

Analyse de sensibilité et estimation de paramètres de transport pour une équation de diffusion, approche par état adjoint

François Clément, Nina Khvoenkova, Alain Cartalade, Philippe Montarnal

▶ **To cite this version:**

François Clément, Nina Khvoenkova, Alain Cartalade, Philippe Montarnal. Analyse de sensibilité et estimation de paramètres de transport pour une équation de diffusion, approche par état adjoint. [Rapport de recherche] RR-5132, INRIA. 2004. inria-00071451

HAL Id: inria-00071451
https://inria.hal.science/inria-00071451

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Analyse de sensibilité et estimation de paramètres de transport pour une équation de diffusion, approche par état adjoint

François Clément — Nina Khvoenkova — Alain Cartalade — Philippe Montarnal

N° 5132

Mars 2004

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--5132--FR

Analyse de sensibilité et estimation de paramètres de transport pour une équation de diffusion, approche par état adjoint

François Clément [*] , Nina Khvoenkova [†] , Alain Cartalade [‡] , Philippe Montarnal [§]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Estime

Rapport de recherche n° 5132 — Mars 2004 — 55 pages

Résumé : L'identification des coefficients d'une équation aux dérivées partielles (EDP) entre dans le cadre des problèmes inverses. L'analyse de la sensibilité des mesures de la solution de l'EDP par rapport aux coefficients à estimer est alors une technique efficace d'aide à la résolution du problème. En quantifiant le nombre de degrés de liberté identifiables de façon stable, elle permet de guider le choix d'une paramétrisation des coefficients de l'EDP adaptée au problème, mais également de tester des dispositifs de mesure plus performants pour l'inversion. Dans ce travail, l'EDP est une équation de diffusion en milieu poreux. Des outils efficaces tels la décomposition en valeurs singulières, pour l'analyse de sensibilité, et la méthode de l'état adjoint, pour le calcul des dérivées, sont mis en œuvre.

Mots-clés : problème inverse, analyse de sensibilité, décomposition en valeurs singulières, état adjoint, milieux poreux

Rapport de stage de DEA d'Analyse Numérique de N. Khvoenkova.

[*] Projet Estime. Francois.Clement@inria.fr.
[†] Projet Estime et École Polytechnique/Université de Paris 6. Nina.Khvoenkova@inria.fr.
[‡] CEA, DM2S/SFME/MTMS, Bât. 454, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex. alain.cartalade@cea.fr.
[§] CEA, DM2S/SFME/MTMS. philippe.montarnal@cea.fr.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Téléphone : +33 1 39 63 55 11 —Télécopie : +33 1 39 63 53 30

Sensitivity analysis and estimation of transport parameters for a diffusion equation, adjoint state approach

Abstract: Identification of coefficients in a partial derivative equation (PDE) is an inverse problem. The analysis of the sensitivity of the measures of the PDE's solution with respect to the coefficients to be estimated is an efficient technique to help in solving the problem. By quantifying the number of degrees of freedom that can be stably identified, it helps in choosing a parameterization of the PDE's coefficients adapted to the problem, but also in testing acquisition devices that improve inversion. In this work, the PDE is a diffusion equation in a porous medium. Efficient tools such singular value decomposition, for sensitivity analysis, and adjoint state approach, for computation of derivatives, are used.

Key-words: inverse problem, sensitivity analysis, singular value decomposition, adjoint state, porous media

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Modèle direct/problème inverse **9**
2.1 Problème direct continu 9
2.2 Problème direct discrétisé 9
2.3 Problème inverse 10

3 Paramétrisation **13**

4 Analyse de sensibilité **15**
4.1 Décomposition en valeurs singulières 15
4.2 Analyse de sensibilité 15
4.3 Application à notre problème 17

5 Méthode de l'état adjoint **19**
5.1 Théorie générale 19
5.2 Application 20

6 Résultats numériques **23**
6.1 Analyse de sensibilité pour un exemple synthétique de référence 23
6.1.1 Paramétrisation fine à 20 zones 24
6.1.2 Paramétrisation grossière à 3 zones 28
6.2 Analyse locale en d'autres points 32
6.2.1 Cas homogène 33
6.2.2 Modification des valeurs de la porosité et/ou de la diffusion 35
6.2.3 Modification de la taille des couches 39
6.2.4 Extension du modèle physique : porosité très grande 42
6.3 Modification du dispositif expérimental 44
6.3.1 Modification de la phase d'injection 45
6.3.2 Suppression des points de mesures dans la zone endommagée 49
6.3.3 Dispositif réaliste pour les mesures au temps final 51

7 Conclusion **53**

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce travail est l'estimation numérique de la sensibilité de mesures de concentration par rapport à des paramètres de transport pour aider à l'estimation ces paramètres. Il se rattache au projet « Problèmes inverses pour la détermination des paramètres hydrauliques et de transport » du GdR MOMAS en collaboration avec le DM2S/SFME/MTMS du CEA/Saclay.

Le but final est de prédire le comportement d'un site de stockage de déchets nucléaires sur une échelle de 10–100 m. Pour modéliser l'écoulement dans le milieu poreux autour du stockage il faut connaître les paramètres du milieu (ici la porosité et le coefficient de diffusion).

On dispose de deux moyens expérimentaux permettant déterminer les valeurs de ces paramètres :

- l'expérience du Mont Terri, à l'échelle métrique, où on étudie un sous-sol dont les caractéristiques sont proches de celles du site de stockage. Cette expérience donne des mesures expérimentales à inverser, ce qui est le sujet de ce travail.
- une expérience plus fine, réalisée en laboratoire sur un échantillon à l'échelle centimétrique, qui donne des valeurs représentatives des paramètres.

Dans le cadre des laboratoires souterrains du Mont Terri (Suisse) et de Bure (Meuse/ Haute-Marne), des expériences de diffusion de traceurs chimiques (réactifs ou non) sont menées. Les résultats expérimentaux sont les concentrations des traceurs en temps et en espace. Les paramètres à identifier sont la porosité et le coefficient de diffusion.

Pour obtenir les valeurs des paramètres, on utilise des méthodes d'identification de paramètres à partir d'observations expérimentales. Mathématiquement il s'agit de rechercher les coefficients d'une équation aux dérivées partielles à partir de mesures de sa solution, c'est-à-dire de résoudre le problème inverse. Numériquement il s'agit de déterminer un jeu de paramètres minimisant la fonction d'écart aux mesures.

Pour aider au traitement du problème inverse nous utilisons les moyens numériques suivants :

- le calcul des dérivées par la méthode de l'état adjoint permet de calculer le gradient de la fonction coût plus précisément et de façon moins coûteuse que par la méthode des différences finies.
- la décomposition en valeurs singulières (SVD) est un outil pour analyser la sensibilité du modèle direct.
- l'analyse de sensibilité nous permet de choisir la paramétrisation de notre problème (réduction du nombre de degrés de liberté) et d'améliorer le choix des points de mesures.

Problème physique

L'expérience de Diffusion Inerte (DI) du Mont Terri a été menée sous la responsabilité de l'ANDRA. Elle consiste à suivre durant une année la diffusion de deux traceurs chimiques non réactifs dans l'argile

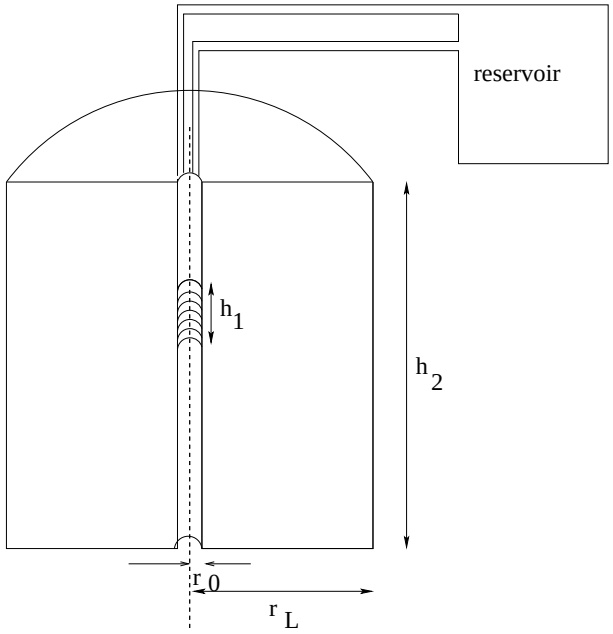


FIG. 1.1 – *Géométrie du système.*

à Opalinus afin de caractériser le comportement diffusif de la roche. Le site du Mont Terri présente les mêmes caractéristiques géologiques que celles du site de Bure, susceptible d'accueillir le stockage des déchets à longue durée de vie.

Un traceur est injecté dans un forage à l'instant initial et diffuse au cours du temps dans le milieu. Des mesures de concentrations sont recueillies dans la chambre d'injection durant toute la durée de la manipulation. En fin d'expérience, un sur-carottage est réalisé autour du forage d'injection et des profils en sont extraits. Ces derniers permettent d'avoir des mesures de concentrations au temps final en fonction de la distance au forage. Ces données permettent de quantifier la distance sur laquelle le traceur a diffusé tout au long de l'expérience et donnent ainsi des estimations sur les paramètres de porosité et de diffusion du milieu.

Le milieu présente une région endommagée sur les premiers centimètres autour du forage qui pourrait entraîner une variation spatiale des paramètres de porosité et de diffusion. Les valeurs effectives des paramètres dans cette région endommagée ne sont pas a priori intéressantes, cependant elles conditionnent les concentrations qui seront mesurées plus loin, et donc les valeurs des paramètres qui seront estimées. Il conviendra donc de déterminer l'étendue de la région endommagée, ainsi que les valeurs des paramètres. D'autre part, la structure présente une anisotropie due à un plan de pendage de 34 degrés par rapport à l'horizontale. Le modèle doit être considéré en 3D.

Le traceur est injecté dans un forage de rayon $r_0 = 0.035$ m entre deux packers séparés d'une distance h_1 de 0.548 m. La géométrie du système est présentée sur la figure 1. Deux types de traceurs ont été utilisés : l'iode (non radioactif) et le tritium pour lequel le coefficient de décroissance radioactive vaut 1.78 10^{-9} s^{-1}. L'évolution de la concentration a été suivie dans la chambre d'injection durant toute la durée de l'expérience. D'autres mesures de concentration en fonction de la distance r ont également été obtenues en fin d'expérience. Comme la concentration du traceur a décrut très vite, on a procédé à quelques réinjections de traceur. Dans ces travaux les tailles du domaine r_L et h_2 de la figure 1 ont été ajustées de manière à pouvoir négliger les conditions aux limites sur la surface externe. La variation du diamètre du forage est également négligée de sorte que son rayon est supposé constant.

L'expérience ayant été réalisée de manière à n'avoir qu'un problème de diffusion pur (pas de convection), l'évolution de la concentration en traceur suit la relation classique de diffusion dans un milieu

poreux à laquelle s'ajoute un terme de décroissance radioactive :

$$\omega(x)\frac{\partial C}{\partial t}(x,t) - \vec{\nabla}.\left(\mathbf{D}(x)\vec{\nabla}C(x,t)\right) + \lambda\omega(x)C(x,t) = 0. \tag{1.1}$$

Dans l'équation ci-dessus, $C(x,t)$ est la concentration et dépend de la position $x = (x_1, x_2, x_3)$ et du temps t, $\omega(x)$ est la porosité (non dimensionnée), $D(x)$ est le tenseur de diffusion et λ est le coefficient de décroissance radioactive.

Pour avoir un problème bien posé, l'équation (1.1) doit être accompagnée de conditions initiale et aux limites. Pour la condition initiale, la concentration est supposée nulle à $t = 0$. Pour les conditions aux limites, elles sont à flux nuls partout, sauf au niveau de la chambre d'injection dans laquelle la concentration diminue au cours du temps. Le taux de décroissance dépend du flux sortant $\vec{q}$ qui est fonction de la diffusion du système. Par conséquent, l'évolution de la concentration dans la chambre d'injection s'exprime de la manière suivante :

$$C_{inj}(t) = C_{inj}(t_0) - \frac{1}{V}\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma_{inj}} \vec{q}.\vec{n}d\sigma dt \tag{1.2}$$

où V est le volume total de l'eau, Γ_{inj} est la surface de la chambre d'injection et $\vec{n}$ est le vecteur normal sortant de la chambre. $C_{inj}(t_0)$ est la valeur de la concentration injectée dans la chambre à l'instant initial.

Problèmes direct et inverse

Expliquons brièvement ce qu'on comprend comme la résolution des problèmes direct et inverse.

On dit résoudre le problème direct lorsqu'on cherche à déterminer l'évolution du champ de concentration $C(x,t)$ étant donnés :

1. la condition initiale et les conditions aux limites,
2. les paramètres de porosité $\omega(x)$ et de diffusion $D(x)$.

Nous nous sommes placés dans le cas particulier où les conditions initiale et aux limites sont connues mais dans le cas le plus général, ces dernières peuvent également faire l'objet d'un problème inverse.

Les paramètres $\omega(x)$ et $D(x)$ sont difficilement accessibles expérimentalement contrairement aux valeurs de concentrations, c'est pour cette raison qu'on est amené à résoudre un problème inverse. Pour le problème inverse les données sont :

1. la condition initiale et les conditions aux limites,
2. des mesures de concentration $C(x_{i_j}, t^{n_k})$.

Les inconnues sont la porosité $\omega(x)$ et le coefficient de diffusion $D(x)$.

Dans toute la suite de ce travail, on se place dans le cas simplifié d'une seule dimension d'espace (symétrie de révolution horizontale et invariance verticale).

Chapitre 2

Modèle direct/problème inverse

Ce chapitre concerne la résolution numérique du problème direct 1D-transitoire de l'évolution d'un traceur par diffusion ainsi que l'établissement du problème inverse. Pour plus de détails, se référer à [2].

2.1 Problème direct continu

En supposant que l'axe du cylindre coïncide avec l'axe des z et que les conditions initiales et aux limites sont indépendantes des coordonnées θ et z, la concentration est une fonction de r et t seulement et le problème (1.1),(1.2) se ramène à l'équation suivante :

$$\omega(r)\frac{\partial C}{\partial t}(r,t) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD(r)\frac{\partial C}{\partial r}(r,t)\right) + \lambda\omega(r)C(r,t) = 0, \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} C(r_0,t) = C(r_0,t_0) + \alpha D(r_0)\int_{t_0}^{t}\frac{\partial C}{\partial r}(r_0,s)ds \\ \\ D(r_L)\frac{\partial C}{\partial r}(r_L,t) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

et la condition initiale nulle :

$$C(r,0) = 0 \tag{2.3}$$

où $\omega(r)$ est la porosité, $D(r)$ est la diffusion du système, λ est le coefficient de décroissance radioactive et $C(r,t)$ est la concentration. α est le rapport entre la surface et le volume de la chambre d'injection.

2.2 Problème direct discrétisé

Pour résoudre le problème numériquement, on le discrétise. On introduit la discrétisation en espace et en temps suivante :

$$\begin{array}{rcll} r_i & = & r_0 + i\,\frac{r_L - r_0}{L}, & i = 0,\ldots,L \\ t^n & = & n\,\Delta t, & n = 0,\ldots,N. \end{array}$$

On note

$$C_i^n = C(r_i, t^n).$$

Pour la résolution du problème on utilise la méthode des différences finies en espace et en temps avec un schéma implicite en temps. Après discrétisation, le problème se ramène à la résolution du système matriciel suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{C}^n & = & \mathbf{M}\mathbf{C}^{n-1}, & n = 1,...,N \\ \mathbf{C}^0 & = & \left(C_0^0, 0, \ldots, 0\right)^T \end{cases} \tag{2.4}$$

où

$$\mathbf{C}^n = (C_0^n, \ldots, C_L^n)^T, \quad n = 0, \ldots, N$$

est le vecteur spatial des concentrations discrétisées au pas de temps n et $\mathbf{G}$ est la somme des deux matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ avec $\mathbf{K}$ matrice tridiagonale dépendante de la diffusion et de la porosité du système et $\mathbf{M}$ matrice diagonale qui ne dépend que de la porosité. Ces deux matrices s'écrivent de la façon suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\omega_1}{\Delta t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\omega_L}{\Delta t} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & & \cdots & 0 \\ -B_1 & A_1 + B_1 + \lambda\omega_1 & -A_1 & & & \\ 0 & -B_2 & A_2 + B_2 + \lambda\omega_2 & -A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -B_{L-1} & A_{L-1} + B_{L-1} + \lambda\omega_{L-1} & -A_{L-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & -B_L & B_L + \lambda\omega_L \end{pmatrix}.$$

La forme des éléments de matrice A_i et B_i qui dépendent de la diffusion est la suivante :

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2r_i\Delta r_i\Delta r_{i+1/2}}\left(r_i D_i + r_{i+1} D_{i+1}\right) \\ B_i &= \frac{1}{2r_i\Delta r_i\Delta r_{i-1/2}}\left(r_i D_i + r_{i-1} D_{i-1}\right) \\ \gamma &= \alpha D_0 \frac{\Delta t}{\Delta r_{1/2}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta r_i &= r_{i+1/2} - r_{i-1/2} \\ \Delta r_{i+1/2} &= r_{i+1} - r_i \\ \Delta r_{i-1/2} &= r_i - r_{i-1}. \end{aligned}$$

Remarquons que dans la formulation ci-dessus la condition à la limite variable dans le temps est prise en compte dans le système tridiagonal.

Un exemple de concentration en espace-temps est donné à la figure 2.2. On observe les 4 réinjections à 9, 27, 50 et 113 jours.

Pour la suite, on récrit le problème (2.4) sous la forme suivante condensée (équation d'état) :

$$E(p, u) = 0. \tag{2.5}$$

où $p = (\omega, \mathbf{D})$ est le paramètre et $u = \mathbf{C}$ est la variable d'état.

2.3 Problème inverse

La résolution du problème inverse se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle coût qui calcule l'écart quadratique entre les données observées et les données calculées. Donc le problème inverse se ramène à un problème d'optimisation. Pour le résoudre il est nécessaire de définir la fonctionnelle à minimiser qui dépend du type de problème considéré et de choisir une technique adéquate pour effectuer la minimisation de cette fonctionnelle.

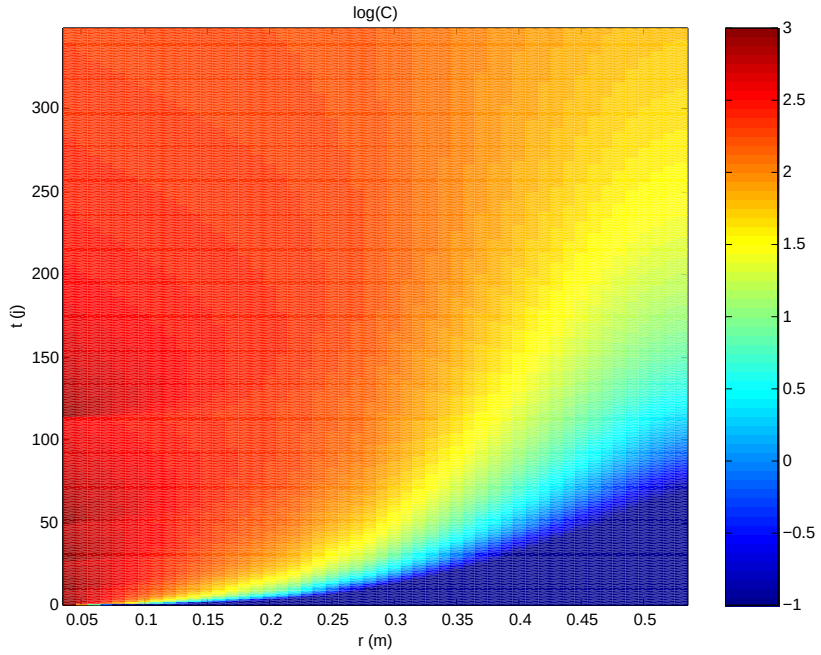


FIG. 2.1 – *Concentration solution du problème direct (2.4) pour l'exemple synthétique hétérogène de [2] en échelle logarithmique.*

Pour le problème qui nous intéresse, les données de concentration observées sont de deux types : des données de concentration suivie au cours du temps dans la chambre d'injection, et des données mesurées le long de l'échantillon au temps final. Plus précisément, il s'agit de la donnée d'une collection $(\hat{C}_0^k)_{k=1,\dots,N_{monit}}$ et d'une collection $(\hat{C}_j^N)_{j=1,\dots,L_{tf}}$ correspondant à la mesure de la concentration $C_i^n = C(r_i, t^n)$ respectivement à N_{monit} instants de mesure de monitoring $(t^{n_k})_{k=1,\dots,N_{monit}}$ (avec $r = r_0 = r_0$) et à L_{tf} positions de mesure au temps final $(r_{i_j})_{j=1,\dots,L_{tf}}$ (avec $t = t^N = t_f$). Ainsi, la fonctionnelle s'exprime donc de la manière suivante :

$$J = J(\omega, \mathbf{D}) = \sum_{k=1}^{N_{monit}} \nu_k^2 (C_0^{n_k} - \hat{C}_0^k)^2 + \sum_{j=1}^{L_{tf}} \mu_j^2 (C_{i_j}^N - \hat{C}_j^N)^2 \tag{2.6}$$

où (C_i^n) est la solution du problème direct (2.4) avec $(\omega, \mathbf{D})$. Les coefficients μ_j^2 et ν_k^2 sont des poids positifs attribués à chaque mesure et représentent le « degré de confiance » que l'on a en cette donnée.

