



HAL
open science

Caractérisation de zones critiques pour le dimensionnement en fatigue d'une pièce mécanique

Olivier Coudray, Philippe Bristiel, Miguel Dinis, Christine Keribin, Patrick Pamphile

► **To cite this version:**

Olivier Coudray, Philippe Bristiel, Miguel Dinis, Christine Keribin, Patrick Pamphile. Caractérisation de zones critiques pour le dimensionnement en fatigue d'une pièce mécanique. E-congrès 2020 Lambda $\lambda\mu$ 22 - 22e Congrès de Maîtrise des Risques et Sécurité de Fonctionnement $\lambda\mu$ 22, Aug 2020, Le Havre / Virtual, France. hal-03121282

HAL Id: hal-03121282

<https://inria.hal.science/hal-03121282v1>

Submitted on 26 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Caractérisation de zones critiques pour le dimensionnement en fatigue d'une pièce mécanique

Olivier Coudray
Groupe PSA.

Université Paris-Saclay, CNRS, Inria,
Laboratoire de mathématiques d'Orsay.
olivier.coudray@universite-paris-saclay.fr

Philippe Bristiel
Groupe PSA,
Poissy, France.

Miguel Dinis
Groupe PSA,
Poissy, France.

Christine Keribin

Université Paris-Saclay, CNRS, Inria,
Laboratoire de mathématiques d'Orsay.
Orsay, France.

Patrick Pamphile

Université Paris-Saclay, CNRS, Inria,
Laboratoire de mathématiques d'Orsay.
Orsay, France.

Ces résultats ont été obtenus dans le cadre des travaux de recherche de l'OpenLab IA du Groupe PSA et Inria.

Résumé : Pour dimensionner une pièce en fatigue, les ingénieurs ont besoin d'identifier des zones critiques. Ils ont alors recours à des calculs numériques à l'aide de modèles par éléments finis et utilisent des critères de fatigue déterministes. Cependant, les essais sur des prototypes ne valident pas toujours les résultats numériques. L'objectif de ce travail est d'améliorer l'identification des zones critiques à l'aide de méthodes statistiques.

Mots-clés : dimensionnement en fatigue, critère de Dang Van, analyse multivariée.

Abstract: To design a mechanical part, engineers need to identify critical areas. They resort to numerical calculations based on finite element models and use deterministic fatigue criteria. However, tests on prototypes do not always validate numerical results. The objective of this work is to improve the identification of critical areas using statistical methods.

Keywords: fatigue design, Dang Van criterion, multivariate analysis.

I. INTRODUCTION

Sur une pièce mécanique soumise à des efforts faibles ou modérés, on note parfois l'apparition de fissures après une durée importante d'utilisation. Ce phénomène, connu sous le nom de fatigue mécanique, est dangereux parce qu'il peut amener une pièce à rompre de manière soudaine dans des conditions normales d'utilisation, sans sollicitation excessive. Le bureau d'étude chargé du dimensionnement des pièces lors de leur conception doit alors garantir la sûreté de la pièce lors de l'utilisation, tout en minimisant son coût de production. Formellement, on évalue la durée de vie d'une pièce comme le nombre de cycles de chargement auxquels elle peut résister avant de rompre. La durée de vie se décompose en une phase d'amorçage de la fissure suivie d'une phase de propagation jusqu'à la rupture de la pièce. Dans l'industrie automobile on s'intéresse à la partie amorçage en considérant que la phase de propagation est négligeable.

Le phénomène de fatigue mécanique est bien connu aujourd'hui (cf. [7]) et pris en compte dans le

dimensionnement d'une pièce mécanique. La phase de conception d'une pièce démarre par une modélisation par éléments finis d'une géométrie correspondant au cahier des charges. Cette modélisation sert à identifier des zones critiques de la pièce, c'est-à-dire pour lesquelles le risque d'amorçage est élevé sur la durée de vie utile du véhicule. Cette phase est suivie d'essais effectués sur plusieurs prototypes afin de valider la résistance à la fatigue de la pièce dans diverses conditions de sollicitations opérationnelles. Si, lors des essais, on observe des fissures, alors on procède à une modification de la pièce donnant lieu à un nouveau calcul. Ces aller-retours impactent les coûts de développement et retardent la date de production.

