



HAL
open science

Une présentation mathématique de la méthode de Cagniard-de Hoop Partie II En dimension trois

Julien Diaz, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Julien Diaz, Patrick Joly. Une présentation mathématique de la méthode de Cagniard-de Hoop Partie II En dimension trois. [Rapport de recherche] RR-5825, INRIA. 2006, pp.93. inria-00070200

HAL Id: inria-00070200

<https://inria.hal.science/inria-00070200>

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Une présentation mathématique de la méthode de
Cagniard-de Hoop*

Partie II

En dimension trois

Julien Diaz — Patrick Joly

N° 5825

Février 2006

Thème NUM



*rapport
de recherche*



Une présentation mathématique de la méthode de Cagniard-de Hoop

Partie II

En dimension trois

Julien Diaz, Patrick Joly

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet Poems

Rapport de recherche n° 5825 — Février 2006 — 93 pages

Résumé : Dans ce rapport nous présentons l'extension de la méthode de Cagniard-de Hoop, que nous avons étudiée dans la première partie en dimension deux, à la dimension trois. Comme dans la première partie nous effectuons une présentation mathématique détaillée de la méthode, nous regroupons les résultats déjà connus et nous éclaircissons certaines difficultés mathématiques qui ne semblent pas avoir été traités jusqu'à maintenant .

Mots-clés : Cagniard-de Hoop, solutions analytiques, fonctions de Green, équation des ondes, acoustique, élastodynamique

A mathematical presentation of the Cagniard-de Hoop method

Part II

In three dimensions

Abstract: In this report we present the extension of the Cagniard-de Hoop method, that we have studied in the first part in two dimension, to the three dimensions case. As in the first part, we present in details the method, we bring together the already known results and we clarify some mathematical difficulties which does not seem to have been treated from now on.

Key-words: Cagniard-de Hoop, analytical solutions, Green functions, waves equation, acoustics, élastodynamics

Introduction

Comme nous l'avons vu dans la première partie, la méthode de Cagniard-de Hoop a été initialement introduite par Cagniard pour traiter des problèmes bidimensionnels. Dans ce cas on utilise une transformation de Fourier dans une variable d'espace (par exemple x) et une transformation de Laplace en temps pour se ramener à une équation différentielle en la variable d'espace restante. La clé est alors d'interchanger le rôle des variables x et t (ou plus exactement de leurs variables duales de Fourier-Laplace k_x et s) via des techniques d'analyse complexe.

En dimension trois, la méthode est en quelque sorte moins naturelle : pour se ramener à une équation différentielle ordinaire suivant une variable spatiale (par exemple z) il faut cette fois appliquer une transformation de Fourier dans les deux autres directions et l'échange temps espace ne se fait pas de manière aussi évidente. L'idée proposée par de Hoop [2] a été de faire l'échange entre le temps et une variable d'espace convenablement choisie (obtenue à l'aide d'une rotation judicieuse) en appliquant les mêmes techniques qu'en dimension deux. En conséquence la solution fondamentale ne se présente plus comme une formule explicite mais comme une intégrale 1D. Néanmoins, comme nous le verrons cette intégrale se fait toujours sur un intervalle borné et a parfois le bon goût d'être explicitement calculable (voir par exemple le cas d'un milieu acoustique homogène, section 1).

Nous décrivons ici de façon un peu plus précise les différentes étapes d'un calcul 3D (le contenu de chaque étape s'éclairera dans les sections suivantes sur les calculs cas par cas). Notre présentation correspond au cas d'un milieu à deux couches homogènes et au cas où le modèle de propagation est isotrope dans les deux premières variables (x, y) et nous renvoyons à [6, 5] pour l'étude de milieux stratifiés et/ou anisotropes (concernant les milieux anisotropes citons également [1, 4]) et à la thèse de Q. Grimal [3] pour le traitement d'interfaces courbes.

Soit $u(x, y, z, t)$ la fonction de Green d'un problème tridimensionnel stratifié, invariant suivant les directions x et y . Les premières étapes du calcul de u par la méthode de Cagniard-de Hoop sont très similaires au cas bidimensionnel :

1. On applique successivement à u :

- la transformation de **Laplace en temps** (s est la variable duale de t):

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \int_0^{+\infty} u^r(x, y, z, t) e^{-st} dt ; \quad (1.1)$$

- la transformation de **Fourier** suivant **les deux variables d'espace x et y** (k_x et k_y sont les variables duales respectives de x et de y):

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x, y, z, s) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (1.2)$$

2. $\widehat{u}(k_x, k_y, z, s)$ est alors solution d'une équation différentielle ordinaire en z à coefficients constants dans chaque couche, qui peut être résolue explicitement. Qui plus est, cette fonction peut se mettre sous la forme d'une **somme d'"ondes élémentaires"**

$$\widehat{u}(k_x, k_y, z, s) = \sum_{l=1}^N \widehat{u}_l(k_x, k_y, z, s) = \sum_{l=1}^N \mathcal{A}_l \left(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, z, \mathbf{c})}$$

où c_l représente la vitesse de propagation des ondes l , $\mathbf{c} = [c_i]_{i=1..N}$ est le vecteur contenant les vitesses de propagation de chaque onde i . Les fonctions \mathcal{A}_l et \mathcal{F}_l sont exactement les mêmes que celles que nous avons rencontrées en dimension deux lors du calcul de l'onde l . Rappelons que \mathcal{A}_l est une fonction **homogène en s/c_l de degré -1** et \mathcal{F}_l une fonction affine en z , **homogène en s/c_l de degré 1** :

$$\mathcal{A}_l \left(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) = \frac{c_l}{s} \mathcal{A}_l \left(\frac{|\mathbf{k}|^2 c_l^2}{s^2}, 1, \mathbf{c} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_l \left(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, z, \mathbf{c} \right) = \frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l \left(\frac{|\mathbf{k}|^2 c_l^2}{s^2}, 1, z, \mathbf{c} \right).$$

De plus nous montrerons dans les sections suivantes la

Propriété 1.1 Pour l et $i \in 1..N$ nous définissons les "vitesses virtuelles" par

$$\tilde{c}_{li}(q) = \frac{c_i}{\sqrt{1 + \frac{c_i^2}{c_l^2} q^2}}$$

et $\tilde{\mathbf{c}}_l(q) = (c_{li})_{i=1..N}$, alors :

$$\frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l(p^2 + q^2, 1, z, \mathbf{c}) = \frac{s}{\tilde{c}_{ll}(q)} \mathcal{F}_l \left(\frac{p^2}{1 + q^2}, 1, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q) \right).$$

Cette propriété nous servira à l'étape 6.

3. Pour tout $l \in \{1..N\}$ on applique alors à $\widehat{u}_l(k_x, k_y, z, s)$ la transformation de **Fourier inverse suivant x et y** :

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l \left(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, z, \mathbf{c})} e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (1.3)$$

4. On pose alors $k_x = p_x s/c_l$ et $k_y = p_y s/c_l$:

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\rho^2, 1, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l} (\mathcal{F}_l(\rho^2, 1, z, \mathbf{c}) - i r (p_x x + p_y y))} dp_x dp_y, \quad (1.4)$$

avec $\rho^2 = p_x^2 + p_y^2$ et en faisant l'abus de notation

$$\mathcal{A}_l(\rho^2, \mathbf{c}) = \mathcal{A}_l(\rho^2, 1, \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_l(\rho^2, z, \mathbf{c}) = \mathcal{F}_l(\rho^2, 1, z, \mathbf{c}).$$

Remarquons que, contrairement au cas bidimensionnel, ce changement de variable fait apparaître la variable de Laplace ailleurs que dans l'exponentielle. Comme nous le verrons par la suite, cela ne pose pas de problème particulier.

L'étape suivante est **spécifique à la dimension 3** :

5. Soit (r, ψ, z) les coordonnées cylindriques du point \mathbf{x} ($x = r \cos \psi$ et $y = r \sin \psi$), dans [2], de Hoop a proposé d'utiliser le changement de variable

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi \quad \text{et} \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi.$$

C'est une **rotation** d'angle ψ dans le plan (p_x, p_y) , remarquons que :

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 + q^2 \quad \text{et} \quad p_x x + p_y y = r(p_x \cos \psi + p_y \sin \psi) = rp.$$

L'intégrale (1.4) se réécrit alors :

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2 + q^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2 + q^2, z, \mathbf{c}) - irp)} dp dq. \quad (1.5)$$

6. L'idée consiste ensuite à effectuer, pour tout q de \mathbb{R} , des calculs dans le plan complexe similaires à ceux que nous avons explicités en dimension deux pour transformer l'intégrale suivant p en une intégrale sur la variable temporelle t . Remarquons cependant qu'on ne peut pas utiliser directement les résultats précédents puisque le terme dans l'exponentielle n'est pas exactement le même qu'en dimension 2. Une première idée, proposée par van der Hijden dans [6] consiste à poser

$$p = \rho \cos \phi \quad \text{et} \quad q = \rho \sin \phi$$

pour obtenir :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\rho^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(\rho^2, z, \mathbf{c}) - ir\rho \cos \phi)} \rho d\rho d\phi. \quad (1.6)$$

Cependant, la fonction dans l'exponentielle diffère encore légèrement de ce que nous avons vu en dimension deux. Nous proposons donc plutôt d'effectuer le changement de variable $(p, q) \rightarrow (\tilde{p}, q)$ avec

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}.$$

En effet la propriété 1.1 peut se réécrire

$$\frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l(\rho^2, z, \mathbf{c}) = \frac{s}{\tilde{c}_l(q)} \mathcal{F}_l(\tilde{p}^2, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q))$$

et

$$s \frac{irp}{c_l} = s \frac{ir\tilde{p}\sqrt{1 + q^2}}{c_l} = s \frac{ir\tilde{p}}{\tilde{c}_l(q)}.$$

L'équation (1.6) devient alors :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\tilde{p}^2, q^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{\tilde{c}_l(q)}(\mathcal{F}_l(\tilde{p}^2, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q)) - ir\tilde{p})} d\tilde{p} dq, \quad (1.7)$$

avec $\mathcal{B}_l(\tilde{p}^2, q^2, \mathbf{c}) = \mathcal{A}_l(\tilde{p}^2(1 + q^2) + q^2, \mathbf{c})$.

Grâce à ce changement de variable, le terme dans l'exponentielle est le même que celui qu'on obtiendrait en dimension 2 si le point d'observation était le point de coordonnées (r, z) et si les vitesses des ondes dans chaque milieu étaient données par le vecteur \mathbf{c}_l . Tout se passe donc comme si on travaillait avec des **matériaux bidimensionnels dépendant de q** .

De la même façon qu'en dimension deux, en utilisant le fait que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp = \int_{\Gamma} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp. \quad (1.8)$$

et

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp = \int_{t_{0l}(x, y)}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\gamma^2(t, x, y), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, x, y) e^{-st} dt. \quad (1.9)$$

on peut donc montrer que :¹

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\tilde{p}^2, q^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{\tilde{c}_l(q)}(\mathcal{F}_l(\tilde{p}^2, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q)) - ir\tilde{p})} d\tilde{p} = \int_{t_{0l}(q, x, y)}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q, x, y), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q, x, y) e^{-st} dt,$$

où la fonction $t_{0l}(q)^2$ vérifie

$$t_{0l}(-q) = t_{0l}(q), \quad t_{0l}(0) > 0 \quad \text{et} \quad t_{0l}(q) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

En particulier, cette fonction est une **bijection** de \mathbb{R}_+ dans $[t_{0l}(0), +\infty]$ et on peut définir sa **réciroque** $q_{0l}(t)$. Nous avons donc :

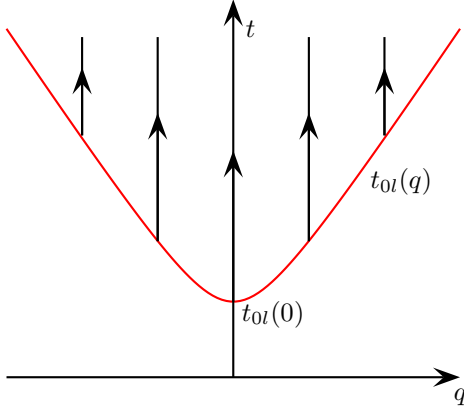
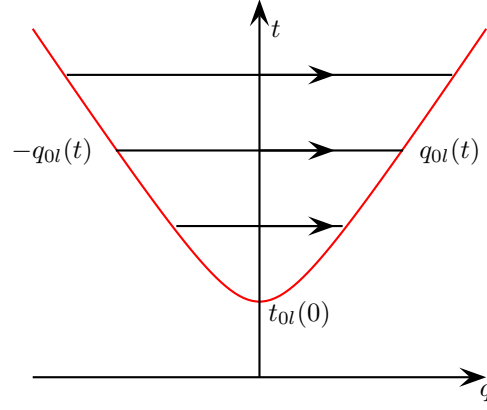
$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{0l}(q)}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) e^{-st} dt dq. \quad (1.10)$$

7. Il nous reste maintenant à **changer l'ordre d'intégration** pour exprimer \tilde{u} sous la forme d'une transformée de Laplace : la figure 1 représente le schéma d'intégration pour q dans $[-\infty; +\infty]$ puis t dans $[t_{0l}(q); +\infty]$ et la figure 2 représente l'ordre inverse, pour t dans $[t_{0l}(0); +\infty]$ puis q dans $[-q_{0l}(t); q_{0l}(t)]$. Nous pouvons donc écrire

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2 c_l} \int_{t_{0l}(0)}^{+\infty} s \left[\int_{-q_{0l}(t)}^{q_{0l}(t)} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) dq \right] e^{-st} dt. \quad (1.11)$$

¹ Comme en dimension deux nous supposons ici que l'onde l est une onde de volume, nous verrons comment calculer les ondes de tête dans les sections suivantes.

² Dans la suite de cette partie nous omettrons de préciser la dépendance de $t_{0l}(q)$ et de $\gamma(t, q)$ par rapport aux variables d'espace pour des raisons de lisibilité.


 Figure 1: Intégration sur q puis sur t

 Figure 2: Intégration sur t puis sur q

8. Remarquons que $q_{0l}(t_{0l}(0)) = 0$ et que

$$t \mapsto \Xi(t) = \int_{-q_{0l}(t)}^{q_{0l}(t)} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) dq$$

est une fonction continue si nous prolongeons q_{0l} par 0 sur l'intervalle $[0, t_{0l}(0)]$, on peut alors montrer que $\Xi(t)$ est dérivable (au sens des distributions), et par injectivité de la transformation de Laplace, nous pouvons identifier la solution :

$$u_i(x, y, z, t) \equiv \frac{1}{4\pi^2 c_l} \frac{d}{dt} \left[\int_{-q_{0l}(t)}^{q_{0l}(t)} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) dq \right]. \quad (1.12)$$

1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

Comme au chapitre précédent nous nous intéressons d'abord au cas de l'équation des ondes dans un milieu homogène infini :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(z)f(t). \quad (1.13)$$

La solution de cette équation peut évidemment être obtenue grâce à une convolution en temps entre la source f et la fonction de Green u solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t). \quad (1.14)$$

La première étape de la méthode est la plus simple : l'utilisation des transformations de Laplace en temps et de Fourier en x et en y nous conduit à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \hat{u} = \delta(z), \quad (1.15)$$

dont la solution s'écrit :

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \frac{e^{-|z|(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}}{2(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.16)$$

On utilise alors (troisième étape) la transformée inverse de \hat{u} en x et en y

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|z|(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} - i(k_x x + k_y y)}}{2(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} dk_x dk_y \quad (1.17)$$

On pose ensuite (quatrième étape) $k_x = \frac{p_x s}{c}$, $k_y = \frac{p_y s}{c}$ et on utilise les coordonnées cylindriques r, ψ, z^3 :

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

L'intégrale (1.17) devient alors

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{c} \left[|z|(1+p_x^2+p_y^2)^{\frac{1}{2}} + i r (p_x \cos \psi + p_y \sin \psi)\right]}}{2(1+p_x^2+p_y^2)^{\frac{1}{2}}} dp_x dp_y. \quad (1.18)$$

Comme nous l'avons vu, la cinquième étape, spécifique à la dimension trois, consiste à appliquer le changement de variable :

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi \quad \text{et} \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

qui est tel que :

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 + q^2 \quad \text{et} \quad p_x \cos \psi + p_y \sin \psi = p.$$

Nous avons donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{c} \left[|z|(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + i p r\right]}}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} dp dq. \quad (1.19)$$

Nous proposons ensuite (sixième étape) d'effectuer le changement de variable supplémentaire

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}},$$

³ Dans toutes les sections de ce chapitre r, ψ, z désigneront les coordonnées cylindriques du point (x, y, z) .

et d'utiliser la fonction $q \mapsto \tilde{c}(q)$ définie par :

$$\tilde{c}(q) = \frac{c}{\sqrt{1+q^2}}.$$

L'équation (1.19) devient alors :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{\tilde{c}(q)} \left[|z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]}}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} d\tilde{p} dq. \quad (1.20)$$

Grâce à ce changement de variable, à l'exception de la vitesse \tilde{c} , qui dépend de q , l'intégrand est exactement le même qu'en dimension 2 : on a montré, à la section 1 de la première partie, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{\tilde{c}(q)} \left[|z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]}}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} d\tilde{p} = \int_{t_0(q)}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2 - t_0^2(q)}} dt. \quad (1.21)$$

avec

$$t_0(q) = \frac{R}{\tilde{c}(q)} = \frac{R}{c} \sqrt{1+q^2} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}.$$

Physiquement le changement de variable que nous proposons nous permet de considérer pour chaque q de \mathbb{R} un problème de dimension deux dans un milieu de vitesse de propagation $\tilde{c}(q)$.

On a donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0(q)}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2 - t_0^2(q)}} dt dq. \quad (1.22)$$

La fonction $q \mapsto t_0(q)$ a bien le comportement présenté sur la figure 1 en introduction. Nous pouvons donc définir sa réciproque

$$q_0(t) = \sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} - 1},$$

et inverser l'ordre d'intégration (voir figure 2) :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2 c} \int_{t_0(0)}^{+\infty} s \left[\int_{-q_0(t)}^{q_0(t)} \frac{dq}{\sqrt{t^2 - t_0^2(q)}} \right] e^{-st} dt. \quad (1.23)$$

Comme nous l'avons dit en introduction, l'équation (1.23) nous fournit l'expression de la dérivée temporelle de u et nous pouvons nous arrêter ici. Cependant dans le cas particulier

d'un milieu homogène il est possible de simplifier cette expression : remarquons d'abord que :

$$\sqrt{t^2 - t_0^2(q)} = \frac{R}{c} \sqrt{q_0^2(t) - q^2} = \frac{R}{c} q_0(t) \sqrt{1 - \frac{q^2}{q_0^2(t)}},$$

donc

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 R} \int_{t_0(0)}^{+\infty} \left[\int_{-q_0(t)}^{q_0(t)} \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{q_0^2(t)}}} \right] \frac{e^{-st}}{q_0(t)} dt, \quad (1.24)$$

on peut alors effectuer le changement de variable $Q = \frac{q}{q_0(t)}$:

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 R} \int_{t_0(0)}^{+\infty} \left[\int_{-1}^1 \frac{dQ}{\sqrt{1 - Q^2}} \right] e^{-st} dt \quad (1.25)$$

et comme $\int_{-1}^1 \frac{dQ}{\sqrt{1 - Q^2}} = \pi$:

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi R} \int_{\frac{R}{c}}^{+\infty} e^{-st} dt, \quad (1.26)$$

soit :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi R} \int_0^{+\infty} H_{\frac{R}{c}}(t) e^{-st} dt. \quad (1.27)$$

Donc, en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace, nous déduisons le :

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dt} H_{\frac{R}{c}}(t). \quad (1.28)$$

On retrouve donc le résultat bien connu :

Théorème 1.1 *La solution du problème (1.14) s'écrit :*

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi R} \delta_{\frac{R}{c}}(t).$$

2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Nous considérons maintenant un domaine infini composé de 2 fluides homogènes. Les 2 milieux sont respectivement associés aux demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$ et les vitesses de propagation des ondes dans ces milieux sont respectivement c_1 et c_2 .