Supposons que les poids ne dépendent que du type de mesure (pour tout k, $\nu_k = \nu$ et pour tout j, $\mu_j = \mu$). Si l'on note le modèle direct (des paramètres aux mesures)

$$F(p) = \begin{pmatrix} \mu\,(C_{i_1}^N, \dots, C_{i_{L_{tf}}}^N)^T \\ \nu\,(C_0^{n_1}, \dots, C_0^{n_{N_{monit}}})^T \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

où $u = (C_i^n)$ est la solution du problème direct (2.5) avec $p = (\omega, \mathbf{D})$, alors la fonctionnelle se récrit simplement

$$J = J(p) = \|F(p) - d\|^2 \tag{2.8}$$

où $d = (\mu\hat{C}^N, \nu\hat{C}_0)^T$ avec $\hat{C}_0 = (\hat{C}_0^1, \dots, \hat{C}_0^{N_{monit}})$ et $\hat{C}^N = (\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_{L_{tf}}^N)$.

Dans la figure 2.3, la courbe à gauche correspond aux mesures de la concentration de traceur dans la chambre d'injection. Les pics de concentration correspondent à des (ré)injections de traceur. La courbe à droite montre les mesures de la concentration en fin d'expérience.

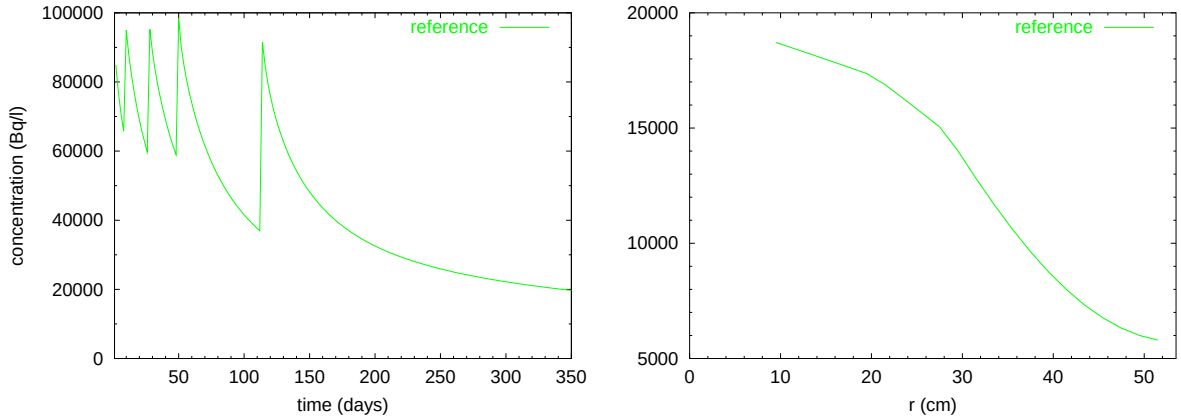


FIG. 2.2 – *Données expérimentales correspondant à la trace de la concentration de la figure 2.2 pour r=0,035 m (monitoring, à gauche) puis pour t=350 jours (temps final, à droite).*

Le problème inverse revient à déterminer les paramètres ω et D qui rendent minimum la fonctionnelle J. Pour effectuer une telle minimisation avec une méthode de type gradient, il est nécessaire de connaître les dérivées de la fonctionnelle par rapport aux paramètres.

Chapitre 3

Paramétrisation

Lors de la recherche de quantités physiques intervenant dans une équation aux dérivées partielles (EDP), ici la porosité et le coefficient de diffusion dans une équation de transport en milieu poreux, à partir de mesures de la solution de l'EDP, ici la concentration en traceur, se pose toujours la question de la paramétrisation de ces quantités :

- une paramétrisation trop riche permettra une interprétation physique des résultats d'inversion, mais risquera de mener à un problème d'inversion sous-déterminé, donc possédant plusieurs solutions et finalement inutilisable pour l'interprétation physique !
- une paramétrisation avec trop peu de degrés de liberté donnera des paramètres estimés uniques et stables (le problème est régularisé), mais trop globaux pour permettre une interprétation physique détaillée.

Le choix d'une bonne paramétrisation consiste donc à essayer de concilier, si c'est possible, le potentiel d'interprétation physique de la paramétrisation avec les contraintes de dimension dues à la nature des mesures et du modèle. L'analyse de sensibilité développée au chapitre suivant permettra de quantifier le nombre de paramètres identifiables de façon stable à partir des mesures, et ainsi de guider le choix de la paramétrisation, cf. [4].

Il s'agit de choisir une fonction

$$P : m \longmapsto p \tag{3.1}$$

avec $\dim m \ll \dim p$, et ici $p = (\omega, \mathbf{D})$. Après paramétrisation du problème, le modèle direct devient $F \circ P$, et le problème inverse revient à la minimisation de la même fonction coût mais par rapport au nouveau paramètre m. Connaissant le gradient $\nabla_p J$ de la fonction coût J définie par (2.8) par rapport au paramètre physique p, le gradient par rapport au nouveau paramètre d'optimisation m est simplement donné par

$$\nabla_m J(m_0) = P'(m_0)^T \nabla_p J(P(m_0)). \tag{3.2}$$

Pour ce travail, nous avons considéré une paramétrisation en zones, chaque zone étant un agrégat de mailles de la discrétisation spatiale, c'est-à-dire par des fonctions constantes par morceaux. Le choix d'une paramétrisation à L_p zones revient donc à choisir $L_p - 1$ points de séparation r_{i_p} avec $0 < i_1 < \ldots < i_{L_p-1} < L$ (où $r_i = r_0 + i\frac{r_L - r_0}{L}$ et r_0, r_L sont les extrémités de l'intervalle d'étude) auxquels on ajoute $i_0 = 0$ et $i_{L_p} = L$. La fonction de paramétrisation devient simplement : pour $i = 0, \ldots, L$,

$$\begin{cases} \omega_i = p_{i+1} = m_j \\ D_i = p_{i+L+2} = m_{j+L_p} \end{cases} \quad \text{si } i_{j-1} \leq i < i_j. \tag{3.3}$$

Dans ce cas, $\dim p = N_p = 2L + 2$ et $\dim m = N_m = 2L_p$.

Chapitre 4

Analyse de sensibilité

4.1 Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières (SVD) est une généralisation de la diagonalisation aux matrices rectangulaires.

Étant donnée une matrice A de I lignes et J colonnes, ses valeurs singulières sont les racines carrées de valeurs propres (positives) de la matrice symétrique $A^T A$. Plus précisément, la SVD de A s'écrit :

$$A = USV^T$$

où $V = (v_j)_{1 \leq j \leq J}$ est la matrice des vecteurs singuliers dans l'espace de départ, $U = (u_i)_{1 \leq i \leq I}$ est la matrice composée des vecteurs singuliers dans l'espace d'arrivée et S est la matrice diagonale contenant les valeurs singulières en ordre décroissant. Les valeurs singulières sont positives ou nulles et les matrices U et V sont unitaires.

On peut récrire la décomposition sous la forme suivante :

$$A\,v_k = \begin{cases} s_k\,u_k, & 1 \leq k \leq \min(I,J) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2 Analyse de sensibilité

Résoudre le problème inverse consiste à reproduire au mieux les données mesurées, c'est-à-dire à minimiser la fonction coût définie par (2.8). L'analyse de la sensibilité du modèle direct F permet de déterminer le nombre de degrés de liberté du paramètre p que l'on peut retrouver de façon stable à partir de ces mesures. Cette analyse est locale, elle repose sur une approximation du premier ordre.

Pour cela, on suppose que les données d_0 sont dans l'image du modèle direct, c'est-à-dire qu'il existe une valeur particulière du paramètre p_0 telle que :

$$d_0 = F(p_0).$$

Ensuite, on considère une perturbation de ces données :

$$d = d_0 + \varepsilon = F(p_0) + \varepsilon$$

où ε représente le bruit et on effectue une étude locale autour de p_0 :

$$p = p_0 + \delta p.$$

La SVD de la matrice jacobienne en p_0 donne :

$$F'(p_0) = USV^T$$

où l'espace de départ est l'espace des paramètres et l'espace d'arrivée celui des mesures. On décompose δp dans la base (v_j) :

$$\delta p = \sum_{j=1}^{J} \delta p_j \, v_j$$

et le bruit dans la base (u_i) :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{I} \varepsilon_i \, u_i.$$

Au premier ordre, la décomposition de Taylor nous donne

$$F(p) \simeq F(p_0) + F'(p_0)\, \delta p$$

et la fonction coût devient

$$J(p) \simeq J_{\text{lin}}(p_0)(\delta p) = \|F'(p_0)\, \delta p - \varepsilon\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\min(I,J)} \delta p_k \, s_k \, u_k - \sum_{i=1}^{I} \varepsilon_i \, u_i \right\|^2 .$$

Il est alors évident que la fonction J_{lin} atteint son minimum au point

$$\delta p_k^* = \begin{cases} \frac{\varepsilon_k}{s_k}, & \text{pour} \quad s_k > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Si on suppose que

$$F(0) = 0, \tag{4.3}$$

alors, on a au premier ordre

$$0 = F(p_0 - p_0) \simeq F(p_0) - F'(p_0)\, p_0,$$

d'où on obtient

$$\|d_0\| = \|F(p_0)\| \simeq \|F'(p_0) p_0\| \leq s_1 \|p_0\|. \tag{4.4}$$

Et il résulte de (4.2) et (4.4) que

$$\frac{\delta p_k^*}{\|p_0\|} \leq \frac{\varepsilon_k}{s_k} \frac{s_1}{\|d_0\|} = \frac{s_1}{s_k} \frac{\varepsilon_k}{\|d_0\|} \leq \frac{s_1}{s_k} \frac{\|\varepsilon\|}{\|d_0\|}$$

d'où on peut conclure que

$$\text{si} \quad \frac{\|\varepsilon\|}{\|d_0\|} \leq \sigma_d \text{ et } \frac{s_k}{s_1} \geq \frac{\sigma_d}{\sigma_p}, \quad \text{alors} \quad \frac{\delta p_k^*}{\|p_0\|} \leq \sigma_p. \tag{4.5}$$

La propriété (4.5) s'interprète de la façon suivante : étant donnée une incertitude relative sur les mesures σ_d, les composantes du paramètre qu'il est possible de déterminer à partir des mesures bruitées avec une incertitude relative inférieure à σ_p donné ($\sigma_p = 1$ correspond à 100% de bruit) sont celles sur les vecteurs singuliers de l'espace des paramètres pour lesquelles la valeur singulière associée est au plus dans un rapport σ_d/σ_p avec la première valeur singulière. Ces composantes sont appelées degrés de liberté identifiables de façon stable et leur nombre est noté :

$$K_\alpha = \sup_{\frac{s_k}{s_1} \geq \alpha} k. \tag{4.6}$$

4.3 Application à notre problème

La méthode d'analyse de sensibilité présentée dans la section précédente est basée sur une approximation du premier ordre, elle reste donc locale. La solution exacte du problème inverse étant a priori inconnue, on doit donc choisir une valeur de référence pour le paramètre (choix guidé par des considérations physiques), et procéder à l'analyse locale autour de cette valeur.

Une analyse de sensibilité globale peut être menée dans un cadre probabiliste, comme dans [5]. Cependant, en restant dans un cadre déterministe, étant donné un jeu de mesures, le tracé de la fonction coût sur des segments de l'espace des paramètres permet également de définir des indicateurs de sensibilité «globaux», ainsi que d'identifiabilité.

Pour utiliser la conclusion de la section précédente il faut d'abord vérifier que notre problème vérifie la condition (4.3). On étudie ici le problème direct discrétisé (2.4).

Si on pose $p = 0$ dans (2.4), les matrices se réduisent à

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

mais la condition initiale reste la même. En résolvant le système obtenu, on trouve que les valeurs $\mathbf{C}^N$ sont bien nulles mais que les $\mathbf{C}_0$ restent à leur valeur initiale, a priori non nulle. L'interprétation de l'étude de sensibilité donnée à la section précédente n'est donc justifiée que pour les mesures au temps final, et non pour celles de monitoring.

D'un point de vue physique, un coefficient de diffusion nul signifie qu'il n'y a plus de transport, et donc que l'état initial perdure (ce que l'on retrouve avec le modèle discret). Par contre, une porosité nulle est plus difficile à interpréter, le modèle de milieu poreux ne tenant plus.

Dans [1], les auteurs montrent qu'une interprétation semblable à la propriété (4.5) est possible avec une hypothèse sensiblement différente sur le modèle direct (et à l'aide d'un argument de convexité), cependant, il n'a pas été possible de l'appliquer ici.

La justification complète est laissée pour des travaux futurs, avec tout de même la remarque que l'on obtient ici des conclusions semblables à celles établies avec d'autres méthodes, telle l'étude probabiliste de [5].

Chapitre 5

Méthode de l'état adjoint

Pour que l'algorithme d'optimisation converge correctement, il faut calculer le gradient de la fonction coût précisément et rapidement.

La méthode des différences finies n'est pas efficace. En effet, on a besoin de calculer la dérivée de la fonction $J(p)$ par rapport à p, où $p = (\omega, \mathbf{D}) \in \mathbb{R}^{N_p}$ dans notre cas. C'est-à-dire un vecteur de dimension N_p. Or, pour calculer une des N_p composantes du vecteur gradient, il nous faut calculer la limite

$$\frac{\partial J}{\partial p_j}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{J(p + he_j) - J(p)}{h}$$

où e_j est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{N_p}$. Ce calcul est très coûteux (le nombre des évaluations est proportionnel à N_p) et n'est pas précis (il faut trouver la valeur optimale de h pour arrêter le calcul).

Pour éviter ces difficultés, on utilise la méthode de l'état adjoint.

5.1 Théorie générale

Soit le problème direct suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } p \text{ donné, trouver } u \text{ tel que} \\ E(p,u) = 0. \end{array} \right. \tag{5.1}$$

On pose

$$F(p) = M(u) \tag{5.2}$$

où M est un opérateur de mesure de la solution u du problème direct. Le but de cette section est de trouver une formule pour le gradient d'une fonction $G(p,v)$ dépendant explicitement des vecteurs p et $v = F(p)$.

On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(p,u,\lambda) = G(p,v) + < E(p,u), \lambda > . \tag{5.3}$$

On a le théorème suivant (cf. [3]) :

Théorème 1 *Soit (5.1) une équation d'état et (5.2) un opérateur d'observation. Soient $G(p,v)$ et $F(p)$ suffisamment régulières. Soit $\mathcal{L}(p,u,\lambda)$ un Lagrangien (5.3) associé avec (5.1).*

Alors $G(p,F(p))$ est différentiable, et son gradient ∇G est donné par l'équation

$$< \nabla G, \delta p > = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(p, u_p, \lambda_p)\delta p \quad \forall \delta p \tag{5.4}$$

où

- u_p *est solution du problème direct*

$$E(p,u)=0$$

- λ_p *est solution du problème adjoint*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(p,u_p,\lambda)\delta u=0 \quad \forall \delta u. \tag{5.5}$$

À partir de la formule (5.5) on peut facilement obtenir l'équation adjointe :

$$\left\{\frac{\partial E}{\partial u}(p,u)\right\}^T \lambda + M'(u)^T \nabla_v G(p,v)=0. \tag{5.6}$$

Cette présentation à l'avantage de synthétiser les différentes applications suivant le choix de la fonction $G(p,v)$:

- si $G(p,v)=<v,e_i>$ où e_i est un vecteur de base de l'espace des mesures, alors on a :

$$\nabla G = F'(p)^T e_i$$

  et l'approche adjointe nous permet de calculer le jacobien de la fonction $F(p)$ ligne par ligne.

- si $G(p,v)=<v,g_v>$ où g_v est un vecteur donné, alors on a :

$$\nabla G = F'(p)^T g_v.$$

- si $G(p,v)=\frac{1}{2}\|v-d\|^2$, c'est-à-dire égale à la fonction coût $J(p)$, alors on a :

$$\nabla G = \nabla J.$$

5.2 Application

Dans cette section on applique les résultats de la théorie générale à notre problème. Pour déterminer la sensibilité des mesures il nous faut calculer la matrice de sensibilité, c'est-à-dire $F'(p)$.

On note $\mathbf{P}_l$ l'état adjoint. Dans ce cas, le Lagrangien devient pour $l=1,\ldots,L_{tf}+N_{monit}$

$$\mathcal{L}_l = F_l(p) + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}_l^{nT}(\mathbf{G}\mathbf{C}^n - \mathbf{M}\mathbf{C}^{n-1}). \tag{5.7}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à la solution du problème direct est

$$\frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \mathbf{C}}\,\delta\mathbf{C} = \frac{\partial F_i(p)}{\partial \mathbf{C}}\,\delta\mathbf{C} + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}_l^{nT}(\mathbf{G}\delta\mathbf{C}^n - \mathbf{M}\delta\mathbf{C}^{n-1})$$

où

$$\frac{\partial F_j(p)}{\partial C_i^n} = \delta_{n,N}\delta_{i,i_j}\,\mu\delta C_i^n \quad \text{si} \quad 1\le l\le L_{tf}$$

et

$$\frac{\partial F_{k+L_{tf}}(p)}{\partial C_i^n} = \delta_{i,0}\delta_{n,n_k}\,\nu\delta C_i^n \quad \text{si} \quad 1\le k\le N_{monit}$$

À partir du théorème 1 on obtient le problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \mathbf{G}^T\mathbf{P}_l^n - \mathbf{M}\mathbf{P}_l^{n+1} & = & \mathbf{Q}_{0,l}^n, & n = N-1,\ldots,1 \\ \mathbf{G}^T\mathbf{P}_l^N & = & \mathbf{R}_l^N & \end{array} \right. \tag{5.8}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Q}_{0,j}^n & = & 0 \\ \mathbf{R}_j^N & = & -\mu\tilde{e}_{i_j} \end{array} \right. , \quad \text{si} \quad 1 \le j \le L_{tf}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Q}_{0,k+L_{tf}}^n & = & -\delta_{n,n_k}(\nu,0,\ldots,0)^T \\ \mathbf{R}_{k+L_{tf}}^N & = & 0 \end{array} \right. , \quad \text{si} \quad 1 \le k \le N_{monit}$$

$\tilde{e}_{i_j}$ est un vecteur de base dans $\mathbb{R}^L$. De plus on a :

$$\frac{\partial F_l}{\partial p_i}(p) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}_l^{nT}\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i}\mathbf{C}^n - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_i}\mathbf{C}^{n-1}\right), \quad i = 1,\ldots,2L+2. \tag{5.9}$$

Autre dispositif pour les mesures au temps final

Le dispositif permettant les mesures de concentration au temps final donne une masse par volume de roche, alors que les concentrations dans la chambre d'injection sont données en masse par volume de solution (le rapport de ces deux volumes étant égal à la porosité). Afin de pouvoir directement utiliser les mesures expérimentales telles qu'elles sont effectuées dans la réalité, nous avons multiplié la mesure au temps final par la porosité. Cela suppose bien sûr de modifier le problème adjoint.

Dans ce cas, le modèle direct devient

$$F(p) = \left(\begin{array}{llll} \mu & (\omega_{i_1}C_{i_1}^N, & \ldots, & \omega_{i_{L_{tf}}}C_{i_{L_{tf}}}^N)^T \\ \nu & (C_0^{n_1}, & \ldots, & C_0^{n_{N_{monit}}})^T \end{array} \right) \tag{5.10}$$

et les dérivées de la composante F_l pour $l = 1,\ldots,L_{tf}+N_{monit}$ sont toujours données par (5.9), sauf dans le cas où $1 \le l \le L_{tf}$ et $1 \le i \le 2L+1$ et alors on a

$$\frac{\partial F_l}{\partial p_i}(p) = \delta_{i,i_l}C_i^N + \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}_l^{nT}\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i}\mathbf{C}^n - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_i}\mathbf{C}^{n-1}\right) \tag{5.11}$$

où $\mathbf{P}_l$ est la solution du problème adjoint (5.8) avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Q}_{0,j}^n & = & 0 \\ \mathbf{R}_j^N & = & -\mu\omega_{i_j}\tilde{e}_{i_j} \end{array} \right. , \quad \text{si} \quad 1 \le j \le L_{tf}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Q}_{0,k+L_{tf}}^n & = & -\delta_{n,n_k}(\nu,0,\ldots,0)^T \\ \mathbf{R}_{k+L_{tf}}^N & = & 0 \end{array} \right. , \quad \text{si} \quad 1 \le k \le N_{monit}.$$

Chapitre 6

Résultats numériques

Ce chapitre présente les différentes expériences numériques qui ont été menées au cours de ce travail.

Pour notre étude, nous avons choisi le même milieu de référence que celui qui a été utilisé dans [2] pour l'expérience synthétique. Ce milieu comporte 3 couches, la porosité et la diffusion étant constantes dans chaque couche. Nous avons utilisé deux paramétrisations différentes : à 20 zones (dite *fine*) et à 3 zones (dite *grossière*).

Nous avons d'abord étudié la non-linéarité du problème en effectuant l'analyse locale de sensibilité en divers points : en changeant les valeurs des paramètres dans les couches homogènes ou en modifiant l'épaisseur de ces couches. Puis nous avons étudié des modifications du dispositif expérimental : dans la chambre d'injection mais également pour les mesures au temps final.

Dans ce chapitre, l'analyse de sensibilité pour chaque configuration repose sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice jacobienne de la modélisation directe F de l'équation (2.7) (mesures en fonction des paramètres). L'étude de la décroissance des valeurs singulières nous renseigne sur le nombre de paramètres identifiables de façon stable (pour un niveau de bruit donné), et ensuite, l'étude des vecteurs singuliers eux-mêmes nous renseigne sur la nature (position spatiale ou temporelle) des paramètres (ou des mesures) offrant la plus grande (ou éventuellement la plus faible) sensibilité.

Pour la mise en œuvre pratique, nous avons fait appel aux routines `xGESVD` et `xGESDD` de la bibliothèque LAPACK disponible sur `http://www.netlib.org`.