Aussi, il est intéressant de disposer d'outils permettant d'estimer la tenue en fatigue à partir de la modélisation numérique de la pièce. L'objectif est de réduire la phase de conception en facilitant l'identification des zones critiques à l'aide de méthodes statistiques. Idéalement, une seule phase d'essai devrait ensuite permettre de valider la pièce sans modification ultérieure.

Dans un premier temps, nous présenterons les données à disposition. Nous verrons ensuite un exemple de critère de fatigue, communément utilisé pour identifier les zones critiques d'une pièce mécanique et nous en analyserons les limites. Enfin, nous présenterons les résultats d'analyses statistiques dans le but d'améliorer la qualité des prédictions des critères de fatigue.

II. DONNÉES

A. Données issues de calculs par éléments finis

Les pièces étudiées ici sont des composants du châssis (berceaux et traverses), pièces importantes pour la sûreté d'un véhicule. La modélisation par éléments finis permet la résolution numérique des équations mathématiques d'un problème physique, ici celui de la réponse d'une pièce mécanique soumise à des contraintes données. La pièce est maillée (Fig. 1) et les caractéristiques des matériaux des éléments sont définies. Les résultats de calculs comportent des informations physiques (contraintes, invariants de

contrainte, gradients de contrainte) en chaque élément du modèle. Pour chaque observation (un élément fini du modèle), on dispose de huit variables descriptives relatives au maillage et de cinquante variables physiques. Pour chaque modèle, on compte plusieurs centaines de milliers d'observations.

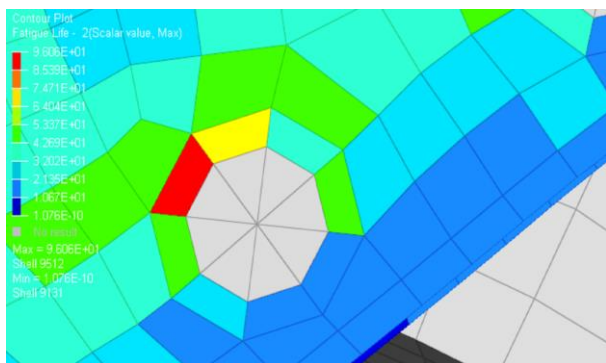


Fig. 1. Visualisation des résultats de calcul (taux de cisaillement critique) sur le modèle par éléments finis.

B. Données issues de bancs d'essais

Les prototypes testés en conditions opérationnelles sur des bancs d'essais apportent des informations supplémentaires. On dispose de comptes rendus sur lesquels ont été notées et photographiées les fissures apparues sur les prototypes testés (Fig. 2). On connaît également le nombre de cycles et le chargement auxquels a été soumis la pièce avant l'amorçage de chaque fissure. Pour chaque campagne d'essai, entre trois et sept prototypes identiques sont testés.

Les données d'essais sont incorporées aux données de calculs sous la forme de deux variables par prototype testé : l'une booléenne codant la présence de l'amorçage d'une fissure sur l'élément, l'autre quantitative mesurant l'effort appliqué à la pièce au moment d'apparition de la fissure correspondante ou par défaut, l'effort appliqué à la pièce à la fin de l'essai.

Les calculs numériques sur un modèle sont réalisés une seule fois pour un cycle de chargement d'amplitude constante notée F_n . Or, au cours d'un essai, l'amplitude de chargement varie. Ainsi, les résultats ne représentent pas exactement les contraintes réellement subies par la pièce. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe IV.D.



Fig. 2. Photographie d'une zone de la pièce (correspondant au modèle de la Fig. 1) après essai.