L'équation aux dérivées partielles modélisant ce problème est :

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] = \delta(x) \delta(y) \delta(z-h) f(t) \quad (2.1)$$

avec

$$\begin{cases} \mu(z) = \mu_1, & \rho(z) = \rho_1, & z > 0, \\ \mu(z) = \mu_2, & \rho(z) = \rho_2, & z < 0 \end{cases}$$

et $c(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}}$.

La fonction de Green associée à ce problème est solution de:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \delta(x) \delta(y) \delta(z-h) \delta(t). \quad (2.2)$$

2.1 Résultats

2.1.1 Cas d'une source sur l'interface

Nous supposons ici que $h = 0$ et $c_1 < c_2$.

- a) **Les fronts d'onde.** Comme nous le verrons le front d'onde est très similaire au front d'onde en dimension 2 : il se décompose en trois fronts d'onde secondaires : un front d'onde de volume et un front d'onde de tête dans le milieu 1 et un front d'onde de volume dans le milieu 2. La différence avec la dimension 2 est l'existence d'un domaine où les ondes de volume et de tête coexistent.

Nous utiliserons par la suite :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z = R \sin \theta.$$

Front de l'onde de volume dans le milieu 1. Pour un instant t donné le front de l'onde de volume dans le milieu 1 est une demi-sphère de centre $O = (0,0)$ et de rayon $c_1 t$ (en bleu sur les figures 3.a et 4). Nous appelons $\Omega_R(t)$ l'intérieur de cette demi-sphère. $\Omega_R(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } \frac{R}{c_1} < t \right\}.$$

Front de l'onde de volume dans le milieu 2. De même le front de l'onde de volume dans le milieu 2 est une demi-sphère de centre $O = (0,0)$ et de rayon $c_2 t$ (en

rouge sur les figures 3.c et 4) et nous appelons $\Omega_T(t)$ l'intérieur de cette demi-sphère. $\Omega_T(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_T(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0 \text{ et } \frac{R}{c_2} < t \right\}.$$

Front de l'onde de tête dans le milieu 1. Nous notons $A(t)$ l'intersection du front d'onde dans le milieu 2 avec l'axe $x = 0$ à droite et $B(t)$ ⁴ le point du plan (x, z) tel que le segment $[AB]$ (en magenta sur la figure 4)) soit tangent à $\Omega_R(t)$. Nous notons $\omega_{te1}(t)$ le tronc de cône généré par la rotation de ce segment autour de l'axe (Oz) . Soit $\omega_{te2}(t)$ la portion de sphère de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} \right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}},$$

délimitée par les plans de cote $z = 0$ et $z = z_B$ (z_B est la cote du point B). Le front de l'onde de tête dans le milieu 1 est la réunion de $\omega_{te1}(t)$ et $\omega_{te2}(t)$.

Lemme 2.1 *L'angle $\theta_c = \arccos(\frac{c_1}{c_2})$ est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête. De plus, pour t donné, l'ensemble des points de $\omega_{te1}(t)$ vérifie l'équation :*

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_2}, \quad \theta \in [0, \theta_c] \quad (2.3)$$

et l'ensemble des points de $\omega_{te2}(t)$ vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_c]. \quad (2.4)$$

Démonstration :

Les équations (2.3) et (2.4) étant invariantes par rotation autour de l'axe (Oz) , il suffit de démontrer ce lemme dans le cas $y = 0$ et $x > 0$. Comme en dimension deux, le triangle (OAB) est rectangle en B et $OA = c_2 t$ et $OB = c_1 t$:

$$\cos \theta_c = \frac{OB}{OA} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Dans le demi-plan $y = 0$ et $x > 0$, l'équation (2.3) n'est rien d'autre que l'équation du segment AB . De même (2.4) est l'équation polaire de l'arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} \right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}},$$

⁴Pour plus de lisibilité nous omettrons par la suite la dépendance en temps de A et de B .

joignant le point O au point B . ■

Nous noterons $\Omega_{te}(t)$ l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête et l'interface (en magenta sur les figures 3.b et 4). $\Omega_{te}(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \right\}.$$

Finalement nous notons $\Omega(t) = \Omega_R(t) \cup \Omega_T(t) \cup \Omega_{te}(t)$.

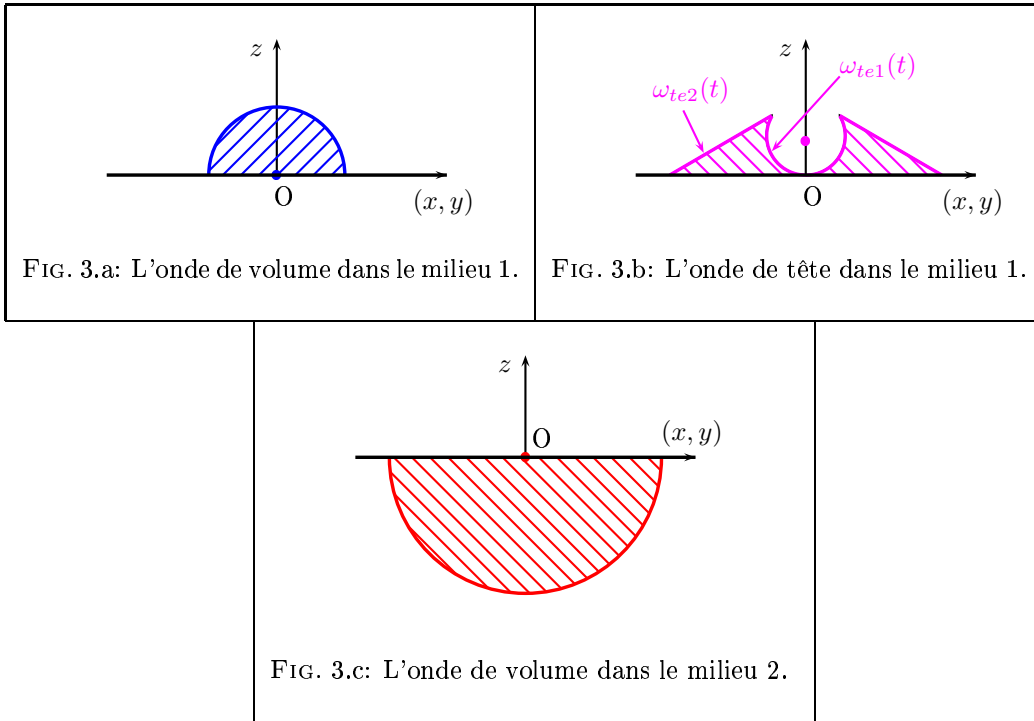
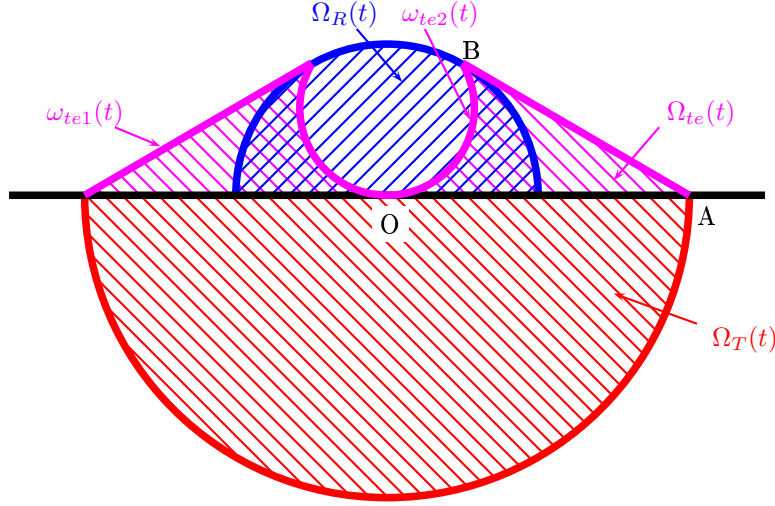


Figure 3: L'ensemble des ondes du problème quand $h = 0$

b) Solutions analytiques.

On notera

Figure 4: Représentation des fronts d'onde quand $h = 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+q^2}} & \text{et} \quad \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+\frac{c_2^2}{c_1^2}q^2}}, \\ \tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c_2^2}q^2}} & \text{et} \quad \tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}}, \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \frac{\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \tilde{\mathcal{T}}(p, q) = \frac{2\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1+p^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}, \\ v_1^+(t, q) = -i \left(\frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}(q)^2 t^2}{R^2}} \right), \\ \gamma_2^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{22}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)t^2}{R^2} - 1}. \end{array} \right.$$

Nous définissons les fonctions $q_{01}(t)$ et $q_{02}(t)$ par

$$q_{01}(t) = \sqrt{\left| \frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1 \right|} \quad \text{et} \quad q_{02}(t) = \sqrt{\left| \frac{c_2^2 t^2}{R^2} - 1 \right|}$$

Enfin, pour le calcul des ondes de tête nous posons :

$$q_1(t) = \sqrt{\left(\frac{c_1 t}{R |\cos \theta|} - \frac{|\sin \theta|}{|\cos \theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}}$$

pour

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}.$$

Théorème 2.1 *La solution causale du problème (2.2) avec $h = 0$ est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega(t) : \\
 \\
 u(x, y, z, t) = 0 ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t) : \\
 \\
 u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t) : \\
 \\
 u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t) : \\
 \\
 u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\
 \\
 + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : \\
 \\
 u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq \right].
 \end{array} \right.$$

Remarque 2.1 *On vérifie facilement que :*

- la condition $\mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t)$ se réécrit

$$t > \frac{R}{c_1} \quad \text{si } \theta > \theta_c \quad \text{et } t > \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{sinon ;}$$

- la condition $x \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t)$ se réécrit

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{c_1} \quad \text{et} \quad \theta < \theta_c ;$$

- la condition $x \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t)$ se réécrit

$$\frac{R}{c_1} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{et} \quad \theta < \theta_c.$$

On pourra s'inspirer, pour le calcul numérique de U , de l'algorithme présenté à la section 4.1.2 (calcul de P^r), page 78.

2.1.2 Cas d'une source hors de l'interface

- a) **Les fronts d'onde.** Nous distinguerons deux cas : $c_1 < c_2$ et $c_1 > c_2$ et nous utiliserons :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z + h = R \sin \theta.$$

1. **Si $c_1 < c_2$.** Dans ce cas, l'onde dans le milieu 1 apparaît comme la somme de trois ondes : une onde incidente, une onde réfléchie et une onde de tête. L'onde dans le milieu 2 est seulement constituée d'une onde transmise.

Front de l'onde incidente dans le milieu 1. Pour un instant t donné le front de l'onde incidente (en vert sur les figures 5.a et 6) est l'intersection de la sphère de centre $(0, h)$ et de rayon $c_1 t$ avec le demi-espace supérieur. Toute l'onde incidente est contenue dans cette portion de sphère que nous notons $\Omega_I(t)$.

Front de l'onde réfléchie dans le milieu 1. Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur les figures 5.c et 6) est l'intersection de la sphère de centre $(0, -h)$ et de rayon $c_1 t$ avec le demi-espace supérieur. Nous appelons $\Omega_R(t)$ l'intérieur de cette portion de sphère. $\Omega_R(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } \frac{R}{c_1} < t \right\}.$$

Front de l'onde transmise dans le milieu 2. Comme en dimension 2 nous définissons $\xi_{02}(r, z)$ ⁵, minimisant la fonction

$$t(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(r - \xi)^2 + z^2}}{c_2}, \quad (2.5)$$

⁵Rappelons que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

et nous notons $t_{02}(r, z) = t(\xi_{02}(r, z))$ son minimum. Nous pouvons alors définir l'ensemble $\Omega_T(t)$ (représenté en rouge sur les figures 5.b et 6) par :

$$\Omega_T(t) = \{(x, y, z) \mid z \leq 0 \text{ et } t_{02}(r, z) \leq t\}.$$

Onde de tête dans le milieu 1. Nous notons A l'intersection du front d'onde transmis avec l'axe $x = 0$ à droite et B le point du plan (x, z) tel que le segment $[AB]$ (en magenta sur la figure 6) soit tangent à $\Omega_R(t)$. Nous notons $\omega_{te1}(t)$ le tronç de cône généré par la rotation de ce segment autour de l'axe (Oz) . Soit $\omega_{te2}(t)$ la portion de sphère de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} - h\right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} - h,$$

délimitée par les plans de cote $z = 0$ et $z = z_B$. Le front de l'onde de tête est la réunion de $\omega_{te1}(t)$ et de $\omega_{te2}(t)$.

Lemme 2.2 *L'angle $\theta_c = \arccos(\frac{c_1}{c_2})$ est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête. De plus, pour t donné, l'ensemble des points de $\omega_{te1}(t)$ vérifie l'équation :*

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_2}, \quad \theta \in [0, \theta_c] \quad (2.6)$$

et l'ensemble des points de $\omega_{te2}(t)$ vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_c]. \quad (2.7)$$

La démonstration de ce lemme sera faite au cours de la démonstration du théorème 2.2 présenté ci-dessous (voir page 37). Remarquons que, dans le plan (x, z) , (2.7) est l'équation polaire d'un arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}}\right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}},$$

joignant le point O au point B .

Nous noterons $\Omega_{te}(t)$ l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête et l'interface (en magenta sur les figures 5.d et 6). $\Omega_{te}(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \right\}.$$

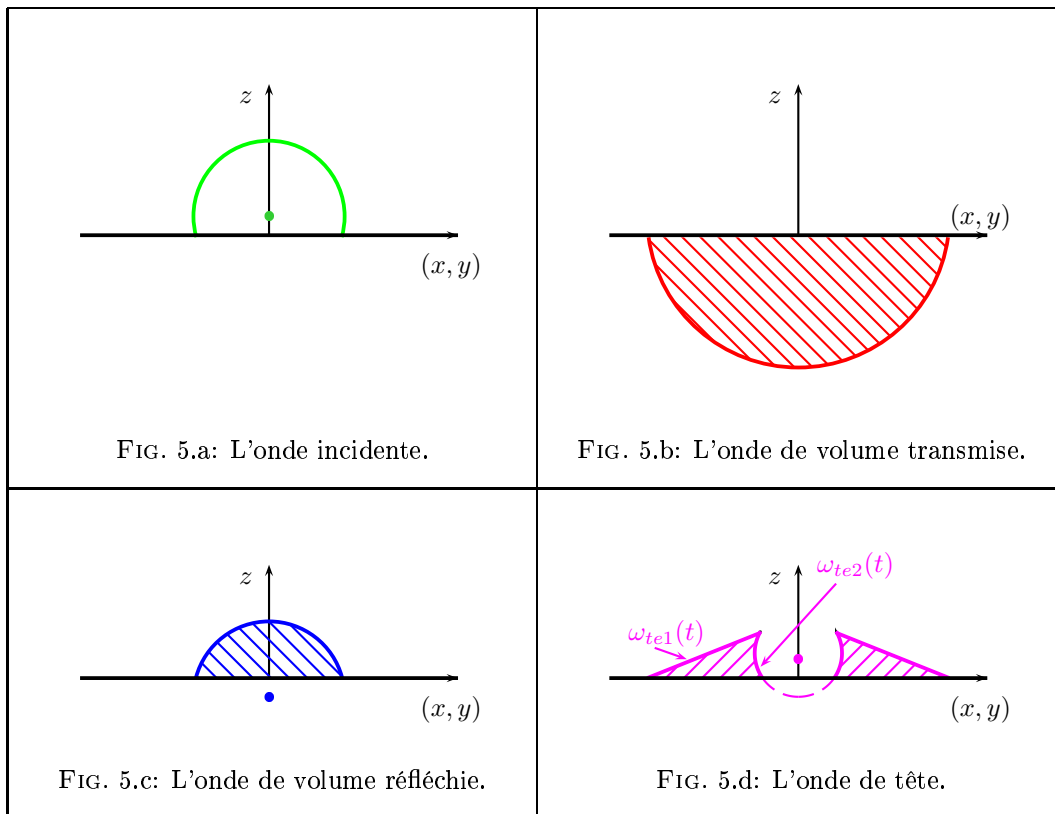


Figure 5: L'ensemble des ondes du problème quand $h \neq 0$ et $c_1 < c_2$.

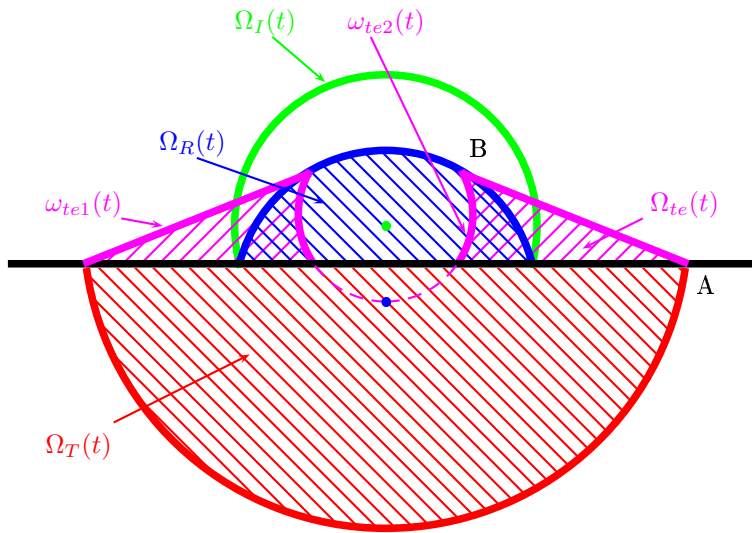


Figure 6: Représentation du front d'onde quand $c_1 < c_2$.

2. Si $c_1 > c_2$. Dans ce cas le contour est beaucoup plus simple car il n'y a pas d'onde de tête. Nous définissons les fronts d'onde incidente, réfléchi et transmis ainsi que les ensembles $\Omega_I(t)$, $\Omega_R(t)$ et $\Omega_T(t)$ de la même manière que dans le cas $c_1 < c_2$ (voir figures 7 et 8). Pour harmoniser les résultats dans les deux cas nous notons $\Omega_{te} = \emptyset$.

