contraire restés en variables de Fourier** pour faire le calcul des intégrales (4.18), suivant ainsi une idée de F.Collino. Ce choix permet de construire une méthode précise, rapide et robuste, de calcul des intégrales. En effet, le temps utilisé pour traiter numériquement l'opérateur de bord ne dépasse pas 10% du temps de calcul global pour résoudre le problème complet à β et ω fixés, sur station de travail D.E.C..

4.5 Reformulation des intégrales à calculer

4.5.1 Remarque sur le polynôme $D(k^2)$

C'est un polynôme en k^2 qui s'écrit:

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} D(k^2) = \frac{\omega^8}{V_S^8} - 8 \frac{\omega^6}{V_S^6} (k^2 + \beta^2) + 8 \frac{\omega^2}{V_S^2} \left(\frac{3\omega^2}{V_S^2} - \frac{2\omega^2}{V_P^2} \right) (k^2 + \beta^2)^2 \\ \quad \quad \quad - 16 \left(\frac{\omega^2}{V_S^2} - \frac{\omega^2}{V_P^2} \right) (k^2 + \beta^2)^3 \end{array} \right.$$

Soit $P(k^2)$ le polynôme défini par:

$$(4.21) \quad D(k^2) = C P(k^2) \quad \text{et} \quad P(k^2) = k^6 + \dots$$

où la constante C vaut:

$$C = -16 \left(\frac{\omega^2}{V_S^2} - \frac{\omega^2}{V_P^2} \right)$$

On note K le produit de C par le quotient $(\mu\pi/2)$ ce qui donne pour l'inverse cette constante (à β et ω fixés) l'expression suivante:

$$(4.22) \quad \frac{1}{K} = 8 \mu\pi \left(\frac{\omega^2}{V_P^2} - \frac{\omega^2}{V_S^2} \right)$$

4.5.2 Nouvelle présentation des intégrales

Nous avons les intégrales suivantes à calculer:

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (T_{ij})_p = \int_{\mathbb{R}} T_{ij}(k) \frac{4}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \forall i, j \in [1, 3], i \leq j, \forall p \in [0; N-1] \end{array} \right.$$

Il s'agit simplement des intégrales (4.18) multipliées par $1/2\pi$. Nous allons ré-écrire les intégrales (4.18), en utilisant la seconde écriture de $\hat{T}(\omega, \beta)$, sous forme de combinaisons linéaires des quatre intégrales suivantes:

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{P(k^2)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \quad n \in [0; 5] \\ I(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(k^2)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \quad n \in [0; 6] \\ I'(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(k^2)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \quad n \in [0; 6] \\ K(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_S K_P} \frac{1}{P(k^2)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \quad n \in [0; 7] \end{array} \right.$$

Nous aurions pu à priori utiliser pour (4.23) la première écriture des éléments T_{ij} : c'est à ce stade précis qu'apparaissent les deux variantes (annoncées au chapitre précédent) de la méthode numérique.

Ces quatre intégrales (4.24) sont caractérisées par la présence aux dénominateurs des fonctions à intégrer, du polynôme $P(k^2)$ et des facteurs 1 , K_S , K_P , et $K_S K_P$. C'est pourquoi nous les faisons apparaître.

Nous avons alors à calculer pour $p \geq 0$:

$$(4.25) \quad \left| \begin{aligned} (T_{11})_p &= K [C_1^{11} I(p, 6) + C_2^{11} I(p, 4) \\ &+ C_3^{11} I(p, 2) + C_4^{11} I(p, 0) \\ &+ C_5^{11} I'(p, 6) + C_6^{11} I'(p, 4) \\ &+ C_7^{11} I'(p, 2) \quad \quad \quad] \end{aligned} \right.$$

$$(4.26) \quad \left| \begin{aligned} (T_{12})_p &= iK [C_1^{12} J(p, 5) + C_2^{12} J(p, 3) \\ &+ C_3^{12} J(p, 1) \\ &+ C_4^{12} K(p, 7) + C_5^{12} K(p, 5) \\ &+ C_6^{12} K(p, 3) + C_7^{12} K(p, 1) \quad] \end{aligned} \right.$$

$$(4.27) \quad \left| \begin{aligned} (T_{23})_p &= -\beta K [C_1^{12} J(p, 4) + C_2^{12} J(p, 2) \\ &+ C_3^{12} J(p, 0) \\ &+ C_4^{12} K(p, 6) + C_5^{12} K(p, 4) \\ &+ C_6^{12} K(p, 2) + C_7^{12} K(p, 0) \quad] \end{aligned} \right.$$

$$(4.28) \quad \left| \begin{aligned} (T_{13})_p &= i\beta K [C_1^{13} I(p, 5) + C_2^{13} I(p, 3) \\ &+ C_3^{13} I(p, 1) \\ &+ C_4^{13} I'(p, 5) + C_5^{13} I'(p, 3) \\ &+ C_6^{13} I'(p, 1) \quad \quad \quad] \end{aligned} \right.$$

$$(4.29) \quad \left| \begin{array}{l} (T_{22})_p = K \quad [\quad C_1^{22} I(p, 6) \quad + \quad C_2^{22} I(p, 4) \\ \quad \quad \quad + \quad C_3^{22} I(p, 2) \quad + \quad C_4^{22} I(p, 0) \\ \quad \quad \quad + \quad C_5^{22} I'(p, 6) \quad + \quad C_6^{22} I'(p, 4) \\ \quad \quad \quad + \quad C_7^{22} I'(p, 2) \quad + \quad C_8^{22} I'(p, 0) \quad] \end{array} \right.$$

$$(4.30) \quad \left| \begin{array}{l} (T_{33})_p = K \quad [\quad C_1^{33} I(p, 6) \quad + \quad C_2^{33} I(p, 4) \\ \quad \quad \quad + \quad C_3^{33} I(p, 2) \quad + \quad C_4^{33} I(p, 0) \\ \quad \quad \quad + \quad C_5^{33} I'(p, 4) \quad + \quad C_6^{33} I'(p, 2) \\ \quad \quad \quad + \quad C_7^{33} I'(p, 0) \quad \quad \quad \quad \quad] \end{array} \right.$$

Nous avons atteint l'objectif qui était d'écrire une discrétisation de la forme bilinéaire à l'aide de la seconde écriture de la matrice $\hat{T}(\omega, \beta)$. Nous ne détaillerons pas ici la variante obtenue avec la première écriture, la méthode qui en résulte étant peu précise, et ne permettant que la validation (pour N petit) de celle que nous exposons. En effet, si l'on utilise la première écriture, les fonctions à intégrer oscillent beaucoup dès que l'indice p est grand. De plus, ces mêmes fonctions présentent des singularités qui rendent suffisamment instables les calculs pour les perturber. La "fragilité" des résultats est alors grande, car nous constatons que la matrice $[T_h]$ n'est pas toujours définie positive! **A l'opposé, l'utilisation de la seconde écriture permet un calcul aisé par la méthode des résidus des intégrales.** Comme nous allons le voir au prochain chapitre, nous contrôlons bien par la méthode des résidus les singularités des fonctions, et les fonctions qui restent à intégrer ne sont pas oscillantes, d'où les bons résultats obtenus.

Nous allons désormais nous intéresser au calcul des quatre types d'intégrales $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$. Cette étude est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 5

Calcul des intégrales $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$

Plan du chapitre

Les difficultés dans le calcul de ces intégrales (4.24) proviennent, d'une part, du fait que les fonctions à intégrer sont oscillantes, d'autre part, de ce que l'intervalle où l'on intègre est \mathbb{R} tout entier. Pour y remédier, nous allons effectuer le calcul de $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$ par la méthode des résidus.

Dans une première partie, nous étudions les pôles des dénominateurs des fonctions complexes à intégrer. Cette étude, bien que très technique, a un intérêt particulier, du fait des conséquences importantes induites dans le travail numérique que nous avons pu faire par la suite.

Puis dans la seconde partie, nous énumérons tous les résultats obtenus pour le calcul des intégrales. Le détail des calculs est donné dans l'annexe A, car bien que classiques, ils sont lourds et très techniques (à cause en particuliers de la présence de racines complexes au dénominateur). Nous les avons développés à la fin de cet article, afin que le lecteur puisse trouver ainsi l'origine des différents cas présents dans les résultats.

Le point important dans ces calculs, est que la méthode des résidus va permettre d'écrire:

$J(p, n)$ sous la forme d'une somme de résidus,

$I(p, n)$, $I'(p, n)$, et $K(p, n)$ sous la forme d'une somme de résidus et d'intégrales de fonctions strictement décroissantes vers 0 à l'infini.

5.1 Etude des dénominateurs

Nous allons donc commencer par l'étude des pôles des dénominateurs des fonctions complexes impliquées dans les calculs de $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$, en particulier des pôles du polynôme $P(k^2)$. Nous allons commencer par ce dernier. Or $P(k^2)$ est égal au polynôme $D(k^2)$ à une constante C près donnée par (4.21). Ce dernier est, comme nous allons le voir, lui-même lié au carré de la fonction de Rayleigh: nous déduirons en effet les pôles de $D(k^2)$ de ceux du carré de la fonction de Rayleigh dont l'étude approfondie commence cette étude des dénominateurs.

5.1.1 Etude de la fonction de Rayleigh

Une partie de cette étude se trouve déjà dans [27]: nous n'en rappelons ici que les résultats nécessaires pour la poursuivre. Le point de départ est l'équation de Rayleigh (1.30). On note

$$x = V^2$$

ce qui donne comme formulation de cette équation:

$$(5.1) \quad 4 \left(1 - \frac{x}{V_P}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{V_S}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 - \frac{x}{V_S}\right)^2 = 0$$

On élève le terme de gauche au carré, on simplifie par x , et on obtient l'équation suivante:

$$(5.2) \quad f(x) = 0$$

où $f(x)$ est la fonction (1.31) annoncée au premier chapitre:

$$(5.3) \quad f(x) = \frac{x^3}{V_S^8} - 8 \frac{x^2}{V_S^6} + 8 \frac{x}{V_S^2} \left(\frac{3}{V_S^2} - \frac{2}{V_P^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{V_P^2} - \frac{1}{V_S^2} \right)$$

Bien que nous sachions déjà que (5.2) a une unique solution réelle dans l'intervalle $]0; V_S^2[$, qui est V_R^2 , nous rappelons quelques étapes de la démonstration faite dans [27], qui vont nous être utiles.

La dérivée de $f(x)$ est le polynôme du second degré suivant:

$$(5.4) \quad f'(x) = \frac{3x^2}{V_S^8} - 16 \frac{x}{V_S^6} + \frac{8}{V_S^2} \left(\frac{3}{V_S^2} - \frac{2}{V_P^2} \right)$$

dont le discriminant Δ' est donné par:

$$(5.5) \quad \Delta' = \frac{8}{V_S^{12}} (6\tau - 1)$$

où

$$(5.6) \quad \tau = \frac{V_S^2}{V_P^2} \quad \text{et} \quad \tau \in]0; \frac{1}{2}[$$

Soit enfin la fonction complexe:

$$(5.7) \quad f(z) = \frac{z^3}{V_S^8} - 8 \frac{z^2}{V_S^6} + 8 \frac{z}{V_S^2} \left(\frac{3}{V_S^2} - \frac{2}{V_P^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{V_P^2} - \frac{1}{V_S^2} \right), \quad z \in \mathbb{C}$$

et l'équation

$$(5.8) \quad f(z) = 0$$

On a alors les différents cas suivants:

- Cas 1:

$\tau < 1/6 \Rightarrow f'(x) < 0$ et $f(x)$ strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme $f(0) < 0$ et $f(V_S^2) > 0$, $f(x)$ a une unique racine réelle qui est V_R^2 . Comme cette racine est simple, l'équation (5.8) a deux racines complexes conjuguées, que l'on note:

$$(5.9) \quad \begin{cases} z_1 = t + iy, & y \neq 0 \\ z_2 = t - iy \end{cases}$$

Il est de plus aisé de montrer par l'absurde que $t \neq 0$. En effet, l'équation (5.8) peut être alors mise sous la forme:

$$(5.10) \quad C(x - V_R^2)(x - t - iy)(x - t + iy) = 0$$

Après avoir pris $t = 0$, et dérivé le terme de gauche, on identifie ce polynôme avec l'expression précédemment obtenue de $f'(x)$ pour conclure.

- Cas 2:

$\tau = 1/6$: alors le discriminant Δ' est nul et $f'(x) = 0$ admet une racine réelle double notée x_0 qui vaut $8V_S/3$. Sachant ceci, $f'(x)$ étant positive sur \mathbb{R} , on obtient pour les racines de (5.8) le même résultat qu'au cas précédent, de façon similaire.

- Cas 3:

$\tau > 1/6$: alors le discriminant Δ' est strictement négatif et $f'(x) = 0$ admet deux racines réelles notées x_1 et x_2 telles que $V_S^2 < x_1 < x_2$. Le tableau de de variations de $f(x)$ est le suivant:(il est valable $\forall \tau \in]0; \frac{1}{2}[$)

x	$-\infty$	0	V_R^2	V_S^2	x_1	$\frac{8}{3} V_S^2$	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+		0		-	0	+
$f(x)$	↗			↘		↗		
		0	$\frac{1}{V_S^2}$					

Trois possibilités dans ce cas se présentent alors:

$$f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ n'a pas d'autres racines réelles que } V_R^2.$$

$$f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ a une racine réelle double } \tilde{x}_0 = x_2.$$

$$f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ a deux racines réelles notées } x' \text{ et } x'' \text{ telles que}$$

$$\frac{4}{3} V_S^2 < x_1 < x' < x''.$$

L'existence de ces racines x' et x'' va être l'objet de l'étude qui suit:

Etude de x' et x''

Afin de simplifier quelque peu les notations, on pose:

$$a = V_S^2, \quad b = V_P^2, \quad c = V_R^2$$

Quand on met $f(x)$ sous la forme:

$$(5.11) \quad f(x) = (x - c)g(x)$$

on obtient pour $g(x)$ l'expression suivante:

$$(5.12) \quad g(x) = \frac{1}{a^4} x^2 + \frac{1}{a^4} (c - 8a) + \left[\frac{8}{a} \left(\frac{3}{a} - \frac{2}{b} \right) - \frac{8c}{a^3} + \frac{c^2}{a^4} \right]$$

On étudie les racines de $g(x)$ qui sont x' et x'' . Le discriminant Δ de ce polynôme vaut:

$$(5.13) \quad \Delta = \frac{1}{b a^8} [-3 b c^2 + 16 a b c - 32 a^2 b + 64 a^3]$$

On a les cas suivants:

$$\Delta < 0 \Rightarrow g(x) \text{ a deux racines complexes conjuguées.}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow g(x) \text{ a une racine réelle double.}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow g(x) \text{ a deux racines réelles distinctes } x' \text{ et } x''.$$

Pour étudier le signe de Δ , on étudie le polynôme $P(X)$:

$$(5.14) \quad P(X) = -3 b X^2 + 16 a b X + 32 a^2 (2 a - b)$$

On a

$$(5.15) \quad P(c) = \Delta$$

On note δ le discriminant de $P(X)$ et on a:

$$\begin{array}{l} \delta < 0 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow P(X) \text{ a deux racines complexes conjuguées.} \\ \Rightarrow P(X) \text{ est de signe constant et négatif.} \\ \Rightarrow P(c) = \Delta < 0 \\ \Rightarrow f(x) \text{ a deux racines complexes conjuguées } z_1 \text{ et } z_2. \end{array} \right. \end{array}$$

$$\delta = 0 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow P(X) \text{ a une racine double réelle notée } X_0. \\ \Rightarrow P(X) < 0 \text{ sur } \mathbb{R} - \{X_0\}. \\ \Rightarrow P(X) = 0 \text{ en } X_0 \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0 \text{ si } c = X_0 \\ \Rightarrow f(x) \text{ a une racine réelle double } \check{x}_0 = x_2. \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0 \text{ si } c \neq X_0 \\ \Rightarrow f(x) \text{ a deux racines complexes conjuguées } z_1 \text{ et } z_2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\delta > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(X) \text{ a deux racines réelles notées } X_1 \text{ et } X_2 \text{ distinctes} \\ \text{(on pose } X_1 < X_2 \text{):} \\ \left\{ \begin{array}{l} P(X) < 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} - [X_1; X_2]. \\ P(X) = 0 \quad \text{en} \quad X_1 \text{ et } X_2. \\ P(X) > 0 \quad \text{sur} \quad]X_1; X_2[. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le calcul de δ donne:

$$(5.16) \quad \delta = 16 \times 8 a^2 b^2 [6 \tau - 1]$$

Ce résultat donne les équivalences suivantes:

$$i) \delta < 0 \Leftrightarrow \tau < 1/6$$

$$ii) \delta = 0 \Leftrightarrow \tau = 1/6$$

Comme $X_0 = \frac{8}{3} a > c$, $\Delta < 0$.

Ces deux premières équivalences correspondent aux cas 1 et 2 vu précédemment.

$$iii) \delta > 0 \Leftrightarrow \tau > 1/6$$

$P(X)$ a deux racines X_1 et X_2 qui valent:

$$(5.17) \quad X_1 = \frac{4}{3} a \left[2 - \sqrt{2(6\tau - 1)} \right]$$

$$(5.18) \quad X_2 = \frac{4}{3} a \left[2 + \sqrt{2(6\tau - 1)} \right]$$

Le signe de Δ dépend alors de la position de X_1 par rapport à c :

$$\begin{cases} X_1 > c \Rightarrow P(c) < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ X_1 = c \Rightarrow P(c) = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \\ X_1 < c \Rightarrow P(c) > 0 \Rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

On pose

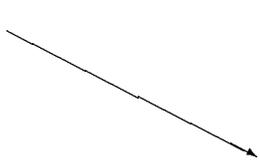
$$(5.19) \quad X_1 = h(\tau)$$

$h(\tau)$ est une fonction continue, dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $\left] \frac{1}{6}; \frac{1}{2} \right[$.

$$h'(\tau) = \frac{-8 a}{\sqrt{2(6\tau - 1)}}$$

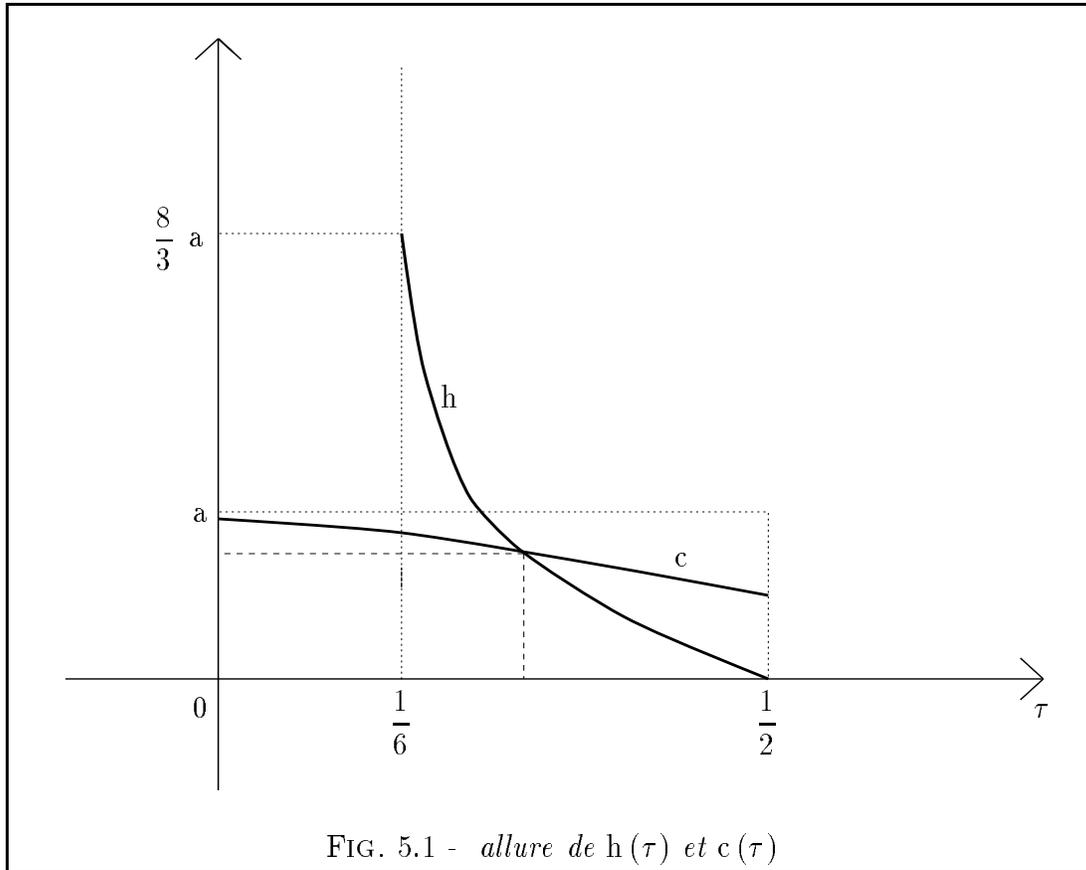
Le tableau de variation de $h(\tau)$ est le suivant:

τ	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$h'(\tau)$	—	
$h(\tau)$	$\frac{8}{3} a$	0



Or $c \in]0; a[$ et de plus c dépend de τ . $c(\tau)$ est une courbe continue, décroissante, strictement bornée par $a/2$ et a .

Les courbes de $h(\tau)$ et $c(\tau)$ ont l'allure générale suivante:



Il est clair alors qu'il existe une unique valeur $\tilde{\tau}_0 > 1/6$ telle que:

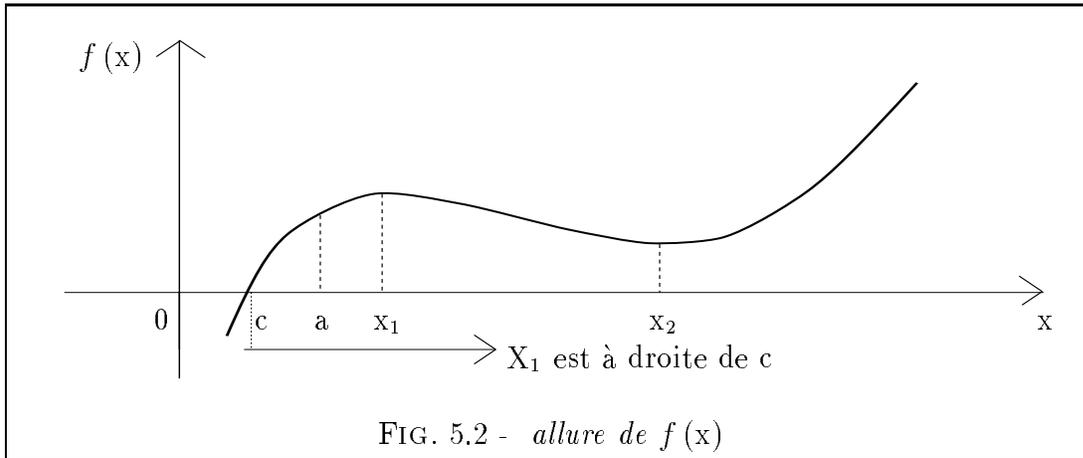
$$\begin{cases} h(\tau) > c(\tau) & \text{pour } \tau < \tilde{\tau}_0 \\ h(\tilde{\tau}_0) = c(\tilde{\tau}_0) \\ h(\tau) < c(\tau) & \text{pour } \tau > \tilde{\tau}_0 \end{cases}$$

On a donc:

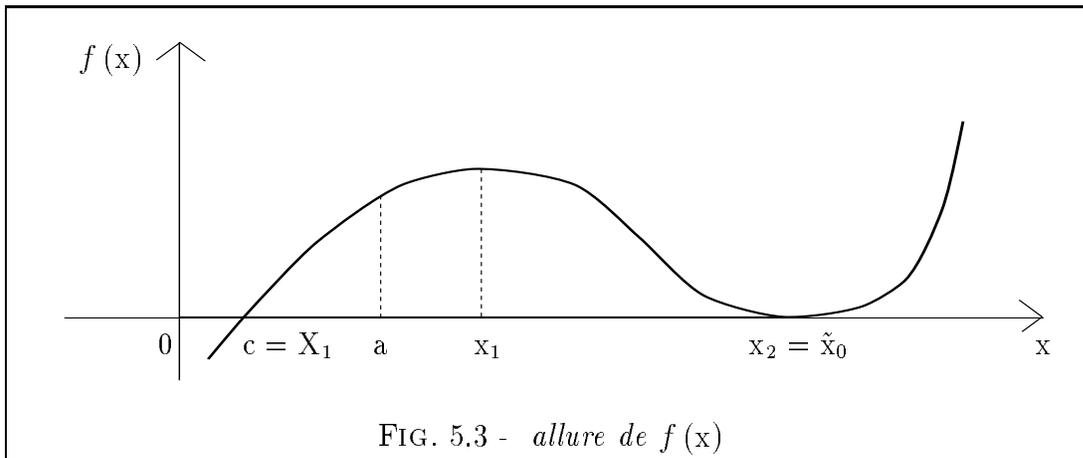
$$\begin{cases} \tau < \tilde{\tau}_0 \Rightarrow c(\tau) < h(\tau) \Rightarrow \Delta < 0 \\ \tau = \tilde{\tau}_0 \Rightarrow c(\tau) = h(\tau) \Rightarrow \Delta = 0 \\ \tau > \tilde{\tau}_0 \Rightarrow c(\tau) > h(\tau) \Rightarrow \Delta > 0 \end{cases}$$

Ce qui donne pour $f(x)$ l'allure suivante pour chacun de ces cas:

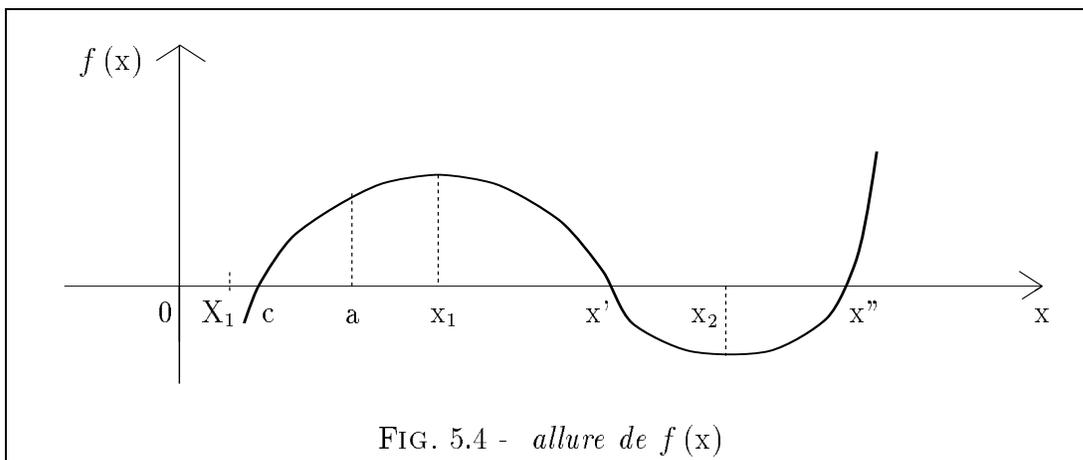
- $\tau < \tilde{\tau}_0$



- $\tau = \tilde{\tau}_0$



- $\tau > \tilde{\tau}_0$



Pour calculer $\tilde{\tau}_0$, il faut résoudre l'équation:

$$(5.20) \quad c(\tau) = \frac{4}{3}a \left[2 - \sqrt{2(6\tau - 1)} \right]$$

Nous ne résolvons pas exactement cette équation, mais nous allons donner des encadrements de sa racine $\tilde{\tau}_0$ et son estimation numérique. Tout d'abord, $h(\tau)$ prenant cette valeur a en un point $\tilde{\tau}$, on a $\tilde{\tau} < \tilde{\tau}_0$. La résolution de $h(\tilde{\tau}) = a$ donne:

$$\tilde{\tau} = \frac{19}{64} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\tau}_0 > \frac{19}{64}$$

Puis, comme c est solution de $f(x) = 0$, X_1 aussi quand $c = X_1$. Résoudre (5.20) revient alors à résoudre

$$(5.21) \quad f(X_1) = 0$$

Quand $\tau = \tilde{\tau}_0$, on a

$$c = \frac{4}{3}a \left[2 - \sqrt{2(6\tau - 1)} \right]$$

ce qui donne pour (5.21) l'expression suivante:

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{17 - 45\tau}{2(6\tau - 1)} = \sqrt{2(6\tau - 1)} \end{array} \right.$$

Une autre méthode pour obtenir (5.22), consiste à chercher pour quelle valeur de τ , $f(x)$ admet la racine réelle double $\tilde{x}_0 = x_2$

$$x_2 = \frac{2}{3}a \left(4 + \sqrt{2(6\tau - 1)} \right)$$

L'équation $f(x_2) = 0$ redonne exactement (5.22). On élève cette dernière au carré, et, chercher les solutions de l'équation obtenue, revient à chercher les racines de la fonction $v(\tau)$ suivante:

$$v(\tau) = 8(6\tau - 1)^3 - (17 - 45\tau)^2$$

Il est facile de voir que pour $\tau > 1/6$, v admet une unique racine qui est donc $\tilde{\tau}_0$, et de déduire pour $\tilde{\tau}_0$ l'encadrement suivant:

$$(5.23) \quad \left| \frac{3}{10} < \tilde{\tau}_0 < \frac{7}{20} \right.$$

L'estimation numérique de $\tilde{\tau}_0$ donne ≈ 0.3125 .

Conclusion pour les racines de $f(x)$

- Cas 1: $0 < \tau < \tilde{\tau}_0$

Alors $f(x)$ a une racine réelle simple qui est $V_{\mathbb{R}}^2$, et deux racines complexes conjuguées que l'on note:

$$(5.24) \quad \begin{cases} z_1 = t + iy & , y \neq 0 \\ z_2 = t - iy \end{cases}$$

De plus, le fait que t est non nul est vérifié aussi dans l'intervalle $\left[\frac{1}{6} ; \tilde{\tau}_0 \right]$.

- Cas 2: $\tau = \tilde{\tau}_0$

Alors $f(x)$ a une racine réelle simple qui est $V_{\mathbb{R}}^2$, et une racine réelle double notée \tilde{x}_0 .

- Cas 3: $\tilde{\tau}_0 < \tau < 1/2$

Alors $f(x)$ a trois racines réelles simples qui sont $V_{\mathbb{R}}^2$, x' et x'' .

Les racines de $f(x)$ ont été calculées numériquement par les formules de Cardan.

5.1.2 Application de l'étude de $f(x)$ à $\mathbf{P}(k^2)$

Posons

$$X = k^2 + \beta^2$$

Alors, d'après (4.20)

$$D(X) = \frac{\omega^8}{a^4} - 8 \frac{\omega^6}{a^3} X + 8 \frac{\omega^2}{a} \left(\frac{3\omega^2}{a} - \frac{2\omega^2}{b} \right) X^2 + 16 \left(\frac{\omega^2}{b} - \frac{\omega^2}{a} \right) X^3$$

Comme

$$f(x) = \frac{x^3}{a^4} - 8 \frac{x^2}{a^3} + 8 \frac{x}{a} \left(\frac{3}{a} - \frac{2}{b} \right)$$

, quand on compare $D(X) = 0$ et $f(x) = 0$, il apparaît le lien suivant entre $D(X)$ et $f(x)$:

$$D(X) = \omega^2 X^3 \left[f\left(\frac{\omega^2}{X}\right) \right]$$

, et donc la relation suivante entre les trois pôles $X_j, j \in \{1, 2, 3\}$, de $D(X)$ et les trois pôles $x_j, j \in \{1, 2, 3\}$ de $f(z)$:

$$(5.25) \quad X_j = \frac{\omega^2}{x_j} \quad \forall j \in \{1; 2; 3\}$$

(5.25) donne un moyen numérique pour calculer les pôles de $D(X)$ et donc de $P(k^2) \stackrel{\text{not}}{=} P(X)$, qui a la forme suivante:

$$(5.26) \quad P(X) = \left(X - \frac{\omega^2}{V_R^2} \right) (X - X_1) (X - X_2)$$

Nous introduisons trois quantités: A , B et A' qui vont jouer un rôle très important dans les calculs de résidus. Nous posons en effet:

$$\begin{cases} B^2 &= \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_R^2} \\ A^2 &= \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2} \\ A'^2 &= \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2} \end{cases}$$

Comme $\omega^2 < \beta^2 V_R^2$ et $V_R^2 < V_S^2 < V_P^2$, on a

$$\begin{cases} 0 < B < A < A' \\ \text{avec} \\ B = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_R^2}} & A = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_S^2}} & A' = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{V_P^2}} \end{cases}$$

Nous distinguons maintenant trois cas, suivant la valeur de τ :

- Cas 1: $0 < \tau < \tilde{\tau}_0$

$$\text{Comme dans ce cas } \begin{cases} x_1 = z_1 = t + iy \\ x_2 = z_2 = t - iy \\ x_3 = V_R^2 \end{cases}, \text{ on a } \begin{cases} X_1 = z_1 = \frac{\omega^2}{t + iy} \\ X_2 = z_2 = \frac{\omega^2}{t - iy} \\ X_3 = \frac{\omega^2}{V_R^2} \end{cases}$$

Alors (5.26) devient:

$$(5.27) \quad P(X) = \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{V_R^2}\right) \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{t + iy}\right) \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{t - iy}\right)$$

On pose alors

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{\omega^2}{t + iy} - \beta^2 = \left(\frac{\omega^2 t}{t^2 + y^2} - \beta^2\right) + i \left(\frac{\omega^2 y}{t^2 + y^2}\right) = R \exp(i\theta) \\ Z_2 = \frac{\omega^2}{t - iy} - \beta^2 = \left(\frac{\omega^2 t}{t^2 + y^2} - \beta^2\right) - i \left(\frac{\omega^2 y}{t^2 + y^2}\right) = R \exp(-i\theta) \end{cases}$$

Alors (5.27) devient

$$(5.28) \quad P(k^2) \stackrel{\text{not}}{=} P(X) = (k^2 + B^2) (k^2 - Z_1) (k^2 - Z_2)$$

En conséquence de quoi, nous pouvons écrire $P(k^2)$ sous la forme du polynôme $P(k)$ suivant:

$$(5.29) \quad P(k) = (k - iB)(k + iB)(k - k_1)(k - k_2)(k - k_3)(k - k_4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_1 = \sqrt{R} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) & , \quad k_2 = \sqrt{R} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right) \\ k_3 = \sqrt{R} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right) & , \quad k_4 = \sqrt{R} \exp\left(i\left(-\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right) \end{cases}$$

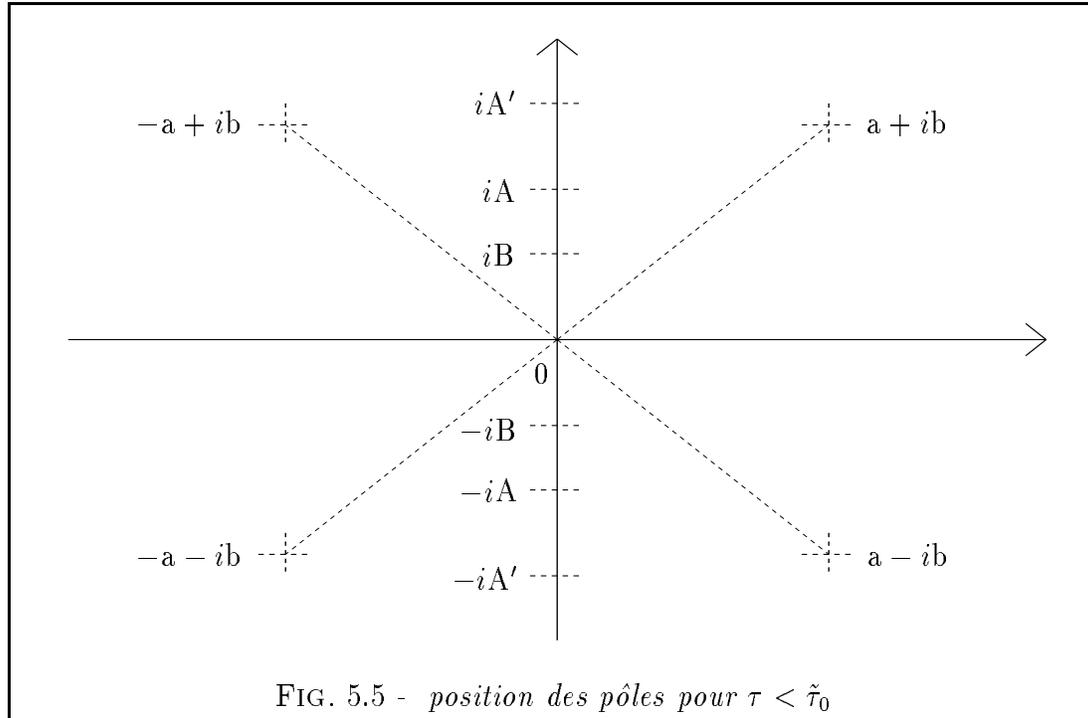
Quand on repasse en coordonnées cartésiennes, les quatre pôles distincts de $P(k)$ prennent la forme suivante:

$$k_j = \pm a \pm ib \quad , j \in [1; 4]$$

où a et b désignent désormais les valeurs absolues des coordonnées cartésiennes non nulles des pôles. En effet, a et $b \neq 0$ car $\theta \neq 0$. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant:

Proposition 5.1

Pour $\tau < \tilde{\tau}_0$, $P(k)$ admet six pôles simples complexes, iB , $-iB$, $a+ib$, $a-ib$, $-a+ib$ et $-a-ib$, disposés de la façon suivante:



avec a , b , $B > 0$ et réels. De plus,

$$(5.30) \quad P(k) = (k^2 + B^2) [k^2 - (a + ib)^2] [k^2 - (a - ib)^2]$$

Remarque 1: le calcul numérique de a et b à partir des pôles de $f(z)$ est immédiat.

Remarque 2: les intégrales $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$ sont bien définies, les pôles de $P(k)$ n'étant pas réels, et les fonctions à intégrer étant continues et décroissantes en $1/k$ (dans le cas le plus défavorable), en $+\infty$.

- Cas 2: $0 < \tau < \tilde{\tau}_0$

Alors $f(x)$ a une racine réelle simple qui est V_R^2 , et une racine réelle double \tilde{x}_0 . $P(k)$ a par conséquent aussi une racine double $X'_0 = \omega^2/\tilde{x}_0$, et on sait que

$\tilde{x}_0 > 8V_S^2/3$: alors

$$(5.31) \quad P(k) = (k^2 + B^2) \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{\tilde{x}_0} \right)^2$$

Soit $G = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{\tilde{x}_0}}$.

Alors $P(k) = (k^2 + B^2)(k^2 + G^2)^2$.

Il est de plus facile de vérifier, d'une part que $A < G$, d'autre part que $A' < G$, grâce à l'encadrement de $\tilde{\tau}_0$ et l'expression de \tilde{x}_0 :

$$\tilde{x}_0 = \frac{2}{3}V_S^2 \left(4 + \sqrt{2(6\tau - 1)} \right)$$

Proposition 5.2

Pour $\tau = \tilde{\tau}_0$, $P(k)$ admet deux pôles simples complexes, iB et $-iB$, et deux pôles doubles complexes, iG et $-iG$, disposés de la façon suivante:

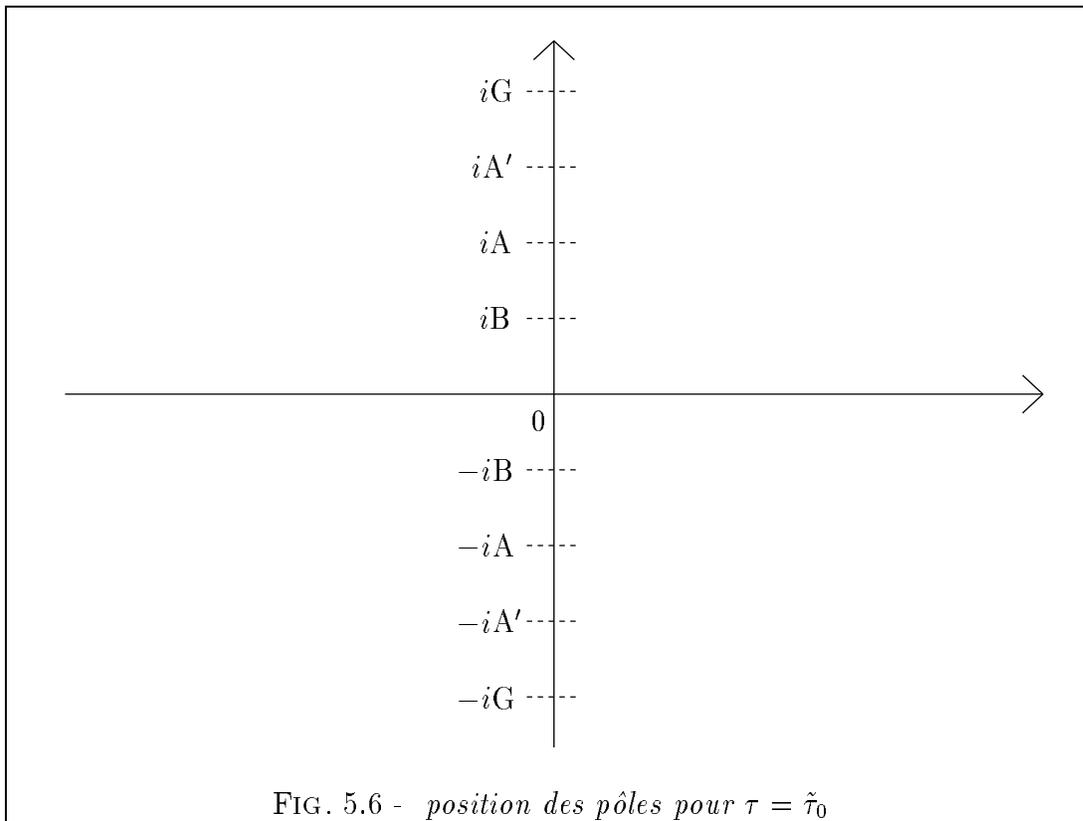


FIG. 5.6 - position des pôles pour $\tau = \tilde{\tau}_0$

avec $0 < B < A < A' < G$ et G réel. De plus,

$$(5.32) \quad P(k) = (k + iB)(k - iB)(k + iG)^2(k - iG)^2$$

Remarque 3: du point de vue numérique, nous ne pouvons avoir la valeur exacte de \tilde{x}_0 : nous serons en pratique, soit à gauche, soit à droite de cette valeur, et il n'est pas utile par conséquent dans ce cas de poursuivre plus loin les calculs.

- Cas 3: $\tau > \tilde{\tau}_0$

Alors $f(x)$ a trois racines réelles simples qui sont V_R^2, x', x'' avec $V_R^2 < x' < x''$ et $P(k)$ s'écrit:

$$(5.33) \quad P(k) = (k^2 + B^2) \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{x'} \right) \left(k^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{x''} \right)$$

On introduit les quantités:

$$E = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{x'}} \quad \text{et} \quad F = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{x''}}$$

Nous avons immédiatement: $0 < B < A < E < F$, ainsi que $x'' > \tilde{x}_0$ donc $F > A'$.

Il faut maintenant déterminer la position de E par rapport à A' , donc de x' par rapport à V_P^2 .

Or, dans le cas précédent, nous avons vu que pour $\tau > 3/10$, $V_P^2 < \tilde{x}_0$.

D'autre part, on a que

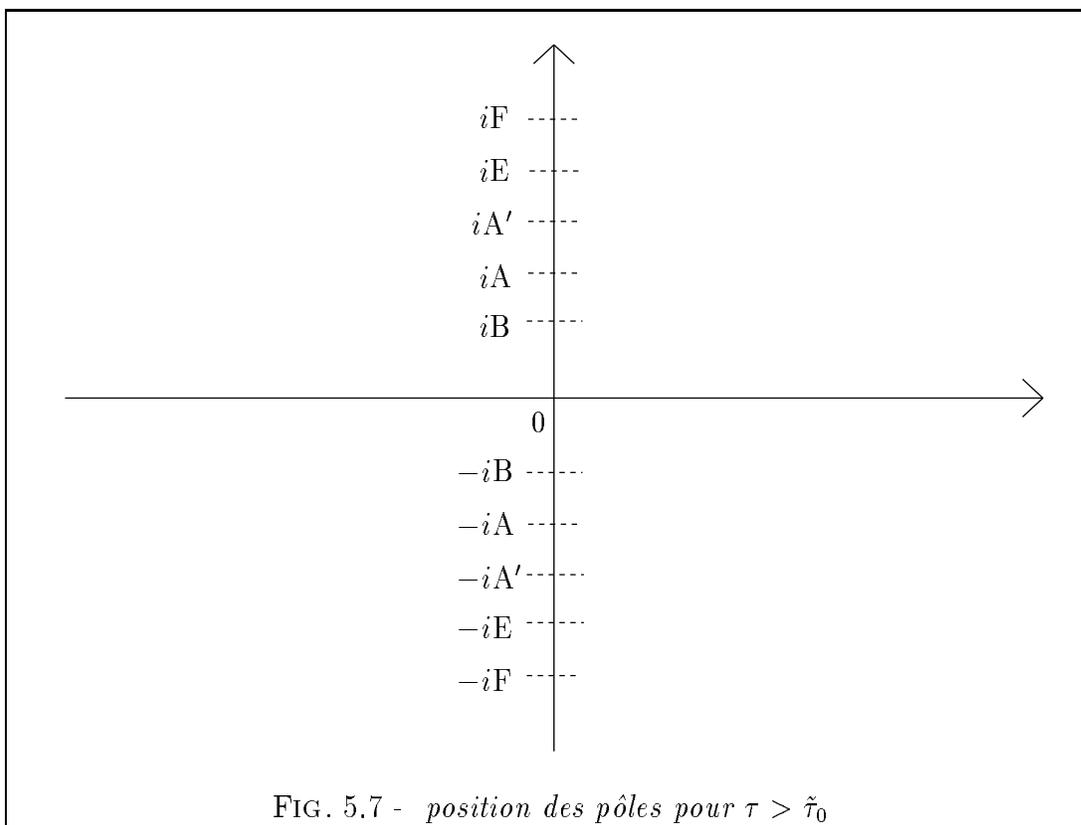
$$f(V_P^2) = \frac{1}{a \tau^3} (2\tau - 1)^4 > 0$$

Or, $f(x)$ est négative sur $]x'; x''[$ d'après l'allure de la courbe (cf fig(5.4)).