6.1 Analyse de sensibilité pour un exemple synthétique de référence

L'exemple synthétique de référence est issu de [2]. Il s'agit d'un milieu 1D de longueur 50 cm situé entre $r_0 = 3{,}5$ cm et $r_L = 53{,}5$ cm. Il comporte 3 couches (ou régions) de longueurs successives 17 cm, 8 cm et 25 cm ; les deux points de séparation sont donc situés à 20,5 cm et 28,5 cm. Les 3 couches sont supposées homogènes, la porosité est de l'ordre de 10% et la diffusion de l'ordre de 10^{-10} $\mathrm{m^2 s^{-1}}$, voir figure 6.1 (en haut). Une première injection est effectuée à 0 jour, puis 4 réinjections à 9, 27, 50 et 113 jours. Les mesures synthétiques correspondant à ce milieu de référence ont été calculées sur 350 jours à l'aide du schéma (2.4) avec un pas d'espace d'un centimètre et un pas de temps d'une heure, voir figure 6.1 (en bas). Les mesures de monitoring sont effectuées tous les 2 jours, et les mesures du profil au temps final sont espacées de 2 cm entre 9,5 cm et 51,5 cm.

Pour étudier l'influence de la paramétrisation sur la sensibilité, nous avons choisi deux types de paramétrisation par zones : une fine et une grossière. La paramétrisation fine comporte 20 zones d'épaisseur 2 cm ou 3 cm (sauf la dernière zone qui fait 10 cm). La dimension de l'espace des paramètres est alors 40 (20 valeurs de porosité et 20 de diffusion). La paramétrisation grossière comporte 3 zones correspondant aux 3 couches du milieu de référence. Dans ce cas, la dimension de l'espace des paramètres se réduit à 6 (3 valeurs pour chaque quantité physique). La dimension de l'espace des mesures est toujours de 197 (22 mesures au temps final et 175 de monitoring).

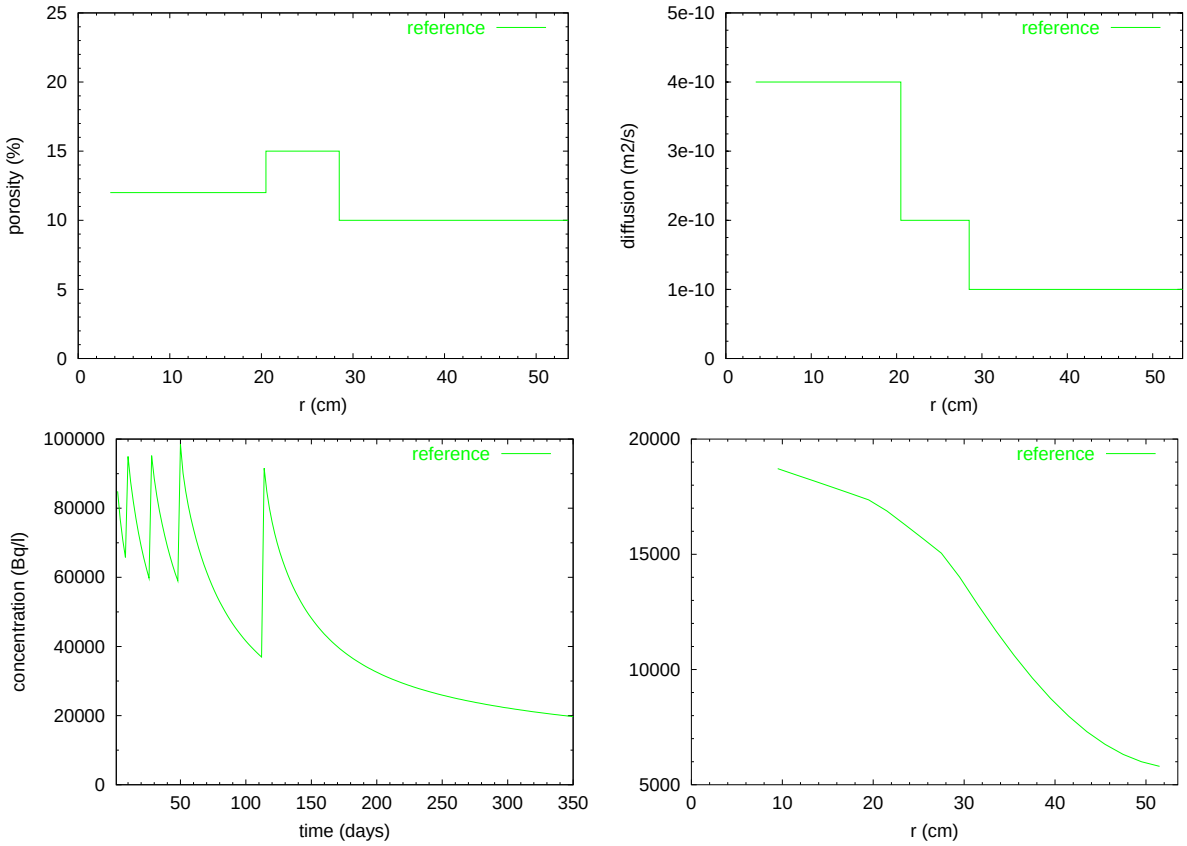


FIG. 6.1 – *Milieu de référence. En haut : le paramètre avec à gauche la porosité et à droite la diffusion. En bas : les mesures avec à gauche le monitoring et à droite le profil au temps final.*

Pour chacune de ces paramétrisations, nous avons d'abord étudié l'influence des poids μ et ν et des valeurs de normalisation ω_0 et D_0 afin d'effectuer une calibration pour les expérience numériques suivantes.

6.1.1 Paramétrisation fine à 20 zones

Les valeurs singulières pour l'étude de calibration dans le cas de la paramétrisation fine sont représentées dans la figure 6.2.

À valeurs de normalisation fixées ($\omega_0 = 0.1$ et $D_0 = 10^{-11}$ m^2/s), faire décroître continûment le rapport $\frac{\mu}{\nu}$ de l'infini à 0 permet de passer continûment de mesures tout au temps final ($\nu = 0$) aux mesures tout monitoring ($\mu = 0$), voir équations (2.6) ou (2.7). Si l'on ne regarde que les deux courbes rouges correspondant aux deux valeurs extrêmes du rapport $\frac{\mu}{\nu}$, il est clair que les mesures au temps final sont beaucoup plus sensibles que les mesures de monitoring. En effet, pour un niveau de bruit de 1% (à droite, sur le zoom), le nombre de degrés de liberté identifiables de façon stable $K_{1\%}$ est respectivement égal à 19 et à 3. Il est intéressant de noter qu'en pondérant les deux types de mesure, il est possible de cumuler les avantages des deux, et par exemple d'arriver à $K_{1\%} = 22$ pour $\frac{\mu}{\nu} = 10$. Il est également intéressant de noter que ce rapport de 10 correspond au rapport des normes euclidiennes $\frac{\|C_0\|_2}{\|C^N\|_2}$. Dans toute la suite, nous choisirons donc $\mu = 1$ et $\nu = 0.1$.

Ensuite, nous avons fait varier les valeurs de normalisation ω_0 et D_0. À 1% de bruit, le choix optimal semble être $\omega_0 = 0.1$ et $D_0 = 10^{-10}$ m^2/s (courbe orange). Ce qui correspond à peu près

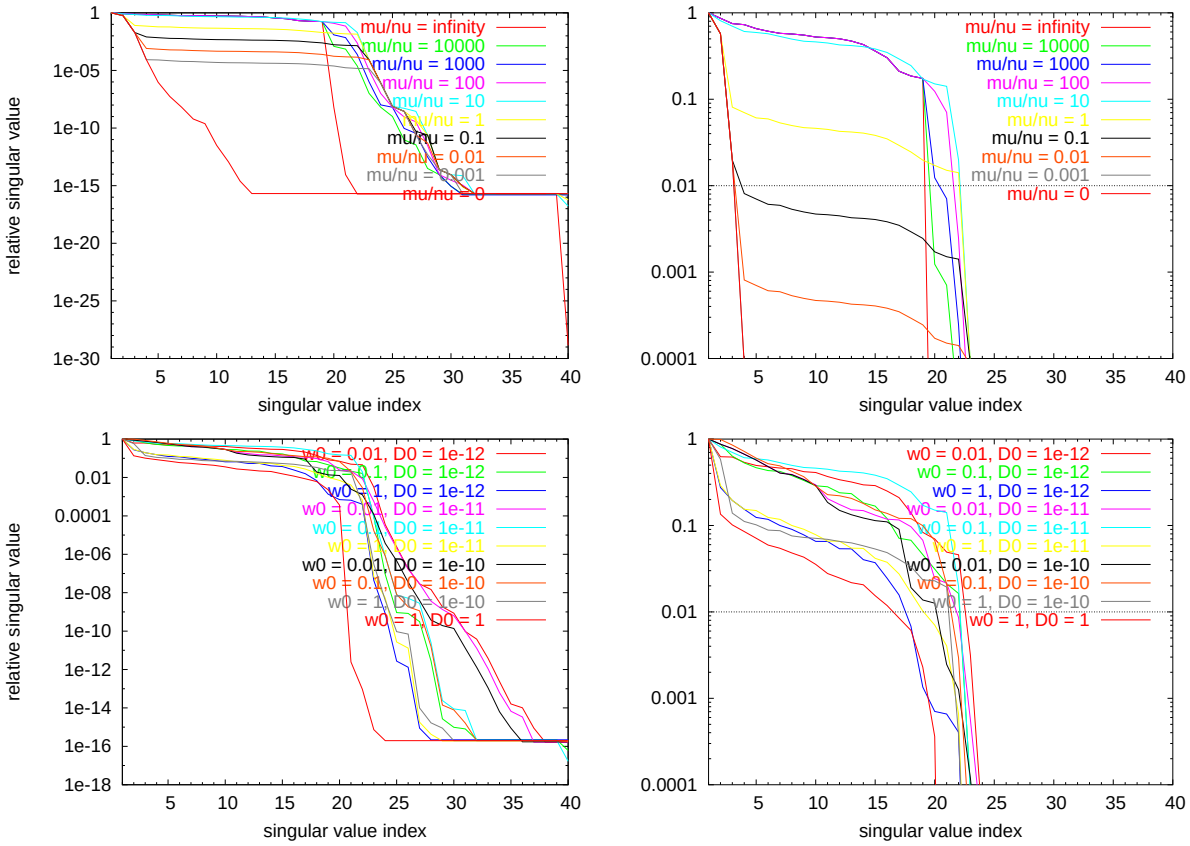


FIG. 6.2 – *Valeurs singulières pour différents choix des poids μ et ν sur les mesures et des valeurs de normalisation ω_0 et D_0 pour les paramètres, dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones. En haut : variation des poids pour $\omega_0 = 0.1$ et $D_0 = 10^{-11}$ m^2/s, en bas : variation des valeurs de normalisation pour $\mu = 1$ et $\nu = 0.1$. Sur les zooms à droite, un niveau de bruit de 1% est indiqué.*

aux valeurs moyennes des paramètres. Cependant, pour des raisons historiques, nous avons choisi de prendre $\omega_0 = 0.1$ et $D_0 = 10^{-11}$ m^2/s (courbe bleu ciel).

Nous allons maintenant nous intéresser aux vecteurs singuliers.

Si l'on se restreint aux premières valeurs singulières situées au-dessus du niveau de bruit, les vecteurs singuliers associés dans l'espace des paramètres nous renseignent sur les degrés de liberté (ici les zones pour la porosité ou la diffusion) permettant de faire varier le plus les mesures. Ce sont donc ceux procurant la plus grande sensibilité, et donc ceux qui seront susceptibles d'être retrouvés lors de l'inversion. De l'autre coté, les vecteurs singuliers associés dans l'espace des mesures renseignent sur quelles parties des mesures sont vraiment sensibles, donc utiles.

Il est intéressant de noter que cette étude permet également d'évaluer le noyau (dans l'espace des paramètres) ainsi que l'orthogonal de l'image (dans l'espace des mesures, ou noyau de la transposée) de la matrice jacobienne du modèle direct. C'est-à-dire, d'une part les composantes des paramètres n'ayant aucune influence sur les mesures, qu'il sera donc illusoire d'espérer identifier, et d'autre part les composantes des mesures qui ne sont pas influencées par les paramètres, qui sont donc inutiles pour l'inversion. Les calculs ayant été effectués en double précision, nous considérons comme nulles toutes les valeurs singulières relatives inférieures à 10^{-15}. Nous constatons donc que le noyau est de grande dimension dans le cas des seules mesures de monitoring, c'est-à-dire lorsque $\mu = 0$ (figure 6.2 en haut à gauche, courbe rouge du bas).

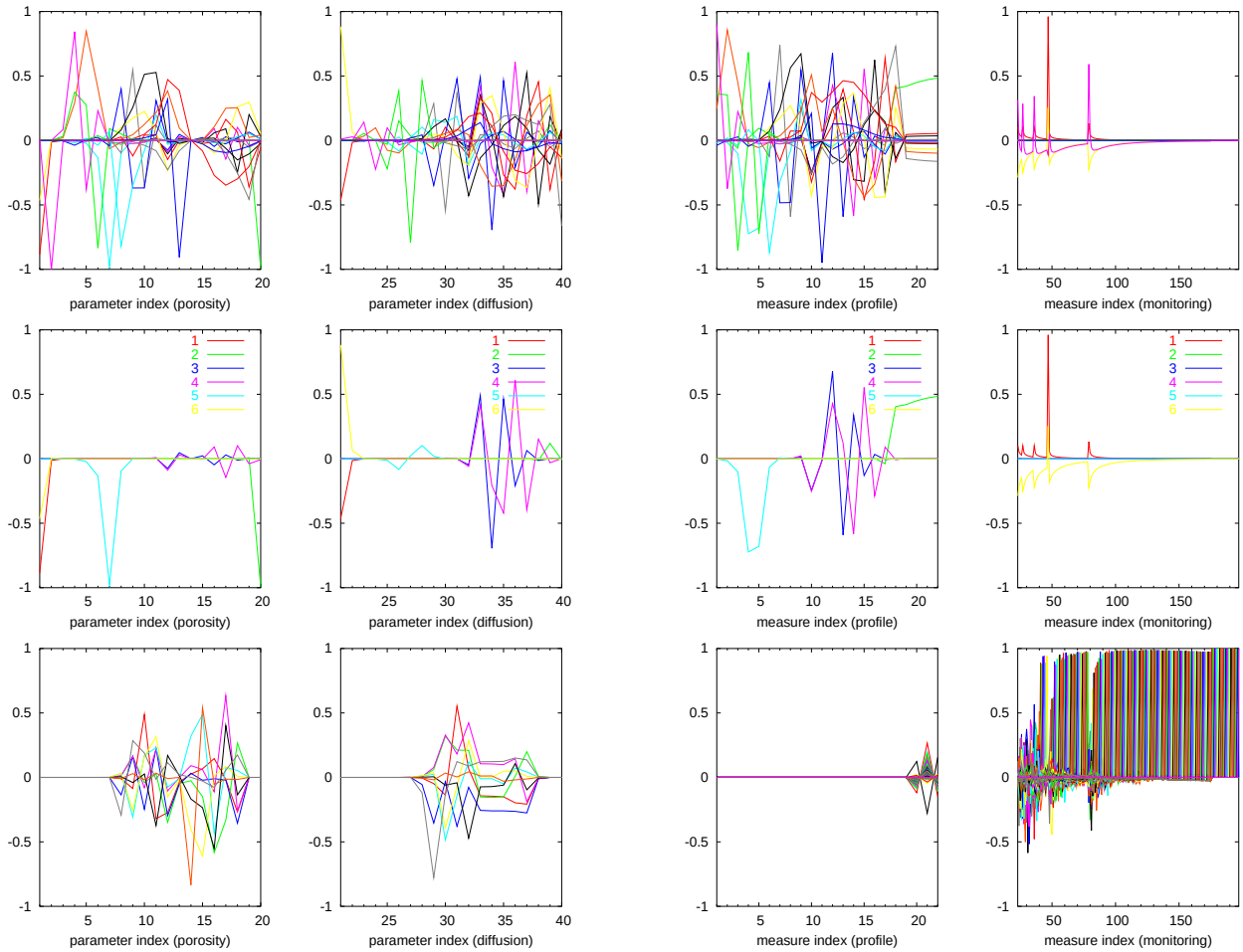


FIG. 6.3 – *Vecteurs singuliers pour les choix optimaux des poids et valeurs de normalisation, dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres (porosité puis diffusion), à droite : dans l'espace des mesures (temps final puis monitoring). En haut : vecteurs singuliers associés aux 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit de 1%, au milieu : vecteurs singuliers associés aux 6 premières valeurs singulières, en bas : vecteurs singuliers associés aux noyaux.*

La figure 6.3 regroupe les représentations des vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières à chaque extrémité du spectre singulier pour les valeurs « optimales » des poids ($\mu = 1$, $\nu = 0.1$) et des valeurs de normalisation ($\omega_0 = 0.1$, $D_0 = 10^{-11}$ m^2/s).

Bien évidemment, il y a peu de chance pour que les vecteurs singuliers correspondent exactement à des composantes des paramètres, ou des mesures. En général, les degrés de liberté identifiables de façon stable sont des combinaisons linéaires de ces composantes. Cependant, ce sont des vecteurs unitaires, donc si une valeur est très proche de 1, cela signifie que toutes les autres sont proches de 0. Par exemple, les courbes rouges du milieu de la figure 6.3 correspondent aux vecteurs singuliers associés à la plus grande valeur singulière : dans l'espace des paramètres (à gauche), cela correspond à une combinaison des valeurs de porosité et de diffusion dans la première zone, et dans l'espace des mesures (à droite), l'information est localisée dans les mesures de monitoring sur les instants de réinjection, principalement sur la troisième (les mesures de monitoring étant effectuées tous les 2 jours, la 47^e composante des mesures correspond bien à la mesure dans la chambre d'injection au 50^e jour).

Les courbes bleu ciel de la figure 6.2 annonçaient 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit de 1%. Visiblement, en haut à gauche de la figure 6.3, les 22 vecteurs singuliers associés dans l'espace

des paramètres sont à peu près régulièrement répartis sur tout le domaine spatial pour les parties de porosité *et* de diffusion (attestant ainsi d'une bonne normalisation des paramètres). Cependant, les vecteurs singuliers associés dans l'espace des mesures sont concentrés dans la partie mesure du profil au temps final. Cela signifie d'une part, que les mesures au temps final sont sensibles par rapport à la porosité et à la diffusion dans tout le domaine, et d'autre part, comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, que les mesures de monitoring ne sont sensibles qu'aux valeurs des paramètres dans la première zone.

D'après les courbes du bas de la figure 6.3, le noyau du modèle linéarisé contient essentiellement les valeurs des paramètres de porosité et de diffusion dans la deuxième moitié du domaine, et l'orthogonal de son image contient le détail des 3 dernières mesures du profil au temps final (la valeur moyenne des 4 ou 5 dernières valeurs étant dans la partie identifiable de façon stable) et la quasi-totalité des mesures de monitoring.

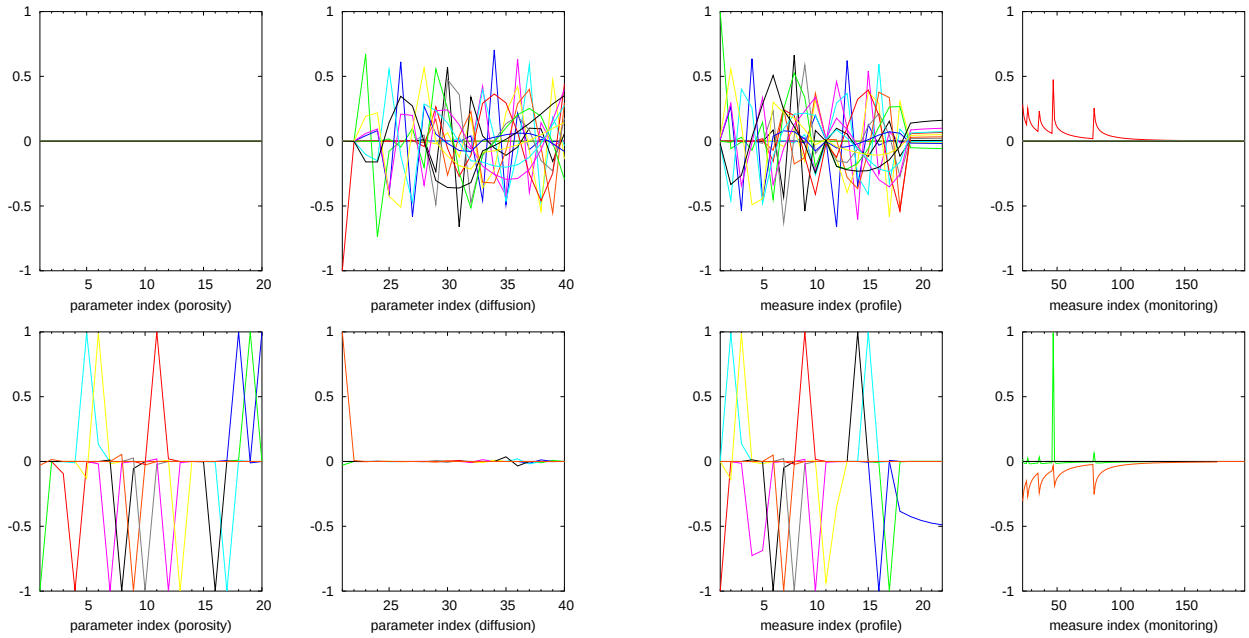


FIG. 6.4 – *Vecteurs singuliers pour d'autres valeurs de normalisation, dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones. En haut : $\omega_0 = 1$ et $D_0 = 1$ m^2/s, en bas : $\omega_0 = 1$ et $D_0 = 10^{-12}$ m^2/s. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures. Ne sont représentés que les vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit de 1%.*

La figure 6.4 illustre l'effet d'une mauvaise normalisation des paramètres. Tout en conservant une bonne quinzaine de degrés de liberté identifiables de façon stable, il est possible de transférer la sensibilité des mesures (qui reste essentiellement sur le profil au temps final) en totalité sur la diffusion (en haut, avec $\omega_0 = 1$ et $D_0 = 1$ m^2/s, c'est-à-dire pas de normalisation) ou bien sur la porosité (en bas, avec $\omega_0 = 1$ et $D_0 = 10^{-12}$ m^2/s). Il est toutefois intéressant de noter que dans le deuxième cas, les différentes valeurs des mesures au temps final dépendent chacune de la valeur de la porosité dans une seule zone.

