



**HAL**  
open science

## Graphes représentatifs d'hypergraphes (Lecture at Colloque Mathématiques Discretés: Codes et Hypergraphes, Brussels, 1978)

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond, Anne Germa, Marie-Claude Heydemann. Graphes représentatifs d'hypergraphes (Lecture at Colloque Mathématiques Discretés: Codes et Hypergraphes, Brussels, 1978). Cahiers du Centre d'études de recherche opérationnelle, 1978, 20, pp.325-329. hal-02342579

**HAL Id: hal-02342579**

**<https://inria.hal.science/hal-02342579>**

Submitted on 1 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# GRAPHES REPRESENTATIFS D'HYPERGRAPHES

J.C. BERMOND, A. GERMA et M.C. HEYDEMANN

Université de Paris Sud, Informatique, bât. 490  
91405 Orsay

## ABSTRACT.

Let  $H$  be a  $h$ -uniform hypergraph. We define the  $k$ -line graph of  $H$ ,  $L_k(H)$  ( $0 < k < h$ ) as the graph whose vertices are in one to one correspondence with the edges of  $H$ , two vertices being joined if and only if the corresponding edges intersect in at least  $k$  elements. We show that, in contrary to the case of graphs ( $h = 2$ ), if  $h \geq 3$ , there do not exist characterizations of the  $k$ -line graph of  $h$ -uniform hypergraphs, neither by excluding a finite family of forbidden subgraphs, nor in terms of cliques (for  $k \geq 2$ ).

## I. Introduction.

1.1 Soit  $H = (X, \mathcal{E})$  un hypergraphe. Dans toute la suite nous considérons des hypergraphes  $h$ -uniformes (toutes les arêtes ont même cardinal  $h$ ). Par contre, suivant les cas, ces hypergraphes seront simples (arêtes deux à deux distinctes) ou multiples (multi-hypergraphes). Pour les définitions et notations non précisées dans cet article voir [1].

1.2 Définition : Soit  $H$  un hypergraphe. On définit le graphe  $k$ -représentatif de  $H$  et on note  $L_k(H)$ , le graphe simple (sans boucle et sans arêtes multiples) dont l'ensemble des sommets  $(e_i)$  correspond bijectivement à l'ensemble des arêtes  $(E_i)$  de  $H$  ;  $(e_i, e_j)$  est une arête de  $L_k(H)$  si et seulement si les arêtes correspondantes  $E_i$  et  $E_j$  ont une intersection de cardinal supérieur ou égal à  $k$ . Ainsi  $L_1(H)$  est appelé généralement graphe représentatif des arêtes de  $H$ .

Dans le cas où  $H$  est un graphe ( $h=2$ ),  $L_1(H)$  est le graphe représentatif des arêtes du graphe.

L'ensemble des graphes  $G$  tels qu'il existe un multi-hypergraphe  $H$   $h$ -uniforme avec  $G = L_k(H)$  est noté  $\mathcal{L}_k^h$ .

1.3 Rappel : Pour tout graphe simple  $G$  et tout entier positif  $k$  il existe un entier positif  $h$  tel que  $G$  appartienne à  $\mathcal{L}_k^h$  (voir [3]).

1.4 Problème :  $h$  et  $k$  étant fixés nous cherchons à caractériser  $\mathcal{L}_k^h$ . Dans le cas  $h = 2$  les caractérisations suivantes sont bien connues :

1.5 Théorème (voir [1, chap. 17]) : Il y a équivalence entre

- (i)  $G$  est le graphe représentatif des arêtes d'un graphe simple.
- (ii) Il existe une famille de neuf graphes que  $G$  ne contient pas comme sous-graphe.
- (iii) Il existe une partition  $\mathcal{P}$  des arêtes de  $G$  en cliques de sorte que chaque sommet de  $G$  appartienne à au plus deux cliques de  $\mathcal{P}$ .

1.6 Des caractérisations analogues ont été trouvées pour le graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe (voir [2]).

