



**HAL**  
open science

# Méta-modélisation avancée et analyse de sensibilité pour la dynamique des rotors en contexte incertain

Enora Denimal, Jean-Jacques Sinou

## ► To cite this version:

Enora Denimal, Jean-Jacques Sinou. Méta-modélisation avancée et analyse de sensibilité pour la dynamique des rotors en contexte incertain. CFM 2022 - Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. pp.1-9. hal-03859895

**HAL Id: hal-03859895**

**<https://inria.hal.science/hal-03859895>**

Submitted on 18 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méta-modélisation avancée et analyse de sensibilité pour la dynamique des rotors en contexte incertain

E. DENIMAL<sup>a</sup>, J-J. SINOUB,<sup>c</sup>

a. Univ. Gustave Eiffel, Inria, COSYS/SII, I4S, Campus Beaulieu, Rennes, France – enora.denimal@inria.fr

b. Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, Ecully, France – jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

c. Institut Universitaire de France, Paris, France

## Résumé :

*Afin d'assurer l'intégrité des machines tournantes, il est nécessaire de prédire les vitesses critiques et les amplitudes vibratoires associées. Le dimensionnement de telles structures nécessite de prendre en compte la variabilité d'un grand nombre de paramètres de différentes natures. Ce travail propose de prédire le comportement dynamique d'un rotor modélisé par un modèle éléments finis soumis à de nombreux paramètres incertains. Le but est de réaliser de façon efficace une étude paramétrique du système stochastique. Pour ce faire, une méthode de méta-modélisation hybride couplant krigeage et chaos polynomial est utilisée. L'efficacité de la méthode est augmentée par l'introduction des propriétés de symétrie du problème mécanique dans la partie krigeage. Les résultats permettent de prédire avec précision le comportement dynamique du rotor et de réaliser une étude de sensibilité montrant les phénomènes complexes étant mis en jeu.*

## Abstract :

*In order to ensure the integrity of rotating machines, it is necessary to predict the critical speeds and associated vibration amplitudes. The design of such structures requires considering the variability of a large number of parameters of different natures. This work proposes to predict the dynamic behaviour of a rotor modelled by a finite element model subjected to numerous uncertain parameters. The aim is to carry out an efficient parametric study of the stochastic system. For this purpose, a hybrid meta-modelling method coupling kriging and polynomial chaos is used. The efficiency of the method is increased by introducing the symmetry properties of the mechanical problem in the kriging part. The results allow an accurate prediction of the dynamic behaviour of the rotor and a sensitivity study showing the complex phenomena involved.*

## Mots clefs :

Dynamique des rotors, incertitudes, krigeage, chaos polynomial, indices de Sobol

## 1 Introduction

Les rotors sont des composants majeurs du monde de l'ingénierie mécanique présents sur de nombreuses structures stratégiques liées au transport ou à la production d'énergie par exemple. Ils doivent être

capable de supporter de nombreux chargements et leur conception doit être réalisée avec précaution. Plus particulièrement, les vibrations sont à l'origine de sollicitations pouvant causer un usage prématuré, du bruit, des fissures ou des accidents. Il est alors primordial d'être capable de prédire avec précision les vitesses de rotation critiques du rotor ainsi que les niveaux vibratoires associés afin d'assurer son intégrité mécanique. La prédiction de ces caractéristiques est rendue complexe par la présence de nombreux paramètres décrivant un modèle de rotor : géométrie, matériaux, les roulements, l'environnement etc. Ceci rend difficile la possibilité d'avoir une vision globale de la dynamique du rotor et de l'impact associé à la variation d'un ou plusieurs paramètres sur le comportement dynamique global. Ainsi, un problème majeur à ce jour est de proposer des méthodes numériques qui permettent d'intégrer ces incertitudes et qui sont numériquement applicable à des modèles mécaniques réalistes et de grandes tailles.