Nous montrons enfin, dans la figure 6.5, l'effet d'un mauvais choix des poids sur les mesures. En haut et au milieu, pour $\mu = 1$ et $\nu = 0$, c'est-à-dire pour les seules mesures au temps final, les vecteurs singuliers sont très proches de ceux de la figure 6.3. La différence notable étant la disparition des mesures de monitoring, et donc de la première zone pour la porosité et la diffusion. Et en bas, pour $\mu = 0$ et $\nu = 1$, c'est-à-dire pour les seules mesures de monitoring, la sensibilité est localisée sur

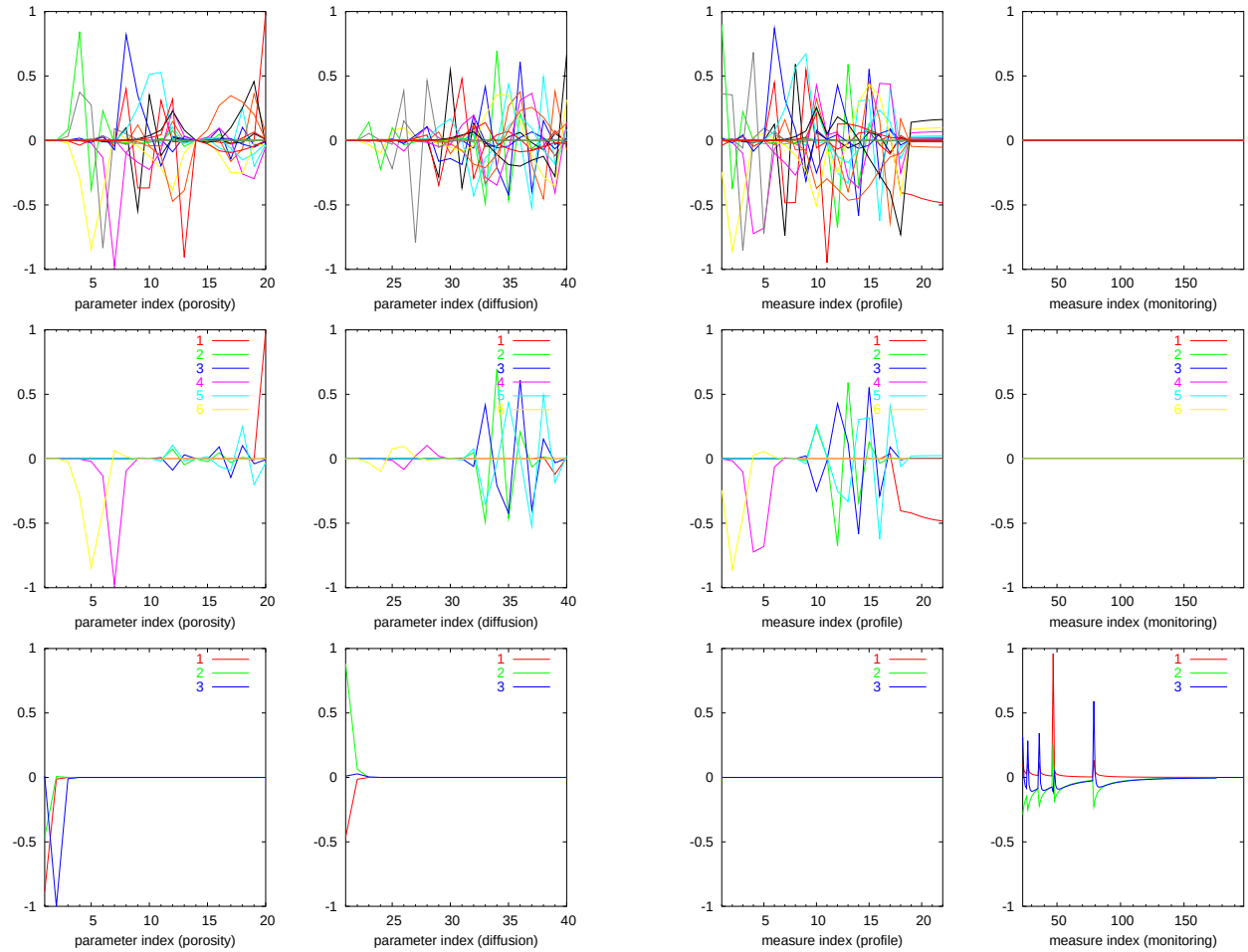


FIG. 6.5 – *Vecteurs singuliers pour d'autres poids, dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones. En haut, au milieu : $\mu = 1$ et $\nu = 0$ (vecteurs singuliers associés aux 19 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : $\mu = 0$ et $\nu = 1$ (vecteurs singuliers associés aux 3 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit). À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

les instants de réinjection, et est par rapport aux valeurs de porosité dans les 2 premières zones et à la valeur de diffusion dans la première zone.

6.1.2 Paramétrisation grossière à 3 zones

Les valeurs singulières pour l'étude de calibration dans le cas de la paramétrisation grossière sont représentées dans la figure 6.6.

Il n'y a pas de différences notables avec le cas de la paramétrisation fine concernant l'influence des poids μ et ν et des valeurs de normalisation ω_0 et D_0, nous avons donc conservé les mêmes valeurs « optimales » correspondant aux courbes bleu ciel.

Néanmoins, il est intéressant de remarquer que, pour ce choix, les 6 valeurs singulières relatives sont au-dessus du niveau de bruit de 1% (et même au-dessus de 8%). Cela signifie donc que les 6 composantes de la paramétrisation grossière sont tous identifiables de façon stable. Ainsi, la paramétrisation grossière ne retient que 6 combinaisons indépendantes des 40 composantes initiales de la paramétrisation fine, mais elles figurent toutes dans le sous-espace des paramètres (fins) identifiables de façon stable, qui est de dimension 22. Il devrait donc rester une certaine marge de manœuvre pour définir une

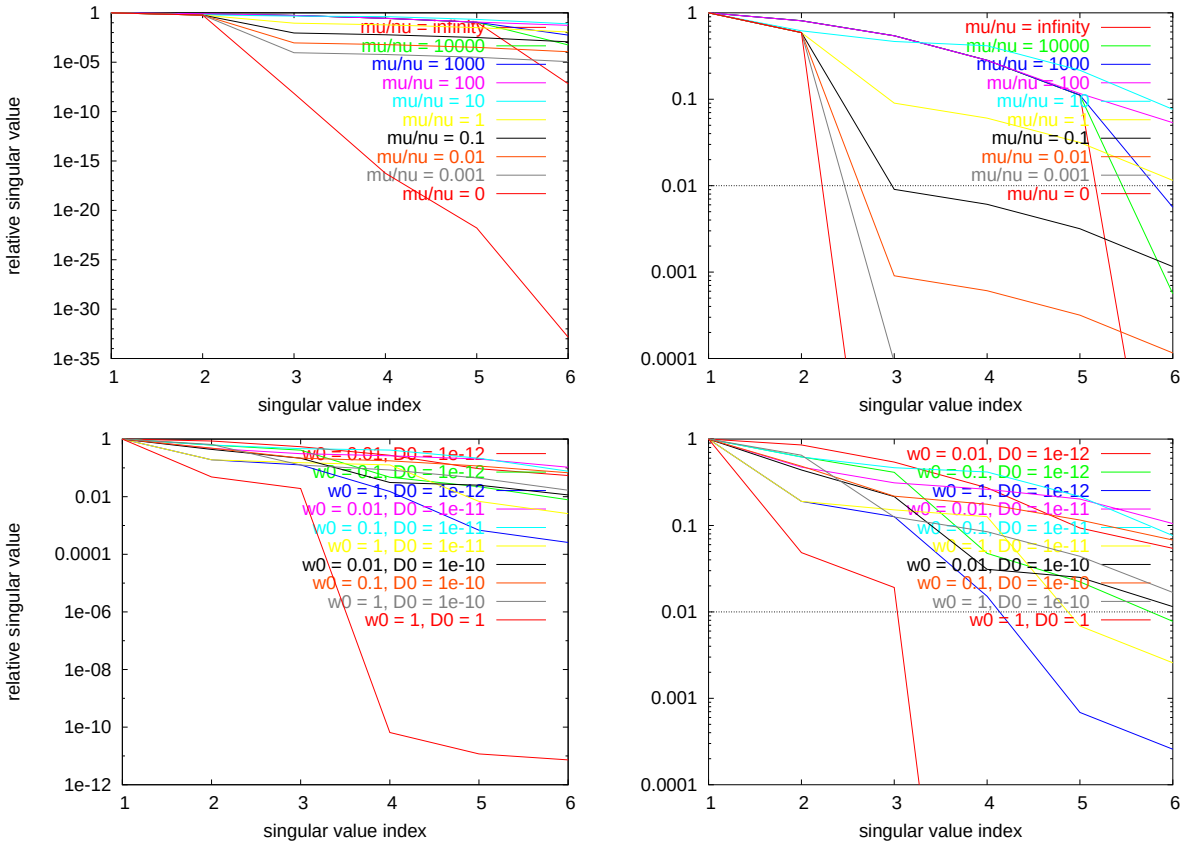


FIG. 6.6 – *Valeurs singulières pour différents choix des poids μ et ν sur les mesures et des valeurs de normalisation ω_0 et D_0 pour les paramètres, dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. En haut : variation des poids pour $\omega_0 = 0.1$ et $D_0 = 10^{-11}$ m^2/s, en bas : variation des valeurs de normalisation pour $\mu = 1$ et $\nu = 0.1$. Sur les zooms à droite, un niveau de bruit de 1% est indiqué.*

paramétrisation intermédiaire ne comportant que des degrés de liberté identifiables de façon stable. Cependant, une telle paramétrisation « optimale » n'est pas nécessaire dans le cadre de la présente étude où les différentes zones servent surtout à représenter l'endommagement dû au forage, qui reste local.

Dans un tel cas simple de dimension 6, il est possible d'être exhaustif dans l'étude des vecteurs singuliers (de l'espace des paramètres).

Par exemple, dans la figure 6.7 (associée aux choix optimaux des poids et valeurs de normalisation), les 6 vecteurs singuliers de l'espace des paramètres (en haut à gauche) correspondent à peu près à des combinaisons très simples des composantes de la paramétrisation grossière. Dans l'ordre, nous avons : la porosité dans la première zone (en rouge), puis la porosité dans la troisième zone (en vert), la diffusion dans la première zone (en bleu foncé), la porosité dans la deuxième zone (en rose), le saut de diffusion entre les zones 2 et 3 (en bleu ciel) et enfin la moyenne de la diffusion sur ces zones 2 et 3 (en jaune). Tous ces degrés de liberté étant identifiables de façon stable avec un niveau de bruit de 1%, toutes les composantes de la paramétrisation grossière seront retrouvées, mais elles le seront dans l'ordre décrit ci-dessus. Bien évidemment, le noyau est réduit à zéro (en bas à gauche).

Dans l'espace des mesures (en haut à droite), la principale différence avec la paramétrisation fine est la dépendance de la moyenne des 6 premières mesures du profil au temps final par rapport à la valeur de la porosité dans la première zone (en rouge), la sensibilité des mesures de monitoring étant toujours localisée sur les réinjection et principalement sur la troisième. L'orthogonal de l'image (en bas

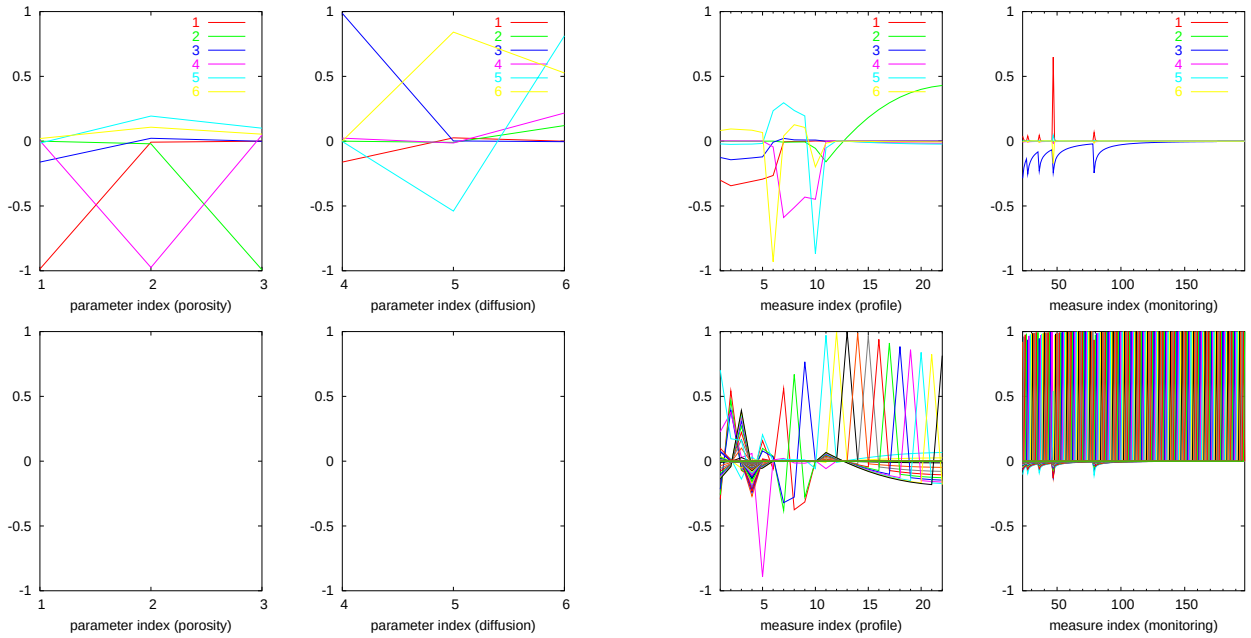


FIG. 6.7 – *Vecteurs singuliers pour le choix optimal des poids et valeurs de normalisation, dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres (porosité puis diffusion), à droite : dans l'espace des mesures (temps final puis monitoring). En haut : vecteurs singuliers associés aux 6 valeurs singulières, en bas : vecteurs singuliers associés aux noyaux.*

à droite) est, bien sûr, renforcé. En particulier une grande part des mesures du profil au temps final devient inutile pour l'inversion.

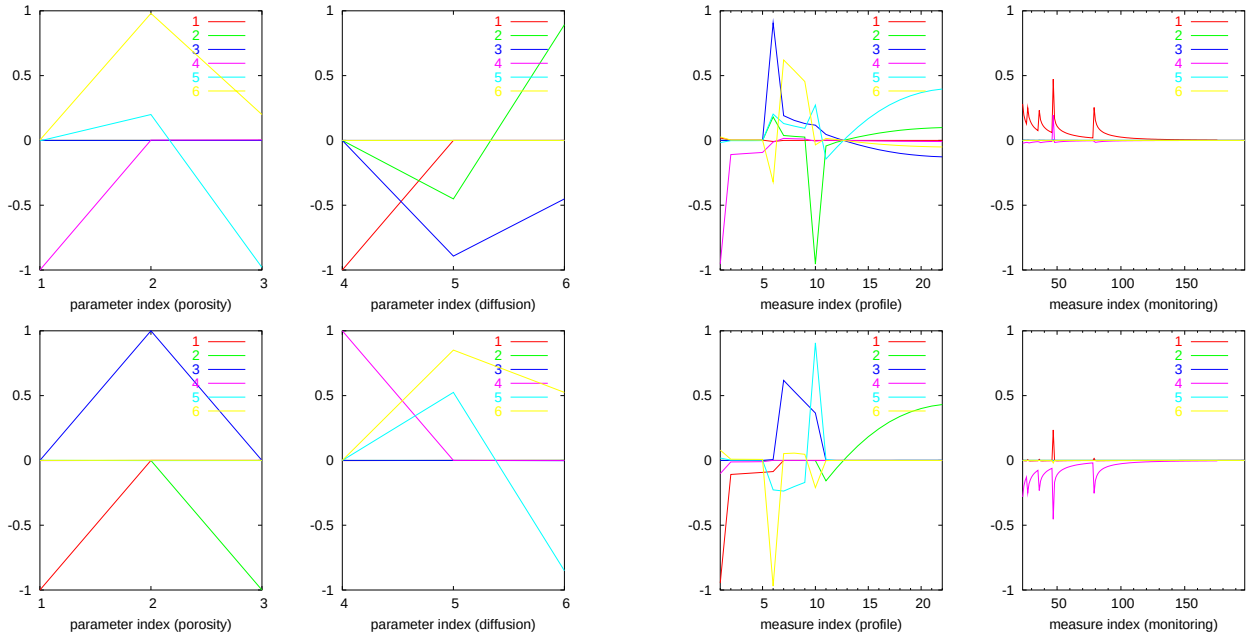


FIG. 6.8 – *Vecteurs singuliers pour d'autres valeurs de normalisation, dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. En haut :* $\omega_0 = 1$ *et* $D_0 = 1$ m^2/s, *en bas :* $\omega_0 = 1$ *et* $D_0 = 10^{-12}$ m^2/s. *À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

Dans la figure 6.8, de même qu'avec la paramétrisation fine, modifier les valeurs de normalisation permet de donner plus d'influence aux valeurs de la diffusion (en haut, pour $\omega_0 = 1$ et $D_0 = 1$ m^2/s), ou à celles de la porosité (en bas, pour $\omega_0 = 1$ et $D_0 = 10^{-12}$ m^2/s). Dans ces deux cas, il n'y a respectivement que 3 et 4 valeurs singulières relatives au-dessus du niveau de bruit de 1% (deux courbes du bas, en rouge et en bleu foncé, de la figure 6.6 en bas à droite).

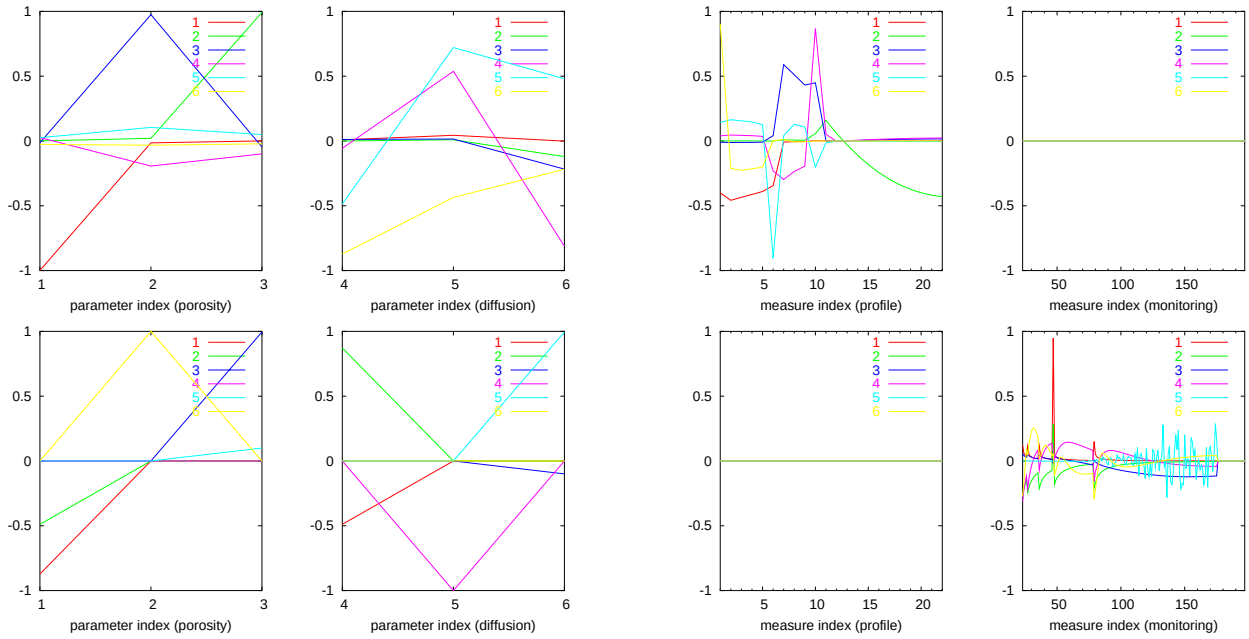


FIG. 6.9 – *Vecteurs singuliers pour d'autres poids, dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. En haut : $\mu = 1$ et $\nu = 0$, en bas : $\mu = 0$ et $\nu = 1$. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

Dans la figure 6.9, seuls les 5 premiers vecteurs singuliers (en haut) et les 2 premiers (en bas) sont associés à des valeurs singulières relatives au-dessus du niveau de bruit de 1%.

6.2 Analyse locale en d'autres points

L'analyse de sensibilité étant effectuée à partir d'une information du premier ordre (matrice jacobienne), elle reste locale au point considéré. Pour des mesures expérimentales, la solution du problème inverse n'est pas connue et l'analyse de sensibilité ne peux donc être menée que pour le point initial, et éventuellement a posteriori pour le point final. Il est donc très important d'appréhender la non-linéarité du modèle direct, ce qui nous permettra, ou non, d'extrapoler les conclusions de l'analyse de sensibilité à tout l'espace.

Pour ce faire, nous recommençons l'analyse de sensibilité en différents points (différentes valeurs du paramètre $p = (\omega, D)$) pour les deux paramétrisations (fine et grossière) en considérant des perturbations du milieu de référence : tout d'abord un milieu homogène correspondant à la première couche, puis une modification des valeurs de porosité et/ou de diffusion et enfin une modification de l'épaisseur des couches. Le dernier test concerne une extension du modèle physique à des valeurs de porosité plus grandes que 1, ce qui correspond à la prise en compte d'un terme de retard constant. Dans tous les cas, la géométrie du problème reste la même, y compris le dispositif d'acquisition des mesures.