1.7 Nous allons montrer par des exemples que les caractérisations par sous-graphes exclus, ou au moyen des propriétés d'une famille de cliques, ne s'étendent pas au cas où  $h$  et  $k$  sont quelconques, et ceci, que  $H$  soit un hypergraphe simple ou un multi-hypergraphe.

## II. Absence de caractérisation par sous-graphes exclus.

2.1 Problème : existe-t-il une famille finie de graphes telle que tout graphe ne contenant aucun de ces graphes comme sous-graphe soit le graphe  $k$ -représentatif des arêtes d'un hypergraphe  $h$ -uniforme  $H$  ?

M. Gardner [4], généralisant un résultat de L. Nickel [7] a prouvé que ce problème n'a pas de solution quand  $k = 1$ ,  $h \geq 3$ , en exhibant une famille infinie de graphes qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{L}_1^h$  et qui sont minimaux avec cette propriété (c'est-à-dire que pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $G-x$  appartient à  $\mathcal{L}_1^h$ ). On peut généraliser ce résultat et énoncer :

2.2 Théorème : Il existe une famille infinie de graphes qui ne sont pas des graphes  $k$ -représentatifs des arêtes d'un multi-hypergraphe (et donc d'un hypergraphe simple),  $h$ -uniforme, et qui sont minimaux avec cette propriété.

Preuve : Une famille possible de graphes, généralisant l'exemple de M. Gardner [4] est représentée sur les figures 1, 2, n.

2.3 Remarque 1 : Dans [3] et [5] il est montré que l'on ne peut pas caractériser par sous-graphes exclus les graphes de  $\mathcal{L}_{h-1}^h$ . Ces articles contiennent des contre-exemples et des conjectures.

2.4 Remarque 2 : On aurait pu envisager de considérer les graphes  $k$ -représentatifs d'hypergraphes dont les arêtes sont de cardinal au plus  $h$ , mais, si  $G$  est le graphe  $k$ -représentatif d'un tel hypergraphe, il est  $k$ -représentatif de l'hypergraphe  $h$ -uniforme obtenu par adjonction de sommets distincts aux arêtes du précédent.

2.5 Par ailleurs une caractérisation d'une certaine classe de graphes 1-représentatifs par sous-graphes exclus a été obtenue par R.N. Naik, S.B. Rao, S.S. Shrikhande, N.M. Singhi [6].

2.6 Théorème [6] :  $h$  étant donné, il existe une famille finie  $\mathfrak{F}_h$  de graphes et un polynôme  $P(h)$  tels que tout graphe  $G$  ne contenant pas de graphes de  $\mathfrak{F}_h$  comme sous-graphe et vérifiant la propriété suivante : toute arête de  $G$  appartient à au moins  $P(h)$  triangles, est un  $L_1(H)$  avec  $H$  hypergraphe  $h$ -uniforme simple.

### III. Caractérisation par cliques ?

#### 3.1. Cas $k = 1$ .

Soit  $G$  un graphe et  $\mathcal{C}$  une famille de cliques. On considère les propriétés suivantes :

( $P_1$ ) Toute arête de  $G$  appartient à au moins une clique de  $\mathcal{C}$ .

( $P_2$ ) Tout sommet de  $G$  appartient à au plus  $h$  cliques de  $\mathcal{C}$ .