Lors de la conception d'un rotor, et plus généralement d'une structure mécanique, les ingénieurs font faces à différentes natures de paramètres, qui peuvent souvent être classées en deux catégories : les paramètres de dimensionnement et les paramètres incertains. Le premier groupe réfère aux paramètres que l'ingénieur peut contrôler et doit le plus souvent optimiser dans le cadre de la conception. Ces paramètres sont souvent définis sur un intervalle et le plus souvent des études paramétriques sont conduites pour les fixer. Le second groupe réfère aux paramètres non contrôlés mais variables qui peuvent venir de variations environnementales, aux tolérances de fabrications, etc. Ils sont souvent modélisés à l'aide de variables aléatoires. Lorsque des paramètres incertains sont présents, une stratégie classique aujourd'hui consiste à créer un méta-modèle qui simule le modèle complet et coûteux. Souvent, un unique méta-modèle est créé et exploité par la suite. Des méthodes telles que le chaos polynomial généralisé [1,2,3], les réseaux de neurones ou le krigeage [4,5,6] permettent de faire cela. Cependant, cette stratégie implique une modélisation unique des paramètres incertains. Une approche récente qui associe chaos polynomial et krigeage développée par les auteurs permet de tenir compte des deux natures d'incertitudes simultanément [7].

Ainsi, ce travail propose de prédire le comportement dynamique d'un rotor soumis à de nombreuses sources d'incertitudes de différentes natures, à savoir paramétriques et aléatoires. L'efficacité de la méthode hybride est augmentée en intégrant des caractéristiques physiques de symétrie du rotor à la formulation et son efficacité est démontrée. Les évolutions des moyennes et variances des vitesses critiques et des amplitudes vibratoires associées sont obtenues efficacement sans avoir besoin de réaliser un tirage de Monte Carlo sur un méta-modèle. Par ailleurs, une analyse de sensibilité est ensuite conduite et les comportements dynamiques complexes sont observés et analysés.

## 2 Description du modèle mécanique du rotor

Cette section décrit brièvement le modèle du rotor mécanique. Ce dernier est représenté Figure 1. Il est composé d'un arbre supporté par deux supports et de quatre disques. Sur le premier disque, un déséquilibre en masse est présent. Pour la description détaillée du modèle et de sa construction, le lecteur peut se référer à [5,9,10].

L'arbre est modélisé avec un modèle éléments finis (MEF) de 10 poutres d'Euler. Chaque nœud a 4 degrés de liberté. Les matrices structurelles de l'arbre sont les matrices  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$ ,  $\mathbf{K}_s$  et  $\mathbf{G}_s$ , à savoir les matrices de masse amortissement et raideur structurelle et la matrice gyroscopique.

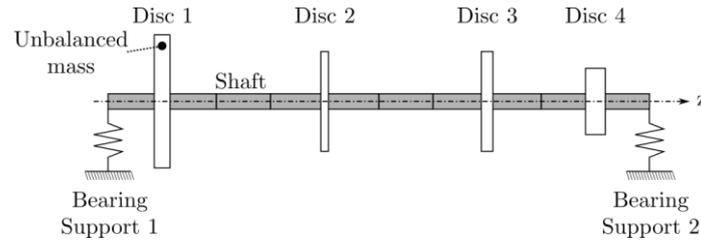


Figure 1: Modèle mécanique du rotor

Les disques sont modélisés comme des disques rigides et sont caractérisés par leurs matrices de masses  $\mathbf{M}_d^i$  et les matrices gyroscopiques  $\mathbf{G}_d^i$  pour le disque  $i$ . Le déséquilibre en masse du premier disque est modélisé par une masse  $m_u$  d'excentricité  $d_u$  donnant lieu à un effort  $\mathbf{F}$ .

Chaque support est modélisé par deux raideurs linéaires, une dans chaque direction du repère fixe. Elles sont notées  $k_v^{(b,1)}$ ,  $k_h^{(b,1)}$ ,  $k_v^{(b,2)}$  et  $k_h^{(b,2)}$ . Les matrices globales sont  $\mathbf{K}^{(b,1)}$  et  $\mathbf{K}^{(b,2)}$ . Finalement, l'équation générale de la dynamique est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$$

Avec  $\mathbf{q}$  le vecteur des déplacements aux degrés de libertés du système.  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse globale,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement globale,  $\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique globale et  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur globale comprenant les contributions des différents éléments. Pour une description détaillée de la construction des matrices et pour les valeurs numériques exactes, le lecteur peut se référer à [5,10].

