HAL
open science

Mise en oeuvre de la méthode MBTT pour un modèle acoustique par différences finies

Guy Chavent, François Clément, Susana Gómez

To cite this version:

Guy Chavent, François Clément, Susana Gómez. Mise en oeuvre de la méthode MBTT pour un modèle acoustique par différences finies. [Rapport de recherche] RR-2860, INRIA. 1996. inria-00073831

HAL Id: inria-00073831

https://inria.hal.science/inria-00073831

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Mise en œuvre de la méthode MBTT pour un modèle acoustique par différences finies

Guy Chavent , François Clément , Susana Gómez

N° 2860

Avril 1996

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Mise en œuvre de la méthode MBTT pour un modèle acoustique par différences finies

Guy Chavent , François Clément , Susana Gómez *

Thème 4 — Simulation
et optimisation
de systèmes complexes
Projet Estime

Rapport de recherche n°2860 — Avril 1996 — 58 pages

Résumé : L'objet de ce rapport est la mise en œuvre d'une méthode, reposant sur une formulation en temps de parcours par migration, permettant la détermination automatique des vitesses de propagation acoustique à partir de données sismiques bidimensionnelles. Cette approche peut s'interpréter comme une méthode de dualité appliquée au problème usuel de minimisation de l'erreur des moindres carrés entre les données sismiques et les mesures prédites. La première section expose les bases de la reformulation en temps de parcours par migration. Les trois sections suivantes concernent la construction d'outils de base : simulation numérique de l'équation des ondes acoustiques par différences finies, séparation des effets de propagation et de réflexion par représentation des paramètres acoustiques dans une base multi-échelle et migration quantitative par préconditionnement de l'opérateur de migration usuel obtenu à partir d'un calcul de gradient. Les trois dernières sections concernent la reformulation en temps elle-même : description de la nouvelle modélisation directe, calcul des gradients de la nouvelle fonction coût et résultats de minimisation de cette fonction coût. Les illustrations numériques portent sur des données synthétiques obtenues à partir d'un modèle à structure simple mais comportant d'importantes variations latérales de vitesse. Les résultats d'inversion de ces données sont très satisfaisant en ce sens qu'ils sont obtenus par une méthode de minimisation locale (de type Quasi-Newton) à partir d'un point initial très pauvre (constante).

Mots-clé : Problème inverse, estimation de paramètres, inversion sismique, détermination de modèles de vitesses, migration, ondes acoustiques, analyse multi-échelle.

(Abstract: pto)

Le présent rapport est initialement paru dans le support du cours "Problèmes inverses en propagation d'ondes" organisé par l'Inria dans le cadre de l'"École des Ondes" du 20 au 24 novembre 1995.

Ces travaux de recherche ont été entrepris dans le cadre du Consortium "Prestack Structural Interpretation" et les résultats numériques ont été obtenus en partie sur le Cray C98 de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique. J'en remercie les sponsors du Consortium Psi et l'Idris.

*IMAS, National University of Mexico, Apdo. Postal 20-726, Mexico D.F.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Implementation of the MBTT Method for a Finite Differences Acoustic Model

Abstract: The aim of this report is the implementation of a method, which consists in a migration-based traveltime formulation, allowing the automatic determination of the velocities from 2D seismic data. This approach interprets itself as a duality method applied to the usual minimization problem of the least squares error between data and predicted measures. The first section presents the main idea of the migration-based traveltime formulation. The next three sections deal with the construction of basic tools: finite differences numerical simulation of the acoustic wave equation, separation of the propagation and reflection effects by representation of the acoustic parameters on a multiscaled basis and quantitative migration through a preconditionning of the usual migration operator obtained via a gradient calculation. The three last sections deal with the time formulation itself: description of the new forward model, computation of the gradients of the new cost function and results of the minimization of this cost function. Numerical illustrations are obtained with synthetic data which are computed from a model with a simple structure but with important lateral velocity variations. The results of the inversion of these data are very satisfying as they are obtained by a local (Quasi-Newton-based) minimization method from a very poor initial point (constant).

Key-words: Inverse problem, parameter estimation, seismic inversion, background velocity determination, migration, acoustic waves, multiscale analysis.

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Reformulation en temps **5**

3 Simulation **6**
3.1 Problème continu . . . 6
3.2 Problème discret . . . 7
3.3 Aspect informatique . . . 10
3.4 Résultats numériques . . . 10

4 Séparation propagateur/réflecteur **15**
4.1 Analyse de l'information disponible dans les données . . . 15
4.2 Décomposition lisse/rugueux des paramètres physiques . . . 15
4.3 Une famille de sous-espaces lisses et rugueux . . . 18
4.4 Résolution du conflit . . . 20

5 Migration **27**
5.1 Migration quantitative . . . 27
5.2 Établissement de l'équation des ondes adjointe . . . 27
5.3 Aspect informatique . . . 29
5.4 Préconditionnement . . . 30

6 Resimulation **31**
6.1 Description du calcul de la fonction coût modifiée . . . 31
6.2 Aspect informatique . . . 33
6.3 Résultats numériques . . . 33
6.4 Influence sur la fonction coût . . . 33

7 Gradients **41**
7.1 Description du calcul du gradient de $\mathcal{MJ}$ . . . 41
7.2 Aspect informatique . . . 44

8 Optimisation **45**
8.1 Méthode BFGS à mémoire limitée . . . 45
8.2 Minimisation par rapport à la réflectivité en temps . . . 45
8.3 Minimisation par rapport à la vitesse lisse . . . 45
8.4 Minimisation par rapport à la lenteur lisse . . . 46

9 Conclusion **56**

A Modèle Synclay **56**

B Modèle Marmousi **57**

1 Introduction

La méthode de reformulation en temps de parcours par migration (ou MBTT, pour Migration-Based Travel-Time) du problème d'inversion sismique par forme d'onde, introduite dans [9, 8], permet d'éliminer les minima locaux de l'erreur des moindres carrés entre les données sismiques et les sismogrammes synthétiques, favorisant ainsi l'emploi de méthodes d'optimisation locale. Cette méthode repose sur un changement d'inconnue de réflectivité par une opération de migration, elle se situe dans le cadre des méthodes de dualité présentées par Chavent, *cf.* [7], également disponible dans le présent volume.

Le présent article décrit la mise en œuvre de la reformulation en temps dans le cas d'une modélisation directe par approximation aux différences finies de l'équation des ondes acoustiques bidimensionnelle complète (non linéarisée), qui est historiquement le cadre dans lequel la méthode a été développée. Ce choix, qui repose sur le savoir-faire acquis à l'Inria dans ce domaine, a permis un développement rapide de la méthode et l'obtention de résultats probants, mais il s'est révélé coûteux à l'usage. C'est pourquoi une seconde implémentation, par approximation de Born et tracé de rayons a été entreprise par Plessix, *cf.* [15], et une troisième implémentation, par approximation de Born et approximation paraxiale de l'équation des ondes, est actuellement en cours de développement par Lavaud.

D'autre part, ce choix nous a aussi permis d'aborder le problème de la séparation des effets de propagation et de réflexion de l'énergie dans les paramètres acoustiques, les approximations de Born (modèles linéarisés) proposant intrinsèquement une solution à ce problème. La solution simple retenue, par analyse multiéchelle des paramètres acoustiques, repose sur l'utilisation de fonctions de base continues bilinéaires par morceaux.

Le second point important est la migration quantitative, également développée dans le cadre de la modélisation par tracé de rayons. Elle consiste à remplacer un pas de gradient pur (migration brute) par un pas de quasi-Newton en préconditionnant la direction de plus grande pente par une approximation de l'inverse du Hessien. C'est le point clef de la méthode : il permet de construire dans de bonnes conditions l'opérateur de resimulation qui n'est plus sensible aux déphasages.

Dans une première section, nous rappelons brièvement les étapes principales de l'algorithme de reformulation en temps (simulation, séparation propagateur/réflecteur, migration, resimulation, gradients), puis nous les détaillons dans les sections suivantes dans le cadre du modèle acoustique par différences finies et nous les illustrons à l'aide du modèle synthétique SYNCLAY décrit en annexe. Nous évoquons également en annexe le modèle MARMOUSI afin de donner un point de repère réaliste.

2 Reformulation en temps

Nous ne rappellons ici que les grandes lignes de la méthode MBTT. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [9, 8, 7, 10].

Étant donné un espace de dimension finie V_h permettant la description discrète d'un milieu donné, par la donnée de paramètres physiques (vitesse, densité,...) dans cet espace, supposons l'existence de deux sous-espace Π et R permettant de décrire respectivement les propriétés de propagation et de réflexion de l'énergie dans ce milieu.

Soit $\mathcal{I}\varphi$ une modélisation directe permettant d'associer à chaque propagateur $\pi \in \Pi$ et à chaque réflecteur $r \in R$ la collection de sismogrammes synthétiques $c = (c_1, ..., c_N) \in D$ obtenue par propagation de N signaux donnés dans le milieu décrit par π et r,

$$\mathcal{I}\varphi : \begin{array}{ccc} \Pi \times R & \longrightarrow & D \\ (\pi, r) & \longmapsto & c \end{array} \tag{1}$$

où D est l'espace de dimension finie des sismogrammes. Étant donnée une collection de données sismiques $d = (d_1, ..., d_N) \in D$, soit le critère d'erreur des moindres carrés défini par

$$\mathcal{I}\mathcal{J}(\pi, r) = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{I}\mathcal{J}_n(\pi, r) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{I}\mathcal{J}_n(\pi, r) = \frac{1}{2}||d_n - c_n||^2 \tag{2}$$

où $||.||$ est la norme euclidienne sur l'espace des sismogrammes. Le problème inverse sismique consiste à minimiser $\mathcal{J}$. Ce critère est presque quadratique par rapport au réflecteur r mais fortement non-convexe par rapport au propagateur π.

Étant donné un propagateur $\pi \in \Pi$, soit $B(\pi)$ la modélisation directe linéarisée en $r = 0$,

$$B(\pi) = \frac{\partial \mathcal{I}\varphi}{\partial r}(\pi, 0). \tag{3}$$

Le gradient et le Hessien du critère sont alors donnés par

$$\nabla_r \mathcal{I}\mathcal{J}(\pi, 0) = B(\pi)^T d \qquad \text{et} \qquad \nabla^2_{rr} \mathcal{I}\mathcal{J}(\pi, 0) = B(\pi)^T B(\pi).$$

L'opérateur transposé $B(\pi)^T$ est un opérateur de migration. Il restitue la position des réflecteurs, car le Hessien est concentré sur la diagonale principale, mais pas leurs amplitudes, car ces éléments diagonaux décroissent assez rapidement avec la profondeur. Étant donnée une matrice symétrique définie positive Λ approchant l'inverse du Hessien, soit l'opérateur de migration quantitative défini par

$$\mathcal{M}(\pi) = \Lambda B(\pi)^T. \tag{4}$$

Le préconditionnement par Λ a pour but de restituer les amplitudes des réflecteurs en remplaçant la direction du gradient par une direction de quasi-Newton.

La reformulation en temps de parcours par migration (MBTT) du problème inverse sismique consiste alors, pour chaque propagateur $\pi \in \Pi$, à remplacer l'inconnue réflecteur $r \in R$, dans le domaine spatial, par l'inconnue réflectivité en temps $s \in D$, dans le domaine temporel, via une migration quantitative,

$$r = \mathcal{M}(\pi)s. \tag{5}$$

Ces deux inconnues de réflectivité sont duales l'une de l'autre pour la dualité convexe de Fenchel-Rockaffelar, *cf.* [7]. La nouvelle modélisation directe définie par

$$\begin{array}{rccccc} \mathcal{M}\varphi : & \Pi \times D & \stackrel{\mathcal{M}(\pi)}{\longrightarrow} & \Pi \times R & \stackrel{\mathcal{I}\varphi}{\longrightarrow} & D \\ & (\pi, s) & \longmapsto & (\pi, r = \mathcal{M}(\pi)s) & \longmapsto & c \end{array} \tag{6}$$

est appelée "resimulation de la réflectivité en temps s avec le propagateur π" ou modélisation directe modifiée. La fonction coût correspondante $\mathcal{M}\mathcal{J}$ est appellée fonction coût modifiée.

Le premier avantage de cette reformulation en temps est de rendre le critère des moindres carrés presque convexe par rapport au propagateur π à réflectivité en temps s fixée, au moins dans le cas de milieux à structure simple. Le second avantage est que la migration étant quantitative, la réflectivité en temps optimale est proche des données.

3 Simulation

Dans cette section, nous décrivons la construction d'un simulateur acoustique 2D par un schéma aux différences finies d'ordre 2 en espace et en temps.

3.1 Problème continu

Un milieu acoustique est déterminé par la donnée de deux paramètres physiques : la vitesse des ondes de compression v_p et la densité ρ, ou mieux, la lenteur $\nu = 1/v_p$ et l'impédance acoustique $\sigma = \rho v_p$. Étant donné un domaine Ω du demi-plan $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^\star_+$ ($z > 0$ est la profondeur), soit

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) / \exists \alpha_{\min}, \alpha_{\max} > 0 : \forall (x, z) \in \Omega, \alpha_{\min} \leq \alpha(x, z) \leq \alpha_{\max}\}$$

l'ensemble des paramètres admissibles (nous serons amenés à distinguer $\mathcal{B}_\nu$ et $\mathcal{B}_\sigma$).

Soit $\Omega =]0, X[\times]0, Z[$ un domaine rectangulaire de frontière supérieure Γ_0, de frontières artificielles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 et de coins inférieurs B et C, *cf.* Figure 1. Soit δ^ε_S une fonction régulière de support le disque $D(S, \varepsilon) \subset \Omega$ de centre S et de rayon $\varepsilon > 0$ approchant la masse de Dirac en S. La fonction $((\mathbf{x}, t) \mapsto f(t)\delta^\varepsilon_S(\mathbf{x}))$ est supposée être dans $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ et à support compact $D(S, \varepsilon) \times [0, T_s]$ avec $0 < T_s \ll T$ où T est la durée d'enregistrement.

Étant donnés $\nu, \sigma \in \mathcal{B}$, l'équation des ondes acoustiques dans le domaine Ω munie d'une condition de surface libre, de conditions aux limites absorbantes d'ordre 2 et de conditions initiales homogènes s'écrit

$$\frac{\nu}{\sigma}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla\left(\frac{1}{\nu\sigma}\nabla p\right) = f(t)\delta^\varepsilon_S \qquad \text{dans } \Omega, \tag{7}$$

$$p = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n_i} + \nu\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\nu}{2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_i, i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

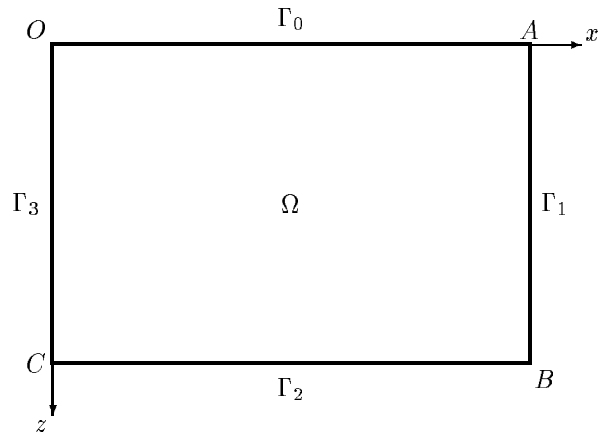

FIG. 1 – *Le domaine et sa frontière. La surface est notée* Γ_0 *(segment d'extrémités* O *et* A*). La frontière artificielle est notée* Γ_a*, elle se décompose en trois cotés disjoints* Γ_1*,* Γ_2 *et* Γ_3 *et deux coins* B *et* C*.*

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\tau_i}\left(\frac{1}{\nu^2\sigma}\frac{\partial p}{\partial\tau_i}\right) \qquad \text{sur } \Gamma_i, i = 1,2,3, \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{3\nu}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \text{en } B \text{ et } C, \tag{11}$$

$$p = \frac{\partial p}{\partial t} = \varphi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0 \qquad \text{à } t = 0, i = 1,2,3. \tag{12}$$

où p est le champ de pression et, pour $i = 1,2,3$, φ_i est une fonction auxiliaire définie sur le bord artificiel Γ_i. Pour $i = 1,2,3$, $\frac{\partial}{\partial n_i}$ et $\frac{\partial}{\partial\tau_i}$ sont respectivement les dérivées normale et tangentielle au bord Γ_i. Aux coins, $\frac{\partial}{\partial n_B} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial n_C} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$.

Soient les espaces fonctionnels

$$\begin{aligned}
W_i &= \{u \in \mathcal{H}^1(\Gamma_i)/u_{|\overline{\Gamma}_i\cap\Gamma_0} \equiv 0\}, \qquad i = 1,2,3,\\
W_{iT} &= \left\{u \in \mathcal{L}^\infty(0,T;W_i) \Big/ \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Gamma_i))\right\}, \qquad i = 1,2,3,\\
V_a &= \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega)/u_{|\Gamma_0} \equiv 0 \text{ et } (u_{|\Gamma_1}, u_{|\Gamma_2}, u_{|\Gamma_3}) \in W_a\},\\
V_{aT} &= \left\{u \in \mathcal{L}^\infty(0,T;V_a) \Big/ \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))\right\}.
\end{aligned}$$

avec $W_a = W_1 \times W_2 \times W_3$ et $W_{aT} = W_{1T} \times W_{2T} \times W_{3T}$. Le système d'équations aux dérivées partielles (7), (8), (9), (10), (11) et (12) admet la formulation variationnelle, *cf.* [1, 11] : étant donnés $\nu, \sigma \in \mathcal{B}$, trouver $p \in V_{aT}$ avec $p_{|t=0} = \frac{\partial p}{\partial t}_{|t=0} \equiv 0$ et $\varphi \in W_{aT}$ avec $\varphi_{|t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}_{|t=0} \equiv 0$ telles que, pour tout $q \in V_a$, pour tout $\psi \in W_a$ avec ψ continue en B et C, et pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\nu}{\sigma}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} q\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{1}{\nu\sigma}\nabla p \nabla q\, d\mathbf{x} + \sum_{i=1,2,3}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial t} q\, d\boldsymbol{\sigma}_i & \\
-\frac{1}{2}\sum_{i=1,2,3}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} q\, d\boldsymbol{\sigma}_i &= f(t)\int_\Omega \delta_S^\varepsilon q\, d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\sum_{i=1,2,3}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}\psi\, d\boldsymbol{\sigma}_i + \sum_{i=1,2,3}\int_{\Gamma_i}\frac{1}{\nu^2\sigma}\frac{\partial p}{\partial\tau_i}\frac{\partial\psi}{\partial\tau_i}\, d\boldsymbol{\sigma}_i + \sum_{B,C}\frac{3}{2\nu\sigma}\frac{\partial p}{\partial t}\psi = 0. \tag{14}$$

3.2 Problème discret

Soit Ω_h le maillage carré de $(N_x+1)(N_z+1)$ points approchant Ω,

$$\Omega_h = \{(ih, jh)/(i,j) \in \mathbf{N}^2, i \le N_x, j \le N_z\}$$

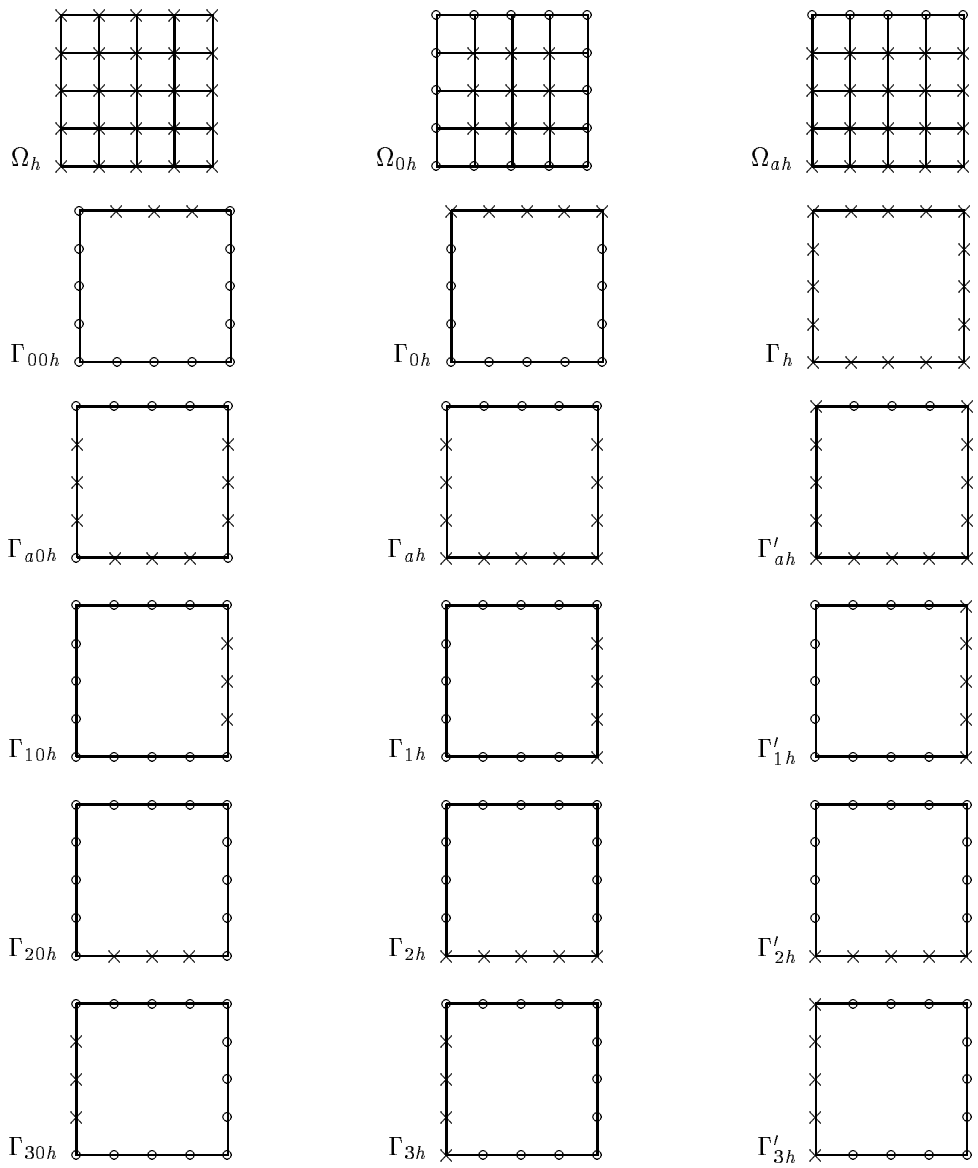

FIG. 2 – *Description des différents ensembles de points dans le cas simplifié d'un maillage à 25 points. Dans chaque cas, l'ensemble considéré est constitué des* $\times$.

où $N_x h = X$ et $N_z h = Z$. Soient les sous-ensembles $\Gamma_{0h} = \Omega_h \cap \Gamma_0$ et $\Omega_{ah} = \Omega_h \backslash \Gamma_{0h}$, $\Gamma_h = \Omega_h \cap \overline{\partial\Omega}$ et $\Omega_{0h} = \Omega_h \backslash \Gamma_h$, $\Gamma_{a0h} = \Gamma_h \backslash (\Gamma_{0h} \cup \{B, C\})$ et, pour $i = 1, 2, 3$, $\Gamma_{ih} = \Omega_{ah} \cap \overline{\Gamma}_i$ et $\Gamma'_{ih} = \Omega_h \cap \overline{\Gamma}_i$, *cf.* Figure 2. Pour $M \in \Omega_{ah}$, soit $\mathcal{V}(M)$ l'ensemble des quatre voisins de M. L'intervalle de temps $[0, T]$ est approché par l'ensemble de $N_t + 1$ points

$$\{k\Delta t / k \in \mathbf{N}, k \leq N_t\}$$

où $N_t \Delta t = T$. L'ensemble des paramètres admissibles $\mathcal{B}$ est approché par $\mathcal{B}_h = V_h \cap \mathcal{B}$.

Soit V_h l'espace vectoriel de dimension $(N_x + 1)(N_z + 1)$ associé à l'interpolation bilinéaire sur le maillage Ω_h. V_h admet pour base canonique $(\phi_h^M)_{M \in \Omega_h}$ où, pour chaque nœud M, ϕ_h^M est la fonction continue bilinéaire par maille telle que, pour tout $P \in \Omega_h$, $\phi_P^M = \delta_{MP}$. Ces fonctions sont appelées "fonctions chapeaux". Pour $i = 1, 2, 3$, soit W_{ih} l'espace vectoriel de dimension finie associé à l'interpolation linéaire sur Γ_{ih} (les fonctions de W_{ih} sont supposées être nulles en O ou en A).

Les espaces fonctionnels W_a, W_{aT}, V_a et V_{aT} sont approchés respectivement par les sous-espaces de dimensions $N_x + 2N_z + 1$, $(N_x + 2N_z + 1)(N_t + 1)$, $(N_x + 1)N_z$ et $(N_x + 1)N_z(N_t + 1)$,

$$W_{ah} = W_{1h} \times W_{2h} \times W_{3h}, \qquad W_{aTh} = W_{1h}^{N_t+1} \times W_{2h}^{N_t+1} \times W_{3h}^{N_t+1},$$
$$V_{ah} = V_h \cap V_a \qquad \text{et} \qquad V_{aTh} = V_{ah}^{N_t+1}.$$

Les intégrales sur Ω sont approchées par interpolation bilinéaire (schéma à 5 point pour le Laplacien) et celles sur le bord par interpolation linéaire. Les dérivées secondes en temps sont approchées par le schéma classique à 3 points et les dérivées premières par un schéma centré.

Soit B la matrice de masse, elle est diagonale et pour tout $M \in \Omega_{ah}$,

$$B_{MM} = W_M \frac{\nu_M}{\sigma_M} h^2 \qquad \text{où } W_M = \begin{cases} 1 \text{ si } M \in \Omega_{0h}, \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } M \in \Gamma_{a0h}, \\ \dfrac{1}{4} \text{ si } M \in \{B, C\}. \end{cases}$$

Soit A la matrice de rigidité, elle est pentadiagonale symétrique et pour tout $M \in \Omega_{ah}$ et pour tout $Q \in \mathcal{V}(M) \cap \Omega_h$,

$$\begin{cases} A_{MQ} = -\dfrac{1}{2} W_{MQ} \left(\dfrac{1}{\nu_M \sigma_M} + \dfrac{1}{\nu_Q \sigma_Q} \right) \\ A_{MM} = -\displaystyle\sum_{Q \in \mathcal{V}(M) \cap \Omega_h} A_{MQ} \end{cases} \qquad \text{où } W_{MQ} = \max(W_M, W_Q).$$

Pour $i = 1, 2, 3$, soit D_i la matrice de dissipation (ou matrice de masse sur le bord), elle est diagonale et pour tout $M \in \Gamma_{ih}$,

$$D_{iMM} = 2 W_M \frac{h}{\sigma_M},$$

soit C_i la matrice de rigidité sur le bord, elle est tridiagonale symétrique et pour tout $M \in \Gamma_{ih}$ et pour tout $Q \in \mathcal{V}(M) \cap \Gamma'_{ih}$,

$$C_{iMQ} = -\frac{1}{2h} \left(\frac{1}{\nu_M^2 \sigma_M} + \frac{1}{\nu_Q^2 \sigma_Q} \right) \qquad \text{et} \qquad C_{iMM} = -\sum_{Q \in \mathcal{V}(M) \cap \Gamma'_{ih}} C_{iMQ}.$$

Soit E la matrice de dissipation aux coins, elle est diagonale et pour tout $M \in \{B, C\}$,

$$E_{MM} = \frac{3}{2 \nu_M \sigma_M}.$$

La formulation variationnelle (13) et (14) se discrétise en la formulation matricielle : étant donnés $\nu_h, \sigma_h \in \mathcal{B}_h$, trouver $p_h \in V_{aTh}$ avec $p^0 = p^1 \equiv 0$ et $\varphi_h \in W_{aTh}$ avec $\varphi^0 = \varphi^1 \equiv 0$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq N_t - 1$,

$$Bp^{(2)k} + Ap^k + \sum_{i=1,2,3} D_i p^{(1)k} - \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} D_i \varphi_i^{(1)k} = F^k, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1,2,3} D_i \varphi_i^{(2)k} + \sum_{i=1,2,3} C_i p^k + E p^{(1)k} = 0. \tag{16}$$

Ce système linéaire sera noté symboliquement par la suite

$$\mathcal{C}(\nu_h, \sigma_h) p_h = f_h. \tag{17}$$

Les sismogrammes synthétiques sont ensuite calculés par

$$c_h = W_t G p_h \tag{18}$$

où G est la matrice d'échantillonnage aux récepteurs par interpolation bilinéaire sur le du maillage Ω_h et le poids W_t est une matrice diagonale positive définie en chaque récepteur et pour chaque pas de temps par le produit d'un masque, permettant d'éliminer les arrivées directes, et d'un facteur ne dépendant que du temps, permettant de compenser l'atténuation géométrique du signal, *cf.* section 5. La simulation directe est notée

$$\varphi_h : (\nu_h, \sigma_h) \longmapsto c_h. \tag{19}$$

Dans la suite, les quantités manipulées étant toutes discrètes, l'indice $_h$ est supprimé sauf pour les ensembles Ω_h et V_h.