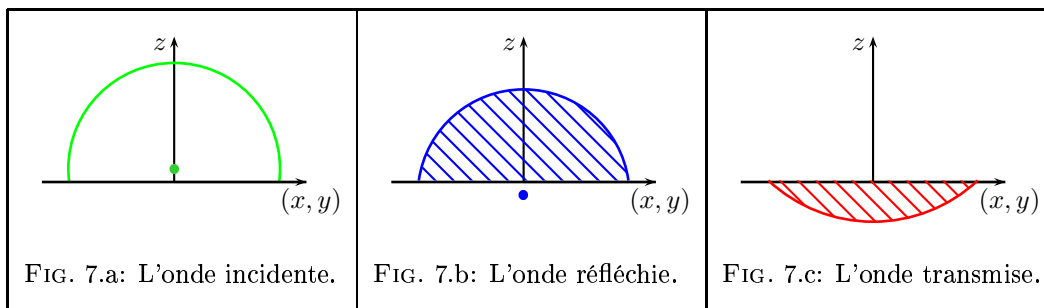
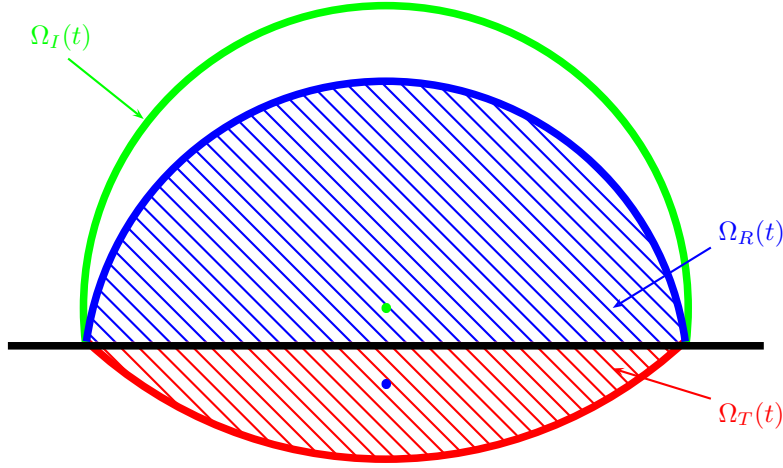


Figure 7: Les différentes ondes du problème quand $h \neq 0$ et $c_1 > c_2$.


 Figure 8: Représentation du front d'onde quand $c_1 > c_2$.

b) Solutions analytiques. Nous décomposons la solution u en :

$$\begin{cases} u = u^i + u^r & z > 0, \\ u = u^t & z < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

où u^i est l'onde incidente, c'est-à-dire la restriction au demi-espace $z > 0$ de la solution qu'on aurait obtenue avec $c_1 = c_2$:

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : & u^i(x, y, z, t) = 0 \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : & u^i(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi R^*} \delta_{\frac{R}{c}}(t) \end{cases}$$

avec $R^* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$, la distance au point source.

Comme dans le cas $h = 0$ on notera :

$$\begin{cases} \tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + q^2}} & \text{et} & \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} q^2}}, \\ \tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} q^2}} & \text{et} & \tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1 + q^2}}, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \frac{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_2 \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \tilde{\mathcal{T}}(p, q) = \frac{2\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}, \\ v_1^+(t, q) = -i \left(\frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2}} \right) \end{cases}$$

Nous définissons la fonction $q_{01}(t)$ par

$$q_{01}(t) = \sqrt{\left| 1 - \frac{c_1^2 t^2}{R^2} \right|}.$$

Pour définir $\gamma_2^+(t, q)$ et $q_{02}(t)$ nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}(p, q, t) = -z (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{22}(q)t = 0,$$

le temps d'arrivée de l'onde transmise au point (x, y, z) , $t_{02} = t_{02}(r, y)$, et le lemme suivant :

Lemme 2.3 *Pour tout $q > 0$ il existe un unique $\tilde{t}_{02}(q) > t_{02}$ tel que :*

- $\tilde{t}_{02}(q)$ est l'unique réel tel que $\mathcal{F}(p, q, \tilde{t}_{02}(q))$ admette une racine double $p = \tilde{p}_{02}(q)$, cette racine est imaginaire pure, de plus

$$-m < \Im m(\tilde{p}_{02}(q)) < 0,$$

avec $m = \min(1, \tilde{c}_{21}(q)/\tilde{c}_{22}(q))$;

- pour $t > \tilde{t}_{02}(q)$, $\mathcal{F}(p, q, \tilde{t}_{02}(q))$ admet deux racines complexes $\gamma_2^+(t, q)$ et $\gamma_2^-(t, q)$ vérifiant

$$\Im m [\gamma_2^+(t, q)] = \Im m [\gamma_2^-(t, q)] \text{ et } \Re e [\gamma_2^+(t, q)] = -\Re e [\gamma_2^-(t, q)] > 0.$$

- pour $h(-m, q)/\tilde{c}_{22}(q) \leq t \leq \tilde{t}_{02}(q)$ $\mathcal{F}(p, t, q)$, admet deux racines

$$p = v_2^-(t, q) \in [-im \tilde{p}_{02}(q)] \quad \text{et} \quad p = v_2^+(t) \in [\tilde{p}_{02}(q); im],$$

imaginaires pures, avec

$$h(w, q) = -z(1-w^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} - w^2 \right)^{\frac{1}{2}} - wx.$$

De plus la fonction $q \mapsto \tilde{t}_{02}(q)$ est croissante sur \mathbb{R}^+

Démonstration :

La majeure partie de ce lemme est une réécriture du lemme 2.3 de la première partie (en remplaçant c_1 et c_2 par $\tilde{c}_{21}(q)$ et $\tilde{c}_{22}(q)$)⁶. Il ne reste en fait qu'à démontrer que $\tilde{t}_{02}(q) > t_{02}$ pour tout q de \mathbb{R}^+ et que $q \mapsto \tilde{t}_{02}(q)$ est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Soit $q > 0$. Considérons maintenant que les deux milieux sont de dimension 2, et que les vitesses dans les deux milieux ne sont plus c_1 et c_2 mais $\tilde{c}_{21}(q)$ et $\tilde{c}_{22}(q)$. Toujours d'après le lemme 2.3 de la première partie, le temps $\tilde{t}_{02}(q)$ est le nouveau temps minimum mis par un rayon pour aller de la source de coordonnées $(0, h)$ au point (r, z) , or il est évident que $\tilde{c}_{21}(q) < c_1$ et $\tilde{c}_{22}(q) < c_2$: le nouveau milieu virtuel est plus lent que le milieu réel donc $\tilde{t}_{02}(q) > t_0$. De même, les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_{21}(q)$ et $q \mapsto \tilde{c}_{22}(q)$ sont décroissantes : le milieu virtuel devient de plus en plus lent quand q augmente, donc $\tilde{t}_{02}(q)$ est bien une fonction croissante. ■

Corollaire 2.1 Comme la fonction $q \mapsto \tilde{t}_{02}(q)$ est une bijection de

$$\mathbb{R}^+ \text{ dans } [t_{02}; +\infty],$$

on peut définir sa réciproque, $t \mapsto q_{02}(t)$, pour $t > t_{02}$.

Pour le calcul de l'onde de tête dans le milieu 1 nous utiliserons la fonction

$$q_1(t) = \sqrt{\left(\frac{c_1 t}{R|\cos\theta|} - \frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}}$$

définie pour

$$R \sin\theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos\theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin\theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

⁶Il ne faut cependant pas oublier que r est positif alors que dans la partie, son équivalent, x , était supposé négatif. C'est pour cette raison que $\tilde{p}_{02}(q)$ a ici une partie imaginaire positive.

Théorème 2.2 *L'onde réfléchie est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{te}(t) : \\
 \\
 u^r(x, y, z, t) = 0 ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t) : \\
 \\
 u^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t) : \\
 \\
 u^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t) : \\
 \\
 u^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\
 \\
 + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ,
 \end{array} \right.$$

et l'onde transmise est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_T(t) : \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : \\ \\ u^t(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{02}(t)} \Re e \left[\frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] dq \right]. \end{array} \right.$$

Remarque 2.2 On vérifie facilement que :

- la condition $\mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t)$ se réécrit

$$t > \frac{R}{c_1} \quad \text{si } \theta > \theta_c \quad \text{et } t > \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{sinon ;}$$

- la condition $\mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t)$ se réécrit

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{c_1} \quad \text{et } \theta < \theta_c ;$$

- la condition $\mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t)$ se réécrit

$$\frac{R}{c_1} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{et } \theta < \theta_c.$$

On pourra s'inspirer, pour le calcul numérique de U^r , de l'algorithme présenté à la section 4.1.2 (calcul de P^r), page 78, et, pour celui de U^t , de l'algorithme présenté à la section 4.2.1 (calcul de V_{sx}^P), page 83.

2.2 Démonstrations

Si nous décomposons u suivant (2.8), les conditions de transmissions physiques imposant la continuité de u et de $\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}$, l'équation (2.2) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^2} \right] = \delta(x) \delta(y) \delta(z-h) \delta(t), \quad z > 0 \quad (2.9a) \\ \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 u^r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial z^2} \right] = 0, \quad z > 0 \quad (2.9b) \\ \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 u^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^t}{\partial z^2} \right] = 0, \quad z < 0 \quad (2.9c) \\ u^i + u^r = u^t, \quad z = 0 \quad (2.9d) \\ \rho_2 \left(\frac{\partial u^i}{\partial z} + \frac{\partial u^r}{\partial z} \right) = \rho_1 \frac{\partial u^t}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (2.9e) \end{array} \right.$$

L'utilisation des transformées de Laplace en temps et de Fourier en x et en y nous permet d'obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial z^2} + \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^i = \delta(z-h), \quad z > 0, \quad (2.10a) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^r}{\partial z^2} + \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^r = 0, \quad z > 0, \quad (2.10b) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^t}{\partial z^2} + \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) \hat{u}^t = 0, \quad z < 0, \quad (2.10c) \\ \hat{u}^i + \hat{u}^r = \hat{u}^t, \quad z = 0, \quad (2.10d) \\ \rho_2 \left(\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}^r}{\partial z} \right) = \rho_1 \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (2.10e) \end{array} \right.$$

dont les solutions sont

$$\hat{u}^i = \frac{1}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|z-h| \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\hat{u}^r = \frac{\mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-(z+h) \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\hat{u}^t = \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{z \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Avec \mathcal{R} , le coefficient de réflexion et \mathcal{T} , le coefficient de transmission, définis par

$$\mathcal{R}(k_x, k_y, s) = \frac{\rho_2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{T}(k_x, k_y, s) = \frac{2\rho_2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.12)$$

2.2.1 Cas d'une source sur l'interface, démonstration du théorème 2.1

Dans le cas $h = 0$ la solution \hat{u} s'écrit

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \frac{1 + \mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|z| \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

pour $z > 0$ et

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|z| \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

pour $z < 0$.

Calcul de la solution dans le milieu 2. En utilisant la transformation de Fourier on obtient :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[|z| \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} + i(k_x x + k_y y) \right]} dk_x dk_y$$

On pose d'abord $k_x = \frac{p_x s}{c_2}$ et $k_y = \frac{p_y s}{c_2}$, on utilise à nouveau les coordonnées cylindriques r, ψ, z et on pose p et q tels que :

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi$$

$$p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(p, q)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[|z|(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} dp dq \quad (2.15)$$

avec l'abus de notation

$$\mathcal{T}(p, q) = \mathcal{T}\left(\frac{p}{c_2}, \frac{q}{c_2}, 1\right) = \frac{2(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} + (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.16)$$

Comme à la section précédente nous allons transformer ce problème tridimensionnel en une infinité de problèmes bidimensionnels avec des vitesses de propagation dépendant de q . Pour cela nous effectuons maintenant le changement de variable

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}}$$

et nous définissons la fonction $q \mapsto \tilde{c}_{22}(q)$ par

$$\tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Remarquons alors que :

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 + q^2 = (1+q^2) \left(\frac{c_2^2 + c_1^2 q^2}{(1+q^2)c_1^2} + \tilde{p}^2 \right) = (1+q^2) \left(\tilde{c}_{22}(q) \frac{1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} q^2}{c_1^2} + \tilde{p}^2 \right).$$

Si nous définissons les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_{11}(q)$ et $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{p}, q)$ par

$$\tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{p}, q) = \frac{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + (1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on aura $\mathcal{T}(p, q) = \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{p}, q)$ et :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{T}}(\tilde{p}, q)}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{22}(q)} \left[|z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} d\tilde{p} dq. \quad (2.17)$$

Or on a vu, lors du calcul de l'onde transmise en dimension 2 (voir la première partie), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{T}}(\tilde{p}, q)}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{22}(q)} \left[|z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \frac{\Re e \left[\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{02}^2(q)}} e^{-st} dt.$$

avec :

$$t_{02}(q) = \frac{R}{\tilde{c}_{22}(q)} = \frac{R}{c_2} \sqrt{1+q^2},$$

$$\gamma_2^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{22}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)t^2}{R^2} - 1}$$

et

$$r = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta.$$

On a donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \frac{\Re e \left[\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{02}^2(q)}} e^{-st} dt dq. \quad (2.18)$$

On peut maintenant échanger l'ordre d'intégration, comme à la section 1, et montrer que

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 R} \int_{t_{02}(0)}^{+\infty} \left[\int_{-q_{02}(t)}^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq \right] e^{-st} dt, \quad (2.19)$$

avec

$$q_{02}(t) = \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{R^2} - 1}.$$

Remarquons que, comme l'intégrand est pair,

$$\int_{-q_{02}(t)}^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left[\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq = 2 \int_0^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left[\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq. \quad (2.20)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= 0 && \text{si } t < t_{02}(0) = \frac{R}{c_2} \\ u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq \right], && \text{si } t > t_{02}(0) \end{aligned}}$$

Remarque 2.3 La condition $t < t_{02}(0) = R/c_2$ est bien équivalente à $\mathbf{x} \in \Omega_T(t)$.

Calcul de la solution dans le milieu 1. Avec des changements de variable similaires à ceux que nous venons d'utiliser pour le calcul dans le milieu 2 (on pose cette fois $k_x = \frac{p_x s}{c_1}$, $k_y = \frac{p_y s}{c_1}$), on obtient

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathcal{R}(p, q)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_1} \left[|z|(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dp dq$$

avec l'abus de notation

$$\mathcal{R}(p, q) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_1}, \frac{q}{c_1}, 1\right) = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.21)$$

On effectue ensuite le changement de variable

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

et on définit les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_{11}(q)$ et $q \mapsto \tilde{c}_{12}(q)$ par

$$\tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} q^2}}$$

et $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)$ par

$$\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q) = \frac{(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On a alors $\mathcal{R}(p, q) = \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)$ et :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} dq. \quad (2.22)$$

On utilisera également les coordonnées (R, θ) telles que:

$$r = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z = R \sin \theta.$$

On a vu, lors du calcul de l'onde réfléchie en dimension 2, que

- si $|\cos \theta| \leq \frac{\tilde{c}_{11}(q)}{\tilde{c}_{12}(q)}$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt$$

avec:

$$t_{01}(q) = \frac{R}{\tilde{c}_{11}(q)} = \frac{R}{c_1} \sqrt{1+q^2}$$

et

$$\gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}.$$

- si $|\cos \theta| > \frac{\tilde{c}_{11}(q)}{\tilde{c}_{12}(q)}$ alors, d'après les résultats de la première partie :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} &= \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt \\ &+ \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t), q) \right]}{2\pi \sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt \end{aligned}$$

avec

$$v_1^+(t, q) = -i \left(\frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2}} \right)$$

et

$$t_1(q) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_{11}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{12}^2(q)} - \frac{R \cos \theta}{\tilde{c}_{12}(q)}}.$$

Intéressons-nous donc à la condition $|\cos \theta| \leq \frac{\tilde{c}_{11}(q)}{\tilde{c}_{12}(q)}$ qui s'écrit également :

$$|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2} \frac{\sqrt{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} q^2}}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{c_1}{c_2} g(q). \quad (2.23)$$

Comme $c_2 > c_1$ il est évident que $g(q) > 1$. La condition (2.23) sera donc vérifiée pour tout q réel si $\cos \theta \leq \frac{c_1}{c_2}$. Supposons maintenant que $\cos \theta > \frac{c_1}{c_2}$, on peut alors montrer que la condition (2.23) est équivalente à :

$$q^2 \geq q_2^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\cos^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right]. \quad (2.24)$$

Nous traiterons donc séparément les cas $\cos \theta \leq \frac{c_1}{c_2}$ et $\cos \theta > \frac{c_1}{c_2}$.

