



**HAL**  
open science

# Méthode récurrente approchée pour calculer l'indisponibilité opérationnelle induite par les ruptures de stock de LRU

Raymond A. Marie

► **To cite this version:**

Raymond A. Marie. Méthode récurrente approchée pour calculer l'indisponibilité opérationnelle induite par les ruptures de stock de LRU. 21e Colloque National de Maîtrise des risques et sûreté de fonctionnement, Oct 2018, Reims, France. pp.1-9. hal-01937251

**HAL Id: hal-01937251**

**<https://inria.hal.science/hal-01937251v1>**

Submitted on 28 Nov 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MÉTHODE RÉCURRENTÉ APPROCHÉE POUR CALCULER L'INDISPONIBILITÉ OPÉRATIONNELLE INDUITE PAR LES RUPTURES DE STOCK DE LRU

## A NEW RECURRENT METHOD FOR APPROXIMATING OPERATIONAL PERFORMANCE INDUCED BY LRU SPARE SHORTAGE

Raymond A. Marie

Université Rennes IRISA & INRIA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

*Raymond.Marie@irisa.fr*

### Résumé

Cette étude concerne l'évaluation de la disponibilité opérationnelle d'une flotte de systèmes déployés sur un site et maintenus par échanges sur le site de sous-ensembles (les LRU) en présence d'attentes potentielles de livraison de LRU sur le site opérationnel. L'explosion du nombre d'états nécessaires à certaines applications réelles limite l'usage d'une approche markovienne classique pour modéliser et évaluer les performances de la flotte de systèmes. C'est la raison pour laquelle nous proposons ici une méthode récurrente approchée pour calculer l'indisponibilité opérationnelle. Sa faible complexité relative permet de l'utiliser pour les applications rencontrées dans le domaine de la maintenance. Bien qu'approchée, la méthode fournit le résultat avec une faible erreur relative, variant de  $10^{-2}$  à  $10^{-8}$ . Pour l'instant, la méthode ne concerne que les systèmes constitués d'une série de LRU.

### Summary

This study concerns the evaluation of the operational availability of a fleet of systems deployed on a site and maintained by exchanges on site of subsets (the LRUs), in the presence of potential delivery delays of LRUs on the operational site. The explosion of the number of states required for some real applications limits the use of a standard Markovian approach to model and evaluate the performance of the fleet of systems. This is the reason why we propose here an approximate recurrent method to calculate the operational unavailability. Its low relative complexity allows it to be used for applications encountered in the field of maintenance. Although approximate, the method provides the result with a small relative error, ranging from  $10^{-2}$  to  $10^{-8}$ . For now, the method only concerns systems consisting of a series of LRUs.

---

## 1 Introduction

La maintenance des gros équipements représente une part substantielle du budget consacré à l'exploitation des dits équipements. Sur les sites opérationnels, la maintenance corrective se fait par échange de sous-ensembles en général conséquents désignés sous le nom de LRU (*Line Replaceable Unit*). Les raisons qui conduisent à l'échange, plutôt qu'à la réparation, de ces sous-ensembles sont multiples. Cette politique réduit le temps d'interruption de service et le personnel d'intervention n'a pas besoin d'être expert dans le domaine de spécialité (eg, mécanique, électronique) du sous-ensemble échangé. Ainsi, il est plus rapide de changer le moteur d'un camion que de changer le piston du dit moteur. De plus, cela évite la présence d'ateliers et d'équipes de réparation sur le site opérationnel. Des temps d'échange relativement courts favorisent l'obtention d'une disponibilité intrinsèque très élevée de ces gros équipements, avec si nécessaire la présence de redondances au niveau de leur conception. Rappelons que la disponibilité « intrinsèque » est définie comme la disponibilité théorique que l'on obtiendrait si les agents de maintenance étaient toujours disponibles dès l'occurrence de la panne (et non occupés