III. LE CRITERE DE FATIGUE DE DANG VAN

Classiquement, l'identification de zones critiques sur un modèle par éléments finis se fait à l'aide de calculs numériques et de l'utilisation de critères de fatigue. Un critère de fatigue est une évaluation, en chaque élément du modèle, du degré de criticité de cet élément à partir des contraintes calculées. Il est admis que l'amorçage de fissures de fatigue est principalement lié au cisaillement (contraintes tangentielles) et que les contraintes normales de traction accélèrent (en extension) ou retardent (en compression) leur apparition (cf. [7], chap. 2). Le critère de Dang Van est communément utilisé comme critère de fatigue dans l'industrie automobile française (cf [2]).

A. Définition

On note E l'ensemble des éléments du modèle et pour chaque élément e de E , on note respectivement Ph_e et τ_e la pression hydrostatique critique et le taux de cisaillement critique (calculés à partir du modèle par éléments finis). Le critère de Dang Van est alors une frontière linéaire dans le plan formé par ces deux variables (cf. [1]). Avec ce critère, un élément e de matériau m est critique s'il est situé au-dessus de la frontière, soit :

$$\tau_e + \alpha_m \cdot Ph_e > \tau_{0,m} \quad \text{Eq. 1.}$$

où

$$\alpha_m = 3 \cdot \left(\frac{t_m}{f_m} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tau_{0,m} = t_m$$

Les constantes f_m et t_m représentent respectivement les limites de fatigue en flexion alternée et en torsion alternée. Elles dépendent du matériau m constituant l'élément et sont estimées à partir d'essais de fatigue uniaxiaux sur éprouvettes en flexion et torsion.

On introduit alors le coefficient de danger CD_e , degré de criticité de l'élément e compte tenu de sa position à la frontière matériau.

$$CD_e = \frac{\tau_e + \alpha Ph_e}{\tau_{0,m}} - 1 \quad \text{Eq. 2.}$$

B. Normalisation du critère

La frontière sur le plan de Dang Van dépend du matériau m . Or, une pièce peut compter plusieurs matériaux aux propriétés différentes. Aussi, pour pouvoir comparer ces points, nous proposons d'introduire une version normalisée du critère de Dang Van (cf. [4]). Les grandeurs normalisées $Ph_e^{(n)}$ et $\tau_e^{(n)}$ sont définies de la façon suivante :

$$\left(Ph_e^{(n)}, \tau_e^{(n)} \right) = \left(\alpha_m \frac{Ph_e}{\tau_{0,m}}, \frac{\tau_e}{\tau_{0,m}} \right) \quad \text{Eq. 3.}$$

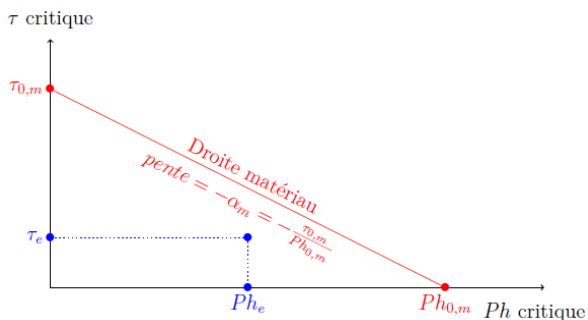


Fig. 3. Diagramme de Dang Van classique.

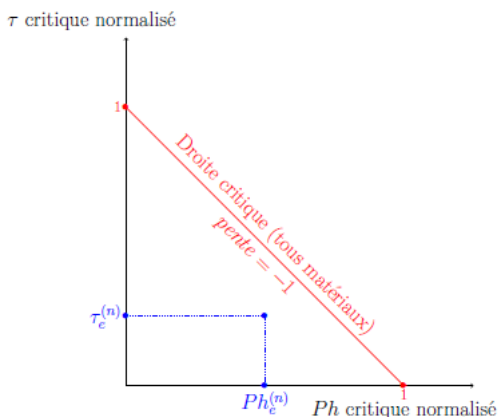


Fig. 4. Diagramme de Dang Van normalisé.