Pour rappel, l'objectif global est donc de prédire les vitesses critiques et les amplitudes vibratoires associées de ce rotor.

### 3 Propagation d'incertitudes

#### 3.1 Paramètres incertains

Deux types d'incertitudes sont considérées dans cette étude. Le premier set de paramètres incertains correspond aux paramètres aléatoires et sont décrits par une fonction de densité de probabilité. Sept paramètres sont considérés ici, résumés dans la Table 1. Ils peuvent traduire des variabilités liées aux tolérances de fabrication ou à des variations environnementales par exemple. Ils sont notés  $\xi = [\xi_E, \xi_{e_1}, \xi_{e_2}, \xi_{e_3}, \xi_{e_4}, \xi_{k_v^{(b,1)}}, \xi_{k_h^{(b,1)}}]$ . Le second groupe correspond aux paramètres de conception, et correspondent aux raideurs du second support qui peuvent prendre valeur dans l'intervalle  $[0.1 ; 2] 10^6$  N/m. Ils sont notés  $\mathbf{x} = [k_v^{(b,2)}, k_h^{(b,2)}]$ .

Dans la suite, la vitesse critique et l'amplitude vibratoire associée pour un mode  $i$  sont notées  $f^i$  et  $a^i$  avec  $i$  entre 1 et 8. Comme elles dépendent de  $\mathbf{x}$  et  $\xi$ , elles sont notées  $f^i(\mathbf{x}, \xi)$  and  $a^i(\mathbf{x}, \xi)$ .

Tableau 1: Paramètres aléatoires

Notation	Parameter name	% variation	Law
$E$	Young modulus shaft	$\pm 5\%$	Uniform
$e_1$	Thickness – Disc 1	$\pm 10\%$	Uniform
$e_2$	Thickness – Disc 2	$\pm 10\%$	Uniform
$e_3$	Thickness – Disc 3	$\pm 10\%$	Uniform
$e_4$	Thickness – Disc 4	$\pm 10\%$	Uniform
$k_h^{b,1}$	Horizontal stiffness – Bearing 1	$\pm 5\%$	Uniform
$k_v^{b,1}$	Vertical stiffness – Bearing 2	$\pm 5\%$	Uniform

### 3.2 Formulation hybride

Les quantités d'intérêt  $Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  (amplitude ou vitesse critique) sont des variables aléatoires dépendants de  $\boldsymbol{\xi}$  et donc peuvent être approximées par une série de type chaos polynomial (PCE) convergence :

$$Y(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{P-1} a_k(\mathbf{x}) \Phi_k(\boldsymbol{\xi})$$

Où les  $\alpha_k$  sont les coefficients de régression du PCE à déterminer et  $\Phi_k$  la base polynomiale multivariée (voir [7,10,11,12] pour une description détaillée et rigoureuse). Les coefficient  $\alpha_k$  dépendent des variables paramétriques du problème et peuvent donc être chacun approximés par un krigeage, i.e.  $\alpha_k(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{(k)}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}^{(k)} + Z^{(k)}(\mathbf{x})$ .  $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$  est le vecteur des coefficients de pondération, les  $\mathbf{g}^{(k)}$  définissent la partie régressive du krigeage et  $Z_k$  est un processus Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Le lecteur peut se référer à [7,10,13] pour plus de détails. Finalement, la quantité d'intérêt  $Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  peut s'écrire :

$$Y(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{P-1} a_k(\mathbf{x}) \Phi_k(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^{P-1} \left( \mathbf{g}^{(k)}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}^{(k)} + Z^{(k)}(\mathbf{x}) \right) \Phi_k(\boldsymbol{\xi})$$

Un tel méta-modèle est construit de façon non-intrusive à partir de la tensorisation de deux plans d'expérience : un de  $Q$  valeurs de  $\mathbf{x}$  et un second de  $N$  valeurs de  $\boldsymbol{\xi}$ . Une fois la tensorisation faite, le modèle complet est évalué pour chaque point. Pour une description détaillée sur la construction pratique d'un tel méta-modèle, le lecteur peut se référer à [7,10].

Les coefficients du PCE pouvant être évalués quasi-instantanément via le krigeage, il est possible d'obtenir sans coût supplémentaires les informations de types moyenne, variance et indices de Sobol directement depuis les méta-modèles de krigeage [12].