sur une autre panne) et si le stock de maintenance des LRU en bon état était toujours capable de satisfaire la demande. La disponibilité dite « opérationnelle » est celle qui prend aussi en compte ces deux derniers facteurs d'indisponibilité. De ces deux derniers facteurs, le moins conséquent est en général l'indisponibilité momentanée d'un agent de maintenance car, si l'étude a été bien conduite, un tel événement est rare et de courte durée. Ainsi le plus conséquent est en général l'absence d'une LRU de rechange. Cela est dû d'une part au prix engagé dans un stock de maintenance des LRU ; par exemple, un moteur d'avion peut coûter plus de 15 000 000 dollars US. D'autre part, l'espace pour accueillir un stock de maintenance de LRU sur un site opérationnel peut être limité ; par exemple, sur un porte-avion, l'espace est manifestement limité (encore plus dans un sous-marin).

Une première approche d'évaluation de l'indisponibilité opérationnelle induite par les ruptures de stock de LRU avait été menée pour des parcs de systèmes complexes dans une précédente publication (Marie et al (2014)) mais cette dernière ne donnait de bons résultats que pour des systèmes à grande disponibilité opérationnelle. La nouvelle méthode est plus sophistiquée,

ce qui permet d'obtenir des résultats plus précis, et ceci, que la disponibilité opérationnelle soit élevée ou non.

Dans la section suivante, nous présentons d'abord un modèle markovien qui sert de référence pour la nouvelle méthode approchée permettant de traiter des applications plus conséquentes ; méthode présentée dans la même section, ainsi qu'une prise en compte possible du temps d'échange dans la détermination finale de la disponibilité opérationnelle. La section 3 expose une série de tests numériques permettant d'apprécier la précision de l'approximation. Enfin, une conclusion présente le bilan de cette étude ainsi que de futures extensions.

## 2 Hypothèses et modélisation

### 2.1 Modèle de référence

Comme annoncé au paragraphe introductif, nous supposons que chaque système est constitué de  $N$  LRU en série ; nous supposons aussi que  $M$  systèmes sont déployés sur le site opérationnel. Compte tenu de la structure série d'un système, nous supposons ici que lorsqu'un système tombe en panne suite à la panne d'une LRU, les autres LRU ne peuvent plus tomber en panne avant la remise en service du système. La flotte de systèmes est considérée en régime stationnaire et l'étude porte sur le comportement asymptotique des caractéristiques.  $R_i$  désigne le nombre de LRU de type  $i$  initialement allouées sous forme de rechanges sur le site opérationnel,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Introduisons la variable aléatoire (VA)  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , définie comme la quantité de LRU de type  $i$  disponibles sur le site à un instant donné. Les valeurs possibles de la VA  $S_i$  sont donc les entiers  $\{0, 1, \dots, R_i\}$ . Compte tenu du prix élevé des LRU, la panne d'une LRU entraîne la commande d'une nouvelle LRU auprès du centre de stockage en charge du site opérationnel. À un instant donné, plusieurs systèmes peuvent être bloqués suite à un manque de LRU de type  $i$ . La VA  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , désigne ici le nombre de systèmes bloqués par manque de LRU de type  $i$  à un instant donné. Les VA  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, M\}$ . Notons que, par définition, le produit  $S_i \times X_i$  est toujours nul. Nommons NBS la VA « nombre de systèmes bloqués par manque de LRU disponible » ; nous avons  $NBS = \sum_{i=1}^N X_i$ . L'espérance de NBS correspond à la partie de l'indisponibilité imputable au manque de LRU disponibles.

Considérons maintenant la VA  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , définie comme la quantité aléatoire  $W_i = R_i - (S_i - X_i)$ . À tout instant, cette quantité correspond au nombre de LRU de type  $i$  en attente de livraison sur le site opérationnel. Posons  $K_i = M + R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ; il est facile de voir que les valeurs possibles de la VA  $W_i$  sont les entiers  $\{0, 1, \dots, K_i\}$  et que la connaissance du couple  $(S_i, X_i)$  nous donne la valeur de la VA  $W_i$ ,

et réciproquement. Remarquons que si  $R_i = 0$ , nous obtenons simplement  $W_i = X_i$ .