3.3 Aspect informatique

Les matrices intervenant dans le schéma numérique sont données par des formules distinctes suivant que le point considéré est à l'intérieur du maillage, sur l'un des trois cotés artificiels ou en l'un des deux coins. Cette diversité peut être source d'erreurs de calcul et/ou de programmation. De plus, généralement associée à une numérotation à deux indices des nœuds du maillage, elle ne permet la vectorisation que sur une rangée. La méthode des nœuds fictifs permet de ne considérer qu'une seule formule par matrice et, associée à une numérotation à un seul indice, elle favorise une vectorisation sur tout le maillage. L'idée de base est de rajouter tout autour du domaine une bande de la largeur d'une maille et de prolonger par symétrie toutes les quantités utilisées, *cf.* [6]. La vectorisation sur Cray YMP/C90 apporte un gain d'un facteur 20.

Les Tableaux suivants sont relatifs au programme correspondant à l'algorithme décrit précédemment. Les mesures de complexité et de performance sont effectuées pour le modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A. La complexité en mémoire du programme de simulation est de l'ordre de 3,2 millions de mots et la complexité en calculs est d'environ 13 milliards d'opérations. Le Tableau 2 montre les performances comparées du programme de simulation sur différents calculateurs.

	mémoire (Mmots)	calculs (Gop)
simulation	3,2	13

TAB. 1 – *Complexité en mémoire et en calculs du programme de simulation.*

	temps réel (s)	performance (Mop/s)	τ (10^{-6}s)
Digital 3000/400	490	25	0,47
Digital 2100/500 (4 proc.)	220	60	0,21
Cray YMP/C90 (1 proc.)	18	720	0,017

TAB. 2 – *Performances comparées du programme de simulation sur différents calculateurs. La dernière colonne donne le temps de calcul moyen par maille, par pas de temps et par tir.*

3.4 Résultats numériques

Nous montrons maintenant des résultats numériques de simulation dans le modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A. Les Figures 3 et 4 montrent des instantanés pris tous les dixièmes de seconde au cours de la simulation. Ceux-ci représentent la solution de l'équation des ondes discrète aux instant choisis. Nous observons que ni la dispersion, ni les réflexions sur les bords artificiels ne sont visibles. La Figure 5 montre le sismogramme enregistré au cours de la propagation du tir central ainsi que le masque choisi pour éliminer les arrivées directes. Le signal est également amplifié proportionnellement à la racine carrée du temps, pour en corriger l'atténuation géométrique, *cf.* section 5. La Figure 6 montre la juxtaposition des cinq sismogrammes correspondant aux cinq tirs.

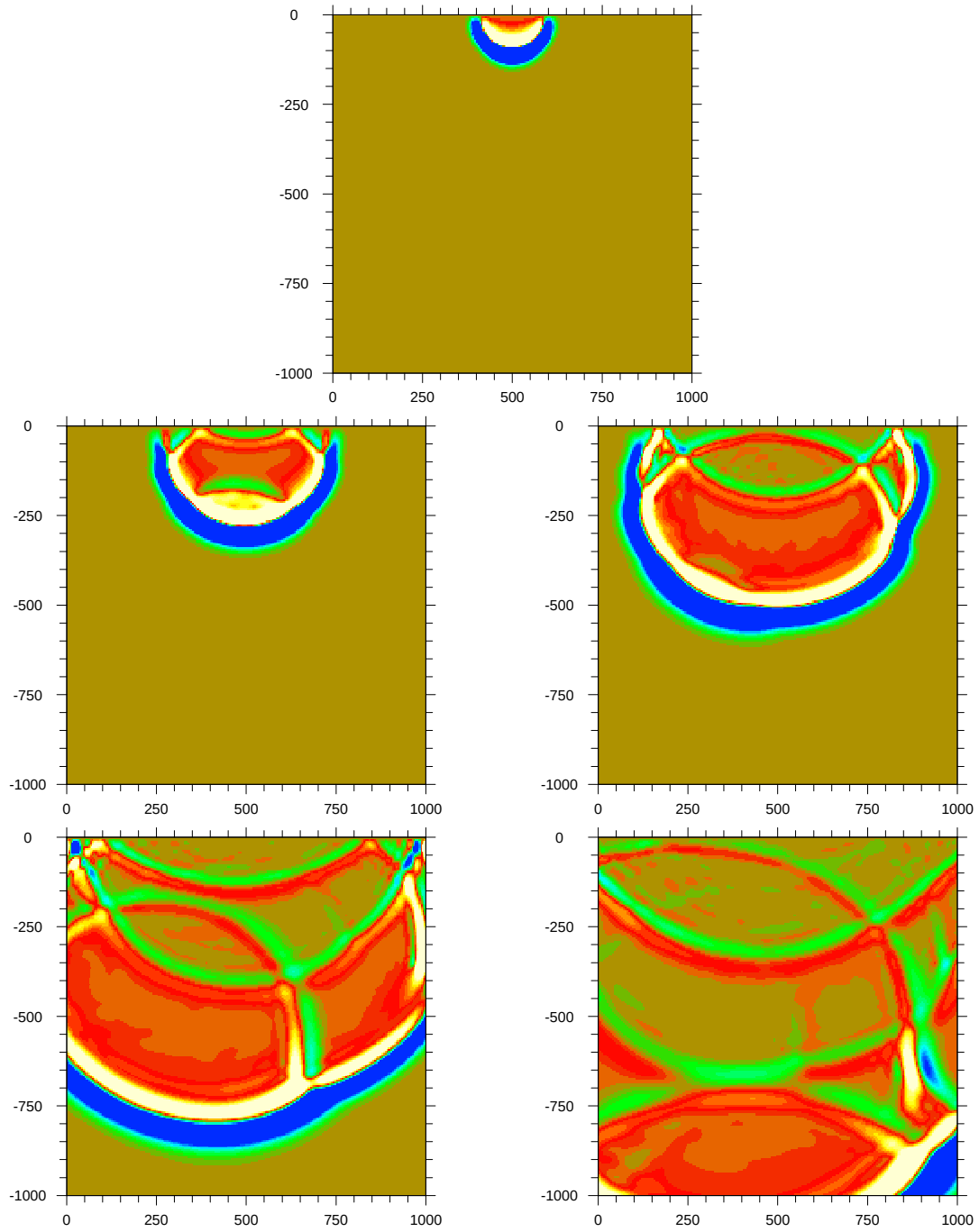

FIG. 3 – *Instantanés pris au cours de la propagation du tir central (1). Axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). De haut en bas et de gauche à droite : champ de pression aux instants 0.1 s, 0.2 s, 0.3 s, 0.4 s et 0.5 s.*

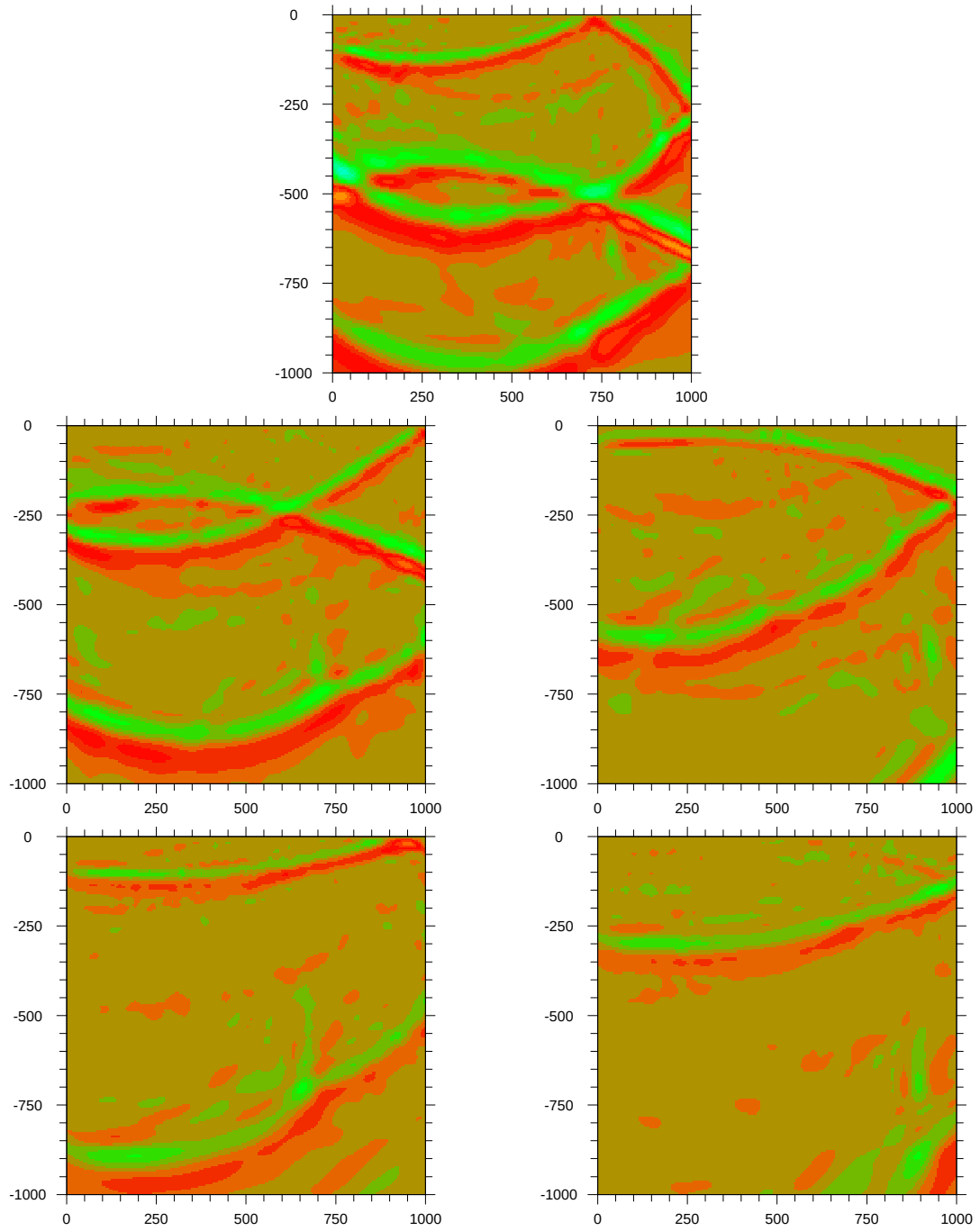

FIG. 4 – *Instantanés pris au cours de la propagation du tir central (2). Axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). De haut en bas et de gauche à droite : champ de pression aux instants 0.6 s, 0.7 s, 0.8 s, 0.9 s, 1 s.*

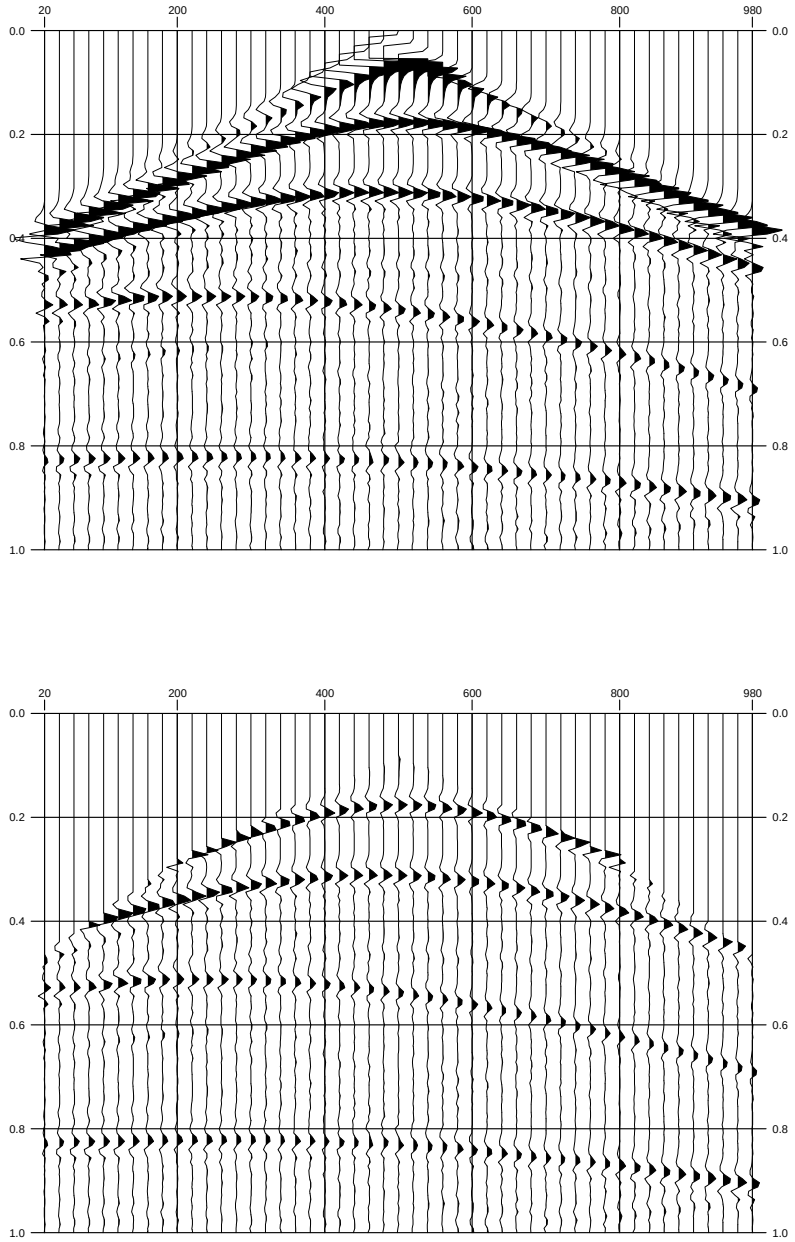

FIG. 5 – *Sismogrammes pour le tir central. Axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut :* $W_t = 1$. *Bas :* W_t = *masque* $\times\sqrt{t}$.

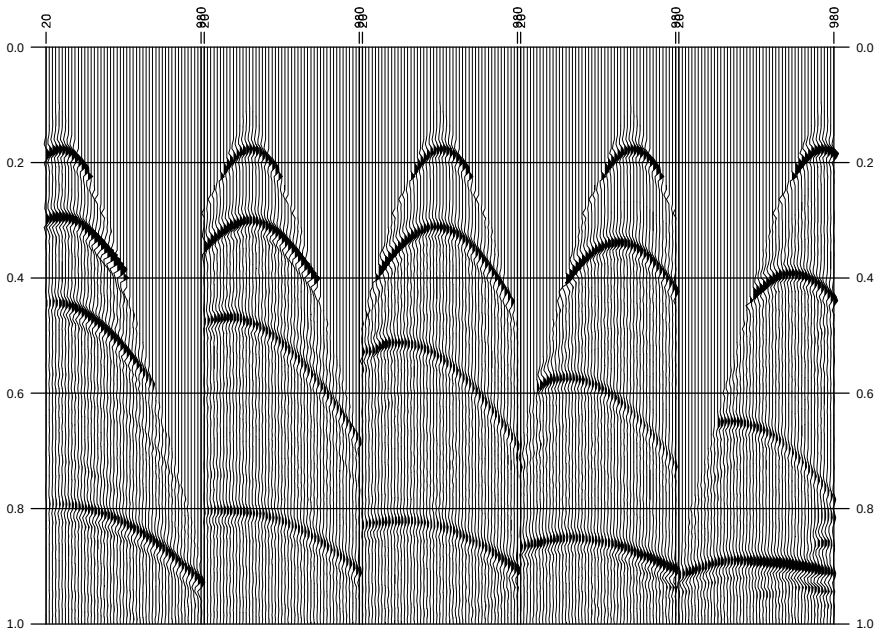

FIG. 6 – *Sismogrammes pour les cinq tirs. Axe horizontal: position des récepteurs (m), axe vertical: temps (s). De gauche à droite : juxtaposition des cinq sismogrammes correspondant aux cinq tirs situés aux distances horizontales 100 m, 300 m, 500 m, 700 m et 900 m.* W_t = *masque* $\times\sqrt{t}$

4 Séparation propagateur/réflecteur

Dans cette section, nous décrivons le choix d'une séparation propagateur/réflecteur reposant sur une représentation multiéchelle des paramètres physiques.

4.1 Analyse de l'information disponible dans les données

La présence d'information dans les données est subordonnée à l'existence d'énergie remontant vers la surface et donc à la présence de réflecteurs dans le sous-sol. Les paramètres physiques ν et σ participent aux deux phénomènes physiques bien distincts de propagation et de réflexion. La question est de préciser qui est responsable de quoi en introduisant une séparation de ces paramètres physiques.

Nous faisons l'hypothèse classique, *cf.* [12], selon laquelle, étant donné le caractère limité en fréquence de la source et, en particulier, son faible contenu basses fréquences, les composantes basses fréquences des paramètres physiques ne créent pas de réflexions tangibles dans les données, et donc, c'est uniquement à travers la cinématique des temps d'arrivées des réflexions produites par les composantes hautes fréquences de ν et σ que les composantes basses fréquences de la lenteur jouent un rôle dans les données.

Ainsi, nous envisageons de séparer les paramètres qui gouvernent la cinématique (propagateur) de ceux qui décrivent la réflectivité (réflecteur) afin de leur procurer un traitement mathématique différencié ; et ce d'autant plus qu'ils correspondent à des comportements très différents de la modélisation directe : presque linéarité par rapport au réflecteur contre forte non linéarité par rapport au propagateur.

4.2 Décomposition lisse/rugueux des paramètres physiques

Soit une décomposition de l'espace discret V_h des paramètres physiques en la somme directe de deux sous-espaces,

$$V_h = V_s \oplus V_r \tag{20}$$

où, intuitivement, V_s est l'espace lisse ("smooth space") contenant des fonctions "variant lentement" et V_r est l'espace rugueux ("rough space") contenant des fonctions "oscillant rapidement". V_s est l'espace de faible dimension dans lequel nous prendrons le propagateur et V_r l'espace de grande dimension dans lequel nous choisirons le réflecteur. Soient p_s et $p_r = Id - p_s$ les projections respectives sur chaque sous-espace parallèlement à l'autre. Nous décomposons naturellement les paramètres physiques en la somme de leurs parties lisse et rugueuse, pour tous $\nu, \sigma \in V_h$,

$$\nu = p_s\nu + p_r\nu = \nu_s + \nu_r, \tag{21}$$

$$\sigma = p_s\sigma + p_r\sigma = \sigma_s + \sigma_r. \tag{22}$$

Dans le cas présent où V_h est constitué des fonctions définies par interpolation bilinéaire à partir des valeurs aux nœuds de la grille, dite "fine", un choix naturel pour l'espace lisse V_s est alors l'ensemble des fonctions définies également par interpolation bilinéaire mais sur une sous-grille, dite "grossière". Il suffit ensuite, pour obtenir un supplémentaire (non-orthogonal) de V_s dans V_h, de compléter la base canonique de V_s à l'aide d'éléments de la base canonique de V_h. Ces bases canoniques étant constituées de fonctions chapeaux dont les supports sont en rapport avec la taille des grilles considérées.

Les deux sous-espaces doivent suivre trois principes naturels.

(i) *Faible réflectivité des éléments lisses* : tout sismogramme calculé à partir de projections lisses des paramètres physiques ne doit contenir aucune réflexion tangible.

(ii) *Contenu cinématique suffisant des éléments lisses* : le tracé d'un rayon et le temps de parcours le long de ce rayon ne doivent pas être dégradés par le remplacement de la lenteur par sa projection lisse. La qualité d'un tracé de rayon est appréciée sur la structure des images migrées, *cf.* section suivante.

(iii) *Faible contenu cinématique des éléments rugueux* : afin de garantir un comportement presque linéaire du modèle direct par rapport aux projections rugueuses des paramètres physiques, celles-ci ne doivent pas influer sur les temps de parcours entre des points suffisamment éloignés.

Un choix naturel pour les paramètres intermédiaires est alors :

- un paramètre propagateur $\pi = \nu_s$ avec $\Pi = V_s$,

– deux paramètres réflecteur $r = (\nu_r, \sigma_r)$ avec $R = V_r \times V_r$.

Il est reconnu que la partie lisse de l'impédance ne joue qu'un faible rôle dans les données sismiques, *cf.* [12], et nous choisissons donc pour σ_s n'importe quelle fonction lisse raisonnable, par exemple une constante égale à la valeur en surface.

Les conditions **(i)** et **(ii)** sont contradictoires : d'une part, quand V_s ne contient que les fonctions constantes, la condition de faible réflectivité pour les éléments lisses est pleinement satisfaite mais le contenu cinématique des constantes est certainement trop pauvre. Et d'autre part, quand $V_s = V_h$, la cinématique ne peut-être représentée de façon plus riche mais les éléments lisses sont alors responsables de réflexions pour des incidences non normales. Ce conflit ne pourra être finalement résolu, de façon approchée, qu'à cause du caractère limité en fréquence de la source et, plus précisément, à cause de son manque de composantes basses fréquences.

Nous poursuivons maintenant la caractérisation des sous-espaces V_s et V_r dans le cas de l'exemple cité ci-dessus où l'espace lisse V_s est construit par interpolation bilinéaire sur une sous-grille grossière. Soit H la taille d'une maille de cette grille grossière. Le rapport H/h est supposé entier.

4.2.1 Condition de faible réflectivité des éléments lisses

Nous allons évaluer la diminution du coefficient de réflexion apportée par la projection lisse dans le cas d'une discontinuité de lenteur à densité constante.

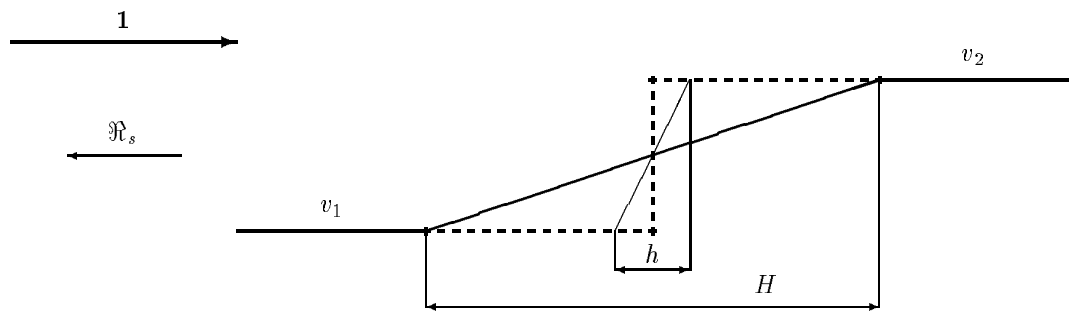

FIG. 7 – *Réflexion d'une onde plane arrivant à incidence normale sur un milieu tabulaire à densité constante dont le profil de vitesse présente une rampe linéaire. La rampe de longueur H entre les valeurs v_1 et v_2 correspond à la projection lisse de la discontinuité de lenteur. Une onde plane incidente d'amplitude 1 est alors réfléchie avec l'amplitude $\Re_s$.*

Projeter un profil de lenteur présentant une discontinuité entre les valeurs ν_1 et ν_2 sur l'espace lisse V_s fait apparaître une rampe linéaire de longueur H entre les valeurs ν_1 et ν_2, *cf.* Figure 7. Nous admettons que la transition de vitesse correspondante est presque linéaire. Soient $\Re_s$ le module du coefficient de réflexion complexe de la transition lisse de lenteur pour une illumination à incidence normale par une onde plane et $\Re = \frac{|v_1 - v_2|}{v_1 + v_2}$ le module du coefficient de réflexion complexe de la discontinuité de lenteur pour la même illumination. Soit N_λ l'épaisseur de la transition mesurée en termes de longueurs d'onde dominantes λ_1 dans le milieu incident,

$$N_\lambda = \frac{H}{\lambda_1}.$$

Le calcul, *cf.* [3, 10], montre que, dans le cas d'une transition linéaire de vitesse, si $\Re \leq 0,33$ et $N_\lambda \geq 0,3$, alors nous avons la majoration de la réduction de coefficient de réflexion

$$\frac{\Re_s}{\Re} \leq \frac{1}{4N_\lambda}. \tag{23}$$

Nous avons tracé dans la Figure 8 la valeur exacte du facteur de réduction $\Re_s/\Re$ comme fonction de N_λ pour différentes valeurs du coefficient de réflexion $\Re$ de la discontinuité (0,05, 0,1, 0,2 et 0,3). La majoration (23) et la Figure 8 montrent que :

(24) *la réflectivité est diminuée par un facteur au moins 10 dès que le nombre de longueurs d'onde dominantes par maille de la grille grossière est plus grand que 2,5.*

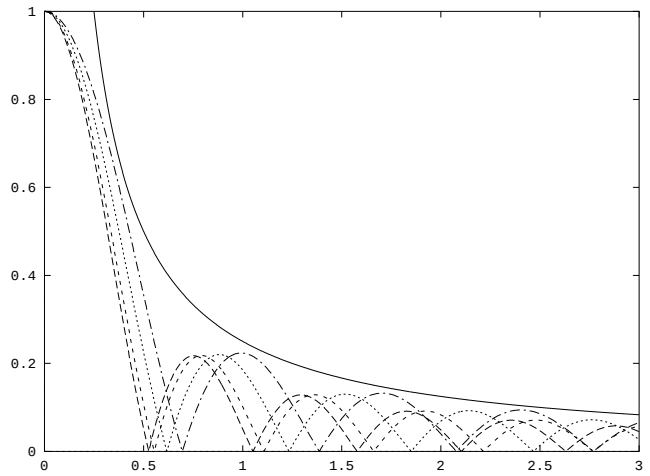

FIG. 8 – *Facteur de réduction du coefficient de réflexion $\Re_s/\Re$ en fonction du nombre N_λ de longueurs d'onde dominantes par maille. Traits interrompus : pour différentes valeurs du coefficient de réflexion associé à la transition abrupte, $\Re$ = 0,05, 0,1, 0,2 et 0,3. Trait plein : fonction majorante ($N_\lambda \mapsto 1/4N_\lambda$).*

4.2.2 Condition de contenu cinématique suffisant des éléments lisses

Il est difficile d'analyser mathématiquement la baisse de qualité des images migrées induite par le remplacement d'un modèle de lenteur par son approximation lisse. Une étude numérique portant sur le modèle MARMOUSI, *cf.* annexe B, a montré que le lissage n'altérait pas la qualité des images migrées pourvu que le modèle de vitesse lissé retienne de l'original toutes les longueurs d'onde spatiales au moins égales à deux fois la longueur d'onde dominante du signal, *cf.* [16].

En admettant que le sous-espace V_s associé à une grille grossière de taille H contient toutes les longueurs d'onde spatiales au moins égales à $4H$ alors nous pouvons espérer que :

(25) *la qualité des images migrées est maintenue lorsque l'on remplace un modèle de lenteur par sa projection lisse pourvu que le nombre de longueurs d'onde dominantes par maille de la grille grossière soit inférieur ou égal à 0.5.*

4.2.3 Condition de faible contenu cinématique des éléments rugueux

Évaluons l'écart de temps de parcours induit par une perturbation rugueuse d'une lenteur lisse.