- a) si $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$.** Dans ce cas, quel que soit q :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt$$

On peut donc montrer, comme pour $z < 0$ que :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= 0 & \text{si } t < t_{01}(0) = \frac{R}{c_1} \\ u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], \end{aligned}}$$

avec

$$q_{01}(t) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1}.$$

b) si $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$. Dans ce cas on vérifie que :

- si $q > q_2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt ;$$

- si $q \leq q_2$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} d\tilde{p} &= \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt \\ &+ \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q)) \right]}{2\pi \sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt \end{aligned}$$

donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_1} [\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2]$$

avec

$$\tilde{u}_1 = - \int_{-q_2}^{q_2} \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q)) \right]}{\sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt dq$$

et

$$\tilde{u}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{\Re e \left[1 + \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt dq.$$

Etudions d'abord \tilde{u}_1 , on remarque que

$$q \longmapsto \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt$$

est une fonction paire :

$$\tilde{u}_1 = -2 \int_0^{q_2} \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt dq.$$

On peut échanger l'ordre d'intégration (voir figures 9 et 10) :

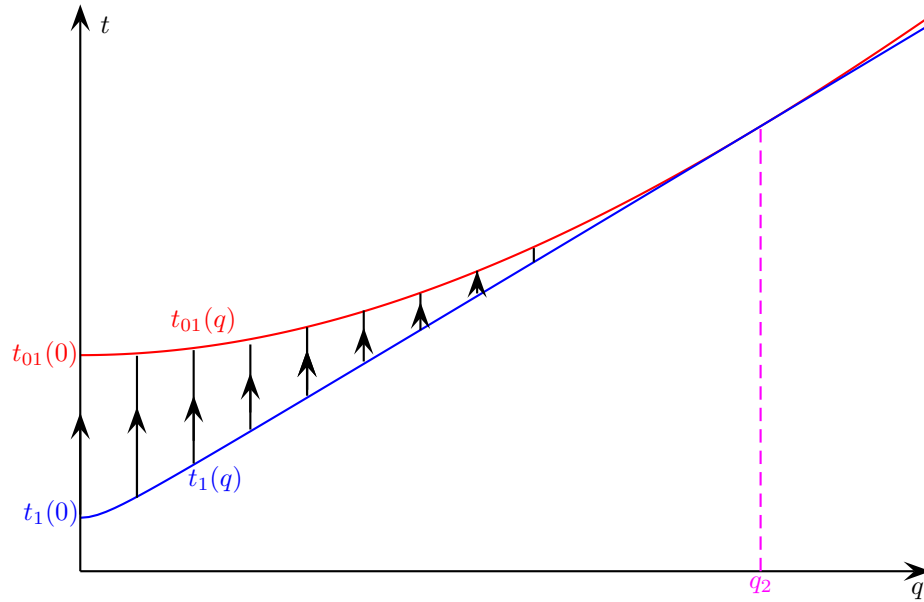
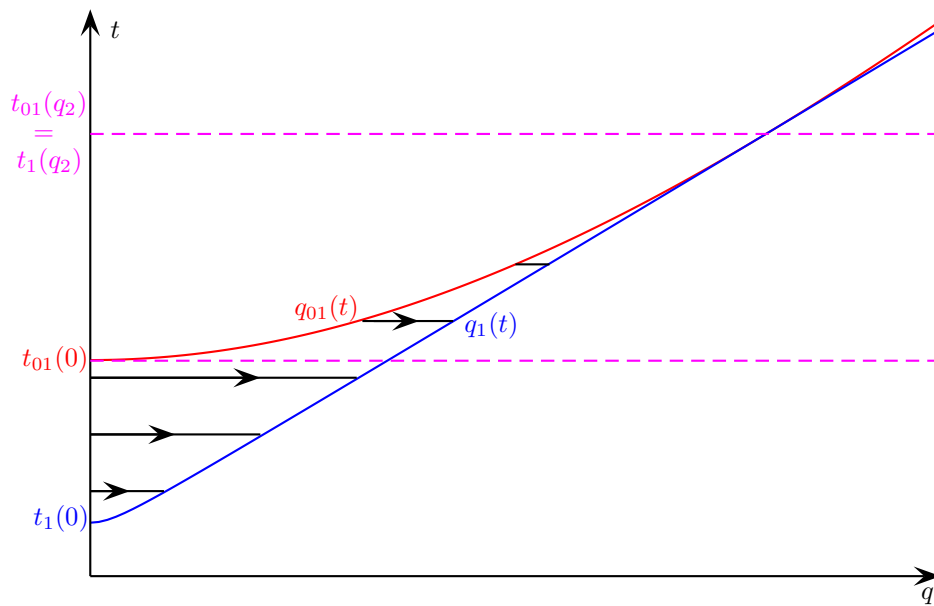
$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= -2 \frac{c_1}{R} \int_{t_1(0)}^{t_{01}(0)} \int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} e^{-st} dq dt \\ &\quad - 2 \frac{c_1}{R} \int_{t_{01}(0)}^{t_{01}(q_2)} \int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} e^{-st} dq dt \end{aligned}$$

avec

$$q_1(t) = \sqrt{\left(\frac{c_1 t}{R |\cos \theta|} - \frac{|\sin \theta|}{|\cos \theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} = t_1^{-1}(t)$$

et

$$q_{01}(t) = \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{R^2}} \quad \text{si } t < \frac{R}{c_1} \quad \text{et} \quad q_{01}(t) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1} = t_{01}^{-1}(t) \quad \text{si } t > \frac{R}{c_1}.$$

Figure 9: Intégration sur q puis sur t Figure 10: Intégration sur t puis sur q

Finalement :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= 0, \quad \text{si } t < t_1(0) \\
 u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right], \quad \text{si } t_1(0) < t < t_{01}(0) \\
 u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] \\
 &\quad \text{si } t_{01}(0) < t < t_{01}(q_2) \\
 u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t_{01}(q_2) < t.
 \end{aligned}$$

Remarque 2.4 Il est évident que $t_1(0) = R/c_1$ et

$$t_1(0) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{R \cos \theta}{c_2},$$

sont bien les temps limites utilisés pour établir les conditions sur t à la remarque 2.1. Quant à $t_{01}(q_2)$, on vérifie que :

$$t_{01}^2(q_2) = \frac{R^2}{c_1^2} (1 + q_2^2) = \frac{R^2}{c_1^2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\cos^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right] \right) = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right).$$

2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface, démonstration du théorème 2.2

Calcul de u^r . On pose $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}$, $\sin \theta = \frac{z+h}{R}$.

On définit également les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_1(q)$ et $q \mapsto \tilde{c}_2(q)$ par

$$\tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+\frac{c_2^2}{c_1^2}q^2}}$$

et $(p, q) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(p, q)$ par

$$\tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \frac{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme dans le cas $h = 0$ on montre que :

$$\tilde{u}^r(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[|z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} d\tilde{p} dq, \quad (2.25)$$

puis que :

a) si $c_1 > c_2$ ou si $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$. Alors il n'y a pas d'onde de tête et

$$\boxed{\begin{aligned} u^r(x, y, z, t) &= 0 & \text{si } t < t_{01}(0) = \frac{R}{c_1} \\ u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], & \text{si } t > t_{01}(0). \end{aligned}}$$

avec

$$\gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}$$

et

$$q_{01}(t) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1}.$$

b) si $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$. Il faut calculer la contribution de l'onde de tête :

$$\begin{aligned}
 u^r(x, y, z, t) &= 0, \quad \text{si } t < t_1(0) \\
 u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right] \quad \text{si } t_1(0) < t < t_{01}(0) \\
 u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] \\
 &\quad \text{si } t_{01}(0) < t < t_{01}(q_2) \\
 u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t_{01}(q_2) < t.
 \end{aligned}$$

avec

$$t_1(q) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_{11}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{12}^2(q)} - \frac{R \cos \theta}{\tilde{c}_2(q)}},$$

$$q_1(t) = \sqrt{\left(\frac{c_1 t}{R |\cos \theta|} - \frac{|\sin \theta|}{|\cos \theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} = t_1^{-1}(t)$$

et

$$v_1^+(t, q) = -i \left(\frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q) t^2}{R^2}} \right).$$

Les calculs sont similaires au cas où la source est sur l'interface.

Remarque 2.5 On peut alors démontrer le lemme 2.2 en remarquant que le front de l'onde de tête est l'ensemble des points vérifiant soit

$$t = t_{01}(q_2) = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right),$$

soit

$$t = t_1(0) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} - \frac{R \cos \theta}{c_2}}.$$

Calcul de u^t . Après avoir utilisé la transformation de Fourier inverse suivant x et y on obtient :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - i k_x x_i - k_y y} dk_x dk_y$$

On effectue alors successivement les changements de variable

$$k_x = \frac{p_x s}{c_2}, \quad k_y = \frac{p_y s}{c_2}$$

puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(p, q)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[-z(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 + q^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} dp dq$$

avec l'abus de notation

$$\mathcal{T}(p, q) = \mathcal{T}\left(\frac{p}{c_2}, \frac{q}{c_2}, 1\right) = \frac{2\rho_2 (p^2 + q^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(p^2 + q^2 + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (p^2 + q^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.26)$$

En utilisant le changement de variable

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}}$$

et les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_1(q)$, $q \mapsto \tilde{c}_2(q)$ et $(p, q) \mapsto \tilde{T}(p, q)$ définies par

$$\tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} q^2}},$$

et

$$\tilde{T}(\tilde{p}, q) = \frac{2\rho_2 (1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on peut réécrire \tilde{u} sous la forme :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{T}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{22}(q)} \left[-z(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} dq.$$

D'après les calculs effectués lors du calcul de l'onde transmise dans la première partie et en utilisant le lemme 2.3 on a :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \Re e \left[\frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{I}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq.$$

avec $\gamma^+(t, q)$, $\mathcal{F}(p, t, q)$ et $t_{02}(q)$ définis page 22.

Remarquons maintenant que

$$q \mapsto \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \Re e \left[\frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{I}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt$$

est une fonction paire :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi^2 c_2} \int_0^{+\infty} \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \Re e \left[\frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{I}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq.$$

En utilisant la fonction $q_{02}(t) = t_{02}^{-1}(t)$ on peut inverser l'ordre d'intégration :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi^2 c_2} \int_{t_{02}(0)}^{+\infty} \int_0^{q_{02}(t)} \Re e \left[\frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{I}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] dq e^{-st} dt.$$

Finalement :

$$\begin{array}{l}
u^t(x, y, z, t) = 0, \quad \text{si } t < t_{02}(0) \\
\\
u^t(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{02}(t)} \Re e \left[\frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
\\
\text{si } t > t_{02}(0).
\end{array}$$

La condition $t > t_{02}(0)$ est bien équivalente à la condition $\mathbf{x} \in \Omega_T$ utilisée dans le théorème 2.2 (par définition de Ω_T).

3 Interaction fluide-solide

Considérons maintenant un milieu infini composé d'un demi-espace fluide Ω_f et d'un demi-espace solide isotrope Ω_s séparés par une interface horizontale Γ . Comme en dimension deux, nous nous intéressons à la formulation en pression dans le fluide et en vitesse dans le solide, la source est une source ponctuelle de pression située dans le fluide à une distance h de l'interface. Les équations à résoudre sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) f(t) \quad (\Omega_f), \\ \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{V}_s}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \mathbf{div}(\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{V}_s) + \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}_s) = 0 \quad (\Omega_s). \end{array} \right. \quad (3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{V}_s}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \mathbf{div}(\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{V}_s) + \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}_s) = 0 \quad (\Omega_s). \end{array} \right. \quad (3.1b)$$

Les deux milieux sont liés par les conditions de transmission suivantes qui traduisent la continuité des vitesses normales à l'interface et l'égalité entre les contraintes normales et la pression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{sy}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\Gamma), \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad (\Gamma), \\ \frac{\partial V_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{sy}}{\partial x} = 0. \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (3.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (3.1d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{sy}}{\partial x} = 0. \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (3.1e)$$

Nous pouvons simplifier ces équations en décomposant le champ de vitesse \mathbf{V}_s en ondes P et S, en posant $\mathbf{V}_s = \underline{\underline{\nabla}} \Phi + \mathbf{rot} \Psi$. Dans ce cas le vecteur Ψ sera défini "à un gradient près"

puisque

$$\mathbf{rot}(\Psi + \nabla A) = \mathbf{rot} \Psi$$

pour tout champ A . Pour définir Φ de manière unique nous imposerons la condition suivante, dite condition de jauge :

$$\text{div} \Psi = 0.$$

L'ensemble des champs Ψ vérifiant cette dernière condition s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \Psi_1 - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Psi_2.$$

Le champ V_s s'écrit donc :

$$V_s = \nabla \Phi - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Psi_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \Psi_2$$

et le système à résoudre devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y) \delta(z-h) f(t) \quad (\Omega_f), \end{array} \right. \quad (3.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - \Delta \Psi_1 = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.2c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} - \Delta \Psi_2 = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (3.2d)$$

avec $c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_s}}$ et $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$.

Les conditions de transmission se réécrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{sz}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.2e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sz}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.2f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{sx}}{\partial z} + \frac{\partial V_{sz}}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.2g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{sy}}{\partial z} + \frac{\partial V_{sz}}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (\Gamma). \quad (3.2h)$$

Nous allons maintenant calculer les fonctions de Green associées à ce problème, elles sont solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] = \delta(x)\delta(y-h)\delta(t) \end{array} \right. \quad (\Omega_f), \quad (3.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (\Omega_s), \quad (3.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (\Omega_s), \quad (3.3c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (\Omega_s), \quad (3.3d)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sz}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.3e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_{sz}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_{sy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.3f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sx}}{\partial z} + \frac{\partial v_{sz}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.3g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sy}}{\partial z} + \frac{\partial v_{sz}}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\Gamma), \quad (3.3h)$$

et

$$\mathbf{v}_s = \nabla \phi - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \psi_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \psi_2.$$

3.1 Résultats

Comme en dimension 2 nous supposons que $c_f < c_S < c_P$.

3.1.1 Les fronts d'onde.

Dans le cas d'une interaction fluide-structure, l'onde de pression dans le fluide apparaît comme la somme d'une onde incidente, d'une onde de volume réfléchie et de deux ondes de tête. L'onde se propageant dans le solide se décompose en une onde de volume de compression, de rotationnel nul (dite onde P), une onde de volume de cisaillement, à divergence nulle (dite onde S), et une onde de tête de cisaillement. La définition précise de chacune de ces ondes est donnée à la section 3.1.2. Nous utiliserons :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z + h = R \sin \theta.$$

Front de l'onde incidente dans le fluide. Pour un instant t donné, le front de l'onde incidente de pression (en vert sur les figures 11.a et 12) est l'intersection de la sphère de centre $(0, h)$ et de rayon $c_f t$ avec le demi-plan supérieur. Toute l'onde incidente est contenue dans cette portion de sphère que nous notons $\Omega_I(t)$.

Front de l'onde réfléchie dans le fluide. Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur les figures 11.b et 12) est l'intersection de la sphère de centre $(0, -h)$ et de rayon $c_f t$ avec le demi-espace supérieur. Nous appelons $\Omega_R(t)$ l'intérieur de cette portion de sphère. $\Omega_R(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } \frac{R}{c_f} < t \right\}.$$

Fronts des ondes P et S transmises dans le solide. Comme en dimension 2 nous définissons $\xi_{0P}(r, z)$ et $\xi_{0S}(r, z)$ minimisant respectivement les fonctions

$$t_P(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(r - \xi)^2 + z^2}}{c_P}, \quad (3.4)$$

et

$$t_S(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(r - \xi)^2 + z^2}}{c_S}. \quad (3.5)$$

et nous notons

$$t_{0P}(r, z) = t_P(\xi_{0P}(r, z)) \text{ et } t_{0S}(r, z) = t_S(\xi_{0S}(r, z))$$

leur minimum. Le front de l'onde transmise P (resp. S) est l'ensemble des points tels que :

$$t_{0P}(r, z) = t \quad (\text{resp. } t_{0S}(r, z) = t).$$

Ce front d'onde est représenté en bleu ciel (resp. en rouge) sur les figures 11.f (resp. 11.c) et 12. Nous définissons également l'ensemble $\Omega_P(t)$ (resp. $\Omega_S(t)$) par :

$$\Omega_P(t) = \{(x, y, z) \mid z \leq 0 \text{ et } t_{0P}(r, z) \leq t\}$$

$$(\text{resp. } \Omega_S(t) = \{(x, y, z) \mid z \leq 0 \text{ et } t_{0S}(x, r) \leq t\}).$$

Fronts des ondes de tête dans le fluide. Nous notons A (resp. E) l'intersection du front d'onde P (resp. S) avec l'axe $x = 0$ à droite et B (resp. F) le point tel que le segment $[AB]$ (en orange sur la figure 12) (resp. $[EF]$, en magenta) soit tangent à $\Omega_R(t)$. Nous notons $\omega_{teP1}(t)$ (resp. $\omega_{teS1}(t)$) le tronc de cône généré par la rotation du segment $[AB]$ (resp. $[EF]$) autour de l'axe (Oz) . Soit $\omega_{teP2}(t)$ la portion de sphère de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} - h\right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} - h,$$

délimitée par les plans de cote $z = 0$ et $z = z_B$.

Soit $\omega_{teS2}(t)$ la portion de sphère de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}} - h\right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}} - h,$$

délimitée par les plans de cote $z = 0$ et $z = z_F$. Le front de l'onde de tête P est la réunion de $\omega_{teP1}(t)$ et de $\omega_{teP2}(t)$ et le front de l'onde de tête S est la réunion de $\omega_{teS1}(t)$ et de $\omega_{teS2}(t)$.

Lemme 3.1 *L'angle $\theta_{cP} = \arccos\left(\frac{c_f}{c_P}\right)$ est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête P . De plus, pour t donné, l'ensemble des points de $\omega_{teP1}(t)$ vérifie l'équation :*

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_P}, \quad \theta \in [0, \theta_{cP}] \quad (3.6)$$

et l'ensemble des points de $\omega_{teP2}(t)$ vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_{cP}]. \quad (3.7)$$

L'angle $\theta_{cS} = \arccos(\frac{c_f}{c_S})$ est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête S. De plus, pour t donné, l'ensemble des points de $\omega_{teS1}(t)$ vérifie l'équation :

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_S}, \quad \theta \in [0, \theta_{cS}] \quad (3.8)$$

et l'ensemble des points de $\omega_{teS2}(t)$ vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_{cS}]. \quad (3.9)$$

La démonstration de ce lemme se fera lors de la démonstration du théorème 3.1 ci-dessous (voir page 65). Ici encore, dans le plan (x, z) , (3.6) est l'équation polaire d'un arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} \right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}},$$

joignant le point O au point B et (3.8) est l'équation polaire d'un arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}} \right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}},$$

joignant le point O au point F .

Nous noterons $\Omega_{tefP}(t)$ (en orange sur les figures 11.c et 12) l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête P et l'interface et $\Omega_{tefS}(t)$ (en magenta sur les figures 11.d et 12) l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête S et l'interface. $\Omega_{tefP}(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_{tefP}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} \right\}$$

et $\Omega_{tefS}(t)$ par :

$$\Omega_{tefS}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_S} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} \right\}.$$

Front de l'onde de tête dans le solide. Nous notons I le point tel que le segment $[AI]$ (en violet sur la figure 12) soit tangent à $\Omega_S(t)$. Nous notons $\omega_{teSP1}(t)$ le tronc de cône généré par la rotation de ce segment autour de l'axe (Oz) . Posons maintenant

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}$$

puis

$$z_{te} = \frac{1}{2} \left(h \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) - \frac{t}{\alpha} \right) \quad \text{et} \quad r_{te} = \sqrt{\frac{th}{\beta} - h^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{\alpha} - h \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)^2}.$$

Nous notons $\omega_{teSP2}(t)$ la portion de sphère de centre $(0, z_{te})$, de rayon r_{te} , délimitée par les plans de cote $z = 0$ et $z = z_I$. Le front de l'onde de tête SP dans le solide est la réunion de $\omega_{teSP1}(t)$ et de $\omega_{teSP2}(t)$.

Lemme 3.2 *Pour t donné, l'ensemble des points de $\omega_{teSP1}(t)$ vérifie l'équation :*

$$t = -y \left(\frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{c_S} \quad (3.10)$$

et l'ensemble des points de $\omega_{teSP2}(t)$ vérifie :

$$t = \frac{h^2 + z^2 - hz \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) + r^2}{\frac{h}{\beta} - \frac{z}{\alpha}}. \quad (3.11)$$

Comme le lemme précédent, ce lemme sera démontré au cours de la démonstration du théorème 3.1 (voir page 76). Remarquons qu'en élevant au carré les termes de (3.11) et après quelques calculs simples nous obtenons bien l'équation de la sphère de centre z_{te} et de rayon r_{te} .