### 3.3 Intégration de la symétrie du problème dans le krigeage

Le problème est étudié est symétrique par rapport à  $k_v^{(b,2)} = k_h^{(b,2)}$ . Afin de prendre en compte cette spécificité, trois stratégies sont considérées ici :

- Une stratégie classique : un krigeage classique est construit en choisissant une fonction de régression et une fonction de corrélation. Aucune propriété de symétrie n'est considérée.
- Une stratégie de réduction de moitié de l'espace de construction : comme le problème est symétrique, seuls les points vérifiant  $k_v^{(b,2)} \leq k_h^{(b,2)}$  sont utilisés pour la construction du méta-modèle. Pour la prédiction, la moitié de l'espace est directement reconstruite en exploitant les propriétés de symétrie.
- Une stratégie de régression symétrique : la fonction de régression du krigeage est choisie de façon à être symétrique. Par exemple, en dimension 2, si  $\mathbf{g}$  est la fonction de régression de type polynomiale d'ordre 2, alors la version symétrique  $\mathbf{g}_s$  s'écrit :

$$\mathbf{g}_s(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \beta_4 x_1^2 + \beta_5 x_2^2 & \text{if } x_1 \leq x_2 \\ \mathbf{g}_s(x_2, x_1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 4 Résultats

### 4.1 Comparaison des stratégies de krigeage

Les différentes stratégies sont comparées dans un premier temps. Quatre tailles de plan d'expérience associé au krigeage sont considérées :  $Q = [20, 40, 60, 80]$  et  $N=250$  points générés par LHS sont pris pour la partie PCE. Le plan d'expérience total fait  $N \times Q$  points. Pour différentes valeurs de  $\mathbf{x}$ , 500 points sont générés de façon à valider et calibrer les PCE. Pour valider le méta-modèle global, les valeurs des moyennes et variances sur une grille de  $100 \times 100$  prédites par le méta-modèle sont comparées aux valeurs de références. L'erreur est calculée via :

$$Error(\mathbf{x}) = \frac{r_p(\mathbf{x}) - r_{ref}(\mathbf{x})}{|r_{ref}(\mathbf{x})|}$$

Avec  $r_p$  la valeur prédite de la moyenne (variance resp.) et  $r_{ref}$  la référence. Cette erreur est calculée pour les 8 vitesses critiques et amplitudes associées et pour tous les différents cas. Les moyennes et variances de ces erreurs sont calculées, elles sont représentées Figure 2 pour le cas de l'erreur moyenne sur l'amplitude moyenne. Les résultats sont similaires pour les autres cas.

On en déduit les résultats suivants :

- Les erreurs varient fortement d'un mode à un autre. Elles sont plus élevées pour les modes rétrogrades (nombres impairs).
- L'erreur tend à diminuer quand le nombre de points dans le plan d'expérience augmente.
- Globalement, la stratégie de krigeage classique est la plus mauvaise. La solution exploitant uniquement la moitié du plan d'expérience s'avère plus pertinente puisqu'elle requiert deux fois moins de points d'apprentissage.

La différence principale entre les différentes stratégies d'observe sur la ligne  $k_v^{(b,2)} = k_h^{(b,2)}$ . Des évolutions brutales se passent et sont difficilement captées par le cas classique, surtout pour les modes