Soient M_1 et M_2 deux points du domaine Ω. Étant donné un modèle de lenteur, le temps de parcours entre ces deux points est l'intégrale de la lenteur [1] le long d'un rayon joignant M_1 et M_2. Dans le cas où les deux points M_1 et M_2 sont de part et d'autre d'une forte variation de lenteur et où la lenteur varie peu latéralement le long du rayon, alors l'intégrale le long du rayon est proportionnelle à l'intégrale double sur un faisceau entourant ce rayon.

Lorsque nous passons aux notions discrètes, le temps de parcours entre M_1 et M_2 reste une forme linéaire sur V_h de la lenteur et, puisque V_h est de dimension finie et muni de son produit scalaire canonique, noté $< .,. >$, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $w \in V_h$, dépendant des points M_1 et M_2 de Ω_h, tel que, pour toute distribution de lenteur $\nu \in V_h$, le temps de parcours discret entre M_1 et M_2 soit

$$\tau_{M_1M_2} =< \nu, w > .$$

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, l'analogue discret du passage de l'intégrale le long du rayon à une intégrale sur un faisceau est de considérer que $w = w_s \in V_s$ (le faisceau ayant alors une épaisseur de l'ordre de la taille H de la grille grossière définissant V_s). Les éléments rugueux ont un faible contenu cinématique si et seulement si les temps de parcours entre des points quelconques varient peu entre les lenteurs $\nu_s \in V_s$ et $\nu = \nu_s + \nu_r \in V_h$, $\nu_r \in V_r$ étant quelconque ou, de façon équivalente, si et seulement si la variation de temps de

1. Et non de la vitesse ! Ce qui justifie *a posteriori* l'utilisation de la lenteur.

parcours est faible, soit, pour tout $\nu_r \in V_r$,

$$\Delta\tau_{M_1M_2} =< \nu_r, w_s >\simeq 0.$$

Nous pouvons donc conclure que :

(26) *si nous ne considérons que les rayons attaquant les réflecteurs à incidence non tangentielle, les éléments rugueux ont un faible contenu cinématique dès que les sous-espaces V_s et V_r sont orthogonaux.*

4.2.4 Conflit

Les conditions **(i)** et **(ii)** mènent effectivement à des conclusions contradictoires : d'une part, il faut que $N_\lambda \geq 2,5$ et, d'autre part, que $N_\lambda \leq 0,5$! Il faut toutefois modérer la contradiction apparente de ce résultat. En effet, d'une part, pour les milieux lisses que nous considérerons ici (à impédance constante), la première inégalité devrait devenir beaucoup moins restrictive et, d'autre part, la seconde inégalité ne relève que de considérations qualitatives provenant d'études numériques. En définitive, seule une étude expérimentale avec le modèle SYNCLAY permettra de résoudre ce conflit.

4.3 Une famille de sous-espaces lisses et rugueux

Nous nous plaçons dans le cas où l'espace lisse V_s est défini par interpolation bilinéaire sur une grille grossière. L'espace rugueux V_r est alors défini de façon optimale par l'orthogonal de V_s pour le produit scalaire canonique de V_h. Une décomposition lisse/rugueux est donc définie de façon unique par la donnée d'une sous-grille de la grille fine.

4.3.1 Grille multiéchelle sur Ω

Afin de permettre une bonne progressivité entre les choix extrêmes pour l'espace lisse (de l'espace des fonctions constantes à V_h), nous considérons une base multiéchelle de l'espace défini par interpolation bilinéaire sur la grille fine. La manière la plus simple de construire une base multiéchelle étant la dichotomie, nous sommes amenés à considérer une grille fine dont le nombre de mailles dans chaque direction a une forte valeur dyadique. C'est pourquoi cette grille fine, dite grille multiéchelle et notée Ω^{ME}, peut être différente de la grille servant à la construction du simulateur numérique, dite grille aux différences finies et notée Ω^{DF}, qui, elle, est fixée par les caractéristiques physiques de l'expérience à modéliser et par la condition de stabilité du schéma numérique.

Soit VME l'espace correspondant à l'interpolation bilinéaire sur la grille Ω^{ME} et $V^{DF} = V_h$. Le passage de l'un à l'autre est obtenu par interpolations bilinéaires.

4.3.2 Base multiéchelle de VME

Pour simplifier la présentation, supposons que la grille multiéchelle est carrée à mailles carrées et comporte $N_x^{ME}N_z^{ME} = (2^{N_e}+1)^2$ points. Par dichotomies successives sur le nombre de mailles dans chaque direction, nous pouvons définir N_e+1 sous-grilles uniformes emboîtées

$$\Omega_0 \subset \ldots \subset \Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \ldots \subset \Omega_{N_e} = \Omega^{ME}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \leq N_e$, le maillage Ω_k, dit maillage de l'échelle k, comporte $(2^k+1)^2$ points et ses mailles sont de taille $h_k = 2^{N_e-k}h_{N_e}$ (où $h_{N_e} = h^{ME}$). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq N_e$, soit Σ_k le complémentaire de Ω_{k-1} dans Ω_k. Le cardinal de Σ_k est

$$\#\Sigma_k = (2^k+1)^2 - (2^{k-1}+1)^2 = (1+2^{k-2}+2^{k-1})2^k.$$

Ainsi, nous avons les réunions disjointes, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq N_e$,

$$\Omega_k = \Omega_0 \cup \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_k. \tag{27}$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k \leq N_e$, soit V_k le sous-espace de dimension $(2^k+1)^2$ des fonctions obtenues par interpolation bilinéaire sur la sous-grille Ω_k. Ces sous-espaces sont également emboîtés,

$$V_0 \subset \ldots \subset V_k \subset V_{k+1} \subset \ldots \subset V_{N_e} = V^{ME}.$$

Chaque sous-espace V_k est muni de sa base canonique $(\phi_M^k)_{M\in\Omega_k}$, dite base locale de l'échelle k, constituée des fonctions chapeaux relatives au maillage Ω_k de l'échelle k. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq N_e$, soit W_k le sous-espace de V_k engendré par $(\phi_M^k)_{M\in\Sigma_k}$. W_k est le supplémentaire canonique (non orthogonal) de V_{k-1} dans V_k. Ainsi, nous avons les sommes directes, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq N_e$,

$$V_k = V_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \tag{28}$$

et

$$\left((\phi_M^0)_{M\in\Omega_0}, \left((\phi_M^{k'})_{M\in\Sigma_{k'}}\right)_{k'\in\mathbf{N},1\leq k'\leq k}\right) \tag{29}$$

constitue une base multiéchelle (non orthogonale) de V_k.

4.3.3 Curseur

Nous pouvons définir une famille de N_e décompositions lisse/rugueux, simplement en jouant sur la position d'un curseur k_c entre les valeurs 0 et $N_e - 1$, par

$$V_s = V_{k_c} = V_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_{k_c} \qquad \text{et} \qquad V_r = V_s^{\perp}. \tag{30}$$

4.3.4 Base de V_r

Fixons k_c entre 0 et $N_e - 1$. Nous procédons ensuite à la construction d'une base de l'espace rugueux $V_r = V_s^{\perp}$. Soient $I = \Omega_{N_e}$ l'ensemble des points du maillage fin, $J = \Omega_{k_c}$ l'ensemble des points du maillage grossier et $K = I \backslash J = \Sigma_{k_c+1} \cup \ldots \cup \Sigma_{N_e}$. Soit $J_0 = \Omega_0$ et, si $k_c \geq 1$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq k_c$, soit $J_k = \Sigma_k$. Ainsi, nous avons la réunion disjointe $J = J_0 \cup \ldots \cup J_{k_c}$. Soit $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ la base locale de VME et $(e_j)_{j\in J}$ celle de V_s (en fait, avec les notations précédentes, $\varepsilon_i = \phi_i^{N_e}$ et $e_j = \phi_j^{k_c}$). Nous cherchons une base $(f_k)_{k\in K}$ de V_r sous la forme, pour tout $k \in K$,

$$f_k = \varepsilon_k + \sum_{j'\in J} x_{j'k} e_{j'}. \tag{31}$$

Le produit scalaire canonique de VME étant noté $< .,. >$, l'orthogonalité des sous-espaces V_s et V_r s'écrit, pour tout $j \in J$ et pour tout $k \in K$,

$$< e_j, f_k >= 0.$$

Posons[2] $A = (< e_j, e_{j'} >)_{j,j'\in J}$, $B = (< e_j, \varepsilon_k >)_{j\in J, k\in K}$ et $X = (x_{j'k})_{j'\in J, k\in K}$. Alors la condition précédente devient, sous forme matricielle,

$$AX + B = 0. \tag{32}$$

Le système $(e_j)_{j\in J}$ étant une partie libre de VME et $< .,. >$ un produit scalaire, la matrice A est symétrique définie positive, donc inversible. De plus, étant donnée la forme particulière du système $(e_j)_{j\in J}$, la matrice A est tridiagonale par blocs tridiagonaux et son inversion s'écrit de façon explicite par une décomposition LU par blocs à deux niveaux, *cf.* [10].

Par harmonie avec la notation de la base locale de V_s, posons, pour tout $l \in \mathbf{N}$, $l \leq k_c$ et pour tout $j_l \in J_l$, $e_{j_l}^l = \phi_{j_l}^l$. La base finalement considérée sur VME s'écrit alors

$$\left(\left((e_{j_l}^l)_{j_l\in J_l}\right)_{l\in\mathbf{N}, l\leq k_c}, (f_k)_{k\in K}\right). \tag{33}$$

4.3.5 Dérivation

Soit $\mathcal{A}$ la matrice de passage de la base multiéchelle (33) de VME à la base locale de V^{DF}. Soient $\mathcal{A}^{-1}$ sa (pseudo-)inverse et $\mathcal{A}^T$ sa transposée. Étant donné un paramètre $u^{DF} \in V^{DF}$ défini par ses coordonnées U^{DF}, nous lui faisons correspondre les parties lisse et rugueuse $u_s \in V_s$ et $u_r \in V_r$ définies respectivement par les coordonnées

$$U_s = P_s \mathcal{A}^{-1} U^{DF} \qquad \text{et} \qquad U_r = P_r \mathcal{A}^{-1} U^{DF} \tag{34}$$

où P_s et P_r sont les matrices des projections orthogonales dans la base (33). Réciproquement, étant donnés deux éléments lisse et rugueux $u_s \in V_s$ et $u_r \in V_r$ définis par leurs coordonnées U_s et U_r, nous leurs associons le paramètre $u^{DF} \in V^{DF}$ défini par les coordonnées

$$U^{DF} = \mathcal{A}U_s + \mathcal{A}U_r. \tag{35}$$

2. Ces matrices A et B n'ont strictement rien à voir avec les matrices du même nom définies à la section précédente.

Soit $\mathcal{J}^{DF}$ une fonction dépendant des coordonnées U^{DF} du paramètre $u^{DF} \in V^{DF}$. Il lui correspond la fonction $\mathcal{J}^{ME}$ dépendant des coordonnées U^{ME} de $u^{ME} \in V^{ME}$ définie par

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^{ME}(U^{ME}) = \mathcal{J}^{DF}(U^{DF}) = \mathcal{J}^{DF}(\mathcal{A}P_s U^{ME} + \mathcal{A}P_r U^{ME}) \tag{36}$$

et nous avons les relations

$$\nabla_{U_s}\mathcal{J}^{ME} = P_s\mathcal{A}^T\nabla_{U^{DF}}\mathcal{J}^{DF} \qquad \text{et} \qquad \nabla_{U_r}\mathcal{J}^{ME} = P_r\mathcal{A}^T\nabla_{U^{DF}}\mathcal{J}^{DF}. \tag{37}$$

4.4 Résolution du conflit

Nous illustrons, dans le cas du modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A, comment le conflit entre les conditions **(i)** et **(ii)** portant sur l'espace lisse peut être résolu expérimentalement.

k_c	0	1	2	3	4	5	6
grille	4×4	7×7	13×13	25×25	49×49	97×97	193×193
H (m)	333	167	83	42	21	10	5
N_λ	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

TAB. 3 – *Grandeurs associées à chaque position du curseur. La taille de la grille est données en nombre de points et sa résolution est données en mètres (H) et en nombre de longueurs d'onde dominantes par maille grossière dans la couche d'eau (N_λ).*

Nous choisissons $192{=}3.2^6$ comme approximation par défaut de 200 ayant une grande valeur dyadique. Ainsi, nous choisissons une grille multiéchelle comportant $193{\times}193$ points. La grille à l'échelle 0 est formée de $4{\times}4$ points et il y a sept échelles numérotées de 0 à 6. A chaque position du curseur k_c entre 0 et 5 correspond un choix d'espace lisse,

$$V_s = V_{k_c} = V_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_{k_c}.$$

L'espace rugueux est alors défini par son supplémentaire orthogonal (pour le produit scalaire canonique de VME) et p_{k_c} représente la projection orthogonale sur l'espace lisse. Le Tableau 3 donne, pour chaque position du curseur, la taille en nombre de points de la grille grossière par rapport à laquelle l'espace lisse V_s est défini, sa résolution H et le nombre correspondant N_λ de longueurs d'onde dominantes par maille grossière dans la couche d'eau.

Soit $\bar{\nu}$ la distribution de lenteur du modèle SYNCLAY. La distribution d'impédance est $\bar{\sigma} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\nu}}$ avec $\bar{\rho} = 1000$ kg/m^3. Pour chaque position du curseur, $\nu_s = p_{k_c}\bar{\nu}$ est la projection lisse de cette lenteur et nous appelons alors milieu lisse le milieu caractérisé par la lenteur lisse ν_s et l'impédance constante $\sigma_s = 1{,}5\ 10^6$ kg/m^{2}s.

Les Figures 9 à 14 montrent les projections lisse et rugueuse de la distribution de lenteur,

$$\nu_s = p_{k_c}\bar{\nu} \qquad \text{et} \qquad \nu_r = (Id - p_{k_c})\bar{\nu},$$

le sismogramme $\varphi(\nu_s, \sigma_s)$ correspondant à la propagation du tir central dans le milieu lisse et les images migrées pour ce même milieu lisse,

$$(Id - p_{k_c})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\nu_s, \sigma_s)\right)^T \varphi(\bar{\nu}, \bar{\sigma}) \qquad \text{et} \qquad (Id - p_{k_c})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}(\nu_s, \sigma_s)\right)^T \varphi(\bar{\nu}, \bar{\sigma}),$$

lorsque le curseur descend de la position 5 ($V_s = V_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_5$) à la position 0 ($V_s = V_0$).

Nous observons bien l'évolution prévue : déplacer le curseur de la position 5 à la position 0 permet de faire disparaître les réflexions du sismogramme correspondant au milieu lisse mais dégrade la forme des structures imagées par la migration. Nous remarquons que les images migrées relatives à la lenteur sont toujours de qualité plus mauvaise que celles relatives à l'impédance. Il apparaît que la position 3 du curseur est satisfaisante ; elle correspond d'ailleurs à un nombre de longueurs d'onde dominantes par maille égal à 1, qui est dans l'intervalle des valeurs conflictuelles 0,5 et 2,5.

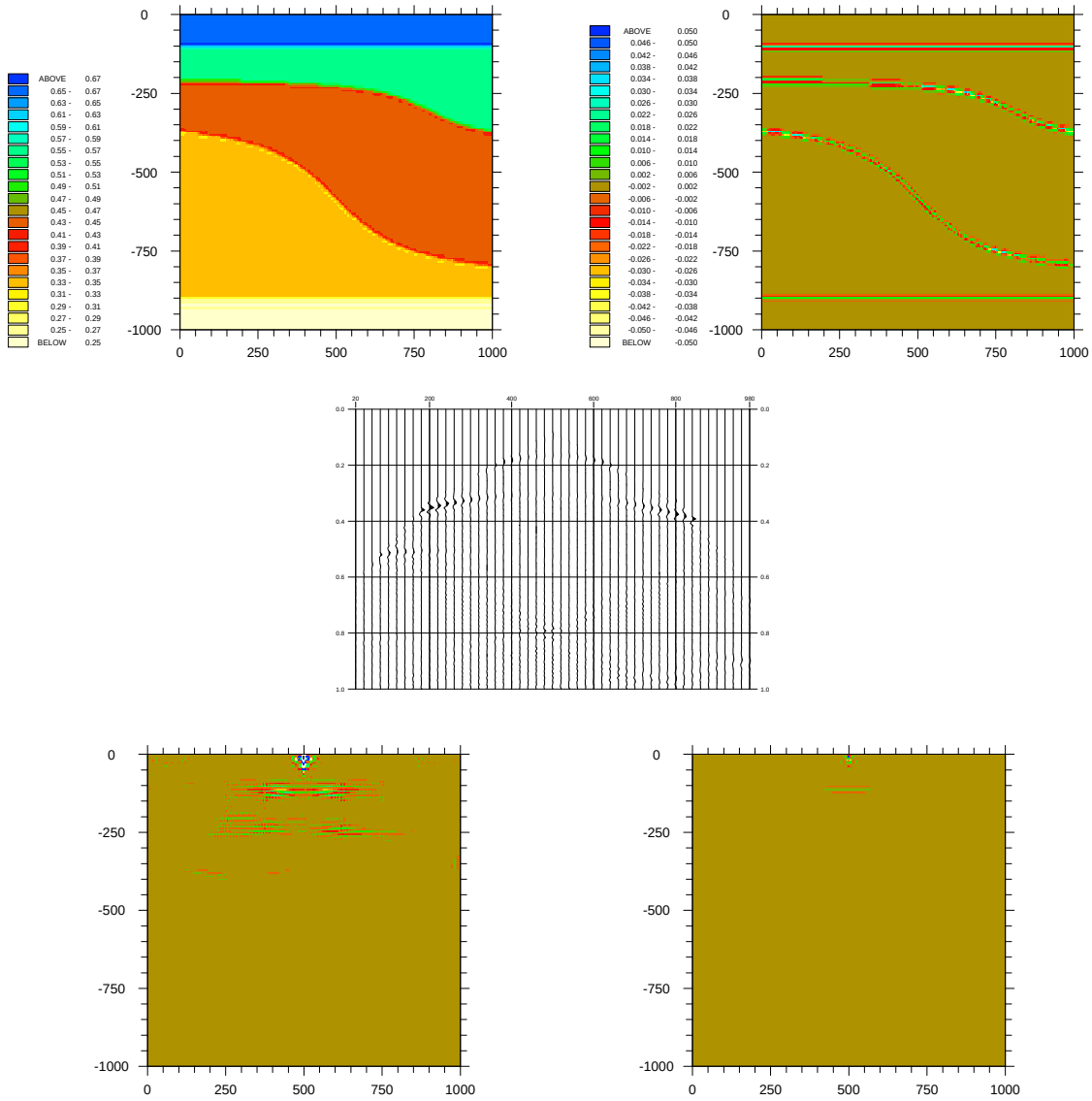

FIG. 9 – *Position 5 du curseur. Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Pour la section en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : projections lisse (gauche) et rugueuse (droite) de la lenteur* $\bar{\nu}$ *(10^{-3} s/m). Milieu : sismogramme pour le milieu lisse. Bas : images migrées relatives à la lenteur (gauche) et à l'impédance (droite) pour le milieu lisse.*

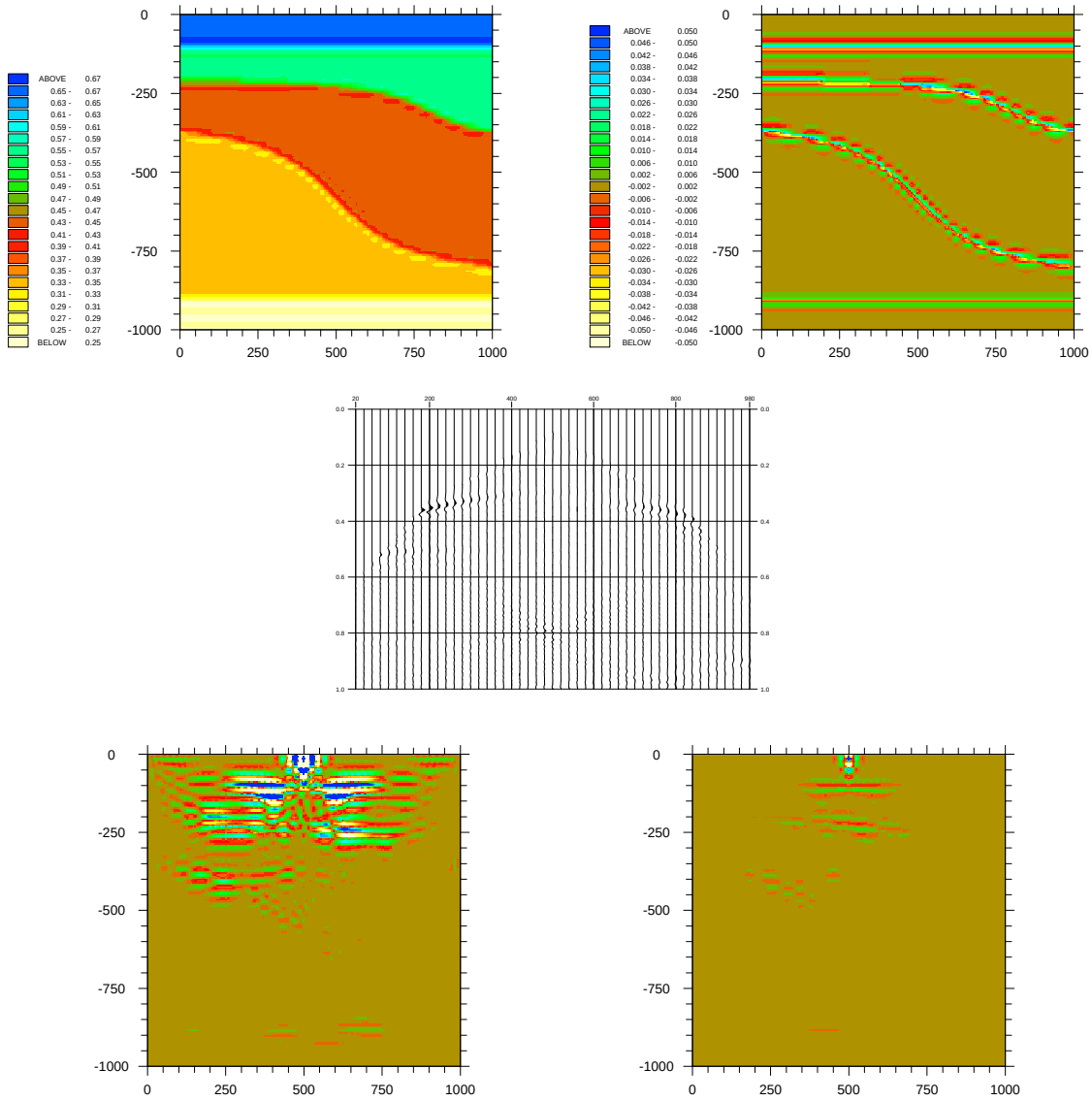

FIG. 10 – *Position 4 du curseur. Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Pour la section en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : projections lisse (gauche) et rugueuse (droite) de la lenteur* $\bar{\nu}$ *(10^{-3} s/m). Milieu : sismogramme pour le milieu lisse. Bas : images migrées relatives à la lenteur (gauche) et à l'impédance (droite) pour le milieu lisse.*

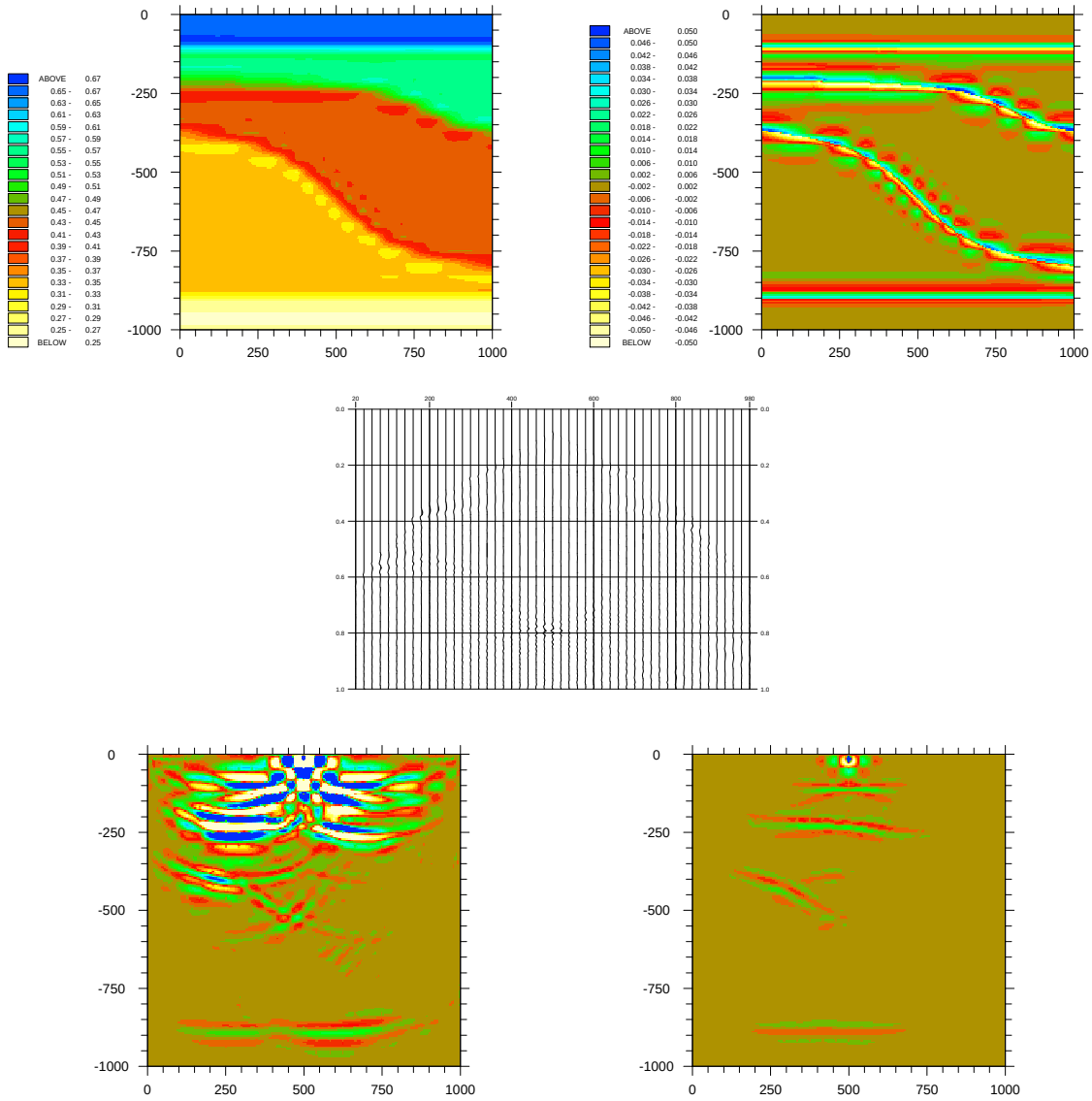

FIG. 11 – *Position 3 du curseur. Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Pour la section en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : projections lisse (gauche) et rugueuse (droite) de la lenteur $\bar{\nu}$ (10^{-3} s/m). Milieu : sismogramme pour le milieu lisse. Bas : images migrées relatives à la lenteur (gauche) et à l'impédance (droite) pour le milieu lisse.*