Donc, $V_P^2 < x' < \tilde{x}_0 < x''$. On en déduit finalement que $A' < G < E < F$.

Proposition 5.3

Pour $\tau > \tilde{\tau}_0$, $P(k)$ admet six pôles simples complexes, $iB, -iB, iE, -iE, iE$ et $-iE$, disposés de la façon suivante:



avec $0 < B < A < A' < E < F$, et $E < F$ réels. De plus,

$$(5.34) \quad P(k) = (k + iB)(k - iB)(k + iE)(k - iE)(k + iF)(k - iF)$$

Remarque 4: comme pour le premier cas, les fonctions à intégrer ne posent pas de difficultés, mais les calculs de résidus sont plus compliqués, étant donné la position des pôles $-iF$, $-iE$, iE et iF .

Remarque importante

Tous les calculs d'intégrales qui vont suivre, n'ont été effectués, et le programme écrit, que pour $\tau \in]0; \tilde{\tau}_0[$. Les autres cas nécessitent de refaire le même travail, en tenant compte des changements décrits ci-dessus pour les dénominateurs des fonctions à intégrer.

Nous pouvons désormais passer au calcul des intégrales elles-mêmes.

5.2 Résultats des calculs

Nous les énonçons directement, calculs et justifications étant donnés dans l'annexe A.

Quelques notations

Nous introduisons d'abord toute une liste d'expressions qui vont toutes intervenir dans les formules des résidus que nous allons donner dans la suite de ce chapitre. Dans ces expressions, les quantités a , b , A , A' et B sont celles définies dans la première partie de ce chapitre.

$$EX_1 = [1 + \operatorname{sh}(hb) \exp(aha) - \cos(ha) \exp(hb)]$$

$$EX_2 = [1 + \operatorname{sh}(hb) \exp(-aha) - \cos(ha) \exp(hb)]$$

$$EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$EX_4 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_6 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_7 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$EX_9 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_{10} = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_{11} = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A' - b}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A'}{\sqrt{a^2 + (-b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$EX_{12} = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A' - b}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) \right] \right)$$

Trois nouvelles intégrales

Nous introduisons trois nouvelles intégrales définies par:

Pour $p \in \{1; \dots; N\}$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$N(p, n) = \int_A^{+\infty} \left[\frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Pour $p \in \{1; \dots; N\}$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$N'(p, n) = \int_{A'}^{+\infty} \left[\frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A'^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Pour $p \in \{1; \dots; N\}$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$M(p, n) = \int_A^{A'} \left[\frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Ce sont des intégrales de fonctions exponentiellement décroissantes à l'infini, sauf pour $p = 1$, où la décroissance est au moins en $\frac{1}{t}$.

Elles interviennent dans les diverses expressions des résultats du calcul de $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$, et nous devons donc les calculer numériquement: ce calcul numérique ne présente pas de difficulté particulière, car par rapport à ce que nous avons au départ à intégrer pour calculer $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$, **les fonctions à intégrer dans $N(p, n)$, $N'(p, n)$ et $M(p, n)$ ne sont pas oscillantes.**

Nous avons calculé numériquement les intégrales $N(p, n)$, $N'(p, n)$ et $M(p, n)$ à l'aide des sous-routines de la librairie QUADPACK, en demandant au minimum une précision relative de 10^{-8} pour les résultats. Demander une telle précision

se révèle très utile, car les combinaisons linéaires de ces intégrales dans les expressions de $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$, sont, elles, très petites par rapport aux résultats (dans une proportion relative pouvant atteindre 10^4).

Pour les intégrales $N(p, n)$ et $N'(p, n)$, nous avons utilisé la subroutine **dqagi** de QUADPACK, l'intervalle sur lequel nous intégrons étant non borné.

Pour l'intégrale $M(p, n)$, nous avons utilisé la subroutine **dqags** de QUADPACK, l'intervalle sur lequel nous intégrons étant par contre borné.

Résultats pour $J(p, n)$

Ils se présentent sous la forme d'une somme de résidus: le calcul donne donc une expression analytique de $J(p, n)$.

Nous rappelons que:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{P(k)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \text{pour } n \in \{0; \dots; 5\} \text{ et } p \in \{0; \dots; N-1\} \end{array} \right.$$

où:

$$(5.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(k) = (k - iB)(k + iB) \\ [k - (a + ib)][k - (a - ib)] \\ [k - (-a + ib)][k - (-a - ib)] \end{array} \right.$$

Soit les fonctions complexes:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(p, n)(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izph) \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right) \\ u(n)(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \\ v(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izh) \\ w(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(-izh) \end{array} \right.$$

Nous avons alors:

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 5\}$,

$$J(p, n) = 2i\pi [\text{Rés}(f(p, n); iB) + \text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) + \text{Rés}(f(p, n); (-a + ib))]$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{1; 3; 5\}$,

$$J(p, n) = 0$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4\}$,

$$\begin{aligned} J(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(u(n); iB) + \text{Rés}(u(n); (a + ib)) + \text{Rés}(u(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \end{aligned}$$

Pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned} J(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(u(n); iB) + \text{Rés}(u(n); (a + ib)) + \text{Rés}(u(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad + 2i\pi \text{Rés}(w(n); 0) \end{aligned}$$

Résidus pour $J(p, n)$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 5\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-Bph) \text{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)}{2iB^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 5\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(ipha) \exp(-phb) EX_1}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]}$$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 5\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-ipha) \exp(-phb) EX_2}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(u(n); iB) = \frac{(iB)^n}{-4 i B^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(u(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(u(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(v(n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-hB)}{-8 i B^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iba) \exp(-hb)}{32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-iba) \exp(-hb)}{-32 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(w(n); -iB) = \frac{(-iB)^n \exp(-hB)}{8 i B^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(w(n); (-a - ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iba) \exp(-hb)}{-32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4\}$,

$$\text{Rés}(w(n); (a - ib)) = \frac{(a - ib)^n \exp(-iba) \exp(-hb)}{-32 i a b (a - ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2]}$$

$$\text{Rés}(w(0); 0) = \frac{-ih}{4 B^2 (a + ib)^2 (a - ib)^2}$$

Résultats pour $I(p, n)$ et $I'(p, n)$

Les résultats pour les deux intégrales $I(p, n)$ et $I'(p, n)$ sont identiques, sauf que pour la seconde intégrale, il faut de remplacer A par A' dans tous les résultats de la première.

Pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\begin{aligned} I(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(s(n); iB) + \text{Rés}(s(n); (a + ib)) + \text{Rés}(s(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2N(0, n) + 2N(1, n) \end{aligned}$$

Pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned} I(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(s(n); iB) + \text{Rés}(s(n); (a + ib)) + \text{Rés}(s(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2N(0, 0) + 2N(1, 0) + 2i\pi \text{Rés}(w(n); 0) \end{aligned}$$

Résidus pour $I(p, n)$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-Bph) \text{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)}{2iB^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(ipha) \exp(-phb) EX_1}{16iab(a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_4}$$

pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-ipha) \exp(-phb) EX_2}{-16iab(-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] EX_3 EX_5}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(s(n); iB) = \frac{(iB)^n}{-4 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(s(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_4}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(s(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_5}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(v(n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-hB)}{-8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(aha) \exp(-hb)}{32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_4}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_5}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(w(n); -iB) = \frac{(-iB)^n \exp(-hB)}{8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(w(n); (-a - ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(aha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_6}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(w(n); (a - ib)) = \frac{(a - ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a - ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_7}$$

$$\text{Rés}(w(0); 0) = \frac{-ih}{4 A B^2 (a + ib)^2 (a - ib)^2}$$

Résultats pour $K(p, n)$

Ils se présentent sous la forme d'une somme de résidus et d'intégrales $M(p, n)$.
Nous rappelons que:

$$\left\{ \begin{array}{l} K(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(k)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \text{pour } n \in \{0; \dots; 7\} \text{ et } p \in \{0; \dots; N-1\} \end{array} \right.$$

L'expression (5.35) de $P(k)$ est elle toujours valable.

Soit les fonctions complexes:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(p, n)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izph) \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right) \\ s(n)(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \\ v(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izh) \\ w(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(-izh) \end{array} \right.$$

Nous avons alors:

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\begin{aligned} K(p, n) = & 2i\pi [\text{Rés}(f(p, n); iB) + \text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) + \text{Rés}(f(p, n); (-a + ib))] \\ & + M(p + 1, n) + M(p - 1, n) - 2 M(p, n) \end{aligned}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{1; 3; 5; 7\}$,

$$K(p, n) = 0$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\begin{aligned} K(p, n) = & 2i\pi [\text{Rés}(s(n); iB) + \text{Rés}(s(n); (a + ib)) + \text{Rés}(s(n); (-a + ib))] \\ & - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ & + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \\ & - 2 M(0, n) + 2 M(1, n) \end{aligned}$$

Pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned} K(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(s(n); iB) + \text{Rés}(s(n); (a + ib)) + \text{Rés}(s(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2M(0, 0) + 2M(1, 0) + 2i\pi \text{Rés}(w(0); 0) \end{aligned}$$

Résidus pour $K(p, n)$

pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-Bph) \text{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)}{2iB^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(ipha) \exp(-phb) EX_1}{16iab(a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_4 EX_9}$$

Pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\text{Rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-ipha) \exp(-phb) EX_2}{-16iab(-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_5 EX_{10}}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$

$$\text{Rés}(s(n); iB) = \frac{(iB)^n}{-4iB^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(s(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_8 \text{EX}_4 \text{EX}_9}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(s(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_8 \text{EX}_5 \text{EX}_{10}}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(v(n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-hB)}{-8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(aha) \exp(-hb)}{32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_8 \text{EX}_4 \text{EX}_9}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_8 \text{EX}_5 \text{EX}_{10}}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(w(n); -iB) = \frac{(-iB)^n \exp(-hB)}{8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(w(n); (-a - ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_8 \text{EX}_6 \text{EX}_{11}}$$

Pour $p = 0$ et $n \in \{0; 2; 4; 6\}$,

$$\text{Rés}(w(n); (a - ib)) = \frac{(a - ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a - ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] \text{EX}_3 \text{EX}_8 \text{EX}_7 \text{EX}_{12}}$$

$$\text{Rés}(w(0); 0) = \frac{-ih}{4 A A' B^2 (a + ib)^2 (a - ib)^2}$$

Remarque: nous avons validé la partie du programme calculant les intégrales $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$ (incluant les résidus et le calcul de $N(p, n)$, $N'(p, n)$ et $M(p, n)$) en comparant les résultats obtenus sur quelques cas tests, avec les résultats obtenus en intégrant par la méthode des trapèzes. Cette dernière n'était pas envisageable bien sûr pour notre programme, car trop coûteuse en temps calcul.

Avec cette méthode, nous avons validé aussi le calcul des éléments de la matrice $[T_h]$. Nous avons pour ce faire, comparé le résultat obtenu grâce aux combinaisons linéaires de $J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$ donnant les éléments de $[T_h]$, avec le calcul de ces mêmes éléments, en utilisant la première écriture de l'opérateur $T(\omega, \beta)$, et en calculant les intégrales (4.23) obtenues avec cette écriture, par la même méthode des trapèzes. La coïncidence des résultats est bonne tant que p reste plus petit que 10. Après, comme il a été dit à la fin du chapitre précédent, comme les fonctions à intégrer avec la première écriture oscillent beaucoup, les résultats obtenus avec celle-ci, se dégradent suffisamment pour que la matrice $[T_h]$ ne soit plus définie positive: or, c'est contraire à la théorie, et à ce qu'on obtient avec la méthode proposée ici.

La discrétisation de l'opérateur de bord est maintenant achevée. Mais il reste encore à discrétiser les autres formes bilinéaires qui interviennent dans le problème. Nous allons maintenant nous intéresser au terme d'élasticité à l'intérieur de la perturbation O .

Chapitre 6

Calcul des autres formes bilinéaires

Plan du chapitre

Nous allons nous intéresser à la discrétisation des termes restants de la forme bilinéaire $d(\beta; (u, \varphi), (v, \Psi))$. Par rapport à ce qui vient d'être fait pour l'opérateur de bord, les calculs sont beaucoup plus classiques, et moins délicats.

6.1 Calcul de la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$

Le calcul, par rapport à celui de la matrice associée à la forme bilinéaire classique de l'élasticité, comporte des différences dues uniquement au fait que les dérivées partielles par rapport à x_3 sont remplacées par un facteur multiplicatif β . Nous détaillons ici le calcul, afin de faire apparaître explicitement ces différences. La présentation de ces calculs est très proche de celle de MODULEF et de celle de Mr Perronet.

Nous avons à calculer la matrice $[A_h](\beta)$, obtenue lors de la discrétisation par éléments finis P_1 de la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$ où :

$$a_O(\beta; u, v) = \int_O \varepsilon_{ij}^\beta(u) \sigma_{ij}^\beta(u) dx_1 dx_2$$

Nous pouvons mettre $a_O(\beta; u, v)$ sous la forme :

$$a_O(\beta; u, v) = \int_O [B(v)]^t [D]^t [K] [D] [B(u)] dx$$

avec:

$$[K] = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B(u)] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \beta u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \beta u_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \beta u_3 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad [B(v)] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \beta v_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \beta v_2 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \beta v_3 \end{array} \right\}$$

On pose:

$$[W] = [D]^t [K] [D]$$

et alors:

$$[W] = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & -\mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix}$$

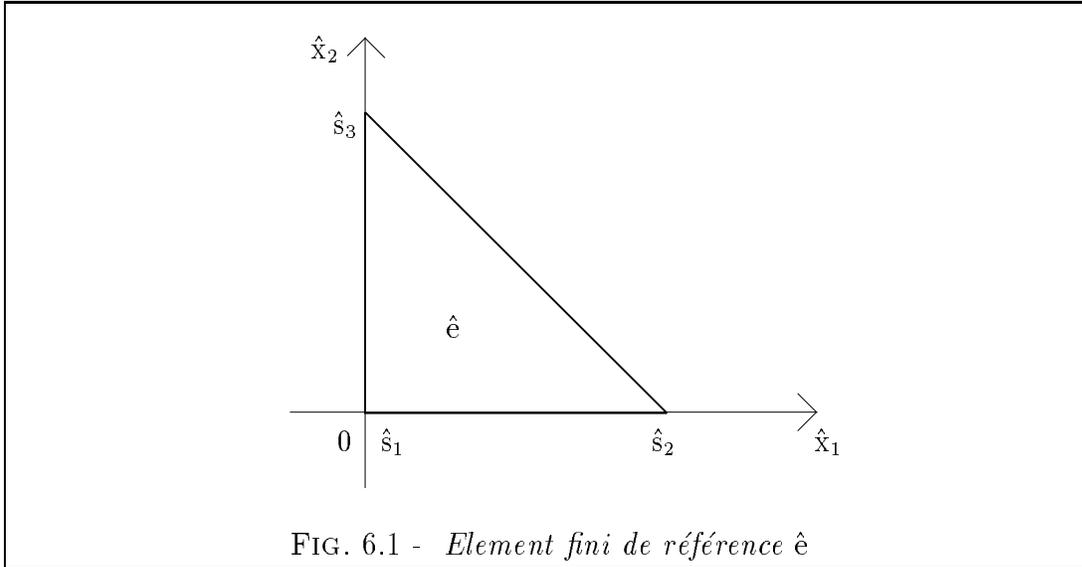
Nous pouvons alors mettre $a_O(\beta; u, v)$ sous la forme:

$$(6.1) \quad a_O(\beta; u, v) = \int_O [B(v)]^t [W] [B(u)] dx$$

Le domaine O est approché par un recouvrement E_h de triangles e_i . Ces triangles ont comme intersections possibles une arête, un sommet ou \emptyset . Les sommets des triangles e_i appartenant au bord du recouvrement, appartiennent aussi à ∂O . Nous imposons de plus, que les sommets situés sur Σ coïncident avec les sommets de la discrétisation P_0 de l'opérateur de bord, et inversement: pour un découpage de Σ en N intervalles, on a $N+1$ sommets de triangle qui coïncident avec les $N+1$ extrémités de ces intervalles.

6.1.1 Rappels sur l'élément fini P_1

L'élément de référence \hat{e} utilisé est le triangle suivant:



On note $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, et une base de dimension 3 de $P_1(\hat{e})$ est:

$$(6.2) \quad \begin{cases} \hat{P}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \\ \hat{P}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1 \\ \hat{P}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2 \end{cases}$$

On a pour les sommets \hat{s}_j , $j \in \{1; 2; 3\}$, de \hat{e} :

$$\hat{P}_i(\hat{s}_j) = \delta_{ij}$$

Nous définissons l'interpolation d'une fonction $\hat{\psi}$ sur $P_1(\hat{e})$, par le relèvement $\hat{r}(\hat{\psi}(\hat{x}))$ suivant:

$$\hat{r}(\hat{\psi}(\hat{x})) = [\hat{P}(\hat{x})] \begin{Bmatrix} \hat{\psi}(\hat{s}_1) \\ \hat{\psi}(\hat{s}_2) \\ \hat{\psi}(\hat{s}_3) \end{Bmatrix}$$

où $[\hat{P}(\hat{x})]$ désigne la matrice ligne $[\hat{P}_1(\hat{x}), \hat{P}_2(\hat{x}), \hat{P}_3(\hat{x})]$, et où $\{\hat{\psi}(\hat{s}_i)\}$ désigne le vecteur colonne des degrés de liberté.

Pour interpoler une fonction ψ sur $P_1(e)$, où e est un triangle de E_h , on se sert de \hat{e} . Pour ce faire, nous définissons le C_1 difféomorphisme, noté $\hat{F}^e(\hat{x})$, de \hat{e} sur e , par:

$$\hat{F}^e(\hat{x}) = [\hat{P}(\hat{x})] \begin{Bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \end{Bmatrix}$$

où (x_j^e, y_j^e) , $j \in \{1; 2; 3\}$, sont les coordonnées des sommets s_j de e . On a alors:

$$\psi(x) = \psi \circ \hat{F}^e(\hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\psi}(\hat{x})$$

Nous aurons alors en interpolant:

$$\hat{r}(\hat{\psi}(\hat{x})) = r(\psi(x))$$

Ce qui donne plus précisément:

$$\hat{r}(\hat{\psi}(\hat{x})) = [\hat{P}(\hat{x})] \begin{Bmatrix} \hat{\psi}(\hat{s}_1) \\ \hat{\psi}(\hat{s}_2) \\ \hat{\psi}(\hat{s}_3) \end{Bmatrix} = [\hat{P}(\hat{x})] \begin{Bmatrix} \psi \circ \hat{F}^e(\hat{s}_1) \\ \psi \circ \hat{F}^e(\hat{s}_2) \\ \psi \circ \hat{F}^e(\hat{s}_3) \end{Bmatrix} = [\hat{P}(\hat{x})] \begin{Bmatrix} \psi(s_1) \\ \psi(s_2) \\ \psi(s_3) \end{Bmatrix}$$

Nous nous intéressons maintenant à l'interpolation du gradient de ψ , or nous avons le lien suivant avec le gradient de $\hat{\psi}$:

$$\nabla \hat{\psi}(\hat{x}) = [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})] \nabla \psi(x)$$

où:

$$(6.3) \quad [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{F}_1^e(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{F}_2^e(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{F}_1^e(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \hat{F}_2^e(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}$$

Nous aurons alors le lien suivant entre l'interpolation du gradient de ψ sur e , notée $D\psi(x)$, et l'interpolation de ce même gradient après changement de variable, notée $\hat{D}\hat{\psi}(\hat{x})$:

$$D\psi(x) = [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]^{-1} \hat{D}\hat{\psi}(\hat{x})$$

En appliquant au gradient de ψ ce qu'on a vu pour ψ pour interpoler, on obtient finalement:

$$D\psi(x) = [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]^{-1} [\hat{D}\hat{P}(\hat{x})] \begin{Bmatrix} \psi(s_1) \\ \psi(s_2) \\ \psi(s_3) \end{Bmatrix}$$

avec:

$$[\hat{D}\hat{P}(\hat{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{P}_1(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{P}_2(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \hat{P}_3(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{P}_1(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \hat{P}_2(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \hat{P}_3(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors approcher les intégrales de ψ et $\nabla\psi$ de la façon suivante:

$$\int_e \psi(x) dx \approx \int_{\hat{e}} [\hat{P}(\hat{x})] |\Delta^e(\hat{x})| d\hat{x} \begin{Bmatrix} \psi(s_1) \\ \psi(s_2) \\ \psi(s_3) \end{Bmatrix}$$

$$\int_e \nabla \psi(x) \, dx \approx \int_e [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]^{-1} [\hat{D}\hat{P}(\hat{x})] |\Delta^e(\hat{x})| \, d\hat{x} \begin{Bmatrix} \psi(s_1) \\ \psi(s_2) \\ \psi(s_3) \end{Bmatrix}$$

où $|\Delta^e(\hat{x})|$ désigne la valeur absolue du Jacobien du difféomorphisme $\hat{F}^e(\hat{x})$.

6.1.2 Application à la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$

Nous avons:

$$(6.4) \quad a_O(\beta; u, v) = \int_O \varepsilon_{ij}^\beta(u) \sigma_{ij}^\beta(u) \, dx \approx \sum_{e \in E_h} \int_e [B(v)]^t [W] [B(u)] \, dx$$

Nous approchons dans (6.4) les fonctions u et v par leurs interpolations respectives u_h et v_h qui appartiennent à l'ensemble $V_h(O)^3$ défini par:

$$V_h(O)^3 = \left\{ \begin{array}{l} v_h = (v_1^h, v_2^h, v_3^h) \in C^0(E_h)^3 \\ \text{t.q. } v_{j|e}^h = [\hat{P} \circ (\hat{F}^e)^{-1}(x)] \{v_j^e\}, \forall e \in E_h, \forall j \in \{1; 2; 3\} \end{array} \right\}$$

En appliquant les rappels ci-dessus à chacune des composantes de u et v , ainsi qu'à leurs gradients, en gardant les mêmes notations, l'approximation par éléments finis P_1 de $a_O(\beta; u, v)$ s'exprime de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 a_0(\beta; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &\approx \sum_{e \in E_h} \int_{\hat{e}} ([\mathbf{M}] [\mathbf{N}] \{\mathbf{V}_s\})^t [\mathbf{W}] ([\mathbf{M}] [\mathbf{N}] \{\mathbf{U}_s\}) |\Delta^e(\hat{x})| d\hat{x} \\
 &= \sum_{e \in E_h} \int_{\hat{e}} \{\mathbf{V}_s\}^t ([\mathbf{N}]^t [\mathbf{M}]^t [\mathbf{W}] [\mathbf{M}] [\mathbf{N}]) \{\mathbf{U}_s\} |\Delta^e(\hat{x})| d\hat{x}
 \end{aligned}$$

avec

$$\{\mathbf{U}_s\} = \begin{pmatrix} u_1(s_1) \\ u_1(s_2) \\ u_1(s_3) \\ u_2(s_1) \\ u_2(s_2) \\ u_2(s_3) \\ u_3(s_1) \\ u_3(s_2) \\ u_3(s_3) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{V}_s\} = \begin{pmatrix} v_1(s_1) \\ v_1(s_2) \\ v_1(s_3) \\ v_2(s_1) \\ v_2(s_2) \\ v_2(s_3) \\ v_3(s_1) \\ v_3(s_2) \\ v_3(s_3) \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{F}}^e(\hat{x})]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{F}}^e(\hat{x})]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{F}}^e(\hat{x})]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}(\hat{x})] & 0 & 0 \\ [\hat{\mathbf{P}}(\hat{x})] & 0 & 0 \\ 0 & [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}(\hat{x})] & 0 \\ 0 & [\hat{\mathbf{P}}(\hat{x})] & 0 \\ 0 & 0 & [\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{P}}(\hat{x})] \\ 0 & 0 & [\hat{\mathbf{P}}(\hat{x})] \end{bmatrix}$$

Nous avons donc pour chaque triangle e de E_h , à calculer une matrice 9×9 , notée $[Z^e]$, de la forme suivante:

$$[Z^e] = \int_{\hat{e}} \begin{bmatrix} [B^e] & 0 & 0 \\ 0 & [B^e] & 0 \\ 0 & 0 & [B^e] \end{bmatrix}^t [W] \begin{bmatrix} [B^e] & 0 & 0 \\ 0 & [B^e] & 0 \\ 0 & 0 & [B^e] \end{bmatrix} |\Delta^e(\hat{x})| d\hat{x}$$

avec:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]^{-1} & \\ & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{D}\hat{P}(\hat{x})] \\ [\hat{P}(\hat{x})] \end{bmatrix}$$

La différence avec la forme classique 3D de la matrice de rigidité en élasticité apparaît ici, dans l'expression de $[B^e]$: dans le cas classique, $\hat{x} = (\hat{x}_1; \hat{x}_2; \hat{x}_3)$ et les matrices $[\hat{D}\hat{P}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \hat{x}_3)]$ et $[\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \hat{x}_3)]$ sont 3×3 et:

$$[B^e] = [\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \hat{x}_3)]^{-1} [\hat{D}\hat{P}(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \hat{x}_3)]$$

La matrice $[\hat{P}(\hat{x})]$ a été donnée. Il reste à calculer les deux matrices $[\hat{D}\hat{P}(\hat{x})]$ et $[\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]^{-1}$. Le calcul de la première est immédiat et donne:

$$[\hat{D}\hat{P}(\hat{x})] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le calcul de $[\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]$ se fait avec la formule (6.3), et donne:

$$[\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{cases} a_{11} = -x_1^e + x_2^e \\ a_{12} = -y_1^e + y_2^e \\ a_{21} = -x_1^e + x_3^e \\ a_{22} = -y_1^e + y_3^e \end{cases}$$

Nous notons le déterminant de $[\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x})]$ par D_e et:

$$D_e = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

D'autre part, nous notons:

$$\begin{cases} E_{11} = \frac{-a_{22} - a_{12}}{D_e} \\ E_{12} = \frac{a_{22}}{D_e} \\ E_{13} = \frac{a_{12}}{D_e} \\ E_{21} = \frac{-a_{21} - a_{11}}{D_e} \\ E_{22} = \frac{a_{21}}{D_e} \\ E_{23} = \frac{a_{11}}{D_e} \end{cases}$$

Grâce à ces petits calculs, nous avons une expression de $[B^e]$:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ \beta \hat{P}_1(\hat{x}) & \beta \hat{P}_2(\hat{x}) & \beta \hat{P}_3(\hat{x}) \end{bmatrix}$$

La quantité $|\Delta^e(\hat{x})|$ est donnée par:

$$|\Delta^e(\hat{x})| = \det \left[\hat{D}\hat{F}^e(\hat{x}) \right] = |D_e| = |a_{11} \ a_{22} \ - \ a_{12} \ a_{21}|$$

Enfin, pour avoir tous les éléments nécessaires au calcul de $[Z^e]$, on s'intéresse au calcul des intégrales suivantes:

$$\int_{\hat{e}} |\Delta^e(\hat{x})| \, d\hat{x} = \frac{1}{2} |D_e|$$

$$\int_{\hat{e}} \beta^2 (\hat{P}_j(\hat{x}))^2 |\Delta^e(\hat{x})| \, d\hat{x} = \frac{1}{12} \beta^2 |D_e| \quad \forall j \in \{1; 2; 3\}$$

$$\int_{\hat{e}} \beta^2 \hat{P}_i(\hat{x}) \hat{P}_j(\hat{x}) |\Delta^e(\hat{x})| \, d\hat{x} = \frac{1}{24} \beta^2 |D_e| \quad \forall i, j \in \{1; 2; 3\}, i \neq j$$

$$\int_{\hat{e}} \beta \hat{P}_i(\hat{x}) E_{jk} |\Delta^e(\hat{x})| \, d\hat{x} = \frac{1}{6} \beta E_{jk} |D_e| \quad \forall i, j \in \{1; 2; 3\}, \forall k \in \{1; 2\}$$

Nous pouvons maintenant donner une expression directement utilisable de la matrice $[Z^e]$. Cette matrice est symétrique, et est constituée de neuf blocs $[Z_{ij}^e]$, $i, j \in \{1; 2; 3\}$, de taille 3×3 :

$$[Z^e] = \begin{bmatrix} [Z_{11}^e] & [Z_{12}^e] & [Z_{13}^e] \\ [Z_{12}^e] & [Z_{22}^e] & [Z_{23}^e] \\ [Z_{13}^e] & [Z_{23}^e] & [Z_{33}^e] \end{bmatrix}$$

avec

$$[Z_{11}^e] =$$

$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{11}^2$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{21}^2 + \frac{1}{12} \mu \beta^2$	$***$	$***$
$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{11} E_{12}$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{21} E_{22} + \frac{1}{24} \mu \beta^2$	$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{12}^2$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{22}^2 + \frac{1}{12} \mu \beta^2$	$***$
$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{11} E_{13}$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{21} E_{23} + \frac{1}{24} \mu \beta^2$	$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{12} E_{13}$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{22} E_{23} + \frac{1}{24} \mu \beta^2$	$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{13}^2$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{23}^2 + \frac{1}{12} \mu \beta^2$

$$[Z_{22}^e] =$$

$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{21}^2$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{11}^2 + \frac{1}{12} \mu \beta^2$	$***$	$***$
$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{21} E_{22}$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{11} E_{12} + \frac{1}{24} \mu \beta^2$	$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{22}^2$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{12}^2 + \frac{1}{12} \mu \beta^2$	$***$
$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{21} E_{23}$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{11} E_{13} + \frac{1}{24} \mu \beta^2$	$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{22} E_{23}$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{12} E_{13} + \frac{1}{24} \mu \beta^2$	$\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) E_{23}^2$ $+ \frac{1}{2} \mu E_{13}^2 + \frac{1}{12} \mu \beta^2$

$$[Z_{33}^e] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{2} \mu (E_{11}^2 + E_{21}^2) \\ + \frac{1}{12} (\lambda + 2\mu) \beta^2 & * * * & * * * \\ \hline \frac{1}{2} \mu (E_{11} E_{12} + E_{21} E_{22}) \\ + \frac{1}{24} (\lambda + 2\mu) \beta^2 & \frac{1}{2} \mu (E_{12}^2 + E_{22}^2) \\ + \frac{1}{12} (\lambda + 2\mu) \beta^2 & * * * \\ \hline \frac{1}{2} \mu (E_{11} E_{13} + E_{21} E_{23}) \\ + \frac{1}{24} (\lambda + 2\mu) \beta^2 & \frac{1}{2} \mu (E_{12} E_{13} + E_{22} E_{23}) \\ + \frac{1}{24} (\lambda + 2\mu) \beta^2 & \frac{1}{2} \mu (E_{13}^2 + E_{23}^2) \\ + \frac{1}{12} (\lambda + 2\mu) \beta^2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$[Z_{12}^e] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{2} (\lambda + \mu) E_{11} E_{21} & \frac{1}{2} (\mu E_{11} E_{22} + \lambda E_{12} E_{21}) & \frac{1}{2} (\mu E_{11} E_{23} + \lambda E_{13} E_{21}) \\ \hline \frac{1}{2} (\lambda E_{11} E_{22} + \mu E_{12} E_{21}) & \frac{1}{2} (\lambda + \mu) E_{12} E_{22} & \frac{1}{2} (\mu E_{12} E_{23} + \lambda E_{13} E_{22}) \\ \hline \frac{1}{2} (\lambda E_{11} E_{23} + \mu E_{13} E_{21}) & \frac{1}{2} (\lambda E_{12} E_{23} + \mu E_{13} E_{22}) & \frac{1}{2} (\lambda + \mu) E_{13} E_{23} \\ \hline \end{array}$$

$$[Z_{13}^e] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{6} \beta (\lambda - \mu) E_{11} & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{12} - \mu E_{11}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{13} - \mu E_{11}) \\ \hline \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{11} - \mu E_{12}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda - \mu) E_{12} & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{13} - \mu E_{12}) \\ \hline \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{11} - \mu E_{13}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{12} - \mu E_{13}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda - \mu) E_{13} \\ \hline \end{array}$$

$$[Z_{23}^e] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{6} \beta (\lambda - \mu) E_{21} & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{22} - \mu E_{21}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{23} - \mu E_{21}) \\ \hline \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{21} - \mu E_{22}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda - \mu) E_{22} & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{23} - \mu E_{22}) \\ \hline \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{21} - \mu E_{23}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda E_{22} - \mu E_{23}) & \frac{1}{6} \beta (\lambda - \mu) E_{23} \\ \hline \end{array}$$

Chacun des blocs $[Z_{ij}^e]$ de $[Z^e]$ donne le lien entre une composante u_j^h de u^h , et une composante v_j^h de v^h .

6.1.3 Assemblage de la matrice $[A_h](\beta)$

La matrice $[A_h](\beta)$ associée à la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$, est de taille $3 \text{ NS} \times 3 \text{ NS}$, si le nombre total de sommets dans la triangulation est 3 NS . Elle s'obtient en sommant toutes les matrices $[Z^e]$, multipliées chacune par la matrice booléenne de taille $9 \times 3 \text{ NS}$, notée $[Bo^e]$ (et par sa transposée), reliant la numérotation locale des sommets du triangle e , avec la numérotation globale de la triangulation:

$$[A_h](\beta) = \sum_{e \in E_h} ([Bo^e] [Z^e] [Bo^e]^t)$$

Nous adoptons provisoirement le choix suivant pour le classement des degrés de liberté de la matrice $[A_h](\beta)$: les degrés de liberté de u^h et v^h sont classés composante par composante, et dans l'ordre de numérotation des sommets à l'intérieur de chaque composante.

6.2 Calcul de la forme bilinéaire $(u, v)_O$

Nous avons à calculer:

$$(u, v)_O = \int_O \rho u(x) v(x) dx$$

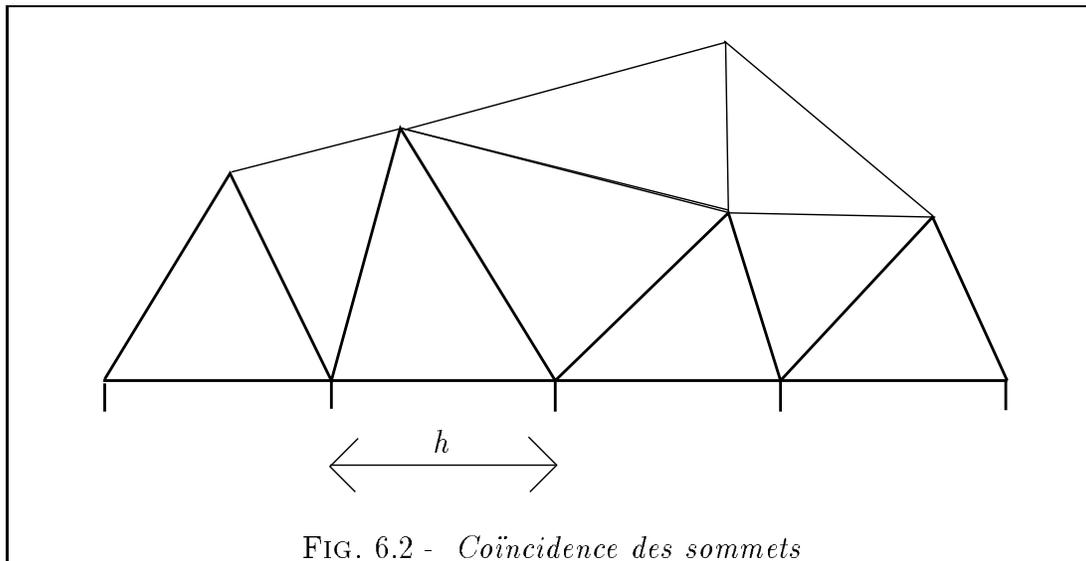
Nous fixons la valeur de ρ égale à 1 pour toute la suite, ce choix n'influançant pas les résultats ultérieurs: en effet, la quantité τ est indépendante de la valeur de ρ .

Nous avons en fait à calculer la matrice associée à la discrétisation de l'opérateur Id, donc la matrice de masse $[B_h]$ du problème.

Or, le calcul de cette matrice de masse $[B_h]$ est plus simple que celui de la matrice $[A_h](\beta)$: très classique et ne présentant aucune difficulté, il ne sera pas autrement détaillé ici.

6.3 Discrétisation des opérateurs de couplage C et C^t

Nous avons imposé la coïncidence entre les sommets des triangles situés sur Σ , avec les extrémités des intervalles de longueur h provenant de la discrétisation de l'opérateur de bord:

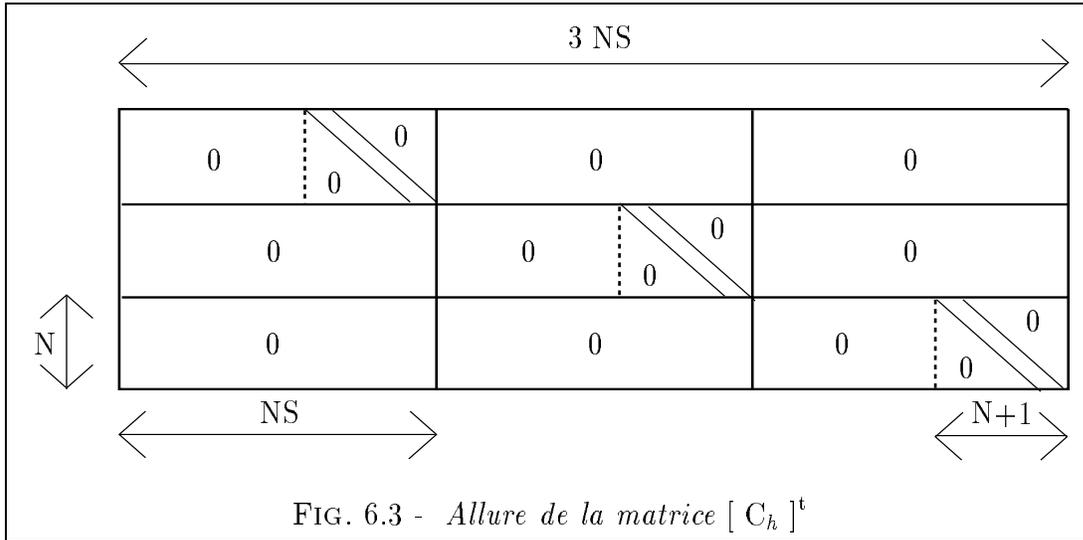


Nous imposons, de plus, que les sommets de la triangulation E_h soient numérotés de telle sorte que les derniers sommets numérotés soient précisément ceux situés sur Σ .

Ces deux précautions, (la seconde n'étant pas une obligation), et le choix précédent pour le classement des degrés de liberté pour la matrice $[A_h](\beta)$, vont

permettre d'obtenir une structure très simple pour les matrices $[C_h]$ et $[C_h]^t$, associées respectivement à la discrétisation des opérateurs C et C^t .

Il est alors aisé de voir que $[C_h]^t$ est une matrice creuse qui a l'allure suivante:



Les trois blocs diagonaux de cette matrice sont égaux.

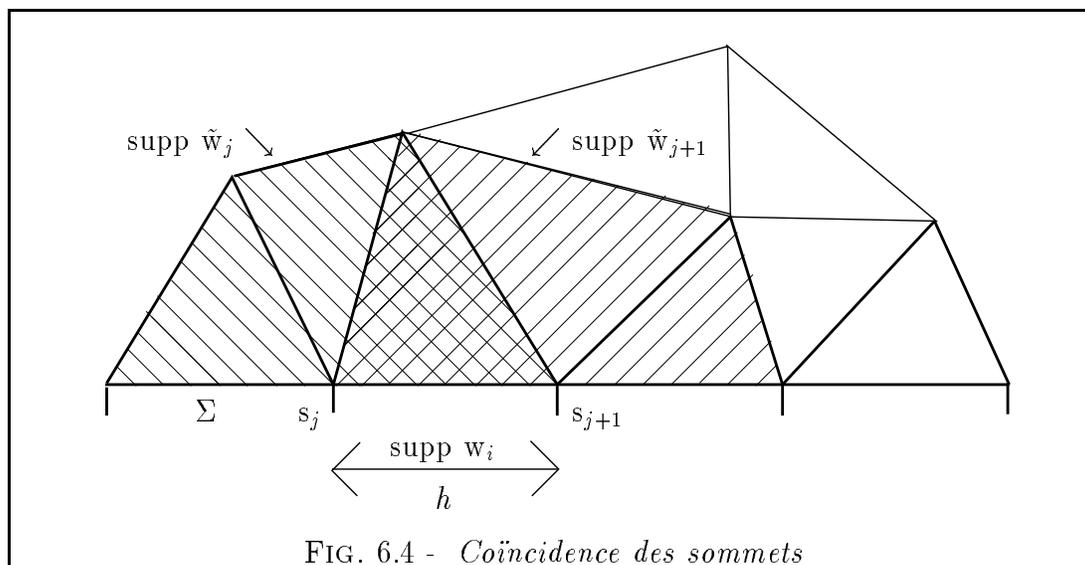
Les coefficients non nuls de $[C_h]$ sont aussi tous égaux et valent tous $\frac{h}{2}$.

Cette valeur provient du calcul suivant: un élément C_{ij} d'un bloc diagonal est donné par:

$$C_{ij} = \int_{\Sigma} w_i(x_1) \tilde{w}_{j|\Sigma}(x_1, x_2) dx_1$$

où: $\left\{ \begin{array}{l} w_i(x_1) \text{ est la } i\text{-ème fonction de base de l'espace } P_0(\Sigma) \\ \tilde{w}_{j|\Sigma}(x_1, x_2) \text{ est la trace de la } j\text{-ème fonction de base de l'espace } V_h(O), \\ \text{associée au sommet } s_j \text{ de la triangulation } E_h: \text{ elle vaut } 1 \text{ au point } s_j \\ \text{, et } 0 \text{ sur le bord de son support.} \end{array} \right.$

C_{ij} est non nul quand les deux conditions suivantes sont réalisées: l'intersection des supports des fonctions de base est non nulle, et sur le segment qui constitue cette intersection, la fonction $\tilde{w}_{j|\Sigma}(x_1, x_2)$ est non nulle:



Ceci termine la discrétisation de tous les termes de la forme bilinéaire $d(\beta; (u, \varphi), (v, \Psi))$.

Chapitre 7

Bilan de la discrétisation et compléments d'ordre numérique

Plan du chapitre

Nous allons dans une première partie résumer le travail des chapitres 3 à 6 inclus. Puis nous présenterons deux aspects importants de l'implémentation de la méthode numérique, à savoir le stockage de la matrice de rigidité et la méthode choisie pour calculer les valeurs propres du problème discret (2.26).

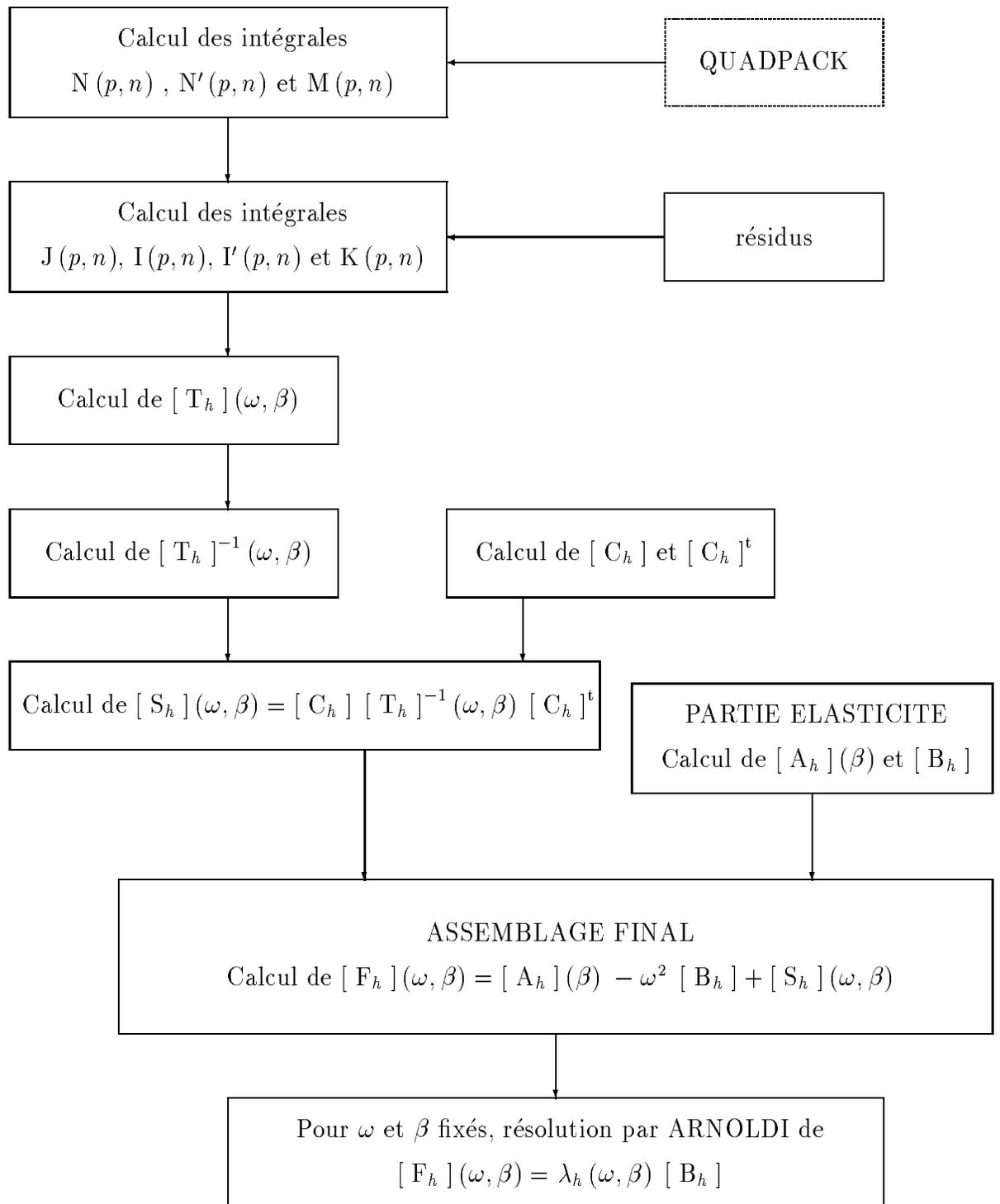
7.1 Bilan de la discrétisation à ω et β fixés

Nous avons achevé la discrétisation du problème (2.19), et nous savons calculer toutes les matrices qui interviennent dans sa formulation discrète (2.26). Plus précisément, dans l'équation discrète de ce problème (2.26), nous savons calculer tous les termes quand les valeurs des paramètres ω et β sont fixées, et en particulier la matrice $[F_h](\omega, \beta)$.