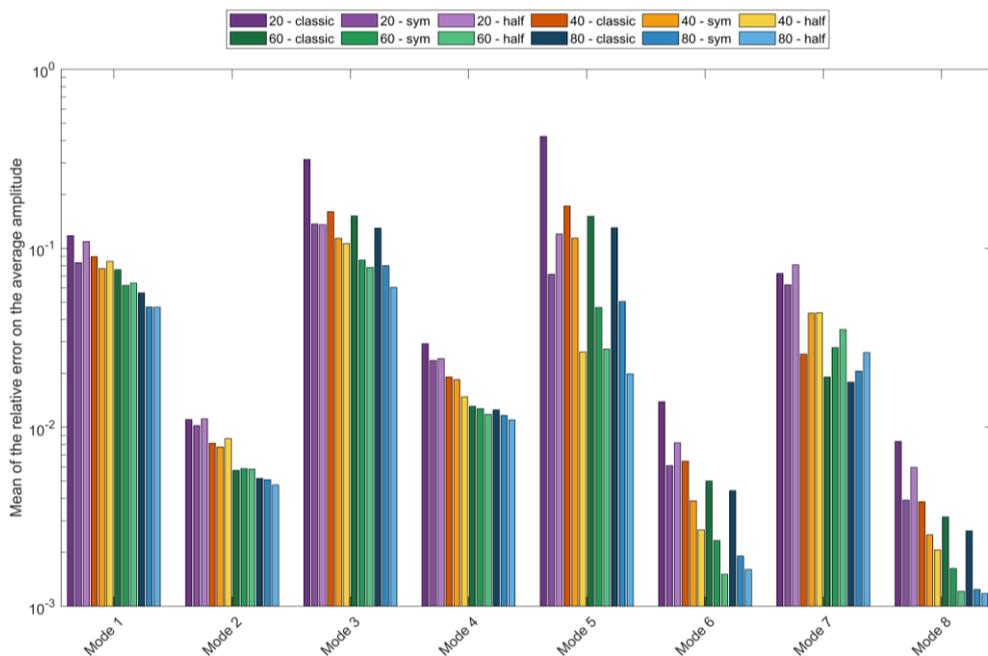


Figure 2: Erreur moyenne sur l'amplitude vibratoire moyenne pour les différentes stratégies de krigeage

rétrogrades où l'amplitude saute presque à zéro. A l'opposé, les deux autres stratégies sont capables de capter cette brusque variation. En conclusion, les trois stratégies fonctionnent bien globalement mais les stratégies prenant en compte l'aspect symétrique du problème ont de meilleures performances. Finalement, les résultats de prédiction pour les vitesses critiques et les amplitudes des quatre premiers modes sont donnés Figure 3. La surface de couleur correspond à la valeur moyenne, les surfaces bleues et rouges sont la moyenne  $\pm$  la déviation standard. Les résultats sont donnés ici pour 30 points d'apprentissage (moitié de l'espace exploité uniquement). On voit ici clairement la bonne capacité du méta-modèle hybride à prédire la dynamique du rotor.

## 4.2 Analyse de sensibilité

Finalement, une analyse de sensibilité est réalisée. Les indices de Sobol varient avec les deux raideurs paramétriques et peuvent être déterminés directement via les méta-modèles de krigeage. Pour rappel, les indices de Sobol sont des indicateurs pour évaluer la sensibilité de la sortie d'un modèle à une entrée. Si l'indice associé à la variable  $i$  est proche de 1, alors la variable est très influence. S'il est proche de 0, alors la variable a peu d'influence. Les indices de Sobol de premier ordre sont donnés Figure 4.

On voit clairement que les indices de Sobol dépendent du mode considéré et de la variable considérée (épaisseur du premier disque sans influence sur l'amplitude vibratoire du premier mode mais a une forte influence pour le mode 4). Pour un mode, ils varient aussi selon que l'on considère la vitesse critique ou