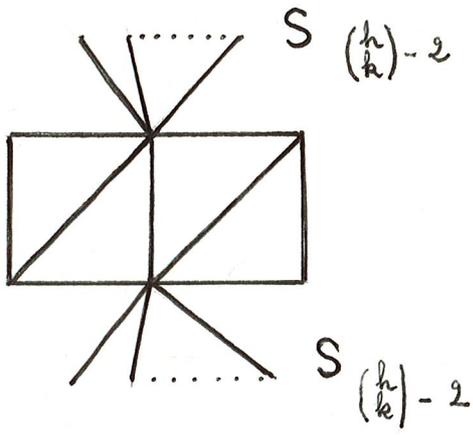


FIGURE 1

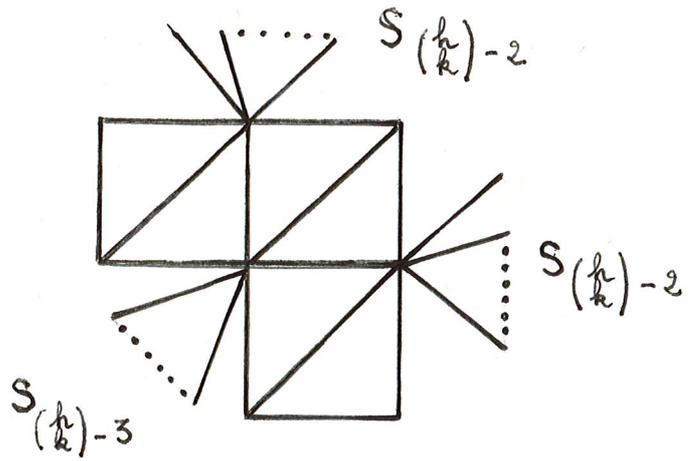
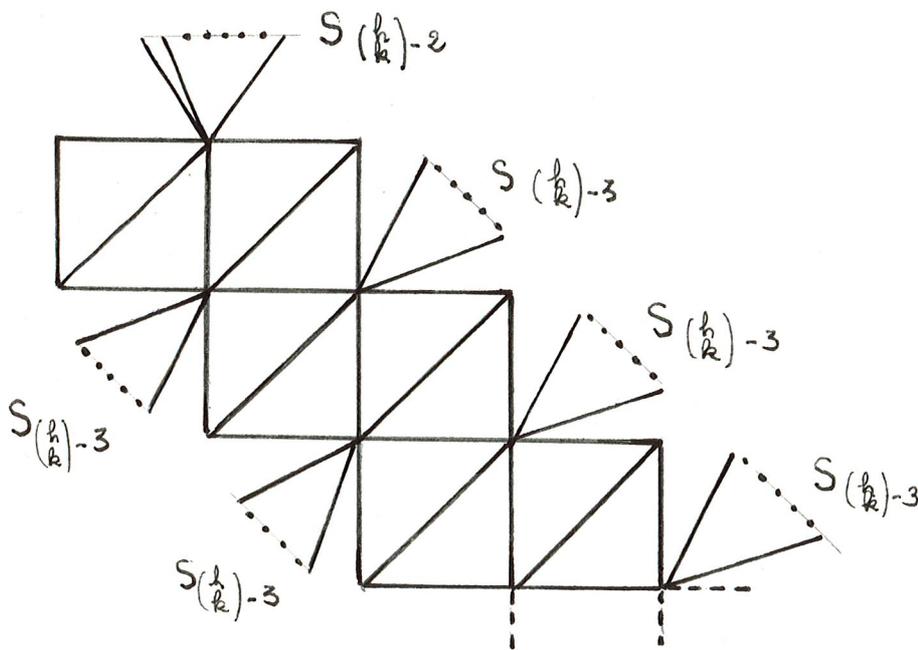


FIGURE 2



notation

$S_i$  dénote un stable de cardinal  $i$

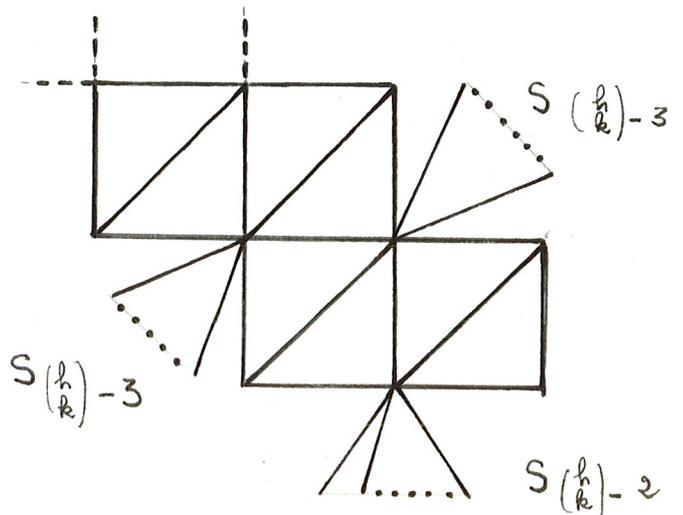


FIGURE n

(P<sub>3</sub>) Toute arête de  $G$  appartient à au plus  $h-1$  cliques de  $\mathcal{C}$ .