Dans ce nouveau plan, tous les matériaux partagent la même frontière (cf. 0 et Fig. 4). On peut ainsi superposer les données de plusieurs pièces. De plus, le coefficient de danger se réécrit très simplement en fonction des grandeurs normalisées :

$$CD = \tau_e^{(n)} + Ph_e^{(n)} - 1. \quad \text{Eq. 4.}$$

C. Limites du critère

On peut voir sur la Fig. 5 un premier exemple d'évaluation du critère de Dang Van sur trois cas d'étude (450 000 observations).

La Fig. 5 montre que des éléments sur lesquels une fissure a amorcé sont bien des points dans la partie supérieure droite du plan de Dang Van. Pourtant, certains de ces points ayant fissuré se situent en-dessous de la droite critique.

On voit donc clairement que le critère de Dang Van ne permet pas d'identifier tous les points d'amorçage de fissure. Cela peut s'expliquer par le caractère aléatoire de l'amorçage mais aussi par le fait que le critère ne tient pas compte des singularités géométriques ou métallurgiques de certaines zones de la pièce qui peuvent pourtant impacter grandement l'amorçage de fissure. De plus, les résultats de calculs sur le modèle par éléments finis sont imprécis, en particulier sur les zones présentant des singularités. Par exemple, le calcul ne tient pas compte des contraintes résiduelles sur les pieds de cordons de soudure ou sur les bords de tôle avec courbure importante qui peuvent pourtant réduire la résistance à la fatigue.

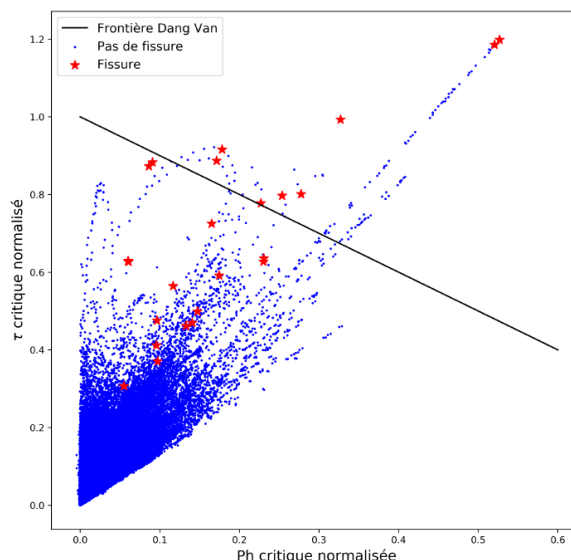


Fig. 5. Diagramme de Dang Van normalisé (points bleus issus des calculs numériques ; étoiles : éléments ayant fissuré lors des essais).

IV. AMÉLIORATION DU CRITÈRE DE FATIGUE

La superposition des résultats de calculs et des données d'essais sur trois cas d'étude nous a permis d'illustrer les limites du critère de Dang Van. Nous souhaitons utiliser les données à disposition pour définir un nouveau critère de fatigue plus performant.

A. Étude multidimensionnelle des données de fatigue

On note d'abord que le critère de Dang Van n'utilise que deux informations alors que l'on dispose de cinquante variables dans les résultats de calculs qui pourraient contribuer à définir un critère de fatigue plus efficace.

On effectue une analyse en composantes principales des données (ACP, cf. [3] Chap. 1) pour repérer d'éventuelles directions d'observation intéressantes et complémentaires à celles déjà considérées. Dès le premier plan principal, l'ACP permet non seulement de retrouver les informations du critère de Dang Van (corrélation avec les pression hydrostatique et taux de cisaillement critiques) mais aussi d'amener à une possible caractérisation des fissures (voir Fig. 6). En effet, le second axe apporte une information supplémentaire à la représentation de Dang Van puisqu'il permet d'identifier deux « types » de fissures : du point de vue des variables, c'est l'orientation des contraintes qui les différencie.