Nous noterons $\Omega_{teSP}(t)$ l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête et l'interface (en violet sur les figures 11.f et 12). $\Omega_{teSP}(t)$ peut également être défini par :

$$\Omega_{teSP}(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } t_1^*(x, y, z) < t < t_2^*(x, y, z)\}.$$

avec

$$t_1^*(x, y, z) = -y \left(\frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{c_S}$$

et

$$t_2^*(x, y, z) = \frac{h^2 + z^2 - hz \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) + r^2}{\frac{h}{\beta} - \frac{z}{\alpha}}.$$

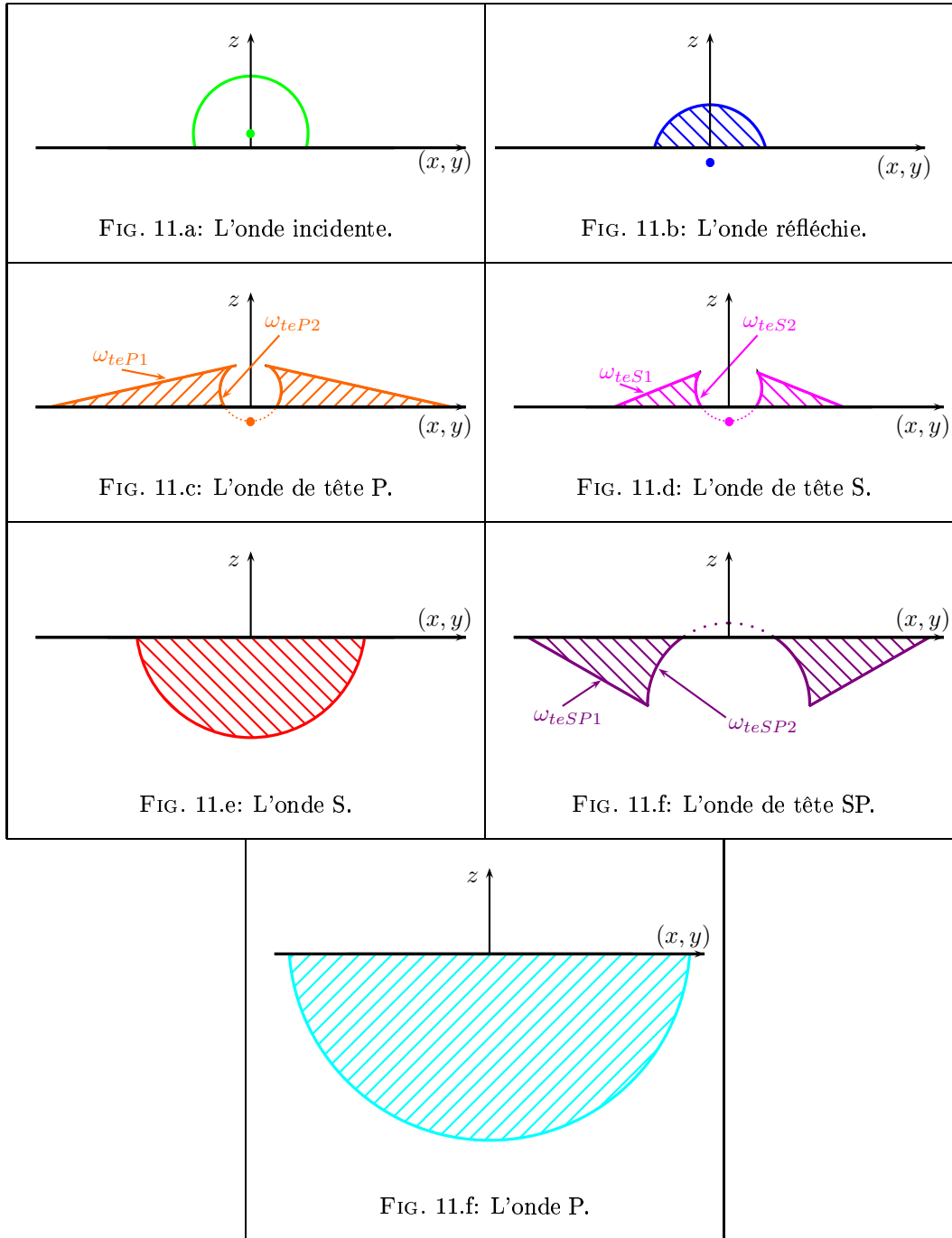


Figure 11: Les différentes ondes du problème

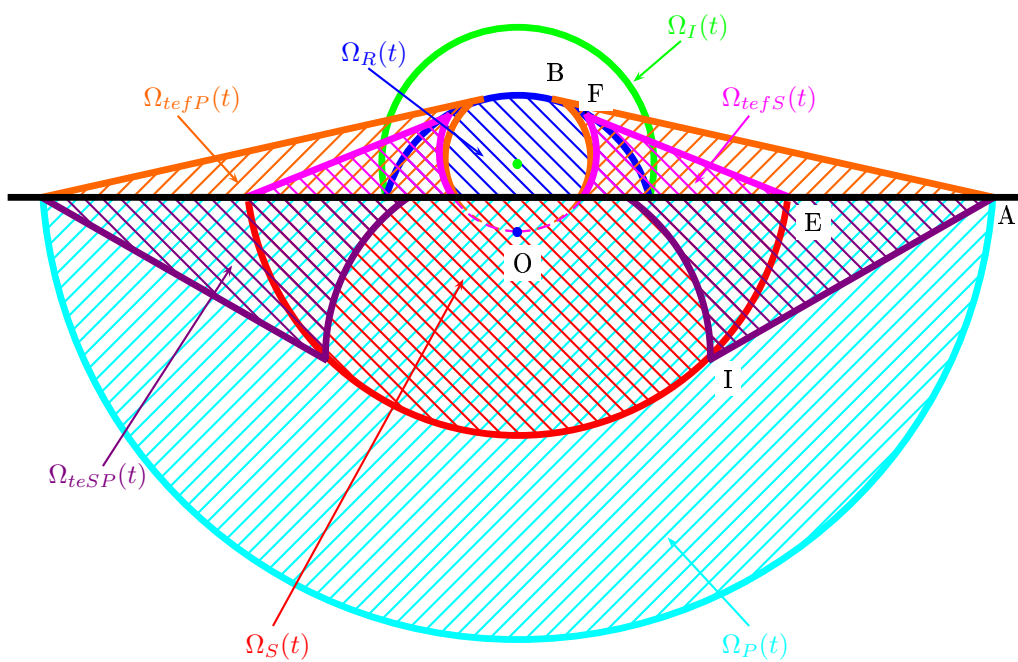


Figure 12: Représentation du front d'onde

3.1.2 Solutions analytiques.

Nous décomposons la solution p en $p = p^i + p^r$, avec p^i l'onde incidente de pression, c'est-à-dire la solution qu'on obtiendrait en remplaçant le solide par un fluide de vitesse de propagation c_f :

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : & p^i(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : & p^i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi R^*} \delta_{\frac{R^*}{c}}(t). \end{cases}$$

où $R^* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$.

Nous décomposons également \mathbf{v}_s en $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^P + \mathbf{v}_s^{S1} + \mathbf{v}_s^{S2}$, avec :

$$\mathbf{v}_s^P = \nabla \phi, \quad \mathbf{v}_s^{S1} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \psi_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_s^{S2} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \psi_2.$$

Notations. Nous posons maintenant :

$$\begin{cases} \tilde{c}_{ff}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+q^2}}, \\ \tilde{c}_{Pf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+\frac{c_f^2}{c_P^2}q^2}}, & \tilde{c}_{PP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1+q^2}}, \\ \tilde{c}_{Sf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+\frac{c_f^2}{c_S^2}q^2}}, & \tilde{c}_{SP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1+\frac{c_P^2}{c_S^2}q^2}}, & \tilde{c}_{SS}(q) = \frac{c_S}{\sqrt{1+q^2}} \end{cases}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_{ff}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fP}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}, \\ \tilde{k}_{Pf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PP}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2 + q^2} \\ \tilde{k}_{Sf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{SP}(p, q) = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{SS}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \end{array} \right.$$

et nous définissons les fonctions des variables complexes p et q définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(p, q) = \\ \frac{[(\lambda(\tilde{z}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}{[(\lambda(\tilde{z}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}, \\ \mathcal{T}_P(p, q) = \\ \frac{2\tilde{k}_{PP}(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2)}{[(\lambda(\tilde{z}_{PP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP}] \tilde{k}_{Pf} - c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2 - q^2)}, \\ \mathcal{T}_S(p, q) = \\ \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}\tilde{k}_{SS}}{[(\lambda(\tilde{z}_{SP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}] \tilde{k}_{Sf} - c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP} (\tilde{k}_{SS}^2 - p^2 - q^2)} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \mathcal{R}(p\sqrt{1+q^2}, q) \\ \tilde{\mathcal{T}}_P(p, q) = \mathcal{T}_P(p\sqrt{1+q^2}, q) \\ \tilde{\mathcal{T}}_S(p, q) = \mathcal{T}_S(p\sqrt{1+q^2}, q). \end{array} \right.$$

Nous définissons :

$$\begin{cases} \gamma_f^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{ff}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{ff}^2(q)t^2}{R^2} - 1}, \\ v_f^+(t, q) = -i \left(\frac{\tilde{c}_{ff}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{ff}^2(q)t^2}{R^2}} \right) \end{cases}$$

ainsi que la fonction :

$$q_{0f}(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{c_f^2 t^2}{R^2}} & \text{si } t < \frac{R}{c_f} \\ \sqrt{\frac{c_f^2 t^2}{R^2} - 1} & \text{si } t > \frac{R}{c_f}. \end{cases}$$

Pour définir $\gamma_P^+(t, q)$ et $q_{0P}(t)$ nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}_P(p, q, t) = -z(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{PP}^2(q)}{\tilde{c}_{Pf}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{PP}(q)t$$

et le temps d'arrivée de l'onde P transmise au point (x, y) , $t_{0P} = t_{0P}(x, y)$:

- pour tout $q \geq 0$ on définit $\tilde{t}_{0P}(q)$ le seul réel tel que l'équation $\mathcal{F}_P(p, q, \tilde{t}_{0P}(q)) = 0$ admette une racine double p ($\tilde{t}_{0P}(q)$ correspond au temps d'arrivée de l'onde S dans un milieu 2d virtuel de vitesse $c_{Sf}^2(q)$ et $\tilde{c}_{SP}(q)$) ;
- pour tous $q \geq 0$ et $t > \tilde{t}_{0P}(q)$, on définit $\gamma_P^+(t, q)$ la seule solution de l'équation $\mathcal{F}_P(p, q, t) = 0$ à partie réelle positive ;
- pour tout $t \geq t_{0P}$ on définit $q_{0P}(t)$ tel que $\tilde{t}_{0P}(q_{0P}(t)) = t$: q_{0P} est l'inverse de la fonction \tilde{t}_{0P} , c'est le seul réel tel que $\mathcal{F}_P(p, q_{0P}(t), t)$ admette une racine double.

De même, pour définir $\gamma_S^+(t, q)$, $q_{0S}(t)$ et $v^+(t)$ nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}_S(p, q, t) = -z(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{SS}(q)t$$

et le temps d'arrivée de l'onde S transmise au point (x, y) , $t_{0S} = t_{0S}(x, y)$:

- pour tout $q \geq 0$ on définit $\tilde{t}_{0S}(q)$ le seul réel tel que l'équation $\mathcal{F}_S(p, q, \tilde{t}_{0S}(q)) = 0$ admette une racine double $p = \tilde{p}_{0S}(q)$;

- pour tous $q \geq 0$ et $t > \tilde{t}_{0S}(q)$ on définit $\gamma_S^+(t, q)$ la seule racine de $\mathcal{F}_S(p, q, t)$ à partie réelle positive ;
- pour tout $t \geq t_{0S}$ on définit $q_{0S}(t)$ tel que $\tilde{t}_{0S}(q_{0S}(t)) = t$: $q_{0S}(t)$ est le seul réel tel que $\mathcal{F}_S(p, \tilde{q}_{0S}(t), t)$ admette une racine double.
- pour tous $q \geq 0$ et $t < \tilde{t}_{0S}(q)$ on définit $v_S^+(t, q)$, la seule racine de $\mathcal{F}_S(p, q, t)$ telle que :

$$\Im(\tilde{p}_{0S}(q)) \leq \Im(v_S^+(t, q)) \leq \Im\left(\frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}\right).$$

Pour le calcul des ondes de tête dans le fluide, nous utiliserons la fonction

$$q_f(t) = \sqrt{\left(\frac{c_f t}{R|\cos\theta|} - \frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|} \sqrt{1 - \frac{c_f^2}{c_P^2}}\right)^2 - \frac{c_f^2}{c_P^2}},$$

définie pour

$$R \sin\theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R|\cos\theta|}{c_P} < t < \frac{R}{\sin\theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}.$$

Pour le calcul des ondes de tête dans le solide, nous utiliserons la fonction

$$q_{SP}(t) = c_S \sqrt{\frac{1}{r^2} \left(t + z \left(\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left(\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{c_P^2}},$$

définie pour

$$t_1^*(x, y, z) < t < t_2^*(x, y, z).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3.1 *L'expression de l'onde réfléchie est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{tefP}(t) : \\
 \\
 p^r(x, y, z, t) = 0 ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{tefP}(t) : \\
 \\
 p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \setminus \Omega_R(t) : \\
 \\
 p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{0f}^2(t)}} dq \right] ; \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \cap \Omega_R(t) : \\
 \\
 p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{0f}(t)}^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{0f}^2(t)}} dq \right] \\
 \\
 + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right].
 \end{array} \right.$$

L'expression de l'onde P est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_P(t) : \left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^P(x, y, z, t) = 0, \\ v_{sy}^P(x, y, z, t) = 0, \\ v_{sz}^P(x, y, z, t) = 0, \end{array} \right. \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_P(t) : \\ \\ v_{sx}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[\frac{i\gamma_P^+(t, q) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ \\ v_{sy}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[\frac{iq \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ \\ v_{sz}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[\frac{\mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right]. \end{array} \right.$$

L'onde S2 est nulle dans tout l'espace, nous poserons donc $\mathbf{v}_s^S = \mathbf{v}_s^{S1}$ et l'expression de l'onde S est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_S(t) \cup \Omega_{teSP}(t) : \left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, z, t) = 0, \\ v_{sy}^S(x, y, z, t) = 0, \\ v_{sz}^S(x, y, z, t) = 0, \end{array} \right. \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_S(t) \setminus \Omega_{teSP}(t) : \\ \\ \left. \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ \\ v_{sy}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{iq \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ \\ v_{sz}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{(\gamma_S^{+2}(t, q) + q^2) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{teSP}(t) \setminus \Omega_S(t) : \\
 \\
 v_{sx}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{i v_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 \\
 v_{sy}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{i q \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 \\
 v_{sz}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{(v_S^+(t, q) + q^2) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right],
 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_S(t) \cap \Omega_{teSP}(t) : \\
 & \left. \begin{aligned}
 v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{i v_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{i \gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 v_{sy}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{i q \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{i q \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 v_{sz}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{(v_S^{+2}(t, q) + q^2) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{(\gamma_S^{+2}(t, q) + q^2) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right],
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

Remarque 3.1 *On vérifie facilement que :*

- la condition $x \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{tefP}(t)$ se réécrit

$$t > \frac{R}{c_f} \quad \text{si } \theta > \theta_{cf} \quad \text{et } t > \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{sinon ;}$$

- la condition $x \in \Omega_{tefP}(t) \setminus \Omega_R(t)$ se réécrit

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{R}{c_f} \quad \text{et } \theta < \theta_{cf} ;$$

- la condition $x \in \Omega_{tefP}(t) \cap \Omega_R(t)$ se réécrit

$$\frac{R}{c_f} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{et } \theta < \theta_c.$$

- la condition $x \in \Omega_S(t) \setminus \Omega_{teSP}(t)$ se réécrit

$$t > t_{0S} \quad \text{si } \Im m(p_{0S}) < \Im m\left(\frac{c_f}{c_S}\right) \quad \text{et } t > t_2^* \quad \text{sinon,}$$

avec $p_{0S} = \tilde{p}_{0S}(0)$ la racine double de $\mathcal{F}_S(p, 0, t_{0S})$;

- la condition $x \in \Omega_{tefP}(t) \setminus \Omega_R(t)$ se réécrit

$$t_1^* < t < t_{0S} \quad \text{et } \Im m(p_{0S}) < \Im m\left(\frac{c_f}{c_S}\right) ;$$

- la condition $x \in \Omega_{tefP}(t) \cap \Omega_R(t)$ se réécrit

$$t_{0S} < t < t_2^* \quad \text{et } \Im m(p_{0S}) < \Im m\left(\frac{c_f}{c_S}\right).$$

Les algorithmes de calcul de P^r , V^P et V^S sont présentés à la section suivante.

3.2 Démonstrations

3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier

Appliquons comme d'habitude la transformation de Laplace en temps et la transformation de Fourier suivant x et y à ces équations pour obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{s^2}{c_f^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{p} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = \delta(z-h) \quad z > 0, \end{array} \right. \quad (3.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{s^2}{c_p^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{\phi} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (3.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{s^2}{c_s^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{\psi}_1 - \frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial y^2} = 0 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (3.12c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{s^2}{c_s^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{\psi}_2 - \frac{\partial^2 \hat{\psi}_2}{\partial y^2} = 0 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (3.12d)$$

avec les quatre conditions de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} s\hat{v}_{sz} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad z = 0, \end{array} \right. \quad (3.12e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{v}_{sz}}{\partial z} + \lambda i k_x \hat{v}_{sx} + \lambda i k_y \hat{v}_{sy} = -sp \quad z = 0, \end{array} \right. \quad (3.12f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{v}_{sx}}{\partial z} + i k_x \hat{v}_{sz} = 0. \quad z = 0, \end{array} \right. \quad (3.12g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{v}_{sy}}{\partial z} + i k_y \hat{v}_{sz} = 0. \quad z = 0, \end{array} \right. \quad (3.12h)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{sx} = i k_x \hat{\phi} - i k_x \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z} - i k_y \psi_2 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (3.12i)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{sy} = i k_y \hat{\phi} - i k_y \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z} + i k_x \psi_2 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (3.12j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{sz} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} - (k_x^2 + k_y^2) \hat{\psi}_1 \quad z < 0. \end{array} \right. \quad (3.12k)$$

On en déduit facilement la forme des solutions (en introduisant les ondes de pression incidente, p^i , et réfléchie, p^r) :

$$\hat{p} = \hat{p}^i + \hat{p}^r \quad (3.13a)$$

$$\hat{p}^i = \frac{1}{2k_f} e^{-|z-h|k_f} \quad (3.13b)$$

$$\hat{p}^r = A_R e^{-zk_f} \quad (3.13c)$$

$$\hat{\phi} = A_P e^{zk_P} \quad (3.13d)$$

$$\hat{\psi}_1 = A_{S1} e^{zk_S} \quad (3.13e)$$

$$\hat{\psi}_2 = A_{S2} e^{zk_S} \quad (3.13f)$$

$$\hat{v}_{sx} = ik_x A_P e^{zk_P} - ik_x k_S A_{S1} e^{zk_S} - ik_y A_{S2} e^{zk_S} \quad (3.13g)$$

$$\hat{v}_{sy} = ik_y A_P e^{zk_P} - ik_y k_S A_{S1} e^{zk_S} + ik_x A_{S2} e^{zk_S} \quad (3.13h)$$

$$\hat{v}_{sz} = k_P A_P e^{zk_P} - (k_x^2 + k_y^2) A_{S1} e^{zk_S}, \quad (3.13i)$$

avec $k_f = \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $k_P = \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_P^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $k_S = \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_S^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Les coefficients A_R , A_P et A_S sont ensuite déterminés à l'aide des équations de transmission (3.12e), (3.12f), (3.12g) et (3.12h) :

$$\left\{ \begin{array}{l} sk_P A_P - (k_x^2 + k_y^2) s A_{S1} = -\frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f} + \frac{k_f}{\rho_f} A_R, \end{array} \right. \quad (3.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) [z_P^2 A_P - (k_x^2 + k_y^2) k_S A_{S1}] + \lambda ik_x [ik_x A_P - ik_x A_{S1} k_S - ik_y A_{S2} k_S] \\ + \lambda ik_y [ik_y A_P - ik_y A_{S1} k_S + ik_x A_{S2} k_S] = -s \left[\frac{1}{2k_f} e^{-hk_f} + A_R \right], \end{array} \right. \quad (3.14b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_x k_P A_P - ik_x z_S^2 A_{S1} - ik_y z_S^2 A_{S2} + ik_x [k_P A_P - (k_x^2 + k_y^2) A_{S1}] = 0, \end{array} \right. \quad (3.14c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_y k_P A_P - ik_y z_S^2 A_{S1} + ik_x z_S^2 A_{S2} + ik_y [k_P A_P - (k_x^2 + k_y^2) A_{S1}] = 0. \end{array} \right. \quad (3.14d)$$