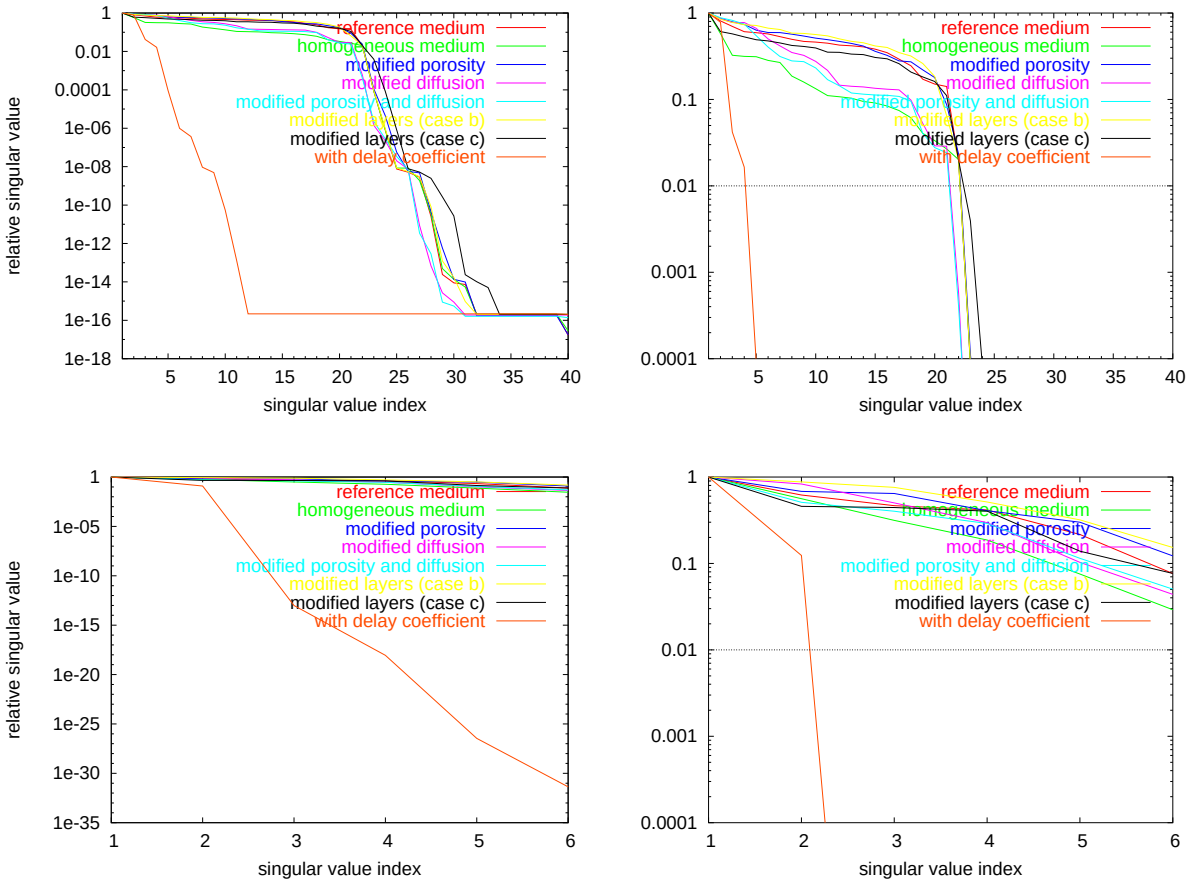


FIG. 6.10 – *Valeurs singulières en différents points de l'espace des paramètres (pour les choix optimaux des poids et valeurs de normalisation). En haut : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones, en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. Sur les zooms à droite, un niveau de bruit de 1% est indiqué.*

Les courbes de décroissance des valeurs singulières pour les différents points considérés et pour les deux paramétrisations sont représentées dans la figure 6.10. Ces courbes sont très proches les unes des autres. En particulier, pour un niveau de bruit de 1%, il y a toujours 21 ou 22 valeurs singulières

relatives au-dessus de ce bruit avec la paramétrisation fine à 20 zones, et 6 avec la paramétrisation grossière à 3 zones. À l'exclusion notable du cas avec coefficient de retard qui semble singulièrement différent puisque le nombre de degrés de liberté identifiables de façon stable $K_{1\%}$ chute respectivement à 4 et 2 avec les deux paramétrisations.

6.2.1 Cas homogène

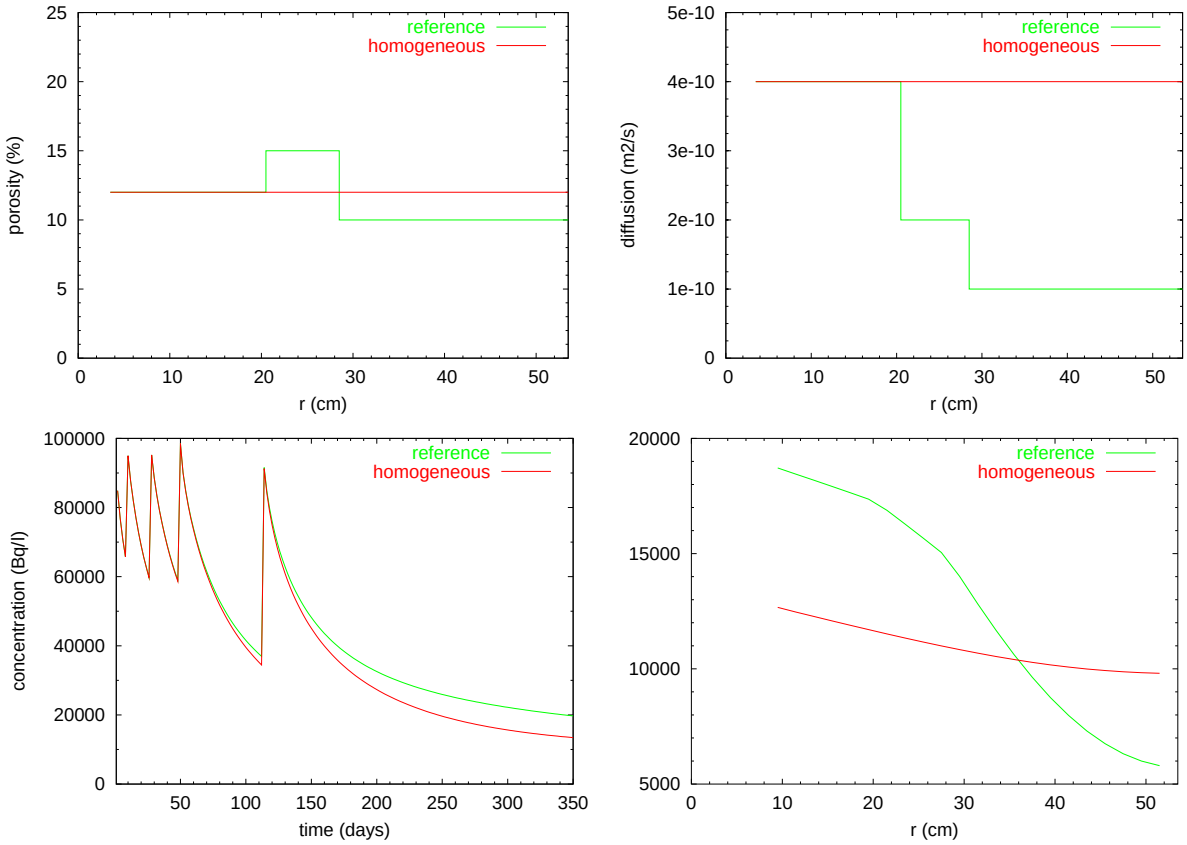


FIG. 6.11 – *Milieu homogène. En haut : le paramètre avec à gauche la porosité et à droite la diffusion. En bas : les mesures avec à gauche le monitoring et à droite le profil au temps final.*

Le cas homogène revient à étendre les valeurs de la première couche à la totalité du milieu, voir figure 6.11 (en haut). La valeur de la diffusion est donc plus élevée dans les couches 2 et 3 que pour le milieu de référence. Les mesures de concentration sont légèrement plus faibles au voisinage de la chambre d'injection et diminue moins rapidement en s'en éloignant, voir même figure (en bas). Ce qui correspond bien à une diffusion plus rapide dans tout le milieu.

Pour la paramétrisation fine à 20 zones, les vecteurs singuliers associés aux 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit de 1% (figure 6.12, en haut) sont qualitativement proches de ceux pour le milieu de référence (figure 6.3, en haut). Plus précisément, les vecteurs singuliers associés à la première valeur singulière sont identiques, mais les suivants ne semblent pas dans le même ordre (mêmes figures, au milieu). Il est à noter que lorsque les valeurs singulières décroissent lentement, l'ordre relatif des éléments singuliers est peu significatif.

Pour la paramétrisation grossière à 3 zones, la ressemblance est encore plus forte puisque la principale différence entre les figures 6.12 (en bas) et 6.7 (en haut) consiste en la seule permutation des éléments singuliers 2 (en vert) et 3 (en bleu foncé).

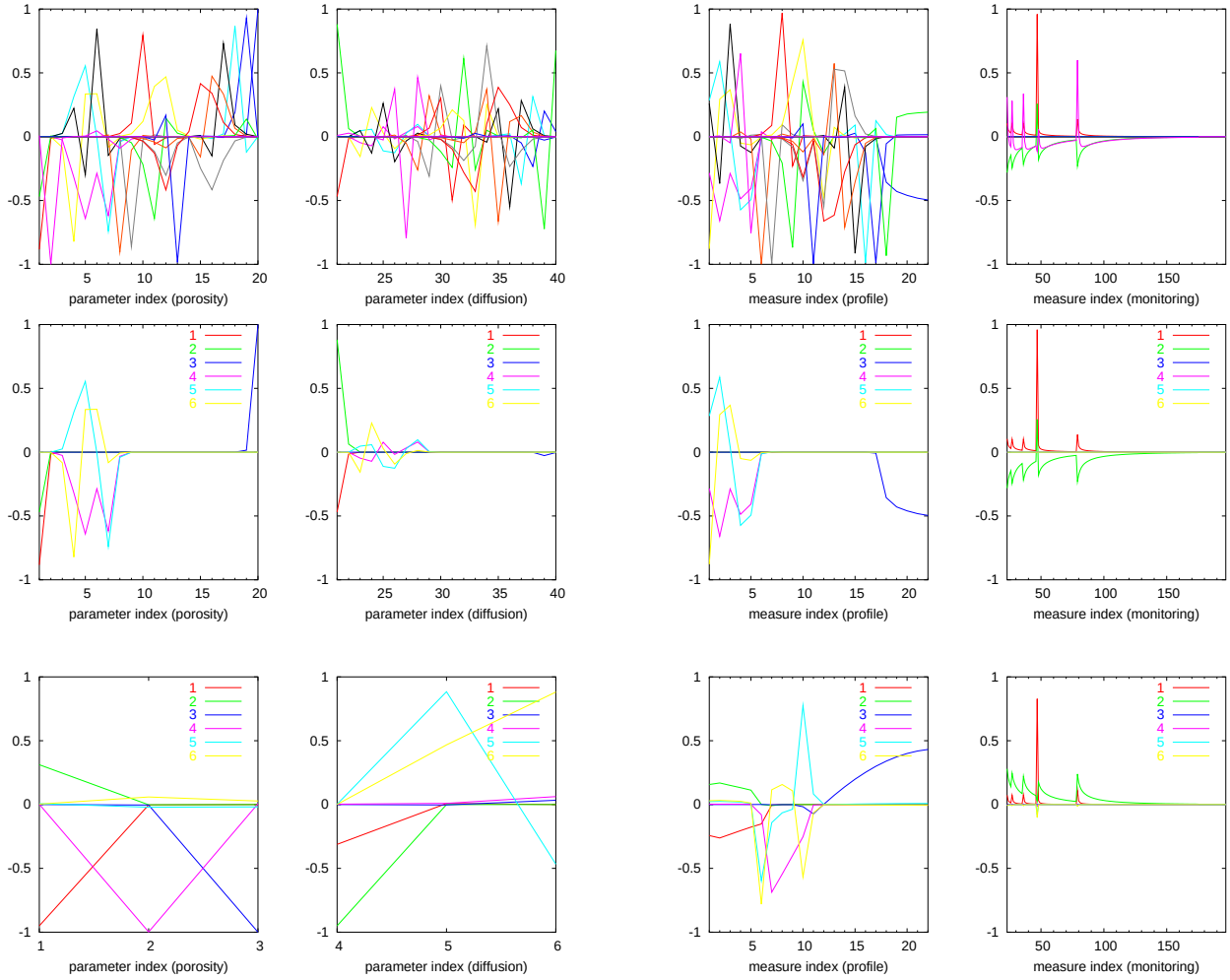


FIG. 6.12 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à un milieu homogène. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

6.2.2 Modification des valeurs de la porosité et/ou de la diffusion

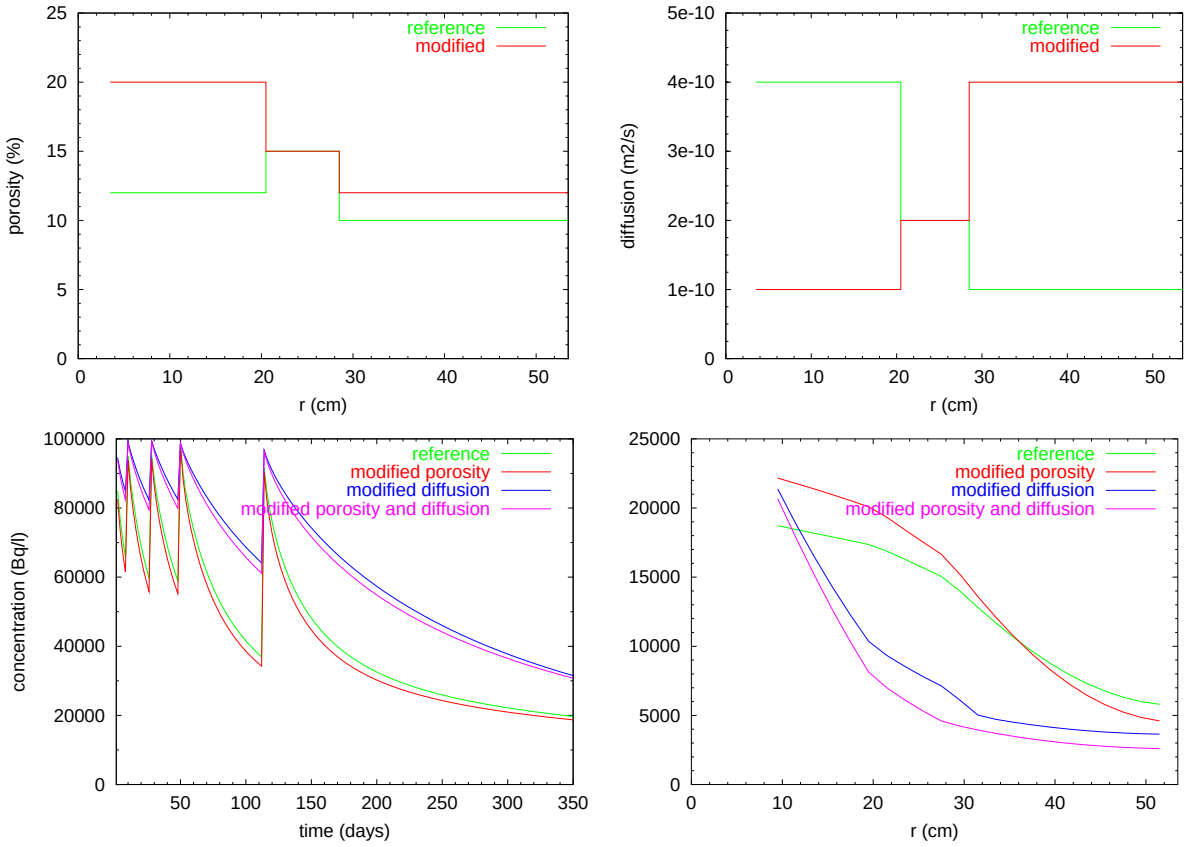


FIG. 6.13 – *Milieu avec propriétés physiques perturbées. En haut : le paramètre avec à gauche la porosité et à droite la diffusion. En bas : les mesures avec à gauche le monitoring et à droite le profil au temps final.*

L'expérience numérique suivante consiste à conserver la structure en 3 couches du milieu de référence, mais à modifier les valeurs des paramètres dans chaque couche. La porosité est ainsi augmentée dans les couches 1 et 3 et les coefficients de diffusion de ces mêmes couches sont permutées, voir figure 6.13 (en haut). Lorsque la porosité est augmentée à diffusion constante, la concentration s'en trouve uniformément légèrement diminuée, voir même figure (en bas, en rouge). Par contre, si les valeurs de diffusion dans les couches 1 et 3 sont échangées à porosité constante, la concentration est augmentée au voisinage de la chambre d'injection et diminue beaucoup plus rapidement en s'en éloignant, voir même figure (en bas, en bleu). Si l'on procède aux deux perturbations simultanément, les deux effets s'ajoutent, mais l'influence de la perturbation de la diffusion l'emporte, voir même figure (en bas, en rose).

Les vecteurs singuliers pour les deux paramétrisations (fine et grossière) sont représentés dans les figures 6.14 à 6.16. La perturbation de porosité étant de faible portée sur les mesures, nous observons naturellement que les courbes de la figure 6.14 sont très proches de celles pour le milieu de référence (figures 6.3 et 6.7), et d'autre part que les figures 6.15 et 6.16 sont également très semblables. Nous ne commenterons donc que la figure 6.15.

Visiblement, les degrés de liberté identifiables de façon stables dans le cas de la paramétrisation fine (courbes du haut, à comparer à celles de la figure 6.3) sont toujours régulièrement répartis spatialement sur tout le domaine et influencent toujours majoritairement les mesures du profil au temps final, également sur tout le domaine spatial. On note toutefois une légère perte de sensibilité par rapport à

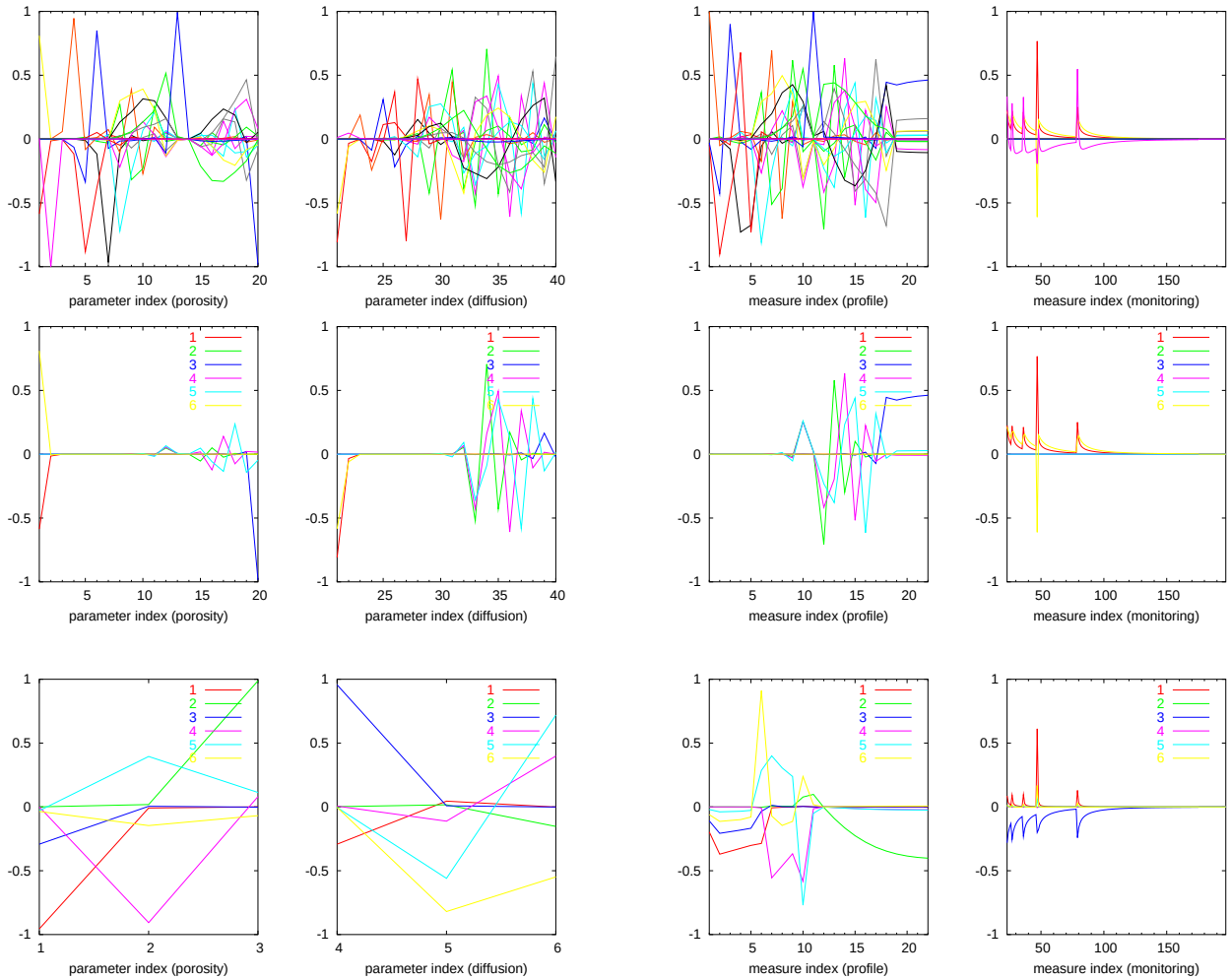


FIG. 6.14 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à une modification de la porosité du milieu de référence. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

la porosité dans la première moitié du domaine dans les deux cas où la diffusion est perturbée, avec en particulier la perte de la plus grande sensibilité pour la valeur de la porosité dans la première zone, qui reste néanmoins attachée à une influence sur les instants de réinjection dans les mesures de monitoring et principalement sur la troisième.