Malgré l'intégration des nouvelles variables, certaines fissures restent mal caractérisées. Les variables considérées ne permettent pas de bien classifier les différents éléments ayant fissuré. On note que la majorité de ces fissures surviennent sur des zones particulières pour des raisons géométriques ou métallurgiques : bords de tôle avec fort rayon de courbure, cordons de soudure, points de jonction entre une extrémité de cordon de soudure et un bord de tôle (voir exemples Fig. 7). Ainsi, il est nécessaire de tenir compte aussi de ces singularités dans les variables.

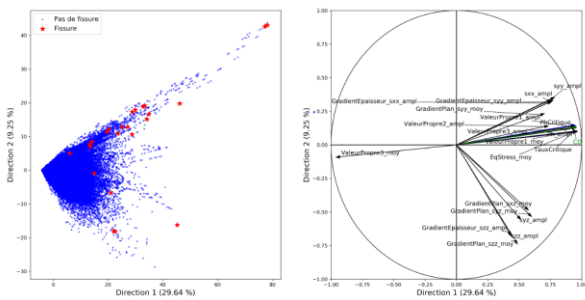


Fig. 6. Deux premières composantes principales et cercle des corrélations (représentation des 20 variables contribuant le plus) : mise en évidence de deux groupes de fissures.

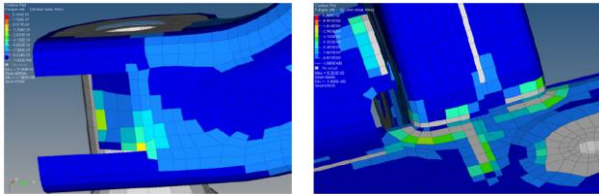


Fig. 7. Exemples de zones présentant des singularités géométriques.

B. Changement d'unité d'analyse et nouvelles variables

La notion de singularité est complexe à caractériser. Celle-ci ne se rapporte pas à un seul élément du maillage mais plutôt à son voisinage. C'est pourquoi on choisit dans un premier temps de changer d'unité d'analyse en regroupant les éléments en zones connexes et fortement contraintes, c'est-à-dire avec un coefficient de danger important. Cette méthode s'inspire des approches non locales pour les critères de fatigue (cf. [6]). Ces approches consistent à ne pas utiliser la contrainte calculée sur la singularité elle-même mais plutôt la distribution des contraintes sur le voisinage de la singularité pour évaluer le risque d'amorçage.

Pour caractériser la dangerosité d'un élément on utilise le coefficient de danger (voir Eq. 4) qui constitue un bon indicateur de risque d'amorçage. On choisit un seuil de coefficient de danger permettant de prendre en compte tous les points de fissure. Le principe de l'algorithme est illustré en Fig. 8. En partant d'un élément de coefficient de danger supérieur au seuil, on élargit progressivement la zone autour de l'élément en y ajoutant les voisins (éléments adjacents) dont le coefficient de danger est également supérieur au seuil. On réitère à partir des derniers éléments ajoutés à la zone et ainsi de suite.

Ce regroupement par zone a permis une réduction nette du volume de données. Pour les trois cas d'étude analysés, on passe de 450 000 éléments à un peu moins de 450 zones, sans aucune zone en-dessous de la frontière du coefficient de danger seuil. Le nombre de zones d'amorçage reste identique. On note que toutes les fissures sont représentées dans ces zones et qu'on retrouve au plus une fissure par zone.

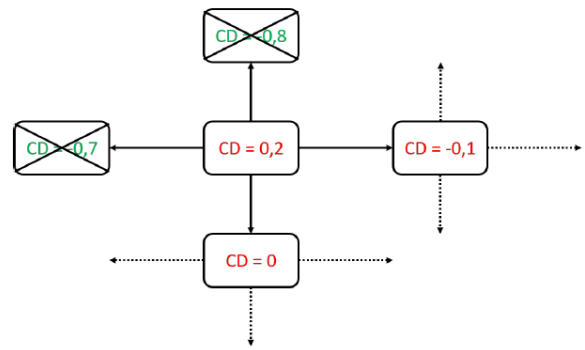


Fig. 8. Principe de l'algorithme de regroupement par zones.