On vérifie facilement (en effectuant (3.14d) $\times ik_x -$ (3.14c) $\times ik_y$) que $A_{S2} = 0$ et le système (3.14) devient (en posant $A_S = A_{S1}$) :

$$\begin{cases} \frac{k_f}{\rho_f} A_R - & sk_P A_P + & s(k_x^2 + k_y^2) A_S = & \frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f}, \\ sA_R + & [(\lambda + 2\mu)z_P^2 - \lambda(k_x^2 + k_y^2)] A_P - & 2i(k_x^2 + k_y^2)\mu k_S A_S = & -\frac{s}{2k_f} e^{-hk_f}, \\ & 2k_P A_P - & [z_S^2 + k_x^2 + k_y^2] A_S = & 0. \end{cases}$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$A_R = \mathcal{R}(k_x, k_y) \frac{e^{-hk_f}}{2k_f}, \quad A_P = \mathcal{T}_P(k_x, k_y) \frac{e^{-hk_f}}{2k_P}, \quad \text{et} \quad A_S = \mathcal{T}_S(k_x, k_y) \frac{e^{-hk_f}}{2k_S},$$

avec

$$\mathcal{R}(k_x, k_y) =$$

$$\frac{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P(k_x^2 + k_y^2)] k_f - \rho_f s^2 k_P(k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)}{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P(k_x^2 + k_y^2)] k_f + \rho_f s^2 k_P(k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)},$$

$$\mathcal{T}_P(k_x, k_y) =$$

$$\frac{2sk_P(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2)}{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P(k_x^2 + k_y^2)] k_f + \rho_f s^2 k_P(k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)},$$

$$\mathcal{T}_S(k_x, k_y) =$$

$$\frac{-4sk_S k_P}{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P(k_x^2 + k_y^2)] k_f + \rho_f s^2 k_P(k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)}.$$

Donc :

$$\hat{p}^r = \frac{\mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2k_f} e^{-(z+h)k_f} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{v}}_s = \hat{\mathbf{v}}_s^P + \hat{\mathbf{v}}_s^S \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^P = \frac{ik_x \mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2k_P} e^{zk_P - hk_f}, \\ v_{sy}^P = \frac{ik_y \mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2k_P} e^{zk_P - hk_f}, \\ v_{sz}^P = \frac{\mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_P - hk_f} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^S = -\frac{ik_x \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_S - hk_f}, \\ v_{sy}^S = -\frac{ik_y \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_S - hk_f}, \\ v_{sz}^S = -\frac{(k_x^2 + k_y^2) \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2k_S} e^{zk_S - hk_f}. \end{array} \right.$$

Nous nous intéresserons uniquement au calcul de p^r et v_{sx} , le calcul de v_{sy} et de v_{sz} étant très similaire.

3.2.2 Démonstration du théorème 3.1

Calcul de p^r . On a

$$\tilde{p}^r(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(k_x, k_y, s)}{2k_f} e^{-(z+h)k_f - i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x. \quad (3.15)$$

Nous effectuons successivement les changements de variables $k_x = \frac{p_x s}{c_f}$, $k_y = \frac{p_y s}{c_f}$, puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{p}^r(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(p, q)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_f} [(z+h)(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + ipr]} dp dq.$$

avec

$$\mathcal{R}(p, q) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_f}, \frac{q}{c_f}, 1\right) =$$

$$\frac{[(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu\tilde{k}_{fS}\tilde{k}_{fP}(p^2 + q^2)] \tilde{k}_{ff} - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP}(\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}{[(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu\tilde{k}_{fS}\tilde{k}_{fP}(p^2 + q^2)] \tilde{k}_{ff} + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP}(\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}$$

et

$$\tilde{k}_{ff}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fP}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}.$$

Posons maintenant

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

puis définissons les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_{ff}(q)$ et $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)$ par

$$\tilde{c}_f(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1 + q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q) = \mathcal{R}(\tilde{p}\sqrt{1 + q^2}, q).$$

On a alors

$$\tilde{p}^r(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{ff}(q)} [(z+h)(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r]} d\tilde{p} dq.$$

Comme dans le cas de deux milieux acoustiques on peut donc montrer que :

a) si $|\cos \theta| < \frac{c_f}{c_P}$. Il n'y a pas d'onde de tête et

$$\begin{aligned} p^r(x, y, z, t) &= 0 & \text{si } t < t_{0f}(0) = \frac{R}{c_f} \\ p^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right], & \text{si } t > t_{0f}(0). \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_f^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_f(q)t}{R} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{\frac{\tilde{c}_f^2(q)t^2}{R^2} - 1}.$$

b) si $|\cos \theta| > \frac{c_f}{c_P}$. Alors il faut tenir compte des ondes de tête :

$$\begin{aligned}
p^r(x, y, z, t) &= 0, \quad \text{si } t < t_f(0) \\
p^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{0f}^2(t)}} dq \right], \quad \text{si } t_f(0) < t < t_{0f}(0) \\
p^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{0f}(t)}^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{0f}^2(t)}} dq \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right] \\
&\quad \text{si } t_{0f}(0) < t < t_{2f} \\
p^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t_{2f} < t.
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
q_{0f}(t) &= \sqrt{\left| \frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1 \right|}, \quad t_f(q) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_f^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_P^2(q)} - \frac{R \cos \theta}{\tilde{c}_P(q)}}, \\
q_{2f}^2 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\cos^2 \theta - \frac{c_f^2}{c_P^2} \right], \quad t_{2f} = t_{0f}(q_{2f}) \quad \text{et} \\
v_f^+(t, q) &= -i \left(\frac{\tilde{c}_f(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_f^2(q)t^2}{R^2}} \right).
\end{aligned}$$

Remarque 3.2 Comme en dimension 2, la méthode de Cagniard-de Hoop ne permet pas de différencier les ondes de tête S et P . Néanmoins, on peut montrer que la solution p^r n'est pas régulière aux temps

$$\begin{aligned}
t_{fP} = t_f(0) &= R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_f^2} - \frac{1}{\tilde{c}_P^2} - \frac{R \cos \theta}{c_P}}, \\
t_{fS} &= R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_f^2} - \frac{1}{\tilde{c}_S^2} - \frac{R \cos \theta}{c_S}},
\end{aligned}$$

$$t_f(q_{2fP}) \quad \text{et} \quad t_f(q_{2fS})$$

avec

$$q_{2fP} = q_{2f}^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\cos^2 \theta - \frac{c_f^2}{c_P^2} \right] \quad \text{et} \quad q_{2fS} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\cos^2 \theta - \frac{c_f^2}{c_S^2} \right].$$

Il est alors facile de démontrer le lemme 3.1

Calcul de v_{sx}^P On a

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik_x \mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2k_P} e^{zk_P - hk_f - i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x. \quad (3.16)$$

Nous effectuons successivement les changements de variable $k_x = \frac{p_x s}{c_P}$, $k_y = \frac{p_y s}{c_P}$, puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_P} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{T}_P(p, q)}{2c_P(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{s}{c_P} \left[-z(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_f^2}{c_f^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dpdq$$

avec

$$\mathcal{T}_P(p, q) = \mathcal{T}_P\left(\frac{p}{c_P}, \frac{q}{c_P}, 1\right) =$$

$$\frac{2c_P^2 \tilde{k}_{PP}(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2)}{\left[(\lambda(\tilde{k}_{PP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu\tilde{k}_{PS}\tilde{k}_{PP}(p^2 + q^2) \right] \tilde{k}_{Pf} + c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP}(\tilde{k}_{PS}^2 - p^2 - q^2)}$$

et

$$\tilde{k}_{Pf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PP}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}.$$

Posons maintenant

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

puis définissons les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_{PP}(q)$, $q \mapsto \tilde{c}_{Pf}(q)$ et $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}_P(\tilde{p}, q)$ par

$$\tilde{c}_{PP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad \tilde{c}_{Pf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1 + \frac{c_f^2}{c_P^2} q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{T}}_P(\tilde{p}, q) = \mathcal{T}_P(\tilde{p}\sqrt{1 + q^2}, q).$$

On a alors

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_P} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\tilde{p}\tilde{\mathcal{T}}_P(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{PP}(q)(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{PP}(q)} \left[-z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{PP}(q)}{\tilde{c}_{Pf}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p}dq$$

Comme $c_P > c_S > c_f$, le contour d'intégration ne traverse pas les coupures, si on suppose de plus que les pôles de \mathcal{T}_P sont imaginaires purs et à l'extérieur de ce contour, on montre, de la même manière que pour le calcul de l'onde transmise dans le cas de deux milieux acoustiques, que :

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^P(x, y, z, t) &= 0, & \text{si } t < t_{0P}(0) \\ v_{sx}^P(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[\frac{i\gamma_P^+(t, q)\mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t, q))}{(1+\gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\ & \text{si } t > t_{0P}(0). \end{aligned}}$$

avec $\gamma_P^+(t, q)$, $\mathcal{F}_P(p, t, q)$, $t_{0P}(0)$ et $q_{0P}(t)$ définis respectivement comme $\gamma_2^+(t, q)$, $\mathcal{F}(p, t, q)$, $t_{02}(0)$ et $q_{02}(t)$ dans le cas de deux milieux acoustiques, en remplaçant respectivement c_1 et c_2 par c_f et c_P .

Calcul de v_{sx}^S On a

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, z, s) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik_x \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_S - hk_f - i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x. \quad (3.17)$$

Nous effectuons successivement les changements de variable $k_x = \frac{p_x s}{c_S}$, $k_y = \frac{p_y s}{c_S}$, puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, z, s) = -\frac{s}{4\pi^2 c_S} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip\mathcal{T}_S(p, q)}{2c_S} e^{\frac{s}{c_S} \left[-z(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dpdq$$

avec

$$\mathcal{T}_S(p, q) = \mathcal{T}_S\left(\frac{p}{c_S}, \frac{q}{c_S}, 1\right) =$$

$$\frac{-4c_S^3 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}}{\left[(\lambda(\tilde{k}_{SP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu \tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}(p^2 + q^2) \right] \tilde{k}_{Sf} + c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP}(\tilde{k}_{SS}^2 - p^2 - q^2)}$$

et

$$\tilde{k}_{Pf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PP}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}.$$

Posons maintenant

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

puis définissons les fonctions $q \mapsto \tilde{c}_{SS}(q)$, $q \mapsto \tilde{c}_{SP}(q)$, $q \mapsto \tilde{c}_{Sf}(q)$ et $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q)$ par

$$\tilde{c}_{SS}(q) = \frac{c_S}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad \tilde{c}_{SP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q^2}}, \quad \tilde{c}_{Sf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1 + \frac{c_f^2}{c_S^2} q^2}}$$

et

$$\tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q) = \mathcal{T}_S(\tilde{p}\sqrt{1 + q^2}, q).$$

On a alors

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, z, s) = -\frac{s}{4\pi^2 c_S} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\tilde{p}\tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{SS}(q)} \left[-z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} dq.$$

Nous notons

$$\mathcal{F}_S(p, q, t) = -z(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{SS}(q)t = 0$$

et nous appelons $t_{0S}(q)$ le seul réel tel que $\mathcal{F}_S(p, q, t_{0S}(q))$ admette une racine double que nous noterons $p = \tilde{p}_{0S}(q)$. Comme lors du calcul de l'onde réfléchie nous devons distinguer deux cas :

a) si $|\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}$. Alors

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip\mathcal{T}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{SS}(q)} \left[-z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} \\ &= \int_{t_{0S}(q)}^{+\infty} \Re e \left[\frac{i\gamma_S^+(t, q)\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

avec $\gamma_S^+(t, q)$ la seule racine de $\mathcal{F}_S(p, q, t)$ à partie réelle positive.

b) si $|\tilde{p}_{0S}(q)| > \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}$. Posons alors

$$t_{SP}(q) = -z \left(\frac{1}{\tilde{c}_{SS}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q)} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{1}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q)} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{\tilde{c}_{SP}(q)}.$$

D'après le lemme 2.3, pour $t_{SP}(q) \leq t < t_{0S}(q)$, il existe un unique p , racine de $\mathcal{F}_S(p, q, t)$ et appartenant à

$$\left[\tilde{p}_{0S}(q) ; -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)} \right].$$

Nous noterons $v_S^+(t, q)$ cette racine. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{T}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{-s}{\tilde{c}_{SS}(q)} \left[-z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} \\ &= \int_{t_{SP}(q)}^{t_{0S}(q)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \mathcal{T}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt \\ &+ \int_{t_{0S}(q)}^{+\infty} \Re e \left[\frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Nous utiliserons par la suite le

Lemme 3.3 *La fonction $I : q \mapsto \Im m[p_{0S}(q)]$ est strictement croissante.*

Démonstration :

Comme $\tilde{p}_{0S}(q)$ est racine double de $\mathcal{F}_S(p, q, t)$ on sait que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}_{0S}(q), q, t) = -\frac{z\tilde{p}_{0S}(q)}{(1 + \tilde{p}_{0S}(q)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h\tilde{p}_{0S}(q)}{\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}_{0S}(q)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + ir = 0,$$

soit

$$-\frac{zI(q)}{(1 - I^2(q))^{\frac{1}{2}}} + \frac{hI(q)}{\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} - I^2(q) \right)^{\frac{1}{2}}} + r = 0. \quad (3.18)$$

Supposons maintenant que $I(q)$ soit décroissante. Alors, comme $\Im m[\tilde{p}_{0S}(q)] < 0$ (d'après le lemme 2.3), $I^2(q)$ et

$$q \mapsto \frac{1}{(1 - I^2(q))^{\frac{1}{2}}}$$

sont croissantes. Remarquons maintenant que

$$q \mapsto \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} = \frac{c_S}{c_f} \frac{1 + \frac{c_f^2}{c_S^2} q^2}{1 + q^2}$$

est une fonction strictement décroissante pour $q > 0$. Donc :

$$q \mapsto \frac{1}{\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} - I^2(q) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

est strictement croissante. Comme $z < 0$ et $h > 0$ la fonction

$$\mathcal{G} : q \mapsto -\frac{z}{(1 - I^2(q))^{\frac{1}{2}}} + \frac{h}{\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + I^2(q) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

est strictement croissante, or, d'après (3.18), $I(q) = -r/\mathcal{G}(q)$, donc $I(q)$ est une fonction strictement croissante, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Nous en déduisons le

Corollaire 3.1 *Si $|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P$ alors $|\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \tilde{c}_{SS}(q)/\tilde{c}_{SP}(q)$ pour tout q de \mathbb{R}^+ .*

Démonstration :

$I(q)$ étant une fonction strictement croissante $|\tilde{p}_{0S}(q)| = -I(q)$ est strictement décroissante. Remarquons maintenant que

$$q \mapsto \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{SP}^2(q)} = \frac{c_P}{c_f} \frac{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q^2}{1 + q^2}$$

est une fonction strictement croissante pour $q > 0$. Il est donc évident que

$$|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq \frac{c_S}{c_P} = \frac{\tilde{c}_{SS}(0)}{c_{SP}(0)} \implies |\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{c_{SP}(q)}.$$

■

Donc, si $|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P$, il n'y a pas d'onde de tête. Dans le cas contraire on aura également besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4 *Si $|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P$ alors*

$$q_{2S} = \sqrt{\frac{r^2}{\left(\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - c_P^2}} - \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} \right)^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}} \quad (3.19)$$

est tel que

$$\tilde{p}_{0S}(q_{2S}) = -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}.$$

De plus,

$$\begin{cases} |\tilde{p}_{0S}(q)| > \frac{\tilde{c}_S(q)}{\tilde{c}_P(q)} & \text{si } q < q_{2S}; \\ |\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \frac{\tilde{c}_S(q)}{\tilde{c}_P(q)} & \text{si } q \geq q_{2S}. \end{cases}$$

Démonstration :

Vérifions d'abord que $q_{2S} \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que :

$$|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P \implies \left(\frac{r}{\frac{z}{\sqrt{1-\frac{c_S^2}{c_P^2}}} - \frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_j^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}}} \right)^2 \geq \frac{c_S^2}{c_P^2}.$$

Pour cela rappelons que $\tilde{p}_{0S}(0)$ est tel que $\frac{\partial f_S}{\partial p}(\tilde{p}_{0S}(0), 0, t_{0S}) = 0$, soit :

$$-\frac{z\tilde{p}_{0S}(0)}{\sqrt{1+\tilde{p}_{0S}^2(0)}} + \frac{h\tilde{p}_{0S}(0)}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_j^2} + \tilde{p}_{0S}^2(0)}} + ir = 0.$$

En posant $\tilde{p}_{0S}(0) = -iw_{0S}$ cette équation devient :

$$\frac{zw_{0S}}{\sqrt{1-w_{0S}^2}} - \frac{hw_{0S}}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_j^2} - w_{0S}^2}} + r = 0.$$

Définissons maintenant la fonction

$$\mathcal{K}(w) = \frac{r}{\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_j^2} - w^2}} - \frac{z}{\sqrt{1-w^2}}} - w,$$

cette fonction est strictement décroissante pour $w > 0$ et $\mathcal{K}(w_{0S}) = 0$. Comme

$$0 < w_{0S} \leq \frac{c_S}{c_P}$$

on a :

$$\mathcal{K}(0) > \mathcal{K}(w_{0S}) \geq 0$$

soit :

$$\frac{r}{\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}} - \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}}} \geq \frac{c_S}{c_P}.$$

q_{2S} appartient donc bien à \mathbb{R}^+ .

Posons maintenant $\tilde{p}_{2S} = -i\tilde{c}_{SS}(q_{2S})/\tilde{c}_{SP}(q_{2S})$ et

$$t_{2S} = \frac{1}{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})} \left(h \left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{2S})} + \tilde{p}_{2S}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - z \left(1 + \tilde{p}_{2S}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}_{2S}r \right),$$

soit

$$t_{2S} = \left(h \left(\frac{1}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{2S})} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})} \right)^{\frac{1}{2}} - z \left(\frac{1}{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})} \right).$$

En utilisant la définition des fonctions $\tilde{c}_{Sf}(q)$, $\tilde{c}_{SP}(q)$ et $\tilde{c}_{SS}(q)$ on vérifie facilement que :

$$t_{2S} = \left(h \left(\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - z \left(\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{c_P} \sqrt{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q_{2S}^2} \right).$$

Vérifions que \tilde{p}_{2S} est racine de $\frac{\partial f_S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}, q_{2S}, t_{2S})$:

$$iz \frac{\frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})}}} - ih \frac{\frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}}{\sqrt{\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{2S})} - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})}}} + ir = 0, \quad (3.20)$$

toujours en utilisant les définitions des fonctions $\tilde{c}_{Sf}(q)$, $\tilde{c}_{SP}(q)$ et $\tilde{c}_{SS}(q)$ on vérifie que :

$$z \sqrt{\frac{\frac{c_S^2}{c_P^2} + q_{2S}^2}{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} - h \sqrt{\frac{\frac{c_S^2}{c_P^2} + q_{2S}^2}{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} + r = 0, \quad (3.21)$$

Donc q_{2S} , défini par (3.19), est bien solution de cette équation.