Le décalage vers la gauche du domaine des zones de plus grande sensibilité par rapport aux paramètres (courbes du milieu, toujours à comparer avec celles de la figure 6.3) peut s'expliquer par le fait que la diffusion ayant été fortement diminuée dans la première couche, le marqueur se déplace beaucoup moins vite. Le calage de la position de cette zone de plus grande sensibilité pourrait être obtenu en choisissant le temps final à partir d'une estimation a priori de la diffusion moyenne du milieu.

Concernant la paramétrisation grossière à 3 zones (courbes du bas, à comparer cette fois aux courbes du haut de la figure 6.7), nous observons une permutation de l'ordre des différents éléments singuliers, mais les 6 composantes des paramètres restent identifiables de façon stable avec 1% de bruit. Toutefois, notons la disparition de la forte sensibilité de la troisième réinjection dans les mesures de monitoring.

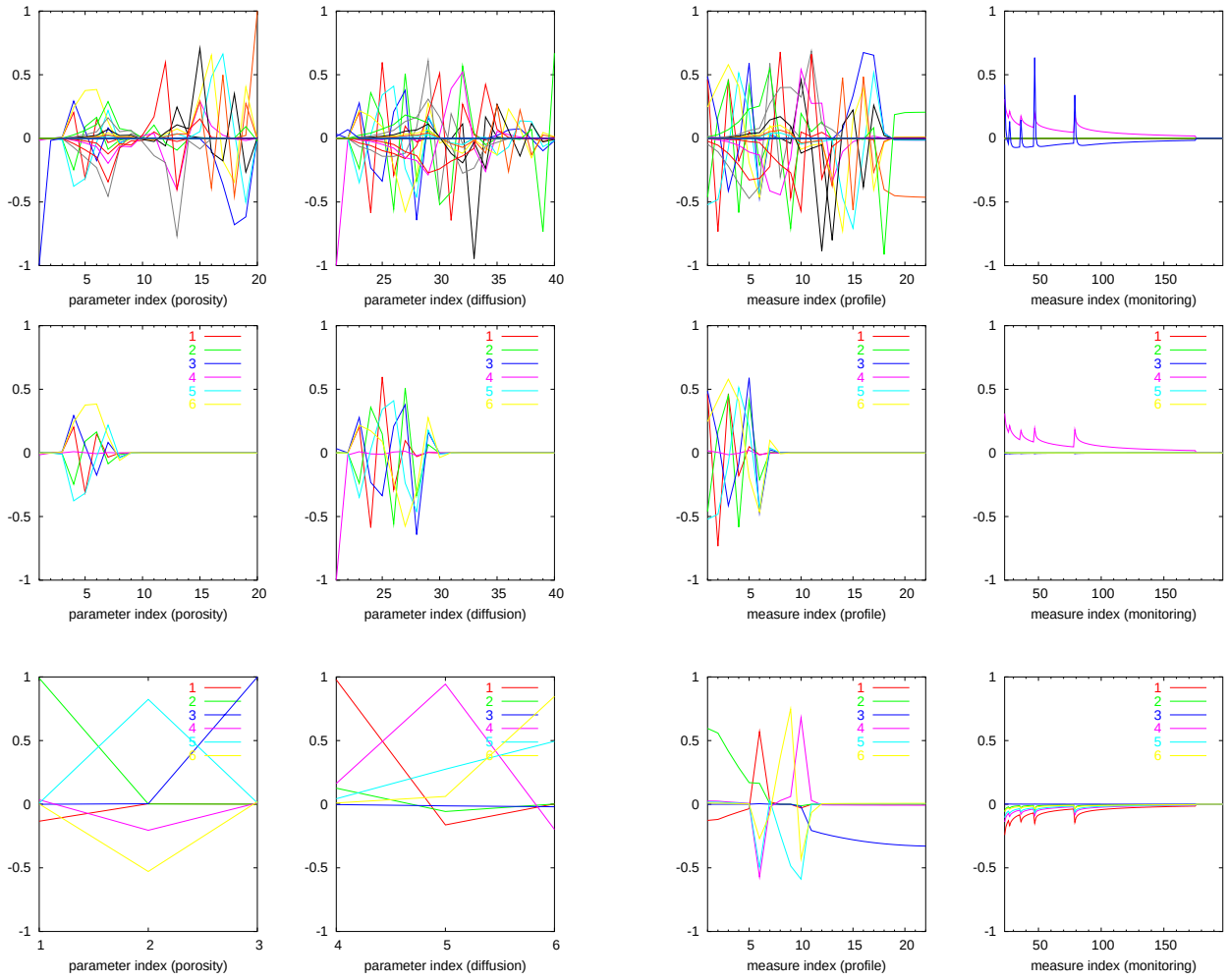


FIG. 6.15 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à une modification du coefficient de diffusion du milieu de référence. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 21 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

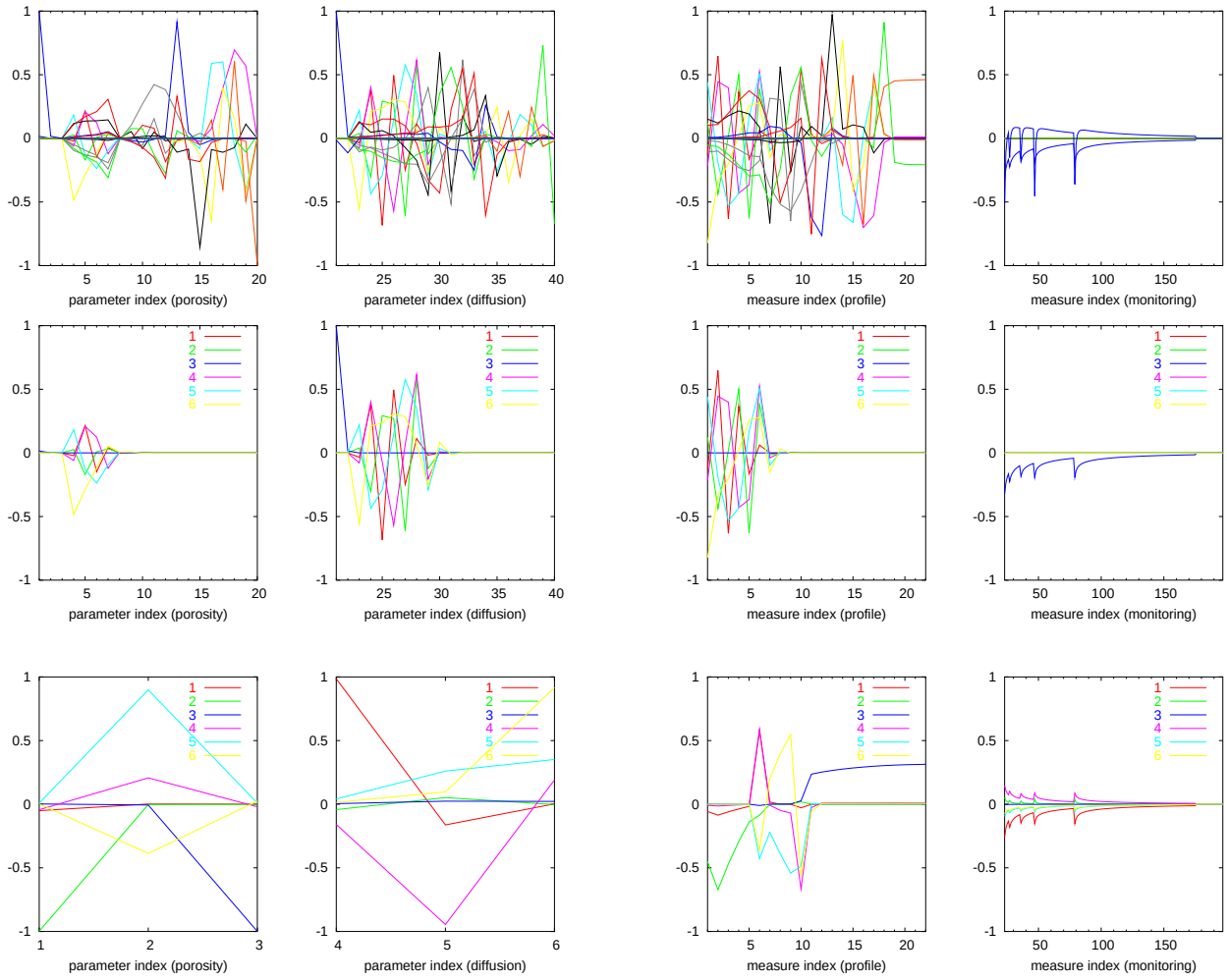


FIG. 6.16 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à une modification de la porosité et du coefficient de diffusion du milieu de référence. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 21 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

6.2.3 Modification de la taille des couches

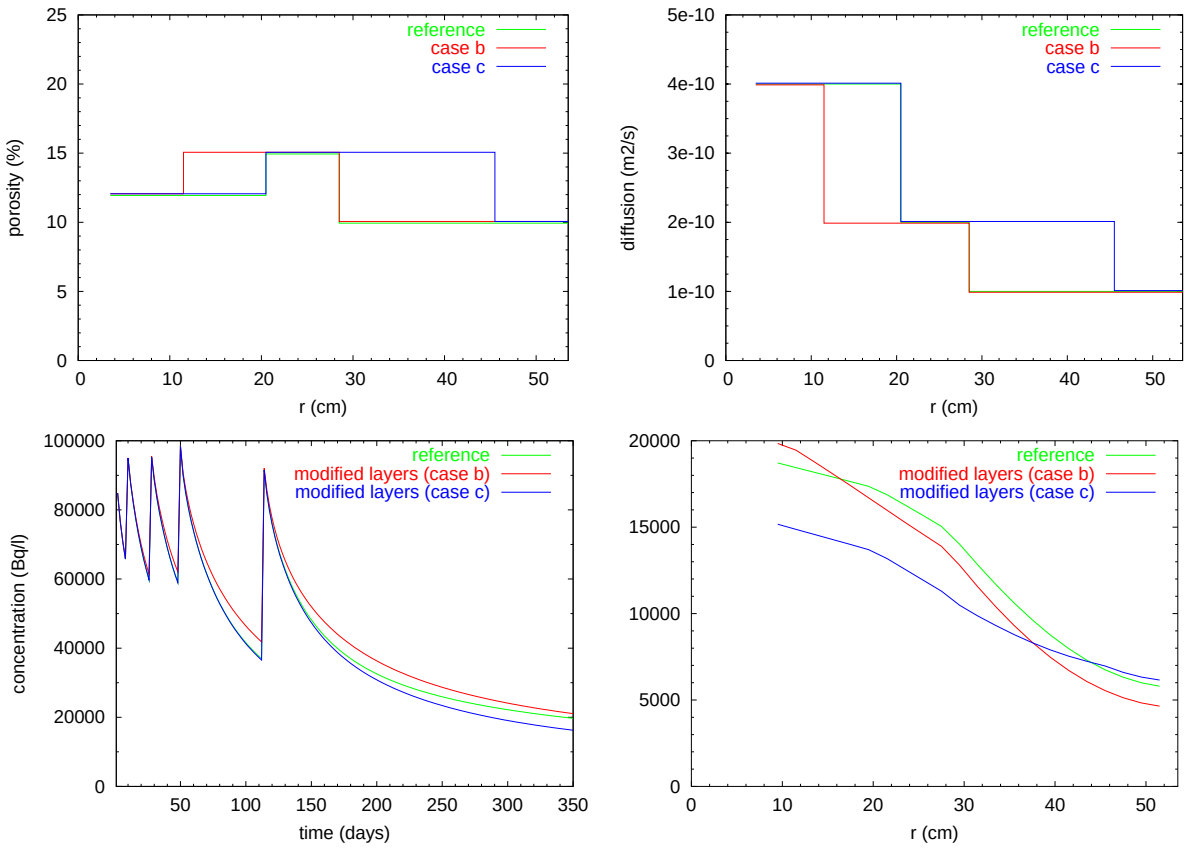


FIG. 6.17 – *Milieu avec épaisseur des couches modifiée. En haut : le paramètre avec à gauche la porosité et à droite la diffusion. En bas : les mesures avec à gauche le monitoring et à droite le profil au temps final.*

Nous avons enfin conservé les valeurs des paramètres physiques, mais modifié la structure en 3 couches du milieu de référence. Pour le cas b, les épaisseurs des couches 1 et 2 sont échangées, et pour le cas c, ce sont celles des couches 2 et 3 qui sont échangées, voir figure 6.17 (en haut). Dans le cas b, la moindre différence des épaisseurs des deux premières couches fait que les mesures de concentration restent proches de celles pour le milieu de référence, par contre, dans le cas c, où la diffusion est doublée dans la couche centrale, les mesures du profil au temps final sont plus faibles dans la partie gauche du domaine, voir figure 6.17 (en bas).

Les vecteurs singuliers pour les deux paramétrisations (fine et grossière) sont représentés dans les figures 6.18 et 6.19, ils sont à comparer au cas du milieu de référence représentés dans les figures 6.3 (en haut et au milieu) et 6.7 (en haut).

Visuellement, ces courbes semblent très proches, avec des décalages en espace qui peuvent être expliqués par une diffusion plus ou moins forte. Dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones, nous observons encore une permutation de l'ordre des éléments singuliers, qui n'a toujours pas d'incidence majeure pour l'inversion puisque la totalité des degrés de liberté sont identifiables de façon stable avec un niveau de bruit de 1%.

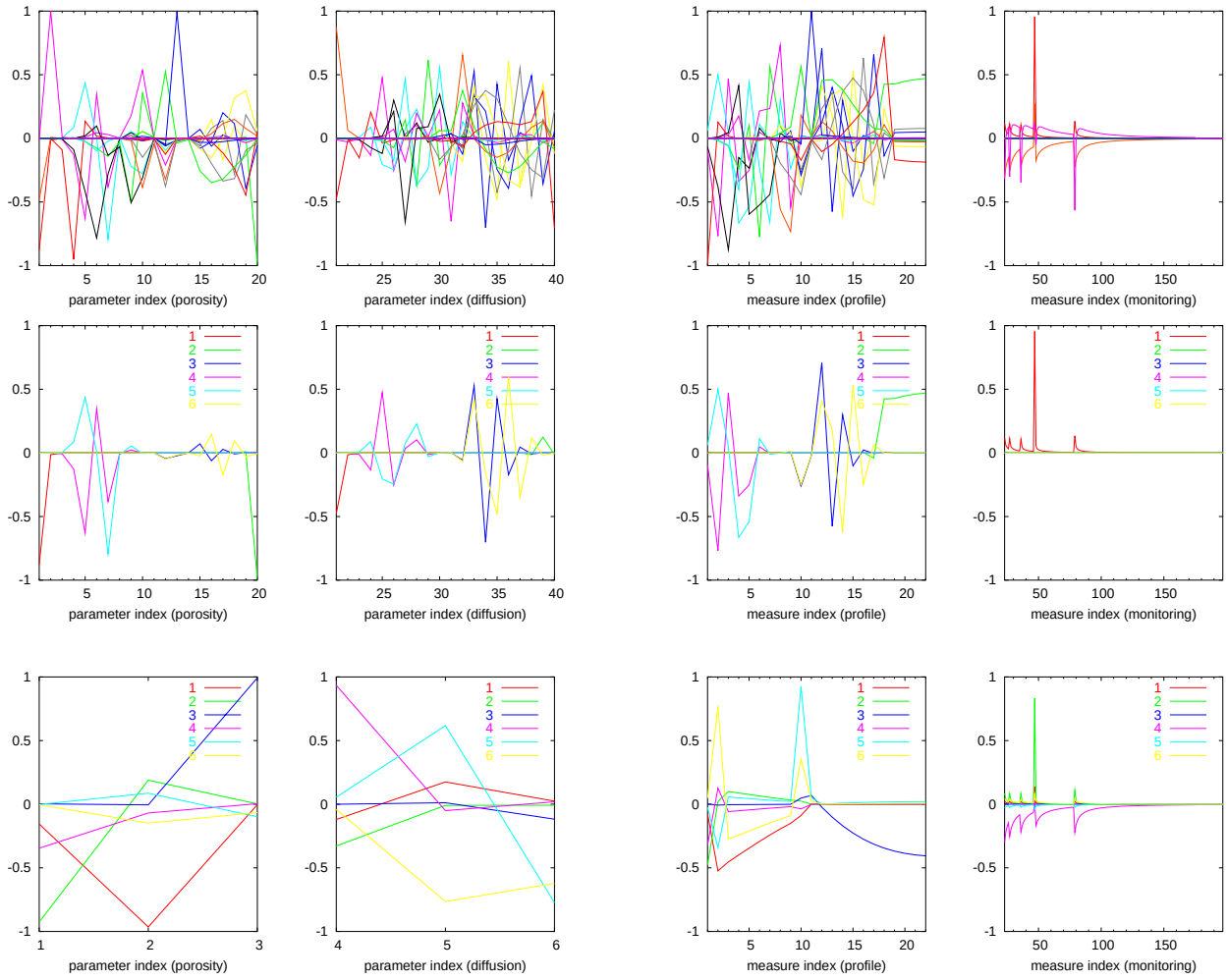


FIG. 6.18 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à une modification de la taille des couches du milieu de référence (cas b). En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

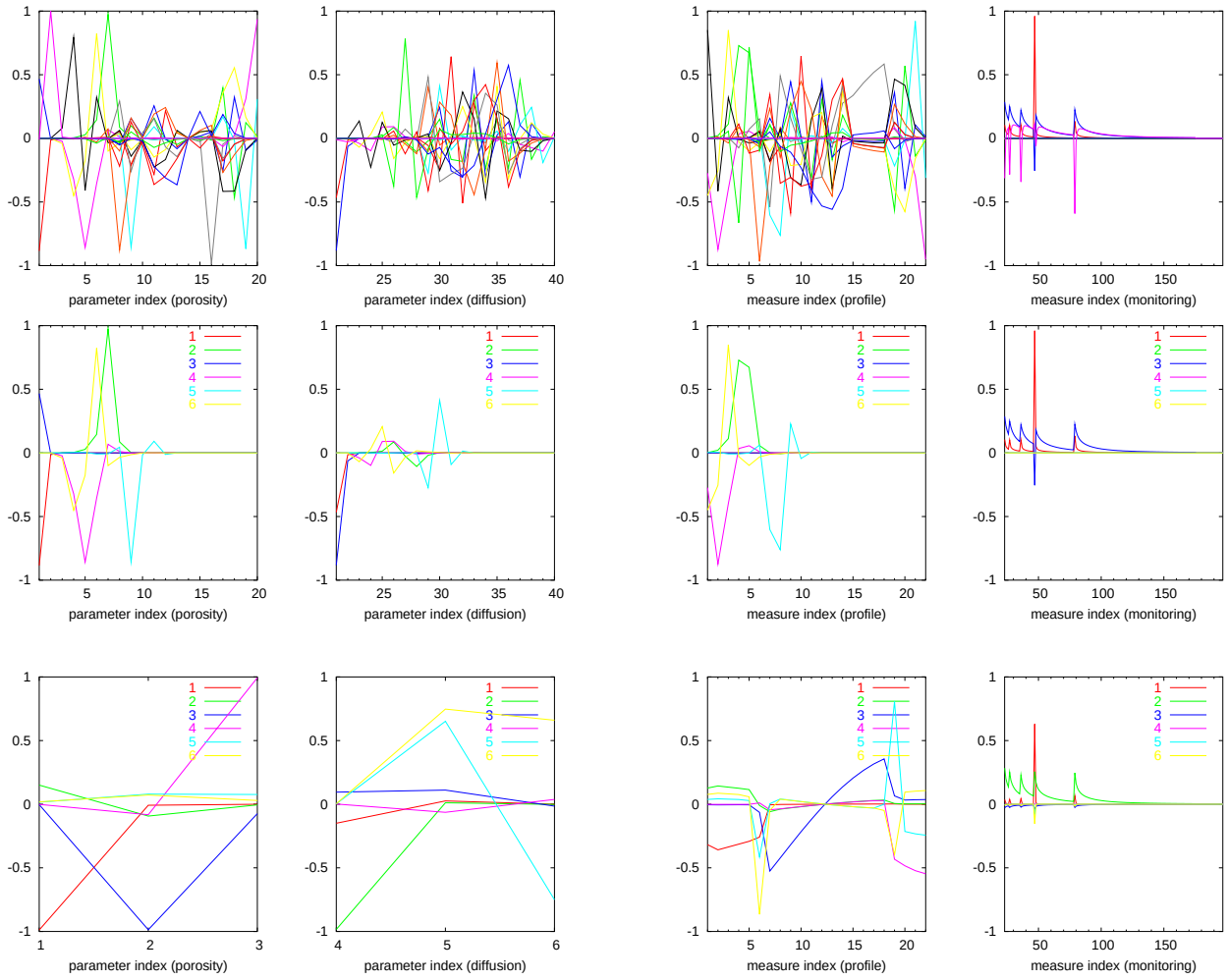


FIG. 6.19 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à une modification de la taille des couches du milieu de référence (cas c). En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 22 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