Nous résumons dans l'organigramme suivant toutes les étapes numériques à réaliser pour obtenir numériquement l'équation discrète de (2.26), à ω et β fixés.

Remarque: nous constatons en particulier, quand nous parcourons l'organigramme, que nous avons à inverser la matrice la matrice $[T_h](\omega, \beta)$: ceci ne présente pas de difficulté, car c'est une matrice de petite taille. En effet, lors des tests numériques que nous présenterons au chapitre 9, il n'a pas été nécessaire d'excéder 40 points de discrétisation sur le bord Σ pour obtenir des résultats satisfaisants. Par conséquent, la taille de la matrice $[T_h](\omega, \beta)$ ne dépassait pas 120, ce qui est raisonnable pour une inversion complète.

ORGANIGRAMME

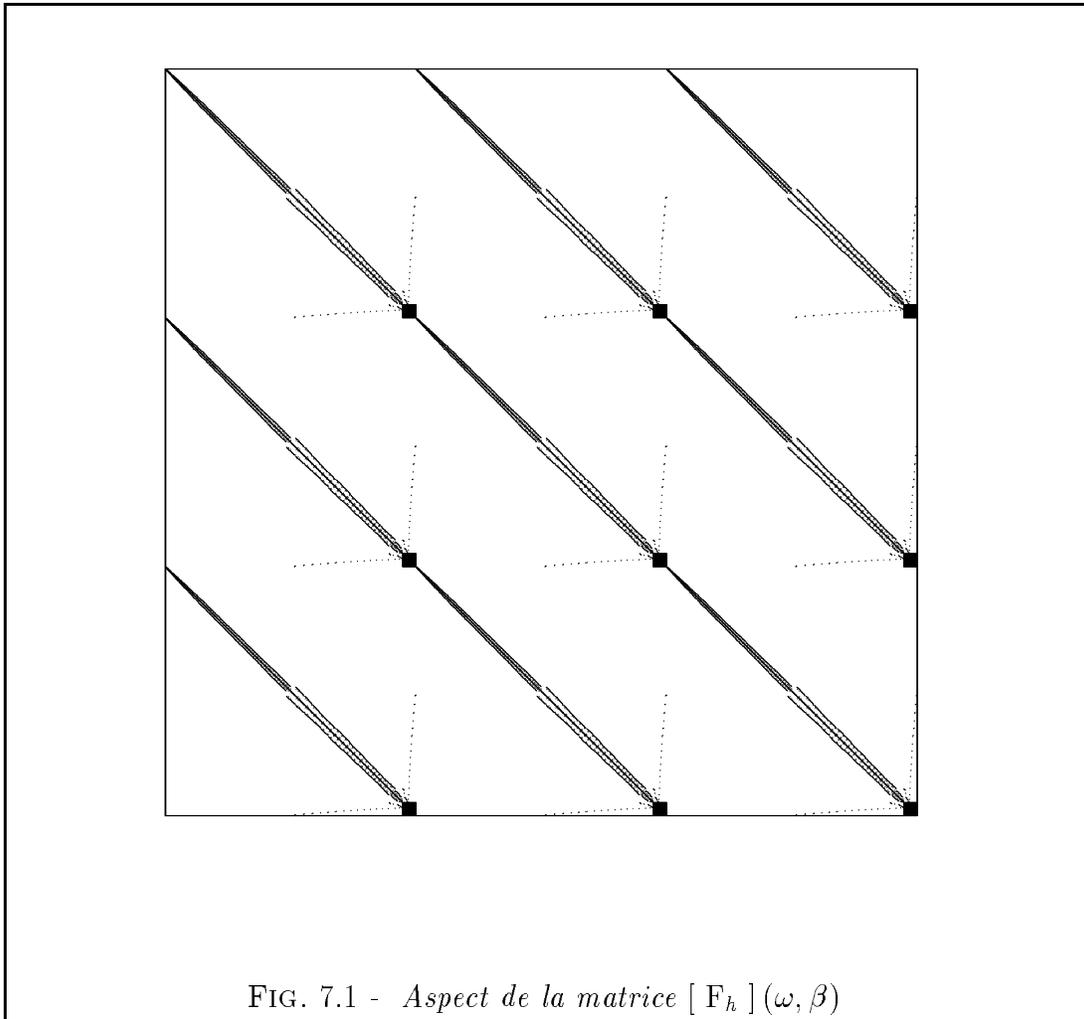


7.2 Allure de la matrice $[F_h](\omega, \beta)$

Il est important, au stade où nous en sommes, d'avoir une idée précise de la forme de cette matrice. En effet, il est très utile, lors de l'implémentation du code, de savoir qu'elle est l'influence sur l'allure de la matrice de rigidité, de la condition aux limites transparente sur l'interface Σ . Il s'agit aussi de fixer définitivement le principe de numérotation des sommets de la triangulation, ainsi que le classement des degrés de liberté pour chaque composante de ce problème vectoriel.

Afin d'illustrer cet aspect numérique du problème, nous nous plaçons dans le cas d'un problème concret: nous représentons sur la figure (7.1) l'aspect final après assemblage de la matrice $[F_h](\omega, \beta)$, pour une perturbation O du demi-espace en forme de triangle. Nous avons pris dans ce cas 36 points de discrétisation pour l'interface Σ et un total de 654 sommets pour la perturbation. Les degrés de liberté sont classés dans cette représentation composante par composante: nous voyons apparaître neuf grands blocs ayant tous la même structure flèche, chacun de ces blocs reliant deux composantes entre elles. Les petits blocs carrés que l'on trouve à l'intérieur de chaque bloc correspondent à la contribution de l'opérateur de bord et les flèches proviennent du couplage entre champ de déplacement et champ de contrainte. Cette structure a été obtenue en optimisant la numérotation des sommets de la triangulation afin de réduire la largeur de bande de la matrice $[A_h](\beta)$, en tenant compte de la contrainte d'avoir sur Σ les derniers sommets numérotés. C'est cette contrainte qui permet de contrôler la position des termes de la matrice $[F_h](\omega, \beta)$ dûs au couplage, et d'avoir la structure flèche pour chaque grand bloc.

Cette représentation de la matrice de rigidité du problème révèle par contre que le choix de classer les degrés de liberté composante par composante, ne donne pas une bonne structure globale à la matrice. Au contraire, on obtient une bonne structure profil en renumérotant la matrice de telle sorte que les trois degrés de liberté (un par composante) de chaque sommet de la triangulation, soient successifs. La contrainte sur la numérotation des sommets est, elle, conservée, car elle contribue à obtenir cette bonne structure profil.



Nous allons maintenant évoquer la dernière étape de l'organigramme, qui est le calcul des valeurs propres.

7.3 Choix de la méthode de calcul des valeurs propres

Le problème (2.26) est un problème de valeurs propres généralisé de grande taille. En effet, si le nombre de points sur le bord Σ donne une matrice $[T_h](\omega, \beta)$ de petite taille, le problème global est lui de taille nettement plus importante, car il dépend de la discrétisation de toute la perturbation O . Or, nous avons, pour certaines formes de perturbations, utilisé des triangulations comportant plus de 1300 sommets, ce qui donne des problèmes de taille approximative 4000×4000 .

Une méthode de type **QR** n'était pas envisageable, car trop coûteuse en temps calcul. De plus, il n'est pas utile de connaître tous le spectre discret. En effet, ce sont uniquement les plus petites valeurs $\lambda_h(\omega, \beta)$, susceptibles d'être négatives, qui nous importent pour détecter la présence ou non de mode guidés: leur nombre n'excède pas 10 dans les cas présentés ici.

C'est pourquoi nous avons opté pour la **méthode d'ARNOLDI**. Nous avons adapté à notre cas et utilisé un code écrit par Jean-Louis Vautescal. Cette méthode, présentée dans [25], permet d'avoir une estimation des deux extrémités (en valeur absolue) du spectre. Le point délicat tient dans le fait que les valeurs propres $\lambda_h(\omega, \beta)$ les plus petites du spectre, peuvent être négatives, sans être parmi celles qui ont la plus petite valeur absolue. C'est pourquoi en pratique, nous avons décalé le spectre calculé, en ajoutant "une certaine quantité de fois" la matrice $[B_h]$ à la matrice $[F_h]$. Cette "quantité de fois", (notée *fact*), est en pratique suffisante, quand elle est de l'ordre de $2(1 + \beta)$. Le spectre discret alors obtenu, est complètement positif: il suffit, pour obtenir les véritables valeurs propres, d'enlever à celles obtenues, cette quantité *fact*.

La discrétisation est achevée: nous allons pouvoir passer à la phase suivante: la résolution du problème discret, donc la recherche des modes guidés à proprement parlé.

Chapitre 8

La résolution du problème discret: la recherche des modes guidés

Plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons terminer la description de la méthode numérique de recherche des modes guidés. Nous explicitons en particulier la méthode de résolution du problème non linéaire (2.26).

Nous savons désormais assembler complètement, pour $\beta > 0$ donné, et $\omega \in]0; \beta V_R[$ donné, les matrices de l'équation discrète :

$$(8.1) \quad [F_h] (\omega, \beta) = \lambda_j^h (\omega, \beta) [B_h]$$

Les $\lambda_j^h (\omega, \beta)$ sont les valeurs propres réelles du problème discret. Nous les déterminons par la méthode d'Arnoldi.

Nous abordons maintenant la dernière étape de la méthode, qui consiste à déterminer les couples (ω, β) , avec $\beta > 0$ et $\omega \in]0; \beta V_R[$, qui vont annuler les valeurs propres $\lambda_j^h (\omega, \beta)$.

Il nous faut alors décrire la méthode utilisée pour la recherche des zéros des $\lambda_j^h (\omega, \beta)$. Cette recherche sera faite en deux temps.

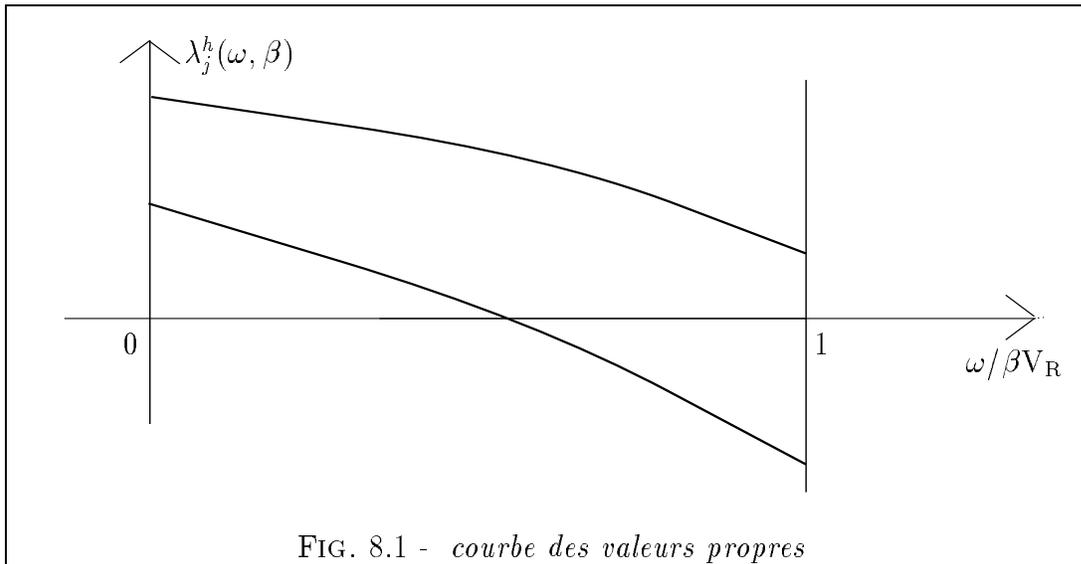
Le premier temps consiste en la détection des modes pour une valeur de β fixée. Cette étape va permettre de mettre en évidence les zéros des $\lambda_j^h (\omega, \beta)$ pour

une valeur de β donnée. Nous verrons alors comment procéder à la validation de la méthode que nous présentons ici.

Le deuxième temps constitue simplement à généraliser le premier, en faisant varier β . Nous verrons alors comment tracer les courbes de dispersion des modes, qui vont représenter l'évolution de ω en fonction de β pour chaque mode: ces courbes vont illustrer la relation de dispersion (8.1) des modes obtenus. Nous verrons au passage comment tenir compte de la difficulté essentielle pour la résolution, qui est la non-linéarité du problème discret par rapport aux paramètres ω et β , et qui provient du fait que la matrice $[F_h](\omega, \beta)$ dépend de ces deux paramètres.

8.1 Détection des modes guidés pour une valeur de β donnée

Supposons que nous voulions étudier une forme précise de perturbation du demi-espace et déterminer si elle constitue un guide d'onde: nous procédons ainsi: nous avons vu dans le second chapitre que les deux paramètres ω et β jouent des rôles symétriques et interchangeable dans le problème: l'idée consiste à fixer l'un d'entre eux, en l'occurrence β , et à faire varier le second, ω . Plus précisément, nous faisons varier le rapport $\omega/\beta V_R$ dans l'intervalle $[0;1]$. Nous calculons et représentons alors l'évolution des valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta)$ de la matrice de rigidité en fonction de ce rapport:



Sur cette figure (8.1), l'allure des courbes est à priori arbitraire: elle correspond cependant comme nous le verrons à ce que nous avons obtenu numériquement.

L'existence de j modes guidés pour la valeur de β fixée est révélée par l'intersection des courbes des j premières valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta)$, avec l'axe des abscisses. Ces intersections permettent de déterminer les valeurs $\omega_j(\beta)$ du paramètre ω pour lesquelles ces modes existent. Les vecteurs propres associés sont ceux correspondant aux valeurs propres $\lambda_j^h(\omega_j(\beta), \beta) = 0$ des matrices $[F_h](\omega_j(\beta), \beta)$.

Ce procédé ne donne pas la garantie de détecter des modes, puisque nous ne faisons pas varier β . Cependant, il s'est révélé être un moyen peu coûteux en temps calcul, par rapport à la résolution complète du problème, pour établir l'existence de modes guidés, pour les différentes formes de perturbation du demi-espace que nous avons étudiées.

De plus, ce calcul étant effectué à β fixé, nous n'avons à calculer qu'une seule fois les matrices $[A_h](\beta)$, $[B_h]$ et $[C_h]$ qui ne dépendent pas du paramètre ω . Bien sûr, à chaque pas de discrétisation de l'intervalle $[0;1]$, nous recalculons la matrice $[T_h](\omega, \beta)$ et réassemblons la matrice $[F_h](\omega, \beta)$, qui dépendent, elles, de ω .

Enfin, ce calcul peut être répété pour différentes valeurs de β .

8.2 Description de la technique de validation de la méthode

Cette validation a été effectuée sur le cas modèle d'une perturbation O en forme de triangle. Nous allons en donner ici le principe, qui est valable pour toute forme de perturbation donnant des modes guidés. Le résultat définitif de cette validation est donnée dans le chapitre suivant, avec l'ensemble des résultats numériques.

Soit une perturbation O , où nous détectons des modes guidés par la méthode précédemment décrite, pour une valeur de β donnée. Notons E_h la triangulation du domaine de calcul O . La validation de la méthode repose sur la comparaison de ces résultats avec ceux obtenus par un deuxième calcul que nous décrivons maintenant: il repose sur le fait que l'énergie des ondes guidées est essentiellement concentrée dans la perturbation O et dans le voisinage de celle-ci. Il est alors possible en étendant le domaine de calcul par un demi-disque suffisamment grand, en imposant sur le demi-cercle, noté C , une condition de Dirichlet, de résoudre le problème de valeurs propres linéaire de départ (1.16). Nous illustrons par la figure ci-dessous les deux domaines de calcul que nous utilisons pour la comparaison: ils correspondent aux zones achurées des dessins:

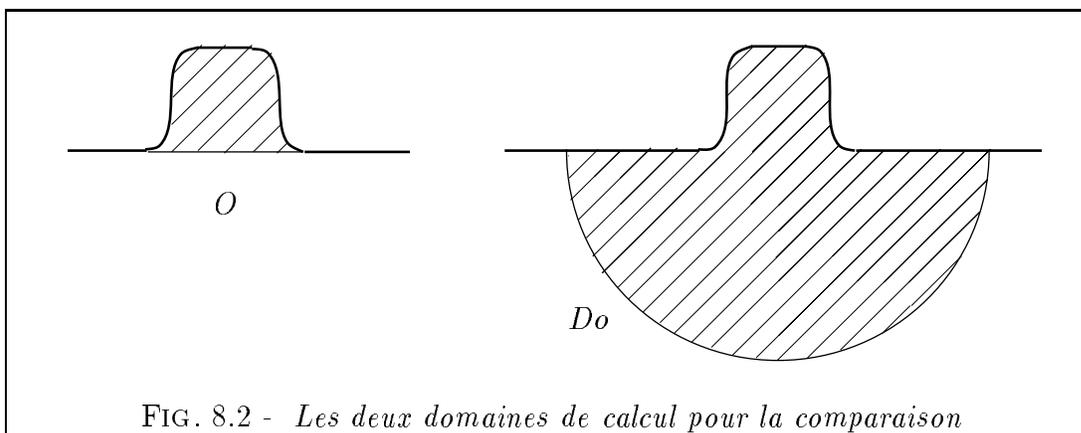


FIG. 8.2 - Les deux domaines de calcul pour la comparaison

Le problème que nous résolvons dans le “grand” domaine, noté Do s’écrit:

$$(8.2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in W_{Do} \text{ tel que} \\ a_{Do}(\beta; u, v) = \omega^2(u, v) \quad (\forall v \in W_{Do}) \end{array} \right.$$

où $W_{Do} = \{v \in H_1(Do) \text{ t.q. } v = 0 \text{ sur } C\}$

et où $a_{Do}(\beta; u, v)$ est la forme bilinéaire classique de l’élastodynamique sur $W_{Do} \times W_{Do}$ définie par:

$$a_{Do}(\beta; u, v) = \int_{Do} \sigma_{ij}^\beta(u) \varepsilon_{ij}^\beta(v) dx \quad i, j = 1, 2, 3$$

La discrétisation de ce problème linéaire de valeurs propres est faite par éléments finis P_1 , en procédant exactement comme nous l’avons fait pour la forme bilinéaire $a_O(\beta; u, v)$, et nous obtenons le problème discret sous la forme suivante:

$$(8.3) \quad [\bar{A}_h](\beta) = \omega^2 [\bar{B}_h]$$

où $[\bar{A}_h](\beta)$ et $[\bar{B}_h]$ désignent respectivement les matrices de rigidité et de masse du problème. Nous notons par $\bar{\omega}_j$, les racines carrées des valeurs propres obtenues.

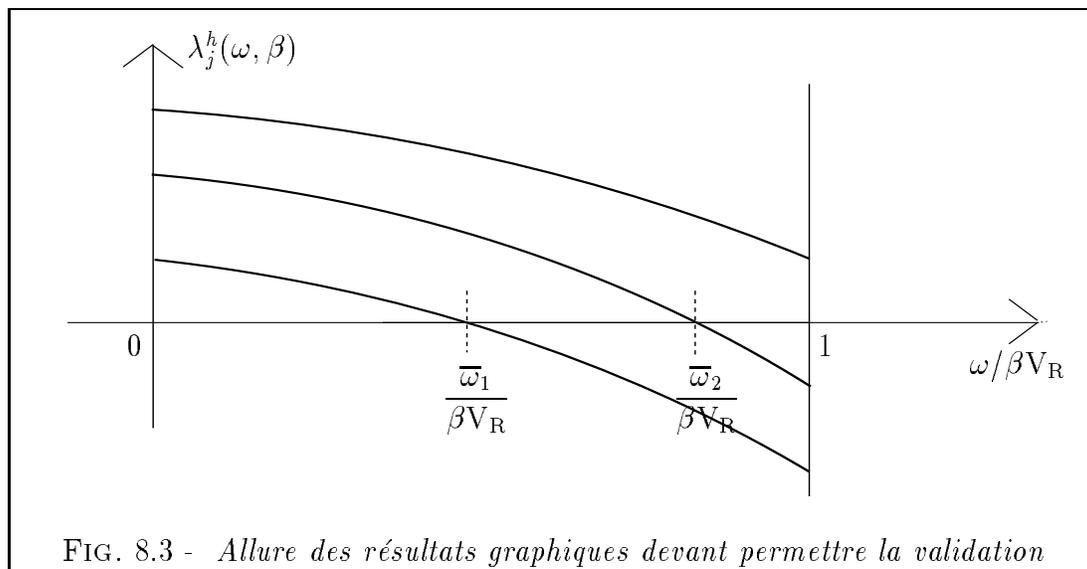
Comme nous l’avons annoncé au début du second chapitre, une telle méthode n’est pas viable pour être généralisée. En effet, la détermination de la distance

suffisante à prendre entre la perturbation, et la frontière avec condition de Dirichlet, ne peut être faite que par des essais successifs, où l'on augmente la distance jusqu'à stabilisation des résultats: en pratique, nous avons constaté que cette distance doit être au moins vingt fois plus grande que la taille de la perturbation concernée. Or ceci est synonyme d'un maillage très important: même si le problème (8.3) est linéaire, les calculs deviennent très coûteux en temps calcul. De plus, la grande taille du problème peut poser rapidement des problèmes pour le stockage des matrices. **A tailles de problèmes égales, la méthode non-linéaire permet d'étudier de façon beaucoup plus raffinée l'allure d'un mode guidé à l'intérieur de la perturbation, que ne permet de le faire la méthode linéaire.**

Afin que la taille du problème linéaire ne soit pas excessive, nous avons construit le maillage de telle sorte qu'il soit raffiné là où l'énergie de l'onde guidée est concentrée: plus l'on s'éloigne de la perturbation O , plus le maillage est lâche.

Pour que la validation soit rigoureuse, nous imposons que **la trace sur la perturbation O , du maillage du domaine Do , corresponde exactement à la triangulation E_h utilisée pour la perturbation O .**

Notre méthode non linéaire est validée, si les racines carrées $\bar{\omega}_j$ des valeurs propres obtenues avec le problème linéaire, coïncident avec les valeurs ω_j , qui annulent, à β fixé, les valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta)$ du problème non linéaire. Nous avons préféré à des tableaux de résultats, une illustration graphique des résultats de la comparaison. L'allure des résultats espérée est la suivante:



Graphiquement, les intersections des courbes des valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta)$ avec l'axe des abscisses, doivent coïncider avec les valeurs $\frac{\bar{\omega}_j}{\beta V_R}$, symbolisées sur ce même axe des abscisses par des segments verticaux.

8.3 Principe du tracé des courbes de dispersion des modes guidés

Ces courbes vont illustrer la relation de dispersion des modes: elles représentent pour chacune des ondes guidées, l'évolution de ω quand β varie sur un intervalle donné $[0; \beta_{\text{MAX}}]$.

Plutôt que de représenter ω , nous représenterons la vitesse de phase adimensionnelle $\frac{\omega}{\beta V_R}$ en fonction de β , afin d'avoir en ordonnée un intervalle borné $[0; 1]$.

Nous ne disposons pas actuellement de résultats théoriques de monotonie concernant ces courbes.

Nous procédons ainsi pour le tracé: nous découpons l'intervalle $[0; \beta_{\text{MAX}}]$ en intervalles équidistants, dont nous notons les extrémités β_i : $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{\text{MAX}}$. Pour chaque β_i , nous cherchons les valeurs $\omega_j(\beta_i)$ de ω qui annulent les valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta_i)$.

C'est à cet endroit précis qu'intervient la non-linéarité du problème, et que nous utilisons une méthode de type point fixe pour sa résolution. En effet, chercher les valeurs $\omega_j(\beta_i)$ qui vont annuler les valeurs propres $\lambda_j(\omega, \beta_i)$, revient à chercher les intersections des courbes $\lambda_j(\omega, \beta_i)$ en fonction de $\frac{\omega}{\beta V_R}$, avec l'axe des abscisses. La méthode que nous avons utilisé pour la recherche de ces zéros est la méthode de la sécante, plus rapide qu'une simple dichotomie.

L'algorithme pour chaque valeur β_i est le suivant:

- nous commençons par calculer les matrices $[A_h](\beta_i)$, $[B_h]$ et $[C_h]$.
- Puis nous déterminons le nombre de modes guidés, noté J , qui existent quand $\beta = \beta_i$. Pour ce faire, nous effectuons deux fois le calcul de valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta_i)$ par Arnoldi, pour deux valeurs de ω différentes, que nous notons ω_{inf} et ω_{sup} : la valeur de ω_{inf} est choisie de telle sorte que le rapport $\frac{\omega_{\text{inf}}}{\beta_i V_R}$ soit proche

de 0, et la valeur de ω_{sup} est choisie de telle sorte que le rapport $\frac{\omega_{\text{sup}}}{\beta_i V_R}$ soit proche de 1. Ces deux calculs exigent de calculer les deux matrices $[T_h](\omega_{\text{inf}}; \beta_i)$ et $[T_h](\omega_{\text{sup}}; \beta_i)$, ainsi que d'assembler les deux matrices $[F_h](\omega_{\text{inf}}; \beta_i)$ et $[F_h](\omega_{\text{sup}}; \beta_i)$.

Pour ω_{inf} , $\lambda_j^h(\omega_{\text{inf}}, \beta_i) > 0 \forall j \geq 1$. Par contre, pour ω_{sup} , les plus petites valeurs propres $\lambda_j^h(\omega_{\text{sup}}, \beta_i)$ correspondant à des modes guidés de vitesse inférieure à V_R , vont être négatives. Par conséquent, pour $\beta = \beta_i$, J est égal au nombre de changements de signe. Si $J = 0$, nous passons directement à β_{i+1} . Sinon, nous poursuivons pour β_i .

- Dans ce dernier cas, nous procédons d'abord, à la détermination de la valeur $\omega_1(\beta_i)$ qui annule $\lambda_1^h(\omega, \beta_i)$. Nous utilisons la méthode de la sécante: le point de départ en est l'encadrement:

$$x_0 = \omega_{\text{inf}} < \omega_1(\beta_i) < x_1 = \omega_{\text{sup}}$$

et nous posons $f(x) = \lambda_1^h(\omega, \beta_i) = \lambda_1^h\left(\frac{\omega}{\beta_i V_R}\right) = \lambda_1^h(x)$.

Trouver la valeur $\omega_1(\beta_i)$ qui nous intéresse revient à trouver \bar{x} qui annule $f(x)$.

L'algorithme de la méthode de la sécante est alors le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 \quad x_0 = \omega_{\text{inf}} \\ n = 1 \quad x_1 = \omega_{\text{sup}} \\ n \geq 2 \quad x_{n+1} = x_n + h_n \text{ avec } h_n = -f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ \quad \quad \quad x_{n+1} \text{ est une bonne estimation de } \bar{x} \text{ quand } |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \\ \quad \quad \quad \text{sinon on incrémente } n \text{ de } 1. \end{array} \right.$$

Nous avons fixé $\varepsilon = 0,005$. A chaque itération de cette boucle, nous avons à recalculer la matrice $[T_h](\omega; \beta_i)$ et à assembler une nouvelle matrice $[F_h](\omega; \beta_i)$.

- Quand la valeur de $\omega_1(\beta_i)$ est déterminée, nous passons à $\omega_2(\beta_i)$, et ainsi de suite jusqu'à J .

- L'avantage de toujours utiliser la méthode d'Arnoldi pour effectuer le calcul des valeurs propres est que, quand nous cherchons $\omega_j(\beta_i)$, nous calculons aussi

$\lambda_k^h(x)$, pour $j < k \leq J$, à chaque itération: ces résultats permettent de réduire l'encadrement de départ $[\omega_{\text{inf}}; \omega_{\text{sup}}]$ pour les valeurs $\omega_k(\beta_i)$, pour $j < k \leq J$, et d'accélérer ainsi considérablement le processus de détermination des valeurs $\omega_j(\beta_i)$.

Ceci termine la description de la méthode numérique. Nous allons maintenant présenter les résultats numériques obtenus par cette méthode, et entre autre, les résultats qui ont permis sa validation.

Chapitre 9

Résultats numériques

Plan du chapitre

Dans une première partie, nous montrerons comment nous avons validé un premier code, destiné à traiter la partie éléments finis P_1 du problème numérique: le problème modèle utilisé est un guide d'ondes élastique, homogène et isotrope, constitué d'une cavité circulaire, infinie dans la direction de propagation.

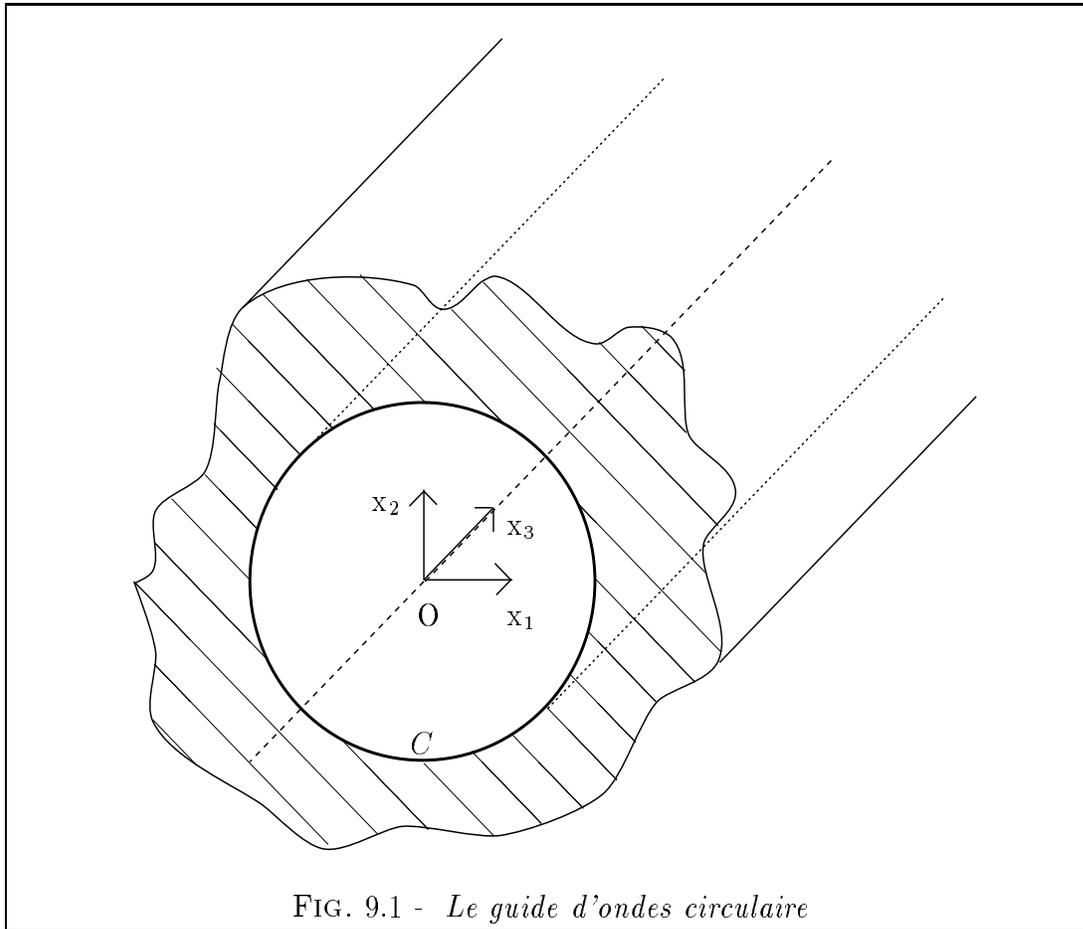
Dans la seconde partie, nous présenterons les résultats obtenus pour le problème modèle que nous avons retenu (inspiré des travaux de Lagasse), qui est une perturbation du demi-espace en forme de triangle: nous nous intéresserons en particulier à la validation du code (incluant le premier), aux courbes de dispersion des modes obtenus, ainsi qu'à l'aspect de ceux-ci.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, nous donnerons un exemple de perturbation donnant elle aussi des modes guidés, bien que ne présentant pas de coin comme le triangle.

9.1 Validation de la partie éléments finis P_1

9.1.1 Le guide d'ondes circulaire

Le guide d'ondes que nous considérons, décrit par la figure (9.1), est un cylindre creux de section circulaire constante.

FIG. 9.1 - *Le guide d'ondes circulaire*

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs, dont Biot, [10] et [11], qui s'est intéressé à la propagation du mode axisymétrique, Mindlin [37], qui a établi que la vitesse de tout mode guidé s'approche de la vitesse de Rayleigh à haute fréquence, Boström et al [16], qui ont mis en évidence l'existence d'une suite de modes. Ces travaux sont aussi résumés dans [9] et [41], et nous en rappelons ici les résultats utiles à notre validation.

Les modes guidés obtenus existent grâce à la condition de surface libre sur le cylindre, et ont des vitesses comprises dans l'intervalle $]V_R; V_S[$.

Les équations du problème sont toujours les équations classiques de l'élastodynamique. On se ramène encore à un problème linéaire de valeurs propres posé dans la section du guide. Le problème peut être résolu de façon semi-analytique: soit a le rayon du cercle de la section droite du cylindre. Cette section Ω du milieu élastique est alors:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| > a\}$$

On passe en coordonnées polaires (r, θ) , et on effectue un passage en potentiel, en cherchant le champ de déplacement u sous la forme:

$$u = \text{grad } \bar{\Phi} + \text{rot } \bar{\Psi}$$

où les potentiels $\bar{\Phi}$ et $\text{rot } \bar{\Psi}$ satisfont les équations d'onde à pulsation ω :

$$\begin{cases} -V_P^2 \Delta \bar{\Phi} + \beta^2 V_P^2 \bar{\Phi} - \omega^2 \bar{\Phi} = 0 \\ -V_S^2 \Delta \bar{\Psi} + \beta^2 V_S^2 \bar{\Psi} - \omega^2 \bar{\Psi} = 0 \end{cases}$$

Suivant Miklowitz [36], nous écrivons le potentiel vecteur $\bar{\Psi}$ sous une forme qui fait jouer un rôle particulier à l'axe \vec{e}_3 .

$$\bar{\Psi} = \bar{\gamma} \vec{e}_3 + \text{rot } (\bar{\eta} \vec{e}_3)$$

avec

$$\begin{cases} -V_S^2 \Delta \bar{\gamma} + \beta^2 V_S^2 \bar{\gamma} - \omega^2 \bar{\gamma} = 0 \\ -V_S^2 \Delta \bar{\eta} + \beta^2 V_S^2 \bar{\eta} - \omega^2 \bar{\eta} = 0 \end{cases}$$

Le problème est ainsi ramené à trois équations découplées en $\bar{\Phi}$, $\bar{\gamma}$ et $\bar{\eta}$, le couplage n'intervenant que par l'intermédiaire de la condition aux limites. Les potentiels sont cherchés sous la forme:

$$(9.1) \quad \begin{cases} \bar{\Phi} = \Phi(r) \cos(n\theta) \\ \bar{\gamma} = \gamma(r) \sin(n\theta) \\ \bar{\eta} = \eta(r) \cos(n\theta) \end{cases}$$

D'autre part, la relation de dispersion du $n^{\text{ième}}$ mode est donné par:

$$(9.2) \quad \det M_n(\beta, \omega) = 0 \quad 0 < \omega < \beta V_S$$

où M_n est une matrice 3×3 dont l'expression provient de la nécessité de vérifier la condition de surface libre, et de (9.1). n est l'indice du mode ($n \geq 0$). Elle est donnée dans [9] par exemple. La résolution numérique de (9.2) permet de tracer la courbe de dispersion du $n^{\text{ième}}$ mode. Ces courbes sont données dans [16] et [9].

Notre but est de **retrouver les résultats obtenus avec (9.1) et (9.2) par un calcul entièrement numérique, effectué avec le code d'éléments finis P_1 qui est destiné à traiter la partie élasticité de la perturbation du demi-espace.** Le domaine Ω_r de calcul utilisé a l'allure suivante:

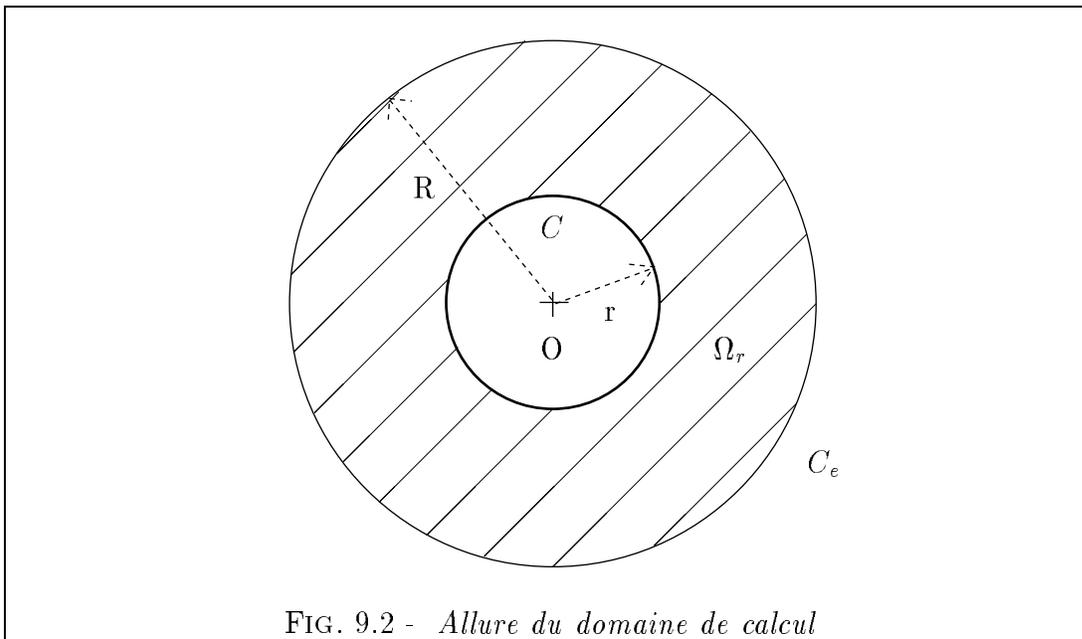


FIG. 9.2 - Allure du domaine de calcul

$$\Omega_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } r < |x| < R\}$$

et on résoud numériquement par éléments finis P_1 :

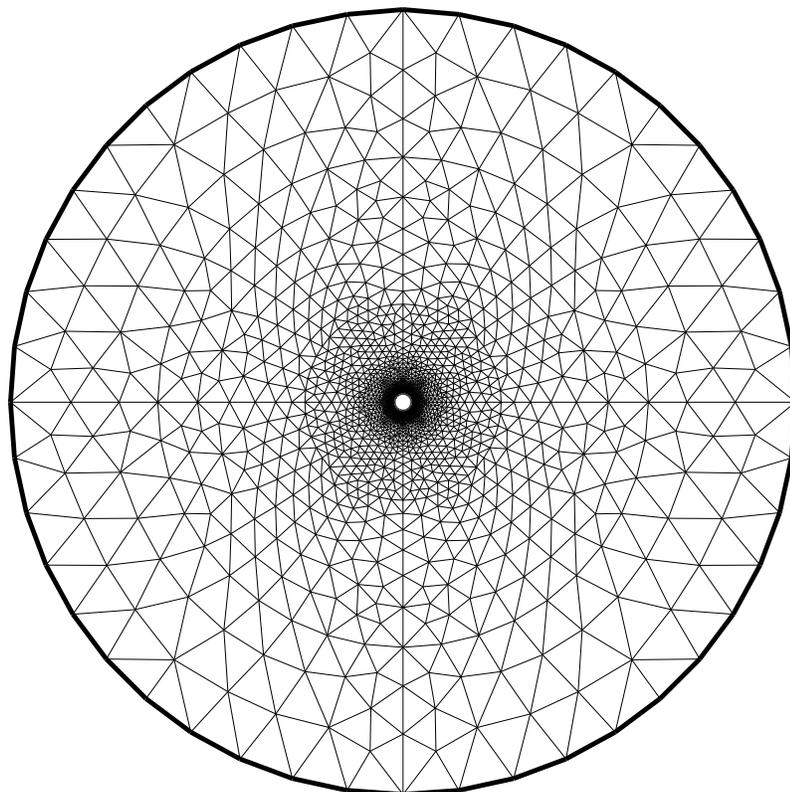
$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta) u = \omega^2 u & \text{dans } \Omega_r \\ u = 0 & \text{sur } C_e \\ \sigma^\beta(u) \cdot n = 0 & \text{sur } C \end{cases}$$

où $\mathcal{A}(\beta)$ est l'opérateur différentiel défini par (1.21).

Dans ce problème de guidage, les ondes cherchées sont des ondes de surface, dont l'énergie est concentrée près de la surface libre $C \times \mathbb{R}$. C'est pourquoi nous prenons $R \gg r$ et que nous mettons sur C_e une condition de Dirichlet.

9.1.2 Le maillage utilisé

Il est représenté sur la figure (9.3). Nous avons pris $r = 1$ et $R = 40$ (R a été augmenté jusqu'à stabilisation des résultats). Le maillage, étant donné les remarques ci-dessus, est très raffiné près de la surface libre. Il comporte 3900 sommets et 7400 triangles.

FIG. 9.3 - *Maillage de la section du guide*

Nous donnons les résultats obtenus pour une valeur du nombre d'onde β égale à 6, et pour $\tau = 0.3$:

mode	ω
1	2.215
2	2.224
3	2.256
4	2.313

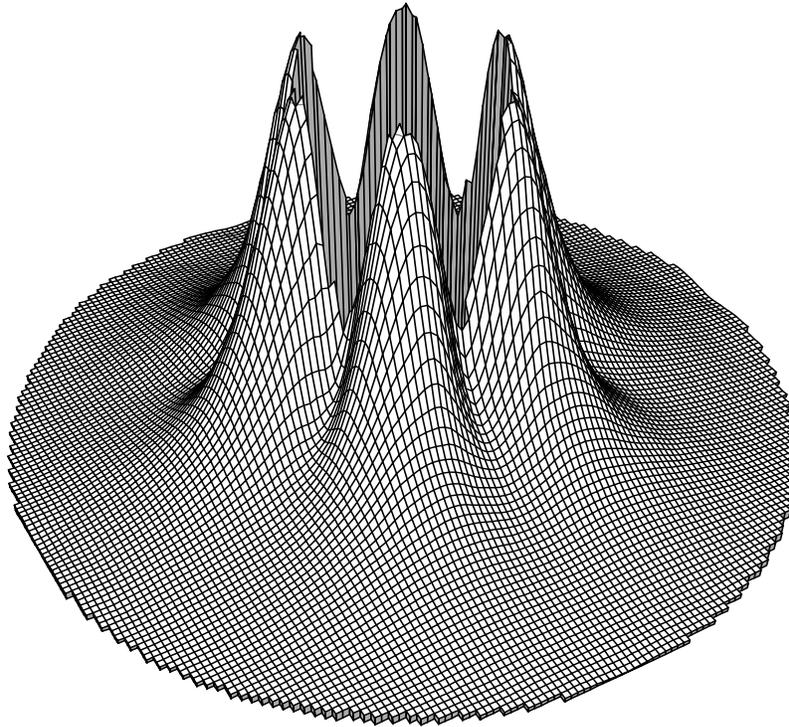


FIG. 9.4 - *NORME DU 4^{ème} MODE* / $\beta = 6$ / $\omega = 2.213$ / $\tau = 0.3$

Le nombre de mode, (quatre), et les valeurs propres ω^2 obtenues, coïncident bien avec les résultats donnés par (9.2).

9.1.3 Exemple d'aspect d'un mode guidé

Afin de montrer que (9.1) est aussi vérifiée, et pour l'illustrer, nous représentons l'un des modes, le quatrième.

Sur la figure (9.4), nous représentons la norme du mode: nous n'avons représenté que la partie $\Omega'_r = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 1 < |x| < 4\}$. La concentration de l'énergie du mode tout autour du demi-cercle C , sur lequel on a la condition de surface libre, y est très visible.

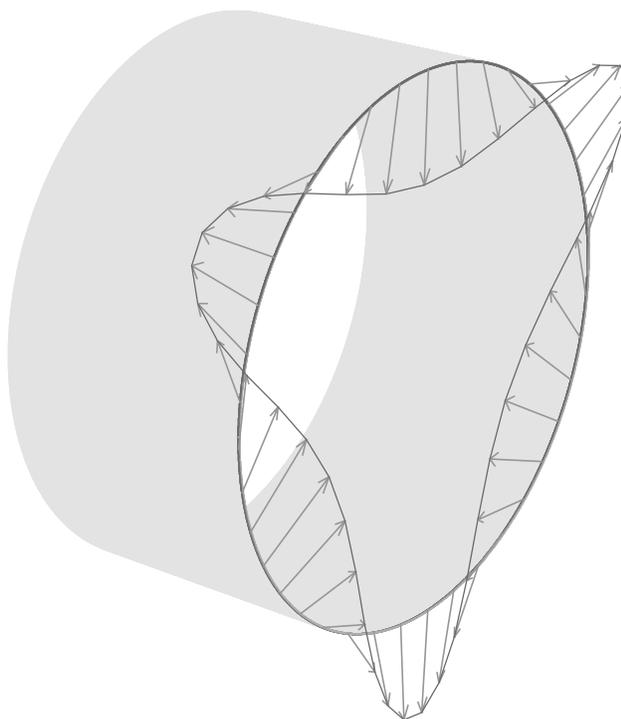


FIG. 9.5 - COMPOSANTE TRANSVERSALE DU 4^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 2.213$ / $\tau = 0.3$

La figure (9.5) représente l'amplitude de la déformation transversale de la surface libre du guide. Nous avons préféré cette représentation, à celle complète, de la déformation transversale dans toute la section Ω du guide, car elle fait mieux apparaître la vérification de (9.1), où $n = 3$.

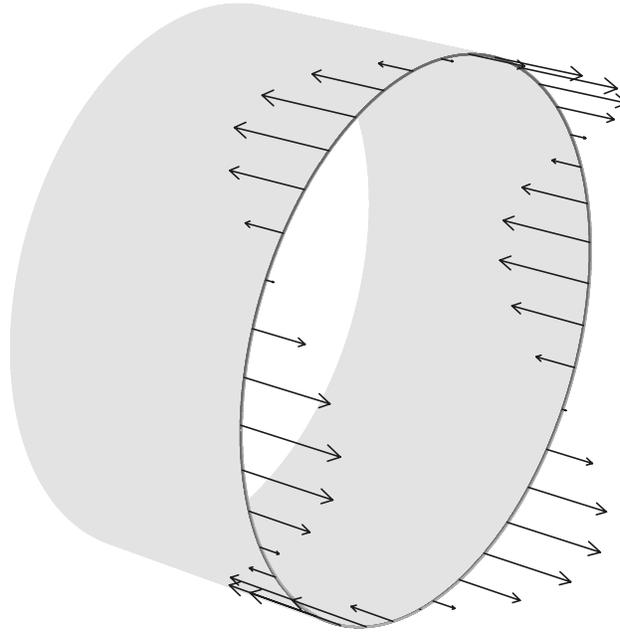


FIG. 9.6 - *COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 4^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 2.213$ / $\tau = 0.3$*

La figure (9.6) représente l'amplitude de la déformation longitudinale de la surface libre du guide. Nous constatons encore la périodicité de la déformation, prévue par (9.1).