Par définition de t_{2S} , $\mathcal{F}_S(\tilde{p}_{2S}, q_{2S}, t_{2S}) = 0$ donc

$$\mathcal{F}_S(\tilde{p}_{2S}, q_{2S}, t_{2S}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}_{2S}, q_{2S}, t_{2S}) = 0.$$

On a donc bien $\tilde{p}_{2S} = \tilde{p}_{02}(q_{2S})$.

Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que $p_{0S}(q)$ est décroissante et $\tilde{c}_{SS}(q)/\tilde{c}_{SP}(q)$ croissante pour démontrer la seconde partie du lemme. \blacksquare

Corollaire 3.2 q_{2S} est tel que $t_{2S}(= t_{02}(q_{2S})) = t_{SP}(q_{2S})$. C'est-à-dire que le temps d'arrivée de l'onde de tête est égal au temps d'arrivée de l'onde de volume.

Démonstration :

Il suffit de rappeler que $t_{SP}(q)$ est tel que

$$\mathcal{F}_S \left(-i \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}, q, t_{SP}(q) \right) = 0,$$

or

$$\mathcal{F}_S \left(-i \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}, q_{2S}, t_{2S} \right) = 0,$$

on a donc bien $t_{2S} = t_{SP}(q_2)$. ■

Nous devons donc étudier séparément le cas $|p_{0S}(0)| \leq \frac{cs}{c_P}$ et le cas $|p_{0S}(0)| > \frac{cs}{c_P}$:

a) si $|p_0(0)| \leq \frac{cs}{c_P}$. Alors il n'y a pas d'onde de tête et on vérifie facilement que :

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^S(x, y, z, t) &= 0 && \text{si } t < t_{0P}(0) \\ v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ &&& \text{si } t > t_{0S}(0). \end{aligned}}$$

b) si $|p_0(0)| > \frac{cs}{c_P}$. Alors

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{I}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{s}{\tilde{c}_S(q)} \left[-z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_S^2(q)}{\tilde{c}_T^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} dq \\ &= \int_{-q_{2S}}^{+q_{2S}} \int_{t_{SP}(q)}^{t_{0S}(q)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{0S}(q)}^{+\infty} \Re e \left[\frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq. \end{aligned}$$

Le calcul des ondes de volume étant évident, on s'intéresse uniquement au calcul des ondes de tête, c'est-à-dire de

$$\tilde{u}_1(q) = \int_{-q_{2S}}^{+q_{2S}} \int_{t_{SP}(q)}^{t_{0S}(q)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \tilde{T}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq.$$

D'après le lemme 2.3, la fonction $t_{0S}(q)$ est croissante. On peut montrer, de manière très similaire, que c'est également le cas de la fonction $t_{SP}(q)$. De plus $t_{SP}(q) < t_{0S}(q)$ pour $q < q_{2S}$ et on a vu que $t_{SP}(q_{2S}) = t_{0S}(q_{2S})$. Les fonctions $t_{SP}(q)$ et $t_{0S}(q)$ se comportent donc comme les fonctions $t_1(q)$ et $t_{01}(q)$ que nous avons rencontrées lors du calcul des ondes de tête dans le cas de deux milieux acoustiques (voir figure 13).

On pose $q_{SP}(t) = t_{SP}^{-1}(t)$, on a alors le

Lemme 3.5 *L'expression de $q_{SP}(t)$ est donnée par*

$$q_{SP}(t) = c_S \sqrt{\frac{1}{r^2} \left(t + z \left(\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left(\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{c_P^2}}.$$

Démonstration :

Le calcul de $q_{SP}(t)$ est très similaire à celui de q_{2S} que nous venons d'expliciter : soit t compris dans $[t_{SP}; t_{0S}]$ et soit $\tilde{p} = v_S^+(q, t)$, alors :

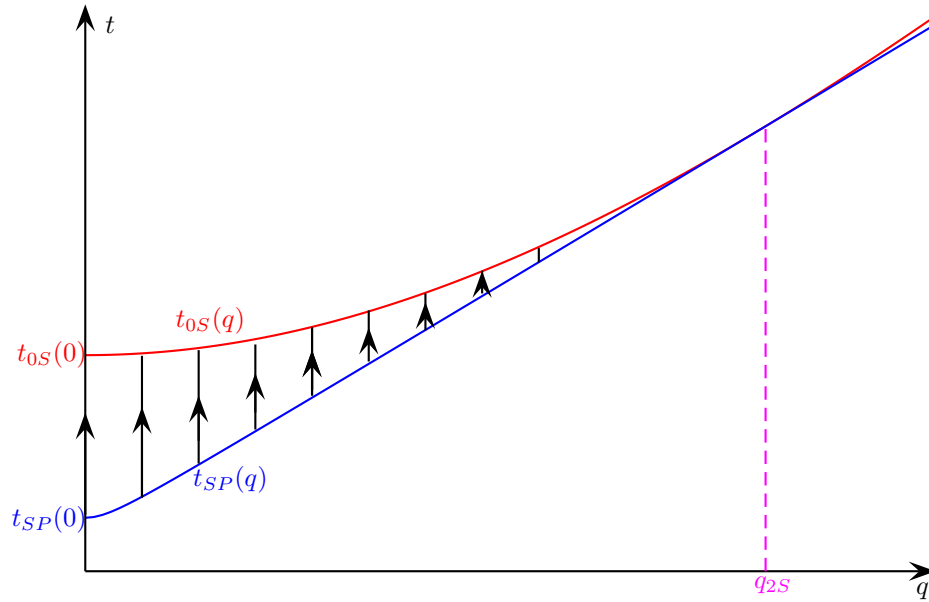
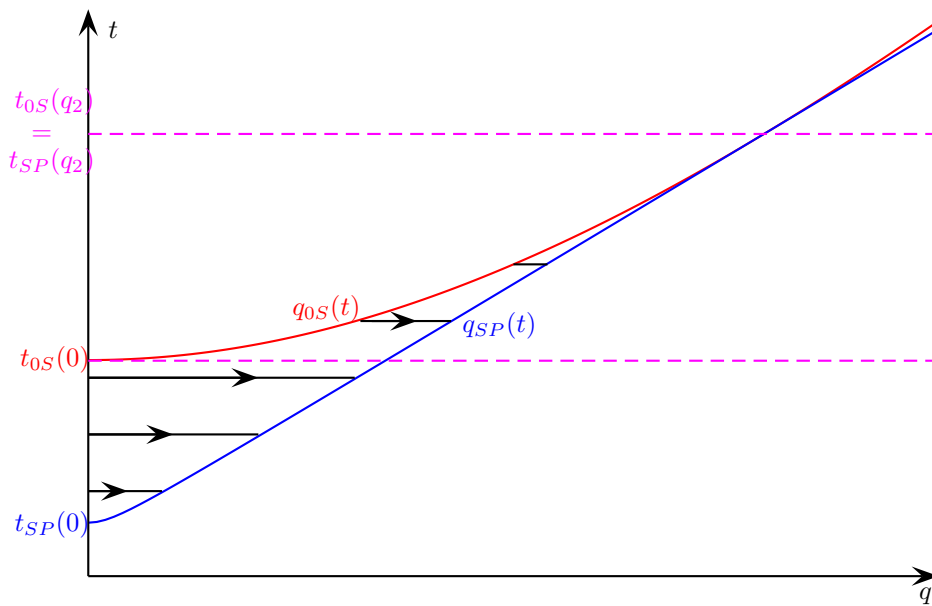
1. $\mathcal{F}_S(\tilde{p}, q_{SP}(t), t) = 0$ (par définition de $v_S^+(q, t)$) ;
2. $\tilde{p} = -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}(q_{SP}(t))}$ (p est sur le point de branchement de $z \mapsto (\frac{\tilde{c}_S^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_P^2(q_{SP}(t))} + p^2)^{\frac{1}{2}}$).

Donc :

$$\left| \begin{aligned} & -z \left(1 - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{SP}(t))} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{SP}(t))} - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{SP}(t))} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}(q_{SP}(t))} r - \tilde{c}_{SS}(q_{SP}(t)) t = 0. \end{aligned} \right.$$

En utilisant la définition des fonctions $\tilde{c}_{Sf}(q)$, $\tilde{c}_{SP}(q)$ et $\tilde{c}_{SS}(q)$, on obtient

$$-z \left(1 - \frac{c_S^2}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + r \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + q_{SP}^2(t)} - cst = 0,$$

Figure 13: Intégration sur q puis sur t Figure 14: Intégration sur t puis sur q

soit :

$$q_{SP}(t) = c_S \sqrt{\frac{1}{r^2} \left(t + z \left(\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left(\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{c_P^2}}.$$

■

On peut donc maintenant inverser l'ordre d'intégration (voir figure 14) pour obtenir⁷ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(q) = & 2 \int_{t_{SP}(0)}^{t_{0S}(0)} \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dq dt \\ & + 2 \int_{t_{0S}(0)}^{t_{2S}} \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dq dt \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

⁷ Après avoir utilisé le fait que $\tilde{u}_1(q)$ est une fonction paire

$$\begin{aligned}
v_{sx}^S(x, y, z, t) &= 0, & \text{si } t < t_{SP}(0) \\
v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{i v_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
& \text{si } t_{SP}(0) < t < t_{0S}(0), \\
v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{i v_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
& \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{i \gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
& \text{si } t_{0S}(0) < t < t_{2S}, \\
v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[\frac{i \gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
& \text{si } t_{2S} < t.
\end{aligned}$$

Front de l'onde S . Par définition de $\Omega_S(t)$, la condition $t > t_{0S}(0)$ est équivalente à $\mathbf{x} \in \Omega_S(t)$. Remarquons maintenant que :

$$t_{SP}(0) = -z \sqrt{\frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_f^2}} + h \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r}{c_P},$$

ce qui est bien l'équation de l'ensemble $\omega_{teSP1}(t)$ défini dans le lemme (3.2). Rappelons également que

$$t_{2S} = h \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - z \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r}{c_P} \sqrt{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q_{2S}^2}$$

et que

$$q_{2S} = \sqrt{\left(\frac{r}{\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} - \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}}} \right)^2 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}.$$

On a donc :

$$t_{2S} = h \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - z \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r^2}{\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} - \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}}}},$$

ce qui se réécrit, en posant

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} :$$

$$\left(\frac{h}{\beta} - \frac{z}{\alpha} \right) t_{2S} = h^2 + z^2 - hz \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) + r^2,$$

et on vérifie, après quelques calculs simples que cette équation est équivalente à :

$$\left(z - \frac{1}{2} \left(h \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) - \frac{t_{2S}}{\alpha} \right) \right)^2 + r^2 = \frac{h t_{2S}}{\beta} - h^2 + \frac{1}{4} \left(h \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) - \frac{t_{2S}}{\alpha} \right)^2,$$

ce qui est bien l'équation de la sphère de centre $(0, z_{te})$ et de rayon r_{te} utilisée pour établir le lemme 3.2.

4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.

En dimension trois le calcul numérique de la convolution en temps entre les fonctions de Green que nous venons de décrire et un terme source nécessite l'approximation de deux intégrales : une suivant la variable temporelle t et une suivant la variable q . Le calcul de la première étant très similaire au cas bidimensionnel, nous nous intéresserons plus particulièrement dans cette section à la deuxième. Afin d'illustrer notre propos nous détaillerons le calcul numérique de la solution du problème de couplage fluide-structure (3.1).

4.1 Calcul de P

Le champ p étant la fonction de Green du problème (3.3) on vérifie facilement que le champ de pression P est donné par :

$$P(x, y, z, t) = \int_0^t p(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (4.1)$$

Comme p se décompose en $p^i + p^r$, on peut également décomposer P en $P^i + P^r$ avec :

$$P^i(x, y, z, t) = \int_0^t p^i(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad P^r(x, y, z, t) = \int_0^t p^r(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

4.1.1 Calcul de P^i

Comme

$$p^i = \frac{1}{2\pi R} \delta_{\frac{R}{c}}(t)$$

il est évident que

$$P^i(x, y, z, t) = \frac{f(t - \frac{R}{c})}{2\pi R}.$$

L'algorithme de calcul de P^i étant trivial nous ne le décrivons pas ici.

4.1.2 Calcul de P^r

Nous appelons C le vecteur contenant les données physiques de l'expérience : $c_f, c_S, c_P, \rho_f \dots$. Supposons que nous disposions d'une fonction $\text{coor}(x, y, z, h)$ nous permettant d'obtenir r, θ et R et d'une fonction $\text{temps}(x, y, z, h, C)$ nous permettant d'obtenir t_{0f}, t_f et t_{2f} . Posons :

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[\int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right] & \text{si } t_{0f} < t \end{cases}$$

et

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[\int_0^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{0f}^2(t)}} dq \right], & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[\int_{q_{0f}(t)}^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{0f}^2(t)}} dq \right], & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}. \end{cases}$$

On peut alors décomposer P^r en une onde de tête P_t^r et une onde de volume P_v^r avec :

$$\begin{cases} P_v^r(x, y, z, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0f}, \\ P_v^r(x, y, z, t) = \int_{t_{0f}}^t \frac{d\tilde{p}_v}{dt}(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0f} \end{cases}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_t^r(x, y, z, t) = 0, & \text{si } t \leq t_f \text{ ou } \cos \theta \leq \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, z, t) = \int_{t_f}^t \frac{d\tilde{p}_t}{dt}(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t_f < t < t_{2f} \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, z, t) = \int_{t_f}^{t_{2f}} \frac{d\tilde{p}_t}{dt}(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t_{2f} \leq t \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}. \end{array} \right.$$

Calcul de $P_v^r(x, y, z, t)$. D'après les propriétés de \tilde{p}_v , on vérifie que :

$$P_v^r(x, y, z, t) = \int_{t_{0f}}^t \tilde{p}_v(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

La fonction \tilde{p}_v se calcule à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle dépendant du temps $[0 ; q_{0f}(t)]$ qui tend vers \mathbb{R}^+ quand t tend vers $+\infty$. D'un point de vue numérique, il est plus intéressant de calculer des intégrales sur des intervalles constants. Nous effectuons donc le changement de variable $q = Qq_{0f}(t)$:

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[\int_0^1 \frac{\Re e \left(\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, Qq_{0f}(t)), Qq_{0f}(t)) \right)}{\sqrt{1 - Q^2}} dQ \right] & \text{si } t_{0f} < t. \end{cases}$$

La deuxième difficulté numérique est due à la présence de la racine carrée au dénominateur qui rend l'intégrand singulier pour $Q = 1$; nous utiliserons donc le changement de variable $Q = \sin \eta$:

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Re e \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q_{0f}(t) \sin \eta), q_{0f}(t) \sin \eta) \right] d\eta & \text{si } t_{0f} < t. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant décrire le calcul de $P_v^r(x, y, z, t)$.

On suppose que l'intervalle $[t_{0f} ; t]$ se décompose en Nt intervalles de même longueur dt . Comme la fonction \tilde{p}_v n'est pas singulière, on pourra utiliser l'approximation :

$$P_v^r(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt} \tilde{p}_v(x, y, z, t_{0f} + (i-1)dt) f'(t - (t_{0f} + (i-1)dt)) dt.$$

```

PV( $x, y, z, h, t, deta, C$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $Pv = 0$ 
3   $N = (pi/2)/deta$ 
4  pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
5       $eta = (i - 1) * deta$ 
6       $q = \text{sqrt}(cf^2 * t^2/R^2 - 1) * \sin(eta)$ 
7       $p = \text{gamma}(R, theta, t, q, cf)$ 
8       $Pv = Pv + \text{reel}(\text{R}(p, q, C))/(2 * pi * R) * deta$ 
9  fin pour
10 retourne  $Pv$ 

```

Table 1: Algorithme de calcul de \tilde{p}_v

```

PRV( $x, y, z, h, t, dt, deta, C$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $t0 = R/cf$ 
3   $Prv = 0$ 
4  si  $t > t0$  alors
5       $Nt = (t - t0)/dt$ 
6      pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
7           $tau = t0 + (i - 1) * dt$ 
8           $Prv = Prv + \text{df}(t - tau) * \text{pv}(x, y, z, h, tau, deta, C)$ 
9      fin pour
10 fin si

```

Table 2: Algorithme de calcul de P_v^r

De même, si l'intervalle $[0, \pi/2]$ est décomposé en N_η intervalles de même longueur $d\eta$, on calculera

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_\eta} \frac{\Re \left[\tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q_{0f}(t) \sin(i-1)d\eta), q_{0f}(t) \sin(i-1)d\eta) \right]}{2\pi^2 R} d\eta.$$

L'algorithme de calcul de $\tilde{p}_v(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 1 et celui de $P_v^r(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 2 (on appelle $\text{df}(t)$ la fonction qui fournit la dérivée de f au temps t).

Calcul de $P_t^r(x, y, z, t)$. Comme pour le calcul de l'onde de volume on a :

$$P_t^r(x, y, z, t) = \int_{t_f}^t \tilde{p}_t(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau,$$

\tilde{p}_t se calcule également grâce à des intégrales sur des intervalles dépendant du temps. Effectuons donc dans un premier temps le changement de variable $q = Qq_{0f}(t)$:

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, Qq_{0f}(t)), Qq_{0f}(t) \right) \right]}{\sqrt{Q^2 + 1}} dQ & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_1^{\frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \frac{\Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, Qq_{0f}(t)), Qq_{0f}(t) \right) \right]}{\sqrt{Q^2 - 1}} dQ & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}. \end{cases}$$

Nous utilisons les changements de variable $Q = \sinh \eta$ et $Q = \cosh \eta$, respectivement pour $t_f < t < t_{0f}$ et pour $t_{0f} < t < t_{2f}$:

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, q_{0f}(t) \sinh \eta), q_{0f}(t) \sinh \eta \right) \right] dQ & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_1^{\operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, q_{0f}(t) \cosh \eta), q_{0f}(t) \cosh \eta \right) \right] d\eta & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}. \end{cases}$$

Finalement nous posons

$$\eta = \zeta \operatorname{argsh} \frac{q_1(t)}{q_{01}(t)}, \quad \text{et} \quad \eta(t) = \zeta \operatorname{argch} \frac{q_1(t)}{q_{01}(t)}$$

respectivement pour $t_f < t < t_{0f}$ et pour $t_{0f} < t < t_{2f}$ pour obtenir :

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \int_0^1 \Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, \tilde{q}(t, \zeta)), \tilde{q}(t, \zeta) \right) \right] d\zeta & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \int_0^1 \Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, \hat{q}(t, \zeta)), \hat{q}(t, \zeta) \right) \right] d\zeta & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}, \end{cases}$$

avec

$$\tilde{q}(t, \zeta) = \cosh \left[\operatorname{argch} \left(\frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \right) \zeta \right] q_{0f}(t), \quad \text{et } \hat{q}(t, \zeta) = \cosh \left[\operatorname{argch} \left(\frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \right) \zeta \right] q_{0f}(t).$$

Reprenons maintenant le calcul de $P_v^r(x, y, z, t)$.