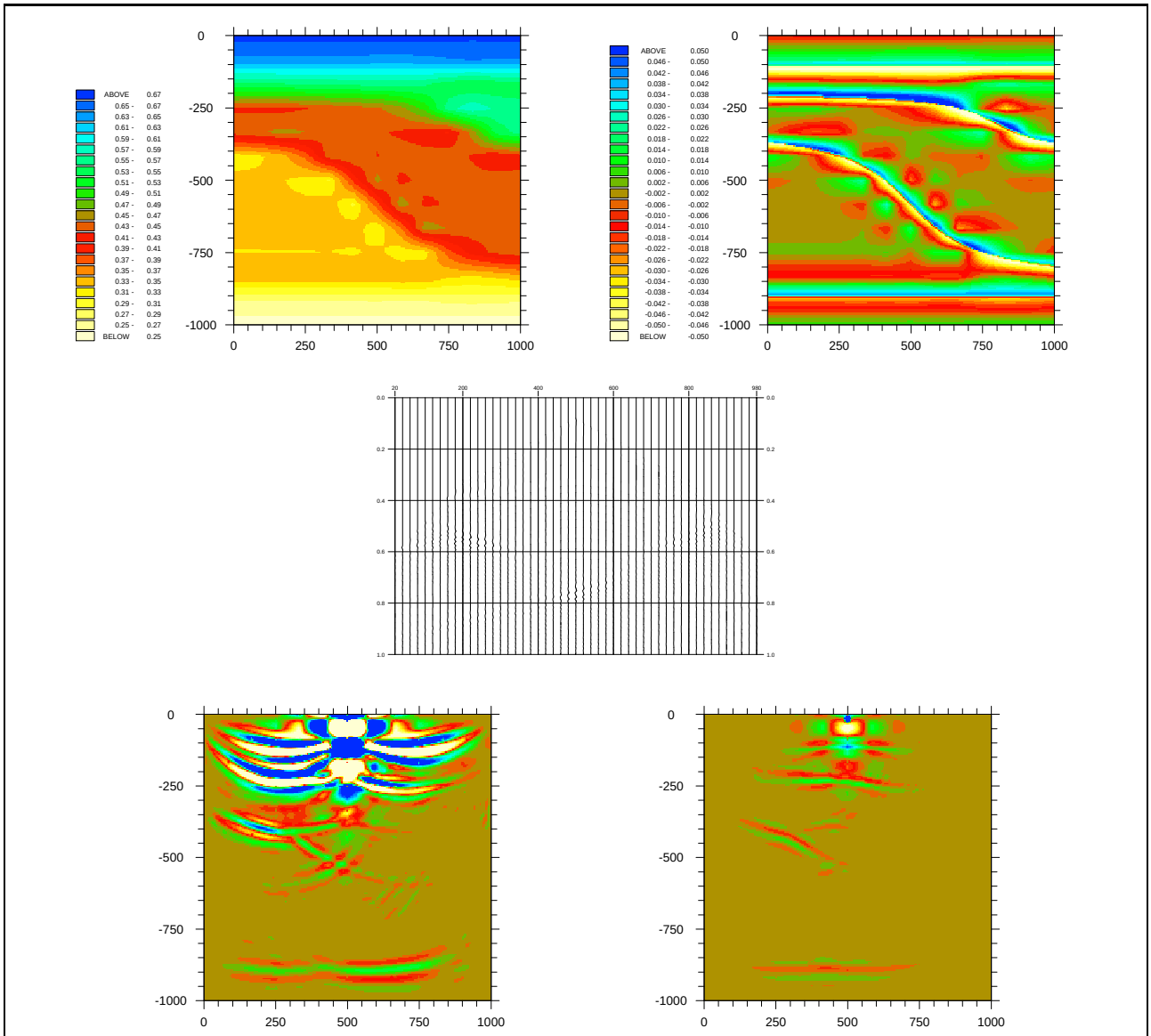

FIG. 12 – *Position 2 du curseur. Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Pour la section en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : projections lisse (gauche) et rugueuse (droite) de la lenteur* $\bar{\nu}$ *(10^{-3} s/m). Milieu : sismogramme pour le milieu lisse. Bas : images migrées relatives à la lenteur (gauche) et à l'impédance (droite) pour le milieu lisse.*

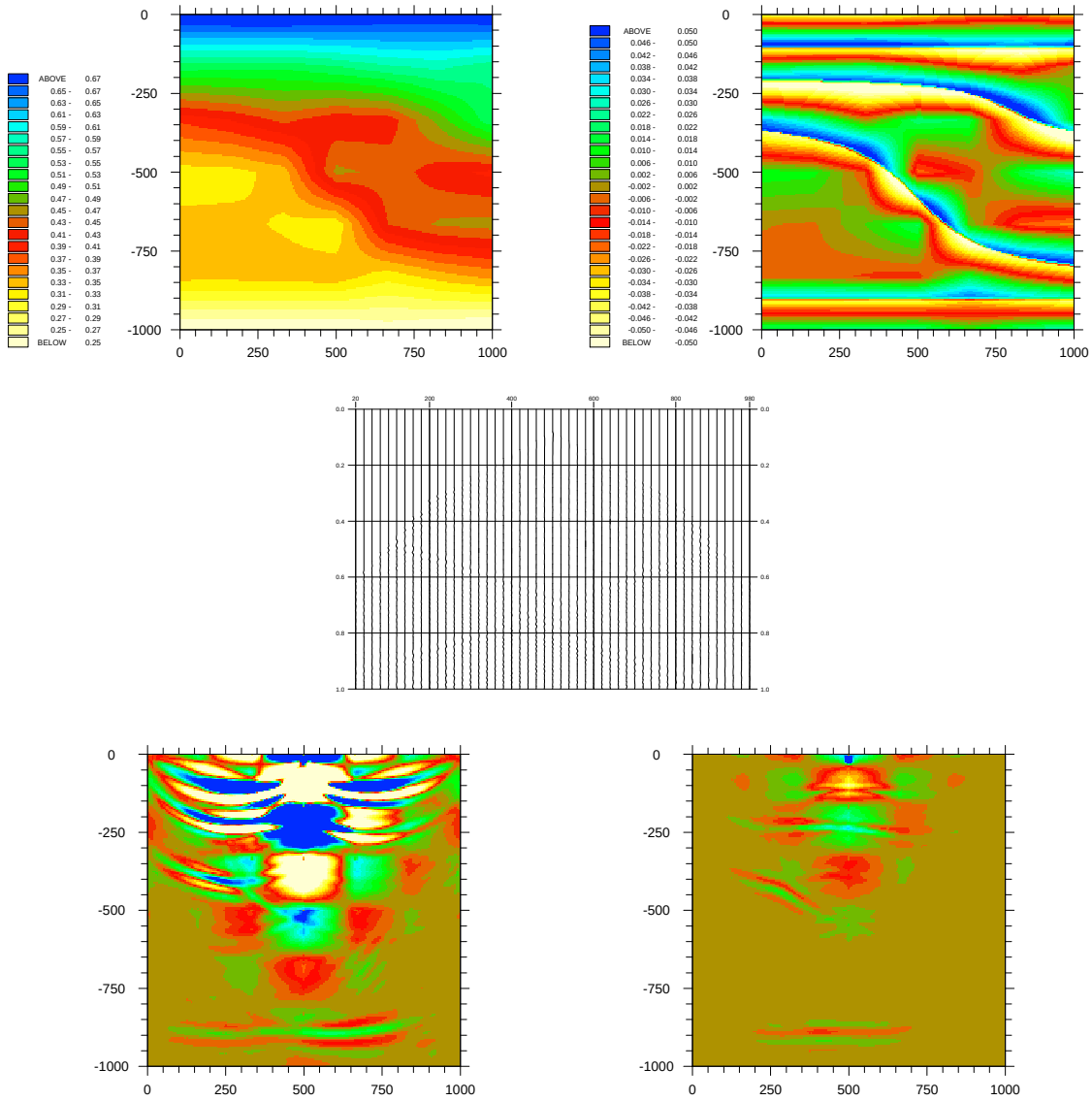

FIG. 13 – *Position 1 du curseur. Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Pour la section en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : projections lisse (gauche) et rugueuse (droite) de la lenteur* $\bar{\nu}$ *(10^{-3} s/m). Milieu : sismogramme pour le milieu lisse. Bas : images migrées relatives à la lenteur (gauche) et à l'impédance (droite) pour le milieu lisse.*

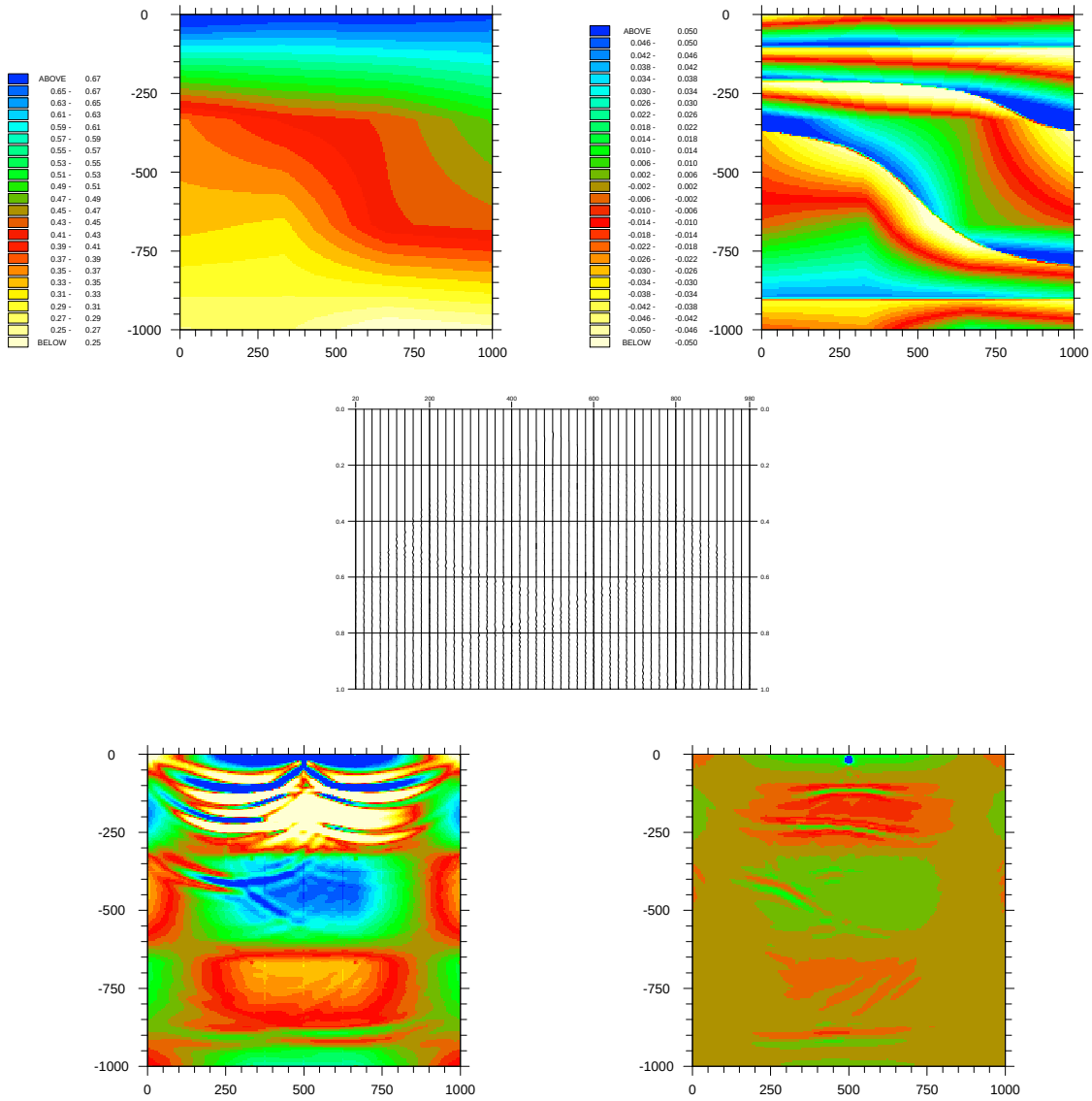

FIG. 14 – *Position 0 du curseur. Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Pour la section en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : projections lisse (gauche) et rugueuse (droite) de la lenteur $\bar{\nu}$ (10^{-3} s/m). Milieu : sismogramme pour le milieu lisse. Bas : images migrées relatives à la lenteur (gauche) et à l'impédance (droite) pour le milieu lisse.*

5 Migration

Dans cette section, nous décrivons la construction d'un opérateur migration quantitative reposant sur un préconditionnement de la rétro-propagation des données par la méthode de l'état adjoint.

5.1 Migration quantitative

Pour la séparation propagateur/réflecteur définie à la section précédente, pour laquelle $\pi = \nu_s$ et $r = (\nu_r, \sigma_r)$, la transposée de la modélisation directe linéarisée est donnée par

$$B(\pi)^T = \frac{\partial \mathcal{I}\varphi}{\partial r}(\pi, 0)^T = \begin{pmatrix} P_r \mathcal{A}^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\nu_s, \sigma_s)\right)^T \\ P_r \mathcal{A}^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\nu_s, \sigma_s)\right)^T \end{pmatrix} \tag{38}$$

où P_r est la matrice de la projection rugueuse dans la base multiéchelle (33) de VME et $\mathcal{A}$ est la matrice de passage de cette même base à la base locale de V^{DF}.

Le préconditionnement "diagonal" Λ intervenant dans la définition de l'opérateur de migration quantitative (4) est cherché sous la forme

$$\Lambda = \lambda P_r \mathcal{A}^T W_z \mathcal{A} \tag{39}$$

où $\lambda \in \mathbf{R}_+^{\star\,2}$ et W_z est un poids positif. Le pas λ est choisi de la forme

$$\lambda = (\lambda_\nu, \lambda_\sigma) = (\mu\beta_\nu, (1-\mu)\beta_\sigma) \tag{40}$$

où β_ν et β_σ sont des facteurs d'échelle et $\mu \in [0, 1]$ est un paramètre adimensionnalisé.

Nous allons maintenant évaluer le gradient de la fonction coût $\mathcal{J}$ par rapport aux paramètres physiques ν et σ dans le cas d'un seul tir, afin d'établir l'équation des ondes rétrograde correspondant à la transposée de la modélisation directe linéarisée.

5.2 Établissement de l'équation des ondes adjointe

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie du contrôle optimal s'appliquant aux problèmes de minimisation sous contraintes par équations aux dérivées partielles, *cf.* [13, 5]. La fonction coût à minimiser est contrôlée par une équation d'état (ici équation des ondes directe) et l'introduction d'un Lagrangien, dont le multiplicateur[3] est solution de l'équation d'état adjointe (ici équation des ondes rétrograde), permet l'évaluation du gradient de cette fonction coût en ne résolvant que deux équations d'état, et cela indépendamment de la dimension de l'espace des paramètres.

Le calcul n'est effectué que pour les points du maillage intérieur Ω_{0h} (non sur le bord), car le peu d'information supplémentaire apporté par un calcul complet sur le bord ne justifie pas la complexité qu'il engendre.

5.2.1 Lagrangien

Soit $d \in D$ une donnée sismique ($N = 1$). Soient $\nu, \sigma \in \mathcal{B}_h$ des paramètres physiques admissibles. Exprimée en termes du champ de pression p, la fonction coût à dériver est

$$\mathcal{J}(\nu, \sigma) = j(p) = \frac{1}{2}\|d - W_t G p\|^2 \tag{41}$$

où $p = (0, 0, p^2, \ldots, p^{N_t})$ est solution de l'équation d'état discrète

$$C(\nu, \sigma)p = f. \tag{42}$$

Soit $\mathcal{L}$ le Lagrangien discret associé au problème de minimisation de j sous la contrainte (42), c'est-à-dire sous les contraintes (15) et (16). Ce Lagrangien dépend des variables d'état p et φ[4] et des multiplicateurs de Lagrange q, associé à l'équation (15) dans Ω_h, et Ψ, associé à l'équation (16) sur le bord artificiel Γ_{ah}. Pour tout $p \in V_{aTh}$,

3. Il s'interprète ici comme la rétro-propagation des données.
4. φ représente de nouveau ici les fonctions auxiliaires définies sur les trois cotés du bord artificiel.

pour tout $\varphi \in W_{aTh}$, pour tout $q = (q^1, \ldots, q^{N_t-1}) \in V_{ah}^{N_t-1}$ et pour tout $\Psi = (\Psi^1, \ldots, \Psi^{N_t-1}) \in W_{ah}^{N_t-1}$ tel que $\Psi_{1B} = \Psi_{2B}$ et $\Psi_{2C} = \Psi_{3C}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(p,\varphi,q,\Psi;\nu,\sigma) = j(p) &+ \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{M\in\Omega_{ah}} B_M p_M^{(2)k} q_M^k + \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{M\in\Omega_{ah}} \left(Ap^k\right)_M q_M^k \\ &+ \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{i=1,2,3}\sum_{M\in\Gamma_{ih}} D_{iM} p_M^{(1)k} q_M^k - \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{i=1,2,3}\sum_{M\in\Gamma_{ih}} \frac{1}{2} D_{iM} \varphi_{iM}^{(1)k} q_M^k - \sum_{k=1}^{N_{ts}} F_S^k q_S^k \\ &+ \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{i=1,2,3}\sum_{M\in\Gamma_{ih}} D_{iM} \varphi_{iM}^{(2)k} \Psi_M^k + \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{i=1,2,3}\sum_{M\in\Gamma_{ih}} \left(C_i p^k\right)_M \Psi_M^k \\ &+ \sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{B,C} M E_M p_M^{(1)k} \Psi_M^k.\end{aligned}$$

Alors, q et Ψ étant fixés, si p et φ sont solutions de l'équation des ondes discrète (42),

$$\mathcal{L}(p,\varphi,q,\Psi;\nu,\sigma) = \mathcal{J}(\nu,\sigma)$$

et

$$\delta\mathcal{J} = \sum_{k=2}^{N_t}\sum_{M\in\Omega_{ah}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_M^k}\delta p_M^k + \sum_{k=2}^{N_t}\sum_{i=1,2,3}\sum_{M\in\Gamma_{ih}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \varphi_{iM}^k}\delta\varphi_{iM}^k + \sum_{M\in\Omega_{ah}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nu_M}\delta\nu_M + \sum_{M\in\Omega_{ah}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma_M}\delta\sigma_M.$$

Il suffit donc de choisir les multiplicateurs de Lagrange q et Ψ tels que, pour tous $\delta p, \delta\varphi$,

$$\sum_{k=2}^{N_t}\sum_{M\in\Omega_{ah}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_M^k}\delta p_M^k = \sum_{k=2}^{N_t}\sum_{i=1,2,3}\sum_{M\in\Gamma_{ih}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \varphi_{iM}^k}\delta\varphi_{iM}^k = 0 \tag{43}$$

et de définir les corrélations χ_ν et χ_σ de telle façon que, pour tous $\delta\nu, \delta\sigma \in V_{0h}$,

$$\sum_{M\in\Omega_{0h}} \chi_{\nu M}\delta\nu_M = \sum_{M\in\Omega_{0h}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nu_M}\delta\nu_M \quad\text{et}\quad \sum_{M\in\Omega_{0h}} \chi_{\sigma M}\delta\sigma_M = \sum_{M\in\Omega_{0h}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma_M}\delta\sigma_M,$$

pour avoir finalement, sur le maillage intérieur Ω_{0h},

$$\nabla_\nu\mathcal{J} = \chi_\nu \qquad\text{et}\qquad \nabla_\sigma\mathcal{J} = \chi_\sigma. \tag{44}$$

5.2.2 Équation des ondes discrète adjointe

La condition (43) permet de former les équations discrètes (adjointes) que doivent vérifier les multiplicateurs de Lagrange, *cf.* [10]. Pour cela, il faut poser $q^{N_t} = q^{N_t+1} = q^{N_t+2} = q^{N_t+3} \equiv 0$ et $\Psi^{N_t} = \Psi^{N_t+1} = \Psi^{N_t+2} = \Psi^{N_t+3} \equiv 0$, et définir $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^{N_t+1}, 0, 0) \in W_{ah}^{N_t+3}$ telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $2 \le k \le N_t + 2$,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1,2,3} D_i \psi_i^{(1)k} = \sum_{i=1,2,3} C_i \Psi^k - E\Psi^{(1)k} \qquad \text{sur } \Gamma_{ah}.$$

Ainsi, $q \in V_{aTh}$ avec $q^{N_t} = q^{N_t+1} \equiv 0$ et $\psi \in W_{aTh}$ avec $\psi^{N_t} = \psi^{N_t+1} \equiv 0$ sont solutions de, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $N_t \ge k \ge 2$,

$$Bq^{(2)k} + Aq^k - \sum_{i=1,2,3} D_i q^{(1)k} + \frac{1}{2}\sum_{i=1,2,3} D_i \psi_i^{(1)k} = -\nabla_p j, \tag{45}$$

$$\sum_{i=1,2,3} D_i \psi_i^{(2)k} + \sum_{i=1,2,3} C_i q^k - Eq^{(1)k} = 0. \tag{46}$$

Les fonctions q et ψ sont donc solutions d'un système linéaire semblable à celui vérifié par p et φ où les dérivées premières en temps changent de signe et les conditions initiales deviennent finales. Il s'agit de l'équation adjointe (rétrograde) associée à l'équation (42) que, par analogie, nous notons de façon condensée

$$C(\nu,\sigma)^T q = -\nabla_p j.$$

Remarquons que la fonction auxiliaire intervenant dans l'expression de la CLA d'ordre 2 de l'équation des ondes adjointe n'est pas le multiplicateur de Lagrange associé à la seconde équation directe (sur le bord absorbant).

5.2.3 Gradients

Soit le résidu $e = d - c$, alors

$$\delta j = \sum_{k=2}^{N_t} \sum_{G \in \mathcal{G}} e_G^k \delta e_G^k = -\sum_{k=2}^{N_t} \sum_{M \in \Omega_{ah}} (G^T W_t e^k)_M \delta p_M^k,$$

et

$$\nabla_p j = -G^T W_t e. \tag{47}$$

Rappelons que, pour tout $M \in \Omega_{ah}$,

$$B_M = W_M \frac{\nu_M}{\sigma_M} h^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{M \in \Omega_{ah}} \left(Ap^k\right)_M q_M^k = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{\nu_M \sigma_M} \left(\nabla p^k \nabla q^k\right)_M .$$

Soient

$$\chi_\beta = h^2 \sum_{k=1}^{N_t - 1} p^{(2)k} q^k \qquad \text{et} \qquad \chi_\alpha = \sum_{k=1}^{N_t - 1} \nabla p^k \nabla q^k. \tag{48}$$

Ainsi, nous avons

$$\chi_\nu = \frac{1}{\sigma} \chi_\beta - \frac{1}{\nu^2 \sigma} \chi_\alpha \qquad \text{et} \qquad \chi_\sigma = -\frac{\nu}{\sigma^2} \chi_\beta - \frac{1}{\nu \sigma^2} \chi_\alpha. \tag{49}$$

5.3 Aspect informatique

Pour calculer le champ rétrograde q, nous procédons également à un prolongement par symétrie d'une maille tout autour du domaine. Ainsi nous pouvons appliquer exactement le même algorithme que pour la simulation directe, mais avec des conditions finales.

Pour des nécessités d'économies de place-mémoire, pour le calcul des corrélations élémentaires (48), nous ne stockons pas tous les pas de temps du champ direct p mais uniquement les valeurs sur le bord ainsi que les deux instants finaux ; cela nous permet de recalculer ce champ p de façon rétrograde, à l'instar du champ q. D'autre part, pour le calcul de la corrélation χ_β, la dérivée seconde en temps est remplacée par des dérivées secondes en espace à l'aide de l'équation des ondes vérifiée par p ou par q.

Les Tableaux suivants sont relatifs au programme correspondant à l'algorithme décrit précédemment. Les mesures de complexité et de performance sont effectuées pour le modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A. Le Tableau 4 montre que conceptuellement la migration n'implique que la résolution de deux équations des ondes, mais que d'un point de vue pratique, le sur-coût en masse de calculs est d'un facteur 4,5 ; soit, intuitivement, 1 pour le calcul direct du champ direct p, 1+1 pour le calcul rétrograde des champs direct p et rétrograde q et 1,5 pour les corrélations et le préconditionnement. La complexité en mémoire du programme de migration est de l'ordre de 7,6 millions de mots et la complexité en calculs est d'environ 57 milliards d'opérations. Le Tableau 6 montre les performances comparées du programme de migration sur différents calculateurs.

	nb. éq. ondes	calculs
simulation	1	1
migration	2	4,5

TAB. 4 – *Complexité de la migration relativement à la simulation en termes de nombre d'équations des ondes à résoudre et masse relative de calculs à effectuer.*

	mémoire (Mmots)	calculs (Gop)
simulation	3,2	13
migration	7,6	57

TAB. 5 – *Complexité en mémoire et en calculs des programmes de simulation et de migration.*

	temps réel (s)	performance (Mop/s)	τ (10^{-6}s)
Digital 3000/400	1600	36	1,5
Digital 2100/500 (4 proc.)	680	83	0,66
Cray YMP/C90 (1 proc.)	88	640	0,085

TAB. 6 – *Performances comparées du programme de migration sur différents calculateurs. La dernière colonne donne le temps de calcul moyen par maille, par pas de temps et par tir.*

5.4 Préconditionnement

Nous présentons maintenant une manière simple de choisir les poids W_t et W_z et les facteurs d'échelle β_ν et β_σ. L'azimut relatif à la lenteur μ est un degré de liberté supplémentaire permettant de doser la répartition de la réflectivité entre la lenteur et l'impédance, il sera déterminé lors de l'optimisation à la section 8

Du point de vue du préconditionnement du problème de minimisation de la fonction coût $\mathcal{IJ}$ par rapport au réflecteur $r \in R$ pour un propagateur $\pi \in \Pi$ fixé, le rôle des poids W_t et W_z est de corriger la direction de descente proposée par le gradient pur $-\nabla_r \mathcal{IJ}(\pi, 0)$ en restituant les amplitudes relatives des réflecteurs migrés et le rôle de λ est de proposer le meilleur pas dans cette direction corrigée en restituant les amplitudes absolues des réflecteurs migrés ; le tout correspondant un pas de quasi-Newton.

L'atténuation survenant au cours de la propagation du signal connaît deux origines distinctes, elle est due, d'une part, à la conservation de l'énergie injectée par la source alors que le front d'onde grandit, et d'autre part, aux réflexions/transmissions causant des pertes à chaque interface. Par ailleurs, elle intervient à deux endroits lors du processus d'imagerie (migration des données sismiques). D'abord, les données elles-mêmes résultent de la propagation dans le véritable milieu, *a priori* inconnu, et ont été assujetties aux deux formes d'atténuation. Nous les corrigeons pour l'atténuation géométrique en utilisant le poids $W_t = \sqrt{t}$. Cette correction est parfaite dans le cas des milieux homogènes. Corriger les données pour les pertes de signal dues aux réflexions/transmissions à chaque interface demanderait, d'une part, l'estimation des coefficients de réflexion et, d'autre part, l'identification de l'origine de chaque événement de chaque sismogramme. Devant la complexité de la tâche, cette étude a été laissée de coté pour l'instant...

Ensuite, les corrélations χ_ν et χ_σ sont obtenues à partir des champs direct p et rétrograde q qui correspondent à des propagations dans un milieu lisse sans réflectivité. Ces champs p et q ne sont donc affectés que par l'atténuation géométrique. Le temps de parcours n'étant pas de calcul simple en ce qui concerne la rétro-propagation des données, nous lui préférons la distance parcourue, qui lui est proportionnelle en milieu homogène. En un point donné M du maillage Ω_h, le champ direct p a été atténué proportionnellement à la distance $d(S, M)^{\frac{1}{2}}$ (où S est la position de la source) et, dans le cas d'un seul récepteur (situé en R), le champ rétrograde q a été atténué proportionnellement à la distance $d(M, R)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, l'atténuation géométrique sur p et q induit sur les corrélations χ_v et χ_σ une atténuation de l'ordre de $d(S, M)^{\frac{1}{2}} d(M, R)^{\frac{1}{2}}$ (où R est maintenant une position moyenne des récepteurs). Une approximation grossière de ce facteur d'atténuation, valide pour l'offset nul dans le cas des milieux homogènes, est simplement la profondeur du point M. Nous corrigeons donc les migrations pour l'atténuation géométrique en utilisant le poids $W_z = z$.

Soit $\pi = \nu_s$ une estimation du propagateur. Soit m la direction de descente corrigée,

$$m = \mathcal{A} P_r \mathcal{A}^T W_z \mathcal{A} P_r B(\pi)^T d,$$

et soit $\lambda^\star = (\lambda^\star_\nu, \lambda^\star_\sigma)$ le pas optimal pour $\mathcal{IJ}$ dans cette direction. Soient les pas normalisés

$$\alpha_\nu = \lambda^\star_\nu \frac{||m_\nu||_1}{||\nu_s||_1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_\sigma = \lambda^\star_\sigma \frac{||m_\sigma||_1}{||\sigma_s||_1}$$

où $||.||_1$ est la valeur absolue moyenne sur le maillage Ω_h. Les facteurs d'échelle sont alors données par

$$\beta_\nu = (\alpha_\nu + \alpha_\sigma) \frac{||\nu_s||_1}{||m_\nu||_1} \qquad \text{et} \qquad \beta_\sigma = (\alpha_\nu + \alpha_\sigma) \frac{||\sigma_s||_1}{||m_\sigma||_1}$$

et l'azimut relatif à la lenteur est estimé par

$$\mu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + \alpha_\sigma}.$$

6 Resimulation

Dans cette section, nous décrivons l'algorithme de calcul de la resimulation, ou modélisation directe modifiée.