Ayant ainsi validé la partie éléments finis P_1 , nous allons désormais nous intéresser à la validation de l'ensemble de la méthode, et en particulier à l'autre partie du code qui traite l'opérateur de bord.

9.2 Le problème modèle: perturbation en forme de triangle

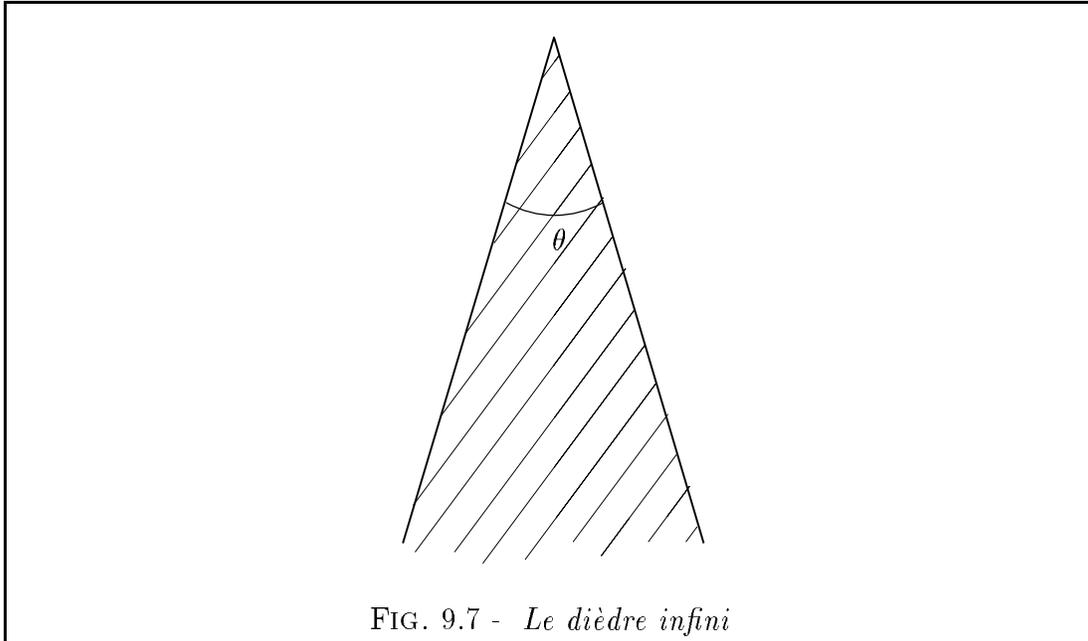
9.2.1 Motivation de ce choix

Le problème de Lagasse

Lagasse et al, [31] et [32], se sont intéressés, dans le cadre de recherches sur les guides d'ondes en piézoélectricité, aux ondes guidées par des perturbations du demi-espace, soit de forme triangulaire, soit rectangulaire. Pour cette étude de nature numérique, ils ont employé la méthode d'éléments finis que nous utilisons pour valider la méthode que nous présentons ici: ils ont été confrontés à la difficulté de placer assez loin de la perturbation, la frontière sur laquelle l'on met la condition de Dirichlet, et se sont limités, pour tracer les courbes de dispersion des modes obtenus, à des problèmes discrets de taille 150×150 . Pour valider leurs calculs, ils disposaient de résultats d'expériences physiques.

Dans le cas de perturbations ayant une section rectangulaire, ils ont obtenu des modes guidés, sous réserve de prendre une perturbation "plus haute que large". Nous obtenons des résultats semblables, et montré numériquement l'existence de modes guidés dans un carré. Ces résultats seront présentés dans un rapport ultérieur.

Nous allons nous intéresser ici plus particulièrement aux perturbations ayant une section triangulaire. Lagasse a déduit de ses résultats numériques différentes conjectures théoriques concernant l'existence et la vitesse des ondes guidées obtenues par l'arête d'un dièdre infini:

FIG. 9.7 - *Le dièdre infini*

Les calculs ont mis en évidence l'existence d'une onde guidée, dont la vitesse est strictement inférieure à la vitesse de Rayleigh V_R , si l'angle θ du dièdre est suffisamment aigu. Ils montrent aussi une concentration de l'énergie du mode quand la fréquence augmente. De plus, il est aisé de montrer qu'une onde se propageant dans un dièdre infini, doit être non dispersive. En conséquence, l'existence ou non d'un mode guidé y est indépendante du nombre d'onde β .

Lagasse a aussi énoncé la conjecture suivante concernant les vitesses de phase des modes:

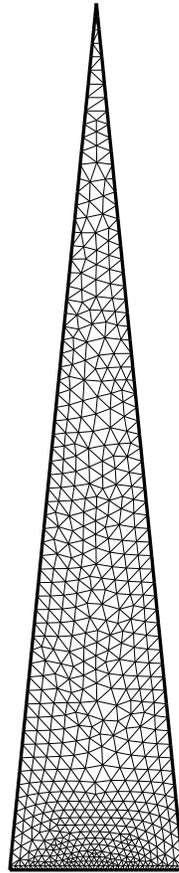
$$(9.3) \quad c = \frac{\omega}{\beta} = V_R \sin(m\theta) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{pour } m\theta < \frac{\pi}{2}$$

où m est un entier désignant l'ordre du mode.

L'expression (9.3) dit que m modes peuvent se propager le long de l'arête tel que $\theta < \frac{\pi}{2m}$, et à une vitesse inférieure à celle de Rayleigh.

Nous avons par conséquent choisi, comme problème modèle, une perturbation O du demi-espace, ayant comme section un triangle isocèle, pour expérimenter et valider notre méthode.

Le maillage utilisé

FIG. 9.8 - *Maillage du triangle*

Il comporte 654 sommets et 1141 triangles. Il est donc très raffiné, et plus particulièrement près de l'interface avec le demi-espace (sur Σ il y a 36 points de discrétisation): ceci est justifié par le fait que nous voulons valider la partie du code concernant l'opérateur de bord. La hauteur du triangle est de 1, pour une base de 0.2. L'angle du sommet a donc délibérément choisi très petit, afin d'obtenir un grand nombre de modes.

9.2.2 La détection des modes guidés pour β fixé

Nous avons utilisé la méthode décrite dans la première partie du chapitre 8, pour mettre en évidence l'existence des modes, pour différentes valeurs de β fixées. La valeur de τ est fixée à 0.25.

Les résultats sont illustrés par les quatre figures suivantes.

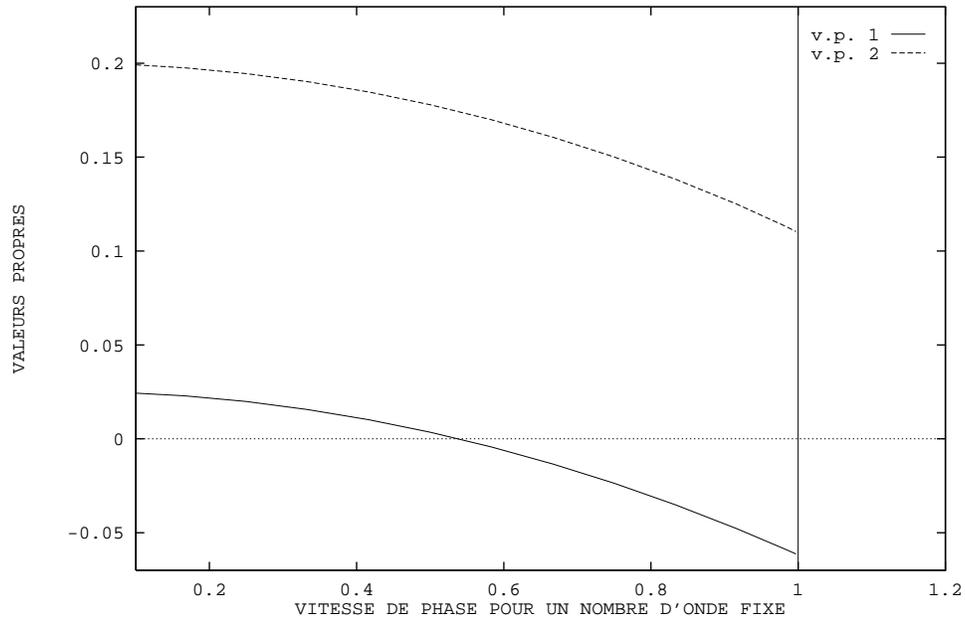


FIG. 9.9 - *DETECTION DES MODES GUIDES POUR $\beta = 1 / \tau = 0.25$*

Pour $\beta = 1$: seule la courbe $\lambda_1^h(\omega, \beta)$ coupe l'axe des abscisses, révélant ainsi l'existence d'un unique mode pour cette valeur de β . Nous avons représenté aussi la courbe $\lambda_2^h(\omega, \beta)$, mais elle reste positive.

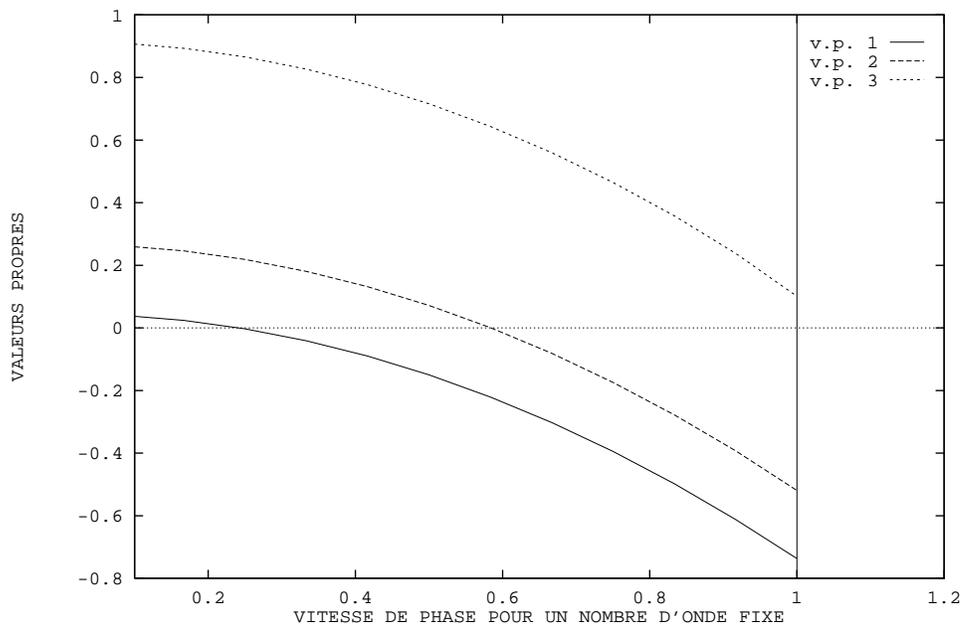


FIG. 9.10 - *DETECTION DES MODES GUIDES POUR $\beta = 3 / \tau = 0.25$*

Pour $\beta = 3$: nous avons désormais deux modes. De plus, comme l'intersection de $\lambda_1^h(\omega, \beta)$ avec l'axe des abscisses s'est déplacée vers la gauche, on en déduit que la vitesse du premier mode a diminué.

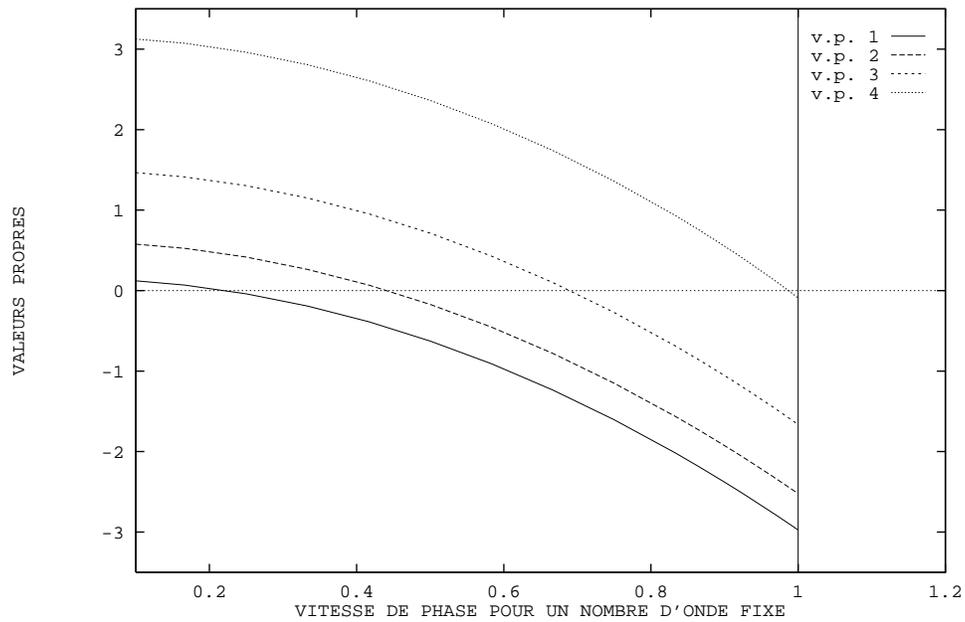


FIG. 9.11 - *DETECTION DES MODES GUIDES POUR $\beta = 6 / \tau = 0.25$*

Pour $\beta = 6$: nous avons maintenant quatre modes: le dernier a une vitesse qui est proche de celle de Rayleigh.

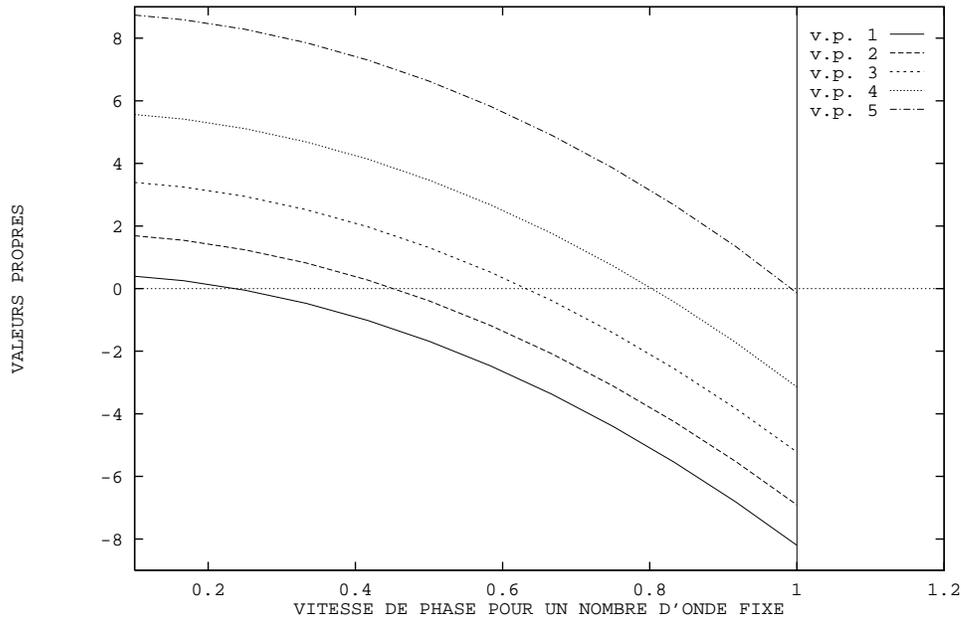


FIG. 9.12 - *DETECTION DES MODES GUIDES POUR $\beta = 10 / \tau = 0.25$*

Pour $\beta = 10$: un cinquième mode est encore apparu.

Remarque: nous avons en pratique obtenu jusqu'à sept modes, mais pour des valeurs de β autour de 60. Ce nombre est en accord avec la conjecture de Lagasse.

Ces résultats constituent déjà en eux-même, un bon test de validation de la méthode. Cependant, afin de la faire apparaître clairement, nous allons présenter la comparaison avec la méthode utilisée par Lagasse.

9.2.3 La validation définitive de la méthode

Le principe est celui donné dans la seconde partie du chapitre 8.

Le maillage utilisé

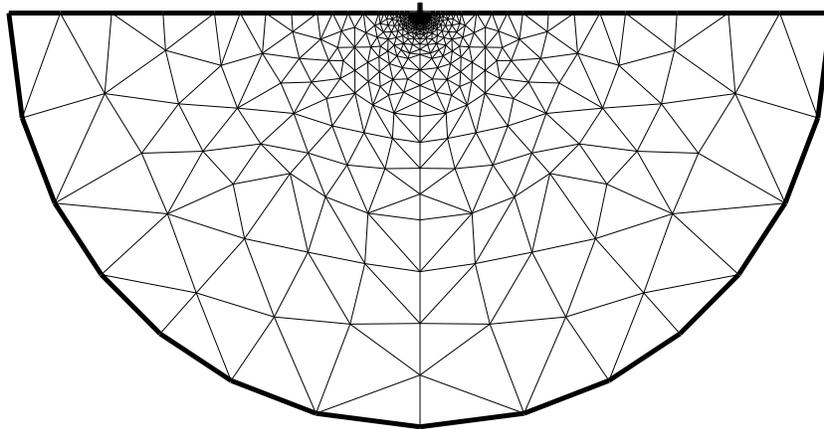


FIG. 9.13 - *Maillage utilisé pour la validation*

La hauteur de la perturbation est 1. Nous plaçons, “par sécurité”, la frontière artificielle avec condition de Dirichlet à une distance de 40. Le maillage, raffiné au niveau de la perturbation, l’est de moins en moins quand on s’en éloigne. Ceci permet de “limiter” le maillage à 1459 sommets et 2704 triangles, et donc le stockage ainsi que le temps calcul. La trace de ce maillage sur la perturbation, correspond au maillage que nous utilisons pour notre méthode.

Résultat de la comparaison des problèmes linéaire et non-linéaire

Le calcul a été effectué pour $\beta = 6$ et $\tau = 0.25$. Les courbes des valeurs propres $\lambda_j^h(\omega, \beta)$ sont celles obtenues précédemment.

Nous constatons sur la figure (9.14), que les rapports $\frac{\bar{\omega}_j}{\beta V_R}$ où $\bar{\omega}_j$ désignent les racines carrées des valeurs propres du problème linéaire, coïncident bien avec les intersections respectives des courbes $\lambda_j^h(\omega, \beta)$ avec l’axe des abscisses. Ce résultat permet donc la validation du code mettant en oeuvre la méthode de calcul des modes guidés ici décrite.

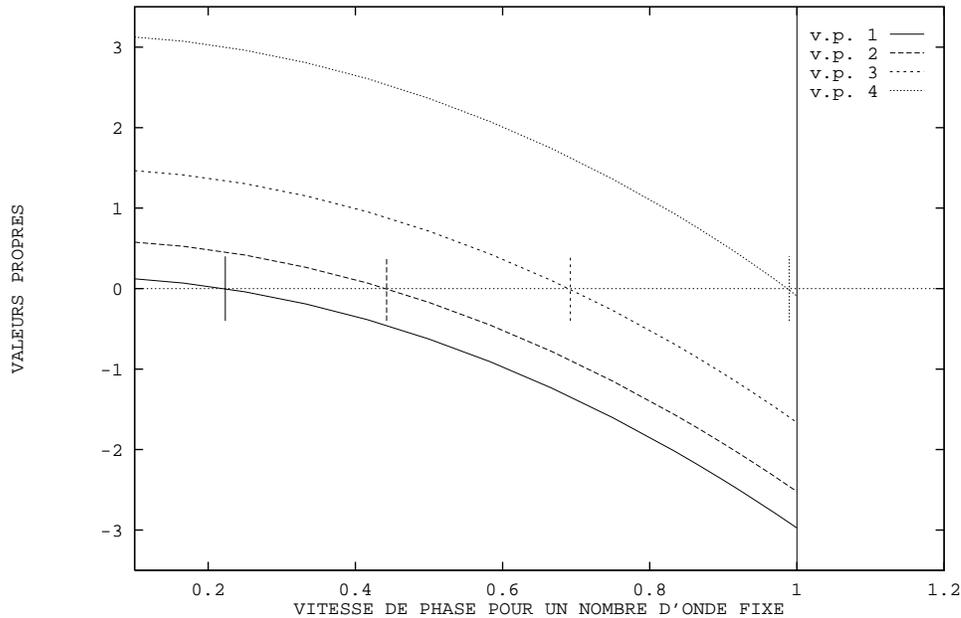


FIG. 9.14 - COMPARAISON DES DEUX PROBLEMES POUR $\beta = 6 / \tau = 0.25$

9.2.4 Courbes de dispersion

Le tracé de ces courbes a été effectué en suivant l'algorithme présenté dans la troisième partie du chapitre 8. Elles sont en accord avec les résultats numériques obtenus par Lagasse, et illustrent bien la relation de dispersion des modes.

Nous constatons que les modes apparaissent au-delà de valeurs minimales de β . Ces seuils d'apparition ne sont pas déterminés par la méthode que nous présentons ici. Ils nécessitent un traitement spécifique qui reste à définir et à programmer. D'autre part, dans le cas du premier mode au moins, l'existence d'un seuil reste sujet à caution: la question de son existence requiert une étude théorique approfondie, les résultats numériques étant tels quels insuffisants pour l'éclaircir.

La convergence des courbes, pour β grand, vers les vitesses limites proposées dans la conjecture de Lagasse pour le dièdre infini, ne se vérifie que partiellement. L'explication tient éventuellement, soit dans le fait que nous ne sommes pas exactement dans le cas du dièdre, soit que le maillage devient insuffisant à très hautes fréquences, l'énergie des ondes étant alors très concentrée, et les oscillations du milieu élastique devenant aussi trop importantes.

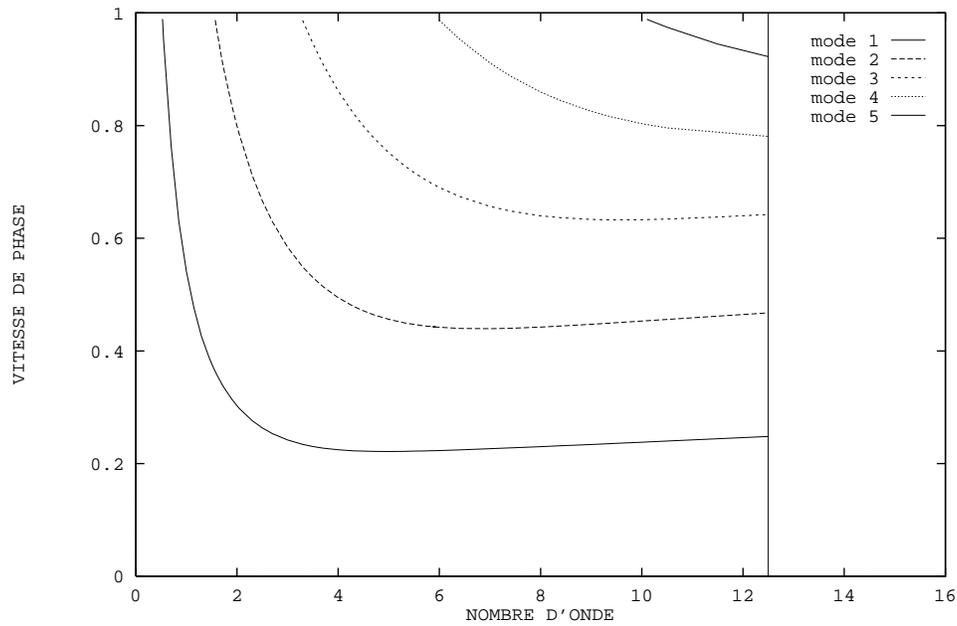


FIG. 9.15 - COURBES DE DISPERSION DES MODES / $\tau = 0.25$

9.2.5 Allure des modes guidés

Nous allons donner l'aspect des quatre modes guidés obtenus pour $\beta = 6$ et $\tau = 0.25$.

1^{er} mode

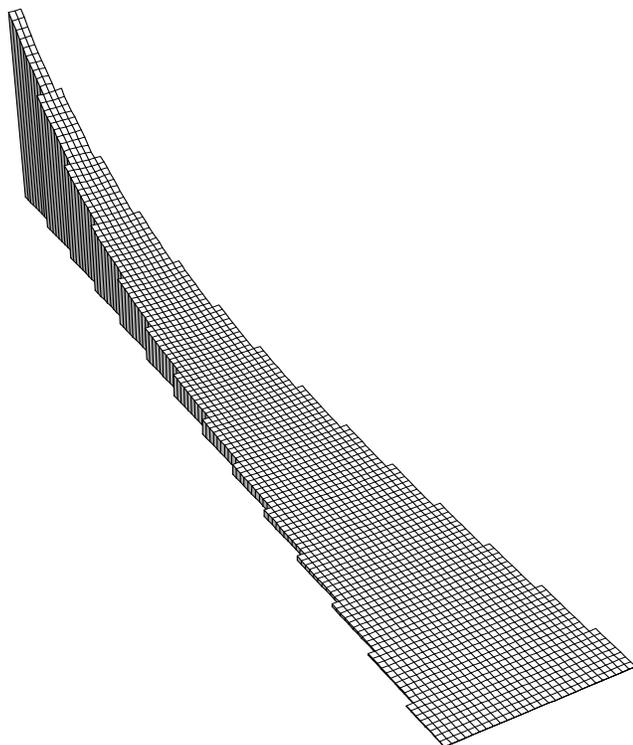


FIG. 9.16 - *NORME DU 1^{er} MODE* / $\beta = 6$ / $\omega = 0.395$ / $\tau = 0.25$

La figure (9.16) révèle que l'énergie du mode est très concentrée dans le sommet de la perturbation, et décroît de façon monotone quand on s'en éloigne.

Pour la figure (9.17), nous avons "élargi" le triangle, afin de rendre le résultat plus lisible. Il montre que la déformation transverse du guide est elle aussi plus importante au sommet de la perturbation.

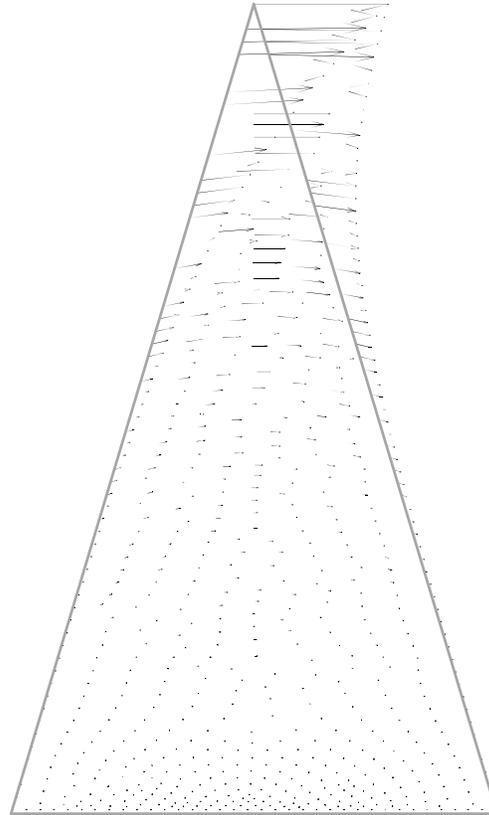


FIG. 9.17 - *COMPOSANTES TRANSVERSALES DU 1^{er} MODE* / $\beta = 6$ /
 $\omega = 0.395$ / $\tau = 0.25$

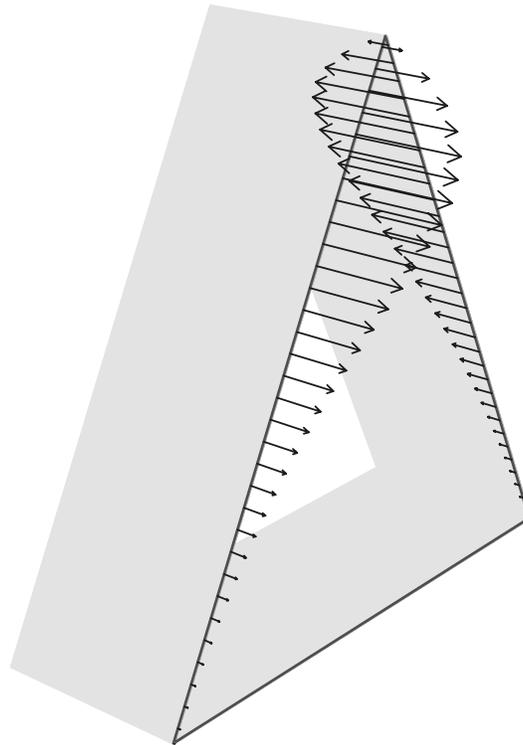


FIG. 9.18 - *COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 1^{er} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 0.395$ / $\tau = 0.25$*

Nous n'avons représenté la déformation longitudinale, sur la figure (9.18), que pour la surface du guide. Nous constatons que cette composante du champ de déplacement est antisymétrique par rapport à l'axe de symétrie du triangle.

2^{ème} mode

La figure (9.19) représentant la norme du champ de déplacement du mode, montre que l'énergie est toujours concentrée dans le sommet du triangle, moins cependant que pour le premier mode. De plus, la norme oscille une fois, ce qui caractérise le mode.

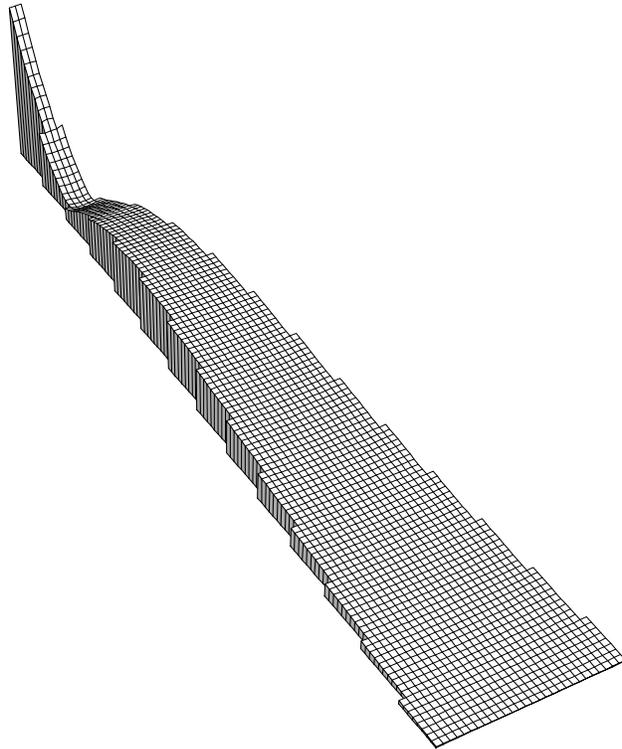


FIG. 9.19 - *NORME DU 2^{ème} MODE* / $\beta = 6$ / $\omega = 0.782$ / $\tau = 0.25$

Comme pour la norme, la déformation transversale du guide, voir figure (9.20), possède aussi une oscillation caractéristique du mode.

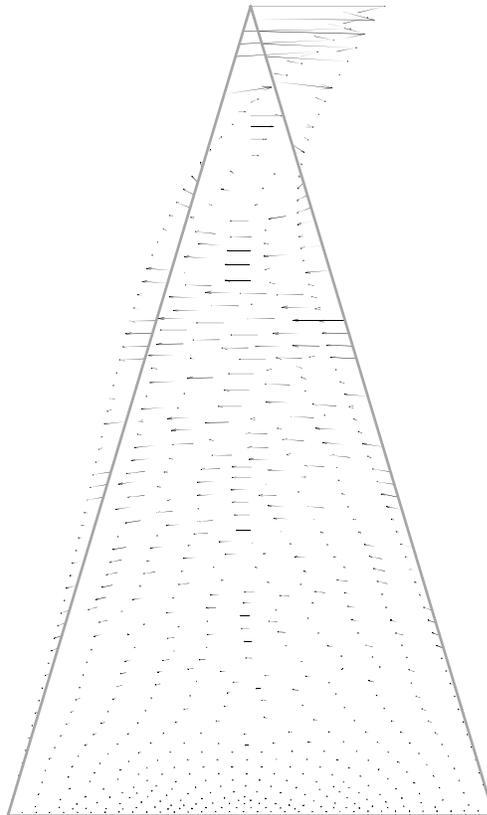


FIG. 9.20 - COMPOSANTES TRANSVERSALES DU 2^{ème} MODE / $\beta = 6$ /
 $\omega = 0.782$ / $\tau = 0.25$

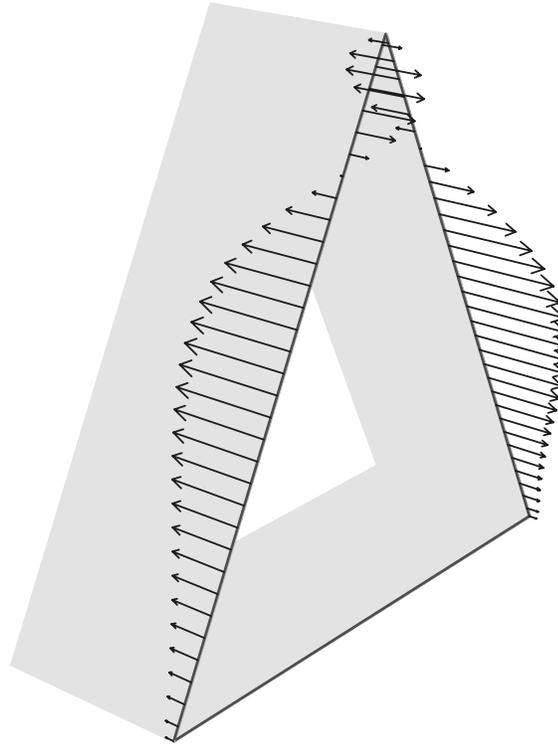


FIG. 9.21 - *COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 2^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 0.782$ / $\tau = 0.25$*

La composante longitudinale, représentée sur la figure (9.21), a aussi cette oscillation, et est antisymétrique.

3^{ème} mode

L'énergie est moins concentrée que pour les modes précédents, ce que révèle la norme sur la figure (9.22). On constate aussi la présence de deux oscillations.

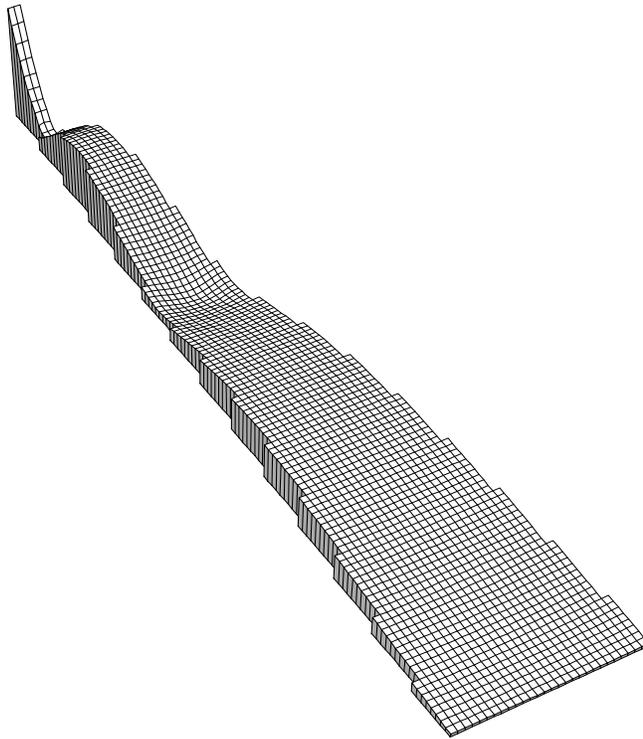


FIG. 9.22 - *NORME DU 3^{ème} MODE* / $\beta = 6$ / $\omega = 1.221$ / $\tau = 0.25$

La déformation transverse, (figure (9.23)), change aussi deux fois de sens.

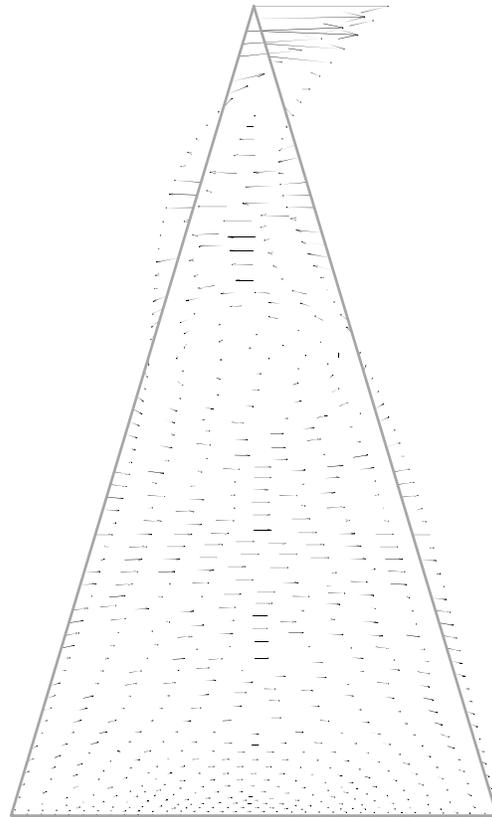


FIG. 9.23 - *COMPOSANTES TRANSVERSALES DU 3^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 1.221$ / $\tau = 0.25$*

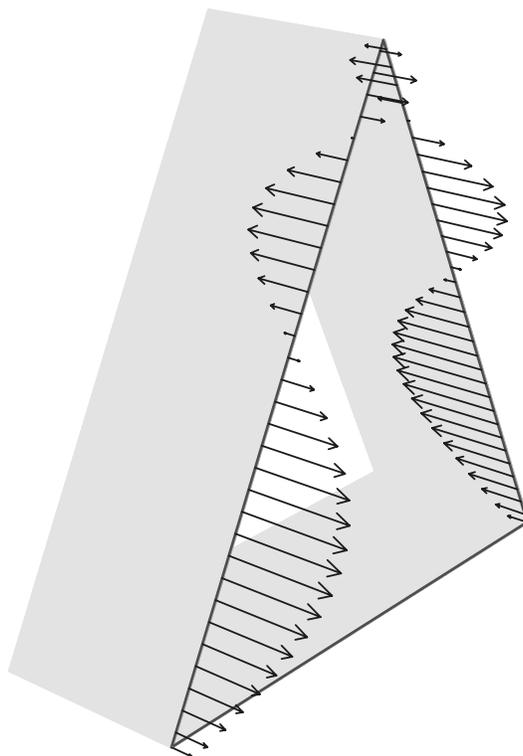


FIG. 9.24 - COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 3^{ème} MODE / $\beta = 6$ /
 $\omega = 1.221$ / $\tau = 0.25$

La composante longitudinale, (figure (9.24)), du mode a aussi cette caractéristique, et est toujours antisymétrique.

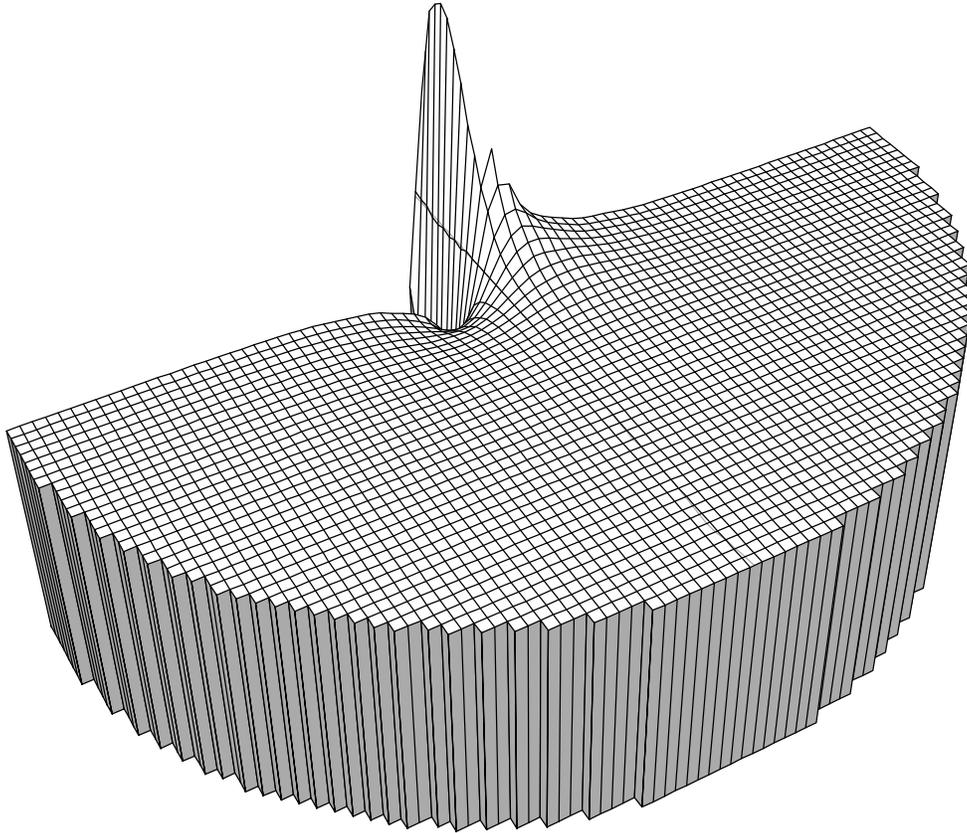


FIG. 9.25 - *COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 3^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 1.221$ / $\tau = 0.25$*

Afin de bien montrer l'importance de la condition aux limites transparente à l'interface avec le demi-espace, traduite dans les calculs par l'opérateur de bord, nous représentons sur la figure (9.25), en plus de la perturbation, la composante longitudinale du champ de déplacement, pour une partie du demi-espace élastique inférieur: nous constatons que la déformation du milieu est importante dans une zone située assez loin de la perturbation (l'énergie du mode n'y est pas totalement concentrée).

4^{ème} mode

La norme du mode, (figure (9.26)), possède à présent trois oscillations. L'énergie du mode est, par rapport aux cas précédents, moins concentrée au sommet du triangle, mais y atteint toutefois son maximum.

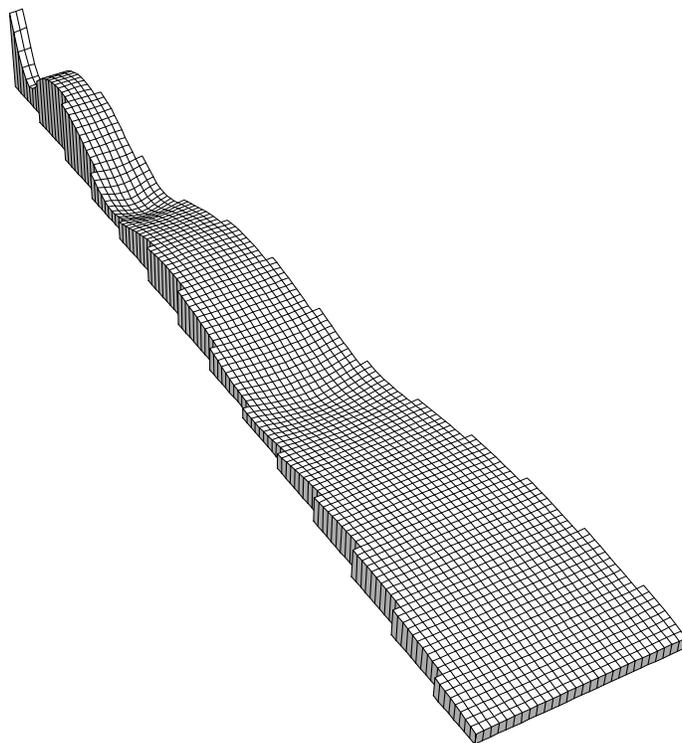


FIG. 9.26 - *NORME DU 4^{ème} MODE* / $\beta = 6$ / $\omega = 1.746$ / $\tau = 0.25$

La déformation transversale, (figure (9.27)), est à l'image de la norme. Nous voyons clairement apparaître à l'intérieur du triangle trois "tourbillons" dans la déformation, qui sont situés dans les zones où la direction de la déformation change.

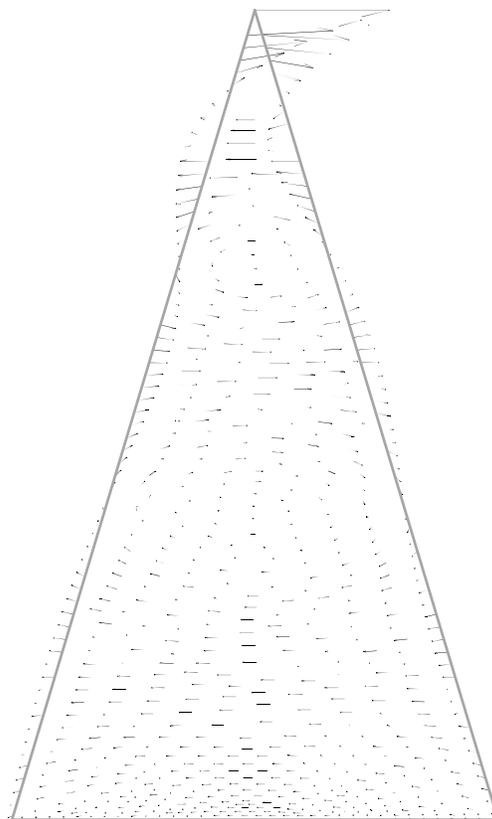


FIG. 9.27 - *COMPOSANTES TRANSVERSALES DU 4^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 1.746$ / $\tau = 0.25$*

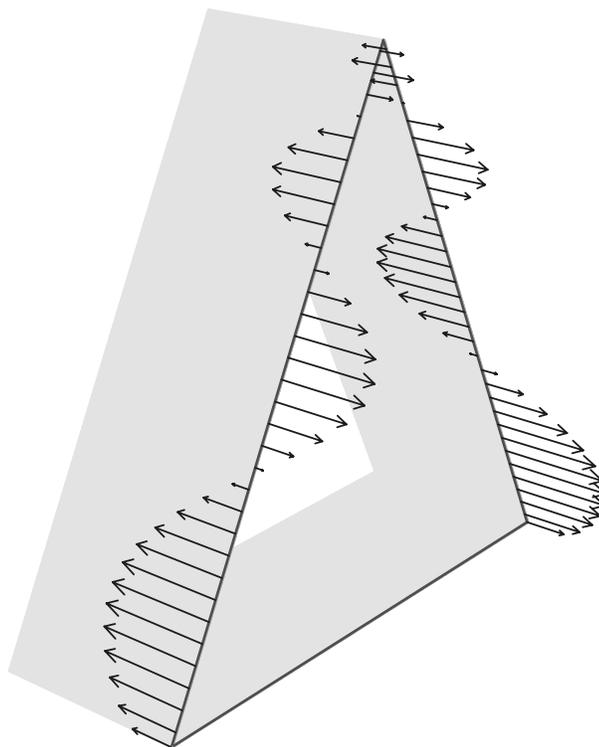


FIG. 9.28 - COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 4^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 1.746$ / $\tau = 0.25$

L'antisymétrie de la déformation longitudinale, (figure (9.28)), s'observe très bien à la surface du guide.