La pression hydrostatique et le taux de cisaillement sur une zone sont définis comme ceux de l'élément le plus critique de la zone. On introduit également deux nouvelles variables : un coefficient de singularité « bord de tôle » et un coefficient de singularité « cordon de soudure » représentant respectivement la proportion d'éléments de type « bord de tôle » et « cordon de soudure » dans une zone.

C. Prise en compte de la multiplicité des essais

Les résultats de calculs sur un modèle sont réalisés une seule fois pour une sollicitation nominale $100\%F_n$. Or, pour un même modèle, entre trois et sept pièces identiques sont testées pour des intensités de sollicitation différentes que l'on mesure en pourcentage de F_n . Autrement dit, les résultats de calculs doivent être corrigés en fonction du chargement réel appliqué à la pièce lors des différents essais. La correction à appliquer est simple à mettre en œuvre grâce à la linéarité de la solution par l'approximation éléments finis.

Pour la majorité des zones de la base de données, on n'observe aucune fissure lors des essais. Ainsi, on ne garde qu'une observation correspondant à l'essai le plus endommageant, c'est-à-dire avec un pourcentage de F_n maximum. Bien entendu, on corrige les résultats de calculs en fonction de ce pourcentage.

Pour les zones ayant fissuré lors d'un essai au moins, on crée autant d'observations qu'il y a d'essais. Les résultats de calcul sont corrigés en fonction du pourcentage de F_n au moment de l'amorçage ou en fin d'essai (pour les essais n'ayant pas donné lieu à un amorçage sur la zone).

A présent, une observation correspond à une zone d'un modèle et pour un essai en particulier. Les points de fissure correspondent aux observations pour lesquelles une fissure a été constatée. On appelle à présent « point sans fissure » une observation qui n'a pas donné lieu à une fissure mais correspondant à une zone qui a fissuré sur d'autres essais (pour des pourcentages de F_n différents). Pour les points correspondant à des zones sans aucune fissure, on parlera de « point sans aucune fissure ».

L'analyse des différents résultats d'essais pour une même zone est une information très riche puisqu'elle permet de séparer les sources de variabilité. En effet, les incertitudes sur les résultats de calculs sont identiques pour tous les essais sur un même modèle. Ainsi, la dispersion des points dans le diagramme de Dang Van est révélatrice de l'aléa lié à l'amorçage lui-même : pour deux pièces identiques, le pourcentage de F_n au moment de l'amorçage n'est pas le même.

D. Méthodes statistiques pour l'identification des zones critiques

Suite aux traitements présentés dans les sous-sections IV.A et IV.B, notre jeu de données est constitué de $n = 513$ observations x_1, \dots, x_n . Chaque observation est relative à une zone d'un modèle et pour un essai. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i est un vecteur de \mathbb{R}^4 , les différentes dimensions représentent :

- la pression hydrostatique critique (sur le point le plus critique de la zone) normalisée et recalculée dans les conditions associées à l'essai ;
- le taux de cisaillement critique (sur le point le plus critique de la zone) normalisé et recalculé dans les conditions associées à l'essai ;
- le coefficient de singularité de type « bord de tôle » : pourcentage d'éléments de type « bord de tôle » dans la zone ;
- le coefficient de singularité de type « cordon de soudure » : pourcentage d'éléments de type « cordon de soudure » dans la zone .

Pour chaque observation x_i , on dispose d'une sortie y_i binaire, indiquant si oui ou non la zone en question a fissuré pour l'essai considéré.