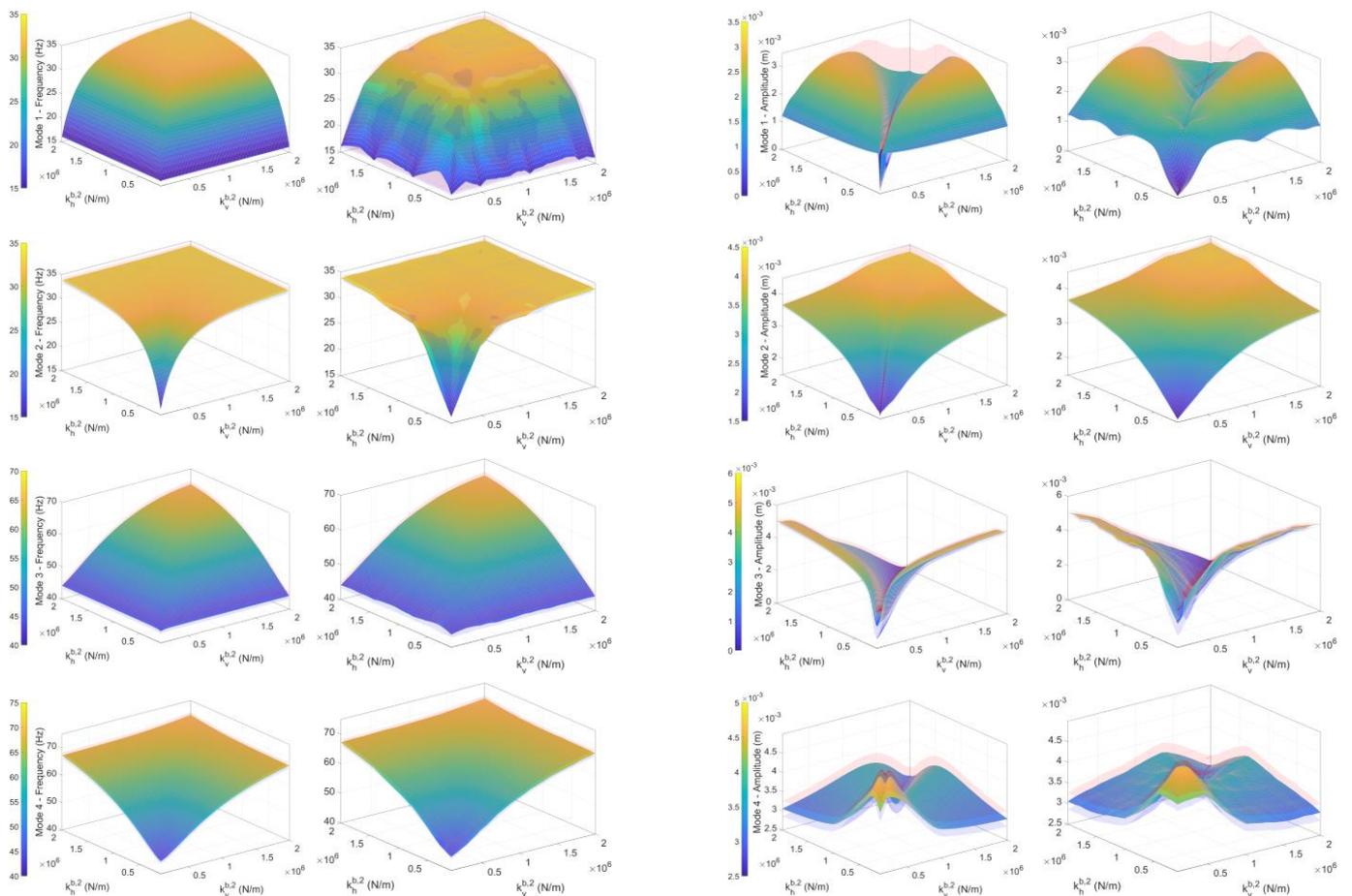


Figure 3: Evolution de la moyenne et de la moyenne  $\pm$  la déviation standard de la Vitesse critique (ref: 1er colonne, prédiction : 2<sup>e</sup> colonne) et amplitudes vibratoires associées (ref : 3<sup>e</sup> colonne, prédiction : 4<sup>e</sup> colonne)

l'amplitude vibratoire. Surtout, ils dépendent fortement de la valeur des deux raideurs paramétriques  $k_v^{(b,2)}$  et  $k_h^{(b,2)}$ .

Plus précisément, on peut tirer les conclusions suivantes :