6.1 Description du calcul de la fonction coût modifiée

La fonction coût modifiée $\mathcal{MJ}$ reste l'erreur des moindres carrés entre données sismiques et sismogrammes synthétiques, mais elle dépend des nouvelles variables : le propagateur π et la réflectivité en temps s.

La Figure 15 montre de façon schématique, sous forme de boîtes, les transformations successives constituant la procédure de *resimulation*. Celles-ci permettent de passer des inconnues modifiées (π, s) aux inconnues intermédiaires (π, r) par la *migration quantitative*, puis aux inconnues physiques (ν, σ), par la *mise à jour*, et ensuite aux sismogrammes synthétiques c par la *simulation*. Finalement, la fonction coût modifiée $\mathcal{MJ}$ est calculée comme l'erreur des moindres carrés entre les données d et les sismogrammes resimulés. La procédure de *migration quantitative* est elle-même constituée de deux transformations : la boîte *corrélation + sommation* permet, via une propagation des sources et une rétro-propagation de la réflectivité en temps s, de calculer les images migrées sommées χ de type gradient, puis la boîte *projection + poids* permet d'estimer de façon quantitative la réflectivité en profondeur r.

La minimisation de la fonction coût modifiée par rapport au propagateur sera organisée de façon hiérarchique relativement aux différentes échelles de la base multiéchelle de l'espace lisse V_s. Ainsi, il est nécessaire de donner l'expression de $\mathcal{MJ}$ en fonction des coordonnées du propagateur dans cette base multiéchelle. C'est pourquoi le calcul de la fonction coût modifiée comporte une étape préliminaire, non représentée dans le schéma de la Figure 15, qui correspond au changement de grille pour le propagateur (de la grille multiéchelle Ω^{ME} à la grille aux différences finies[5] Ω^{DF}.

6.1.1 Étape préliminaire: changement de grille

Soient Π^{ME} et Π^{DF} les matrices-colonne des coordonnées du propagateur respectivement dans la base multiéchelle de VME et dans la base locale de V^{DF}. Nous avons

$$\Pi^{DF} = \mathcal{A}\Pi^{ME}. \tag{50}$$

Notons qu'une minimisation de $\mathcal{MJ}$ par rapport à π sera éventuellement initialisée par une vitesse ou une lenteur donnée par ses coordonnées $(\Pi^{DF})^0$ dans la base locale de V^{DF} et donc que la valeur initiale de Π^{ME} sera alors calculée par

$$(\Pi^{ME})^0 = P_s\mathcal{A}^{-1}(\Pi^{DF})^0.$$

6.1.2 Étape 1 : migration

Pour chaque tir n, $n \in \mathbf{N}$, $n \leq N_T$,

1. propagation de la source f_n,
$$\mathcal{C}_s p_{s,n} = f_n, \tag{51}$$

2. rétro-propagation de la réflectivité en temps s_n,
$$\mathcal{C}_s^T q_{s,n} = G^T W_t s_n. \tag{52}$$
L'opérateur $\mathcal{C}_s = \mathcal{C}(\nu_s, \sigma_s)$ correspond à l'opérateur aux dérivées partielles représentant l'équation des ondes acoustiques discrète munie de ses conditions aux limites avec comme coefficients les valeurs lisses d'arrière-plan des paramètres physiques.

3. Corrélations des champs direct et rétrograde $p_{s,n}$ et $q_{s,n}$,
$$\chi_{\beta,s,n} = \chi_\beta(p_{s,n}, q_{s,n}) = -\mathbf{1}_{\Omega_{0h}} h^2 \sum_{k=1}^{N_t-1} {p_{s,n}}^{(1+)k} {q_{s,n}}^{(1+)k}, \tag{53}$$
$$\chi_{\alpha,s,n} = \chi_\alpha(p_{s,n}, q_{s,n}) = \mathbf{1}_{\Omega_{0h}} \sum_{k=1}^{N_t-1} \nabla {p_{s,n}}^k \nabla {q_{s,n}}^k. \tag{54}$$

5. Les équations des ondes étant résolues sur la grille aux différences finies.

La matrice $\mathbf{1}_{\Omega_{0h}}$ représente la fonction caractéristique du maillage intérieur[6] Ω_{0h} et $u^{(1+)k} = u^{k+1} - u^k$ représente la dérivée discrète avancée du premier ordre en temps.

$$\chi_{\nu,s,n} = \frac{1}{\sigma_s}\chi_{\beta,s,n} - \frac{1}{\nu_s^2\sigma_s}\chi_{\alpha,s,n}, \tag{55}$$

$$\chi_{\sigma,s,n} = -\frac{\nu_s}{\sigma_s^2}\chi_{\beta,s,n} - \frac{1}{\nu_s\sigma_s^2}\chi_{\alpha,s,n}. \tag{56}$$

4. Sommation des corrélations,

$$\chi_{\nu,s} = \sum_{n=1}^{N_T} \chi_{\nu,s,n}, \tag{57}$$

$$\chi_{\sigma,s} = \sum_{n=1}^{N_T} \chi_{\sigma,s,n}. \tag{58}$$

6.1.3 Étape 2 : estimation quantitative de la réflectivité

1. Correction des amplitudes relatives des images migrées sommées χ et projection sur l'espace des réflectivités,

$$m_\nu = -(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)W_z(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)\chi_{\nu,s}, \tag{59}$$

$$m_\sigma = -(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)W_z(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)\chi_{\sigma,s}. \tag{60}$$

2. Correction des amplitudes absolues des images migrées amplifiées m,

$$r_\nu = \mu\beta_\nu m_\nu, \tag{61}$$

$$r_\sigma = (1-\mu)\beta_\sigma m_\sigma. \tag{62}$$

3. Mise à jour des paramètres physiques à partir des données d'arrière-plan et projection sur l'ensemble des paramètres physiques admissibles,

$$\nu = P_{\mathcal{B}_\nu}(\nu_s + r_\nu), \tag{63}$$

$$\sigma = P_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma_s + r_\sigma). \tag{64}$$

6.1.4 Étape 3 : simulation

Pour chaque tir n, $n \in \mathbf{N}$, $n \leq N_T$,

1. propagation de la source f_n,

$$\mathcal{C}p_n = f_n. \tag{65}$$

L'opérateur $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\nu, \sigma)$ correspond maintenant à l'équation des ondes avec comme coefficients les valeurs mises à jour des paramètres physiques.

2. Enregistrement aux récepteurs et correction des amplitudes,

$$c_n = W_t G p_n. \tag{66}$$

6.1.5 Étape 4 : erreur des moindres carrés

Pour chaque tir n, $n \in \mathbf{N}$, $n \leq N_T$,

1. calcul du résidu,

$$e_n = d_n - c_n, \tag{67}$$

2. calcul de la fonction coût modifiée,

$$\mathcal{MJ}_n = \frac{1}{2}||e_n||_2^2. \tag{68}$$

La norme $||.||_2$ est la norme euclidienne sur la grille en temps.

3. Calcul de la fonction coût modifiée totale,

$$\mathcal{MJ} = \sum_{n=1}^{N_T} \mathcal{MJ}_n. \tag{69}$$

6. La migration n'est calculée qu'à l'intérieur du domaine et artificiellement positionnée à 0 sur le bord.

6.2 Aspect informatique

Les Tableaux suivants sont relatifs au programme correspondant à l'algorithme décrit précédemment. Les mesures de complexité et de performance sont effectuées pour le modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A.

Le Tableau 7 montre que la resimulation correspond bien à une migration suivie d'une simulation, tant en nombre d'équations des ondes à résoudre qu'en masse de calculs à effectuer (l'unité étant la simulation). La complexité en mémoire du programme de resimulation est du même ordre que celle du programme de migration, soit 7,6 millions de mots et la complexité en calculs est d'environ 69 milliards d'opérations. Le Tableau 9 montre les performances comparées du programme de resimulation sur différents calculateurs.

	nb. éq. ondes	calculs
simulation	1	1
migration	2	4,5
resimulation	3	5,4

TAB. 7 – *Complexité de la migration et de la resimulation relativement à la simulation en termes de nombre d'équations des ondes à résoudre et de masse relative de calculs à effectuer.*

	mémoire (Mmots)	calculs (Gop)
simulation	3,2	13
migration	7,6	57
resimulation	7,6	69

TAB. 8 – *Complexité en mémoire et en calculs des programmes de simulation, de migration et de resimulation.*

	temps réel (s)	performance (Mop/s)	τ (10^{-6}s)
Digital 3000/400	2100	33	2,0
Digital 2100/500 (4 proc.)	890	78	0,86
Cray YMP/C90 (1 proc.)	104	670	0,10

TAB. 9 – *Performances comparées du programme de resimulation sur différents calculateurs. La dernière colonne donne le temps de calcul moyen par maille, par pas de temps et par tir.*

6.3 Résultats numériques

Nous montrons maintenant des résultats numériques de resimulation des données pour diverses hypothèses de propagation dans le cas du modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A. Cela nous permet de visualiser, d'une part, lorsque nous resimulons avec le "vrai" propagateur, que les données sont une bonne estimation initiale des "vraies" réflectivités en temps, et d'autre part, lorsque nous resimulons avec des hypothèses erronées de propagation, que la resimulation est un opérateur de modélisation peu sensible aux variations de propagateur, tout au moins en ce qui concerne les temps de parcours (phase).

Les Figures 17 et 18 montrent les resimulations des données, ainsi que les réflectivités estimées en profondeur, pour la "vraie" lenteur lisse et pour une lenteur lisse constante de valeur 0.40 10^{-3} s/m. Elles sont à comparer à la Figure 16 qui montre les données et les projections lisses et rugueuses des "vrais" paramètres physiques $\bar{\nu}$ et $\bar{\sigma}$.

6.4 Influence sur la fonction coût

Nous montrons maintenant l'impact bénéfique de la reformulation en temps sur la dépendance de la resimulation et de la fonction coût par rapport au propagateur dans le cas du modèle SYNCLAY. D'abord au niveau des déphasages, puis au niveau des minima locaux.

6.4.1 Déphasages

Étant donné une variation homogène de propagateur $\Delta\pi \in \mathbf{R}$ autour de la "vraie" valeur $\bar{\pi}$, nous comparons aux données,

$$d = \mathcal{I}\varphi(\bar{\pi}, \bar{r}) = \mathcal{M}\varphi(\bar{\pi}, \bar{s}),$$

les sismogrammes obtenus par simulation pour la "vraie" réflectivité en profondeur,

$$\mathcal{I}\varphi(\bar{\pi} + \Delta\pi, \bar{r}),$$

et par resimulation de la "vraie" réflectivité en temps, ce qui revient à une simulation pour une réflectivité en profondeur dépendante de la variation de propagateur,

$$\mathcal{M}\varphi(\bar{\pi} + \Delta\pi, \bar{s}) = \mathcal{I}\varphi(\bar{\pi} + \Delta\pi, \mathcal{M}(\bar{\pi} + \Delta\pi)\bar{s}).$$

La Figure 19 montre cette comparaison dans le cas de variations de propagateur de ± 60 m/s correspondant aux déphasages maxima pour la simulation, soit aux deux maxima locaux entourant le minimum global de la Figure 20. Les déphasages sont bien corrigés dans le cas de la resimulation à tous les instants et pour tous les offsets.

6.4.2 Minima locaux

Nous présentons maintenant une expérience montrant que, pour de grandes variations de propagateur, la fonction coût modifiée ne possède pas de minimum local alors que la fonction coût intermédiaire (ou usuelle) en possède plusieurs.

Cette expérience concerne des variations homogènes de propagateur $\Delta\pi \in \mathbf{R}$ autour de la "vraie" valeur $\bar{\pi}$ Nous comparons les variations de la fonction coût intermédiaire calculée pour la "vraie" réflectivité en profondeur,

$$\Delta\pi \mapsto \mathcal{I}\mathcal{J}(\bar{\pi} + \Delta\pi, \bar{r}),$$

à celles de la fonction coût modifiée calculée pour la "vraie" réflectivité en temps, ce qui revient à calculer la fonction coût intermédiaire pour une réflectivité en profondeur dépendante de la variation de propagateur,

$$\Delta\pi \mapsto \mathcal{M}\mathcal{J}(\bar{\pi} + \Delta\pi, \bar{s}) = \mathcal{I}\mathcal{J}(\bar{\pi} + \Delta\pi, \mathcal{M}(\bar{\pi} + \Delta\pi)\bar{s}).$$

La variation de propagateur est dans l'intervalle ± 400 m/s, ce qui représente une variation de $\pm 20\%$ dans la couche à 1800 m/s et une variation de $\pm 15\%$ dans celle à 3000 m/s. La Figure 20 montre que le domaine d'attraction du minimum global de la fonction coût modifiée $\mathcal{M}\mathcal{J}$ est suffisamment large pour permettre une minimisation par une méthode locale de type gradient, alors que celui du minimum global de la fonction coût intermédiaire $\mathcal{I}\mathcal{J}$ correspond à une erreur maximum de l'ordre de $\pm 3\%$ sur la "vraie" valeur du propagateur.

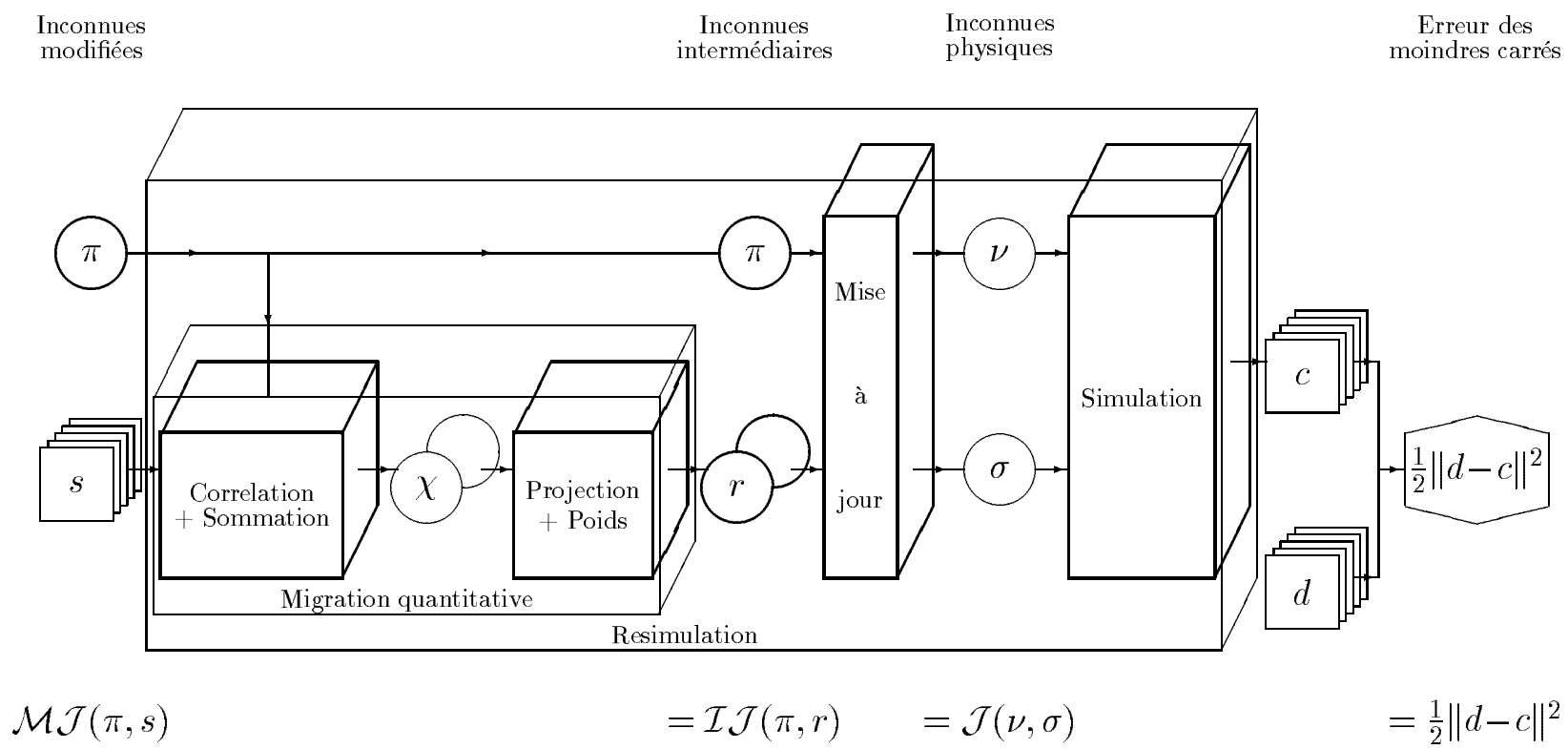

FIG. 15 – *La procédure de resimulation et les différentes fonctions coût. Les boîtes successives permettent de passer des inconnues modifiées* (π, s) *aux inconnues intermédiaires* (π, r) *par la* migration quantitative*, puis aux inconnues physiques* (ν, σ) *par la* mise à jour*, et ensuite aux sismogrammes synthétiques* c *par la* simulation*. Enfin, la fonction coût est calculée comme l'erreur des moindres carrés entre les données* d *et les sismogrammes resimulés. La procédure de migration quantitative est elle-même composée des boîtes* corrélation + sommation*, qui donne les images migrées sommées de type gradient* χ*, et* projection + poids*. Les cercles représentent des sections en profondeur (le schéma est dessiné pour des réflectivités à deux composantes). Ces sections en profondeur sont repérées, soit dans la base locale de* V^{DF} *(trait fin), soit dans la base multiéchelle de* VME *(trait gras). Les carrés représentent des sections en temps (le schéma est dessiné pour 5 tirs). L'hexagone représente un nombre réel.*

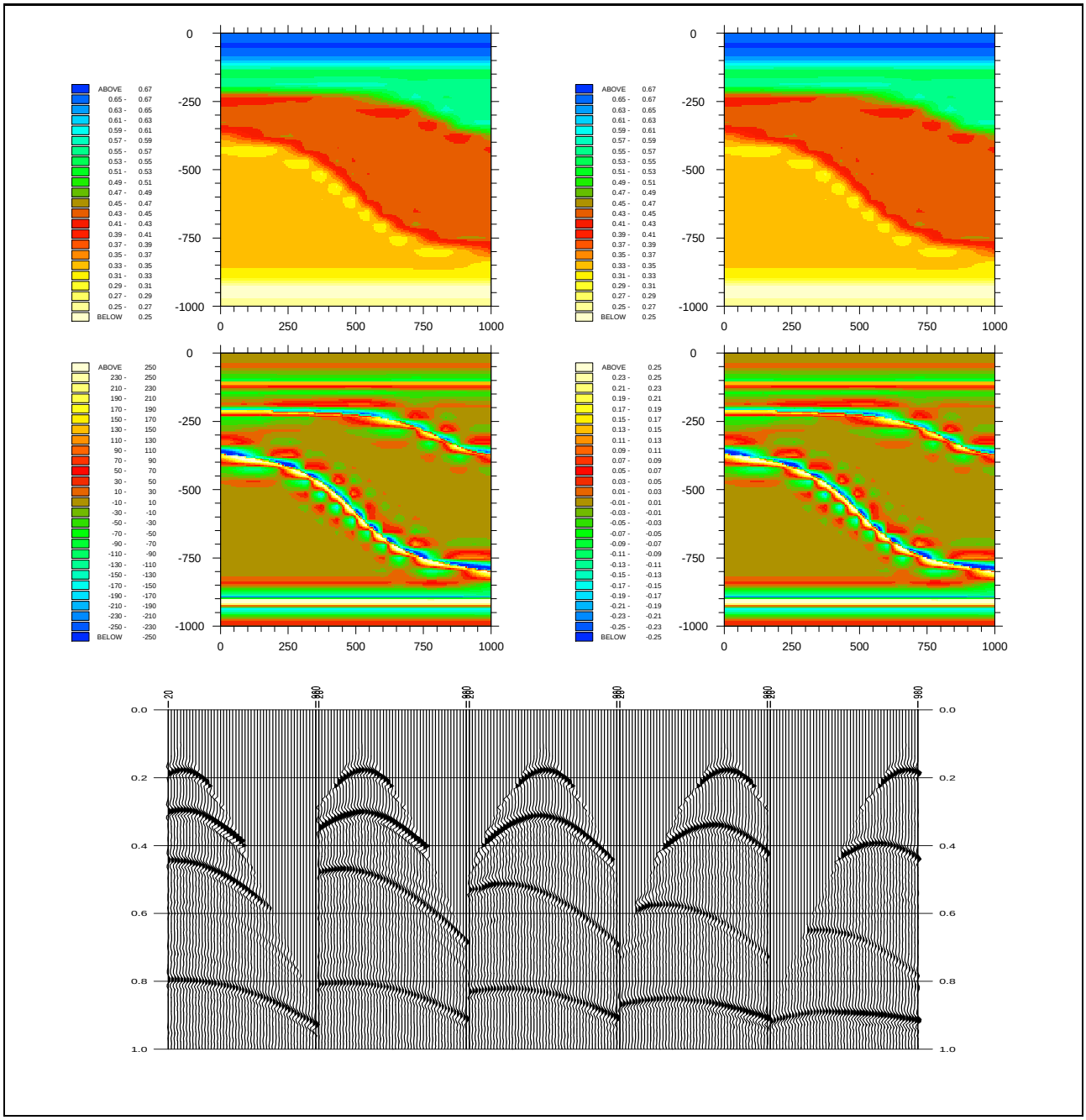

FIG. 16 – *Simulation dans le "vrai" milieu. Pour les sections en temps, axe horizontal : position des récepteurs, axe vertical : temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Les lenteurs sont en 10^{-3} s/m et les impédances en 10^6 kg/m^{2}s. Haut : "vraie" lenteur lisse $\bar{\nu}_s$ (gauche) et "vraie" impédance lisse $\bar{\sigma}_s$ (droite). Milieu : "vraie" lenteur rugueuse $\bar{\nu}_r$ (gauche) et "vraie" impédance rugueuse $\bar{\sigma}_r$ (droite). Bas : simulation dans le milieu $(\bar{\nu}_s + \bar{\nu}_r, \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_r)$.*

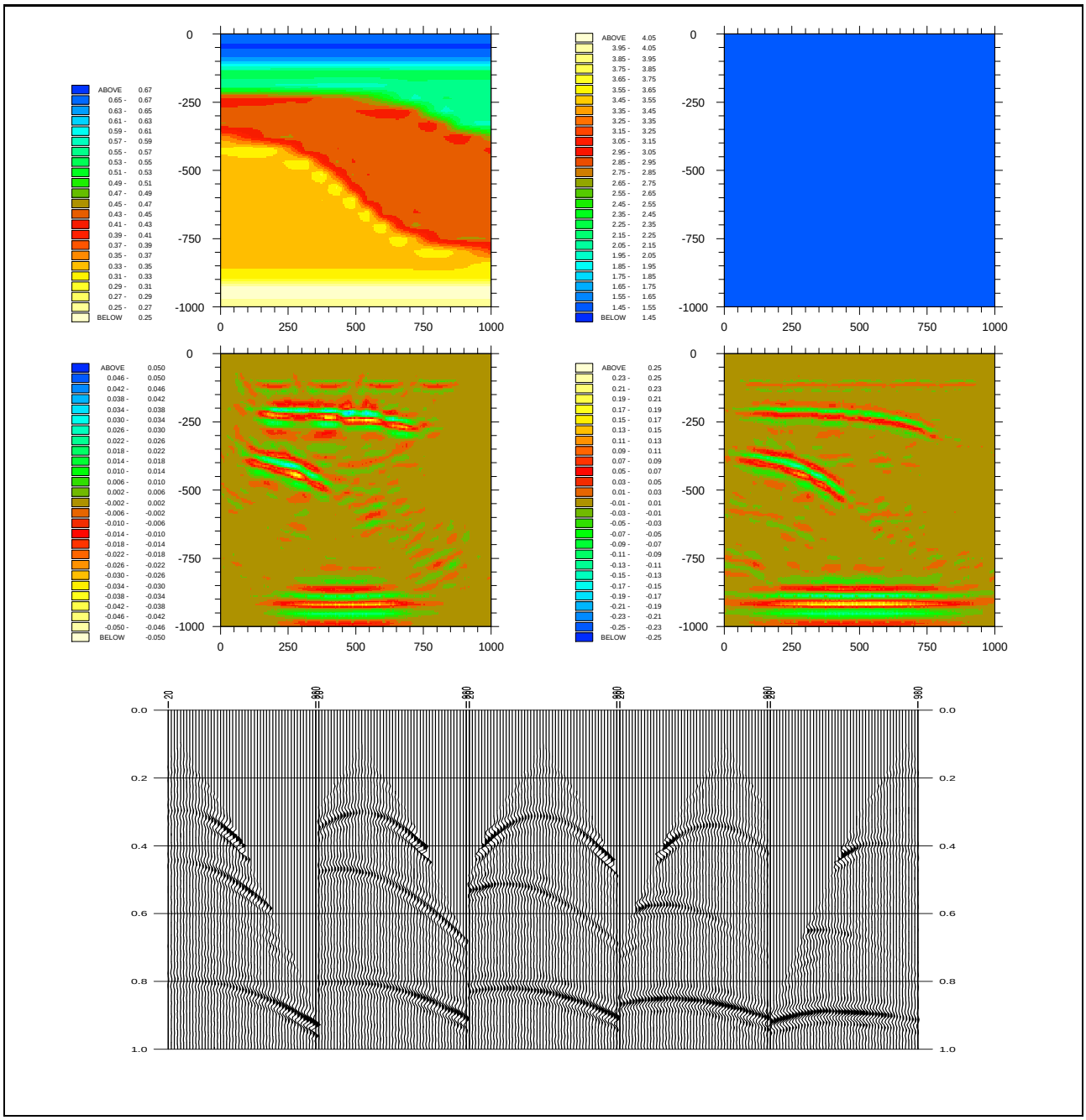

FIG. 17 – *Resimulation des données pour la "vraie" lenteur lisse. Pour les sections en temps, axe horizontal: position des récepteurs, axe vertical: temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal: distance horizontale (m), axe vertical: altitude (m). Les lenteurs sont en* 10^{-3} *s/m et les impédances en* 10^6 *kg/m*^{2}*s. Haut: "vraie" lenteur lisse* $\bar{\nu}_s$ *(gauche) et impédance lisse constante 1,5 (droite). Milieu: estimations intermédiaires de la lenteur rugueuse* r_ν *(gauche) et de l'impédance rugueuse* r_σ *(droite). Bas: simulation dans le milieu* $(\bar{\nu}_s + r_\nu; 1,5 + r_\sigma)$.