L'objectif est de construire un nouveau critère statistique permettant, à partir d'une nouvelle entrée $x \in \mathbb{R}^4$ représentant les résultats de calculs sur une nouvelle zone dans de nouvelles conditions d'essai, de prédire la sortie y : fissure ou non. Il s'agit d'un problème classique d'apprentissage supervisé. On teste différentes méthodes de classification :

- Analyse Discriminante Linéaire (LDA) cf. [5] Chap. 4 ;
- Analyse Discriminante Quadratique (QDA) cf. [5] Chap. 4 ;
- Régression Logistique (LR) cf. [5] Chap. 4 ;
- Machine à Vecteurs de Support (SVM) cf. [5] Chap. 12.

On entraîne ces modèles sur deux jeux de données différents :

- un premier contenant seulement les deux premières dimensions (pression hydrostatique et taux de cisaillement), l'idée étant de pouvoir comparer les frontières de décision à la frontière théorique de Dang Van ;
- un deuxième contenant les quatre dimensions, afin de voir l'apport sur la prédiction des nouvelles variables liées aux singularités.

Pour la première application, on représente les données ainsi que les différentes frontières de décision apprises statistiquement (Fig. 10). On remarque d'abord que les deux catégories ne sont pas séparables dans ce plan : elles apparaissent même très mélangées. Les frontières linéaires ont une pente de signe opposé à celle de Dang Van. Ceci ne remet pas en cause la validité du critère de Dang Van : en réalité, la position des frontières statistiques est un biais lié à l'échantillon analysé, dû notamment à la présence d'un grand nombre de points dans la partie supérieure droite du

diagramme (fissures). On espère améliorer les résultats de prédiction en utilisant les deux nouvelles variables géométriques introduites dans IV.B.

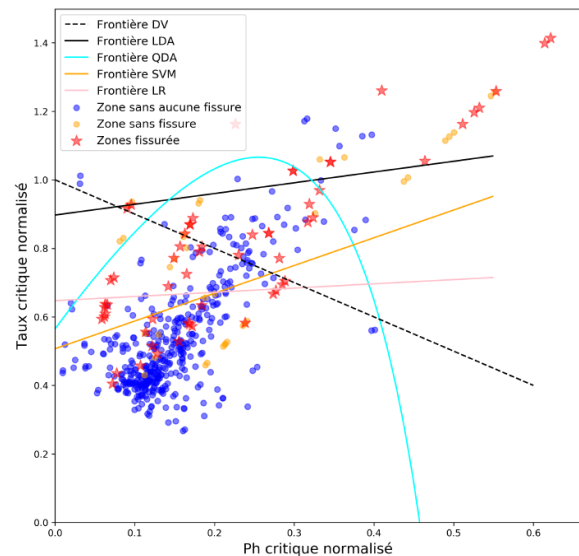


Fig. 9. Représentation des frontières statistiques dans le plan de Dang Van normalisé

On évalue la performance de ces méthodes de prédiction à l'aide de différents indicateurs : *accuracy*, *precision*, *recall*, *F1 score* (cf. Fig. 10 et Fig. 11). Les scores sont obtenus par validation croisée en divisant le jeu de données en 5 sous-échantillons (*K-Fold Cross-Validation* avec $K = 5$, cf. [5] Chap. 7).

	Accuracy	Precision	Recall	F1 score
Linear Discriminant Analysis	0.87	0.37	0.22	0.28
Quadratic Discriminant Analysis	0.86	0.33	0.20	0.25
Logistic Regression	0.77	0.28	0.64	0.39
SVM	0.75	0.28	0.71	0.40
Dang Van	0.82	0.31	0.47	0.38

Fig. 10. Classification sans prise en compte des singularités géométriques.

	Accuracy	Precision	Recall	F1 score
Linear Discriminant Analysis	0.87	0.36	0.20	0.26
Quadratic Discriminant Analysis	0.86	0.37	0.27	0.31
Logistic Regression	0.76	0.27	0.68	0.39
SVM	0.74	0.27	0.76	0.40
Dang Van	0.82	0.31	0.47	0.38

Fig. 11. Classification avec prise en compte des singularités géométriques.