- Mode 1 : pour des faibles valeurs des raideurs, les épaisseurs des disques 3 et 4 pilotent principalement la vitesse critique. Pour des plus grandes valeurs, le module d'Young et les épaisseurs des deux premiers disques sont les paramètres clés. Pour l'amplitude, à proximité de la diagonale  $k_v^{(b,2)} = k_h^{(b,2)}$ , les raideurs  $k_v^{(b,1)}$  et  $k_h^{(b,1)}$  sont les paramètres influences et loin de cette diagonale ce sont les épaisseurs des disques 3 et 4 qui ont une influence majeure.
- Mode 2 : la vitesse critique est principalement impactée par le module d'Young, l'épaisseur des disques 1 et 2 ainsi que par  $k_v^{(b,1)}$ . L'amplitude est principalement pilotée par l'épaisseur du 3<sup>e</sup> disque et les deux raideurs  $k_v^{(b,1)}$  et  $k_h^{(b,1)}$ .
- Mode 3 : l'amplitude est principalement contrôlée par l'épaisseur du 1<sup>er</sup> disque et par les deux raideurs  $k_v^{(b,1)}$  et  $k_h^{(b,1)}$ . La vitesse critique est pilotée par l'épaisseur des disques 3 et 4 et par la raideur  $k_h^{(b,1)}$ .
- Mode 4 : l'amplitude est surtout sensible à l'épaisseur du 1<sup>er</sup> disque. La vitesse critique est sensible à l'épaisseur des disque 3 et 4 ainsi qu'au module d'Young et la raideur  $k_h^{(b,1)}$ .

Plus généralement, les évolutions sont complexes et montrent que les influences des paramètres varient en fonction du choix des valeurs des variables paramétriques. Ceci justifie ce type d'analyse pour réaliser des choix de conception judicieux et de limiter l'influence de certains paramètres environnementaux.

## 5 Conclusion

Dans cette étude, le comportement dynamique d'un MEF d'un rotor soumis à de nombreuses incertitudes a été étudié en détail. Cette étude est rendue possible grâce à l'exploitation d'un méta-modèle hybride permettant de modéliser des paramètres incertains tout en réalisant une étude paramétrique. L'introduction des propriétés de symétrie du problème physique permet une construction plus efficace du méta-modèle. L'exploitation du méta-modèle hybride permet de réaliser ensuite des études paramétriques du système stochastique ainsi qu'une analyse de sensibilité approfondies.