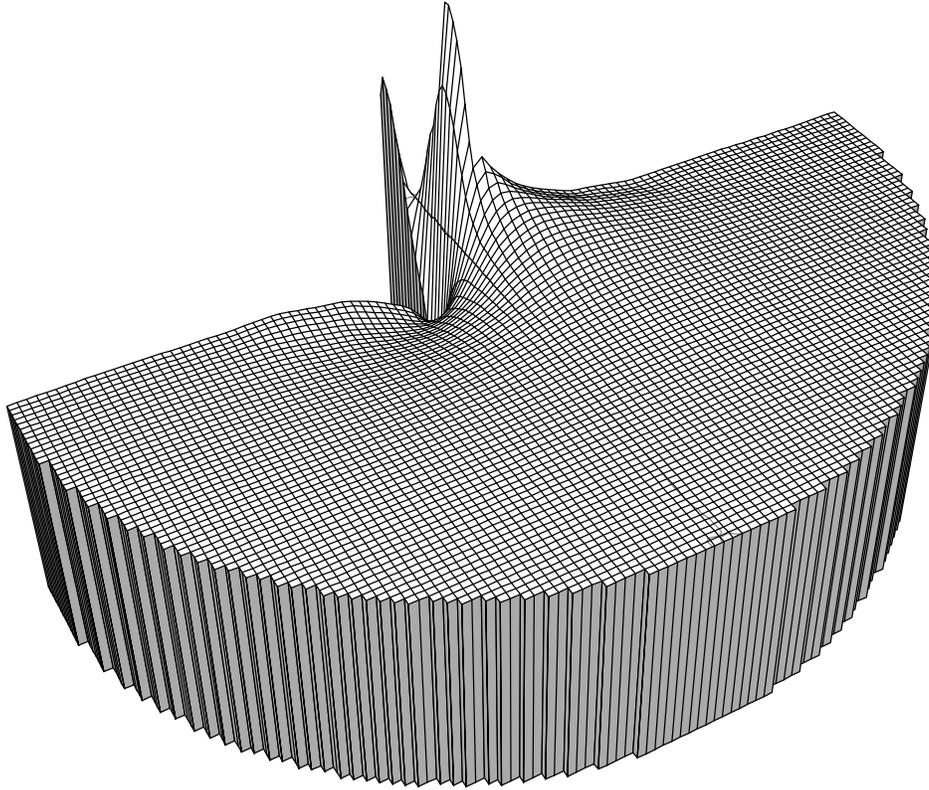


FIG. 9.29 - COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 4^{ème} MODE / $\beta = 6$ / $\omega = 1.746$ / $\tau = 0.25$

La figure (9.29) montre que par rapport au troisième mode, l'énergie est loin d'être concentrée dans le guide, et qu'une partie importante du demi-espace, située sous la perturbation, est fortement déformée. Ceci est naturel, étant donné que ce mode apparaît peu avant $\beta = 6$, et qu'il a une vitesse très proche de celle de Rayleigh. C'est ce qu'illustre cette représentation de la déformation longitudinale.

9.3 Perturbation en forme de vitrail

9.3.1 Description de la perturbation

Motivation de son choix

Nous allons nous intéresser à une nouvelle forme de perturbation: la section droite de celle que nous présentons maintenant, a l'aspect d'un vitrail roman.

Le but était de vérifier qu'il n'était pas nécessaire d'avoir une perturbation dont le bord présente au moins un coin, pour obtenir des modes guidés.

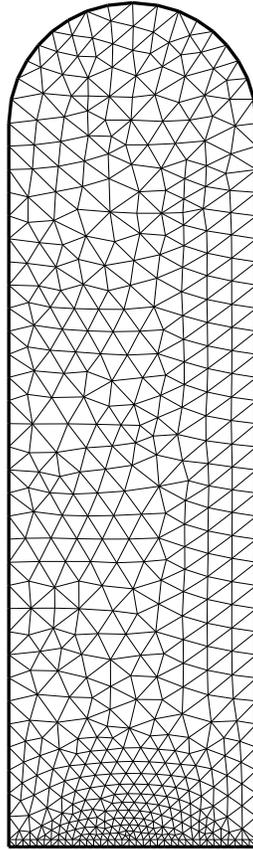
Nous n'avons pas réussi à l'heure actuelle à obtenir numériquement des modes guidés avec une perturbation en forme de demi-cercle.

D'autre part, Lagasse avait obtenu des modes en prenant une perturbation rectangulaire, avec un rapport hauteur sur largeur plus grand que 1.

L'idée de la perturbation en forme de vitrail provient des trois remarques précédentes. Nous avons obtenu avec celle que nous utilisons, deux modes guidés.

Le maillage utilisé

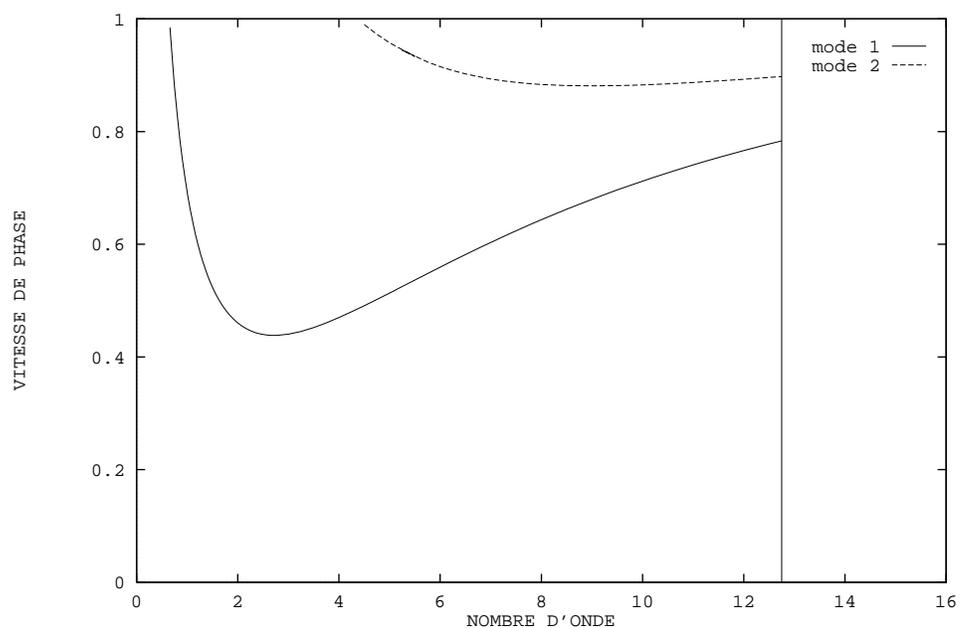
Il est représenté sur la figure(9.30), et comporte 588 sommets et 1057 triangles. Il est raffiné près de l'interface Σ , où il y a 36 points de discrétisation.

FIG. 9.30 - *Maillage de la perturbation*

9.3.2 Courbes de dispersion

Nous donnons directement ces courbes, notre objectif étant cette fois-ci non plus la vérification et la validation de la méthode, mais son utilisation directe pour illustrer la relation de dispersion des modes.

Nous constatons que la première courbe, après avoir atteint un minimum, remonte: la vitesse des modes tend à se rapprocher de celle de Rayleigh à haute fréquence. Du point de vue théorique, il reste à déterminer si la vitesse de Rayleigh est vraiment la vitesse limite, et si les modes vont éventuellement disparaître à très haute fréquence.

FIG. 9.31 - COURBES DE DISPERSION DES MODES / $\tau = 0.25$

Le problème des seuils, et en particulier de l'existence à basse fréquence du premier mode, est encore ouvert.

9.3.3 Allure des modes guidés

Nous représentons les deux modes obtenus pour $\beta = 10$ et $\tau = 0.25$.

1^{er} mode

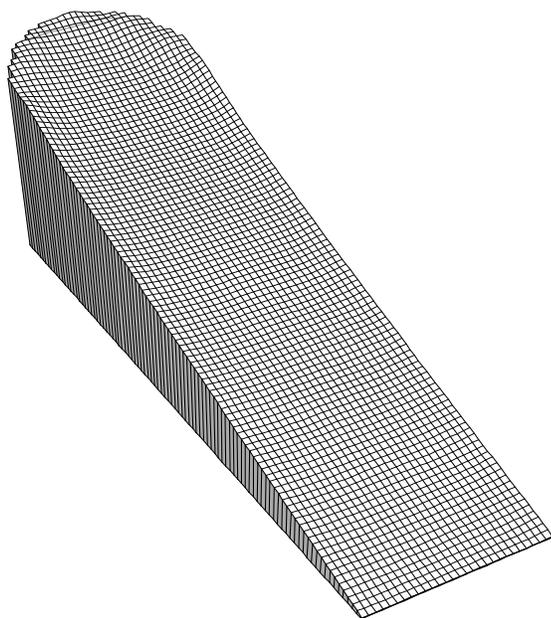


FIG. 9.32 - *NORME DU 1^{er} MODE* / $\beta = 10$ / $\omega = 2.099$ / $\tau = 0.25$

La norme du premier mode, (figure (9.32)), révèle que l'énergie est très concentrée au sommet de la perturbation.

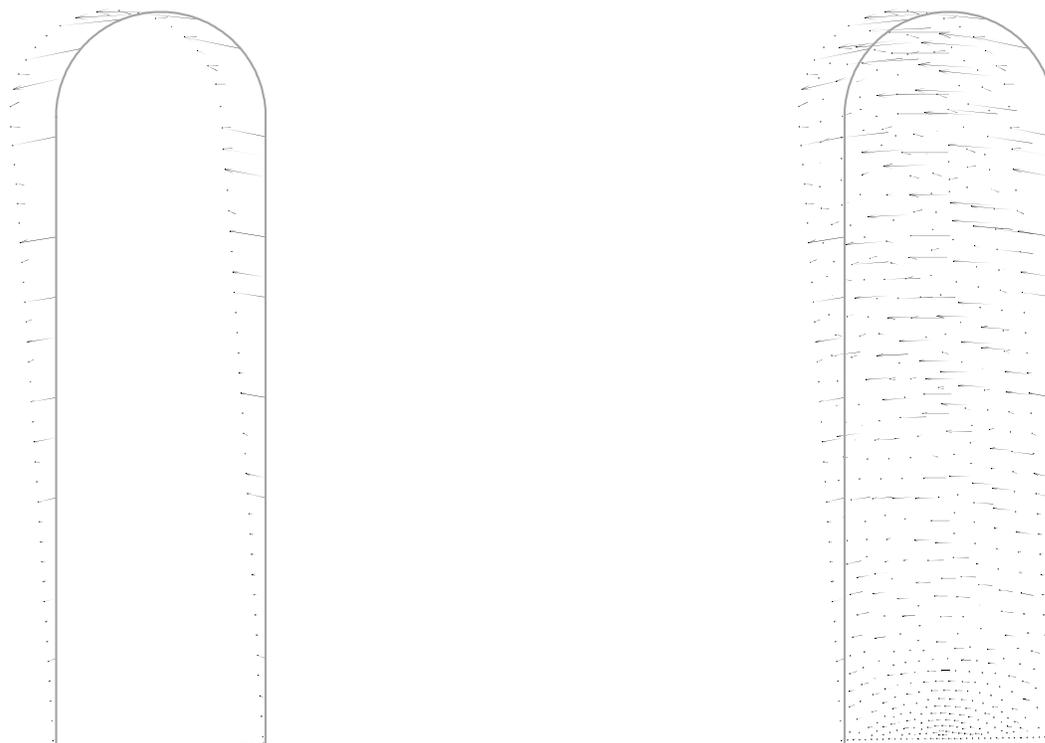


FIG. 9.33 - COMPOSANTES TRANSVERSALES DU 1^{er} MODE / $\beta = 10$ / $\omega = 2.099$ / $\tau = 0.25$

Dans la figure (9.33), le dessin de gauche représente la déformation transversale uniquement du bord du vitrail, et le dessin de droite, cette déformation pour la totalité du même vitrail.

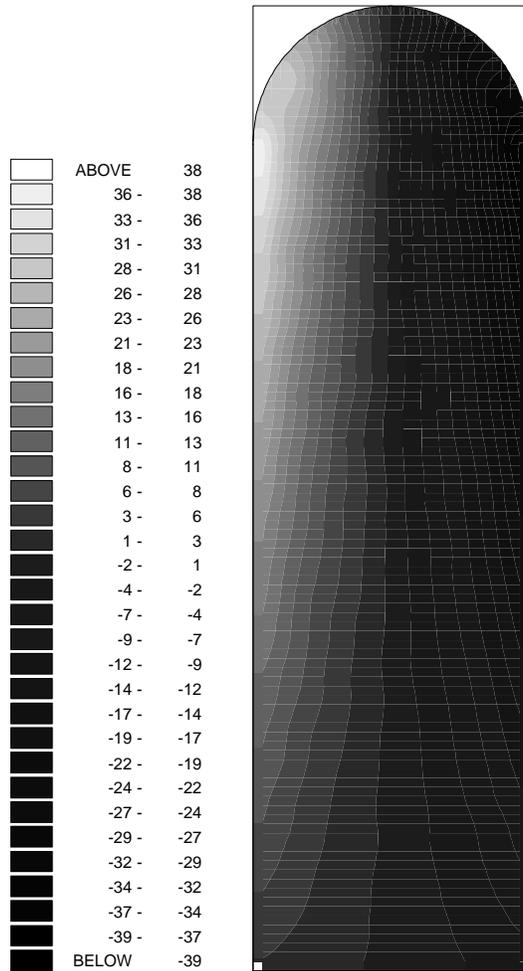


FIG. 9.34 - *COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 1^{er} MODE / $\beta = 10$ / $\omega = 2.099$ / $\tau = 0.25$*

Dans la figure (9.34), nous donnons une représentation 2D de la composante longitudinale du premier mode (ce choix de représentation donne un résultat plus lisible qu'une vue 3D). L'antisymétrie de la composante longitudinale par rapport à l'axe de symétrie du vitrail est apparente.

2^{ème} mode

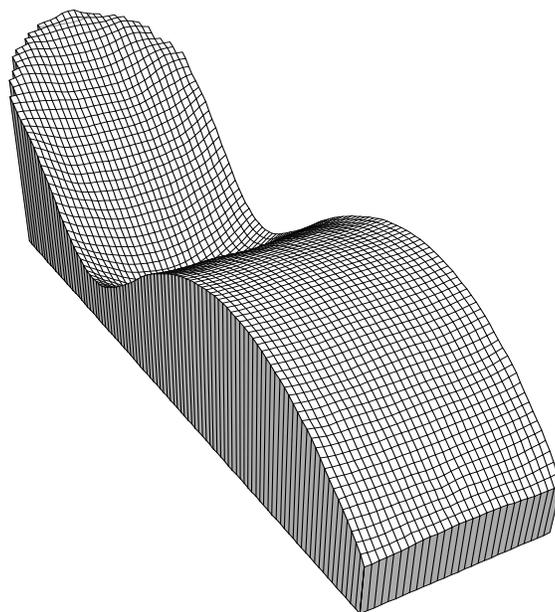


FIG. 9.35 - *NORME DU 2^{ème} MODE* / $\beta = 10$ / $\omega = 2.603$ / $\tau = 0.25$

La norme du deuxième mode, (figure (9.35)), présente une oscillation caractéristique du mode, et montre que l'énergie de celui-ci est moins concentrée que pour le premier.

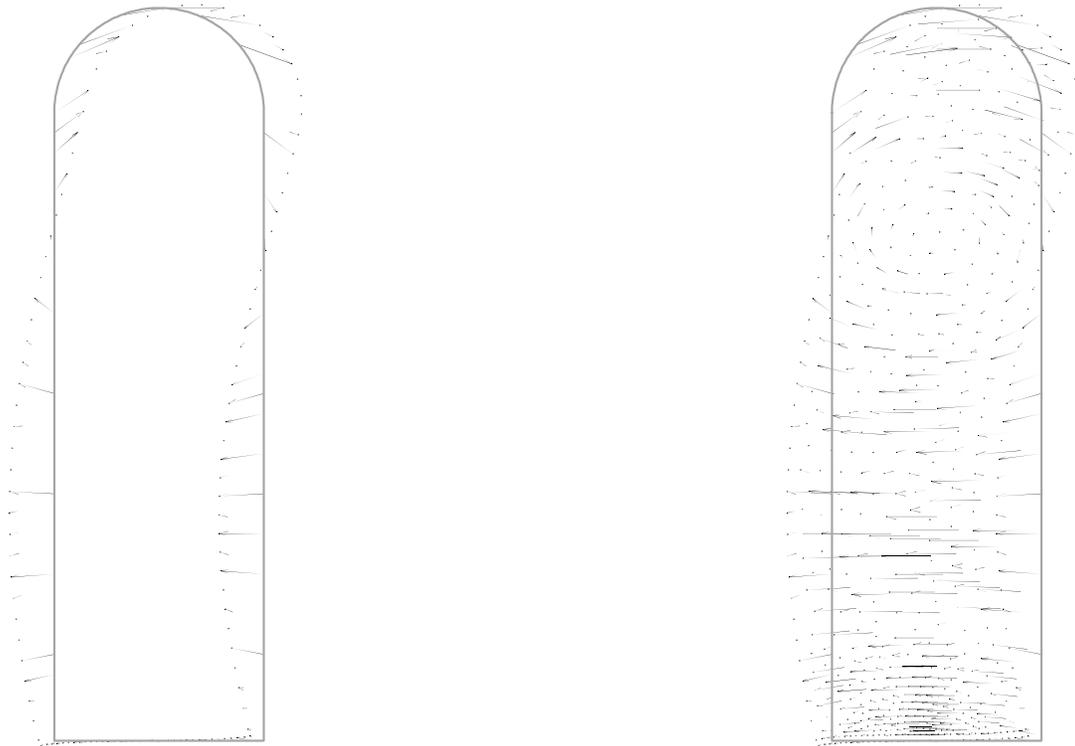


FIG. 9.36 - *COMPOSANTES TRANSVERSALES DU 2^{ème} MODE / $\beta = 10$ / $\omega = 2.603$ / $\tau = 0.25$*

Dans la figure (9.36), nous voyons à gauche la déformation transversale uniquement du bord du vitrail, et à droite, cette déformation pour la totalité du même vitrail. Nous constatons au niveau du changement de direction de la déformation, la présence d'un "tourbillon" similaire à ceux obtenus pour le triangle.

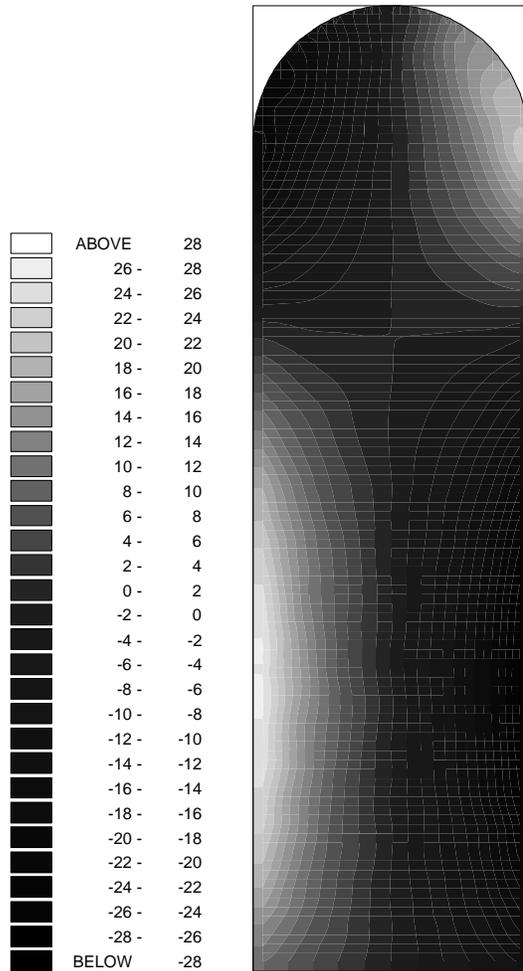


FIG. 9.37 - COMPOSANTE LONGITUDINALE DU 2^{ème} MODE / $\beta = 10$ /
 $\omega = 2.603$ / $\tau = 0.25$

Enfin, la figure (9.37), représentant la composante longitudinale du mode, montre bien l'antisymétrie de la déformation dans la direction de propagation.

Conclusion

Nous avons présenté une méthode numérique pour l'étude de guides topographiques. Bien que lourde à mettre complètement en oeuvre, elle se révèle efficace et performante après validation des codes.

Elle sera utile pour permettre d'établir des résultats théoriques d'existence, et donc continuer l'étude mathématique de ce problème.

Annexe A

Détail du calcul des intégrales

$J(p, n)$, $I(p, n)$, $I'(p, n)$ et $K(p, n)$:

A.1 Calcul de $J(p, n)$

Nous avons à calculer:

$$\begin{cases} J(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{P(k)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \text{pour } n \in \{0; \dots; 5\} \text{ et } p \in \{0; \dots; N-1\} \end{cases}$$

où:

$$(A.1) \quad \begin{cases} P(k) = (k - iB)(k + iB) \\ [k - (a + ib)][k - (a - ib)] \\ [k - (-a + ib)][k - (-a - ib)] \end{cases}$$

Soit la fonction complexe:

$$f(p, n)(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izph) \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

Nous allons distinguer deux cas: p strictement positif, et p nul, le traitement général pour $p > 0$ ne pouvant s'appliquer comme nous le verrons à $p = 0$. Enfin pour $p = 0$, nous appliquerons un traitement spécifique pour chacun des cas suivants:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad n \text{ impair} \\ \bullet \quad n = 0 \\ \bullet \quad n = 2 \text{ ou } 4 \end{array} \right.$$

A.1.1 Cas où $p > 0$

Le calcul de $J(p, n)$ ne présente aucune difficulté particulière, et pour l'effectuer, nous utilisons le parcours Γ dans le plan complexe décrit par la figure (A.1): il est parcouru dans le sens direct.

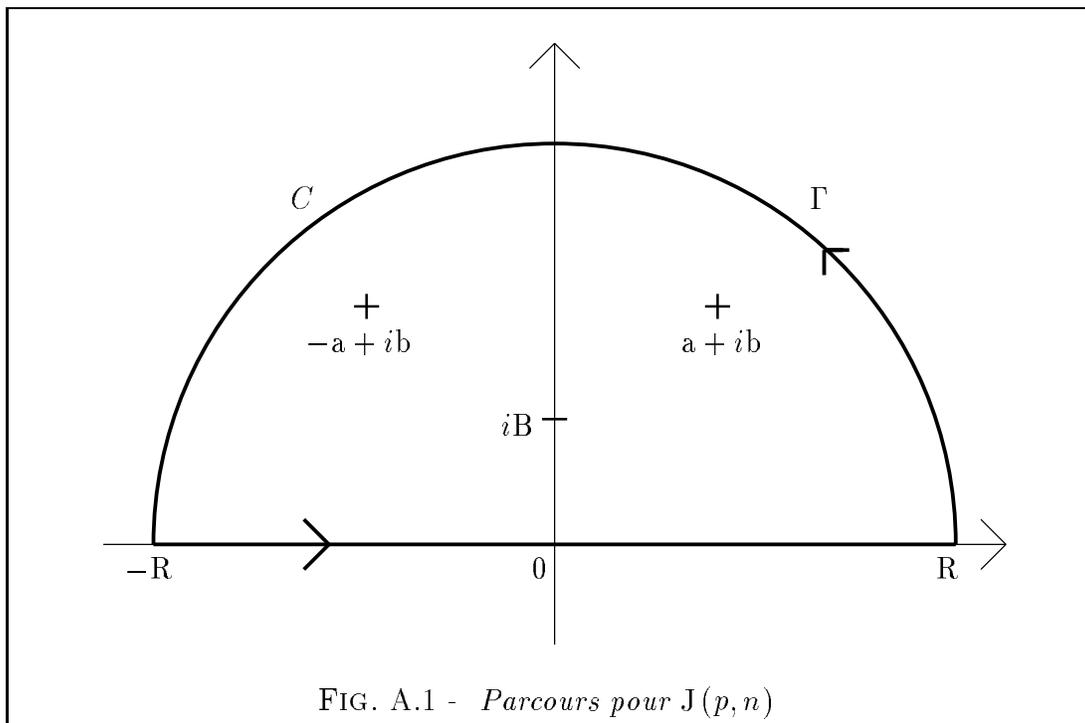


FIG. A.1 - Parcours pour $J(p, n)$

C désigne le demi-cercle et $\Gamma = [-R; R] \cup C$.

Sur le demi-cercle C , on a $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient:

$$\left| \int_C f(p, n)(z) dz \right| \simeq \frac{R^{n+1}}{R^8} \int_0^\pi [2 \exp(-phR \sin\theta) + \exp(-(p+1)hR \sin\theta) + \exp(-(p-1)hR \sin\theta)] d\theta$$

Or, comme $p \geq 1$, $h > 0$, $n < 6$ et $\sin\theta \geq 0$, on a

$$| 2 \exp(-phR \sin\theta) + \exp(-(p+1)hR \sin\theta) + \exp(-(p-1)hR \sin\theta) | \leq 4$$

et par conséquent:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_C f(p, n)(z) dz = 0$$

(c'est ce résultat qui n'est plus vrai pour $p = 0$, à cause du terme $\exp(-(p-1)hR \sin\theta)$)
 et donc

$$J(p, n) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(p, n)(z) dz$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Alors pour } p > 0 \text{ et } n \in \{0; \dots; 5\}, \\ J(p, n) = 2i\pi [\text{Rés}(f(p, n); iB) + \text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) + \text{Rés}(f(p, n); (-a + ib))] \end{array} \right.$$

Calcul des résidus

Les trois pôles concernés sont simples, ce qui donne les calculs suivants:

- $\text{Rés}(f(p, n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) f(p, n)(z)]$

on a en particulier:

$$\sin^2\left(\frac{ihB}{2}\right) = -\text{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)$$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p > 0 \text{ et } n \in \{0; \dots; 5\}, \\ \text{Rés}(f(p, n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-Bph) \text{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)}{2iB^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a + ib)} [(z - (a + ib)) f(p, n)(z)]$

on a en particulier:

$$\sin^2\left(\frac{h(a + ib)}{2}\right) = \frac{1}{2} [1 + \text{sh}(hb) \exp(iha) - \cos(ha) \exp(hb)]$$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p > 0 \text{ et } n \in \{0; \dots; 5\}, \\ \text{avec } EX_1 = [1 + \operatorname{sh}(hb) \exp(iha) - \cos(ha) \exp(hb)] \\ \text{Rés}(f(p, n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(ipha) \exp(-phb) EX_1}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{Rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a + ib)} [(z - (-a + ib)) f(p, n)(z)]$

on a en particulier:

$$\sin^2\left(\frac{h(-a + ib)}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sh}(hb) \exp(-iha) - \cos(ha) \exp(hb)]$$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p > 0 \text{ et } n \in \{0; \dots; 5\}, \\ \text{avec } EX_2 = [1 + \operatorname{sh}(hb) \exp(-iha) - \cos(ha) \exp(hb)] \\ \text{Rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-ipha) \exp(-phb) EX_2}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2]} \end{array} \right.$$

A.1.2 Cas où $p = 0$

On a alors:

$$f(0, n)(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

La difficulté qui apparaît alors, vient du fait que l'on n'a plus de terme $\exp(ikph)$ dans l'expression de $J(0, n)$ et qu'alors on ne peut plus faire la majoration précédente pour l'intégrale sur le demi-cercle C . Pour la contourner, on décompose

$\sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$ sous la forme:

$$\sin^2\left(\frac{zh}{2}\right) = -\frac{1}{4}[-2 + \exp(izh) + \exp(-izh)]$$

et on écrit $f(0, n)(z)$ sous la forme:

$$f(0, n)(z) = u(n)(z) - v(n)(z) - w(n)(z)$$

où:

$$\begin{cases} u(n)(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \\ v(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izh) \\ w(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(-izh) \end{cases}$$

Bien sûr, nous allons utiliser maintenant des contours différents pour intégrer les fonctions $u(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$.

Sous-cas i) n impair

n impair $\Rightarrow f(0, n)(z)$ impaire.

$$\begin{cases} \text{Alors pour } p = 0 \text{ et } n \in \{1; 3; 5\}, \\ J(p, n) = 0 \end{cases}$$

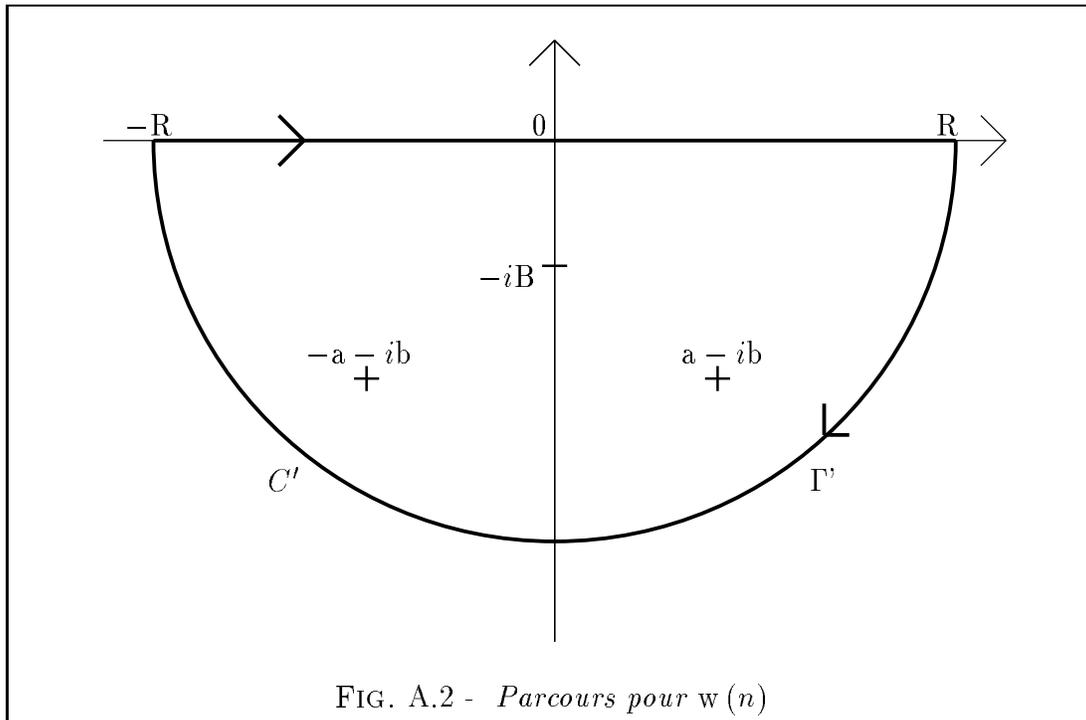
Sous-cas ii) n pair et $n = 2$ ou 4

Nous notons que dans ce cas, 0 n'est pas un pôle des fonctions $u(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$. C'est ce qui distingue ce cas du cas $n = 0$, pour lequel 0 sera un pôle double de ces fonctions.

Nous pouvons mettre $J(0, n)$ sous la forme suivante:

$$(A.2) \quad J(0, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(n)(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} v(n)(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} w(n)(k) dk$$

D'abord, nous nous intéressons aux trois intégrales séparément. Le calcul se fait en prenant pour les fonctions $u(n)(z)$ et $v(n)(z)$, le parcours Γ précédent, et pour la fonction $w(n)(z)$, le parcours Γ' décrit par la figure (A.2).



C' désigne le demi-cercle et $\Gamma' = [-R; R] \cup C'$.

On a alors les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u(n)(z) dz &= \int_{[-R; R]} u(n)(z) dz + \int_{C'} u(n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{Rés}(u(n); iB) + \text{Rés}(u(n); (a + ib)) + \text{Rés}(u(n); (-a + ib))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} v(n)(z) dz &= \int_{[-R; R]} v(n)(z) dz + \int_{C'} v(n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} w(n)(z) dz &= \int_{[-R;R]} w(n)(z) dz + \int_{C'} w(n)(z) dz \\ &= -2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \end{aligned}$$

Sur le demi-cercle C' , on a $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$.

Sur C , on a alors, (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 5$:

$$\left| \int_C u(n)(z) dz \right| \leq M \frac{R^{n+1}}{R^8} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et comme $h > 0$ et $\sin\theta > 0$,

$$\left| \int_C v(n)(z) dz \right| \leq M \frac{R^{n+1}}{R^8} \left| \int_0^\pi \exp(-hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

Sur C' , on a comme $h > 0$ et $\sin\theta < 0$

$$\left| \int_{C'} w(n)(z) dz \right| \leq M \frac{R^{n+1}}{R^8} \left| \int_{-\pi}^0 \exp(hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

Donc on obtient le résultat (A.2) sous la forme:

$$J(0, n) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} u(n)(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} v(n)(z) dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} w(n)(z) dz$$

Alors pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4\}$,

$$\begin{aligned} J(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(u(n); iB) + \text{Rés}(u(n); (a + ib)) + \text{Rés}(u(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \end{aligned}$$

Calcul des résidus de $u(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$ pour ce cas

Pour $u(n)(z)$:

- Rés($u(n); iB$) = $\lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) u(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(u(n); iB) = \frac{(iB)^n}{-4 i B^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- Rés($u(n); (a + ib)$) = $\lim_{z \rightarrow (a+ib)} [(z - (a + ib)) u(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(u(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]} \end{array} \right.$$

- Rés($u(n); (-a + ib)$) = $\lim_{z \rightarrow (-a+ib)} [(z - (-a + ib)) u(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(u(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

Pour $v(n)(z)$:

Les résultats se déduisent facilement de ceux obtenus pour $u(n)(z)$.

- $\text{Rés}(v(n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) v(n)(z)]$

on a

$$\text{Rés}(v(n); iB) = \frac{1}{2} \exp(-hB) \text{Rés}(u(n); iB)$$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(v(n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-hB)}{-8 i B^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{Rés}(v(n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a + ib)} [(z - (a + ib)) v(n)(z)]$

on a

$$\text{Rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{1}{2} \exp(iba) \exp(-hb) \text{Rés}(u(n); (a + ib))$$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iba) \exp(-hb)}{32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{Rés}(v(n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a + ib)} [(z - (-a + ib)) v(n)(z)]$

on a

$$\text{Rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{1}{2} \exp(-iba) \exp(-hb) \text{Rés}(u(n); (-a + ib))$$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

Pour $w(n)(z)$:

- $\text{Rés}(w(n); -iB) = \lim_{z \rightarrow -iB} [(z + iB) v(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(w(n); -iB) = \frac{(-iB)^n \exp(-hB)}{8 i B^3 [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{Rés}(w(n); (-a - ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a - ib)} [(z - (-a - ib)) v(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(w(n); (-a - ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{Rés}(w(n); (a - ib)) = \lim_{z \rightarrow (a - ib)} [(z - (a - ib)) v(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4\}, \\ \text{Rés}(w(n); (a - ib)) = \frac{(a - ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a - ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

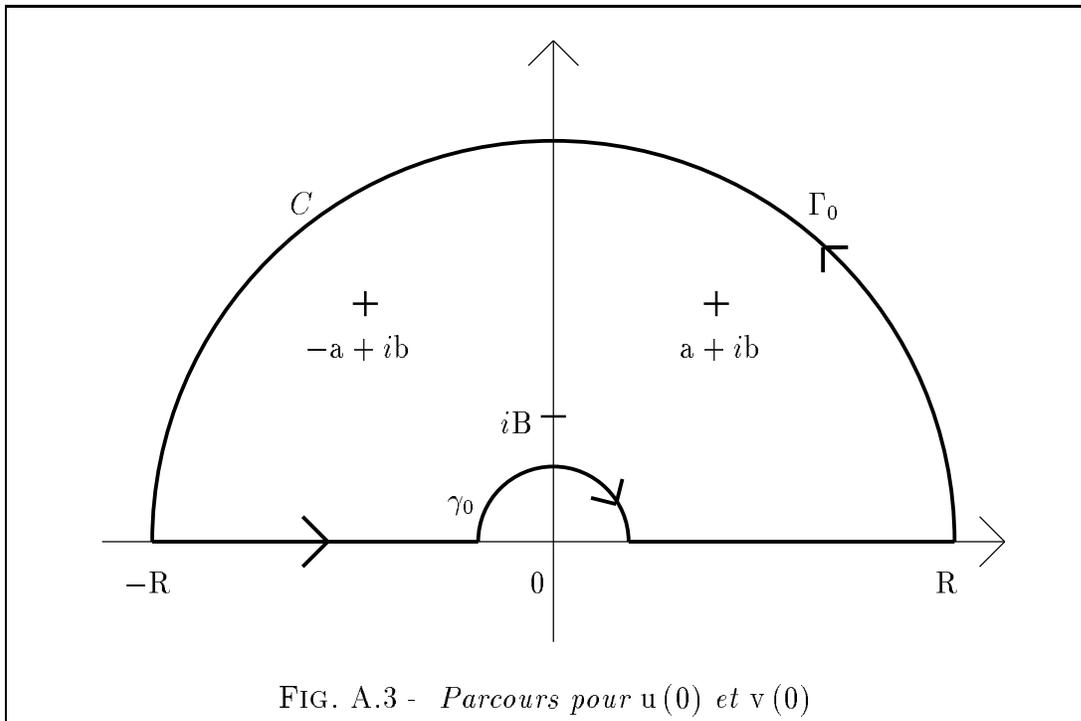
Sous-cas iii) n pair et $n = 0$

On a alors

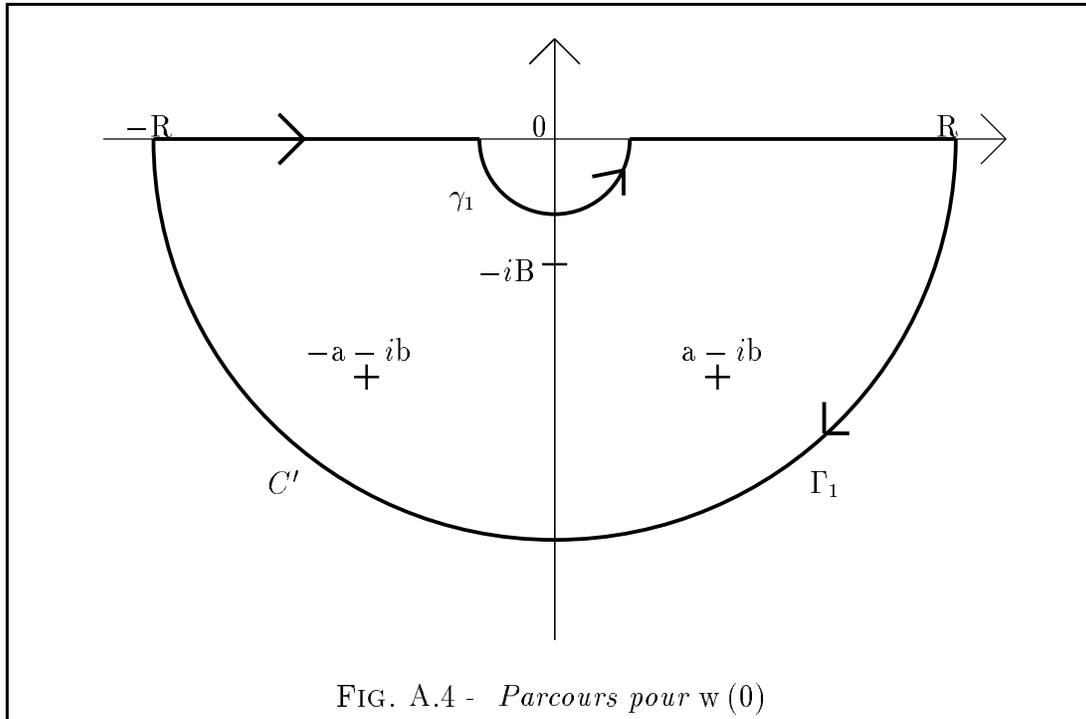
$$f(0,0)(z) = \frac{1}{P(z)} z^2 \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

0 n'est pas un pôle de $f(0,0)$, mais est un pôle double des fonctions $u(0)(k)$, $v(0)(k)$ et $w(0)(k)$, par lesquelles nous sommes obligés de passer pour effectuer ce calcul.

Le parcours Γ_0 utilisé pour les fonctions $u(0)(z)$ et $v(0)(z)$ est décrit par la figure (A.3). Pour intégrer sur \mathbb{R} la fonction $w(0)(z)$, le parcours Γ_1 utilisé est décrit par la figure (A.4).



γ_0 désigne le petit demi-cercle: soit ε son rayon.

FIG. A.4 - Parcours pour $w(0)$

γ_1 désigne le petit demi-cercle: soit ε son rayon.

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_0} u(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} u(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} u(0)(z) dz \\
 &\quad + \int_C u(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} u(0)(z) dz \\
 &= 2i\pi [\text{Rés}(u(0); iB) + \text{Rés}(u(0); (a + ib)) + \text{Rés}(u(0); (-a + ib))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_0} v(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} v(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} v(0)(z) dz \\
 &\quad + \int_C v(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} v(0)(z) dz \\
 &= 2i\pi [\text{Rés}(v(0); iB) + \text{Rés}(v(0); (a + ib)) + \text{Rés}(v(0); (-a + ib))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} w(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz \\ &+ \int_{C'} w(0)(z) dz + \int_{\gamma_1} w(0)(z) dz \\ &= -2i\pi [\text{Rés}(w(0); -iB) + \text{Rés}(w(0); (a - ib)) + \text{Rés}(w(0); (-a - ib))] \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} w(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz \\ &+ \int_{C'} w(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} w(0)(z) dz + 2i\pi \text{Rés}(w(0); 0) \\ &= -2i\pi [\text{Rés}(w(0); -iB) + \text{Rés}(w(0); (a - ib)) + \text{Rés}(w(0); (-a - ib))] \end{aligned}$$

Comme $f(0,0)(z)$ est analytique sur \mathbb{C} , sauf sur les six pôles de $P(z)$, on a

$$J(0, 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \begin{bmatrix} \int_{]-R; -\varepsilon[} u(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} u(0)(z) dz \\ - \int_{]-R; -\varepsilon[} v(0)(z) dz - \int_{] \varepsilon; R[} v(0)(z) dz \\ - \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz - \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz \end{bmatrix}$$

De plus, en procédant exactement comme au cas $n \neq 0$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_C u(0)(z) dz \rightarrow 0 \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_C v(0)(z) dz \rightarrow 0 \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C'} w(0)(z) dz \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
J(0, 0) &= 2i\pi [\text{Rés}(u(0); iB) + \text{Rés}(u(0); (a + ib)) + \text{Rés}(u(0); (-a + ib))] \\
&\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(0); iB) + \text{Rés}(v(0); (a + ib)) + \text{Rés}(v(0); (-a + ib))] \\
&\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(0); -iB) + \text{Rés}(w(0); (a - ib)) + \text{Rés}(w(0); (-a - ib))] \\
&\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} u(0)(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} v(0)(z) dz \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} w(0)(z) dz + 2i\pi \text{Rés}(w(0); 0)
\end{aligned}$$

Il est à noter, pour calculer $\text{Rés}(w(0); 0)$, que 0 est un pôle double de la fonction $w(0)(z)$.

Comme $f(0, 0)(z) = u(0)(z) - v(0)(z) - w(0)(z)$ et $f(0, 0)(z)$ est analytique au point 0, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} f(0, 0)(z) = 0$$

Alors pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned}
J(p, n) &= 2i\pi [\text{Rés}(u(n); iB) + \text{Rés}(u(n); (a + ib)) + \text{Rés}(u(n); (-a + ib))] \\
&\quad - 2i\pi [\text{Rés}(v(n); iB) + \text{Rés}(v(n); (a + ib)) + \text{Rés}(v(n); (-a + ib))] \\
&\quad + 2i\pi [\text{Rés}(w(n); -iB) + \text{Rés}(w(n); (a - ib)) + \text{Rés}(w(n); (-a - ib))] \\
&\quad + 2i\pi \text{Rés}(w(0); 0)
\end{aligned}$$

Calcul des résidus correspondant à ce cas

Les expressions de tous les résidus de $u(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$, calculées pour le cas $n \neq 0$, sont encore valables quand $n = 0$.

Nous avons donc à calculer seulement $\text{Rés}(w(0); 0)$, en tenant compte que 0 est un pôle double de la fonction $w(0)(z)$.

$$\bullet \text{ Rés}(w(n); 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dz} [z^2 w(n)(z)] \right)$$

le résultat du calcul donnant:

$$\left| \text{Rés}(w(0); 0) = \frac{-ih}{4 B^2 (a + ib)^2 (a - ib)^2} \right.$$

A.2 Calcul de $I(p, n)$ et $I'(p, n)$

Nous avons à calculer

$$\left\{ \begin{array}{l} I(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(k)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \text{pour } n \in \{0; \dots; 6\} \text{ et } p \in \{0; \dots; N-1\} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} I'(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(k)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \text{pour } n \in \{0; \dots; 6\} \text{ et } p \in \{0; \dots; N-1\} \end{array} \right.$$

Les calculs pour ces deux intégrales étant identiques, nous ne détaillerons que celui de $I(p, n)$. Pour obtenir ceux de $I'(p, n)$, il suffira de remplacer dans les résultats A par A', définis plus haut.

Nous ne pourrons pas utiliser les contours précédents, suite à des problèmes d'analyticité dûs à la présence d'une racine complexe au dénominateur des fonctions à intégrer.

En effet, la nouveauté par rapport au calcul de $J(p, n)$, ce sont les fonctions $\frac{1}{K_S}$

et $\frac{1}{K_P}$, qui sont intégrables sur \mathbb{R} . En effet, nous avons pour ces fonctions les expressions suivantes:

$$K_S = \sqrt{k^2 + A^2} \quad \text{et} \quad K_P = \sqrt{k^2 + A'^2}$$

L'expression (A.1) de $P(k)$ est, elle, toujours valable.