Nous supposons que les temps de bon fonctionnement des LRU suivent des lois exponentielles. Le taux de panne relatif aux LRU de type  $i$  est noté  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Nous supposons ici que le taux de livraison d'une LRU de type  $i$  sur le site ne dépend que du type  $i$  de la LRU et de la quantité en attente de livraison (quantité égale à  $W_i$ ) ; ce qui va nous permettre de considérer un modèle markovien homogène.

La chaîne de Markov à temps continu (CMTC) dont les états sont les  $n$ -uples  $(W_1, W_2, \dots, W_N)$  constitue notre modèle de référence. Notons ses états par les  $n$ -uples  $(k_1, k_2, \dots, k_N)$ . L'espace d'état  $\mathbb{E}$  correspond à l'ensemble :

$$\mathbb{E} = \{(k_1, k_2, \dots, k_N) \mid 0 \leq k_j \leq K_j, j = 1, \dots, N \text{ et } \sum_{j=1}^N k_j \leq (M + \sum_{j=1}^N R_j)\}. \quad (1)$$

Le taux de livraison d'une LRU de type  $i$  sur le site, sachant que  $W_i = k_i$ , est noté  $\beta_i(k_i)$ ,  $k_i = 1, 2, \dots, K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Les valeurs de ces taux sont ici supposées connues (même si nous sommes conscients du travail expérimental nécessaire). À un état  $(k_1, k_2, \dots, k_N)$  correspondra un vecteur  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  dont les valeurs des composantes sont données par la relation  $X_i = \max(0, (k_i - R_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Dans ce texte, nous allons utiliser la notation simplifiée  $(k_i - R_i)^+ \triangleq \max(0, (k_i - R_i))$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Lorsque la CMTC se trouve dans un état  $(k_1, k_2, \dots, k_N)$ , le nombre de systèmes bloqués, noté ici  $b(k_1, k_2, \dots, k_N)$ , est donné par la relation :

$$b(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{j=1}^N (k_j - R_j)^+. \quad (2)$$

Ainsi, lorsque le système est dans un état  $(k_1, k_2, \dots, k_N)$  de  $\mathbb{E}$ , le taux de panne des LRU de type  $i$  est égal à  $(M - b(k_1, k_2, \dots, k_N))\lambda_i$ . Rappelons à nouveau que, par hypothèse, les LRU des systèmes bloqués ne continuent pas à tomber en panne.

Introduisons deux notations vectorielles :  $\mathbf{k}$  désigne le vecteur (ligne)  $(k_1, k_2, \dots, k_N)$  et  $\mathbf{e}_i$  désigne un vecteur dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la  $i$ -ème qui est égale à l'unité, la dimension de  $\mathbf{e}_i$  étant définie par le contexte. Notons  $\mathbf{A}$  le générateur infinitésimal de la CMTC et  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  les éléments de  $\mathbf{A}$ . Les valeurs des taux  $a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ , pour  $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$  sont données par la relation :

$$a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \begin{cases} \beta_i(k_i) & \text{si } \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{e}_i \text{ et } k_i > 0, \\ & i = 1, 2, \dots, N \\ (M - b(\mathbf{k}))\lambda_i & \text{si } \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{e}_i, \\ & i = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3)$$

En posant par convention  $\beta_i(0) = 0$ , nous obtenons pour les éléments diagonaux  $a_{\mathbf{k},\mathbf{k}}$  :

$$a_{\mathbf{k},\mathbf{k}} = - \sum_{i=1}^N (\beta_i(k_i) + (M - b(\mathbf{k}))\lambda_i). \quad (4)$$

Ce modèle nous semble représenter de façon relativement fidèle le système étudié. Malheureusement, l'augmentation drastique du nombre d'états avec le nombre de types de LRU constitue la limite de ce modèle de référence. La table 1 traduit cette augmentation du nombre d'états en fonction des valeurs de  $N$  et de  $K$  dans le cas où  $R_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . C'est cette limite qui nous a conduit à rechercher la méthode approchée exposée au paragraphe suivant.