Nous étudierons deux possibilités :

1. si $t_f < t < t_{0f}$. On décompose l'intervalle $[t_f ; t_{0f}]$ en Nt_1 intervalles de même longueur dt_1 et on calcule

$$P_t^r(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{p}_t(x, y, z, t_f + (i-1)dt_1) f'(t - (t_f + (i-1)dt_1)) dt_1$$

2. si $t_{0f} < t < t_{2f}$. On décompose l'intervalle $[t_f ; t_{0f}]$ en Nt_1 intervalles de même longueur dt_1 et l'intervalle $[t_{0f} ; \min(t, t_{2f})]$ en Nt_2 intervalles de même longueur dt_2 . La difficulté réside dans le fait que les fonctions

$$\operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \quad \text{et} \quad \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}$$

sont singulières en t_{0f} . On peut montrer qu'elles sont intégrables mais il est très difficile de calculer

$$\int_{t_{0f}-dt_1}^{t_{0f}} \operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \quad \text{et} \quad \int_{t_{0f}}^{t_{0f}+dt_2} \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}.$$

C'est pour cette raison que nous approcherons respectivement ces deux intégrales par

$$\operatorname{argsh} \frac{q_f(t_{0f} - dt_1)}{q_{0f}(t_{0f} - dt_1)} dt_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{argch} \frac{q_f(t_{0f} + dt_2)}{q_{0f}(t_{0f} + dt_2)} dt_2$$

tout en gardant à l'esprit que cette approximation n'est pas forcément très précise et qu'elle nécessitera de choisir un pas de temps plus petit qu'en dimension 2. On calculera donc :

$$P_t^r(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{p}_t(x, y, z, t_f + (i-1)dt_1) f'(t - (t_f + (i-1)dt_1)) dt_1 \\ + \sum_{i=1}^{Nt_2} \tilde{p}_t(x, y, z, t_{0f} + idt_2) f'(t - (t_{0f} + idt_2)) dt_2.$$

Si l'intervalle $[0 ; 1]$ est décomposé en N_ζ intervalles de même longueur $d\zeta$, on calculera

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_\zeta} \operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, \tilde{q}(t, (i-1)d\zeta)), \tilde{q}(t, (i-1)d\zeta) \right) \right] d\zeta$$

si $t < t_{0f}$ et

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_\zeta} \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \Im m \left[\tilde{\mathcal{R}} \left(v_f^+(t, \hat{q}(t, (i-1)d\zeta)), \hat{q}(t, (i-1)d\zeta) \right) \right] d\zeta$$

si $t > t_{0f}$.

L'algorithme de calcul de $\tilde{p}_t(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 3 et celui de $P_t^r(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 4.

4.2 Calcul de V_s

4.2.1 Calcul de V_{sx}^P

Calcul de $t_{0P}(q)$, de $\gamma_P^+(t)$ et de $q_{0P}(t)$. Pour calculer $t_{0P}(q)$ et $\gamma_P^+(t, q)$ nous utiliserons les fonctions définies en dimension 2 :

$$t_{0P}(q) = t(r, z, h, cf(q), cP(q)) \quad \text{et} \quad \gamma_P^+(t, q) = \operatorname{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cP(q)).$$

Le calcul de $q_{0P}(t)$ est plus compliqué. Contrairement au calcul de p il est difficile de définir $q_{0P}(t)$ comme la racine d'un polynôme. En effet $q_{0P}(t)$ est tel que $\mathcal{F}_S(p, q_{0P}(t), t)$ admette une racine double, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_S(\gamma_P^+(t, q), q_{0P}(t), t) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), q_{0P}(t), t) = 0, \end{cases}$$

La difficulté est qu'il faut déterminer en même temps $\gamma_P^+(t)$ et $q_{0P}(t)$. Pour contourner ce problème, nous avons choisi de déterminer $q_{0P}(t)$ par tâtonnement :

```

PT( $x, y, z, h, t, deta, C, t0f$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $Pt = 0$ 
3   $N = 1/dzeta$ 
4   $qf = qf(theta, R, cf, cp, t)$ 
5  si  $t < t0f$  alors
6     $q0f = \text{sqrt}(1 - cf^2 * t^2 / R^2)$ 
7    pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
8       $zeta = (i - 1) * dzeta$ 
9       $q = \text{sinh}(\text{argsh}(qf/q0f) * zeta) * q0f$ 
10      $p = \text{upsilon}(R, theta, t, q, cf)$ 
11      $Pt = Pt + \text{imag}(\text{R}(p, q, C)) / (2 * pi * R) * deta$ 
12   fin pour
13 sinon
14    $q0f = \text{sqrt}(cf^2 * t^2 / R^2 - 1)$ 
15   pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
16      $zeta = (i - 1) * dzeta$ 
17      $q = \text{cosh}(\text{argch}(qf/q0f) * zeta) * q0f$ 
18      $p = \text{upsilon}(R, theta, t, q, cf)$ 
19      $Pt = Pt + \text{imag}(\text{R}(p, q, C)) / (2 * pi * R) * deta$ 
20   fin pour
21 fin si
22 retourne  $Pt$ 

```

Table 3: Algorithme de calcul de \tilde{p}_t

```

PRT( $x, y, z, h, t, dt1, dt2, dzeta, C, t0f$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $t0 = R/cf$ 
3   $tf = tf(x, y, z, h, C)$ 
4   $t2f = t2f(x, y, z, h, C)$ 
5   $Prt = 0$ 
6  si  $t > tf$  alors
7     $Nt = (\min(t, t0f) - tf)/dt1$ 
8    pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
9       $tau = tf + (i - 1) * dt1$ 
10      $Prt = Prt + df(t - tau) * pt(x, y, z, h, tau, dzeta, C, t0f)$ 
11    fin pour
12  si  $t > t0f$  alors
13     $Nt = (\min(t, t2f) - t0f)/dt2$ 
14    pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
15       $tau = t2f + i * dt2$ 
16       $Prt = Prt + df(t - tau) * pt(x, y, z, h, tau, dzeta, C)$ 
17    fin pour
18  fin si
19 fin si

```

Table 4: Algorithme de calcul de P_v^r

1. on détermine une valeur approchée de $q_{0P}(t)$ *a priori* par analogie avec le calcul de l'onde réfléchie :

$$\tilde{q}_{0P}(t) = \sqrt{\frac{c_P^2 t^2}{R^2} - 1};$$

2. on pose $q = 0$;
3. On divise l'intervalle $[0 ; \tilde{q}_{0P}(t)]$ en N intervalles de longueur dq ;
4. On pose $q = q + dq$ et on détermine $\gamma_P^+(t, q)$ et $\gamma_P^-(t, q)$ alors :
- (a) Si $\Re e(\gamma_P^+(t, q)) > 0^8$: on n'a pas encore trouvé, on repart au point 3.
 - (b) si $\Re e(\gamma_P^+(t, q)) \simeq 0$ et $\gamma_P^+(t, q) \simeq \gamma_P^-(t, q)^9$: On a trouvé $q_{0P}(t) = q$, on s'arrête ici.
 - (c) Si $\Re e(\gamma_P^+(t, q)) \simeq 0$ et $\gamma_P^+(t, q) \neq \gamma_P^-(t, q)$: on a été trop loin, il faut revenir au rang précédent : $q = q - dq$ et choisir un pas plus petit, par exemple $dq = dq/N$. On peut alors repartir au point 2.

On appellera $q_0(r, z, h, t, cf, cP)$ la fonction nous permettant de déterminer $q_{0P}(t)$.

Calcul de V_{sx}^P . Soit

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[\frac{i\gamma_P^+(t, q) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], & \text{si } t_{0P} < t. \end{cases}$$

Par analogie avec le calcul de l'onde de pression réfléchie nous utilisons successivement les changements de variable $q = Qq_{0P}(t)$ puis $Q = \sin \eta$ pour obtenir :

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{q_{0P}(t)}{2\pi^2 c_P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Re e \left[\frac{i\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta) \tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), q_{0P}(t) \sin \eta) \cos \eta}{(1 + \gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), t, q_{0P}(t) \sin \eta)} \right] d\eta & \text{si } t_{0P} < t. \end{cases}$$

⁸ En fait supérieur à une certaine tolérance ε .

⁹ C'est-à-dire que la différence de leurs parties réelles est inférieure à la tolérance ε .

On vérifie alors facilement que :

$$\begin{cases} V_{sx}^P(x, y, z, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0S}, \\ V_{sx}^P(x, y, z, t) = \int_{t_{0P}}^t \tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0P}. \end{cases}$$

Comme la fonction \tilde{p}_v , la fonction \tilde{v}_{sx}^P n'est pas singulière sur $[t_{0P}, \infty]$. Elle est cependant le produit d'une fonction singulière en t_{0P} :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Re e \left[\frac{i\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta) \tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), q_{0P}(t) \sin \eta) \cos \eta}{(1 + \gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), t, q_{0P}(t) \sin \eta)} \right] d\eta,$$

par une fonction qui s'annule en t_{0P} : $q_{0P}(t)$. Cela ne pose pas de problème sur le plan mathématique mais il ne sera pas possible de calculer numériquement cette fonction en t_{0P} . C'est pourquoi nous approximerons plutôt $V_{sx}^P(x, y, z, t)$ par :

$$V_{sx}^P(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt} \tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t_{0f} + idt) f'(t - (t_{0f} + idt)) dt$$

et \tilde{v}_{sx}^P sera calculée par

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t) \simeq$$

$$\frac{q_{0P}(t)}{2\pi^2 c_P} \sum_{i=1}^N \Re e \left[\frac{i\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i) \tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i), q_{0P}(t) \sin \eta_i) \cos \eta_i}{(1 + \gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i), t, q_{0P}(t) \sin \eta_i)} \right] d\eta$$

avec $\eta_i = (i - 1)d\eta$ et $Nd\eta = \pi/2$. L'algorithme de calcul de $\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 5 et celui de $V_{sx}^P(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 2.

Calcul de V_{sx}^S . Le calcul de l'onde S de volume se fait sans difficulté, en utilisant l'algorithme du calcul de l'onde P et en remplaçant c_P par c_S et TP par TS. On s'intéressera donc

```

VSPX( $x, y, z, h, t, deta, C$ )
1   $v_{sxp} = 0$ 
2   $N = (\pi/2)/deta$ 
3   $q0 = q0(r, z, h, t, cf, cP)$ 
4  pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
5       $eta = (i - 1) * deta$ 
6       $q = q0 * \sin(eta)$ 
7       $p = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cP(q))$ 
8       $dfp = \text{deriveef}(x, z, h, cf(q), cP(q), tau, p)$ 
9       $a = i * p * \text{TP}(p, q, C) / (\text{sqrt}(1 + p^2) * dfp)$ 
10      $v_{sxp} = v_{sxp} + \text{reel}(a) * \cos(eta) / (2 * \pi^2 * cP) * deta$ 
11 fin pour
12  $v_{sxp} = q0 * v_{sxp}$ 
13 retourne  $v_{sxp}$ 

```

Table 5: Algorithme de calcul de \tilde{v}_{sx}^P

```

VPSX( $x, y, z, h, t, dt, deta, C$ )
1   $t0 = t(r, z, h, cf, cP)$ 
2   $V_{psx} = 0$ 
3  si  $t > t0$  alors
4       $Nt = (t - t0)/dt$ 
5      pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
6           $tau = t0 + (i - 1) * dt$ 
7           $V_{psx} = V_{psx} + \text{df}(t - tau) * \text{vsxp}(x, y, z, h, tau, deta, C)$ 
8      fin pour
9  fin si

```

Table 6: Algorithme de calcul de V_{sx}^P

uniquement au calcul de l'onde de tête, on pose :

$$\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_S \text{ ou si } t_{2S} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 c_S} \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq & \text{si } t_S < t < t_{0S}, \\ \frac{1}{2\pi^2 c_S} \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq & \text{si } t_{0S} < t < t_{2S}. \end{cases}$$

On a alors :

$$V_{sxt}^S(x, y, z, t) = \int_{t_f}^t \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

Comme pour le calcul de l'onde réfléchie, nous étudierons deux cas possibles :

1. Si $t_S < t < t_{0S}$. Alors on décompose l'intervalle $[t_S ; t_{0S}]$ en Nt_1 intervalles de même longueur dt_1 et on calcule

$$V_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t_S + (i-1)dt_1) f'(t - (t_S + (i-1)dt_1)) dt_1.$$

2. Si $t_{0S} < t < t_{2S}$. Alors on décompose l'intervalle $[t_S ; t_{0S}]$ en Nt_1 intervalles de même longueur dt_1 et l'intervalle $[t_{0S} ; \min(t, t_{2S})]$ en Nt_2 intervalles de même longueur dt_2 . Comme lors du calcul de l'onde réfléchie, pour éviter les problèmes causés par la singularité de \tilde{v}_{sxt}^S en t_{0S} nous calculerons :

$$\begin{aligned} V_{sxt}^S(x, y, z, t) &\simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t_S + (i-1)dt_1) f'(t - (t_S + (i-1)dt_1)) dt_1 \\ &+ \sum_{i=1}^{Nt_2} \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t_{0S} + idt_2) f'(t - (t_{0S} + idt_2)) dt_2. \end{aligned}$$

Si $t_S < t < t_{0S}$, on décompose l'intervalle $[0 ; q_{SP}(t)]$ en N_{q_1} intervalles de même longueur dq_1 , et on calcule

$$\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_{q_1}} \frac{1}{2\pi^2 c_S} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q_i) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q_i), q_i)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q_i), t, q_i)} \right] dq_1$$

avec $q_i = (i - 1)dq_1$.

Si $t_{0S} < t < t_{2S}$ on décompose l'intervalle $[q_{0S}(t) ; q_{SP}(t)]$ en N_{q_1} intervalles de même longueur dq_1 et on calcule

$$\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_{q_1}} \frac{1}{2\pi^2 c_S} \Re e \left[\frac{iv_S^+(t, q_i) \tilde{T}_S(v_S^+(t, q_i), q_i)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q_i), t, q_i)} \right] dq_1$$

avec $q_i = q_{0S}(t) + (i - 1)dq_1$.

L'algorithme de calcul de $\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 7 et celui de $V_{sxt}^S(x, y, z, t)$ est décrit sur le tableau 8¹⁰.

References

- [1] C. Bescond and M. Deschamps. Dynamical surface response of a semi-infinite anisotropic elastic medium to an impulsive force. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(1):114–24, januar 1998.
- [2] A. T. de Hoop. The surface line source problem. *Appl. Sci. Res. B*, 8:349–356, 1959.
- [3] Q. Grimal. *Étude dans le domaine temporel de la propagation d'ondes élastiques en milieux stratifiés ; modélisation de la réponse du thorax à un impact*. PhD thesis, Université Paris XII-Val de Marne, 2003.
- [4] A. Mourad and M. Deschamps. Lamb's problem for an anisotropic half-space studied by the cagniard de hoop method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(5):3194–7, May 1995.
- [5] Y. Pao and R. Gajewski. *The generalized ray theory and transient respons of layered elastic solids*. Academic Press, New York and London, 1977.
- [6] J. H. M. T. van der Hijden. *Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media*, volume 32 of *North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science Publishers, 1987.

¹⁰ Les fonctions $q_{SP}(t)$, t_S et t_{2S} étant connues explicitement, nous supposons que leurs valeurs sont respectivement obtenues par des routines qSP, tS et t2S que nous ne détaillons pas ici.

```

VSXTS( $x, y, z, h, t, dq, C, t0S$ )
1   $vsxts = 0$ 
2   $q0 = q0(r, z, h, t, cf, cS)$ 
3   $qSP = qSP(r, z, h, t, cf, cS)$ 
4  si  $t < t0S$  alors
5     $N = qSP/dq$ 
6    pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
7       $q = (i - 1) * dq$ 
8       $p = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cS(q))$ 
9       $dfp = \text{deriveef}(x, z, h, cf(q), cS(q), \text{tau}, p)$ 
10      $a = i * p * \text{TS}(p, q, C) / (\text{sqrt}(1 + p^2) * dfp)$ 
11      $vsxts = vsxtsp + \text{reel}(a) / (2 * pi^2 * cS) * dq$ 
12   fin pour
13 sinon
14    $N = (qSP - q0) / dq$ 
15   pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
16      $q = q0 + (i - 1) * dq$ 
17      $p = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cS(q))$ 
18      $dfp = \text{deriveef}(x, z, h, cf(q), cS(q), \text{tau}, p)$ 
19      $a = i * p * \text{TS}(p, q, C) / (\text{sqrt}(1 + p^2) * dfp)$ 
20      $vsxts = vsxtsp + \text{reel}(a) / (2 * pi^2 * cS) * dq$ 
21   fin pour
22 fin si
23 retourne  $vsxts$ 

```

Table 7: Algorithme de calcul de \tilde{v}_{sxt}^S

```

VSXTS( $x, y, z, h, t, dt1, dt2, dq, C$ )
1   $t0 = t(r, z, h, cf(q), cP(q))$ 
2   $tS = tS(x, y, z, h, C)$ 
3   $t2S = t2S(x, y, z, h, C)$ 
4   $Vsxts = 0$ 
5  si  $t > tS$  alors
6     $Nt = (\min(t, t0S) - tS)/dt1$ 
7    pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
8       $tau = tS + (i - 1) * dt1$ 
9       $Vsxts = Vsxts + df(t - tau) * vsxts(x, y, z, h, tau, dq, C, t0)$ 
10   fin pour
11   si  $t > t0S$  alors
12      $Nt = (\min(t, t2S) - t0S)/dt2$ 
13     pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
14        $tau = t0S + i * dt2$ 
15        $Vsxts = Vsxts + df(t - tau) * vsxts(x, y, z, h, tau, dq, C, t0)$ 
16     fin pour
17   fin si
18 fin si

```

Table 8: Algorithme de calcul de V_{sxt}^S

Table des matières

Introduction	3
1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini	7
2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes	10
2.1 Résultats	11
2.1.1 Cas d'une source sur l'interface	11
2.1.2 Cas d'une source hors de l'interface	17
2.2 Démonstrations	26
2.2.1 Cas d'une source sur l'interface	27
2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface	35
3 Interaction fluide-solide	40
3.1 Résultats	43
3.1.1 Les fronts d'onde.	43
3.1.2 Solutions analytiques.	49
3.2 Démonstrations	59
3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier	59
3.2.2 Démonstration du théorème 3.1	62
4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.	77
4.1 Calcul de P	77
4.1.1 Calcul de P^i	78
4.1.2 Calcul de P^r	78
4.2 Calcul de V_s	83
4.2.1 Calcul de V_{sx}^P	83



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399