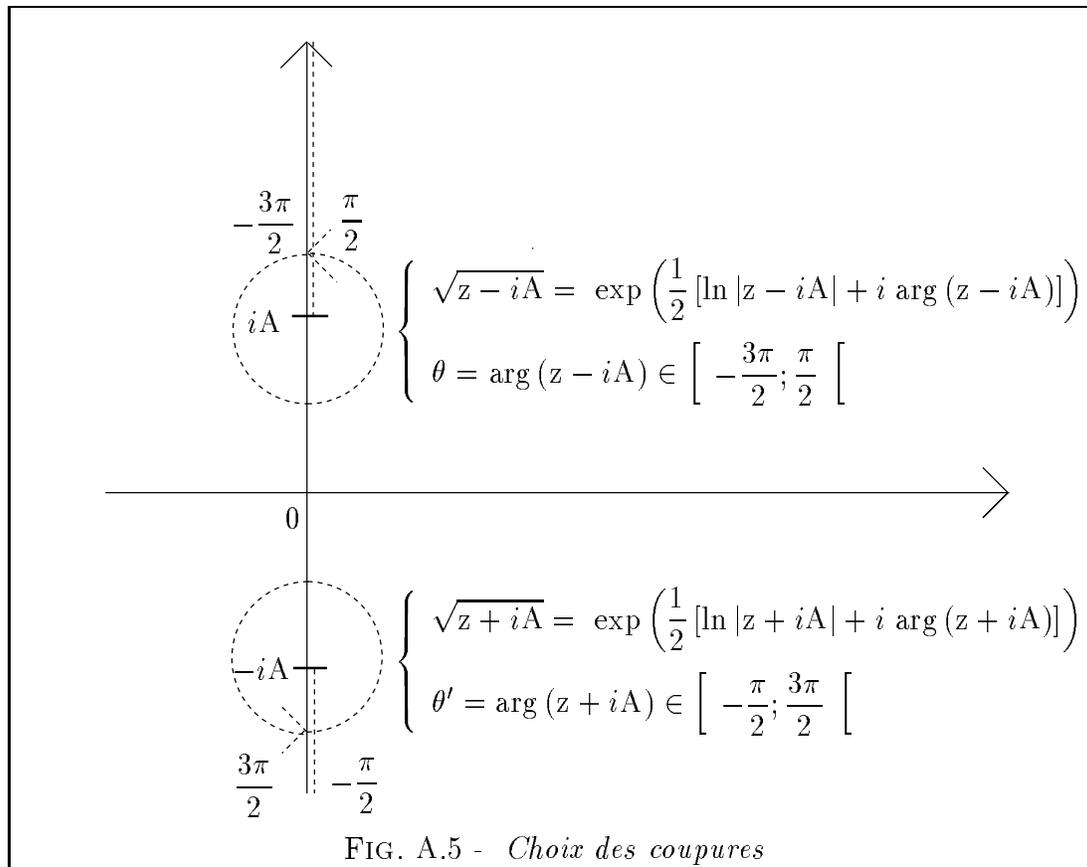
Nous notons maintenant par $f(p, n)(z)$ la fonction complexe:

$$f(p, n)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izph) \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

Dans \mathbb{C} , la fonction $\frac{1}{z^2 + A^2}$ a deux pôles: iA et $-iA$, et on pose

$$\sqrt{z^2 + A^2} = \sqrt{z + iA} \sqrt{z - iA}$$

On voit donc apparaître deux logarithmes complexes au dénominateur de la fonction $f(p, n)(z)$, et par conséquent nous avons à fixer deux coupures dans le plan complexe, au travers desquelles la fonction $f(p, n)(z)$ ne sera pas analytique: nous les choisissons verticales:



Remarque 1: $\forall z, \theta + \theta' \in]-\pi; \pi[\Rightarrow \sqrt{z^2 + A^2}$ est bien définie. Ce choix permet d'avoir $\sqrt{z^2 + A^2} = \sqrt{k^2 + A^2}$ quand $z \in \mathbb{R}$.

Remarque 2: Nous allons distinguer les mêmes cas que lors du calcul de $J(p, n)$, et pour les mêmes raisons.

A.2.1 Cas où $p > 0$

Nous intégrons la fonction $f(p, n)(z)$ sur le parcours Γ (pris dans le sens direct), décrit par la figure (A.6):

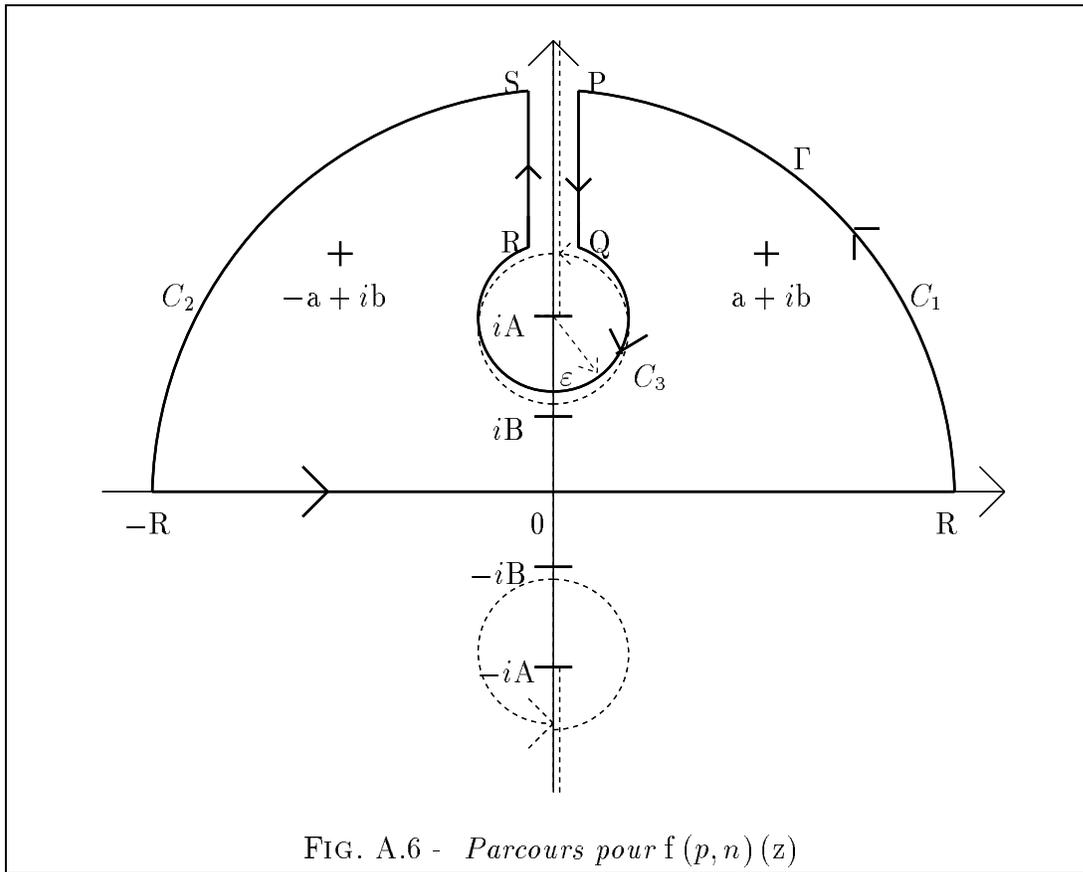


FIG. A.6 - Parcours pour $f(p, n)(z)$

Nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} f(p, n)(z) dz &= \int_{[-R; R]} f(p, n)(z) dz + \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(p, n)(z) dz \\ &+ \int_{[PQ]} f(p, n)(z) dz + \int_{[RS]} f(p, n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{rés}(f(p, n); iB) + \text{rés}(f(p, n); (a + ib))] \\ &+ \text{rés}(f(p, n); (-a + ib)) \end{aligned} \right.$$

et

$$I(p, n) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(p, n)(z) dz$$

Calcul sur les morceaux circulaires

Sur C_1 et C_2 , on a $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient:

$$\left| \int_{C_1} f(p, n)(z) dz \right| \simeq \frac{R^{n+1}}{R^9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \exp(-phR \sin\theta) + \exp(-(p+1)hR \sin\theta) + \exp(-(p-1)hR \sin\theta)] d\theta$$

et

$$\left| \int_{C_2} f(p, n)(z) dz \right| \simeq \frac{R^{n+1}}{R^9} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [2 \exp(-phR \sin\theta) + \exp(-(p+1)hR \sin\theta) + \exp(-(p-1)hR \sin\theta)] d\theta$$

Or, comme $p \geq 1$, $h > 0$, $n \leq 6$ et $\sin\theta \geq 0$, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} f(p, n)(z) dz = 0 \quad , i \in \{1; 2\}$$

Ce sont, comme pour $J(p, n)$, ces calculs que nous ne pouvons faire pour $p = 0$.

D'autre part, sur C_3 , $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, on a alors:

$$\left| \int_{C_3} f(p, n)(z) dz \right| \leq \left| \int_{C_3} \frac{f_1(p, n)(z) f_2(p, n)(z)}{f_3(p, n)(z) f_4(p, n)(z) f_5(p, n)(z)} d\theta \right|$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(p, n)(z) = i\varepsilon \exp(i\theta) \sin^2 \left[\frac{h}{2} (\varepsilon \exp(i\theta) + iA) \right] \\ f_2(p, n)(z) = (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^n [\exp(ip h (\varepsilon \exp(i\theta) + iA))] \\ f_3(p, n)(z) = (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 + B^2] \\ f_4(p, n)(z) = \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta)} \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + 2iA} \\ f_5(p, n)(z) = [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a + ib)^2] [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a - ib)^2] \end{array} \right.$$

Il existe, dès que ε est assez petit, trois constantes réelles strictement positives notées m , M et M' , telles que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + 2iA} \right| \geq m \\ \left| (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 \right| \geq m \\ \left| [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 + B^2] \right| \geq m \\ \left| [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a + ib)^2] \right| \geq m \\ \left| [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a - ib)^2] \right| \geq m \\ \left| \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta)} \right| = \sqrt{\varepsilon} \\ |i\varepsilon \exp(i\theta)| = \varepsilon \\ \left| (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^n \right| \leq M \\ \left| [\exp(ip h (\varepsilon \exp(i\theta) + iA))] \right| \leq M \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sin^2 \left[\frac{h}{2} (\varepsilon \exp(i\theta) + iA) \right] \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \exp(-hA) \exp(-\varepsilon h \sin\theta) \exp(-i\varepsilon h \cos\theta) \\ + \exp(hA) \exp(\varepsilon h \sin\theta) \exp(i\varepsilon h \cos\theta) \end{array} \right| \\ \leq M \end{array} \right.$$

ce qui permet d'obtenir finalement

$$\left| \int_{C_3} f(p, n)(z) dz \right| \leq \frac{M' \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Calcul sur les segments [PQ] et [RS]

La difficulté ici provient de la coupure: il importe de savoir si le segment sur lequel on intègre, est à gauche ou à droite de celle-ci.

Sur les deux segments, on a $z = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $t \in \mathbb{R}$. La racine complexe s'écrit alors:

$$\sqrt{z^2 + A^2} = \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA| + \ln |z - iA| + i \arg(z + iA) + i \arg(z - iA)]\right)$$

Comme le segment [PQ] est situé à droite de la coupure et $t > A$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg(z + iA) = \frac{\pi}{2} \\ \arg(z - iA) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

alors:

$$\sqrt{z^2 + A^2} = i\sqrt{t^2 - A^2}$$

et en posant:

$$N(t) = [2 \exp(-pht) - \exp(-(p+1)ht) - \exp(-(p-1)ht)]$$

$$D(t) = (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

nous obtenons finalement pour le segment [PQ]:

$$\int_{[PQ]} f(p, n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \left[\frac{(it)^n N(t)}{4 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} D(t)} \right] dt$$

Comme le segment [RS] est situé à gauche de la coupure et $t > A$,

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{\pi}{2} \\ \arg(z - iA) = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

alors

$$\sqrt{z^2 + A^2} = -i\sqrt{t^2 - A^2}$$

et en gardant les notations $N(t)$ et $D(t)$ précédentes, nous obtenons finalement pour le segment [RS]:

$$\int_{[RS]} f(p, n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \left[\frac{(it)^n N(t)}{4 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} D(t)} \right] dt$$

Par conséquent, pour l'ensemble des deux segments, on a:

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} f(p, n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \left[\frac{(it)^n N(t)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} D(t)} \right] dt$$

Calcul des résidus

Nous allons nous aider des calculs effectués pour l'intégrale $J(p, n)$: en effet, la seule différence par rapport aux calculs précédents, est la présence au dénominateur de la fonction $f(p, n)(z)$, de la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$. Il va alors suffire de calculer la valeur de cette racine pour les trois pôles simples concernés pour déduire les différents résultats.

On note:

$$r(z) = \sqrt{z^2 + A^2}$$

- $\text{rés}(f(p, n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) f(p, n)(z)]$

comme:

$$r(iB) = \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|iB + iA| + \ln|iB - iA| + i \arg(iB + iA) + i \arg(iB - iA)]\right)$$

avec:

$$\exp\left(\frac{1}{2} [\ln|iB + iA| + \ln|iB - iA|]\right) = \sqrt{A^2 - B^2}$$

et d'après la figure (A.5):

$$\begin{cases} \arg(iB + iA) = \frac{\pi}{2} \\ \arg(iB - iA) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

on a finalement:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p > 0 \text{ et } n \in \{0; \dots; 6\}, \\ \text{rés}(f(p, n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-Bph) \operatorname{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)}{2 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ rés}(f(p, n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a+ib)} [(z - (a + ib)) f(p, n)(z)]$$

en notant:

$$\begin{cases} \theta = \arg [(a + ib) + iA] \\ \theta' = \arg [(a + ib) - iA] \end{cases}$$

et comme:

$$\exp\left(\frac{1}{2} [\ln |(a + ib) + iA| + \ln |(a + ib) - iA|]\right) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

on a:

$$r(a + ib) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}i(\theta + \theta')\right)$$

la détermination de θ et θ' est illustrée par les figures (A.7) et (A.8):

$$\begin{cases} \theta = \arcsin\left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}}\right) \\ \theta' = \arcsin\left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}}\right) \end{cases}$$

le résultat global est alors:

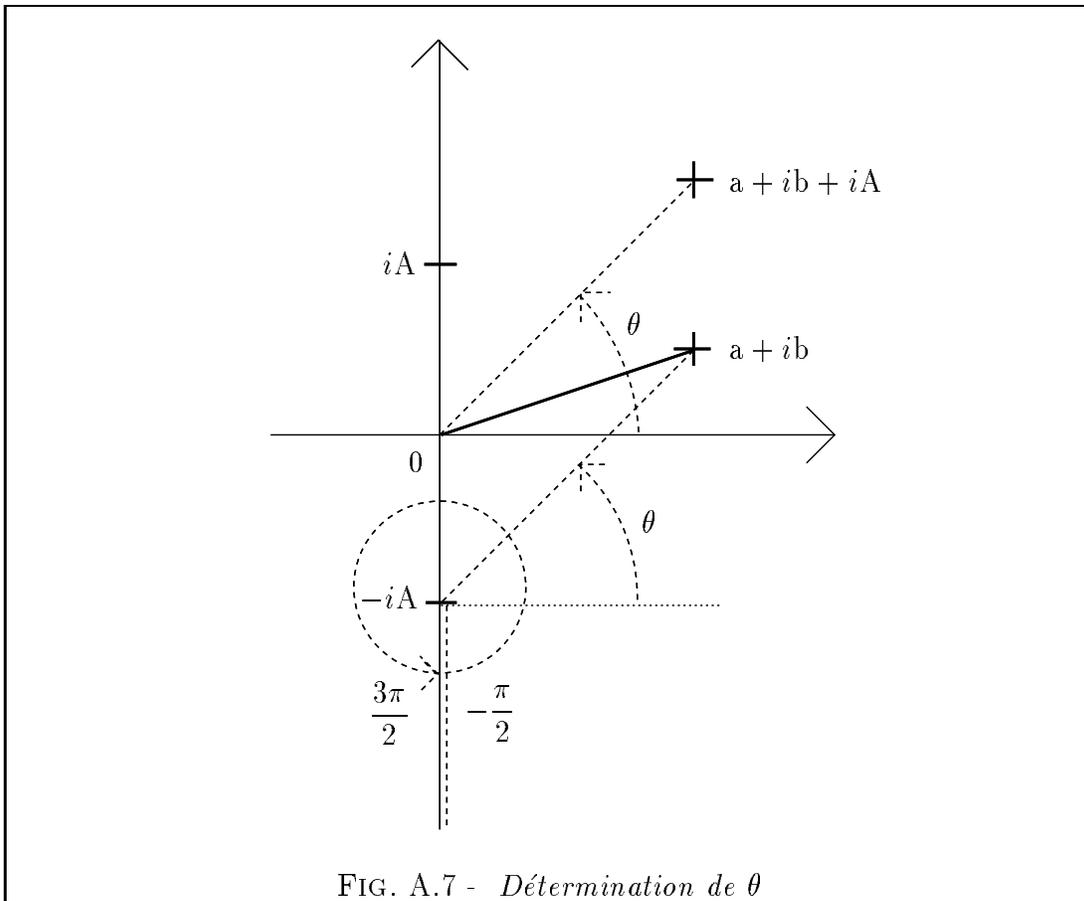
pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

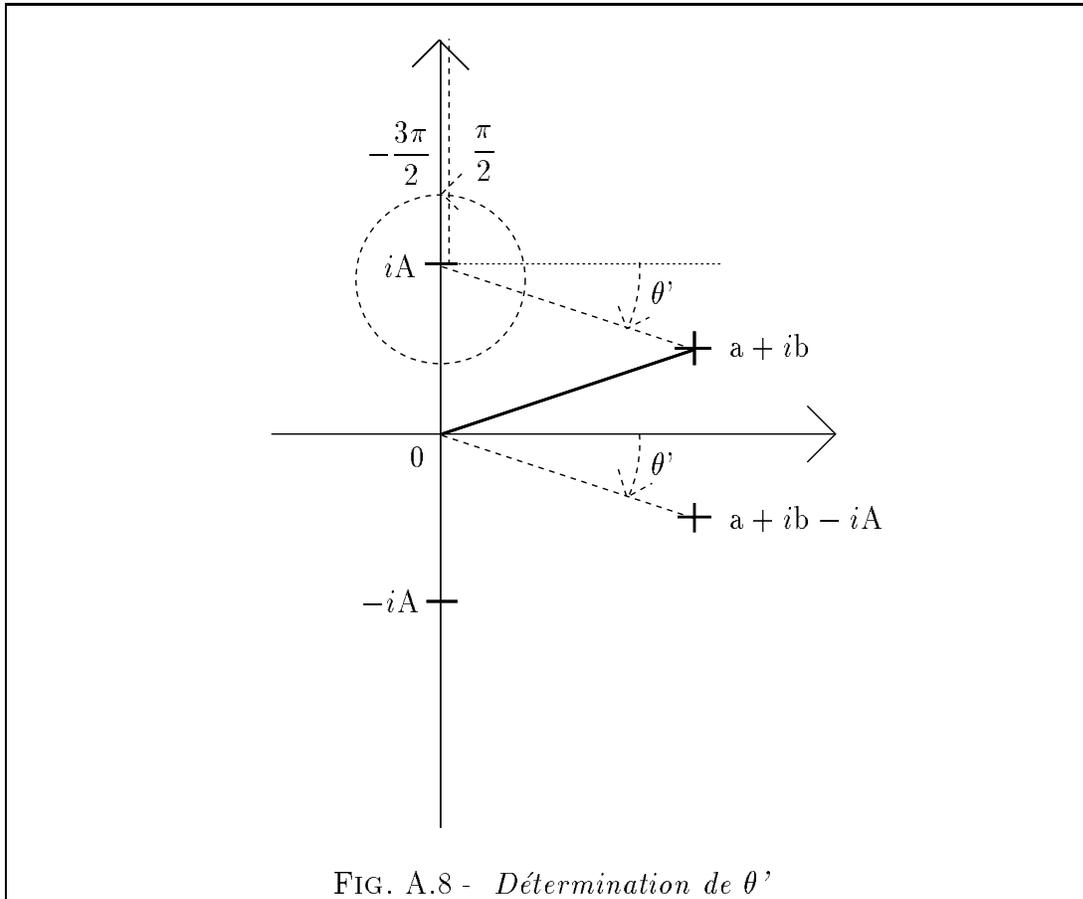
avec $EX_1 = [1 + \text{sh}(hb) \exp(iba) - \cos(ha) \exp(hb)]$

avec $EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

avec $EX_4 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$

$\text{rés}(f(p, n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(ipa) \exp(-phb) EX_1}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_4}$





• $\text{rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a + ib)} [(z - (-a + ib)) f(p, n)(z)]$

en notant:

$$\begin{cases} \theta = \arg [(-a + ib) + iA] \\ \theta' = \arg [(-a + ib) - iA] \end{cases}$$

et comme:

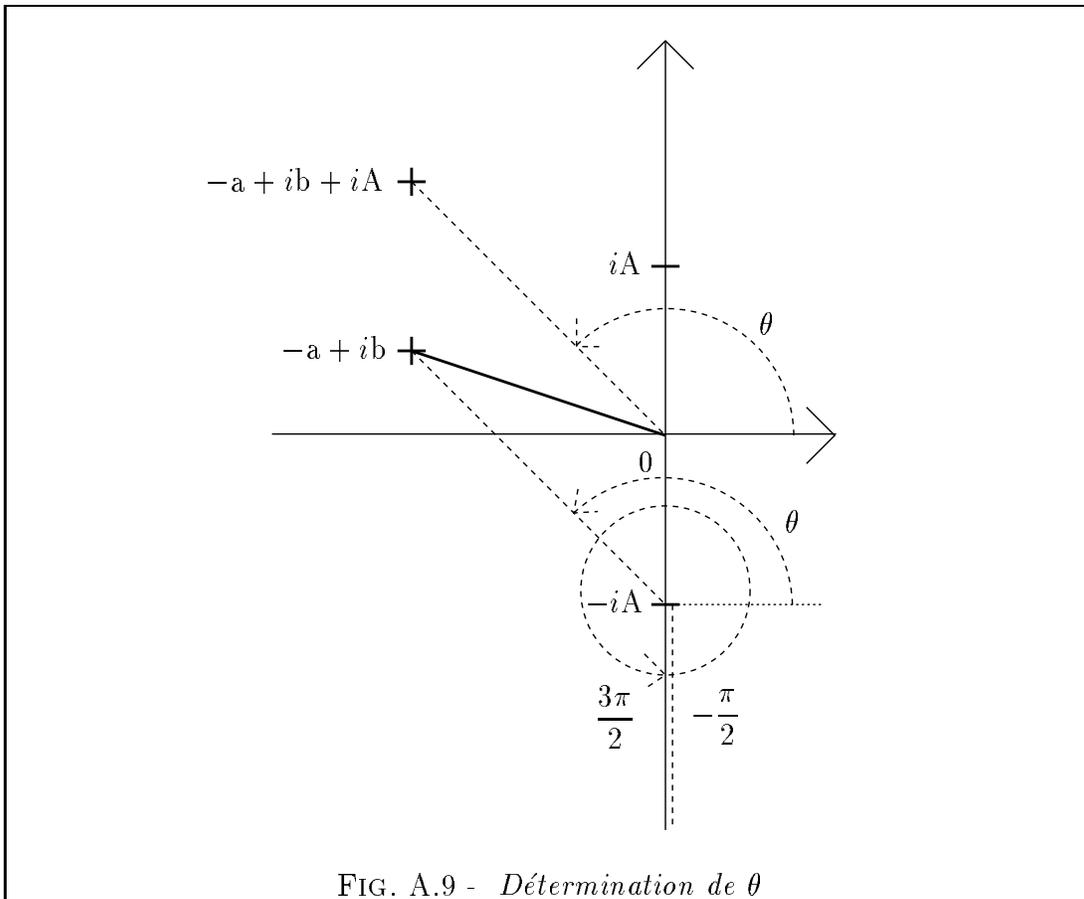
$$\exp\left(\frac{1}{2} [\ln |(-a + ib) + iA| + \ln |(-a + ib) - iA|]\right) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

on a:

$$r(-a + ib) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} i(\theta + \theta')\right)$$

la détermination de θ et θ' est illustrée par les figures (A.9) et (A.10):

$$\begin{cases} \theta = \pi - \arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \\ \theta' = -\pi - \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \end{cases}$$



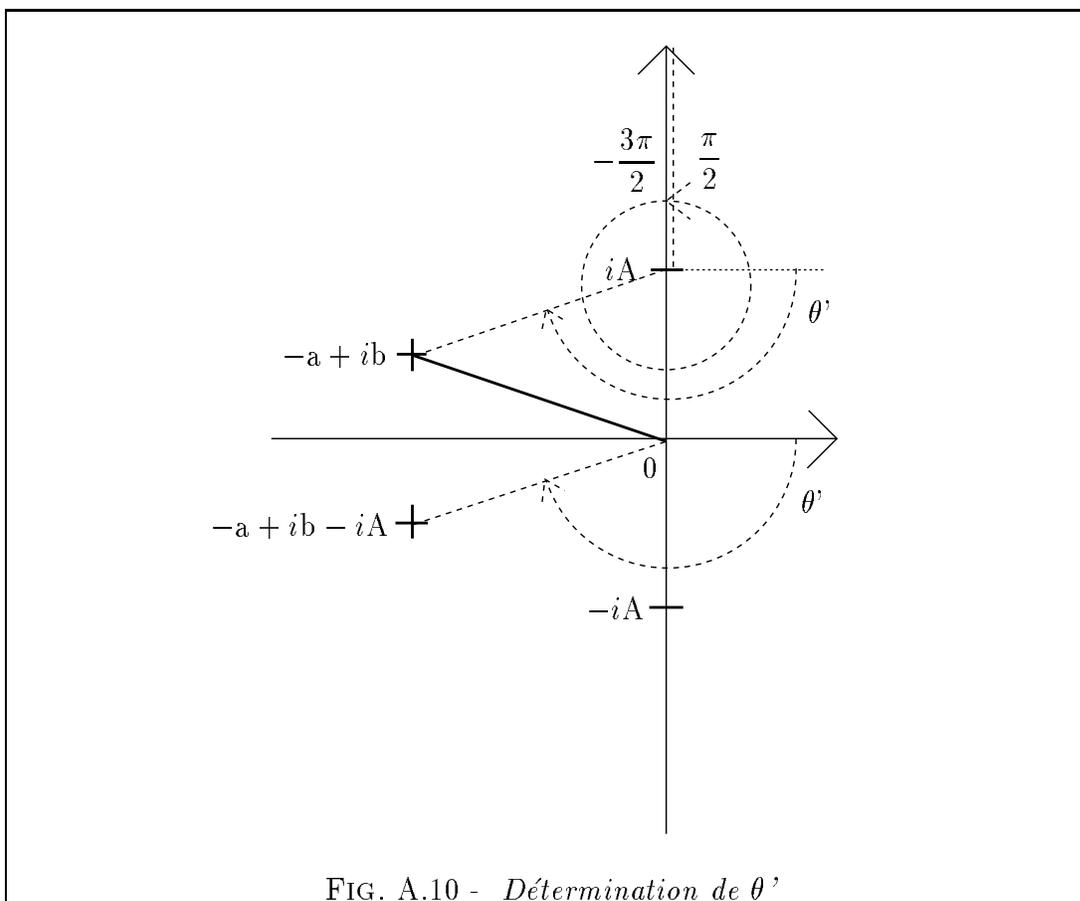


FIG. A.10 - Détermination de θ'

le résultat global est alors:

pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

avec $EX_2 = [1 + \text{sh}(hb) \exp(-iha) - \cos(ha) \exp(hb)]$

avec $EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

avec $EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$

$\text{rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-ipha) \exp(-phb) EX_2}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] EX_3 EX_5}$

Bilan

En regroupant les résultats précédents, on obtient:

$$I(p, n) = 2i\pi [\text{rés}(f(p, n); iB) + \text{rés}(f(p, n); (a + ib)) + \text{rés}(f(p, n); (-a + ib))] \\ - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{[PQ] \cup [RS]} f(p, n)(z) dz$$

On pose enfin:

$$N(p, n) = \int_A^{+\infty} \left[\frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Alors pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$I(p, n) = 2i\pi [\text{rés}(f(p, n); iB) + \text{rés}(f(p, n); (a + ib)) + \text{rés}(f(p, n); (-a + ib))] \\ + N(p + 1, n) + N(p - 1, n) - 2 N(p, n)$$

Nous sommes donc parvenus à mettre $I(p, n)$ sous forme d'une somme de résidus, et d'intégrales $N(p, n)$ de fonctions exponentiellement décroissantes pour $p > 1$, et décroissantes au moins en $\frac{1}{t}$ pour $p = 1$.

Ces intégrales $N(p, n)$ que nous calculerons numériquement sur l'intervalle $[A; +\infty[$, présentent apparemment une difficulté au point A : mais elle est facile à contourner: sachant que ces intégrales sont finies, on peut procéder soit à des intégrations par parties, soit poser:

$$g(p, n)(t) = \frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t + A} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]}$$

et alors

$$\left\{ \begin{aligned} N(p, n) &= \int_A^{+\infty} \frac{g(p, n)(t)}{\sqrt{t-A}} dt \\ &= \int_A^{A+\varepsilon} \frac{g(p, n)(t) - g(p, n)(A)}{\sqrt{t-A}} dt + \int_A^{A+\varepsilon} \frac{g(p, n)(A)}{\sqrt{t-A}} dt \\ &\quad + \int_{A+\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(p, n)(t)}{\sqrt{t-A}} dt \end{aligned} \right.$$

Nous avons programmé ces deux possibilités: elles donnent des résultats identiques.

La méthode de calcul numérique de ces intégrales est précisée dans le chapitre 5.

Remarque 3: Pour l'intégrale $I'(p, n)$, nous aurons bien sûr une autre famille d'intégrales à calculer, que nous noterons $N'(p, n)$, avec

$$N'(p, n) = \int_{A'}^{+\infty} \left[\frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A'^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Nous notons maintenant par $f'(p, n)(z)$ la fonction complexe:

$$f'(p, n)(z) = \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izph) \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

Alors pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 6\}$,

$$\left| \begin{aligned} I'(p, n) &= 2i\pi [\text{rés}(f'(p, n); iB) + \text{rés}(f'(p, n); (a + ib)) + \text{rés}(f'(p, n); (-a + ib))] \\ &\quad + N'(p + 1, n) + N'(p - 1, n) - 2 N'(p, n) \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir les formules des résidus de la fonction complexe $f'(p, n)(z)$, il suffit de remplacer A par A' dans les formules des résidus obtenues pour la fonction complexe $f(p, n)(z)$: en effet, ces deux valeurs jouent le même rôle.

A.2.2 Cas où $p = 0$

On a alors

$$f(0, n)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

La difficulté qui apparaît alors, comme pour $J(0, n)$, vient du fait que l'on n'a plus de terme $\exp(ikph)$ dans l'expression de $I(0, n)$ et qu'alors on ne peut plus faire les majorations précédentes pour l'intégrale sur les quarts de cercle C_1 et C_2 . Pour la contourner, on décompose toujours $\sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$ sous la forme:

$$\sin^2\left(\frac{zh}{2}\right) = \frac{1}{4} [2 - \exp(izh) - \exp(-izh)]$$

et on écrit $f(0, n)(z)$ sous la forme:

$$f(0, n)(z) = s(n)(z) - v(n)(z) - w(n)(z)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(n)(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \\ v(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izh) \\ w(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(-izh) \end{array} \right.$$

Bien sûr, comme nous avons fait pour $J(0, n)$, nous utiliserons le même contours Γ pour intégrer les fonctions $s(n)(z)$ et $v(n)(z)$, et nous intégrerons la fonction $w(n)(z)$ sur un nouveau parcours Γ' .

Sous-cas i) n impair

n impair $\Rightarrow f(0, n)(z)$ impaire.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Alors pour } p = 0 \text{ et } n \in \{1; 3; 5\}, \\ I(p, n) = 0 \end{array} \right.$$

De même

n impair $\Rightarrow f'(0, n)(z)$ impaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Alors pour } p = 0 \text{ et } n \in \{1; 3; 5\}, \\ I'(p, n) = 0 \end{array} \right.$$

Sous-cas ii) n pair et $n \in \{2; 4; 6\}$

Nous notons que dans ce cas, 0 n'est pas un pôle des fonctions $s(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$. C'est ce qui distingue ce cas du cas $n = 0$, pour lequel 0 sera un pôle double (cela était vrai déjà pour $J(p, n)$).

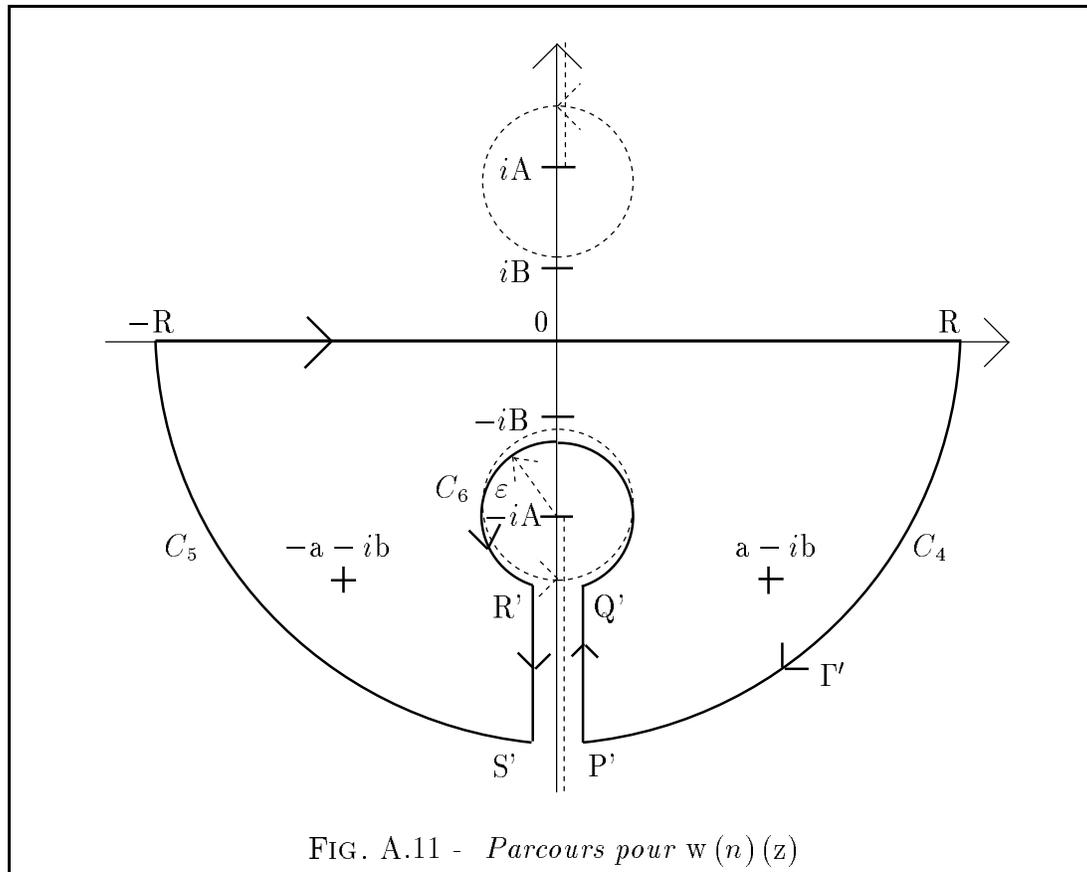
Nous pouvons mettre $I(0, n)$ sous la forme suivante:

$$(A.3) \quad I(0, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(n)(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} v(n)(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} w(n)(k) dk$$

Nous allons calculer chacune des intégrales du terme de droite de l'équation (A.3). Pour ce faire, nous nous intéressons au calcul des trois intégrales suivantes:

$$(A.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \int_{\Gamma} s(n)(z) dz \\ (b) \int_{\Gamma} v(n)(z) dz \\ (c) \int_{\Gamma'} w(n)(z) dz \end{array} \right.$$

Le parcours Γ est celui décrit par la figure (A.6), et le parcours Γ' est celui décrit par la figure (A.11) ci-dessous.

FIG. A.11 - Parcours pour $w(n)(z)$

• Calcul de $\int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk$

Nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} s(n)(z) dz &= \int_{[-R;R]} s(n)(z) dz + \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} s(n)(z) dz \\ &\quad + \int_{[PQ]} s(n)(z) dz + \int_{[RS]} s(n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib))] \\ &\quad + \text{rés}(s(n); (-a + ib)) \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R;R]} s(n)(z) dz \right.$$

- Pour les morceaux circulaires de Γ , le traitement est le suivant:

sur C_1 et C_2 , $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 6$:

$$\left| \int_{C_1} s(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^9} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \int_{C_2} s(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^9} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

puis sur C_3 , $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et en utilisant des majorations semblables à celle du cas $p > 0$, on obtient:

$$\left| \int_{C_3} s(n)(z) dz \right| \simeq \frac{M \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

On a alors le résultat intermédiaire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib))] \\ &\quad + \text{rés}(s(n); (-a + ib)] \\ &\quad - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[PQ] \cup [RS]} s(n)(z) dz \end{aligned}$$

- Pour les segments verticaux, on a $z = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $t > A$. Nous effectuons alors le même traitement de la racine complexe $\sqrt{t^2 - A^2}$ qu'au cas $p > 0$ et nous obtenons alors:

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} s(n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \frac{(it)^n}{t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} dt$$

En notant

$$N(0, n) = \int_A^{+\infty} \left[\frac{(it)^n}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

on a

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[PQ] \cup [RS]} s(n)(z) dz = 2 N(0, n)$$

• Pour le calcul des résidus, nous allons nous aider des calculs effectués pour l'intégrale $J(0, n)$: en effet, comme pour le cas $p > 0$, la différence par rapport aux calculs des résidus de la fonction $u(n)(z)$ est, encore une fois, la présence au dénominateur de la fonction $s(n)(z)$, de la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$. Il suffit par conséquent de connaître les valeurs de cette racine pour les trois pôles simples concernés, pour déduire les différents résultats. Or, les fonctions $u(n)(z)$ et $f(p, n)(z)$ ont les mêmes pôles: les valeurs cherchées de la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$ sont donc connues, car ce sont celles calculées pour le cas $p > 0$. Nous regroupons maintenant tous ces résultats.

On note toujours:

$$r(z) = \sqrt{z^2 + A^2}$$

$$\bullet \text{ rés}(s(n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) s(n)(z)]$$

comme:

$$r(iB) = \sqrt{A^2 - B^2}$$

on a finalement:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{rés}(s(n); iB) = \frac{(iB)^n}{-4 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{rés}(s(n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a+ib)} [(z - (a + ib)) s(n)(z)]$

comme:

$$r(a + ib) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}i(\theta + \theta')\right)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \arcsin\left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}}\right) \\ \theta' = \arcsin\left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}}\right) \end{array} \right.$$

on a finalement:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{avec } EX_4 = \exp\left(\frac{i}{2} \left[\arcsin\left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}}\right) \right]\right) \\ \text{rés}(s(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_4} \end{array} \right.$$

- $\text{rés}(s(n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a + ib)} [(z - (-a + ib)) s(n)(z)]$

comme:

$$r(-a + ib) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{1}{2} i (\theta + \theta') \right)$$

avec:

$$\begin{cases} \theta &= \pi - \arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \\ \theta' &= -\pi - \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \end{cases}$$

on a finalement:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{avec } EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right) \\ \text{rés}(s(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] EX_3 EX_5} \end{array} \right.$$

- Alors pour $n \in \{2; 4; 6\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib)) \\ &\quad + \text{rés}(s(n); (-a + ib))] - 2N(0, n) \end{aligned}$$

- Calcul de $\int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk$

Il est très semblable à celui que nous venons de faire pour la fonction $s(n)(k)$.

Nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} v(n)(z) dz &= \int_{[-R;R]} v(n)(z) dz + \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} v(n)(z) dz \\ &+ \int_{[PQ]} v(n)(z) dz + \int_{[RS]} v(n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib))] \\ &+ \text{rés}(v(n); (-a + ib)) \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R;R]} v(n)(z) dz \right.$$

• Pour les morceaux circulaires de Γ , le traitement est encore une fois le suivant:

sur C_1 et C_2 , $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 6$, $h > 0$ et $\sin\theta > 0$:

$$\left| \int_{C_1} v(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^9} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \int_{C_2} v(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^9} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \exp(-hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

puis sachant que sur C_3 , on a $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et en utilisant des majorations semblables à celle du cas $p > 0$, on obtient:

$$\left| \int_{C_3} v(n)(z) dz \right| \simeq \frac{M \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

On a alors le résultat intermédiaire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk &= 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a+ib)) \\ &\quad + \text{rés}(v(n); (-a+ib))] \\ &\quad - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[PQ] \cup [RS]} v(n)(z) dz \end{aligned}$$

• Pour les segments verticaux, on a toujours $z = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $t > A$. Nous effectuons encore le même traitement de la racine complexe $\sqrt{t^2 - A^2}$ qu'au cas $p > 0$, et nous obtenons:

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} v(n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \frac{(it)^n \exp(-ht)}{2t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a+ib)^2] [t^2 + (a-ib)^2]} dt$$

En notant

$$N(1, n) = \int_A^{+\infty} \left[\frac{(it)^n \exp(-ht)}{2t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a+ib)^2] [t^2 + (a-ib)^2]} \right] dt$$

on a

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[PQ] \cup [RS]} v(n)(z) dz = N(1, n)$$

• Pour le calcul des résidus, nous nous aiderons encore des calculs effectués pour l'intégrale $J(0, n)$, exactement de la même façon que pour la fonction $s(n)(z)$. Les valeurs de la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$ restent aussi identiques à celles que nous avons pour $s(n)(z)$. Nous énonçons par conséquent directement tous les

résultats.

- $\text{rés}(v(n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) v(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{rés}(v(n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-hB)}{-8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{rés}(v(n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a+ib)} [(z - (a + ib)) v(n)(z)]$

le résultat global étant:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{avec } EX_4 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right) \\ \text{rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iba) \exp(-hb)}{32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_4} \end{array} \right.$$

- $\text{rés}(v(n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a+ib)} [(z - (-a + ib)) v(n)(z)]$

le résultat global étant:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] EX_3 EX_5}$$

- Alors pour $n \in \{2; 4; 6\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk &= 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) \\ &\quad + \text{rés}(v(n); (-a + ib))] - N(1, n) \end{aligned}$$

• Calcul de $\int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk$

La seule différence notable avec le calcul précédemment effectué pour la fonction $v(n)(k)$, c' est le changement de parcours: on utilise Γ' , pris dans le sens indirect.

D'après la figure (A.11), nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma'} w(n)(z) dz &= \int_{[-R; R]} w(n)(z) dz + \int_{C_4 \cup C_5 \cup C_6} w(n)(z) dz \\ &\quad + \int_{[P'Q']} w(n)(z) dz + \int_{[R'S']} w(n)(z) dz \\ &= -2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) \\ &\quad + \text{rés}(w(n); (-a - ib))] \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R;R]} w(n)(z) dz \right.$$

• Pour les morceaux circulaires de Γ' , le fait que C_4 et C_5 soient situés sous l'axe des réels, va permettre de faire le travail suivant:

on a d'abords sur C_4 et C_5 , $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 6$, $h > 0$ et $\sin\theta \leq 0$:

$$\left| \int_{C_4} w(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^9} \left| \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \exp(hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \int_{C_5} w(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^9} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \exp(hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

puis comme sur C_7 , on a $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et en utilisant des majorations semblables à celle du cas $p > 0$, on obtient:

$$\left| \int_{C_6} w(n)(z) dz \right| \simeq \frac{M \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

On a alors le résultat intermédiaire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk &= -2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib))] \\ &\quad + \text{rés}(w(n); (-a - ib)] \\ &\quad - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(n)(z) dz \end{aligned}$$

• Pour les segments verticaux, on a encore $z = it \Rightarrow dz = i dt$, mais cette fois avec $t < -A$. La conséquence est que le traitement appliqué à la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$, en suivant la même technique qu'au cas $p > 0$, donne des résultats

différents, c'est à dire

que pour le segment $[P'Q']$ situé à droite de la coupure, on a:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(z - iA) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

donc:

$$\sqrt{z^2 + A^2} = -i\sqrt{t^2 - A^2}$$

alors que pour le segment $[R'S']$ situé à gauche de la coupure, on a:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{3\pi}{2} \\ \arg(z - iA) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

donc:

$$\sqrt{z^2 + A^2} = i\sqrt{t^2 - A^2}$$

Nous obtenons finalement pour l'ensemble des deux segments:

$$\int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \frac{(it)^n \exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} dt$$

Nous avons déjà évalué à $N(1, n)$ la limite de cette expression quand $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. On a donc:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(n)(z) dz = N(1, n)$$

• Pour le calcul des résidus, nous allons nous aider des calculs effectués pour l'intégrale $J(0, n)$: mais comme nous avons maintenant la présence au dénominateur de la fonction $w(n)(z)$, de la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$, et que nous ne

connaissions pas les valeurs de cette racine aux pôles qui nous intéressent, nous allons détailler le calcul de ces racines.