N	K			
	2	5	10	20
2	8	26	76	251
3	20	96	416	2 231
4	48	321	1 966	16 356
5	112	1 002	8 378	104 380
6	256	2 972	33 028	599 020

N	K		
	30	40	50
2	526	901	1376
3	6 446	14 061	26 076
4	63 671	174 411	389 076
5	537 257	1 826 259	4 860 636
6	4 012 852	16 154 399	52 818 536

TABLE 1 – Nombre d'états du modèle de référence en fonction de  $N$  et de  $K$ , lorsque  $R_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

## 2.2 Modèle approché

Le modèle proposé est construit de façon itérative. Schématiquement, à l'étape  $n$ , on intègre un système fictif constitué de  $n$  types de LRU en série avec une  $(n + 1)$ -ième LRU. Au début de l'étape, le comportement du système fictif constitué de  $n$  types de LRU est caractérisé par un ensemble de  $M$  processus de naissance et de mort. À la fin de l'étape, le comportement du nouveau système fictif constitué de  $(n + 1)$  types de LRU est caractérisé par un nouvel ensemble de  $M$  processus de naissance et de mort. La  $(N - 1)$ -ième et dernière étape, plus simple, permet de déterminer la valeur approchée de l'indisponibilité opérationnelle du système réel.

Légèrement particulière, la première étape construit le système fictif ne comprenant que les deux premiers types de LRU. Dans une première phase, ce système est modélisé par une CMTC dont les états correspondent aux valeurs possibles des couples  $(W_1, W_2)$ , c'est à dire aux couples  $(k_1, k_2)$  de l'ensemble  $\mathbb{E}_2 = \{(k_1, k_2) \mid 0 \leq k_1 \leq K_1, 0 \leq k_2 \leq K_2, \text{ et } k_1 + k_2 \leq$

$(M + R_1 + R_2)\}$ . À un état  $(k_1, k_2)$  de ce système fictif, le nombre de systèmes bloqués, noté  $b(k_1, k_2)$ , est égal à :

$$b(k_1, k_2) = \sum_{i=1}^2 (k_i - R_i)^+. \quad (5)$$

La cardinalité de l'espace d'état de cette CMTC est égale à

$$|\mathbb{E}_2| = (K_1 + 1)(K_2 + 1) - \frac{M(M + 1)}{2}. \quad (6)$$

Soit  $A_2$  le générateur infinitésimal de la CMTC. La figure 1 illustre les taux de transition dans le cas général.

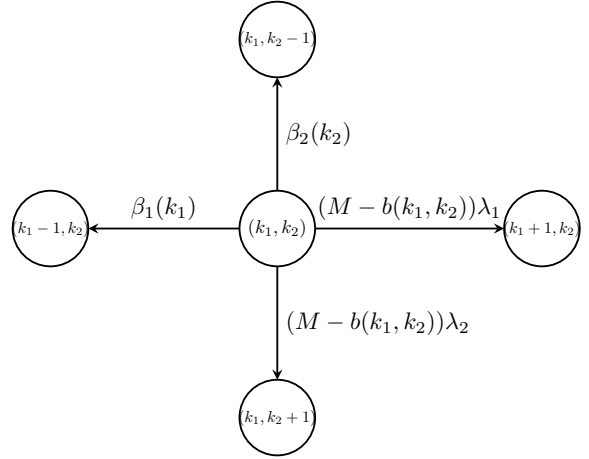


FIGURE 1 – Représentation synthétique des taux de transition de la CMTC associés au couple  $(k_1, k_2)$ .