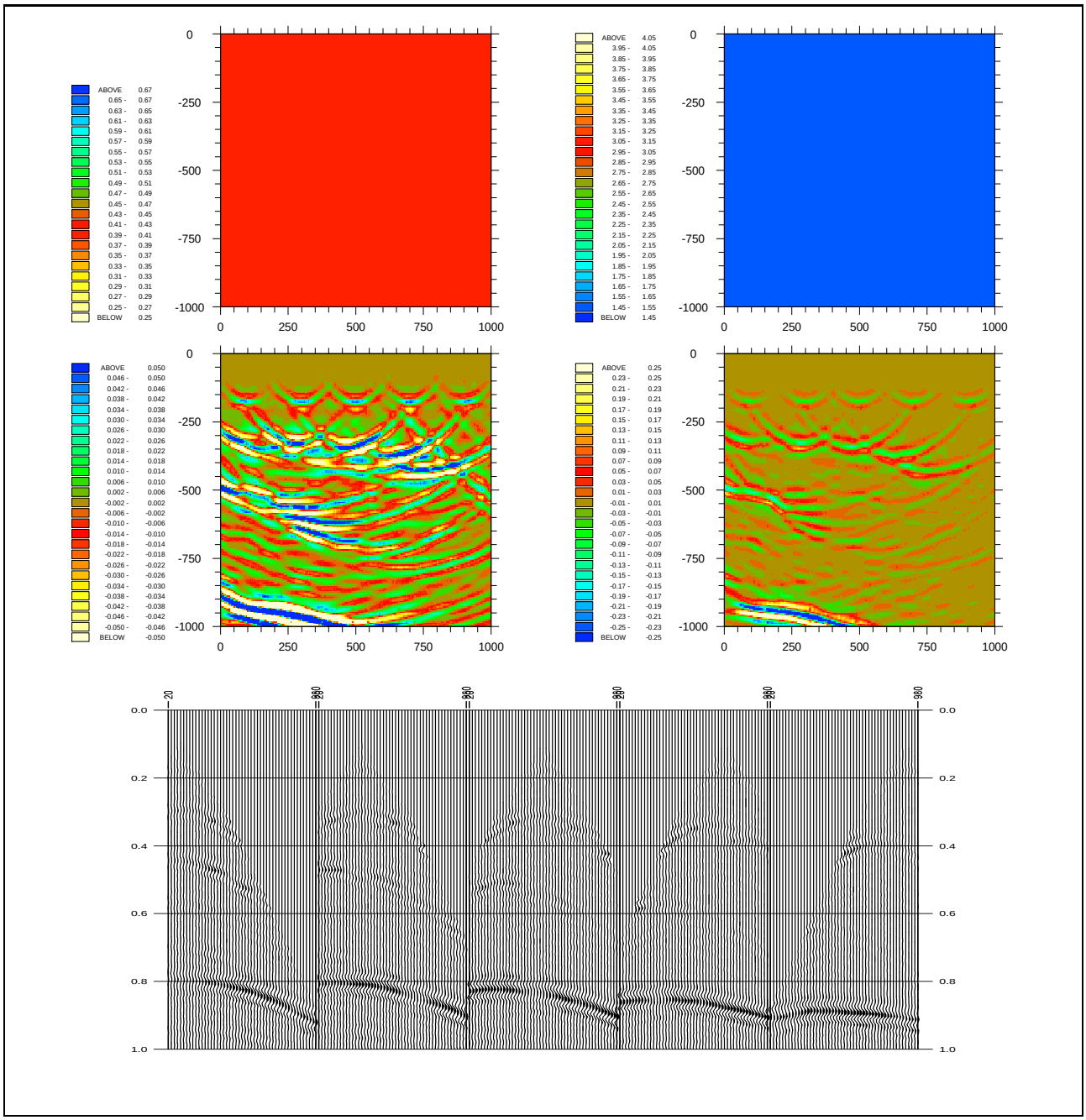

FIG. 18 – *Resimulation des données pour la lenteur lisse constante 0,40. Pour les sections en temps, axe horizontal : position des récepteurs, axe vertical : temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). Les lenteurs sont en* 10^{-3} *s/m et les impédances en* 10^6 *kg/m*^{2}*s. Haut : lenteur lisse constante 0,40 (gauche) et impédance lisse constante 1,5 (droite). Milieu : estimations intermédiaires de la lenteur rugueuse* r_ν *(gauche) et de l'impédance rugueuse* r_σ *(droite). Bas : simulation dans le milieu* $(0,40 + r_\nu; 1,5 + r_\sigma)$.

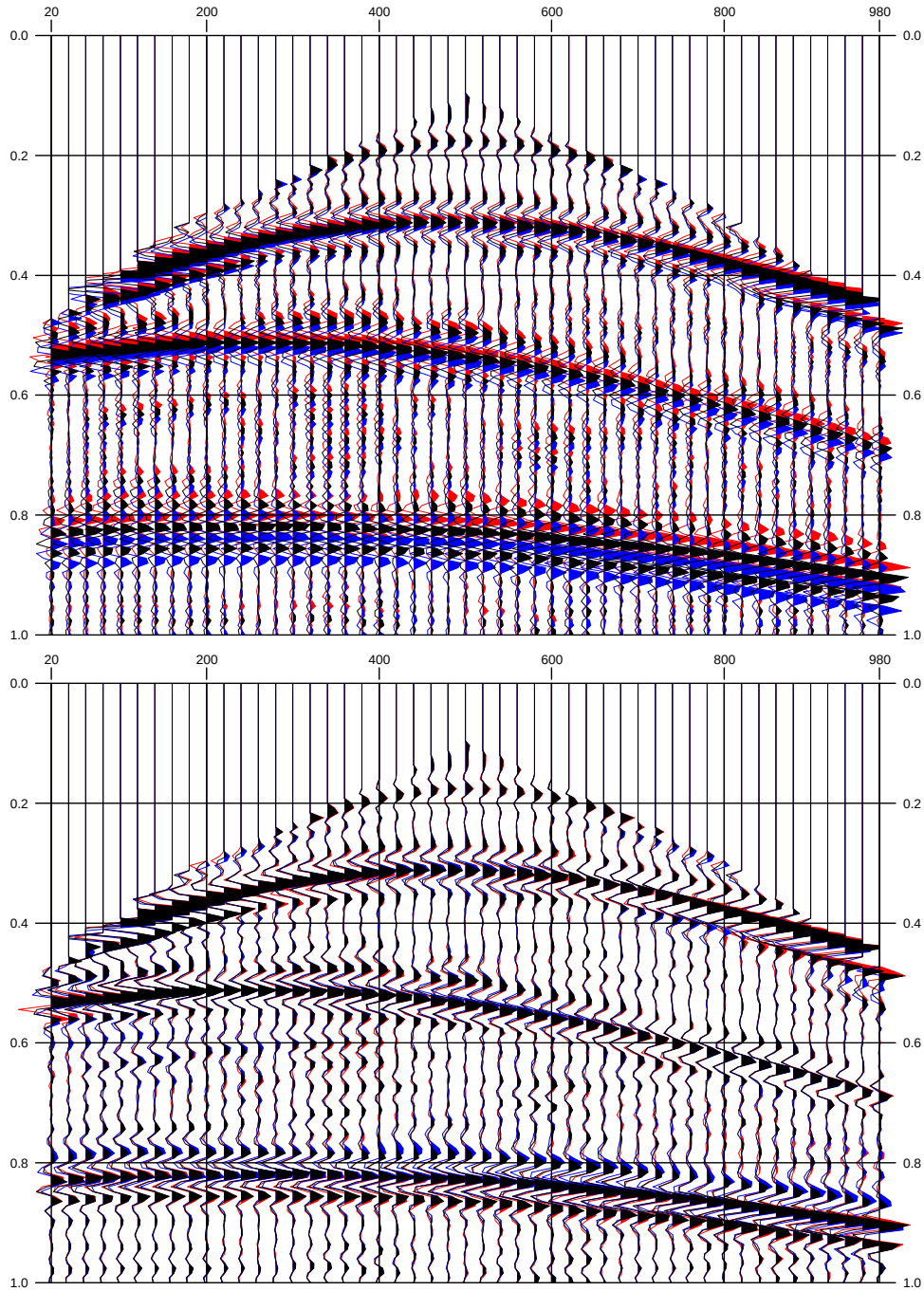

FIG. 19 – *Influence de la formulation en temps sur les déphasages. Axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Superposition des sismogrammes correspondant au "vrai" propagateur (noir), à un propagateur légèrement moins rapide (bleu) et à un propagateur légèrement plus rapide (rouge). Haut : pour le modèle direct $\mathcal{I}\varphi$. Bas : pour le modèle direct modifié $\mathcal{M}\varphi$.*

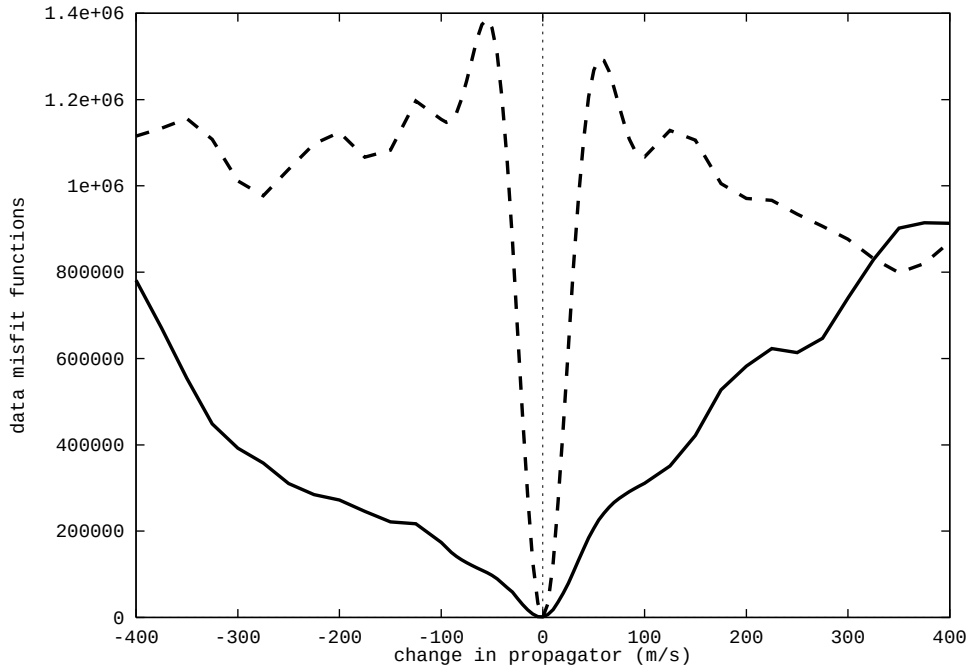

FIG. 20 – *Comportement des fonctions coût pour des variations homogènes de propagateur et pour la "vraie" réflectivité. Trait interrompu : fonction coût intermédiaire $\mathcal{IJ}$. Trait continu : fonction coût modifiée $\mathcal{MJ}$.*

7 Gradients

Dans cette section, nous décrivons l'algorithme de calcul du gradient de la fonction coût modifiée par rapport au propagateur et à la réflectivité en temps.

7.1 Description du calcul du gradient de $\mathcal{MJ}$

Ce calcul fait appel à l'établissement d'un modèle modifié adjoint : la resimulation adjointe. La resimulation étant essentiellement constituée d'une migration suivie d'une simulation, on conçoit intuitivement que la resimulation adjointe sera constituée d'une simulation adjointe suivie d'une migration adjointe. Le modèle direct modifié étant constitué de trois équations d'état, le gradient de la fonction coût modifiée $\mathcal{MJ}$ pourrait être calculé dans le cadre de la théorie du contrôle optimal, avec trois multiplicateurs de Lagrange. Cependant, l'équation adjointe de l'équation des ondes directe a été établie de façon détaillée : il suffit de renverser le sens d'écoulement du temps, le schéma numérique reste le même, seul le second membre dépend du contexte. Il est inutile de répéter ici des calculs similaires, voire identiques. C'est pourquoi nous avons choisi de présenter un calcul direct du gradient de la fonction coût modifiée $\mathcal{MJ}$ en introduisant les états adjoints appropriés[7]. Plus précisément, nous allons utiliser la règle de dérivation des fonctions composées et suivre en sens inverse les étapes 0 à 4, énoncées à la section précédente, dont nous réutilisons les notations.

7.1.1 Étape 5 : simulation adjointe

Pour chaque tir n, $n \in \mathbf{N}$, $n \leq N_T$,

1. rétro-propagation du résidu,

$$\mathcal{C}^T \bar{q}_n = G^T W_t e_n, \tag{70}$$

2. corrélations des champs direct et rétrograde p_n et $\bar{q}_n$,

$$\chi_{\beta,n} = \chi_\beta(p_n, \bar{q}_n) = -\mathbf{1}_{\Omega_{0h}} h^2 \sum_{k=1}^{N_t-1} p_n^{(1+)k} \bar{q}_n^{(1+)k}, \tag{71}$$

$$\chi_{\alpha,n} = \chi_\alpha(p_n, \bar{q}_n) = \mathbf{1}_{\Omega_{0h}} \sum_{k=1}^{N_t-1} \nabla p_n^k \nabla \bar{q}_n^k. \tag{72}$$

$$\chi_{\nu,n} = \frac{1}{\sigma}\chi_{\beta,n} - \frac{1}{\nu^2\sigma}\chi_{\alpha,n}, \tag{73}$$

$$\chi_{\sigma,n} = -\frac{\nu}{\sigma^2}\chi_{\beta,n} - \frac{1}{\nu\sigma^2}\chi_{\alpha,n}. \tag{74}$$

3. Sommation des corrélations,

$$\chi_\nu = \sum_{n=1}^{N_T} \chi_{\nu,n}, \tag{75}$$

$$\chi_\sigma = \sum_{n=1}^{N_T} \chi_{\sigma,n}. \tag{76}$$

Au terme de cette simulation adjointe, nous avons pour tout $\delta\nu \in V_{0h}$ et pour tout $\delta\sigma \in V_{0h}$ (nuls sur le bord),

$$\delta\mathcal{MJ} = \sum_{M\in\Omega_{0h}} \chi_{\nu M}\delta\nu_M + \sum_{M\in\Omega_{0h}} \chi_{\sigma M}\delta\sigma_M.$$

7. Ils correspondent aux trois multiplicateurs de Lagrange évoqués précédemment.

7.1.2 Étape 6 : estimation quantitative adjointe

1. Mise à jour adjointe,

$$\delta\nu = P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)(\delta\nu_s + \delta r_\nu),$$
$$\delta\sigma = P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)\delta r_\sigma.$$

Les opérateurs "dérivés" $P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)$ et $P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)$ correspondent à l'identité sauf aux points de la grille en lesquels la contrainte d'admissibilité est saturée, auquel cas ils correspondent alors à l'application nulle.

2. Changement d'échelle adjoint,

$$\delta r_\nu = \delta\mu\beta_\nu m_\nu + \mu\beta_\nu\delta m_\nu,$$
$$\delta r_\sigma = -\delta\mu\beta_\sigma m_\sigma + (1-\mu)\beta_\sigma\delta m_\sigma.$$

Posons

$$\gamma_\nu = \alpha_\nu\|\nu_s\|_1 P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)\chi_\nu, \tag{77}$$
$$\gamma_\sigma = \alpha_\sigma\|\sigma_s\|_1 P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)\chi_\sigma. \tag{78}$$

3. Correction et projection adjointes,

$$g_\nu = -(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)W_z(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)\gamma_\nu, \tag{79}$$
$$g_\sigma = -(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)W_z(\mathcal{A}P_r\mathcal{A}^T)\gamma_\sigma. \tag{80}$$
$$g' = \mathbf{1}_{\Omega_{0h}}g. \tag{81}$$

Au terme de cette sixième étape, nous avons, pour tout $\delta\nu_s \in V_h$, pour tout $\delta\mu \in \mathbf{R}$, pour tout $\delta\chi_{\nu,s} \in V_{0h}$ et pour tout $\delta\chi_{\sigma,s} \in V_{0h}$,

$$\delta\mathcal{M}\mathcal{J} = \sum_{M\in\Omega_h} P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M\chi_{\nu M}\delta\nu_{sM} + \sum_{M\in\Omega_{0h}} g_{\nu M}\delta\chi_{\nu,sM} + \sum_{M\in\Omega_{0h}} g_{\sigma M}\delta\chi_{\sigma,sM}$$
$$+\left(\beta_\nu\sum_{M\in\Omega_{0h}} m_{\nu M}P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M\chi_{\nu M} - \beta_\sigma\sum_{M\in\Omega_{0h}} m_{\sigma M}P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)_M\chi_{\sigma M}\right)\delta\mu.$$

7.1.3 Étape 7 : migration adjointe

1. Sommation adjointe,

$$\delta\chi_{\nu,s} = \sum_{n=1}^{N_T}\delta\chi_{\nu,s,n},$$
$$\delta\chi_{\sigma,s} = \sum_{n=1}^{N_T}\delta\chi_{\sigma,s,n}.$$

2. Corrélations adjointes,

$$\delta\chi_{\nu,s,n} = \frac{2\delta\nu_s}{\nu_s^3\sigma_s}\chi_{\alpha,s,n} + \frac{1}{\sigma_s}\delta\chi_{\beta,s,n} - \frac{1}{\nu_s^2\sigma_s}\delta\chi_{\alpha,s,n},$$
$$\delta\chi_{\sigma,s,n} = -\frac{\delta\nu_s}{\sigma_s^2}\chi_{\beta,s,n} + \frac{\delta\nu_s}{\nu_s^2\sigma_s^2}\chi_{\alpha,s,n} - \frac{\nu_s}{\sigma_s^2}\delta\chi_{\beta,s,n} - \frac{1}{\nu_s\sigma_s^2}\delta\chi_{\alpha,s,n}.$$
$$\delta\chi_{\beta,s,n} = \chi_\beta(\delta p_{s,n}, q_{s,n}) + \chi_\beta(p_{s,n}, \delta q_{s,n}),$$
$$\delta\chi_{\alpha,s,n} = \chi_\alpha(\delta p_{s,n}, q_{s,n}) + \chi_\alpha(p_{s,n}, \delta q_{s,n}).$$

Soient la nouvelle corrélation

$$\breve{\chi}_{\nu,s,n} = -\frac{g_\sigma}{\sigma_s^2}\chi_{\beta,s,n} + \left(\frac{2g_\nu}{\nu_s^3\sigma_s} + \frac{g_\sigma}{\nu_s^2\sigma_s^2}\right)\chi_{\alpha,s,n} \tag{82}$$

et sa version sommée

$$\breve{\chi}_{\nu,s} = \sum_{n=1}^{N_T} \breve{\chi}_{\nu,s,n}. \tag{83}$$

Et soit la matrice de rigidité modifiée

$$\breve{A} = A\left(-\frac{g'_\nu}{\nu_s^2\sigma_s} - \frac{g'_\sigma}{\nu_s\sigma_s^2}\right) + \left(-\frac{g'_\nu}{\nu_s} + \frac{g'_\sigma}{\sigma_s}\right) A\left(\frac{1}{\nu_s\sigma_s}\right). \tag{84}$$

Ainsi, pour tout $\delta\nu_s \in V_h$, pour tout $\delta\mu \in \mathbf{R}$, pour tout $\delta p_{s,n} \in V_h^{N_t+1}$ tel que $\delta p_{s,n}{}^0 = \delta p_{s,n}{}^1 \equiv 0$ et pour tout $\delta q_{s,n} \in V_h^{N_t+1}$ tel que $\delta q_{s,n}{}^{N_t} = \delta q_{s,n}{}^{N_t+1} \equiv 0$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{MJ} = &\sum_{M\in\Omega_h} (P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M\chi_{\nu M} + \breve{\chi}_{\nu,sM})\delta\nu_{sM} \\
&+ \left(\beta_\nu \sum_{M\in\Omega_h} m_{\nu M} P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M\chi_{\nu M} - \beta_\sigma \sum_{M\in\Omega_h} m_{\sigma M} P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)_M\chi_{\sigma M}\right)\delta\mu \\
&+ \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{k=2}^{N_t}\sum_{M\in\Omega_h} \left(\nabla_{p_{s,n}}\right)_M^k \delta p_{s,nM}^k + \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{k=1}^{N_t-1}\sum_{M\in\Omega_h} \left(\nabla_{q_{s,n}}\right)\delta q_{s,nM}^k,
\end{aligned}$$

où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \leq N_T$,

$$\nabla_{p_{s,n}} = \left(\frac{g'_\nu}{\nu_s} - \frac{g'_\sigma}{\sigma_s}\right) G^T W_t s_n + \breve{A} q_{s,n}, \tag{85}$$

$$\nabla_{q_{s,n}} = \left(\frac{g'_\nu}{\nu_s} - \frac{g'_\sigma}{\sigma_s}\right) f_n + \breve{A} p_{s,n}. \tag{86}$$

3. Rétro-propagation et propagation adjointes,

$$\mathcal{C}_s^T \bar{q}_{s,n} = -\nabla_{p_{s,n}}, \tag{87}$$

$$\mathcal{C}_s \bar{p}_{s,n} = -\nabla_{q_{s,n}}. \tag{88}$$

Soient alors les corrélations des champs directs $p_{s,n}$ et $\bar{p}_{s,n}$ et rétrogrades $q_{s,n}$ et $\bar{q}_{s,n}$,

$$\chi_{\beta,\bar{p},s,n} = \chi_\beta(\bar{p}_{s,n}, q_{s,n}) \quad \text{et} \quad \chi_{\beta,\bar{q},s,n} = \chi_\beta(p_{s,n}, \bar{q}_{s,n}), \tag{89}$$

$$\chi_{\alpha,\bar{p},s,n} = \chi_\alpha(\bar{p}_{s,n}, q_{s,n}) \quad \text{et} \quad \chi_{\alpha,\bar{q},s,n} = \chi_\alpha(p_{s,n}, \bar{q}_{s,n}). \tag{90}$$

$$\chi_{\nu,\bar{p},s,n} = \frac{1}{\sigma_s}\chi_{\beta,\bar{p},s,n} - \frac{1}{\nu_s^2\sigma_s}\chi_{\alpha,\bar{p},s,n} \quad \text{et} \quad \chi_{\nu,\bar{q},s,n} = \frac{1}{\sigma_s}\chi_{\beta,\bar{q},s,n} - \frac{1}{\nu_s^2\sigma_s}\chi_{\alpha,\bar{q},s,n}. \tag{91}$$

Et leurs versions sommées,

$$\chi_{\nu,\bar{p},s} = \sum_{n=1}^{N_T} \chi_{\nu,\bar{p},s,n} \quad \text{et} \quad \chi_{\nu,\bar{q},s} = \sum_{n=1}^{N_T} \chi_{\nu,\bar{q},s,n}. \tag{92}$$

Ainsi, pour tout $\delta\nu_s \in V_h$, pour tout $\delta\mu \in \mathbf{R}$ et pour tout δs,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{MJ} = &\sum_{M\in\Omega_h} (P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M\chi_{\nu M} + \breve{\chi}_{\nu,sM} + \chi_{\nu,\bar{p},sM} + \chi_{\nu,\bar{q},sM})\delta\nu_{sM} \\
&+ \left(\beta_\nu \sum_{M\in\Omega_h} m_{\nu M} P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M\chi_{\nu M} - \beta_\sigma \sum_{M\in\Omega_h} m_{\sigma M} P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)_M\chi_{\sigma M}\right)\delta\mu \\
&+ \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{k=2}^{N_t}\sum_{G\in\mathcal{G}} (W_t G\bar{p}_{s,n})_G^k \delta s_{n,G}^k,
\end{aligned}$$

7.1.4 Étape 8 : gradients

$$\nabla_{\nu_s^{ME}} \mathcal{MJ} = P_s \mathcal{A}^T (P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)\chi_\nu + \check{\chi}_{\nu,s} + \chi_{\nu,\bar{p},s} + \chi_{\nu,\bar{q},s}), \tag{93}$$

$$\nabla_\mu \mathcal{MJ} = \beta_\nu \sum_{M\in\Omega_h} m_{\nu M} P'_{\mathcal{B}_\nu}(\nu)_M \chi_{\nu M} - \beta_\sigma \sum_{M\in\Omega_h} m_{\sigma M} P'_{\mathcal{B}_\sigma}(\sigma)_M \chi_{\sigma M}, \tag{94}$$

$$\nabla_s \mathcal{MJ} = W_t G \bar{p}_{s,n}. \tag{95}$$

7.2 Aspect informatique

Les Tableaux suivants sont relatifs au programme correspondant à l'algorithme décrit précédemment. Les mesures de complexité et de performance sont effectuées pour le modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A.

Le Tableau 10 montre que le calcul de gradient, bien que correspondant conceptuellement à la résolution de six équations des ondes (soit six simulations ou deux resimulations), implique un sur-coût en masse de calculs d'un facteur 20 par rapport à la simulation et 3,6 par rapport à la resimulation. Ce sur-coût, comme dans le cas de la migration, correspond aux corrélations de champs directs et rétrogrades et aux seconds membres des équations des ondes adjointes. La complexité en mémoire du programme de calcul des gradients est de l'ordre de 15 millions de mots et la complexité en calculs est d'environ 250 milliards d'opérations. Le Tableau 12 montre les performances comparées du programme de calcul des gradients sur différents calculateurs. Sachant qu'une optimisation demande une centaine d'itérations, soit un petit peu plus en termes d'évaluations de fonction et de gradient, la station de travail Digital 3000/400 se montre là un petit peu trop lente pour l'inversion de SYNCLAY...

	nb. éq. ondes	calculs	
simulation	1	1	
migration	2	4,5	
resimulation	3	5,4	1
gradients	6	20	3,6

TAB. 10 – *Complexité de la migration, de la resimulation et du calcul de gradients relativement à la simulation en termes de nombre d'équations des ondes à résoudre et de masses relatives de calculs à effectuer.*

	mémoire (Mmots)	calculs (Gop)
simulation	3,2	13
migration	7,6	57
resimulation	7,6	69
gradients	15	250

TAB. 11 – *Complexité en mémoire et en calculs des programmes de simulation, de migration, de resimulation et de calcul de gradients.*

	temps réel (s)	performance (Mop/s)	τ (10^{-6}s)
Digital 3000/400	6800	37	6,6
Digital 2100/500 (4 proc.)	2900	87	2,8
Cray YMP/C90 (1 proc.)	400	630	0,38

TAB. 12 – *Performances comparées du programme de calcul des gradients sur différents calculateurs. La dernière colonne donne le temps de calcul moyen par maille, par pas de temps et par tir.*

8 Optimisation

Dans cette section, nous présentons les résultats de minimisation de la fonction coût modifiée dans le cas du modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A.

8.1 Méthode BFGS à mémoire limitée

La méthode d'optimisation utilisée ici est de type quasi-Newton à stockage limité en mémoire, elle permet aussi de tenir compte de conditions de borne. Nous renvoyons à [14, 4] pour une présentation détaillée de la méthode.

En ce qui concerne le modèle SYNCLAY, *cf.* annexe A, la dimension n de l'espace d'optimisation va de 12 à 1617 pour le propagateur, suivant l'échelle considérée, et de 61299 jusqu'à 306495 pour la réflectivité en temps, suivant le nombre de tirs considérés. Le propagateur est une variable bornée, la réflectivité en temps ne l'est pas.

La méthode de Quasi-Newton classique nécessite un stockage en mémoire de l'ordre de n^2, ce qui devient rapidement prohibitif. La méthode BFGS à mémoire limitée repose aussi sur l'utilisation des variations du gradient pour construire une approximation du Hessien de la fonction à minimiser, mais uniquement en ne considérant que les m dernières itérations, d'où un stockage de l'ordre de nm. Dans la pratique, nous aurons $m = 7$ pour la minimisation par rapport au propagateur et $m = 20$ pour la minimisation par rapport à la réflectivité en temps.

8.2 Minimisation par rapport à la réflectivité en temps

La première expérience d'optimisation concerne la minimisation de la fonction coût modifiée par rapport à la réflectivité en temps à partir de l'estimation par les données avec le "vrai" propagateur. Cela nous permet, par l'existence et l'unicité du minimum global atteint, de justifier la reformulation en temps dans le cas de la simulation par équation des ondes complète, c'est-à-dire non-linéarisée.

La Figure 21 montre le point initial estimé par les données (en haut à gauche),

$$s^0 = d = \varphi(\bar{v}, \bar{\sigma}),$$

et la resimulation correspondante (en haut à droite),

$$\mathcal{M}\varphi(\bar{\pi}, s^0) = \mathcal{I}\varphi(\bar{\pi}, \mathcal{M}(\bar{\pi})s^0),$$

puis la réflectivité en temps $s^{24}(\bar{\pi})$ atteinte après 24 itérations d'optimisation (en bas à gauche) et enfin la resimulation correspondante (en bas à droite),

$$\mathcal{M}\varphi(\bar{\pi}, s^{24}(\bar{\pi})) = \mathcal{I}\varphi(\bar{\pi}, \mathcal{M}(\bar{\pi})s^{24}(\bar{\pi})).$$

8.3 Minimisation par rapport à la vitesse lisse

La deuxième expérience d'optimisation concerne la minimisation hiérarchique de la fonction coût modifiée par rapport aux différentes échelles du propagateur à partir d'une estimation initiale constante avec l'estimation de la réflectivité en temps par les données. Pour des raisons historiques, elle utilise une séparation propagateur/réflecteur reposant sur une décomposition multiéchelle de la vitesse. Cela nous permet d'établir que l'approche MBTT conduit à une fonction coût dont la minimisation par une méthode locale est possible, que le minimum global est unique et qu'il donne une bonne estimation de "vrai" propagateur, au moins dans les zones illuminées.