L'ajout des variables liées aux singularités géométriques n'améliore pas les résultats de prédiction. Ceci ne remet pas en cause l'influence de ses singularités sur l'amorçage. Pour autant, les variables calculées pour l'instant ne rendent pas bien compte de cette dimension manquante.

Parmi les scores présentés dans les tables Fig. 10 et Fig. 11, l'*accuracy* (taux de bien classés) n'est pas un bon indicateur, les données étant déséquilibrées : 10% de fissures environ. La *precision* indique le pourcentage de points prédits comme fissures correspondant effectivement à des fissures. On tend à privilégier le *recall* qui représente le pourcentage de fissures correctement identifiées. On voit sur ce point que certaines méthodes statistiques offrent de meilleures performances que le critère de Dang Van. En particulier, les SVM permettent d'identifier correctement

76% des fissures pour une perte de précision raisonnable (en nombre de cas).

V. CONCLUSION

Pour dimensionner une pièce mécanique, le bureau d'études cherche à identifier des zones critiques, c'est-à-dire présentant un risque élevé d'amorçage de fissure. En croisant données d'essais et résultats de calculs, nous avons pu mettre en évidence les limites du critère de Dang Van pour l'identification de zones critiques. L'analyse multivariée enrichit la caractérisation de certaines zones critiques. En revanche, certains points restent relativement mal caractérisés, même en prenant en compte les différents axes de l'ACP. De plus, l'analyse des erreurs de prédiction montre que les zones critiques mal identifiées par le critère de Dang Van sont plutôt liées à la présence de singularités géométriques et métallurgiques. Le regroupement des éléments par zones a permis d'une part de simplifier le jeu de données, d'autre part d'ajouter un nouveau type de variable, prenant en compte des informations non seulement sur l'élément mais aussi sur son voisinage. Nous avons également pris en compte la multiplicité des essais et les chargements réels imposés pour corriger les résultats de calcul. Enfin, l'utilisation de méthodes statistiques de classification nous a permis de définir de nouveaux critères statistiques améliorant la localisation des zones critiques.

Pour autant, les résultats de prédiction ne sont pas encore satisfaisants. Le critère de regroupement par zone repose sur un choix de seuil arbitraire qu'il conviendra d'affiner et de justifier rigoureusement. Nous avons également vu que l'ajout des variables liées aux singularités n'a pas permis d'améliorer significativement les résultats de prédiction, d'où

la nécessité de chercher des variables plus pertinentes. De même, au lieu d'utiliser seulement les grandeurs physiques du point le plus critique d'une zone, il serait intéressant de prendre en compte la distribution des contraintes sur l'ensemble de la zone. Enfin, le modèle actuel de prédiction est limité puisqu'il permet seulement d'évaluer le risque d'amorçage en un point. On souhaiterait plutôt prévoir la résistance d'une zone, c'est-à-dire l'intensité d'effort maximum à laquelle elle peut résister pour un nombre de cycles donné. Ces études seront alimentées par de nouveaux jeux de données permettant de diversifier les modèles et modes de sollicitations disponibles, ce qui nous permettra de guider la construction d'un nouveau critère de fatigue probabilisé.

REFERENCES

- [1] Ballard, P., Van, K. D., Deperrois, A., & Papadopoulos, Y. V. (1995, Mars). High cycle fatigue and a finite element analysis. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 18(3), 397-411.
- [2] Beaumont, P. (2013). *Optimisation des plans d'essais accélérés : application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol*.
- [3] Escofier, B., & Pagès, J. (2016). *Analyses factorielles simples et multiples*. Dunod.
- [4] Fouvry, S., Kapsa, P., & Vincent, L. (2003). A Global Methodology to Quantify Fretting Damages. *ASTM International*.
- [5] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning - Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer-Verlag New York.
- [6] Morel, F., & Palin-Luc, T. (2002). A non-local theory applied to high cycle multiaxial fatigue. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 25(7), 649-665.
- [7] Schijve, J. (2009). *Fatigue of Structures and Materials*. Springer Netherlands.