Le schéma de la figure 2 donne la structure du graphe de transition dans le cas particulier où  $M = 4$ ,  $R_1 = 2$ , et  $R_2 = 1$  ; les arêtes en trait plein schématisent l'existence de transitions relatives tant aux défaillances qu'aux livraisons de LRU. Les états hachurés verticalement sont les états de la CMTC pour lesquels aucun système n'est bloqué par manque de LRU et les états hachurés horizontalement sont les états de la CMTC pour lesquels aucune nouvelle défaillance ne peut plus se produire car tous les systèmes sont déjà non opérationnels. Les arêtes en pointillé schématisent les transitions relatives aux seules livraisons de LRU.

Une fois la matrice  $A_2$  connue, on détermine le vecteur des probabilités d'état asymptotiques de la CMTC en résolvant le système linéaire habituel.

Notons  $p(k_1, k_2)$  la probabilité asymptotique de l'état  $(k_1, k_2)$  de la CMTC. Les probabilités marginales de  $X_1$  et de  $X_2$  s'écrivent :

$$p_1(j) = \begin{cases} \sum_{k_1=0}^{R_1} \sum_{k_2=0}^{K_2-j} p(k_1, k_2) & \text{si } j = 0, \\ \sum_{k_2=0}^{K_2-j} p((R_1 + j), k_2) & \text{si } 0 < j \leq M \end{cases} \quad (7)$$

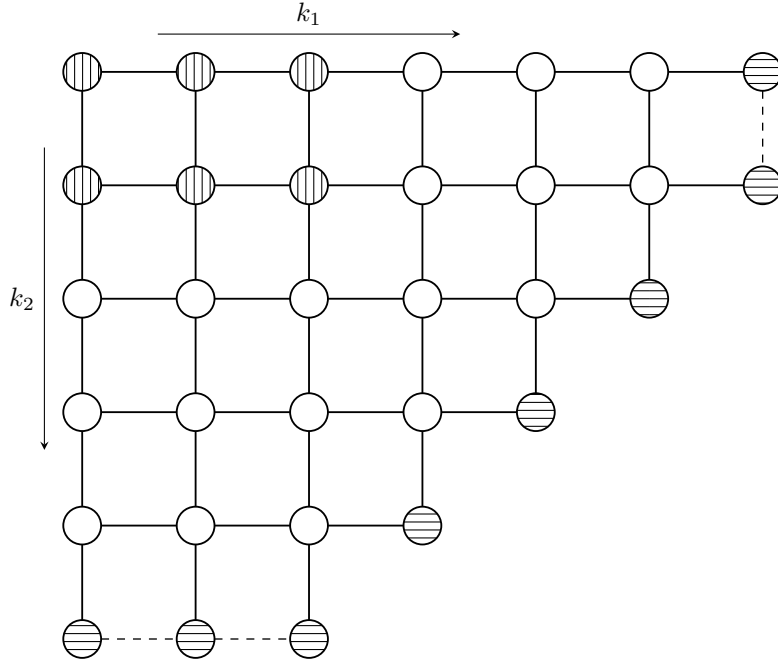


FIGURE 2 – Structure du graphe de transition de la CMTC associée à l'étude des couples  $(W_1, W_2)$ . Cas particulier  $M = 4$ ,  $R_1 = 2$ , et  $R_2 = 1$ .

et

$$p_2(j) = \begin{cases} \sum_{k_2=0}^{R_2} \sum_{k_1=0}^{K_1-j} p(k_1, k_2) & \text{si } j = 0, \\ \sum_{k_1=0}^{K_1-j} p(k_1, (R_2 + j)) & \text{si } 0 < j \leq M. \end{cases} \quad (8)$$