Les Figures 22, 23, 24, 25 et 26 montrent les résultats de minimisation hiérarchique de la fonction coût modifiée par rapport aux échelles 0 à 3 du propagateur. Dans chaque figure, nous donnons les parties lisses des paramètres physiques (en haut), l'estimation correspondante des parties rugueuses (au milieu) et la simulation dans le milieu complet reconstitué (en bas). La première figure concerne le propagateur initial constant de valeur 2500 m/s : l'estimation de la réflectivité en profondeur est plutôt mauvaise et les sismogrammes resimulés ne présentent pas de déphasages avec les données mais de grosses différences concernant l'amplitude des réflexions, dues aux interférences non constructives dans la sommation des images migrées. Les quatre images suivantes correspondent aux vitesses lisses optimales successivement aux échelles 0 à 3. La vitesse lisse optimale à l'échelle 3, *cf.* Figure 26, reproduit assez fidèlement l'allure de la "vraie" vitesse lisse, la couche d'eau s'est

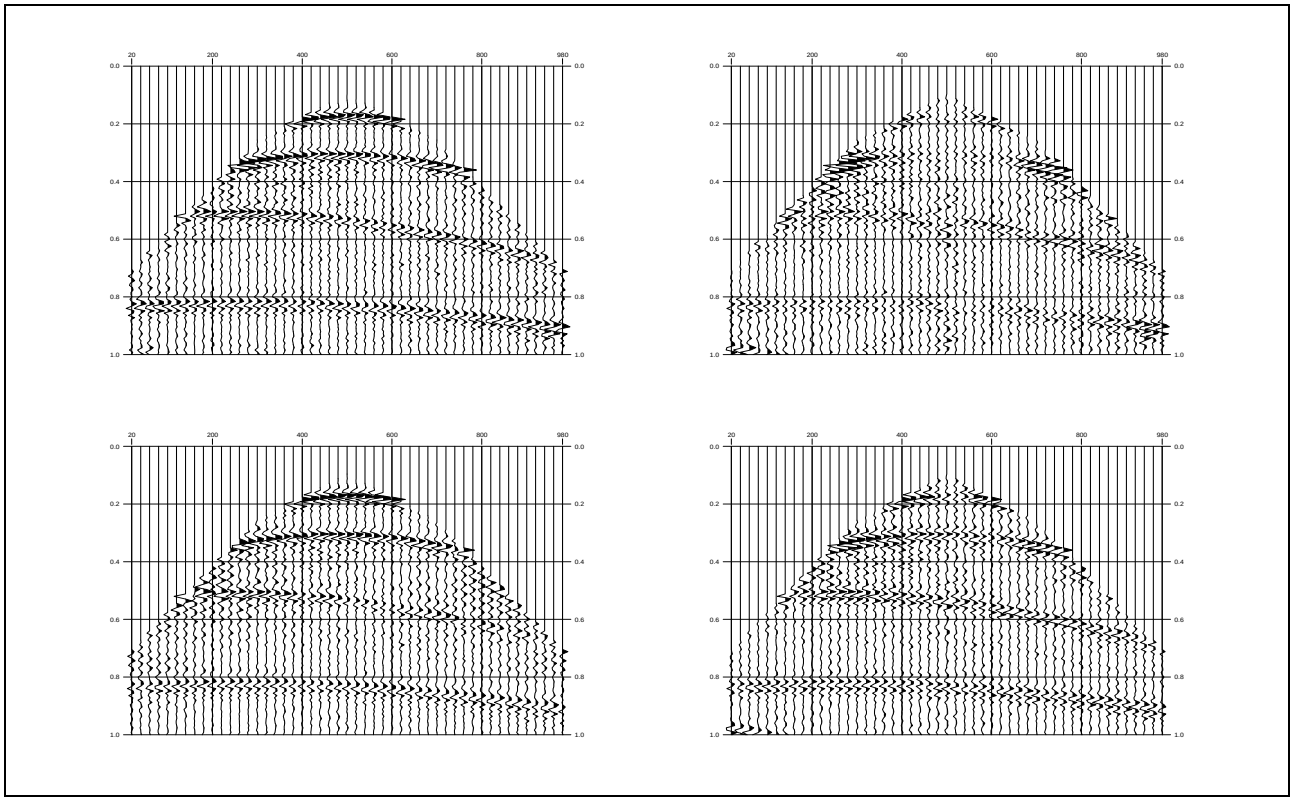

FIG. 21 – *Estimation de la "vraie" réflectivité en temps par minimisation par rapport à s avec le "vrai" propagateur. Axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Haut : réflectivité en temps initiale* $s^0 = d = \varphi(\bar{\nu}, \bar{\sigma})$ *(gauche), resimulation initiale* $\mathcal{M}\varphi(\bar{\pi}, s^0)$*. Bas : réflectivité en temps après 24 itérations de minimisation* s^{24} *(gauche), resimulation correspondante* $\mathcal{M}\varphi(\bar{\pi}, s^{24})$*.*

formée près de la surface et la zone de hautes vitesses (en rouge) est correctement située. Dans les réflectivités estimées en profondeur, les parties illuminées des réflecteurs sont aussi correctement situées. Et les resimulations sont très proches des données, la différence principale étant une amplitude trop faible de la première réflexion.

La Figure 27 compare, à la "vraie" valeur du propagateur, les minima "globaux" obtenus par minimisation hiérarchique par rapport au propagateur dans les cas de 1 tir et de 5 tirs pour deux propagateurs initiaux constants différents, de valeur 1800 m/s et 2500 m/s. En raison du coût de calcul, dans le cas de 5 tirs avec le propagateur initial 1800 m/s, nous avons uniquement minimisé par rapport aux échelles 0 et 1 du propagateur puisque l'estimation ainsi obtenue montrait déjà une forte ressemblance avec le cas du propagateur initial 2500 m/s.

8.4 Minimisation par rapport à la lenteur lisse

La troisième expérience d'optimisation concerne la minimisation de la fonction coût modifiée par rapport à la lenteur lisse. Elle nous permet d'apprécier le gain apporté par la décomposition de la lenteur.

Les Figures 28 et 29 comparent les "vraies" valeurs des paramètres intermédiaires aux valeurs obtenues par minimisation de la fonction coût modifiée dans les deux cas. L'avantage de la décomposition de la lenteur est de mieux séparer les effets de propagation de ceux de réflexion et donc de permettre des pas optimaux dans la direction de la migration qui sont plus grand car la réflectivité ainsi estimée en profondeur n'influe plus sur les temps de parcours.

La comparaison de la "vraie" lenteur à la somme des lenteurs lisse et rugueuse estimées après minimisation de la fonction coût modifiée, *cf.* Figure 30, montre que nous avons inversé SYNCLAY de façon satisfaisante, compte tenu du fait que nous sommes partis d'une estimation constante du propagateur, donc très pauvre, et que nous n'avons utilisé que 5 tirs.

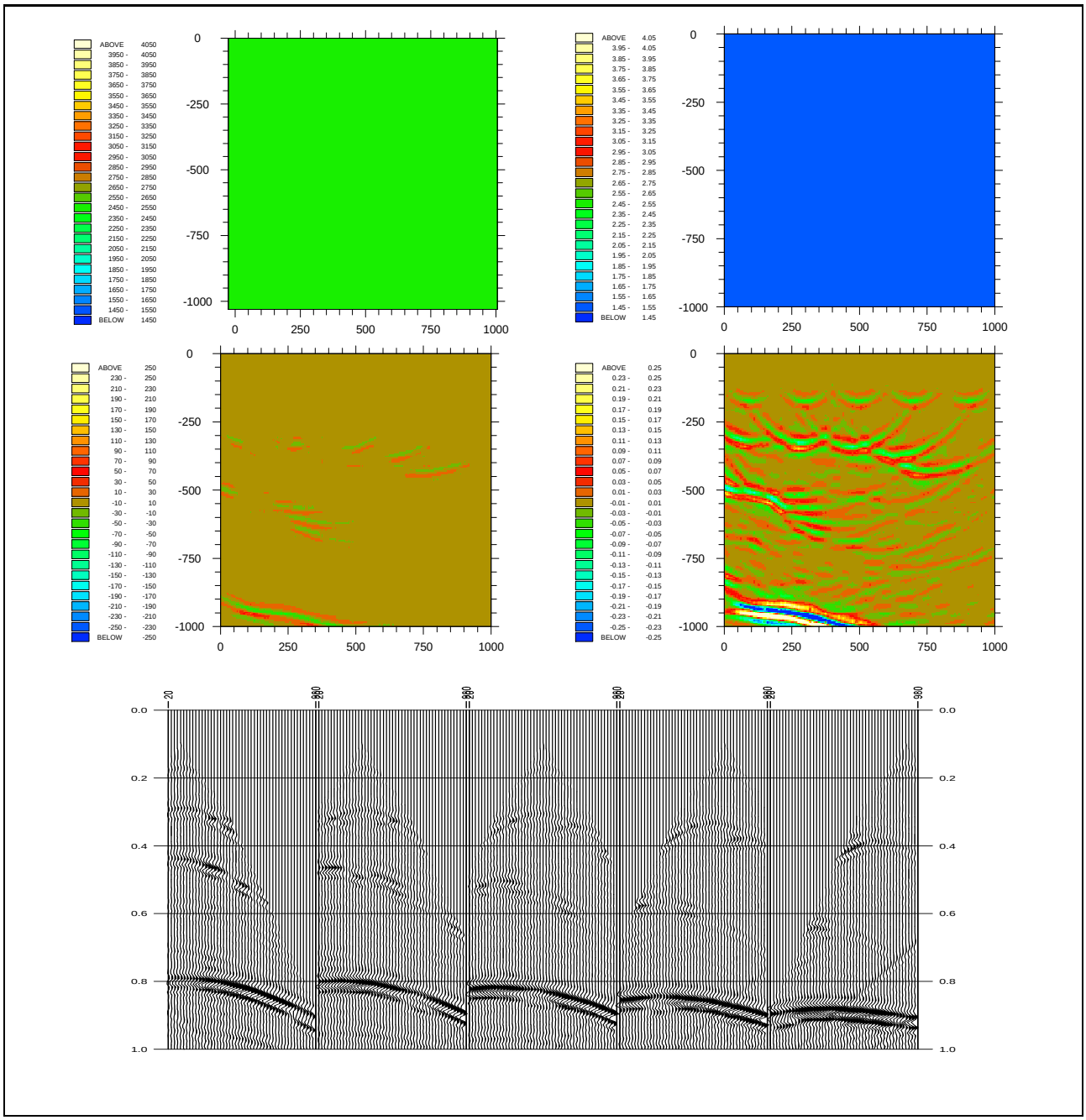

FIG. 22 – *Resimulation des données avec le propagateur initial. Pour les sections en temps, axe horizontal: position des récepteurs (m), axe vertical: temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal: distance horizontale (m), axe vertical: altitude (m). La vitesse est en m/s et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut: propagateur initial 2500 (gauche), impédance lisse constante 1,5. Milieu: estimation intermédiaire de la réflectivité en profondeur relative à la vitesse r_v (gauche) et à l'impédance r_σ (droite). Bas: resimulation dans le milieu* $(2500 + r_v, 1.5 + r_\sigma)$.

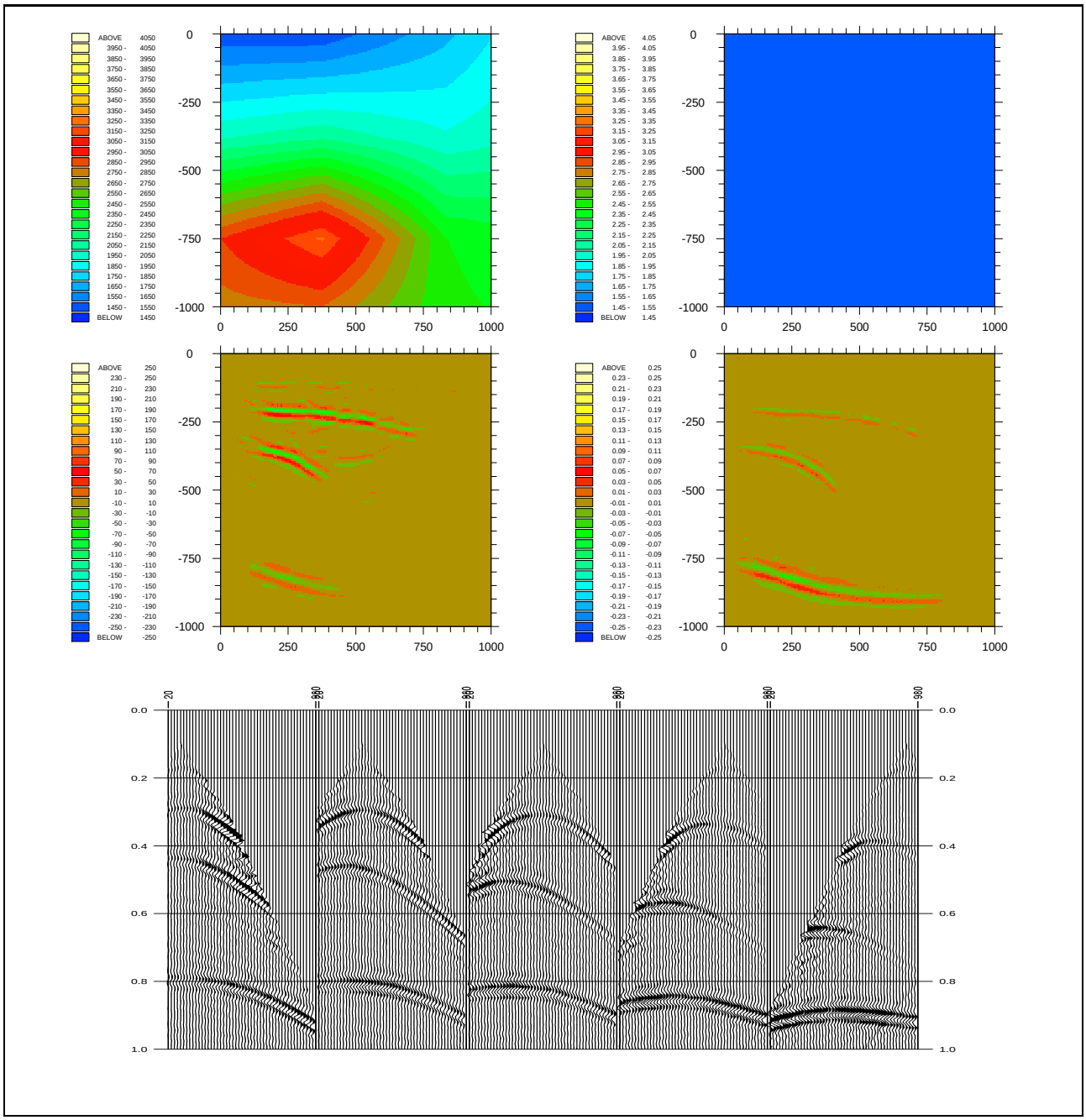

FIG. 23 – *Resimulation des données après minimisation par rapport à l'échelle 0 du propagateur à partir du propagateur initial constant. Pour les sections en temps, axe horizontal : position des récepteurs (m), axe vertical : temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). La vitesse est en m/s et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut : propagateur optimal à l'échelle 0 (gauche), impédance lisse constante 1,5. Milieu : estimation intermédiaire de la réflectivité en profondeur relative à la vitesse r_v (gauche) et à l'impédance r_σ (droite). Bas : resimulation dans le milieu $(\pi_0^\star + r_v, 1.5 + r_\sigma)$.*

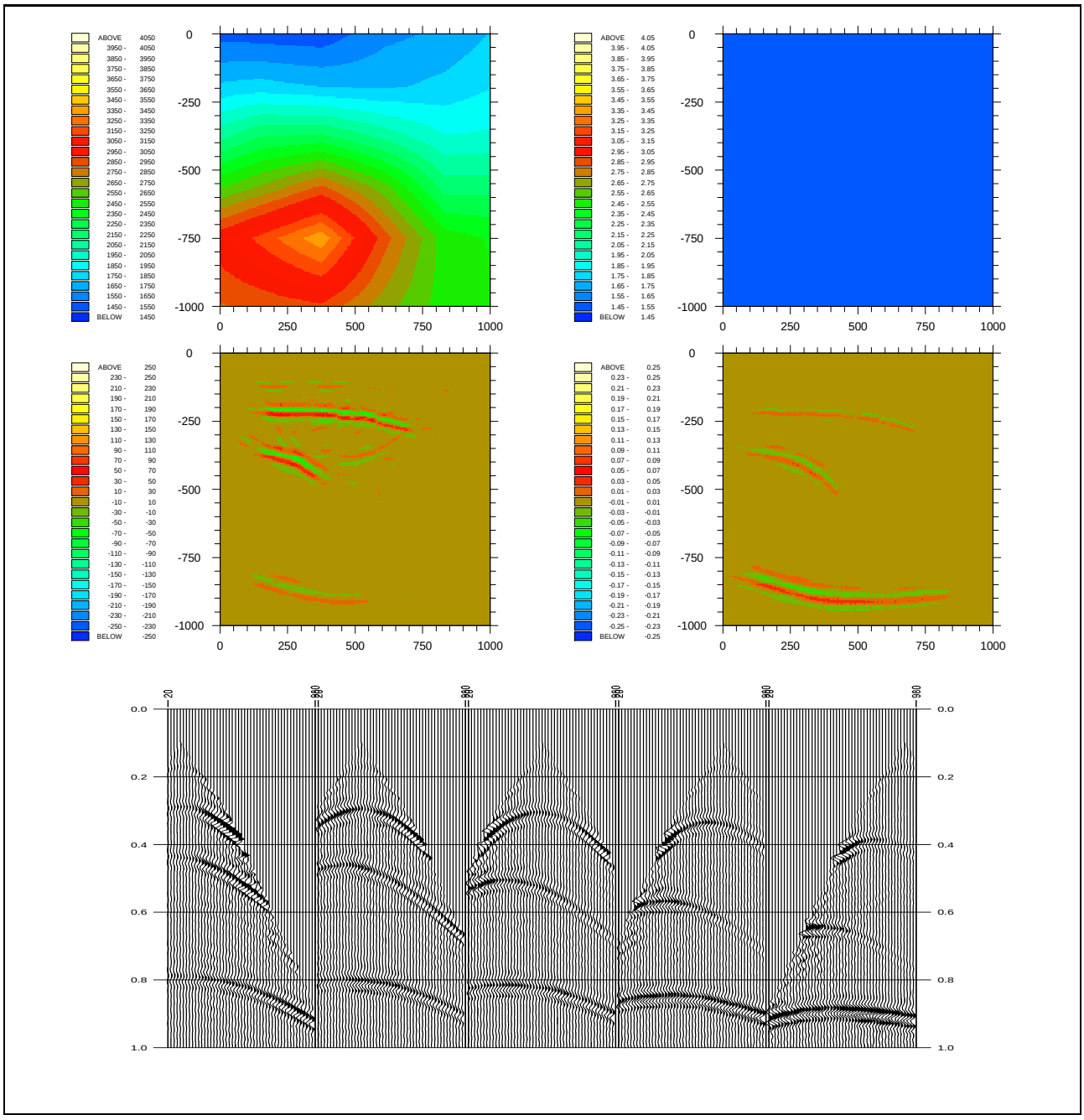

FIG. 24 – *Resimulation des données après minimisation par rapport à l'échelle 1 du propagateur à partir du propagateur optimal à l'échelle 0. Pour les sections en temps, axe horizontal: position des récepteurs (m), axe vertical: temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal: distance horizontale (m), axe vertical: altitude (m). La vitesse est en m/s et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut: propagateur optimal à l'échelle 1 (gauche), impédance lisse constante 1,5. Milieu: estimation intermédiaire de la réflectivité en profondeur relative à la vitesse r_v (gauche) et à l'impédance r_σ (droite). Bas: resimulation dans le milieu $(\pi_1^\star + r_v, 1.5 + r_\sigma)$.*

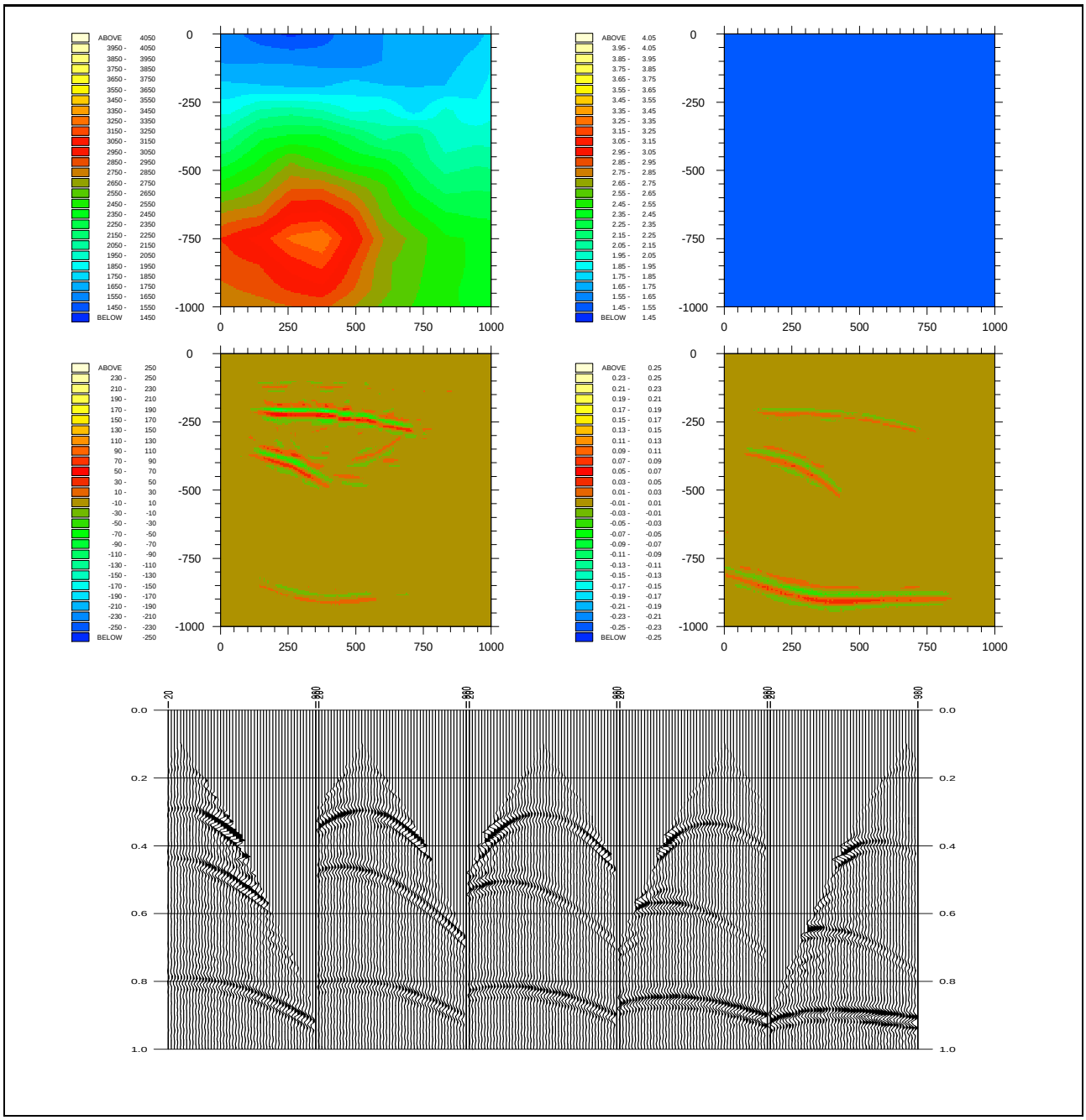

FIG. 25 – *Resimulation des données après minimisation par rapport à l'échelle 2 du propagateur à partir du propagateur optimal à l'échelle 1. Pour les sections en temps, axe horizontal: position des récepteurs (m), axe vertical: temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal: distance horizontale (m), axe vertical: altitude (m). La vitesse est en m/s et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut: propagateur optimal à l'échelle 2 (gauche), impédance lisse constante 1,5. Milieu: estimation intermédiaire de la réflectivité en profondeur relative à la vitesse r_v (gauche) et à l'impédance r_σ (droite). Bas: resimulation dans le milieu $(\pi_2^\star + r_v, 1.5 + r_\sigma)$.*

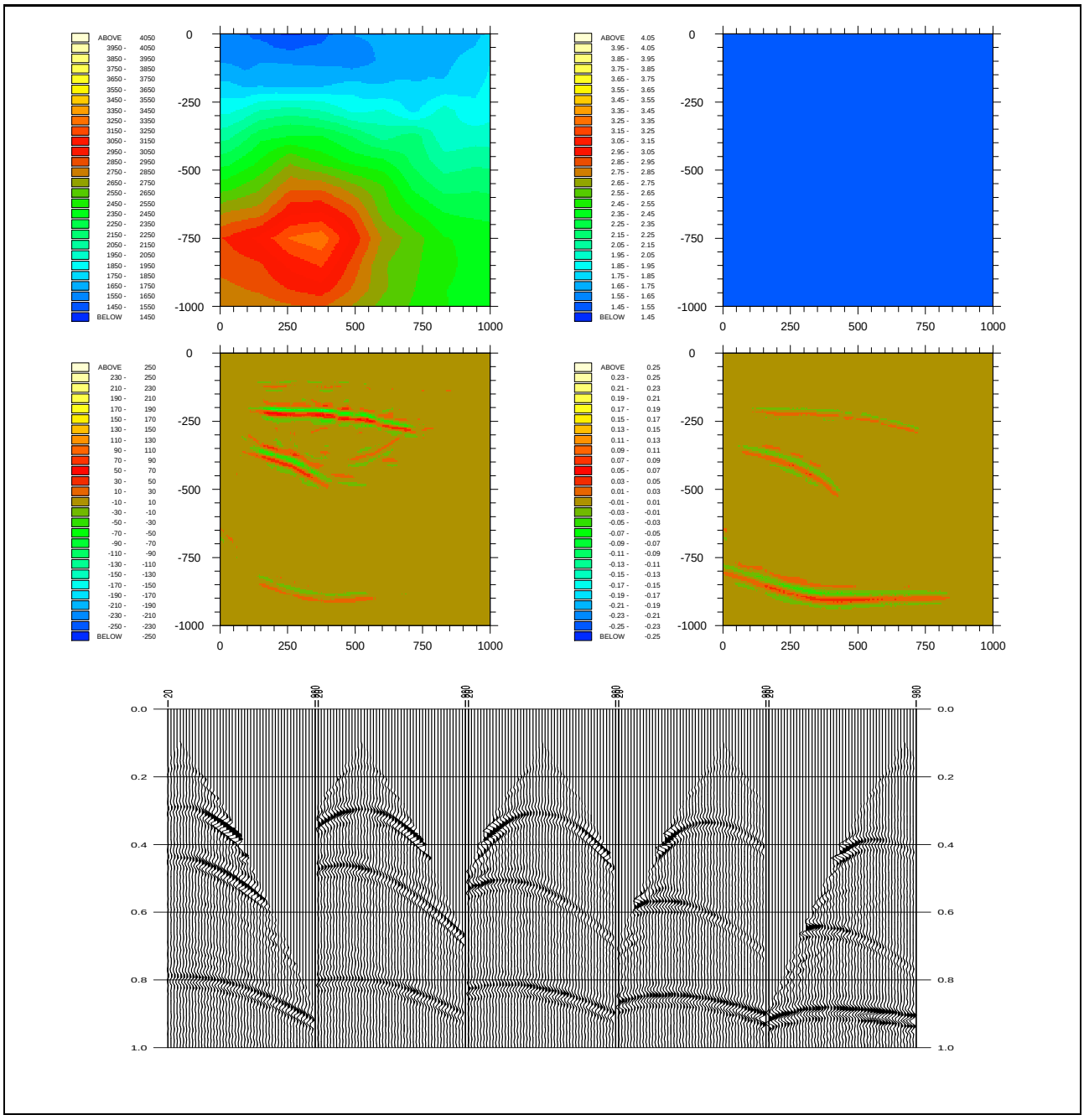

FIG. 26 – *Resimulation des données après minimisation par rapport à l'échelle 3 du propagateur à partir du propagateur optimal à l'échelle 2. Pour les sections en temps, axe horizontal: position des récepteurs (m), axe vertical: temps (s). Pour les sections en profondeur, axe horizontal: distance horizontale (m), axe vertical: altitude (m). La vitesse est en m/s et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut: propagateur optimal à l'échelle 3 (gauche), impédance lisse constante 1,5. Milieu: estimation intermédiaire de la réflectivité en profondeur relative à la vitesse r_v (gauche) et à l'impédance r_σ (droite). Bas: resimulation dans le milieu $(\pi_3^\star + r_v, 1.5 + r_\sigma)$.*