6.2.4 Extension du modèle physique : porosité très grande

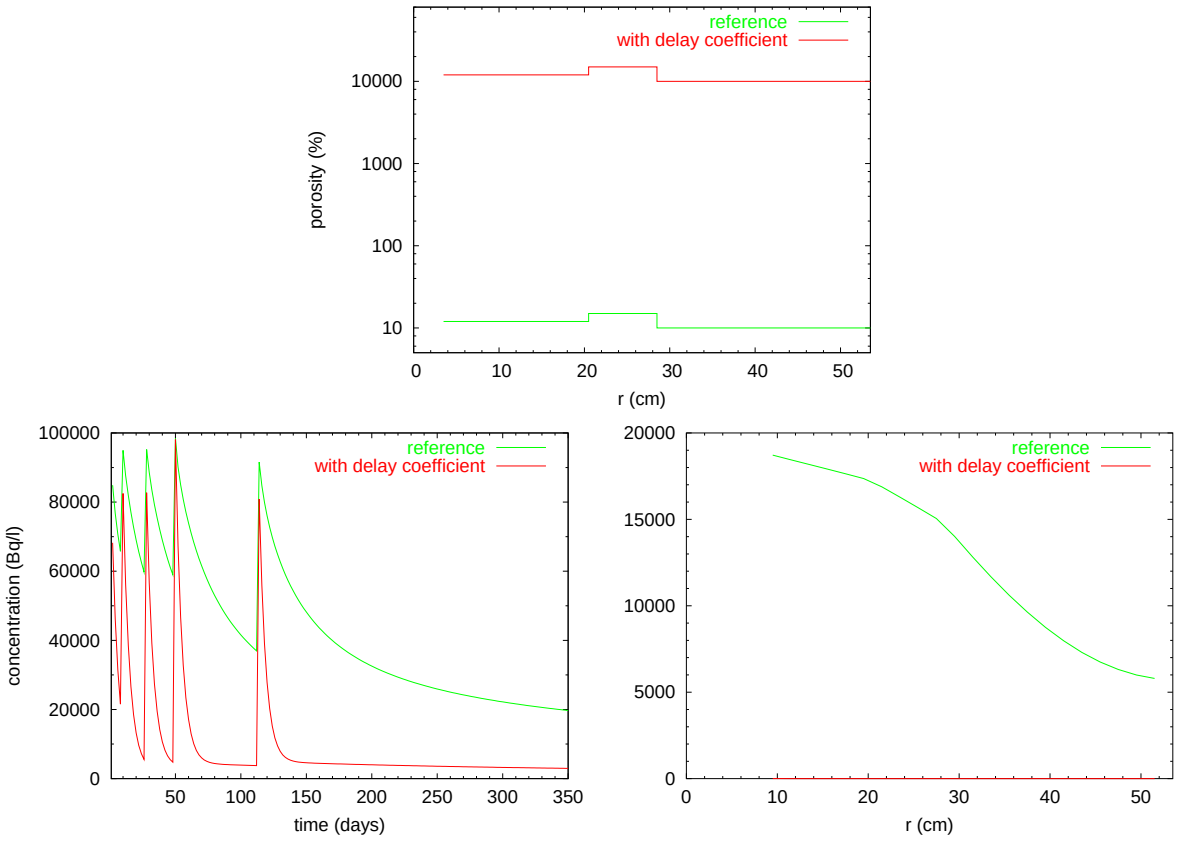


FIG. 6.20 – *Milieu présentant une porosité fictive correspondant à une multiplication de la valeur de référence par le coefficient de retard homogène $R = 1000$. En haut : porosité. En bas : les mesures avec à gauche le monitoring et à droite le profil au temps final.*

La dernière expérience numérique sur l'exploration de la non-linéarité du modèle direct a porté sur une extension du modèle physique : nous avons considéré des valeurs de porosité bien supérieures à 1, ce qui peut s'interpréter comme la prise en compte d'un coefficient de retard constant. Ce coefficient a été pris égal à 1000, voir figure 6.21 (en haut). Dans ce cas, la concentration décroît très vite après chaque injection et les mesures du profil au temps final sont très faibles, voir figure 6.21 (en bas).

Bien sûr, étant données les grandes différences de grandeur par rapport au milieu de référence, nous avons procédé à une nouvelle recherche de poids et de valeurs de normalisation adaptés au cas présent. Le rapport des normes L^2 des deux types de mesure nous suggère de prendre $\mu = 1$ et $\nu = 1.6\,10^{-5}$ et les valeurs moyennes des paramètres physiques $\omega_0 = 115$ et $D_0 = 2\,10^{-10}$ m^2/s. Cependant, il est possible de gagner un degré de liberté identifiable de façon stable pour la paramétrisation fine à 20 zones en choisissant : $\mu = 1$, $\nu = 0.01$, $\omega_0 = 1000$ et $D_0 = 10^{-14}$ m^2/s. Avec ces valeurs, nous n'obtenons que $K_{1\%} = 4$ pour la paramétrisation fine et $K_{1\%} = 2$ pour la paramétrisation grossière.

Les vecteurs singuliers pour les deux paramétrisations sont représentés dans la figure 6.21, ils sont à comparer à ceux des figures 6.3 et 6.7 (en haut).

Visiblement la sensibilité a fortement chuté. Avec la paramétrisation fine (en haut), seules les valeurs de la porosité dans les zones 1, 3 et 4 et celle de la diffusion dans la zone 1 sont identifiables de façon stable. De plus, seules les deux premières mesures du profil au temps final (donc dans la partie endommagée) et deux combinaisons des mesures de monitoring sont utiles pour l'inversion. Ces deux combinaisons sont, d'une part la moyenne des mesures aux instants de réinjection, et d'autre

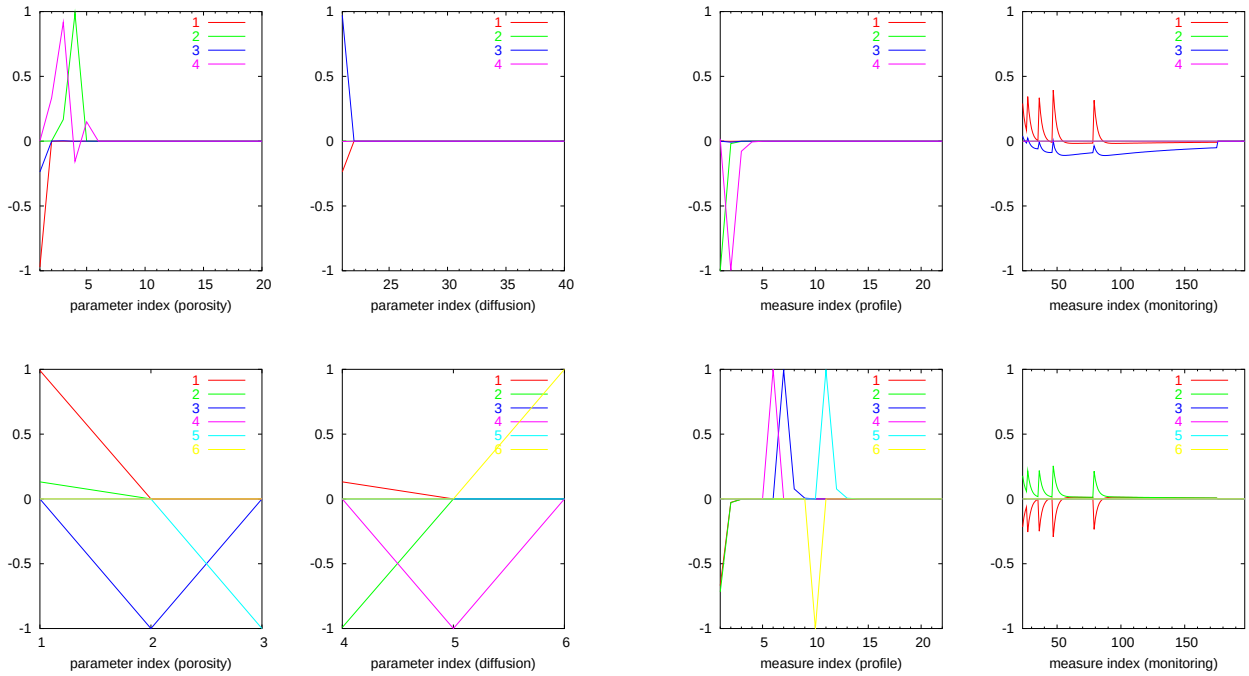


FIG. 6.21 – *Vecteurs singuliers en un point correspondant à une porosité* $\omega \gg 1$, *avec* $\mu = 1$, $\nu = 0.1$, $\omega_0 = 1000$ *et* $D_0 = 10^{-14}$ m^2/s. *En haut : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 4 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

part la moyenne des mesures aux autres instants. Avec la paramétrisation grossière (en bas), seules les valeurs de la porosité et de la diffusion dans la première zone sont identifiables de façon stable, et elles n'influencent que la première mesure du profil au temps final et les mesures de monitoring aux instants de réinjection.

6.3 Modification du dispositif expérimental

La dernière série d'expériences numériques concerne le dispositif d'acquisition. Il est très facile de tester numériquement si une modification de ce dispositif entraîne une amélioration ou non de la sensibilité des mesures par rapport aux paramètres recherchés. Cela procure donc un moyen très peu coûteux pour perfectionner un dispositif expérimental, le seul coût étant d'adapter les états direct et adjoint au nouveau dispositif.

Dans cet optique, nous avons testé les modifications suivantes : une seule injection, une injection constante, suppression des mesures dans la partie endommagée et enfin prise en compte d'un dispositif plus réaliste pour les mesures du profil au temps final. Dans tous les cas, nous avons bien sûr conservé le milieu de référence.

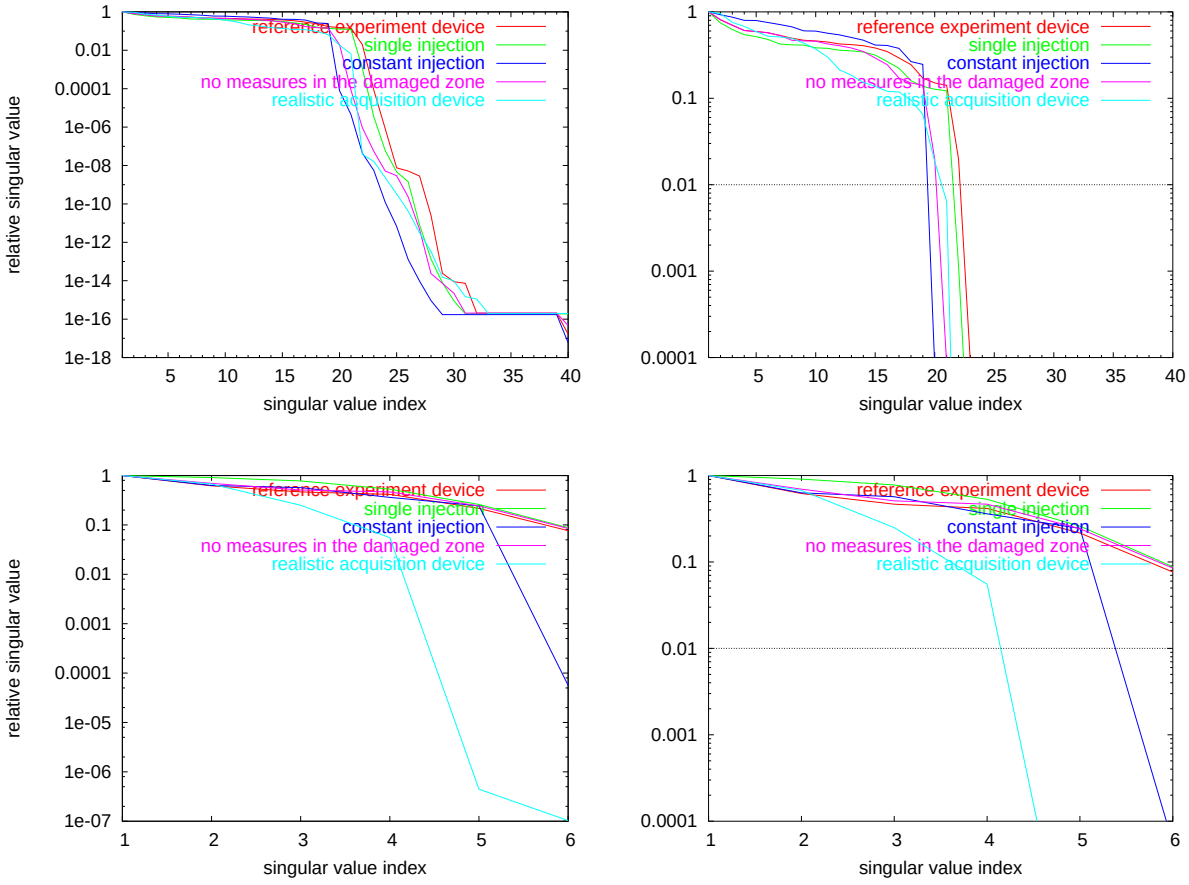


FIG. 6.22 – *Valeurs singulières pour différents dispositifs expérimentaux. En haut : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones, en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. Sur les zooms à droite, un niveau de bruit de 1% est indiqué.*

Les courbes de décroissance des valeurs singulières pour ces différents dispositifs d'acquisition et pour les deux paramétrisations sont représentées dans la figure 6.22. Avec la paramétrisation fine (en haut), ces courbes sont très proches les unes des autres (les valeurs de $K_{1\%}$ restent comprises entre 19 et 22), néanmoins le dispositif de référence reste le meilleur. Par contre, avec la paramétrisation grossière (en bas), le cas à injection constante ($K_{1\%} = 5$) et le dispositif réaliste au temps final ($K_{1\%} = 4$) se démarquent des autres cas pour lesquels tous les paramètres sont identifiables de façon stable avec un niveau de bruit de 1%.

6.3.1 Modification de la phase d'injection

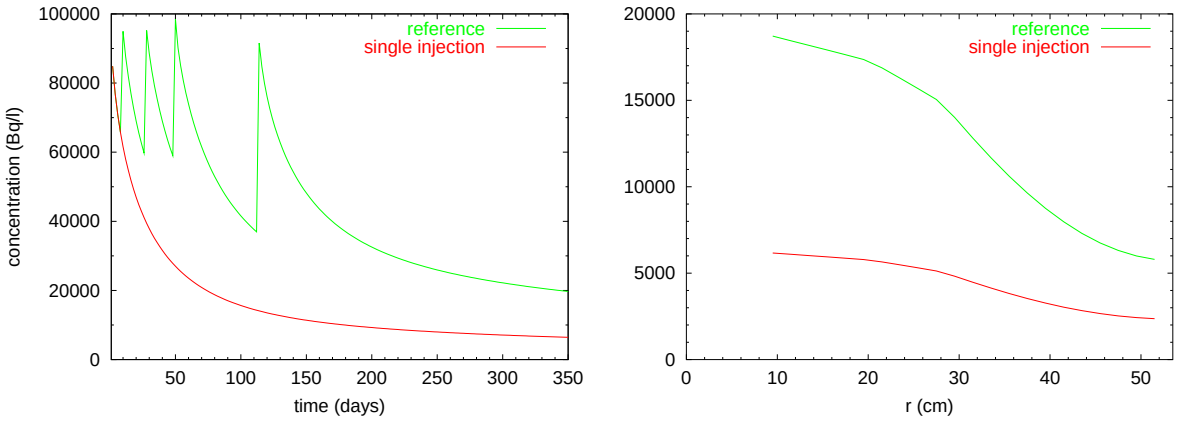


FIG. 6.23 – *Mesures pour une unique injection. À gauche : monitoring, à droite : profil au temps final.*

Avec une seule injection, la quantité de traceur présente dans le milieu est évidemment beaucoup plus faible, voir figure 6.23. C'est d'ailleurs pourquoi il a été décidé de procéder à des réinjections.

Les vecteurs singuliers avec les deux paramétrisations sont représentés dans la figure 6.24. Avec la paramétrisation fine (en haut), les courbes sont quasiment identiques à celles pour le dispositif de référence, c'est-à-dire avec 4 réinjections supplémentaires (figure 6.3). La seule différence concerne bien sûr la forme des vecteurs singuliers de l'espace des mesures dans la partie monitoring (il n'y a plus qu'un seul pic). C'est également le cas avec la paramétrisation grossière (en bas), sauf que les éléments singuliers 2 et 3 sont permutés.

Cette fois-ci, avec une injection constante, la quantité de traceur présente dans le milieu est beaucoup plus élevée, voir figure 6.25.

Les vecteurs singuliers avec les deux paramétrisations sont représentés dans la figure 6.26. Cette fois-ci, avec la paramétrisation fine, les degrés de liberté identifiables de façon stable sont régulièrement distribués sur le domaine spatial dès les plus fortes sensibilités (en haut et au milieu). Par contre, *la* mesure de monitoring (elle est constante) n'est pas utile pour l'inversion. C'est également le cas avec la paramétrisation grossière car la sixième valeur singulière est au-dessous du niveau de bruit de 1% et il n'est donc pas possible de retrouver la valeur moyenne de la diffusion (en bas, courbes jaunes).

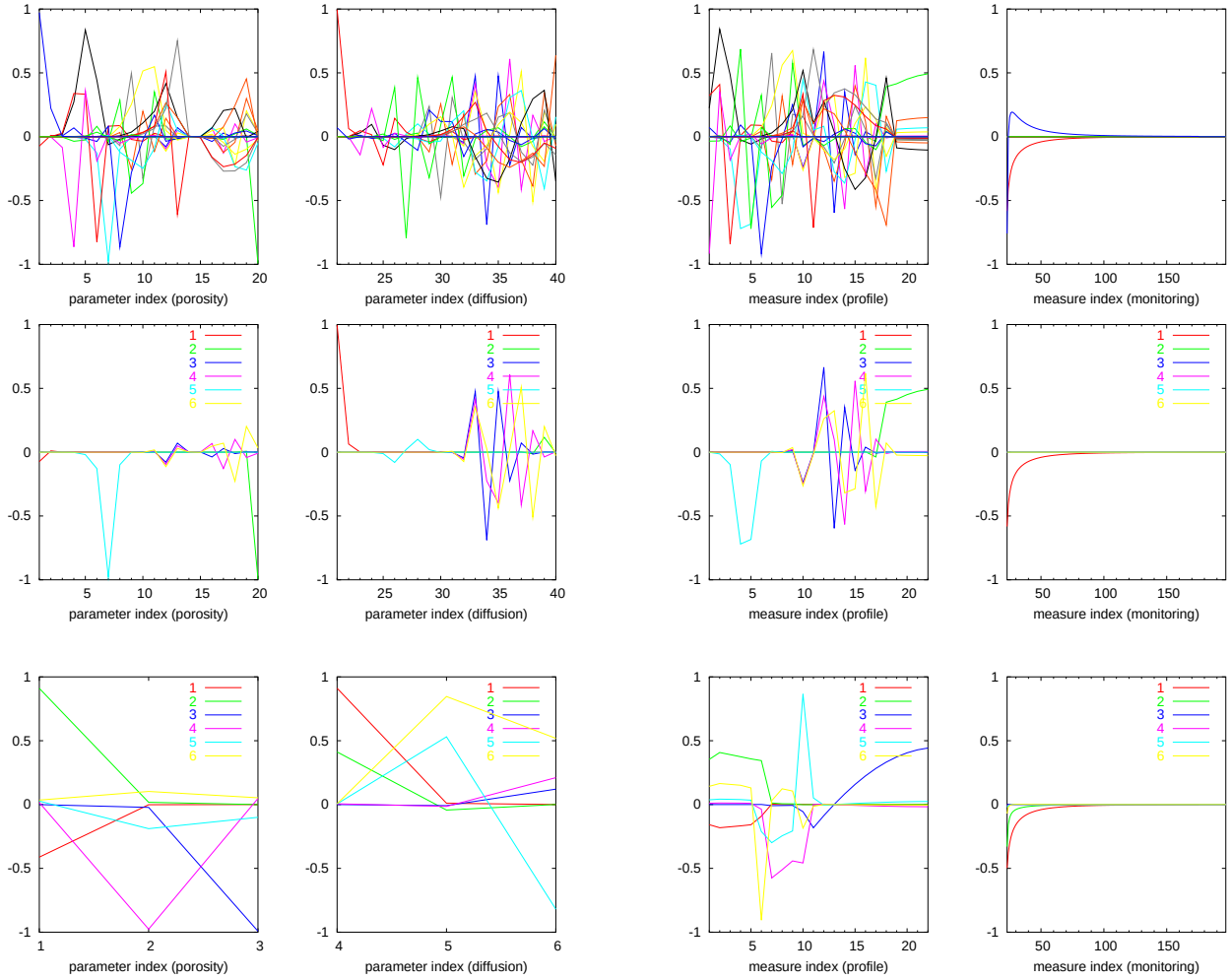


FIG. 6.24 – *Vecteurs singuliers pour une expérience à injection unique. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 21 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

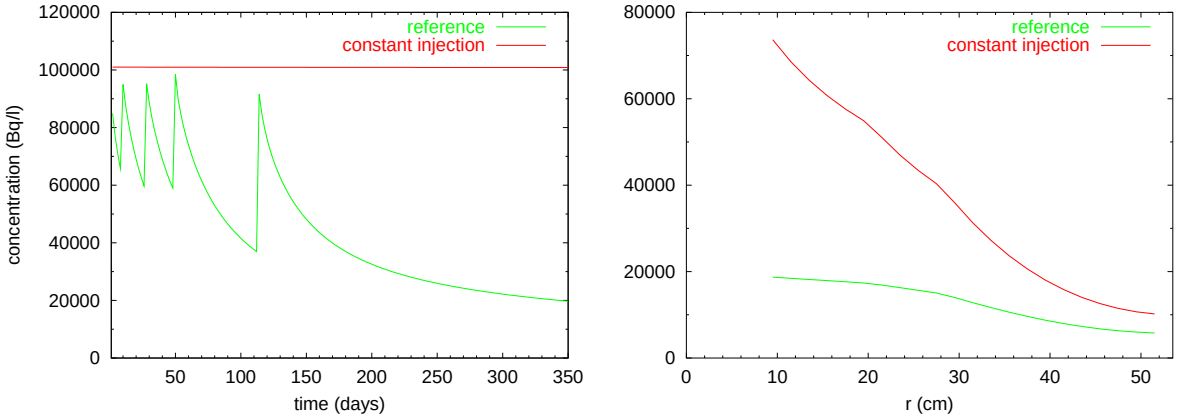


FIG. 6.25 – *Mesures pour une injection constante. À gauche : monitoring, à droite : profil au temps final.*