À ce stade, l'idée de base consiste à construire à partir de cette CMTC associée au couple  $(W_1, W_2)$ , un processus de naissance et de mort (PNM) afin d'approcher le comportement de ce couple par une VA unique que nous noterons  $\widehat{W}_2$ . En désignant  $R_{min} = \min(R_1, R_2)$ , nous remarquons que nous pouvons construire un processus de naissance et de mort en considérant la partition  $\{\mathbb{E}_{0,0}, \mathbb{E}_{0,1}, \dots, \mathbb{E}_{0,R_{min}}, \mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_M\}$  de l'ensemble des états de la CMTC telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{0,n} &= \{(k_1, k_2) \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{E}, \\ &\quad \text{et } k_1 = R_1 - R_{min} + n, \\ &\quad \text{et } k_2 \leq R_2 - R_{min} + n\} \\ &\cup \{(k_1, k_2) \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{E}, \\ &\quad \text{et } k_2 = R_2 - R_{min} + n, \\ &\quad \text{et } k_1 \leq R_1 - R_{min} + n\} \\ &n = 0, 1, 2, \dots, R_{min} - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

et

$$\mathbb{E}_i = \{(k_1, k_2) \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{E}, \\ \text{et } b(k_1, k_2) = i\} \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

Nous pouvons vérifier que si la CMTC quitte le sous-ensemble  $\mathbb{E}_i$  à l'instant  $t$ , elle se retrouve à l'instant  $t^+$  soit dans le sous-ensemble  $\mathbb{E}_{i+1}$ , soit dans le sous-ensemble  $\mathbb{E}_{i-1}$ . Les taux de transition du processus de naissance et de mort sont identifiés aux fréquences de transition conditionnelles d'une classe  $\mathbb{E}_i$  vers la classe  $\mathbb{E}_{i-1}$  ou vers la classe  $\mathbb{E}_{i+1}$ . De même, si la CMTC quitte le sous-ensemble  $\mathbb{E}_{0,n}$  à l'instant  $t$ , elle se retrouve à l'instant  $t^+$  soit dans le sous-ensemble  $\mathbb{E}_{0,n+1}$  (ou  $\mathbb{E}_1$  si  $n = R_{min}$ ), soit dans le sous-ensemble  $\mathbb{E}_{0,n-1}$  (si  $n > 0$ ). Nous avons ainsi défini un processus de naissance et de mort de cardinalité  $(M + R_{min} + 1)$ .

Sur la figure 3 nous avons précisé quelques exemples de classes afin d'illustrer la construction du processus de naissance et de mort retenu.

Comme les probabilités d'état asymptotiques  $p(k_1, k_2)$  de la CMTC sont connues, nous pouvons calculer les taux de transition du processus de naissance et de mort de cardinalité  $(M + R_{min} + 1)$  associé à la VA  $\widehat{W}_2$ . Notons  $\tau^{(M)}$  (resp.  $\theta^{(M)}$ ) le vecteur dont les  $(M + R_{min})$  composantes correspondent aux taux de transition associés aux pannes (resp. aux livraisons de LRU).

Il faut ensuite répéter  $(M - 1)$  fois cette première phase de l'étape 1 pour déterminer les vecteurs  $\tau^{(m)}$  et  $\theta^{(m)}$  associés à un nombre  $m$  de (pseudo) systèmes formés des deux premiers types de LRU,  $m = 1, 2, \dots, (M - 1)$ . À la fin de la première étape, ce sont  $M$  processus de naissance et de mort de cardinalité respective  $(m + R_{min} + 1)$  et leurs vecteurs  $\tau^{(m)}$  et  $\theta^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , qui ont été calculés. Pour sim-