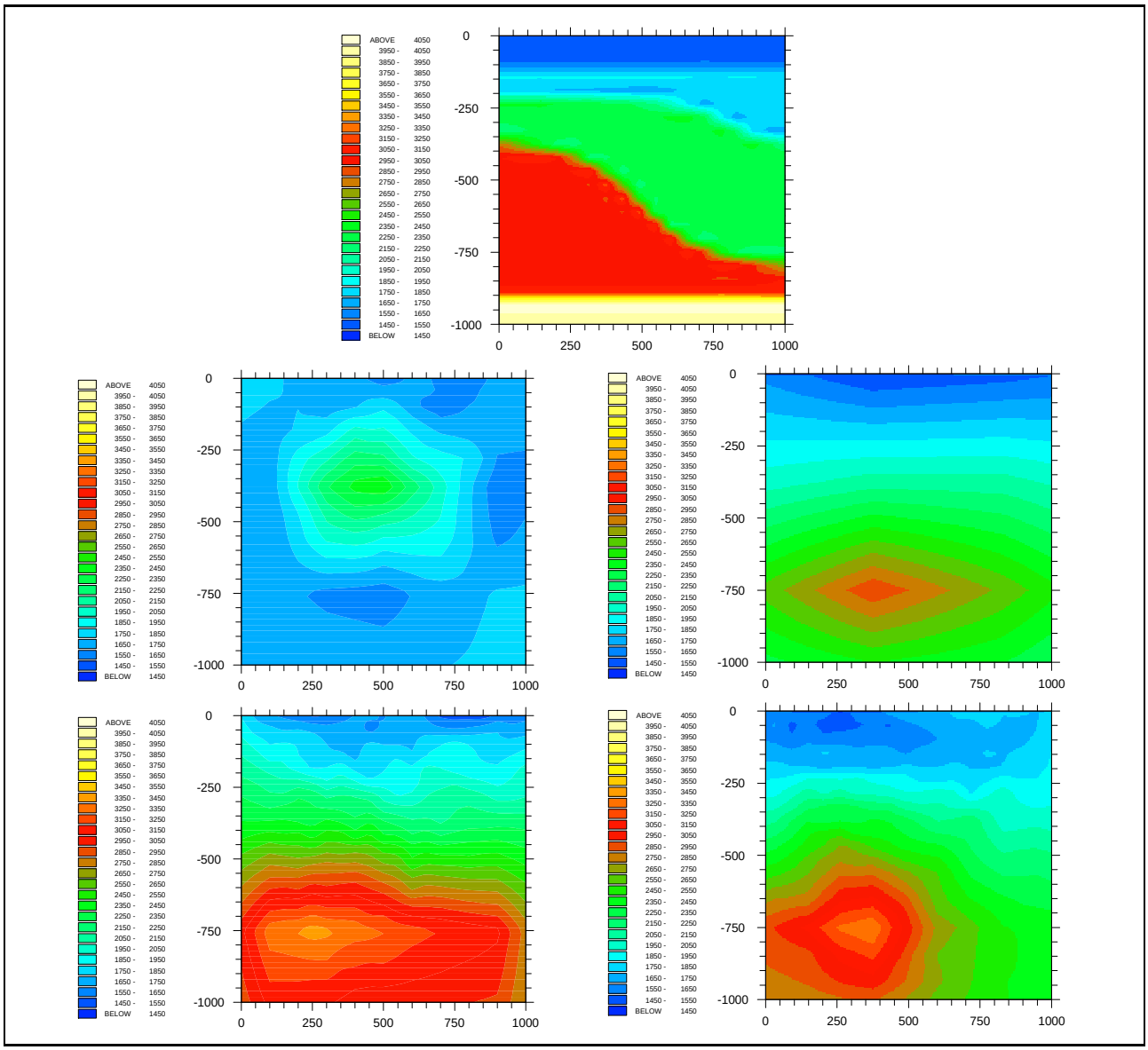

FIG. 27 – *Unicité du minimum global par rapport au propagateur. Axe horizontal: distance horizontale (m), axe vertical: altitude (m). La vitesse est en m/s. Haut: "vrai" propagateur. Milieu: propagateur optimal après minimisation hiérarchique par rapport aux échelles 0 à 3 du propagateur à partir de la constante 1800 dans le cas de 1 tir (gauche) et après minimisation hiérarchique par rapport aux échelles 0 et 1 du propagateur à partir de la constante 1800 dans le cas de 5 tirs (droite). Bas: propagateur optimal après minimisation hiérarchique par rapport aux échelles 0 à 3 du propagateur à partir de la constante 2500 dans le cas de 1 tir (gauche) et après minimisation hiérarchique par rapport aux échelles 0 à 3 du propagateur à partir de la constante 2500 dans le cas de 5 tirs (droite).*

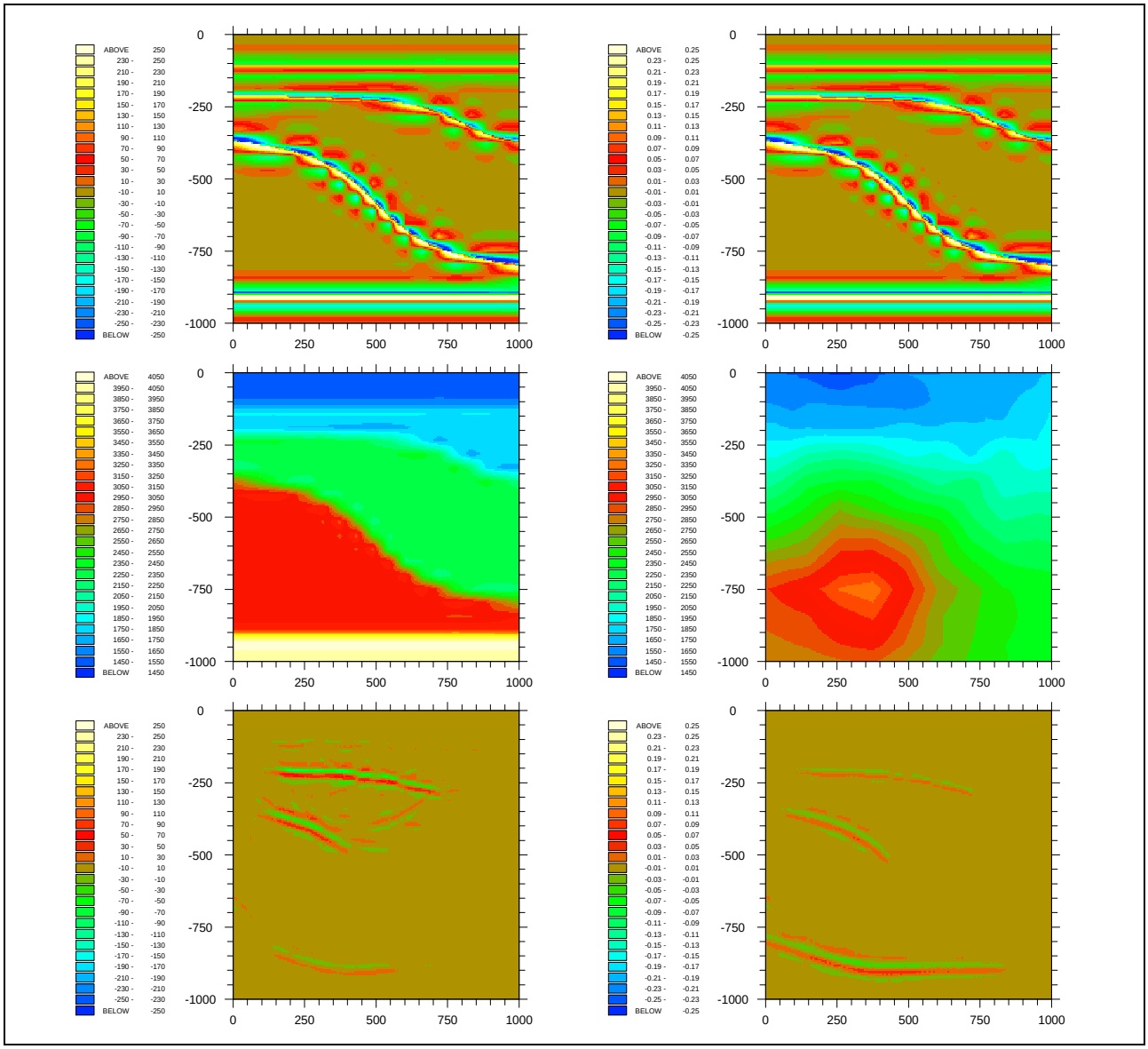

FIG. 28 – *Paramètres intermédiaires "vrai" et optimaux dans le cas d'une décomposition de la vitesse. Axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). La vitesse est en m/s et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut : "vrai" réflectivité relative à la vitesse (gauche) et "vraie" réflectivité relative à l'impédance (droite). Milieu : "vrai" propagateur (gauche) et propagateur optimal (droite). Bas : estimation de la réflectivité relative à la vitesse à l'optimum (gauche) et estimation de la réflectivité relative à l'impédance à l'optimum (droite).*

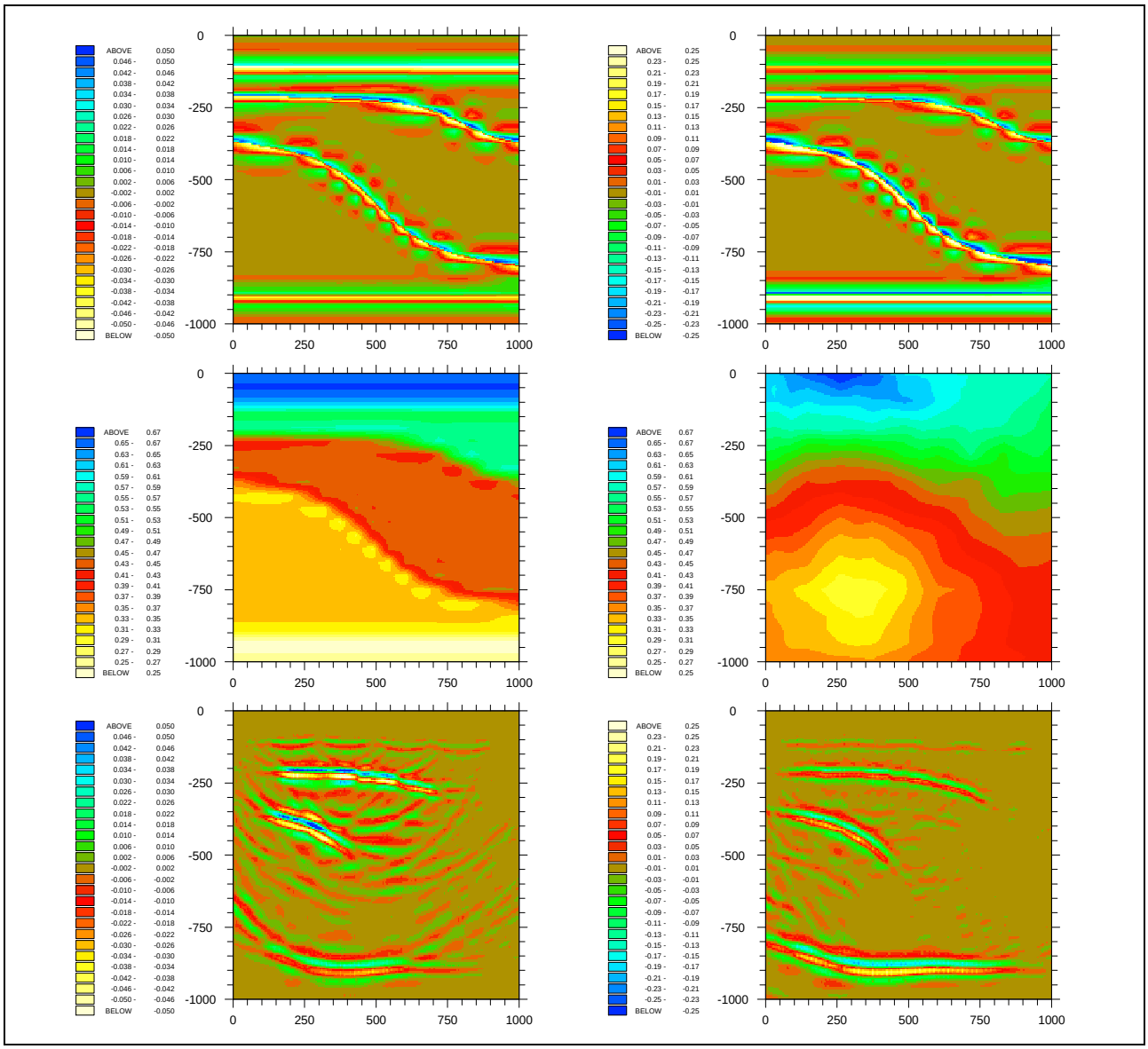

FIG. 29 – *Paramètres intermédiaires "vrai" et optimaux dans le cas d'une décomposition de la lenteur. Axe horizontal : distance horizontale (m), axe vertical : altitude (m). La lenteur est en 10^{-3} s/m et l'impédance en 10^6 kg/m^{2}s. Haut : "vrai" réflectivité relative à la lenteur (gauche) et "vraie" réflectivité relative à l'impédance (droite). Milieu : "vrai" propagateur (gauche) et propagateur optimal (droite). Bas : estimation de la réflectivité relative à la lenteur à l'optimum (gauche) et estimation de la réflectivité relative à l'impédance à l'optimum (droite).*

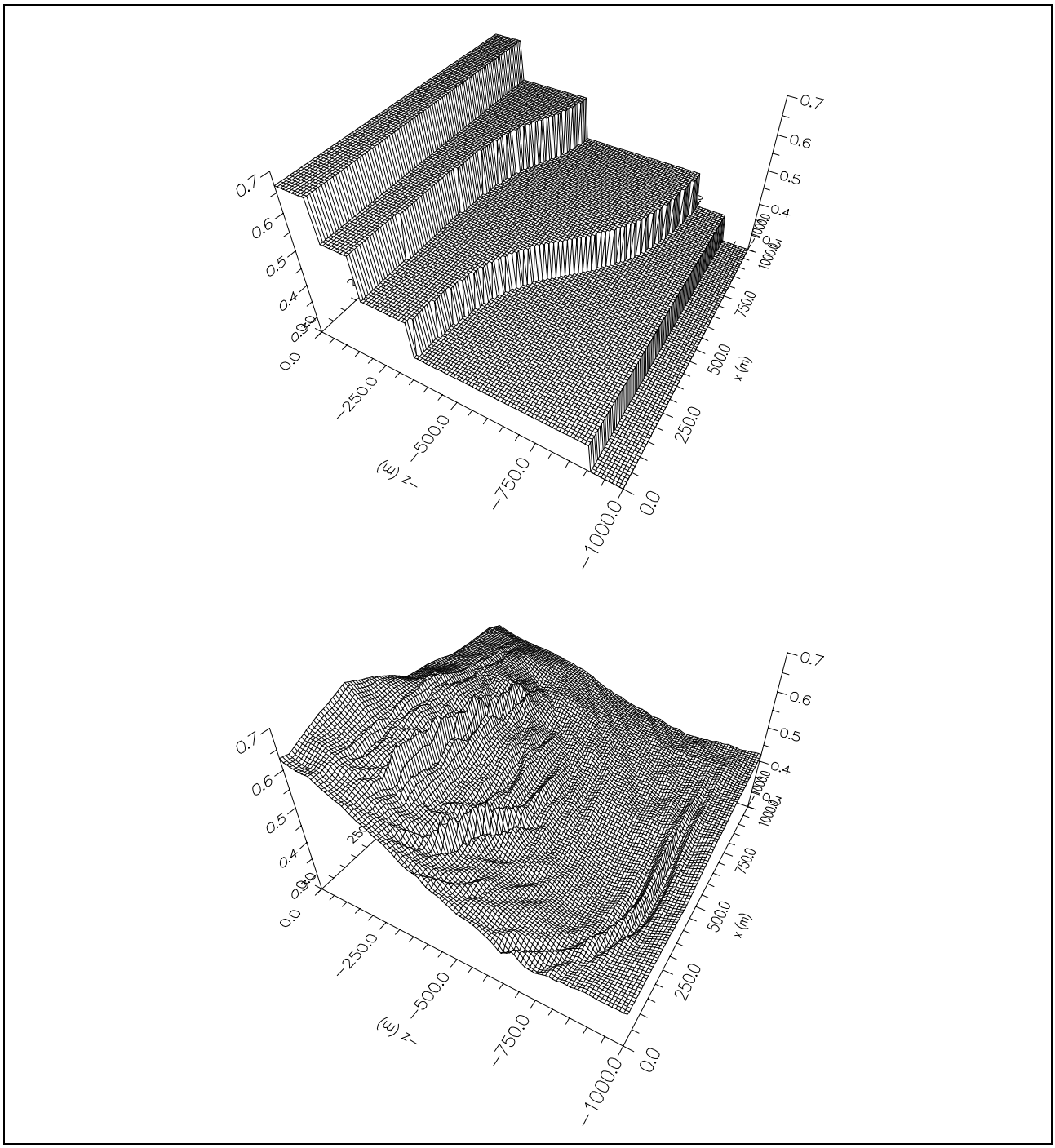

FIG. 30 – *Représentations en perspective du modèle de lenteur complet. La lenteur est en 10^{-3} s/m. Haut: "vraie" lenteur. Bas: lenteur reconstituée après inversion par l'approche MBTT avec une décomposition de la lenteur.*

9 Conclusion

La reformulation en temps de parcours par migration (ou MBTT, pour Migration-Based TravelTime formulation) du problème d'inversion sismique par forme d'onde est une modification de l'approche de minimisation de l'erreur des moindres carrés entre sections sismiques et sections synthétiques, usuellement formulée en profondeur. Elle permet, par deux changement de variables successifs, d'éliminer les déphasages dans les sections sismiques qui sont responsables de la présence de minima locaux pour l'erreur à minimiser ; et conduit ainsi à un critère qu'il est possible de minimiser par une méthode locale de type quasi-Newton. Sous la formulation présentée ici, l'approche MBTT permet déjà l'inversion de données synthétiques non bruitées dont la réflectivité présente une structure simple.

L'implémentation dont cet article fait l'objet repose sur une modélisation par l'équation des ondes acoustiques 2D complète (non linéarisée). Cela nous a permis d'aborder deux problèmes importants dans le domaine de la géophysique : d'une part, la définition de variables mathématiques représentant les phénomènes physiques de propagation et de réflexion de l'énergie, et d'autre part, la construction d'un opérateur de migration quantitative dont l'objectif est de restituer la position et l'amplitude des réflecteurs.

A Modèle Synclay

Le modèle Synclay est un modèle acoustique 2D synthétique créé à l'Inria dans le but de tester la méthode de reformulation en temps. Il est de taille relativement réduite et possède une structure simple (cinq couches homogènes) ; cependant, il fait intervenir des quantités réalistes et comporte des variations latérales de vitesse.

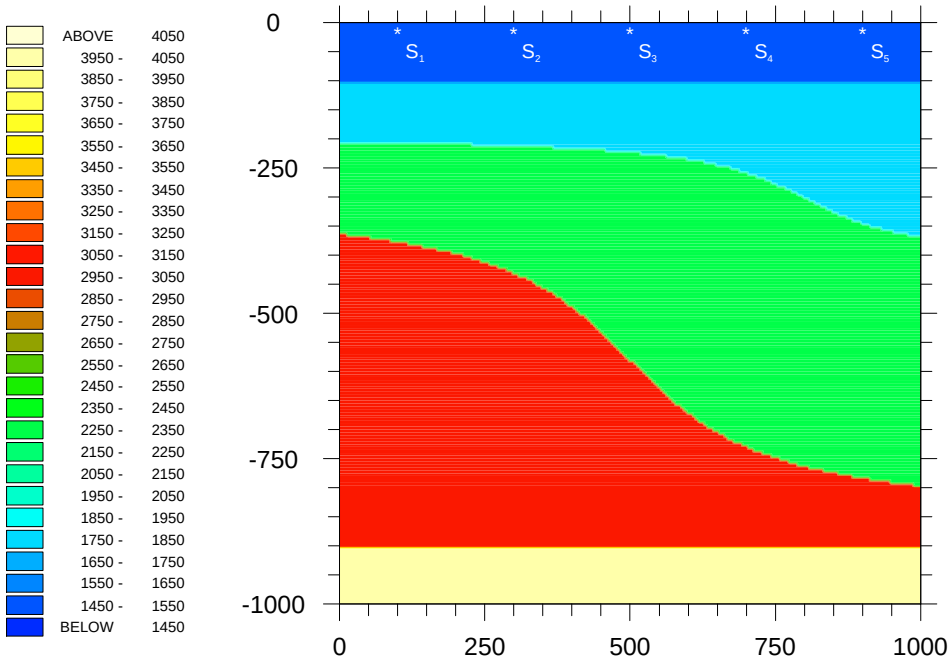

FIG. 31 – *Distribution de vitesse du modèle* Synclay. *Axe horizontal : distance horizontale x (m), axe vertical : altitude $-z$ (m). Les astérisques représentent les positions des cinq tirs.*

Le domaine spatial est un carré de coté 1000 m. Il est représenté sur une grille de 201×201 points, soit avec une résolution de 5 m dans chaque direction. La vitesse, définie en chacun de ces points, prend successivement les valeurs 1500 m/s (eau), 1800 m/s, 2300 m/s, 3000 m/s et 4000 m/s, *cf.* Figure 31. La densité est homogène de valeur 1000 kg/m^3 (eau).

Les cinq sources sont ponctuelles en espace, positionnées à 100 m, 300 m, 500 m, 700 m et 900 m de distance horizontale et 10 m de profondeur, *cf.* Figure 31, et représentées en temps par la fonction Gaussienne donnée

par

$$f(t) = -e^{-\alpha^2(t-t_0)^2} \text{ où } t_0 = \frac{\sqrt{10}}{\alpha},\ \alpha = \frac{f_c}{0,417} \text{ et } f_c = 40.$$

La fréquence dominante du signal se propageant verticalement est de l'ordre de 25 Hz. La durée d'enregistrement est de 1 s avec un pas de temps de 8 10^{-4} s, soit 1250 pas de temps. Les 49 récepteurs sont disposés tous les 20 m à 10 m de profondeur, ce dispositif restant fixe d'un tir à l'autre.

B Modèle Marmousi

Le modèle Marmousi est un modèle acoustique 2D synthétique élaboré à l'Institut Français du Pétrole dans le but d'évaluer l'état de l'art en inversion sismique en 1990, *cf.* [2]. Il est très réaliste, tant par ses dimensions et la complexité de sa structure que par son historique géologique.

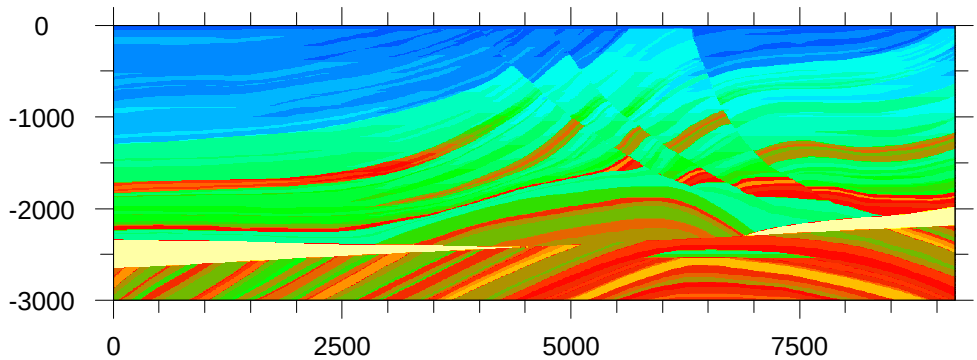

Fig. 32 – *Distribution de vitesse du modèle* Marmousi. *Axe horizontal: distance horizontale x (m), axe vertical: altitude $-z$ (m).*

La distribution de vitesse est représentée à la Figure 32. Les dimensions associées au modèle Marmousi induisent une complexité totale, en terme de masse de calcul, environ 10000 fois supérieure à celle du modèle Synclay, *cf.* Tableau 13.

	X	Z	h	N_x	N_z	T	Δt	N_t	N_g	N_T
Synclay	1000	1000	5	201	201	1	8 10^{-4}	1250	49	5
Marmousi	9200	3000	4	2301	751	2,9	5 10^{-4}	5800	96	240

Tab. 13 – *Dimensions associées aux modèles synthétiques. Domaine spatial: largeur X (m), profondeur Z (m), pas d'espace h (m) et nombres de points dans chaque direction N_x et N_z. Domaine temporel: durée d'enregistrement T (s), pas de temps Δt (s) et nombre de pas de temps N_t. Nombre de récepteurs N_g et nombre de tirs N_T.*

Références

[1] A. Bamberger, P. Joly, and J. E. Roberts. Second order absorbing boundary condition for the wave equation: A solution for the corner problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):323–352, april 1990.

[2] A. Bourgeois, M. Bourget, P. Lailly, M. Poulet, P. Ricarte, and R. Versteeg. Marmousi, model and data. In R. Versteeg and G. Grau, editors, *The Marmousi Experience: Workshop on Practical Aspects of Seismic Data Inversion*, Zeist, The Netherlands, 1991. Europ. Assoc. Expl. Geophys.

[3] L. M. Brekhovskikh. *Waves in Layered Media*, volume 6. Academic Press, New York, London, 1960.

[4] R. H. Byrd, Peihuang Lu, J. Nocedal, and Ciyou Zhu. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. Technical report, Northwestern University, Evanston, IL, 1994.

[5] G. Chavent. Identification of distributed parameter systems: about the least square method, its implementation and identifiability. In *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimations*, volume 1, pages 85–97. Pergamon Press, 1979.

[6] G. Chavent. Une remarque sur le prolongement par symétrie des formulations variationnelles et son application à la vectorisation. Technical Report 1015, INRIA, 1989.

[7] G. Chavent. Duality methods for waveform inversion. *submitted to Geophysical Journal International*, 1995.

[8] G. Chavent and F. Clément. Quantitative migrations and resimulation techniques for waveform inversion via a Migration-Based TravelTime formulation. *submitted to Geophysics, previously released as Technical Report 1839, INRIA, Le Chesnay, France*, 1993.

[9] G. Chavent and F. Clément. Separating propagation and reflection parameters in the acoustic wave equation. *submitted to Geophysics, previously released as Technical Report 1839, INRIA, Le Chesnay, France*, 1993.

[10] F. Clément. *Une reformulation en temps pour la détermination des vitesses de propagation acoustique à partir de données sismiques bidimensionnelles.* PhD thesis, Université de Paris IX, 1994.

[11] F. Collino. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1790, INRIA, Le Chesnay, France, Novembre 1992.

[12] M. Jannane, W. Beydoun, E. Crase, D. Cao, Z. Koren, E. Landa, M. Mendes, A. Pica, M. Noble, G. Roeth, S. Singh, R. Snieder, A. Tarantola, D. Trezeguet, and M. Xie. Wavelength of earth structures that can be resolved from seismic reflection data. *Geophysics*, 54(7):906–910, july 1989. Short Note.

[13] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod, 1968.

[14] D. C. Liu and J. Nocedal. On the limited memory BFGS methods for large scale optimization. *Math. Programming*, 45(3):503–528, 1989.

[15] R.-E. Plessix. Inversion de données réelles par la méthode MBTT utilisée avec une modélisation par born + rais. In *Problèmes inverses en propagation d'ondes.* INRIA, 1995.

[16] R. Versteeg. Sensibility of prestack depth migration to the velocity model. *Geophysics*, 58:873–882, 1993.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399