(P'<sub>3</sub>) Pour tout couple de sommets distincts de  $G$  il existe une clique contenant l'un et ne contenant pas l'autre.

Proposition : Soit  $G$  un graphe et  $\mathcal{C}$  une famille de cliques de  $G$

(i) si  $\mathcal{C}$  vérifie (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>),  $G$  est un  $L_1(H)$ , où  $H$  est un multi-hypergraphe  $h$ -uniforme.

(ii) si  $\mathcal{C}$  vérifie (P<sub>1</sub>), (P<sub>2</sub>), (P<sub>3</sub>) ou (P<sub>1</sub>) (P<sub>2</sub>) (P'<sub>3</sub>) alors  $G$  est un  $L_1(H)$  avec  $H$  hypergraphe simple  $h$ -uniforme.

Preuve : la démonstration est analogue à celle de [1, chap. 17] ; il suffit de considérer le dual de l'hypergraphe des cliques en le rendant  $h$ -uniforme par adjonction de sommets.

En conclusion, dans le cas  $k=1$ , nous avons une caractérisation analogue à celle du cas des graphes. Nous allons voir qu'il n'en est pas de même pour  $k \geq 2$ .

### 3.2 Cas $k \geq 2$ .

Si  $G = L_k(H)$  il existe une famille de cliques  $\mathcal{C}$  vérifiant les propriétés suivantes :

(Q<sub>1</sub>) Toute arête de  $G$  appartient à au moins une clique de  $\mathcal{C}$ .

(Q<sub>2</sub>) Tout sommet de  $G$  appartient à au plus  $\binom{h}{k}$  cliques de  $\mathcal{C}$ .

Si de plus  $H$  est un hypergraphe simple on a aussi,

(Q<sub>3</sub>) Toute arête de  $G$  appartient à au plus  $\binom{h-1}{k}$  cliques de  $\mathcal{C}$ .

Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes ; en effet soient  $h$  et  $k$  deux entiers avec  $1 < k < h$  : il n'existe pas de multi-hypergraphe  $H$  (et donc d'hypergraphe simple  $H$ ),  $h$ -uniforme tel que le graphe biparti complet  $K_{2, \binom{h}{k}}$  soit égal à  $L_k(H)$ . Cependant, ce graphe étant sans triangle n'admet pour cliques que les sommets ou les arêtes. Pour que (Q<sub>1</sub>) soit vérifiée on est amené à choisir pour  $\mathcal{C}$  l'ensemble des arêtes ; les propriétés (Q<sub>2</sub>) et (Q<sub>3</sub>) sont alors vérifiées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BERGE, Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1973.
- [2] J.C. BERMOND, J.C. MEYER, Graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe, J. Math. pures et appl., 52, 1973, 299-308.
- [3] J.C. BERMOND, M.C. HEYDEMANN, D. SOTTEAU, Line-graphs of hypergraphs I, Discrete Mathematics 18, 1977, 235-241.
- [4] M.L. GARDNER, On the impossibility of a finite forbidden configuration characterization of the graphs which are intersection graphs of  $r$ -graphs (à paraître).
- [5] M.C. HEYDEMANN, D. SOTTEAU, Line-graphs of hypergraphs II, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 18 Combinatorics, Keszthely (Hungary) 1976, North Holland 1978.
- [6] R.N. NAIK, S.B. RAO, S.S. SHRIKHANDE, N.M. SINGHI, Intersection graphs of  $k$ -uniform linear hypergraphs (à paraître Proc. Conference Fort Collins, June 1978).
- [7] L. NICKEL, Communication privée.