On note toujours:

$$r(z) = \sqrt{z^2 + A^2}$$

- $\text{rés}(w(n); -iB) = \lim_{z \rightarrow -iB} [(z + iB) v(n)(z)]$

comme:

$$r(-iB) = \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |-iB + iA| + \ln |-iB - iA| + i \arg(-iB + iA) + i \arg(-iB - iA)]\right)$$

avec:

$$\exp\left(\frac{1}{2} [\ln |-iB + iA| + \ln |-iB - iA|]\right) = \sqrt{A^2 - B^2}$$

et d'après la figure (A.5):

$$\begin{cases} \arg(-iB + iA) = \frac{\pi}{2} \\ \arg(-iB - iA) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

on a finalement:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{rés}(w(n); -iB) = \frac{(-iB)^n \exp(-hB)}{8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

- $\text{rés}(w(n); (-a - ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a - ib)} [(z - (-a - ib)) v(n)(z)]$

en notant:

$$\begin{cases} \theta = \arg [(-a - ib) + iA] \\ \theta' = \arg [(-a - ib) - iA] \end{cases}$$

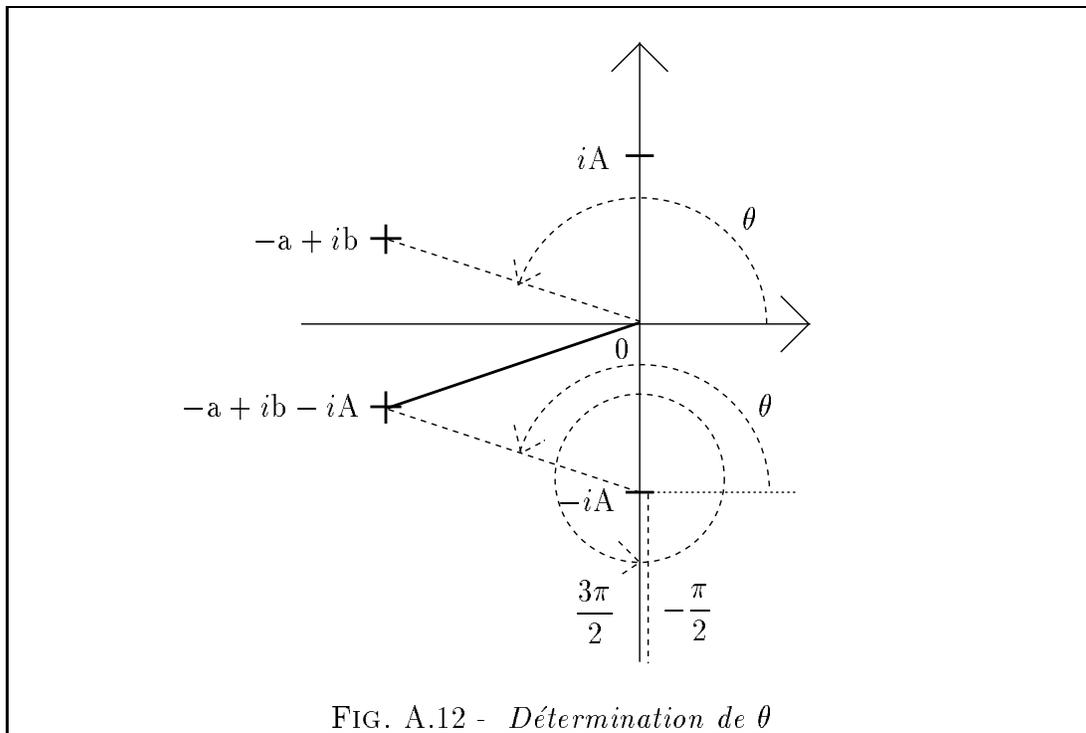
et comme:

$$\exp\left(\frac{1}{2} [\ln |(-a - ib) + iA| + \ln |(-a - ib) - iA|]\right) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

on a:

$$r(-a - ib) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}i(\theta + \theta')\right)$$

la détermination de θ et θ' est illustrée par les figures (A.12) et (A.13):



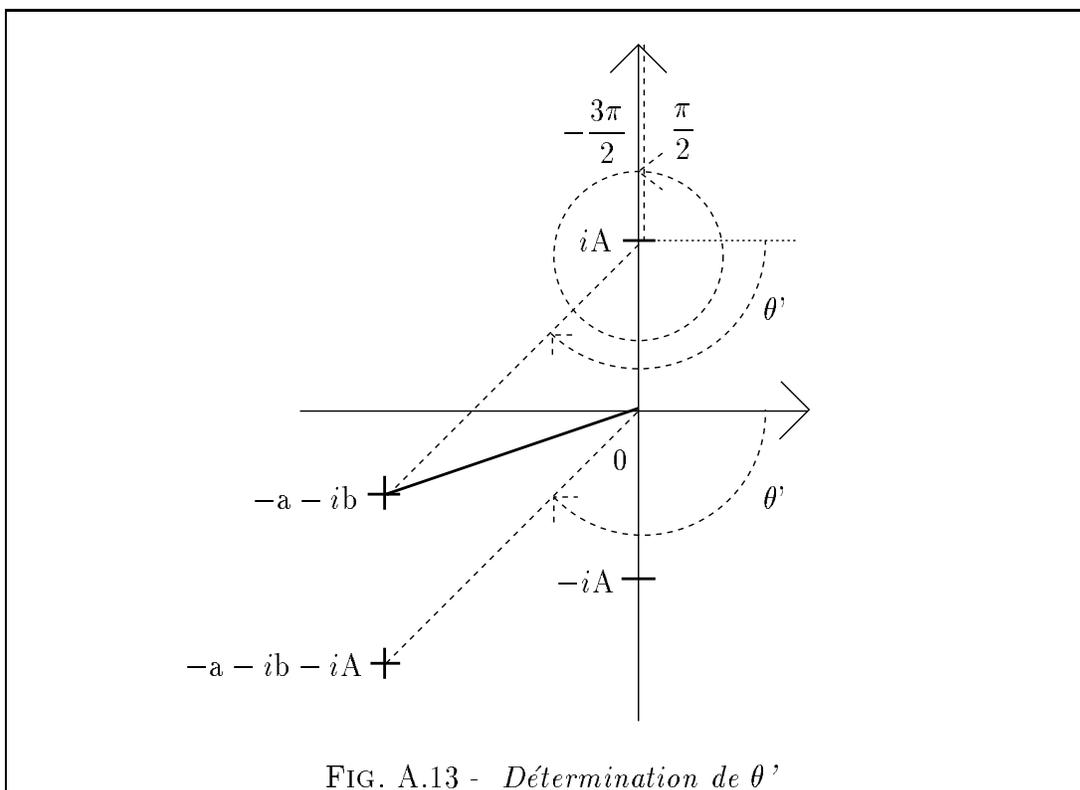


FIG. A.13 - Détermination de θ'

$$\begin{cases} \theta = \pi - \arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \\ \theta' = -\pi - \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \end{cases}$$

le résultat global est alors:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

avec $EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

avec $EX_6 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \right] \right)$

$$\text{rés}(w(n); (-a - ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iba) \exp(-hb)}{-32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_6}$$

$$\bullet \text{ rés}(w(n); (a - ib)) = \lim_{z \rightarrow (a - ib)} [(z - (a - ib)) v(n)(z)]$$

en notant:

$$\begin{cases} \theta = \arg [(a - ib) + iA] \\ \theta' = \arg [(a - ib) - iA] \end{cases}$$

et comme:

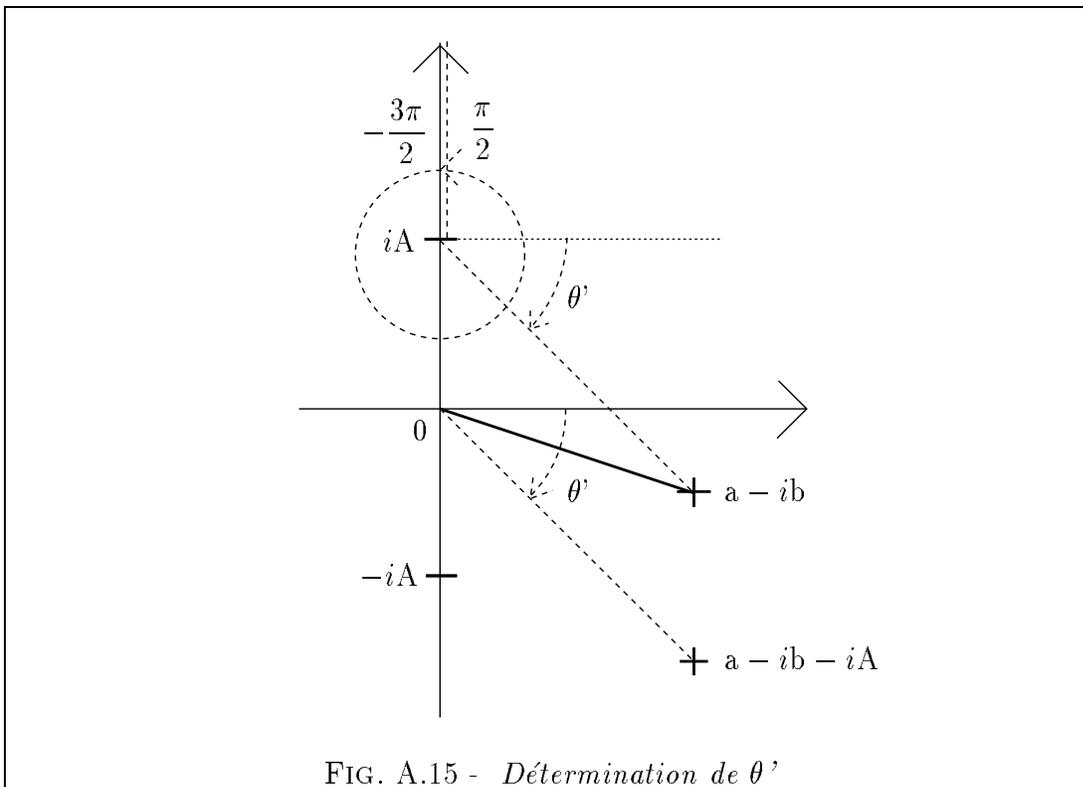
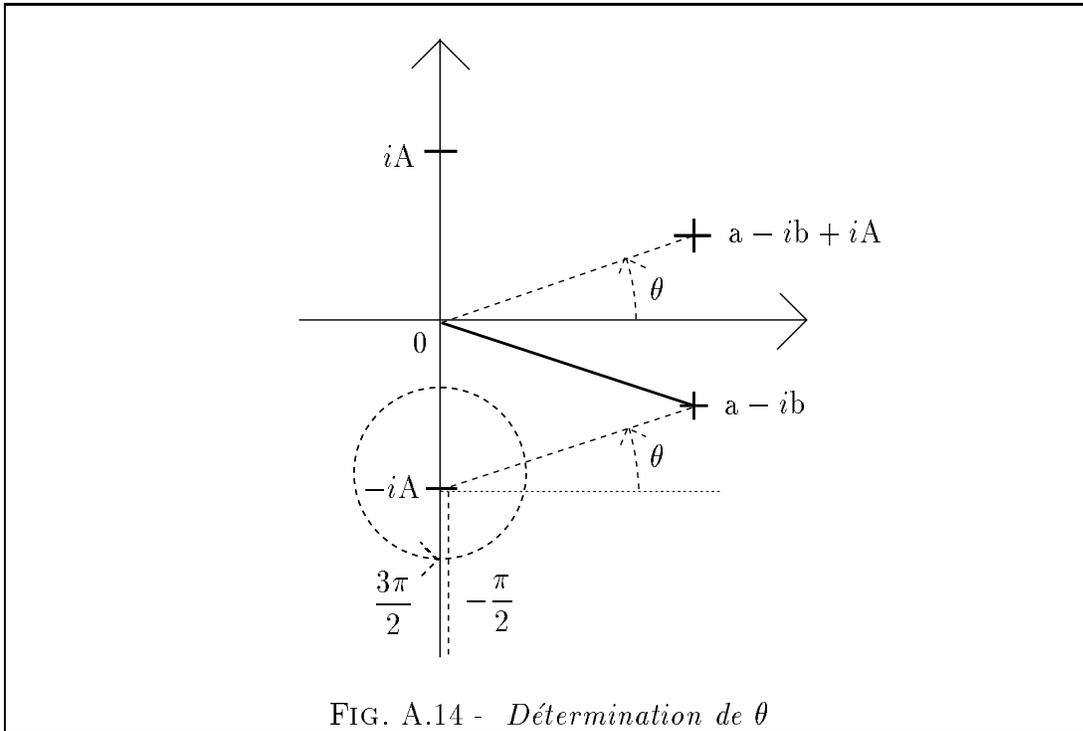
$$\exp\left(\frac{1}{2} [\ln |(a - ib) + iA| + \ln |(a - ib) - iA|]\right) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

on a:

$$r(a - ib) = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}i(\theta + \theta')\right)$$

la détermination de θ et θ' est illustrée par les figures (A.14) et (A.15):

$$\begin{cases} \theta = \arcsin\left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}}\right) \\ \theta' = \arcsin\left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}}\right) \end{cases}$$



le résultat global est alors:

$$\begin{array}{|l}
 \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\
 \text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \text{avec } EX_7 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \right] \right) \\
 \text{rés}(w(n); (a - ib)) = \frac{(a - ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a - ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] EX_3 EX_7}
 \end{array}$$

• Alors pour $n \in \{2; 4; 6\}$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk &= -2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib))] \\
 &\quad + \text{rés}(w(n); (-a - ib)] - N(1, n)
 \end{aligned}$$

Bilan

Nous regroupons les résultats obtenus pour $\int_{-\infty}^{+\infty} s(n) dk$, $\int_{-\infty}^{+\infty} v(n) dk$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} w(n) dk$, et (A.3) permet de conclure:

$$\begin{array}{|l}
 \text{Alors pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\
 I(p, n) = 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib)) + \text{rés}(s(n); (-a + ib))] \\
 \quad - 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) + \text{rés}(v(n); (-a + ib))] \\
 \quad + 2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) + \text{rés}(w(n); (-a - ib))] \\
 \quad \quad - 2 N(0, n) + 2 N(1, n)
 \end{array}$$

Bien sûr, si on écrit $f'(0, n)(z)$ sous la forme:

$$f'(0, n)(z) = s'(n)(z) - v'(n)(z) - w'(n)(z)$$

où:

$$\begin{cases} s'(n)(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \\ v'(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izh) \\ w'(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(-izh) \end{cases}$$

nous pouvons refaire tout le travail pour $I'(p, n)$.

Alors pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\begin{aligned} I'(p, n) &= 2i\pi [\text{rés}(s'(n); iB) + \text{rés}(s'(n); (a + ib)) + \text{rés}(s'(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v'(n); iB) + \text{rés}(v'(n); (a + ib)) + \text{rés}(v'(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w'(n); -iB) + \text{rés}(w'(n); (a - ib)) + \text{rés}(w'(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2N'(0, n) + 2N'(1, n) \end{aligned}$$

Pour obtenir les formules des résidus des fonctions complexes $s'(p, n)(z)$, $v'(p, n)(z)$ et $w'(p, n)(z)$, il suffit de remplacer A par A' dans les formules des résidus obtenues pour les fonctions complexes $s(p, n)(z)$, $v(p, n)(z)$ et $w(p, n)(z)$: en effet, ces deux valeurs jouent encore une fois le même rôle.

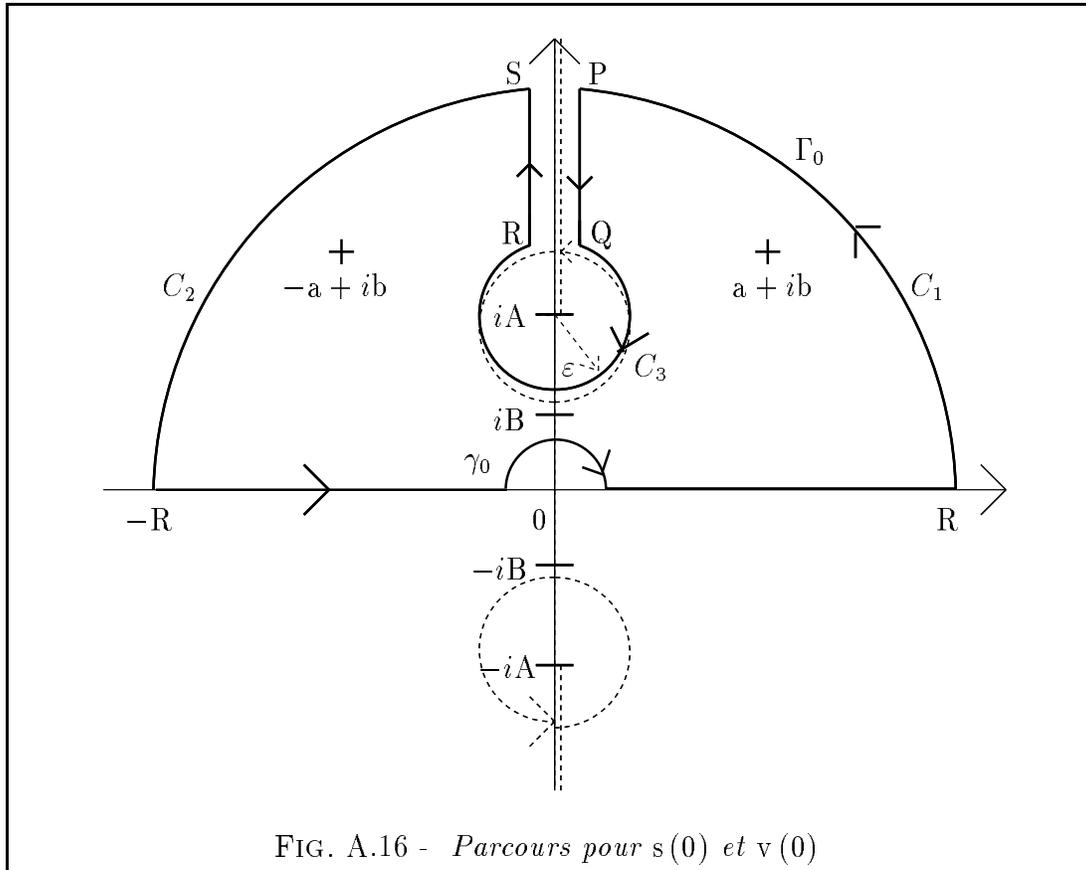
Sous-cas iii) n pair et $n = 0$

On a alors

$$f(0, 0)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{P(z)} z^2 \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

Comme pour $J(0, 0)$, 0 n'est pas un pôle de $f(0, 0)$, mais est un pôle double des fonctions $s(0)(k)$, $v(0)(k)$ et $w(0)(k)$, par lesquelles nous sommes obligés de passer pour effectuer ce calcul.

Le parcours Γ_0 utilisé pour les fonctions $s(0)(z)$ et $v(0)(z)$ est décrit par la figure (A.16). Pour intégrer sur \mathbb{R} la fonction $w(0)(z)$, le parcours Γ_1 utilisé est décrit par la figure (A.17).

FIG. A.16 - *Parcours pour $s(0)$ et $v(0)$*

γ_0 désigne le petit demi-cercle: soit ε son rayon.

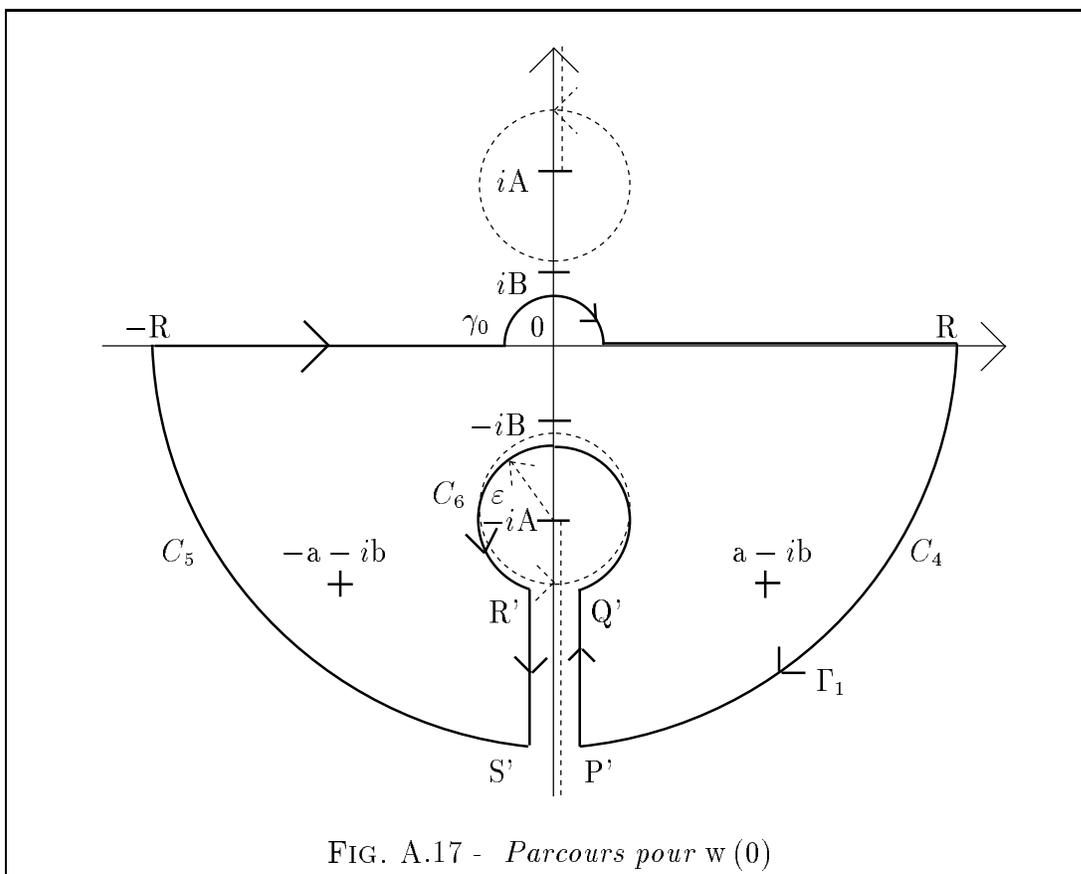


FIG. A.17 - Parcours pour $w(0)$

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_0} s(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\epsilon[} s(0)(z) dz + \int_{]\epsilon; R[} s(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} s(0)(z) dz \\
 &+ \int_{[PQ]} s(0)(z) dz + \int_{[RS]} s(0)(z) dz \\
 &+ \int_{C_1} s(0)(z) dz + \int_{C_2} s(0)(z) dz + \int_{C_3} s(0)(z) dz \\
 &= 2i\pi [\text{rés}(s(0); iB) + \text{rés}(s(0); (a + ib)) + \text{rés}(s(0); (-a + ib))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} v(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} v(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} v(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} v(0)(z) dz \\
&+ \int_{[PQ]} v(0)(z) dz + \int_{[RS]} v(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_1} v(0)(z) dz + \int_{C_2} v(0)(z) dz + \int_{C_3} v(0)(z) dz \\
&= 2i\pi [\text{rés}(v(0); iB) + \text{rés}(v(0); (a + ib)) + \text{rés}(v(0); (-a + ib))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} w(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} w(0)(z) dz \\
&+ \int_{[P'Q']} w(0)(z) dz + \int_{[R'S']} w(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_4} w(0)(z) dz + \int_{C_5} w(0)(z) dz + \int_{C_6} w(0)(z) dz \\
&= -2i\pi [\text{rés}(w(0); -iB) + \text{rés}(w(0); (a - ib)) + \text{rés}(w(0); (-a - ib))] \\
&\quad - 2i\pi \text{rés}(w(0); 0)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$I(0, 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \begin{bmatrix} \int_{]-R; -\varepsilon[} s(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} s(0)(z) dz \\ - \int_{]-R; -\varepsilon[} v(0)(z) dz - \int_{] \varepsilon; R[} v(0)(z) dz \\ - \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz - \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz \end{bmatrix}$$

En procédant exactement comme au cas $n \neq 0$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} s(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{1; 2\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_3} s(0)(z) dz \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} v(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{1; 2\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_3} v(0)(z) dz \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} w(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{4; 5\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_6} w(0)(z) dz \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Pour les segments verticaux [PQ], [RS], [P'Q'] et [R'S'], on a toujours $z = it \Rightarrow dz = i dt$, avec $t \in \mathbb{R}$, ce qui permet d'obtenir:

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} s(0)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \frac{1}{t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} dt$$

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} v(0)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \frac{\exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} dt$$

$$\int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(0)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^R \frac{\exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} dt$$

On pose alors:

$$N(0, 0) = \int_A^{+\infty} \left[\frac{1}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

$$N(1, 0) = \int_A^{+\infty} \left[\frac{\exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Ceci permet d'écrire:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[PQ] \cup [RS]} s(0)(z) dz = 2 N(0, 0)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[PQ] \cup [RS]} v(0)(z) dz = N(1, 0)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(0)(z) dz = N(1, 0)$$

Ayant regroupé ces résultats, on déduit l'expression suivante pour $I(0, 0)$:

$$\begin{aligned} I(0, 0) &= 2i\pi [\text{rés}(s(0); iB) + \text{rés}(s(0); (a + ib)) + \text{rés}(s(0); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v(0); iB) + \text{rés}(v(0); (a + ib)) + \text{rés}(v(0); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w(0); -iB) + \text{rés}(w(0); (a - ib)) + \text{rés}(w(0); (-a - ib))] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} u(0)(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} v(0)(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} w(0)(z) dz \\ &\quad - 2 N(0, 0) + 2 N(1, 0) + 2i\pi \text{rés}(w(0); 0) \end{aligned}$$

Comme $f(0, 0)(z) = s(0)(z) - v(0)(z) - w(0)(z)$ et $f(0, 0)(z)$ est analytique au point 0, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} f(0, 0)(z) = 0$$

Ce qui permet de conclure.

Alors pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned} I(p, n) &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib)) + \text{rés}(s(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) + \text{rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) + \text{rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2N(0, 0) + 2N(1, 0) + 2i\pi \text{rés}(w(0); 0) \end{aligned}$$

Le résultat équivalent pour $I'(p, n)$ s'établit de façon identique.

Alors pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned} I'(p, n) &= 2i\pi [\text{rés}(s'(n); iB) + \text{rés}(s'(n); (a + ib)) + \text{rés}(s'(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v'(n); iB) + \text{rés}(v'(n); (a + ib)) + \text{rés}(v'(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w'(n); -iB) + \text{rés}(w'(n); (a - ib)) + \text{rés}(w'(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2N'(0, 0) + 2N'(1, 0) + 2i\pi \text{rés}(w'(0); 0) \end{aligned}$$

Calcul des résidus correspondant à ce cas

Les expressions de tous les résidus de $s(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$, calculées pour le cas $n \neq 0$, sont encore valables quand $n = 0$.

Nous avons donc à calculer seulement $\text{rés}(w(0); 0)$, en tenant compte que 0 est un pôle double de la fonction $w(0)(z)$. Mais comme nous avons déjà calculé ce résidu pour $J(0, 0)$, on obtient facilement le résultat. Il en est de même pour

rés ($w'(0); 0$).

- rés ($w(n); 0$) = $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dz} [z^2 w(n)(z)] \right)$

le résultat du calcul donnant:

$$\left| \text{rés}(w(0); 0) = \frac{-ih}{4 A B^2 (a + ib)^2 (a - ib)^2} \right.$$

A.3 Calcul de $K(p, n)$

Nous avons à calculer

$$\left\{ \begin{array}{l} K(p, n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(k)} \frac{k^n}{k^2} \exp(ikph) \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) dk \\ \text{pour } n \in \{0; \dots; 7\} \text{ et } p \in \{0; \dots; N-1\} \end{array} \right.$$

Nous notons maintenant par $f(p, n)(z)$ la fonction complexe:

$$f(p, n)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izph) \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

L'expression (A.1) de $P(k)$ est elle toujours valable.

La nouveauté par rapport au calcul de $I(p, n)$ et $I'(p, n)$, réside en la présence simultanée au dénominateur de la fonction $f(p, n)(z)$, des deux fonctions $\frac{1}{K_S}$ et $\frac{1}{K_P}$. Nous rappelons que:

$$K_S = \sqrt{k^2 + A^2} \quad \text{et} \quad K_P = \sqrt{k^2 + A'^2} \quad \text{avec} \quad A < A'$$

Dans \mathbb{C} , les fonctions $\frac{1}{z^2 + A^2}$ et $\frac{1}{z^2 + A'^2}$ ont pour pôles: iA et $-iA$, iA' et $-iA'$ respectivement, et on pose

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = \sqrt{z + iA} \sqrt{z - iA} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = \sqrt{z + iA'} \sqrt{z - iA'} \end{cases}$$

On voit donc apparaître deux logarithmes complexes de plus, par rapport au calcul fait pour $I(p, n)$, au dénominateur de la fonction $f(p, n)(z)$. Par conséquent nous avons à fixer au total quatre coupures dans le plan complexe: nous les choisissons verticales, (voir figure (A.18)), et elles sont donc superposées sur les deux demi-droites $[A'; +\infty[$ et $]-\infty; -A']$. Cette superposition aura une conséquence importante: les intégrales numériques obtenues ne porteront que sur des intervalles bornés de types $[iA \ iA']$ et $[-iA' \ -iA]$.

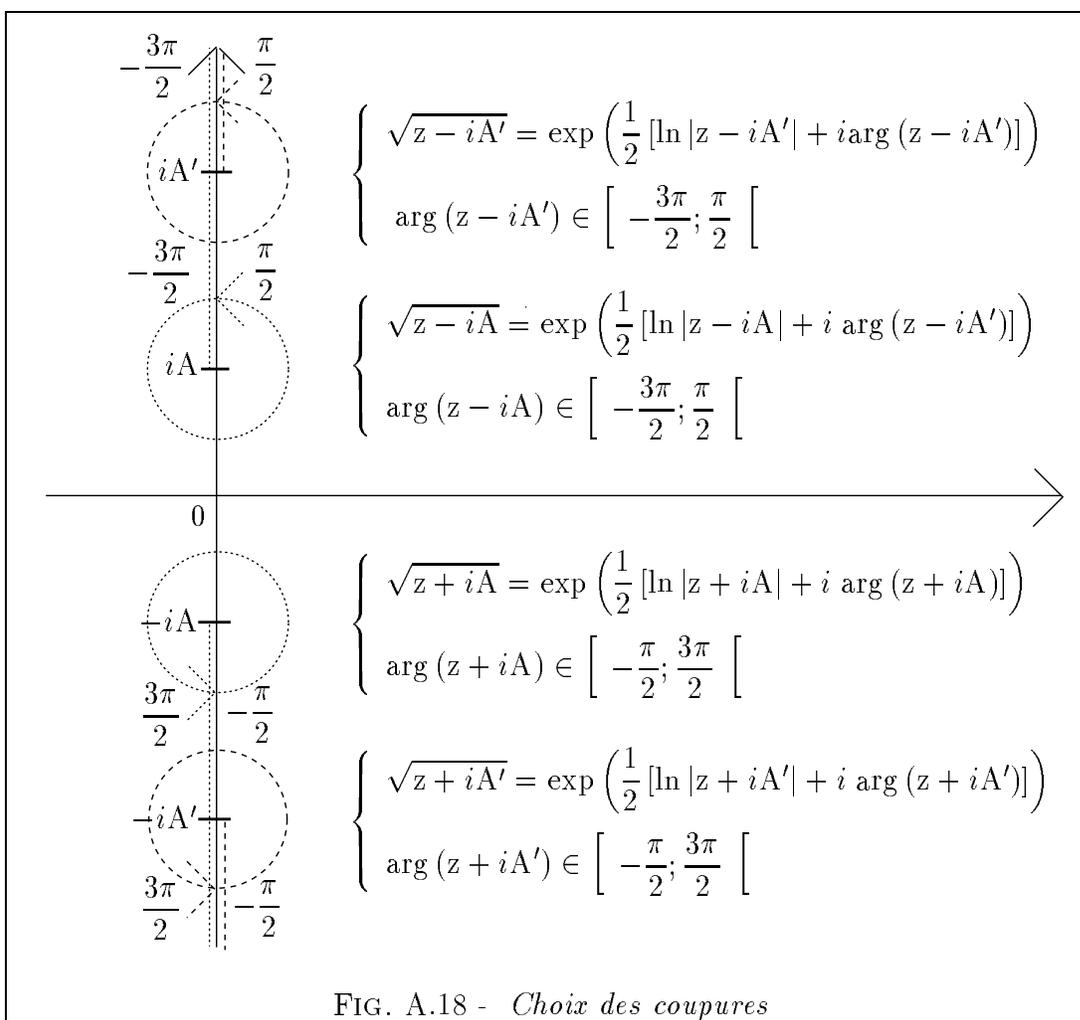


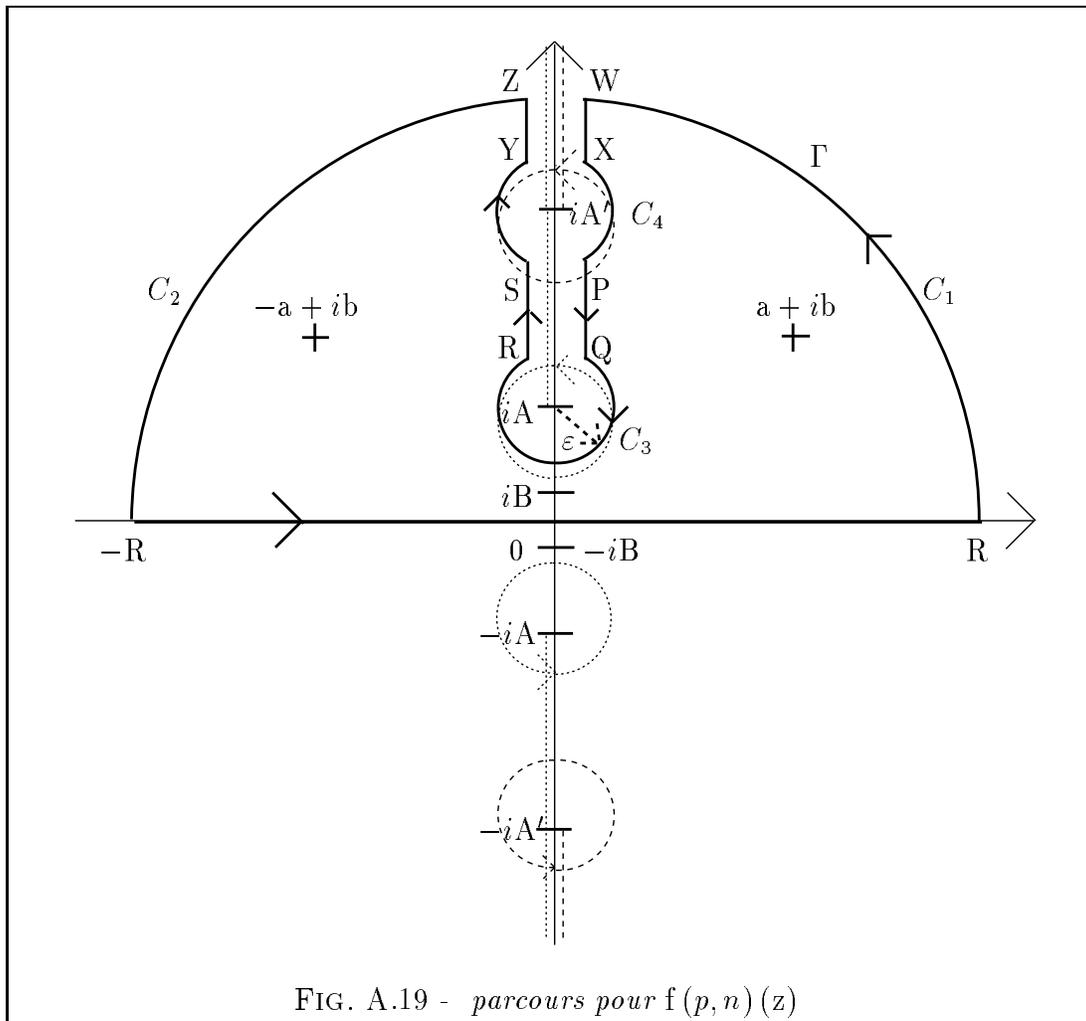
FIG. A.18 - *Choix des coupures*

Remarque 1: le choix fait pour les coupures permet d'avoir $\sqrt{z^2 + A^2} = \sqrt{k^2 + A^2}$ et $\sqrt{z^2 + A'^2} = \sqrt{k^2 + A'^2}$ quand $z \in \mathbb{R}$.

Remarque 2: Nous allons distinguer les mêmes cas que lors des calculs de $J(p, n)$ et $I(p, n)$ et ce, pour les mêmes raisons.

A.3.1 Cas où $p > 0$

Nous intégrons la fonction $f(p, n)(z)$ sur le parcours Γ (pris dans le sens direct), décrit par la figure (A.19):



Nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} f(p, n)(z) dz &= \int_{[-R;R]} f(p, n)(z) dz + \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(p, n)(z) dz \\ &+ \int_{[PQ]} f(p, n)(z) dz + \int_{[RS]} f(p, n)(z) dz \\ &+ \int_{[WX]} f(p, n)(z) dz + \int_{[YZ]} f(p, n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{rés}(f(p, n); iB) + \text{rés}(f(p, n); (a + ib)) \\ &+ \text{rés}(f(p, n); (-a + ib))] \end{aligned} \right.$$

et

$$K(p, n) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(p, n)(z) dz$$

Calcul sur les morceaux circulaires

Les calculs par rapport à ceux faits pour $I(p, n)$ sont identiques, à part quelques différences dans les majorations pour la puissance de R .

Sur C_1 et C_2 , on a toujours $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient cette fois-ci:

$$\left| \int_{C_1} f(p, n)(z) dz \right| \simeq \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \exp(-phR \sin\theta) + \exp(-(p+1)hR \sin\theta) + \exp(-(p-1)hR \sin\theta)] d\theta$$

et

$$\left| \int_{C_2} f(p, n)(z) dz \right| \simeq \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [2 \exp(-phR \sin\theta) + \exp(-(p+1)hR \sin\theta) + \exp(-(p-1)hR \sin\theta)] d\theta$$

Or, comme $p \geq 1, h > 0, n \leq 7$ et $\sin\theta \geq 0$, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} f(p, n)(z) dz = 0 \quad , i \in \{1; 2\}$$

Ce sont, comme pour $J(p, n)$ et $I(p, n)$, ces calculs que nous ne pouvons effectuer pour $p = 0$, toujours à cause du terme

$$\exp(-(p-1)hR \sin\theta)$$

D'autre part, sur C_3 , $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$. Le fait par rapport à $I(p, n)$, d'avoir une racine supplémentaire au dénominateur, n'est pas gênant: l'expression du dénominateur est seulement un peu plus lourde quand on effectue les majorations:

$$\left| \int_{C_3} f(p, n)(z) dz \right| \leq \left| \int_{C_3} \frac{f_1(p, n)(z) f_2(p, n)(z)}{f_3(p, n)(z) f_4(p, n)(z) f_5(p, n)(z) f_6(p, n)(z)} d\theta \right|$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(p, n)(z) = i\varepsilon \exp(i\theta) \sin^2 \left[\frac{h}{2} (\varepsilon \exp(i\theta) + iA) \right] \\ f_2(p, n)(z) = (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^n [\exp(ip h (\varepsilon \exp(i\theta) + iA))] \\ f_3(p, n)(z) = (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 + B^2] \\ f_4(p, n)(z) = \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta)} \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + 2iA} \\ f_5(p, n)(z) = [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a + ib)^2] [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a - ib)^2] \\ f_6(p, n)(z) = \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) - iA + iA'} \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + iA + iA'} \end{array} \right.$$

Il existe, dès que ε est assez petit, trois constantes réelles strictement positives notées m , M et M' , telles que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + 2iA} \right| \geq m \\ \left| \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + iA + iA'} \right| \geq m \\ \left| \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta) + iA - iA'} \right| \geq m \\ \left| (\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 \right| \geq m \\ \left| [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 + B^2] \right| \geq m \\ \left| [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a + ib)^2] \right| \geq m \\ \left| [(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^2 - (a - ib)^2] \right| \geq m \\ \left| \sqrt{\varepsilon \exp(i\theta)} \right| = \sqrt{\varepsilon} \\ |i\varepsilon \exp(i\theta)| = \varepsilon \\ |(\varepsilon \exp(i\theta) + iA)^n| \leq M \\ |[\exp(ip h (\varepsilon \exp(i\theta) + iA))] | \leq M \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sin^2 \left[\frac{h}{2} (\varepsilon \exp(i\theta) + iA) \right] \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \exp(-hA) \exp(-\varepsilon h \sin\theta) \exp(-i\varepsilon h \cos\theta) \\ + \exp(hA) \exp(\varepsilon h \sin\theta) \exp(i\varepsilon h \cos\theta) \end{array} \right| \\ \leq M \end{array} \right.$$

ce qui permet d'obtenir finalement

$$\left| \int_{C_3} f(p, n)(z) dz \right| \leq \frac{M' \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Sur C_4 , $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA' \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$. Il suffit d'inverser les rôles de A et A' pour arriver à:

$$\left| \int_{C_4} f(p, n)(z) dz \right| \leq \frac{M' \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Calcul sur les segments [WX], [YZ], [PQ] et [RS]

C'est dans cette partie que nous allons voir apparaître la principale nouveauté: le fait d'avoir deux et non plus une coupure entre les segments [WX] et [YZ], va entraîner que les intégrales de $f(p, n)(z)$ sur ces deux segments vont s'annuler. Il ne subsistera alors que les intégrales de $f(p, n)(z)$ sur les deux segments bornés [PQ] et [RS].

Pour les quatre segments, on a $z = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $t \in \mathbb{R}$ et:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 = -t^2 \\ z^n = it^n \\ \exp(iphz) = \exp(-pht) \\ \sin^2\left(\frac{hz}{2}\right) = -\text{sh}^2\left(\frac{ht}{2}\right) \\ z^2 + B^2 = B^2 - t^2 \\ [z^2 - (a + ib)^2][z^2 - (a - ib)^2] = [t^2 + (a + ib)^2][t^2 + (a - ib)^2] \end{array} \right.$$

La différenciation entre les différents segments se fait au niveau des arguments présents dans les racines complexes qui s'écrivent:

$$\sqrt{z^2 + A^2} = \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA| + \ln |z - iA| + i \arg(z + iA) + i \arg(z - iA)]\right)$$

et

$$\sqrt{z^2 + A'^2} = \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA'| + \ln |z - iA'| + i \arg(z + iA') + i \arg(z - iA')]\right)$$

- Comme le segment [WX] est situé à droite des deux coupures et $t > A'$, on a d'une part que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA| + \ln |z - iA|]\right) = \sqrt{t^2 - A^2} \\ \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA'| + \ln |z - iA'|]\right) = \sqrt{t^2 - A'^2} \end{array} \right.$$

et d'autre part que:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = \frac{\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

alors:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = i\sqrt{t^2 - A'^2} \end{cases}$$

et en posant:

$$N(t) = -(it)^n \exp(-pht) \operatorname{sh}^2\left(\frac{ht}{2}\right)$$

$$D(t) = -t^2 (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

nous obtenons finalement pour le segment [WX]:

$$\int_{[WX]} f(p, n)(z) dz = \int_{\mathbb{R}}^{A'+\varepsilon} \left[\frac{N(t)}{-\sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{t^2 - A'^2} D(t)} \right] i dt$$

• Comme le segment [YZ] est situé à gauche des deux coupures et $t > A'$, on a encore:

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|z + iA| + \ln|z - iA|]\right) = \sqrt{t^2 - A^2} \\ \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|z + iA'| + \ln|z - iA'|]\right) = \sqrt{t^2 - A'^2} \end{cases}$$

mais maintenant:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = -\frac{3\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

alors:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = -i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = -i\sqrt{t^2 - A'^2} \end{cases}$$

et en gardant les notations $N(t)$ et $D(t)$ précédentes, nous obtenons finalement pour le segment $[YZ]$:

$$\int_{[YZ]} f(p, n)(z) dz = \int_{A'+\varepsilon}^R \left[\frac{N(t)}{-\sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{t^2 - A'^2} D(t)} \right] i dt$$

Nous avons donc bien le résultat annoncé pour les segments $[WX]$ et $[YZ]$, c'est à dire:

$$\int_{[WX]} f(p, n)(z) dz = - \int_{[YZ]} f(p, n)(z) dz$$

Ce résultat reste vrai quand $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$.

• Comme le segment $[PQ]$ est situé à droite d'une seule coupure, et $A < t < A'$, on a désormais:

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|z + iA| + \ln|z - iA|]\right) = \sqrt{t^2 - A^2} \\ \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|z + iA'| + \ln|z - iA'|]\right) = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

et aussi:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = \frac{\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ce qui donne alors:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

En posant désormais:

$$N(t) = [2 \exp(-pht) - \exp(-(p+1)ht) - \exp(-(p-1)ht)]$$

$$D(t) = (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

nous obtenons finalement pour le segment [PQ]:

$$\int_{[PQ]} f(p, n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \left[\frac{(it)^n N(t)}{4 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} \right] dt$$

• Comme le segment [RS] est situé à gauche d'une seule coupure et $A < t < A'$, on a dans ce cas aussi:

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|z + iA| + \ln|z - iA|]\right) = \sqrt{t^2 - A^2} \\ \exp\left(\frac{1}{2} [\ln|z + iA'| + \ln|z - iA'|]\right) = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

mais par contre:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = -\frac{3\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ce qui donne alors:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = -i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

et en gardant les notations $N(t)$ et $D(t)$ précédentes, nous obtenons finalement pour le segment [RS]:

$$\int_{[RS]} f(p, n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \left[\frac{(it)^n N(t)}{4 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} \right] dt$$

Par conséquent, pour l'ensemble des deux segments, on a:

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} f(p, n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \left[\frac{(it)^n N(t)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} \right] dt$$

Calcul des résidus

Nous allons nous aider des calculs effectués pour l'intégrale $I(p, n)$: en effet, la seule différence par rapport aux calculs précédents, est la présence au dénominateur de la fonction $f(p, n)(z)$, de la racine complexe $\sqrt{z^2 + A'^2}$. Mais comme le rôle de A' dans cette racine complexe est identique à celui joué par A dans la racine complexe $\sqrt{z^2 + A^2}$, ses valeurs pour les trois pôles simples concernés s'en déduisent immédiatement, ainsi que les résidus cherchés.

- $\text{rés}(f(p, n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) f(p, n)(z)]$

on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p > 0 \text{ et } n \in \{0; \dots; 7\}, \\ \text{rés}(f(p, n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-Bph) \text{sh}^2\left(\frac{hB}{2}\right)}{2 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

$$\bullet \text{ rés}(f(p, n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a+ib)} [(z - (a + ib)) f(p, n)(z)]$$

on obtient:

pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\text{avec } EX_1 = [1 + \text{sh}(hb) \exp(iba) - \cos(ha) \exp(hb)]$$

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_4 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_9 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(f(p, n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(ipa) \exp(-phb) EX_1}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_4 EX_9}$$

$$\bullet \text{ rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a+ib)} [(z - (-a + ib)) f(p, n)(z)]$$

on obtient:

pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\text{avec } EX_2 = [1 + \operatorname{sh}(hb) \exp(-iha) - \cos(ha) \exp(hb)]$$

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_{10} = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\operatorname{rés}(f(p, n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-ipha) \exp(-phb) EX_2}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_5 EX_{10}}$$

Bilan

En regroupant les résultats précédents, on obtient:

$$\begin{aligned} K(p, n) &= 2i\pi [\operatorname{rés}(f(p, n); iB) + \operatorname{rés}(f(p, n); (a + ib)) + \operatorname{rés}(f(p, n); (-a + ib))] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} f(p, n)(z) dz \end{aligned}$$

On pose enfin:

$$M(p, n) = \int_A^{A'} \left[\frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Alors pour $p > 0$ et $n \in \{0; \dots; 7\}$,

$$\begin{aligned} K(p, n) &= 2i\pi [\operatorname{rés}(f(p, n); iB) + \operatorname{rés}(f(p, n); (a + ib)) + \operatorname{rés}(f(p, n); (-a + ib))] \\ &\quad + M(p + 1, n) + M(p - 1, n) - 2 M(p, n) \end{aligned}$$

Nous sommes donc parvenus à mettre $K(p, n)$ sous forme d'une somme de résidus et d'intégrales (notées $M(p, n)$) de fonctions exponentiellement décroissantes pour $p > 1$, et décroissantes au moins en $\frac{1}{t}$ pour $p = 1$. De plus, contrairement à ce qui se passait pour $I(p, n)$, les intervalles sur lesquels nous devons intégrer ces fonctions $M(p, n)$ sont bornés.