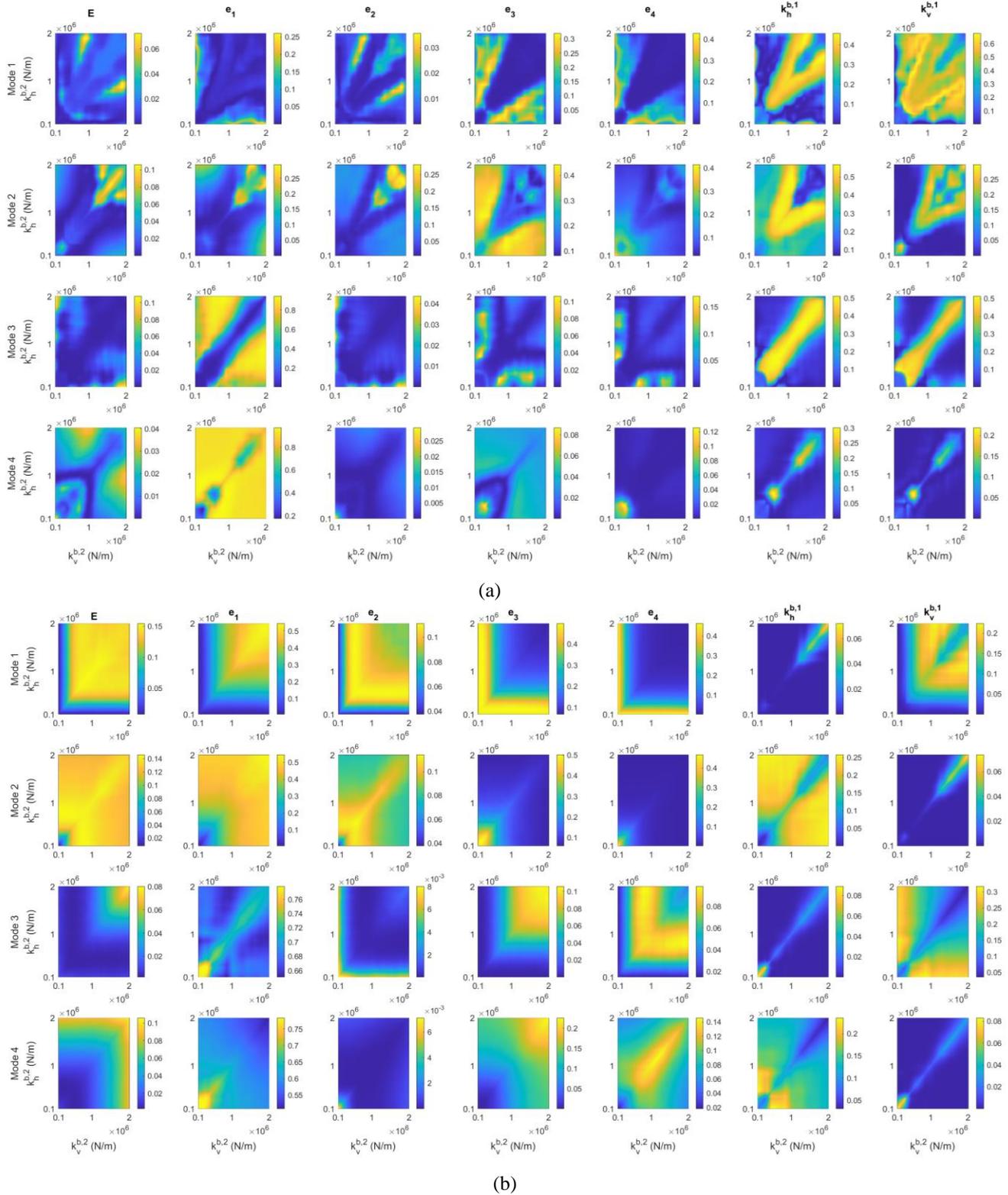


Figure 4: Indices de Sobol de premier ordre pour les amplitudes vibratoires (a) et pour les vitesses critiques (b)

## Remerciements

E. Denimal remercie Rennes Métropole pour son soutien financier.

## Références

- [1] Sarrouy, E., Dessombz, O., & Sinou, J. J. (2012). Stochastic analysis of the eigenvalue problem for mechanical systems using polynomial chaos expansion—application to a finite element rotor. *Journal of vibration and acoustics*, 134(5).
- [2] Didier, J., Faverjon, B., & Sinou, J. J. (2012). Analysing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion. *Journal of Vibration and Control*, 18(5), 712-732.
- [3] Garoli, G. Y., & de Castro, H. F. (2020). Generalized polynomial chaos expansion applied to uncertainties quantification in rotating machinery fault analysis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(11), 1-15.
- [4] Wang, D., Hua, C., Dong, D., He, B., & Lu, Z. (2018). Crack parameters identification based on a kriging surrogate model for operating rotors. *Shock and Vibration*, 2018.
- [5] Sinou, J. J., Nechak, L., & Besset, S. (2018). Kriging metamodeling in rotordynamics: Application for predicting critical speeds and vibrations of a flexible rotor. *Complexity*, 2018.
- [6] Silva Barbosa, J., Campanine Sicchieri, L., Dourado, A. D. P., Cavalini Jr, A. A., & Steffen Jr, V. (2021). Kriging Approach Dedicated to Represent Hydrodynamic Bearings. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 143(6), 061016.
- [7] Denimal, E., Nechak, L., Sinou, J. J., & Nacivet, S. (2018). A novel hybrid surrogate model and its application on a mechanical system subjected to friction-induced vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 434, 456-474.
- [8] Denimal, E., Sinou, J. J., & Nacivet, S. (2021). Prediction of Squeal Instabilities of a Finite Element Model Automotive Brake With Uncertain Structural and Environmental Parameters With a Hybrid Surrogate Model. *Journal of Vibration and Acoustics*, 144(2), 021006.
- [9] Friswell, M. I., Penny, J. E., Garvey, S. D., & Lees, A. W. (2010). *Dynamics of rotating machines*. Cambridge university press.
- [10] Denimal, E., & Sinou, J. J. (2021). Advanced kriging-based surrogate modelling and sensitivity analysis for rotordynamics with uncertainties. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 104331.
- [11] Xiu, D., & Karniadakis, G. E. (2002). The Wiener--Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM journal on scientific computing*, 24(2), 619-644.
- [12] Sudret, B. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability engineering & system safety*, 93(7), 964-979.
- [13] Lophaven, S. N., Nielsen, H. B., & Søndergaard, J. (2002). *DACE: a Matlab kriging toolbox* (Vol. 2). IMM, Informatics and Mathematical Modelling, The Technical University of Denmark.