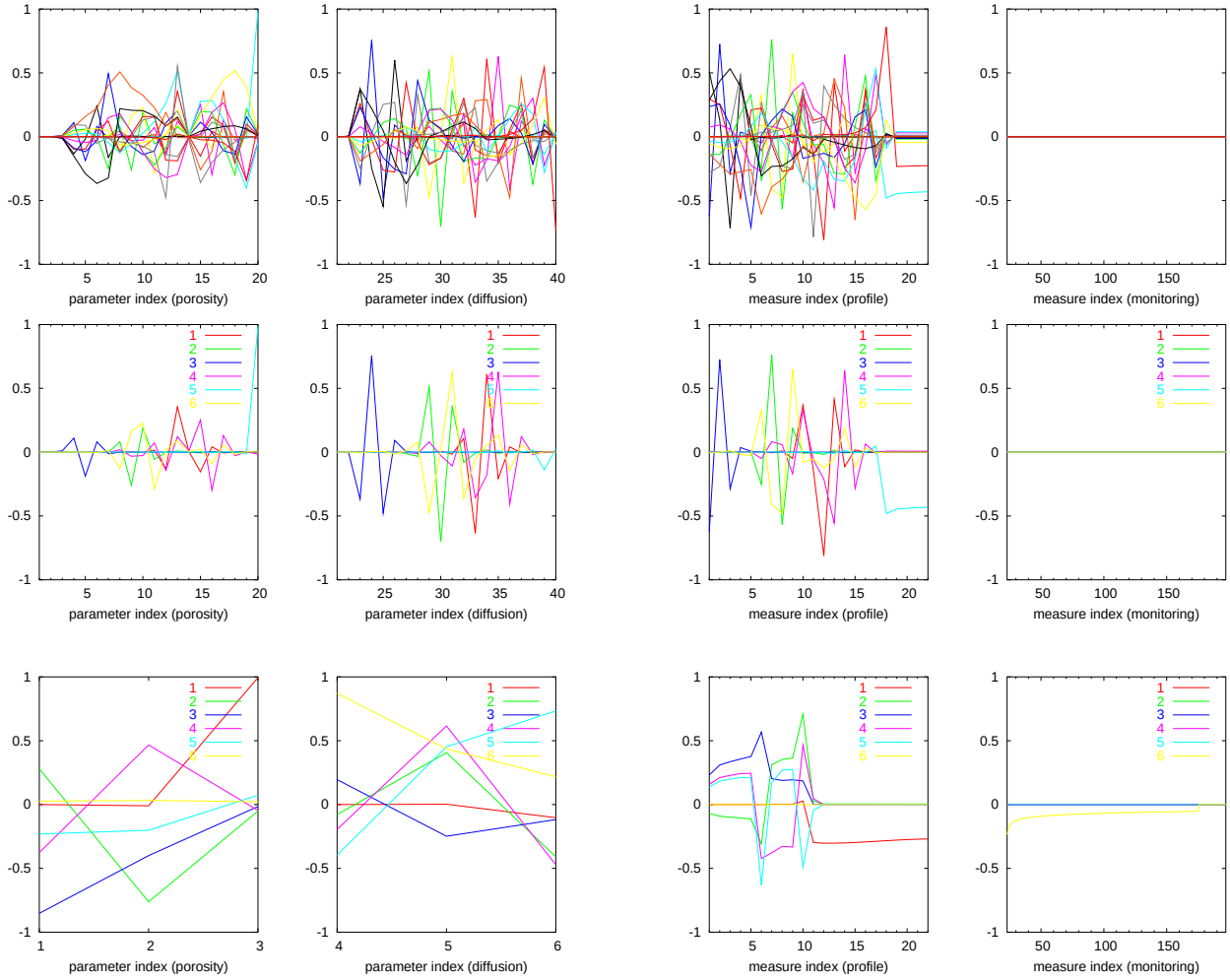


FIG. 6.26 – *Vecteurs singuliers pour une expérience à injection constante. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 19 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

6.3.2 Suppression des points de mesures dans la zone endommagée

L'expérience DI du Mont Terri a montré un endommagement du milieu lors du forage de la chambre d'injection. Les propriétés de porosité et de diffusion du milieu en sont alors certainement modifiées, et les mesures qui pourraient être effectuées pour les faibles valeurs de r ne sont plus dans l'image du modèle physique initialement retenu. Nous étudions donc la perte occasionnée par l'abandon de ces premières mesures au temps final.

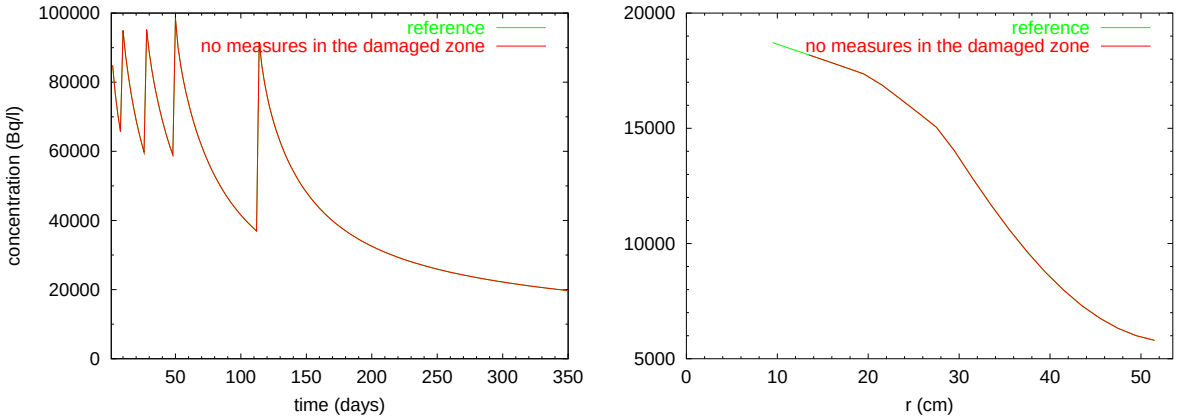


FIG. 6.27 – *Mesures avec suppression de la zone endommagée. À gauche : monitoring, à droite : profil au temps final.*

La suppression des deux premiers points de mesure du profil au temps final n'a pas d'incidence notable ni sur les mesures, voir figure 6.27, ni sur la sensibilité du modèle direct avec l'une ou l'autre des deux paramétrisations, voir figure 6.28.

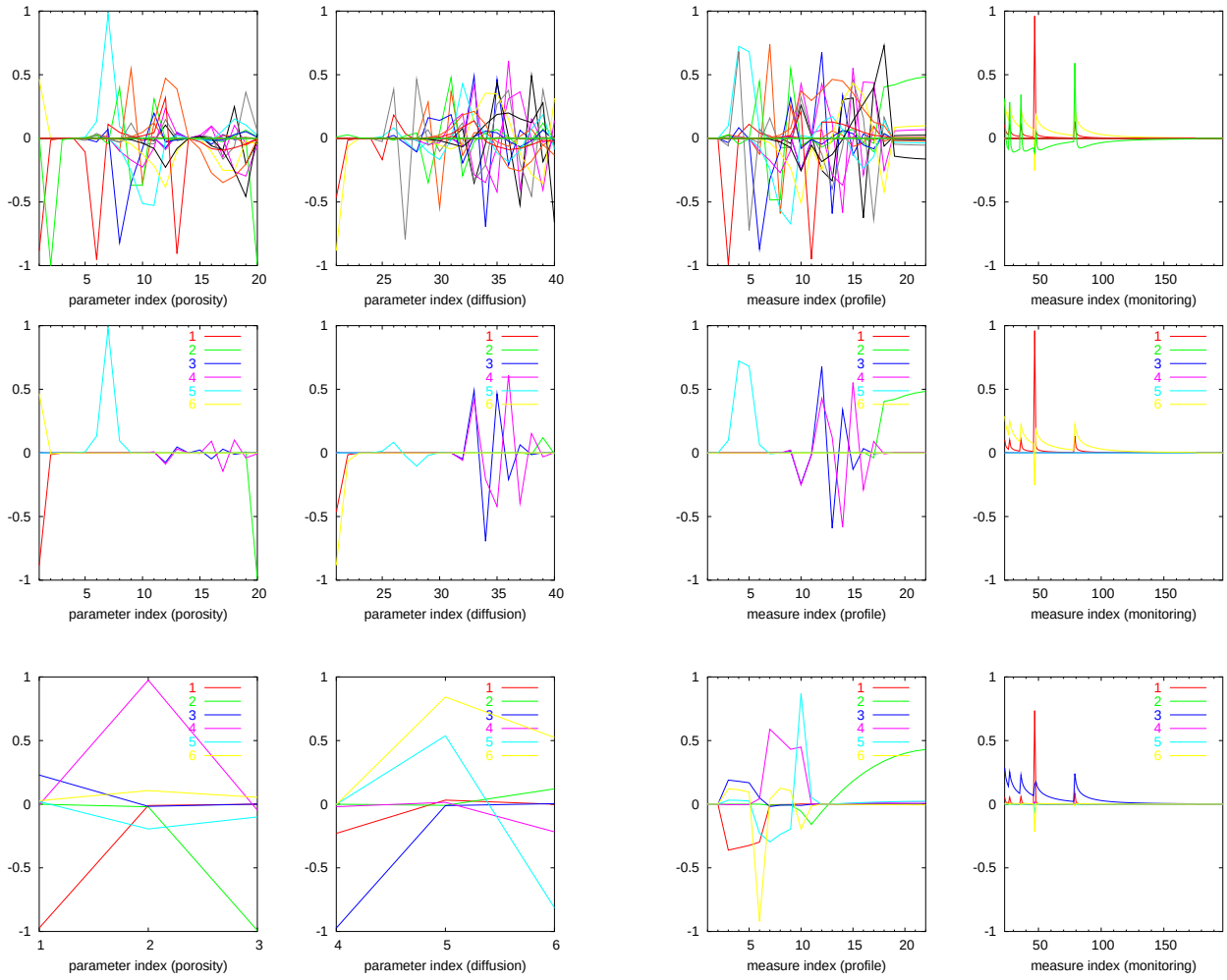


FIG. 6.28 – *Vecteurs singuliers lorsque l'on néglige les 2 premiers points de mesure au temps final. En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 20 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

6.3.3 Dispositif réaliste pour les mesures au temps final

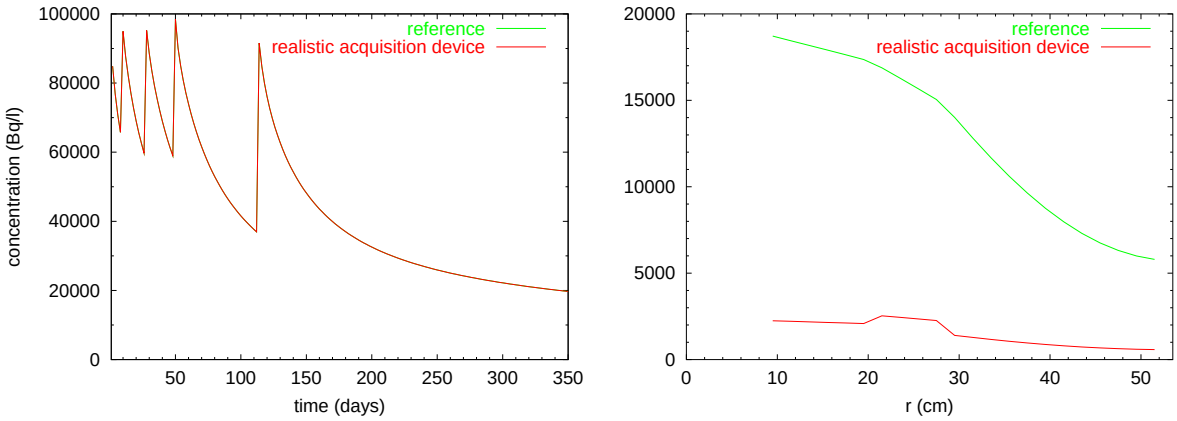


FIG. 6.29 – *Mesures pour un dispositif réaliste au temps final. À gauche : monitoring, à droite : profil au temps final.*

L'expérience la plus intéressante concerne la prise en compte de deux dispositifs expérimentaux distincts pour les mesures de monitoring dans la chambre d'injection et pour les mesures du profil au temps final. Dans le premier cas, la concentration est mesurée en masse par volume de solution alors que dans le second, elle est mesurée en masse par volume de roche. Elles diffèrent donc d'un facteur égal à la porosité, voir figure 6.29.

Encore une fois, il est nécessaire de procéder à une nouvelle calibration des poids et valeurs de normalisation. Et une nouvelle fois, les rapport des normes L^2 des deux types de mesure ainsi que les valeurs moyennes des paramètres physiques ne procurent pas la meilleure sensibilité possible. Celle-ci est obtenue avec $\mu = 1$, $\nu = 0.1$, $\omega_0 = 0.01$ et $D_0 = 10^{-5}$ m^2/s. Ainsi nous avons respectivement $K_{1\%} = 20$ et 4 avec les deux paramétrisations.

L'incidence la plus remarquable sur la forme des vecteurs singuliers est que maintenant le seul degré de liberté identifiable de façon stable pour la porosité est la valeur moyenne sur tout le domaine, tout le reste étant reporté sur la diffusion, voir figure 6.30. Et ce même avec la paramétrisation grossière puisque les éléments singuliers 5 et 6 ne sont alors pas à prendre en compte.

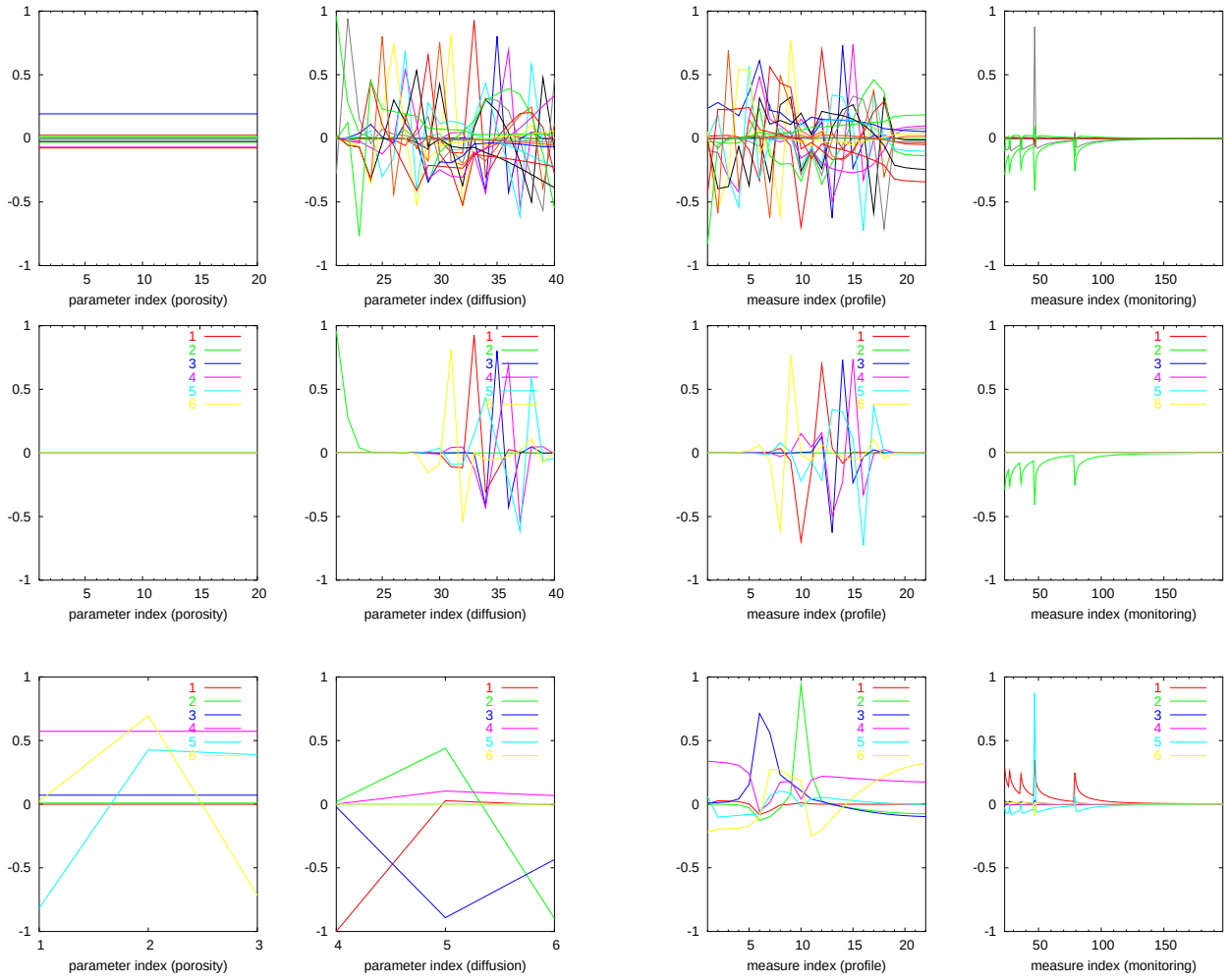


FIG. 6.30 – *Vecteurs singuliers pour un dispositif de mesure réaliste au temps final, avec* $\mu = 1$, $\nu = 0.1$, $\omega_0 = 0.01$ *et* $D_0 = 10^{-5}$ m^2/s. *En haut, au milieu : dans le cas de la paramétrisation fine à 20 zones (vecteurs singuliers associés aux 20 valeurs singulières au-dessus du niveau de bruit, puis associés aux 6 premières valeurs singulières), en bas : dans le cas de la paramétrisation grossière à 3 zones. À gauche : dans l'espace des paramètres, à droite : dans l'espace des mesures.*

Chapitre 7

Conclusion

Dans ce travail, nous abordons l'analyse de sensibilité de mesures de la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) par rapport à des coefficients intervenant dans cette EDP. L'analyse de sensibilité, de type déterministe, repose sur la décomposition en valeurs singulières (DVS) de la matrice jacobienne des dérivées premières de la modélisation directe donnant les mesures en fonction des paramètres. La DVS est un outil puissant permettant de définir la notion de degrés de liberté identifiables de façon stable (DDLIFS) pour un niveau de bruit donné sur les mesures. La notion de DDLIFS procure un moyen très efficace de quantification de la sensibilité d'un système, elle permet de guider le choix d'une paramétrisation des coefficients de l'EDP adaptée au problème, mais également de tester de nouveaux dispositifs d'acquisition de mesures sans avoir à les mettre en œuvre dans la réalité, et enfin de quantifier a posteriori la fiabilité d'un résultat d'inversion. Bien sûr, reposant sur des approximations du premier ordre, les conclusions ne peuvent être valables que localement autour du point considéré, cependant il est également possible d'évaluer la non-linéarité du modèle.

L'application de ces travaux concerne une expérience de diffusion d'un traceur radioactif afin d'estimer les propriétés de porosité et de diffusion d'un milieu poreux donné. L'EDP est ici une équation de diffusion monodimensionnelle avec une condition à la limite à gauche dépendant du temps. La matrice jacobienne est calculée ligne par ligne à l'aide de la technique de l'état adjoint. L'équation adjointe pour chaque ligne ne diffère que par son second membre de celle donnant le gradient de la fonction coût d'écart aux données.

Les principales conclusions de l'étude sont les suivantes :

- lorsque les grandeurs sont différentes, il est très important de calibrer les poids sur les mesures et les valeurs de normalisation.
- les mesures du profil au temps final contiennent beaucoup d'informations relatives aux paramètres de porosité et de diffusion, par contre les mesures de monitoring ne renseignent que sur les valeurs de ces paramètres proches de la chambre d'injection.
- dans la majorité des cas, la paramétrisation (grossière) par zones ne retient que des DDLIFS, elle est donc judicieuse.
- le problème est faiblement non-linéaire pour des valeurs réalistes des paramètres de porosité et de diffusion, par contre la prise en compte d'un coefficient de retard constant fait chuter la sensibilité aux seules valeurs des paramètres proches de la chambre d'injection.
- Les réinjections et les mesures au temps final proches de la chambre d'injection n'ont pas d'influence significative sur la sensibilité.
- Le dispositif réel de mesure au temps final (concentration en masse par volume de roche, et non par volume de solution) semble n'être sensible que par rapport à la valeur moyenne de la porosité, la sensibilité par rapport au coefficient de diffusion étant conservée.

Bibliographie

[1] P. Al Khoury, G. Chavent, F. Clément, and P. Hervé. Inversion of spectroscopique data of CO_2 radiation. *submitted to Inverse Problems in Engineering*, 2004. previously released as Proc. of the 4th Internat. Conf. on Inverse Problems in Engineering, 2002.

[2] A. Cartalade, P. Montarnal, B. Cavanna, and J. Blum. Paramétrisation automatique des coefficients de transport d'un milieu poreux, approche par état adjoint. Rapport DM2S SFME/MTMS/RT/03-002/A, CEA, Saclay, France, 2003.

[3] G. Chavent. *Non linear Least Squares for Inverse problems.* 2004. en préparation.

[4] F. Clément and G. Chavent. Détermination des profils de température pendant la détonation d'un explosif liquide, le nitrométhane. Rapport de Recherche 4641, Inria, Rocquencourt, France, 2002.

[5] P. Montarnal, E. Traynard, J.-M. Martinez, G. Arnaud, and M. Dumas. Identification des paramètres de transport dans un milieu poreux et analyse multicritère à l'aide de réseaux de neurones : application à l'expérience DI du mont terri. Rapport DM2S SFME/MTMS/RT/02-021/A, CEA, Saclay, France, 2002.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399