Ces intégrales $M(p, n)$ que nous calculerons numériquement sur l'intervalle $[A; A']$, présentent apparemment deux difficultés aux points A et A' : mais, comme pour $N(p, n)$, elles sont faciles à contourner: sachant que ces intégrales sont finies, on peut procéder, là-encore, soit à des intégrations par parties, soit poser:

$$g(p, n)(t) = \frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{t+A} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a+ib)^2] [t^2 + (a-ib)^2]}$$

et

$$h(p, n)(t) = \frac{(it)^n [\exp(-pht)]}{2 t^2 \sqrt{A'+t} \sqrt{t^2 - A^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a+ib)^2] [t^2 + (a-ib)^2]}$$

et alors

$$\left\{ \begin{aligned} M(p, n) &= \int_A^{A'} \frac{g(p, n)(t)}{\sqrt{t-A}} dt = \int_A^{A'} \frac{h(p, n)(t)}{\sqrt{A'-t}} dt \\ &= \int_A^{A+\varepsilon} \frac{g(p, n)(t) - g(p, n)(A)}{\sqrt{t-A}} dt + \int_A^{A+\varepsilon} \frac{g(p, n)(A)}{\sqrt{t-A}} dt \\ &\quad + \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \frac{g(p, n)(A)}{\sqrt{t-A}} dt \\ &\quad + \int_{A'-\varepsilon}^{A'} \frac{h(p, n)(t) - h(p, n)(A')}{\sqrt{A'-t}} dt \\ &\quad + \int_{A'-\varepsilon}^{A'} \frac{h(p, n)(A')}{\sqrt{A'-t}} dt \end{aligned} \right.$$

La méthode de calcul numérique de ces intégrales est précisée dans le chapitre 5.

A.3.2 Cas où $p = 0$

On a alors

$$f(0, n)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

La difficulté qui apparaît alors, comme pour $J(0, n)$ et $I(0, n)$, vient du fait que l'on n'a plus de terme $\exp(ikph)$ dans l'expression de $I(0, n)$ et qu'alors on ne peut plus faire les majorations précédentes pour l'intégrale sur les quarts de cercle C_1 et C_2 . Pour la contourner, on décompose toujours $\sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$ sous la forme:

$$\sin^2\left(\frac{zh}{2}\right) = \frac{1}{4} [2 - \exp(ihz) - \exp(-ihz)]$$

et on écrit $f(0, n)(z)$ sous la forme:

$$f(0, n)(z) = s(n)(z) - v(n)(z) - w(n)(z)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(n)(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \\ v(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(izh) \\ w(n)(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} \frac{z^n}{z^2} \exp(-izh) \end{array} \right.$$

Bien sûr, comme nous avons fait pour $J(0, n)$ et $I(0, n)$, nous utiliserons le même contours Γ pour intégrer les fonctions $s(n)(z)$ et $v(n)(z)$, et nous intégrerons la fonction $w(n)(z)$ sur un nouveau parcours Γ' .

Sous-cas i) n impair

n impair $\Rightarrow f(0, n)(z)$ impaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Alors pour } p = 0 \text{ et } n \in \{1; 3; 5; 7\}, \\ K(p, n) = 0 \end{array} \right.$$

Sous-cas ii) n pair et $n \in \{2; 4; 6\}$

Nous notons que dans ce cas, 0 n'est pas un pôle des fonctions $s(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$. C'est ce qui distingue ce cas du cas $n = 0$, pour lequel 0 sera un pôle double de ces fonctions (c'était déjà la même chose pour $J(p, n)$ et $I(p, n)$).

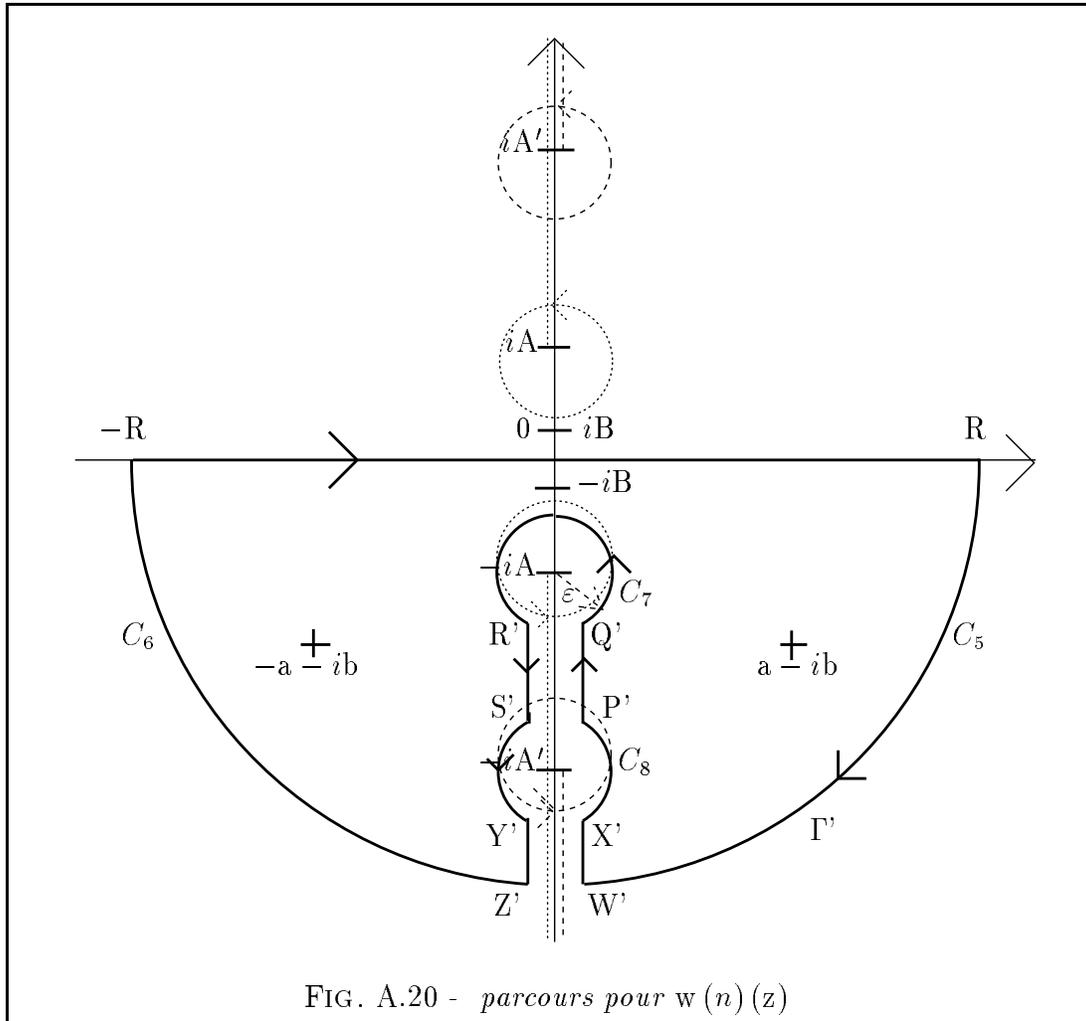
Nous pouvons mettre $K(0, n)$ sous la forme suivante:

$$(A.5) \quad K(0, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(n)(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} v(n)(k) dk - \int_{-\infty}^{+\infty} w(n)(k) dk$$

Nous allons calculer chacune des intégrales du terme de droite de l'équation (A.5). Pour ce faire, nous nous intéressons au calcul des trois intégrales suivantes:

$$(A.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \int_{\Gamma} s(n)(z) dz \\ (b) \int_{\Gamma} v(n)(z) dz \\ (c) \int_{\Gamma'} w(n)(z) dz \end{array} \right.$$

Le parcours Γ est celui décrit par la figure (A.19), et le parcours Γ' est celui décrit par la figure (A.20) ci-dessous.



• Calcul de $\int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk$

Nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} s(n)(z) dz &= \int_{[-R;R]} s(n)(z) dz + \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} s(n)(z) dz \\ &+ \int_{[PQ]} s(n)(z) dz + \int_{[RS]} s(n)(z) dz \\ &+ \int_{[WX]} s(n)(z) dz + \int_{[YZ]} s(n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib)) \\ &+ \text{rés}(s(n); (-a + ib))] \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R;R]} s(n)(z) dz \right.$$

• Pour les morceaux circulaires C_1 et C_2 de Γ , le traitement est identique à celui de $p > 0$: on a $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 7$:

$$\left| \int_{C_1} s(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \int_{C_2} s(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

Sur C_3 et C_4 , on a respectivement $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA' \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$. En utilisant alors des majorations semblables à celle du cas $p > 0$, on obtient:

$$\left| \int_{C_i} s(n)(z) dz \right| \simeq \frac{M \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ pour } i \in \{3; 4\}$$

On a alors le résultat intermédiaire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a+ib))] \\ &\quad + \text{rés}(s(n); (-a+ib)) \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} s(n)(z) dz \\ &\quad - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[WX] \cup [YZ]} s(n)(z) dz \end{aligned}$$

• Pour les segments verticaux, on a $z = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $t \in \mathbb{R}$. Nous effectuons alors le même traitement des racines complexes $\sqrt{z^2 + A^2}$ et $\sqrt{z^2 + A'^2}$ qu'au cas $p > 0$ et nous obtenons alors:

$$\int_{[WX]} s(n)(z) dz = - \int_{[YZ]} s(n)(z) dz$$

et en posant

$$D(t) = (B^2 - t^2) [t^2 + (a+ib)^2] [t^2 + (a-ib)^2]$$

on obtient aussi

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} s(n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \frac{(it)^n}{t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} dt$$

En notant

$$M(0, n) = \int_A^{A'} \left[\frac{(it)^n}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a+ib)^2] [t^2 + (a-ib)^2]} \right] dt$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} s(n)(z) dz = 2 M(0, n)$$

• Pour le calcul des résidus de la fonction $s(n)(z)$, nous nous aidons des calculs effectués pour l'intégrale $I(0, n)$, exactement comme nous l'avons fait pour la fonction $f(p, n)(z)$, dans le cas $p > 0$.

• $\text{rés}(s(n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) s(n)(z)]$

on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{rés}(s(n); iB) = \frac{(iB)^n}{-4 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

• $\text{rés}(s(n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a + ib)} [(z - (a + ib)) s(n)(z)]$

on obtient:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_4 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_9 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(s(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n}{16 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_4 EX_9}$$

- $\text{rés}(s(n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a + ib)} [(z - (-a + ib)) s(n)(z)]$

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_{10} = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(s(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n}{-16 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (-a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_5 EX_{10}}$$

- Alors pour $n \in \{2; 4; 6\}$

$$\int_{\mathbb{R}} s(n)(k) dk = 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib)) + \text{rés}(s(n); (-a + ib))] - 2 M(0, n)$$

- Calcul de $\int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk$

Il est très semblable à celui que nous venons de faire pour la fonction $s(n)(k)$.

Nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} v(n)(z) dz &= \int_{[-R;R]} v(n)(z) dz + \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} v(n)(z) dz \\ &+ \int_{[PQ]} v(n)(z) dz + \int_{[RS]} v(n)(z) dz \\ &+ \int_{[WX]} v(n)(z) dz + \int_{[YZ]} v(n)(z) dz \\ &= 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) \\ &+ \text{rés}(v(n); (-a + ib))] \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R;R]} v(n)(z) dz \right.$$

- Pour les morceaux circulaires C_1 et C_2 de Γ , le traitement est encore une fois le suivant: on a $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 7$, $h > 0$ et $\sin\theta \geq 0$:

$$\left| \int_{C_1} v(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \int_{C_2} v(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \exp(-hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

puis sachant que sur C_3 et C_4 , on a respectivement $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA' \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et en utilisant des majorations semblables à celle du cas $p > 0$, on obtient:

$$\left| \int_{C_i} v(n)(z) dz \right| \simeq \frac{M\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ pour } i \in \{3; 4\}$$

On a alors le résultat intermédiaire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk &= 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) \\ &\quad + \text{rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} v(n)(z) dz \\ &\quad - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[WX] \cup [YZ]} v(n)(z) dz \end{aligned}$$

• Pour les segments verticaux, on a $z = it \Rightarrow dz = i dt$ avec $t \in \mathbb{R}$. Nous effectuons alors le même traitement des racines complexes $\sqrt{z^2 + A^2}$ et $\sqrt{z^2 + A'^2}$ qu'au cas $p > 0$ et nous obtenons alors:

$$\int_{[WX]} v(n)(z) dz = - \int_{[YZ]} v(n)(z) dz$$

et en posant

$$D(t) = (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

on obtient aussi

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} v(n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \frac{(it)^n \exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} dt$$

En notant

$$M(1, n) = \int_A^{A'} \left[\frac{(it)^n \exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} v(n)(z) dz = M(1, n)$$

• Pour le calcul des résidus de la fonction $v(n)(z)$, nous nous aidons des calculs effectués pour l'intégrale $I(0, n)$, exactement comme nous l'avons fait pour la fonction $s(n)(z)$.

• $\text{rés}(v(n); iB) = \lim_{z \rightarrow iB} [(z - iB) v(n)(z)]$

on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{rés}(v(n); iB) = \frac{(iB)^n \exp(-hB)}{-8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

• $\text{rés}(v(n); (a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (a+ib)} [(z - (a + ib)) v(n)(z)]$

on obtient:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_4 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_9 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(v(n); (a + ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iba) \exp(-hb)}{32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_4 EX_9}$$

- $\text{rés}(v(n); (-a + ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a + ib)} [(z - (-a + ib)) v(n)(z)]$

on obtient:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_5 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_{10} = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{b + A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{b - A'}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(v(n); (-a + ib)) = \frac{(-a + ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (-a + ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] EX_3 EX_8 EX_5 EX_{10}}$$

- Alors pour $n \in \{2; 4; 6\}$

$$\int_{\mathbb{R}} v(n)(k) dk = 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) + \text{rés}(v(n); (-a + ib))] - M(1, n)$$

• Calcul de $\int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk$

La différence notable avec le calcul qui vient d'être fait pour la fonction $v(n)(k)$ est le changement de parcours: on utilise Γ' , pris dans le sens indirect. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux conséquences de cette modification pour les deux racines complexes $\sqrt{z^2 + A^2}$ et $\sqrt{z^2 + A'^2}$.

D'après la figure (A.20), nous avons les égalités suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma'} w(n)(z) dz &= \int_{[-R; R]} w(n)(z) dz + \int_{C_4 \cup C_5 \cup C_6} w(n)(z) dz \\ &+ \int_{[P'Q']} w(n)(z) dz + \int_{[R'S']} w(n)(z) dz \\ &+ \int_{[W'X']} w(n)(z) dz + \int_{[Y'Z']} w(n)(z) dz \\ &= -2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) \\ &+ \text{rés}(w(n); (-a - ib))] \end{aligned} \right.$$

et

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R; R]} w(n)(z) dz \right.$$

- Pour les morceaux circulaires de Γ' , le fait que C_5 et C_6 soient situés sous l'axe des réels, va permettre de faire le travail suivant:

on a d'abord sur C_5 et C_6 , $z = R \exp(i\theta) \Rightarrow dz = iR \exp(i\theta) d\theta$, et on obtient (M étant une constante réelle strictement positive), comme $n \leq 7$, $h > 0$ et $\sin\theta \leq 0$:

$$\left| \int_{C_5} w(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \left| \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \exp(hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

et

$$\left| \int_{C_6} w(n)(z) dz \right| \simeq M \frac{R^{n+1}}{R^{10}} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \exp(hR \sin\theta) d\theta \right| \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

puis sachant que sur C_7 et C_8 , on a respectivement $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et $z = \varepsilon \exp(i\theta) + iA' \Rightarrow dz = i\varepsilon \exp(i\theta) d\theta$, et en utilisant des majorations semblables à celle du cas $p > 0$, on obtient:

$$\left| \int_{C_i} w(n)(z) dz \right| \simeq \frac{M \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ pour } i \in \{7; 8\}$$

On a alors le résultat intermédiaire:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk &= -2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) \\ &\quad + \text{rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(n)(z) dz \\ &\quad - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{[W'X'] \cup [Y'Z']} w(n)(z) dz \end{aligned}$$

• Pour les segments verticaux, on a encore $z = it \Rightarrow dz = i dt$, mais cette fois avec $t < -A$. La conséquence est que le traitement des deux racines complexes $\sqrt{z^2 + A^2}$ et $\sqrt{z^2 + A'^2}$, fait en suivant la même technique qu'au cas $p > 0$, donne des résultats différents, que nous détaillons maintenant:

- Pour les segments verticaux $[W'X']$ et $[Y'Z']$, comme $t < A'$, on a

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA| + \ln |z - iA|]\right) = \sqrt{t^2 - A^2} \\ \exp\left(\frac{1}{2} [\ln |z + iA'| + \ln |z - iA'|]\right) = \sqrt{t^2 - A'^2} \end{cases}$$

- Comme le segment $[W'X']$ est situé à droite des deux coupures, on a :

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = -\frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = -\frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = -i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = -i\sqrt{t^2 - A'^2} \end{cases}$$

et en posant :

$$N(t) = (it)^n \exp(ht)$$

$$D(t) = -t^2 (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

nous obtenons finalement pour le segment $[W'X']$:

$$\int_{[W'X']} w^{(n)}(z) dz = \int_{-R}^{-(A'+\varepsilon)} \left[\frac{N(t)}{-4 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{t^2 - A'^2} D(t)} \right] i dt$$

- Comme le segment $[Y'Z']$ est situé à gauche des deux coupures, on a :

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{3\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{3\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

alors:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = i\sqrt{t^2 - A'^2} \end{cases}$$

et gardant les notations $N(t)$ et $D(t)$ précédentes, nous obtenons finalement pour le segment $[Y'Z']$:

$$\int_{[Y'Z']} w(n)(z) dz = \int_{-(A'+\varepsilon)}^{-R} \left[\frac{N(t)}{-4\sqrt{t^2 - A^2}\sqrt{t^2 - A'^2} D(t)} \right] i dt$$

Nous avons, comme auparavant pour les segments $[WX]$ et $[YZ]$, la propriété que les intégrales sur les segments $[W'X']$ et $[Y'Z']$ s'annulent:

$$\int_{[W'X']} f(p, n)(z) dz = - \int_{[Y'Z']} f(p, n)(z) dz$$

- Pour les segments verticaux $[P'Q']$ et $[R'S']$, comme $A' < t < A$, on a

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2}[\ln|z + iA| + \ln|z - iA|]\right) = \sqrt{t^2 - A^2} \\ \exp\left(\frac{1}{2}[\ln|z + iA'| + \ln|z - iA'|]\right) = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

- Comme le segment $[P'Q']$ est situé à droite de la coupure, on a en plus:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = -\frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

donc:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = -i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

et gardant les notations $N(t)$ et $D(t)$ précédentes, nous obtenons finalement pour le segment $[P'Q']$:

$$\int_{[P'Q']} w^{(n)}(z) dz = \int_{-A'+\varepsilon}^{-A-\varepsilon} \left[\frac{N(t)}{-4\sqrt{t^2 - A^2}\sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} \right] dt$$

• Comme le segment $[R'S']$ est situé à gauche de la coupure, on a:

$$\begin{cases} \arg(z + iA) = \frac{3\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA) = -\frac{\pi}{2} \\ \arg(z + iA') = \frac{\pi}{2} & \text{et} & \arg(z - iA') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

alors:

$$\begin{cases} \sqrt{z^2 + A^2} = i\sqrt{t^2 - A^2} \\ \sqrt{z^2 + A'^2} = \sqrt{A'^2 - t^2} \end{cases}$$

et gardant les notations $N(t)$ et $D(t)$ précédentes, nous obtenons finalement pour le segment $[R'S']$:

$$\int_{[R'S']} w^{(n)}(z) dz = \int_{-A-\varepsilon}^{-A'+\varepsilon} \left[\frac{N(t)}{4\sqrt{t^2 - A^2}\sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} \right] dt$$

En posant désormais:

$$D(t) = (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

nous obtenons finalement pour l'ensemble des deux segments $[P'Q']$ et $[R'S']$:

$$\int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(n)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \left[\frac{(it)^n \exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} \right] dt$$

Nous avons déjà posé la limite de ce résultat, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, égale à $M(1, n)$. On a donc:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(n)(z) dz = M(1, n)$$

• Pour le calcul des résidus de la fonction $w(n)(z)$, nous nous aidons des calculs effectués pour l'intégrale $I(0, n)$, en tenant compte bien sûr de la présence au dénominateur de la seconde racine complexe. A et A' jouant toujours le même rôle, les résultats s'obtiennent alors immédiatement.

• $\text{rés}(w(n); -iB) = \lim_{z \rightarrow -iB} [(z + iB) v(n)(z)]$

on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour } p = 0 \text{ et } n \in \{2; 4; 6\}, \\ \text{rés}(w(n); -iB) = \frac{(-iB)^n \exp(-hB)}{8 i B^3 \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A'^2 - B^2} [B^2 + (a + ib)^2] [B^2 + (a - ib)^2]} \end{array} \right.$$

• $\text{rés}(w(n); (-a - ib)) = \lim_{z \rightarrow (-a - ib)} [(z - (-a - ib)) v(n)(z)]$

on obtient:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_6 = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_{11} = \exp \left(-\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A' - b}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A'}{\sqrt{a^2 + (-b - A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(w(n); (-a - ib)) = \frac{(a + ib)^n \exp(iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a + ib)^3 [B^2 + (a + ib)^2] EX_3 EX_8 EX_6 EX_{11}}$$

- $\text{rés}(w(n); (a - ib)) = \lim_{z \rightarrow (a - ib)} [(z - (a - ib)) v(n)(z)]$

on obtient:

pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\text{avec } EX_3 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A)^2} \sqrt{a^2 + (b - A)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_8 = \left(\sqrt{a^2 + (b + A')^2} \sqrt{a^2 + (b - A')^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } EX_7 = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A - b}{\sqrt{a^2 + (b - A)^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A}{\sqrt{a^2 + (b + A)^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{avec } EX_{12} = \exp \left(\frac{i}{2} \left[\arcsin \left(\frac{A' - b}{\sqrt{a^2 + (b - A')^2}} \right) + \arcsin \left(\frac{-b - A'}{\sqrt{a^2 + (b + A')^2}} \right) \right] \right)$$

$$\text{rés}(w(n); (a - ib)) = \frac{(a - ib)^n \exp(-iha) \exp(-hb)}{-32 i a b (a - ib)^3 [B^2 + (a - ib)^2] EX_3 EX_8 EX_7 EX_{12}}$$

- Alors pour $n \in \{2; 4; 6\}$

$$\int_{\mathbb{R}} w(n)(k) dk = -2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) \\ + \text{rés}(w(n); (-a - ib))] - M(1, n)$$

Bilan

Nous regroupons les résultats obtenus pour $\int_{-\infty}^{+\infty} s(n) dk$, $\int_{-\infty}^{+\infty} v(n) dk$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} w(n) dk$, et (A.5) permet, comme nous l'avons fait pour $I(0, n)$, de conclure:

Alors pour $p = 0$ et $n \in \{2; 4; 6\}$,

$$\begin{aligned} K(p, n) &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a + ib)) + \text{rés}(s(n); (-a + ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a + ib)) + \text{rés}(v(n); (-a + ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a - ib)) + \text{rés}(w(n); (-a - ib))] \\ &\quad - 2M(0, n) + 2M(1, n) \end{aligned}$$

Sous-cas iii) n pair et $n = 0$

On a alors

$$f(0, 0)(z) = \frac{1}{K_S} \frac{1}{K_P} \frac{1}{P(z)} z^2 \sin^2\left(\frac{zh}{2}\right)$$

Comme pour $J(0, 0)$ et $I(0, 0)$, 0 n'est pas un pôle de $f(0, 0)$, mais est un pôle double des fonctions $s(0)(k)$, $v(0)(k)$ et $w(0)(k)$, par lesquelles nous sommes obligés de passer pour effectuer ce calcul.

Le parcours Γ_0 utilisé pour les fonctions $s(0)(z)$ et $v(0)(z)$ est décrit par la figure (A.21). Pour intégrer sur \mathbb{R} la fonction $w(0)(z)$, le parcours Γ_1 utilisé est décrit par la figure (A.22).

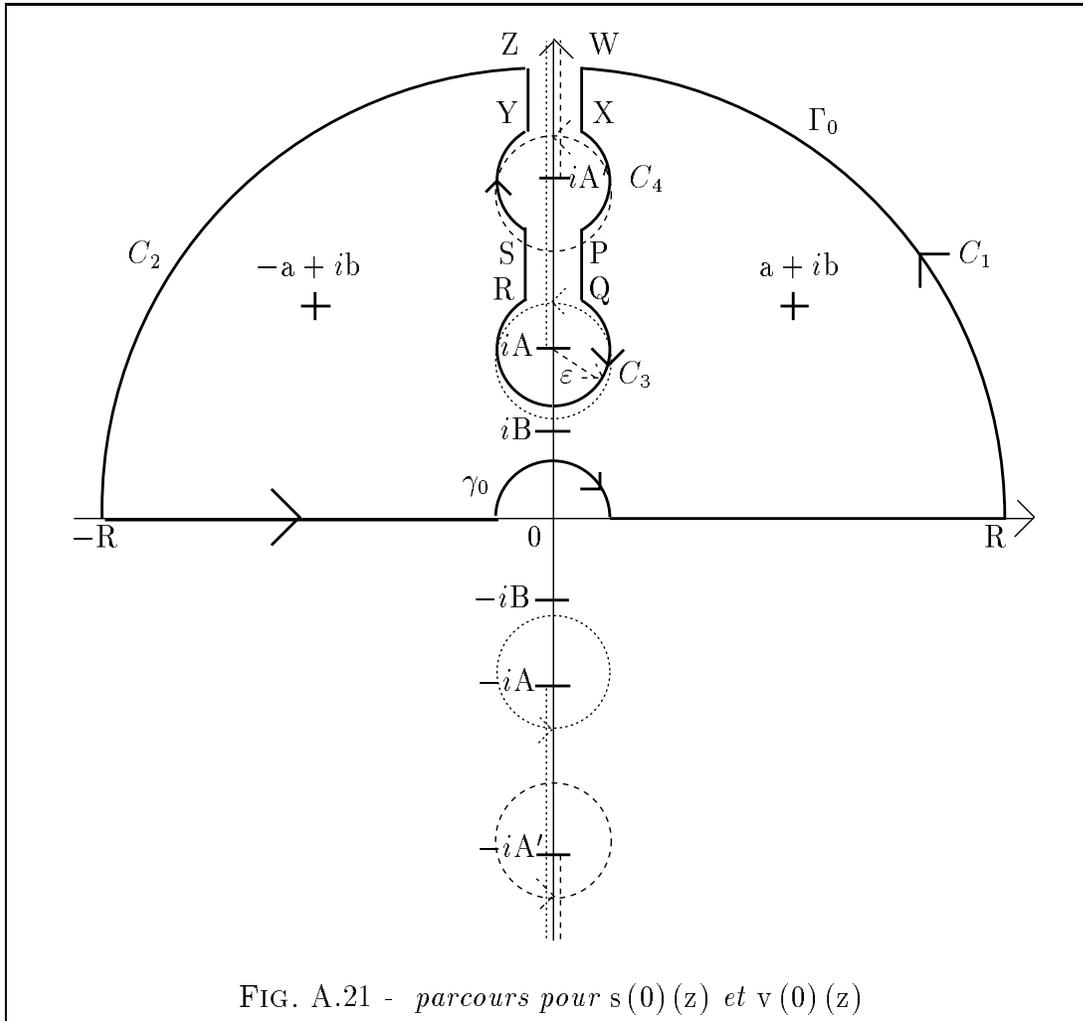
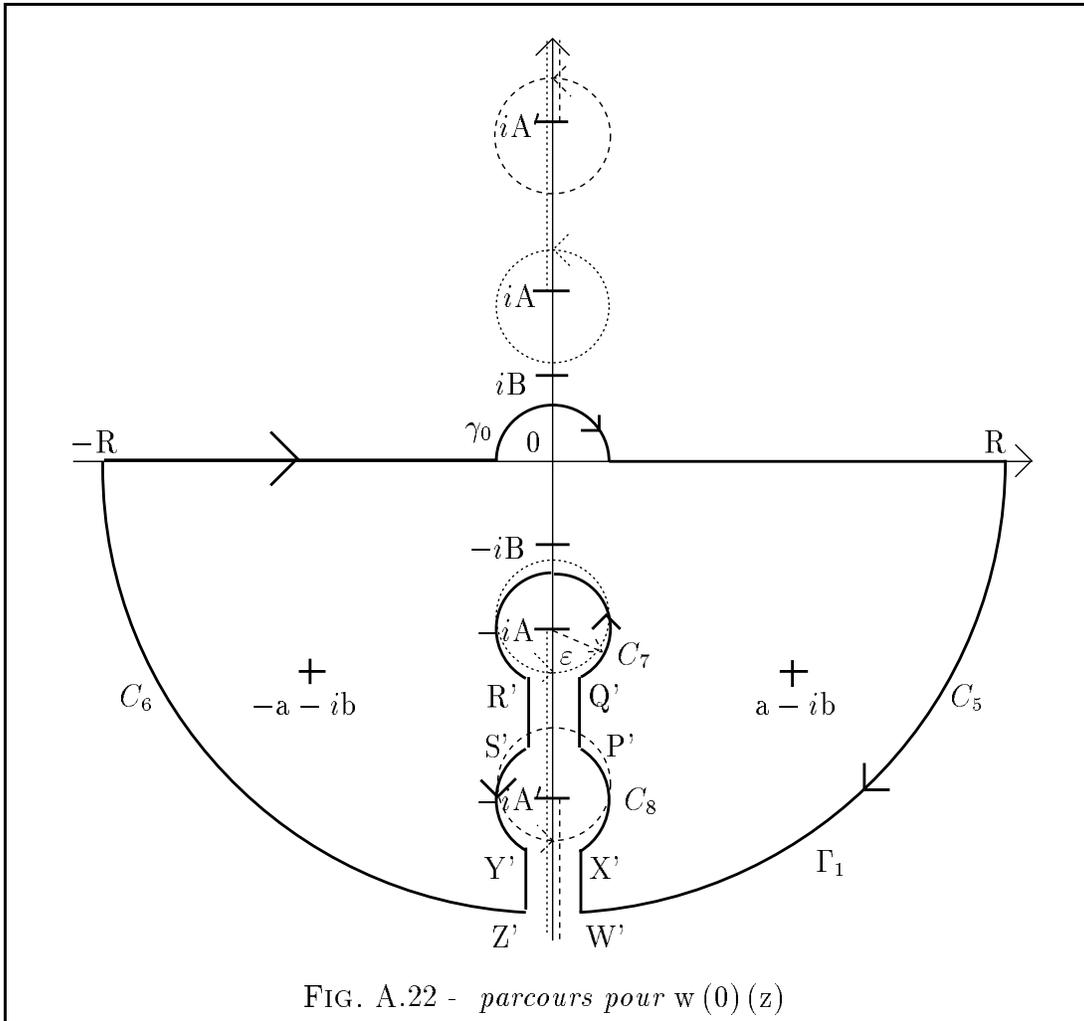


FIG. A.21 - parcours pour $s(0)(z)$ et $v(0)(z)$

γ_0 désigne le petit demi-cercle: soit ϵ son rayon.



Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} s(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} s(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} s(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} s(0)(z) dz \\
&+ \int_{[PQ]} s(0)(z) dz + \int_{[RS]} s(0)(z) dz \\
&+ \int_{[WX]} s(0)(z) dz + \int_{[YZ]} s(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_1} s(0)(z) dz + \int_{C_2} s(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_3} s(0)(z) dz + \int_{C_4} s(0)(z) dz \\
&= 2i\pi [\text{rés}(s(0); iB) + \text{rés}(s(0); (a + ib)) + \text{rés}(s(0); (-a + ib))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} v(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} v(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} v(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} v(0)(z) dz \\
&+ \int_{[PQ]} v(0)(z) dz + \int_{[RS]} v(0)(z) dz \\
&+ \int_{[WX]} v(0)(z) dz + \int_{[YZ]} v(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_1} v(0)(z) dz + \int_{C_2} v(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_3} v(0)(z) dz + \int_{C_4} v(0)(z) dz \\
&= 2i\pi [\text{rés}(v(0); iB) + \text{rés}(v(0); (a + ib)) + \text{rés}(v(0); (-a + ib))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} w(0)(z) dz &= \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz + \int_{\gamma_0} w(0)(z) dz \\
&+ \int_{[P'Q']} w(0)(z) dz + \int_{[R'S']} w(0)(z) dz \\
&+ \int_{[W'X']} w(0)(z) dz + \int_{[Y'Z']} w(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_5} w(0)(z) dz + \int_{C_6} w(0)(z) dz \\
&+ \int_{C_7} w(0)(z) dz + \int_{C_8} w(0)(z) dz \\
&= -2i\pi [\text{rés}(w(0); -iB) + \text{rés}(w(0); (a - ib)) + \text{rés}(w(0); (-a - ib))] \\
&- 2i\pi \text{rés}(w(0); 0)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$K(0, 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \begin{bmatrix} \int_{]-R; -\varepsilon[} s(0)(z) dz + \int_{] \varepsilon; R[} s(0)(z) dz \\ - \int_{]-R; -\varepsilon[} v(0)(z) dz - \int_{] \varepsilon; R[} v(0)(z) dz \\ - \int_{]-R; -\varepsilon[} w(0)(z) dz - \int_{] \varepsilon; R[} w(0)(z) dz \end{bmatrix}$$

En procédant exactement comme au cas $n \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} s(0)(z) dz \rightarrow 0 & i \in \{1; 2\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_i} s(0)(z) dz \rightarrow 0 & i \in \{3; 4\} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} v(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{1; 2\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_i} v(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{3; 4\} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_i} w(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{5; 6\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_i} w(0)(z) dz \rightarrow 0 \quad i \in \{7; 8\} \end{array} \right.$$

Pour les huit segments verticaux $[WX]$, $[YZ]$, $[PQ]$, $[RS]$, $[W'X']$, $[Y'Z']$, $[P'Q']$ et $[R'S']$, on a toujours $z = it \Rightarrow dz = i dt$, avec $t \in \mathbb{R}$. Il suffit de répéter pour ces segments le travail que l'on vient de faire pour le cas $n \neq 0$ et on obtient d'une part que:

$$\int_{[WX]} s(0)(z) dz = - \int_{[YZ]} s(0)(z) dz$$

$$\int_{[WX]} v(0)(z) dz = - \int_{[YZ]} v(0)(z) dz$$

$$\int_{[WX]} w(0)(z) dz = - \int_{[YZ]} w(0)(z) dz$$

$$\int_{[W'X']} s(0)(z) dz = - \int_{[Y'Z']} s(0)(z) dz$$

$$\int_{[W'X']} v(0)(z) dz = - \int_{[Y'Z']} v(0)(z) dz$$

$$\int_{[W'X']} w(0)(z) dz = - \int_{[Y'Z']} w(0)(z) dz$$

et d'autre part , en posant toujours:

$$D(t) = (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]$$

on a:

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} s(0)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \frac{1}{t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} dt$$

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} v(0)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \frac{\exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} dt$$

$$\int_{[PQ] \cup [RS]} w(0)(z) dz = \int_{A+\varepsilon}^{A'-\varepsilon} \frac{\exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} D(t)} dt$$

On pose alors:

$$M(0, 0) = \int_A^{A'} \left[\frac{1}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

$$M(1, 0) = \int_A^{A'} \left[\frac{\exp(-ht)}{2 t^2 \sqrt{t^2 - A^2} \sqrt{A'^2 - t^2} (B^2 - t^2) [t^2 + (a + ib)^2] [t^2 + (a - ib)^2]} \right] dt$$

Ceci permet d'écrire:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} s(0)(z) dz = 2M(0,0)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[PQ] \cup [RS]} v(0)(z) dz = M(1,0)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[P'Q'] \cup [R'S']} w(0)(z) dz = M(1,0)$$

En regroupant tous ces résultats, on en déduit l'expression suivante pour $K(0,0)$:

$$\begin{aligned} K(0,0) &= 2i\pi [\text{rés}(s(0); iB) + \text{rés}(s(0); (a+ib)) + \text{rés}(s(0); (-a+ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v(0); iB) + \text{rés}(v(0); (a+ib)) + \text{rés}(v(0); (-a+ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w(0); -iB) + \text{rés}(w(0); (a-ib)) + \text{rés}(w(0); (-a-ib))] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} u(0)(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} v(0)(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} w(0)(z) dz \\ &\quad - 2M(0,0) + 2M(1,0) + 2i\pi \text{rés}(w(0); 0) \end{aligned}$$

Comme $f(0,0)(z) = s(0)(z) - v(0)(z) - w(0)(z)$ et $f(0,0)(z)$ est analytique au point 0, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_0} f(0,0)(z) dz = 0$$

Ce qui permet de conclure.

Alors pour $p = 0$ et $n = 0$

$$\begin{aligned} K(p,n) &= 2i\pi [\text{rés}(s(n); iB) + \text{rés}(s(n); (a+ib)) + \text{rés}(s(n); (-a+ib))] \\ &\quad - 2i\pi [\text{rés}(v(n); iB) + \text{rés}(v(n); (a+ib)) + \text{rés}(v(n); (-a+ib))] \\ &\quad + 2i\pi [\text{rés}(w(n); -iB) + \text{rés}(w(n); (a-ib)) + \text{rés}(w(n); (-a-ib))] \\ &\quad - 2M(0,0) + 2M(1,0) + 2i\pi \text{rés}(w(0); 0) \end{aligned}$$

Calcul des résidus correspondant à ce cas

Les expressions de tous les résidus de $s(n)(z)$, $v(n)(z)$ et $w(n)(z)$, calculés pour le cas $n \neq 0$, sont encore valables quand $n = 0$.

Nous avons donc à calculer seulement $\text{rés}(w(0); 0)$, en tenant compte que 0 est un pôle double de la fonction $w(0)(z)$. Mais comme nous avons déjà calculé ce résidu pour $I(0, 0)$, on obtient facilement le résultat.

$$\bullet \text{rés}(w(n); 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dz} [z^2 w(n)(z)] \right)$$

le résultat du calcul donnant:

$$\left| \text{rés}(w(0); 0) = \frac{-ih}{4 A A' B^2 (a + ib)^2 (a - ib)^2} \right.$$

Bibliographie

- [1] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North Holland, 1980.
- [2] J. D. Achenbach and A. K. Gautesen. Elastic Surface Waves Guided by the Edge of a Slit. *J. Sound Vibr.*, 53:407–416, 1977.
- [3] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids*, volume I et II. Wiley-Interscience, 1973,.
- [4] A. Bamberger. Approximation de la Diffraction d'Ondes Élastiques, une Nouvelle Approche (I). Technical report, Ecole Polytechnique, CMAP, 1983. Rapport Interne n° 91.
- [5] A. Bamberger. Approximation de la Diffraction d'Ondes Élastiques, une Nouvelle Approche (II). Technical report, Ecole Polytechnique, CMAP, 1983. Rapport Interne n° 96.
- [6] A. Bamberger. Approximation de la Diffraction d'Ondes Élastiques, une Nouvelle Approche (III). Technical report, Ecole Polytechnique, CMAP, 1983. Rapport Interne n° 98.
- [7] A. Bamberger and A. S. Bonnet. Mathematical Analysis of the Guided Modes of an Optical Fibre. *SIAM. J. Math. Anal.*, à paraître.
- [8] A. Bamberger, Y. Dermenjian, and P. Joly. Mathematical Analysis of the Propagation of Elastic Guided Waves in Heterogeneous Media. *J. of Differential Eq.*, 88(1):113–154, 1990.
- [9] A. Bamberger, P. Joly, and M. Kern. Propagation d'Ondes Élastiques Guidées par la Surface Libre d'une Cavité de Section Arbitraire. Rapport de recherche n° 650, I.N.R.I.A., 1987.
- [10] M. Biot. Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid. *J. Appl. Physics*, 23:997–1005, 1952.
- [11] M. Biot. Propagation of Elastic Waves in a liquid Filled Cylindrical Bore Surrounded by an Elastic Solid. *J. Appl. Physics*, 24:515–521, 1953.

- [12] P. Bonnemay. *Equations Intégrale pour l'Elasticité Plane*. PhD thesis, Université Paris VI, 1979. Thèse.
- [13] A. S. Bonnet. *Analyse Mathématique de la Propagation de Modes Guidés dans les Fibres Optiques*. PhD thesis, Université Paris VI, 1988. Thèse.
- [14] A. Boström. Transmission and Reflection of Acoustic Waves by an Obstacle in a Waveguide. *Wave Motion*, 2:167–184, 1980.
- [15] A. Bostrom. Elastic wave Scattering from an Interface Crack: Antiplane Strain. *J. Appl. Mech.*, 54:503–508, 1987.
- [16] A. Bostrom and A. D. Burden. Propagation of Elastic Surface Waves and their Excitation by a Point Force. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 72:914–1004, 1982.
- [17] A. D. Burden. Propagation of Elastic Surface Waves along a Cylindrical Cavity of General Cross Section. *Wave Motion*, 7:153–168, 1985.
- [18] A. D. Burden. The Null-Field Approach and the Propagation of Elastic Surface Waves along Cylindrical Cavities. *Applied Scientific Research*, 42:333–346, 1985.
- [19] P. Chadwick. Recent Developments in the Theory of Elastic Surface and Interfacial Waves. In M. F. McCarthy and M. A. Hayes, editors, *Elastic Wave Propagation*, volume 35, pages 3–16. North Holland, 1988.
- [20] Y. Dermenjian and J.-C. Guillot. Scattering of elastic waves in a perturbed isotropic half space with a free boundary. The limiting absorption principle. Rapport de recherche n° 491, I.N.R.I.A., 1986.
- [21] A. S. Bonnet-Ben Dhia and P. Joly. Mathematical analysis of guided water waves. Technical report, I.N.R.I.A., 1992.
- [22] A. S. Bonnet-Ben Dhia and P. Joly. Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et application à l'étude des modes guidés. Cours de d.e.a., E.N.S.T.A., 1993.
- [23] R. Djellouli. *Contributions à l'Analyse Mathématique et au Calcul des Modes Guidés des Fibres Optiques*. PhD thesis, Université Paris XI, 1988. Thèse.
- [24] A. C. Eringen and E. S. Suhubi. *Elastodynamics*, volume I et II. Academic Press, 1974,.
- [25] P. Lascaux et R. Theodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, volume II. Masson, 1987.

-
- [26] J. C. Guillot. Existence and Uniqueness of a Rayleigh Wave Propagating along the Free Boundary of a Transversally Isotropic Elastic Half Space. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 8:289–310, 1986.
- [27] P. Joly. *Analyse Numérique et Mathématique de Modèles de Propagation d'Ondes Acoustiques, Élastiques et Électromagnétiques*. PhD thesis, Université Paris IX, 1987. Thèse d'Etat.
- [28] P. Joly and J. Tlili. Approche par Equations Intégrales d'un Problème d'Ondes de Surface Élastiques. Rapport de recherche n° 1523, I.N.R.I.A., 1991.
- [29] P. Joly and J. Tlili. Elastic Waves Guided by an Infinite Plane Crack. *Wave Motion*, 1991.
- [30] A. Kondratiev and O.A. Oleinik. On Korn's inequalities. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, t. 308:483–487, 1989.
- [31] P. E. Lagasse. Higher Order Finite Element Analysis of Topographic Guides Supporting Elastic Surface Waves. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 53:1116–1122, 1973.
- [32] P. E. Lagasse, I. M. Mason, and E. A. Ash. Acoustic Surface Waveguides - Analysis and assessment. *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, 21:225–236, 1973.
- [33] A. A. Maradudin. Surface Acoustic Waves on Rough Surfaces. In PARKER D. F. and MAUGIN G. A., editors, *Recent Developments in Surface Acoustic Waves*, pages 100–128. Springer-Verlag, 1988.
- [34] D. Marcuse. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, 1974.
- [35] V. Maz'ja. *Sobolev Spaces*. Springer, 1985.
- [36] J. Miklowitz. *The theory of Elastic Waves and Waveguides*. North Holland, 1984.
- [37] I. A. Mindlin. Free Elastic Waves on the Surface of a Tube of Infinite Thickness. *J. Appl. Math. Mech.*, 27:823–828, 1963.
- [38] D. F. Parker and G. A. Maugin, editors. *Recent Developments in Surface Acoustic Waves*. Springer-Verlag, 1988.
- [39] C. Poirier. *Guides d'ondes électromagnétiques: analyse mathématique et numérique*. PhD thesis, Université de Nantes, 1994. Thèse.
- [40] L. Rayleigh. On Waves Propagating along the plane Surface of an Elastic Solid. *Proc. London. Math. Soc.*, 17:4–11, 1885.

- [41] J. Tlili. *Calcul numérique d'ondes de surface élastiques guidées par une fissure*. PhD thesis, Université Paris VI, 1991. Thèse.
- [42] F. Ursell. Mathematical Aspects of Trapping Modes in the Theory of Surface Waves. *J. Fluid. Mech.*, 183:421–437, 1987.
- [43] C. H. Wilcox. *Sound Propagation in Stratified Fluids*. Springer-Verlag, 1984.
- [44] L. O. Wilson and J. A. Morrison. Propagation of High Frequency Elastic Surface Waves along Cylinders of General Cross Section. *J. Math. Physics*, 16:1795–1805, 1975.



Unité de recherche Inria Lorraine, Technopôle de Nancy- Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 Villers Lès Nancy
Unité de recherche Inria Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
Unité de recherche Inria Rhône- Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1
Unité de recherche Inria Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex
Unité de recherche Inria Sophia- Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia- Antipolis Cedex

Éditeur

Inria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249- 6399