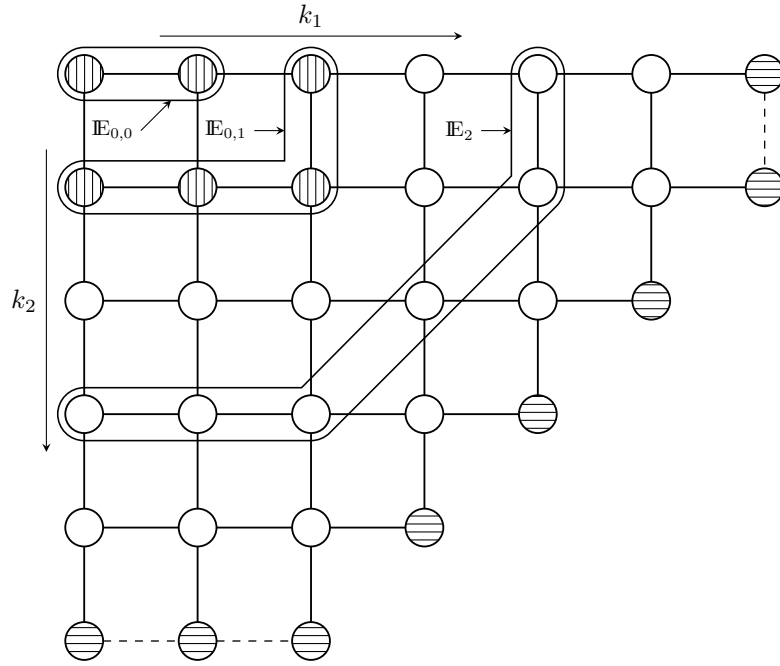


FIGURE 3 – Illustration des classes de la partition sur la structure du graphe de transition de la CMTC associée à l'étude des couples  $(W_1, W_2)$ . Cas particulier  $M = 4$ ,  $R_1 = 2$ , et  $R_2 = 1$ .

plifier la présentation de la seconde étape, nous posons  $\widetilde{R}_2 = R_{min}$  et  $\widetilde{K}_2 = R_{min} + M$ .

L'étape suivante consiste à construire une CMTC  $(\widetilde{W}_2, W_3)$  dont les états correspondent aux couples  $(\widetilde{k}_2, k_3)$  de l'ensemble  $\mathbb{E} = \{(\widetilde{k}_2, k_3) \mid 0 \leq \widetilde{k}_2 \leq \widetilde{K}_2, 0 \leq k_3 \leq K_3, \text{ et } \widetilde{k}_2 + k_3 \leq (M + \widetilde{R}_2 + R_3)\}$ . Le graphe de transition de cette CMTC est similaire à celui construit pour étudier le couple  $(W_1, W_2)$  et représenté figure 2. Notons que pour une valeur  $k_3$  de la variable  $W_3$ , les valeurs possibles de la variable  $\widetilde{W}_2$  sont les valeurs  $\widetilde{k}_2 = 0, 1, \dots, (\widetilde{K}_2 - (k_3 - R_3))^+$ .

Une subtilité de cette CMTC  $(\widetilde{W}_2, W_3)$  est la suivante. Pour une valeur fixée  $k_3$  de la variable  $W_3$  telle que  $k_3 < K_3$ , les taux de transition associés à la variable  $\widetilde{W}_2$  sont ceux du processus de naissance et de mort obtenu avec la valeur  $m(k_3) = \widetilde{K}_2 - (k_3 - R_3)^+ - \widetilde{R}_2$ , celui dont la cardinalité des états est égale à  $(\widetilde{K}_2 + 1 - (k_3 - R_3)^+)$  et dont les taux de transition sont donnés par les vecteurs  $\tau^{(m(k_3))}$  et  $\theta^{(m(k_3))}$ . Notons que les  $M$  processus de naissance et de mort déterminés précédemment sont nécessaires à l'étude de la CMTC  $(\widetilde{W}_2, W_3)$ . Comme  $m(k_3)$  est nulle lorsque  $k_3 = K_3$ , il n'existe pas de processus de naissance et de mort pour fournir les taux de transition (de mort) associés à la variable  $\widetilde{W}_2$  et nécessaire si  $\widetilde{R}_2$  est positif. Dans ce cas, nous utilisons les  $\widetilde{R}_2$  premières composantes du vecteur  $\theta^{(1)}$ . La figure 4 illustre les taux de transition dans le cas général.

L'idée sous-jacente de la démarche est de penser que la variable  $\widetilde{W}_2$ , que l'on peut voir décrivant le compor-

tement d'une super-LRU, va se comporter du point de vue de la disponibilité de façon assez proche des deux premières LRU réelles.

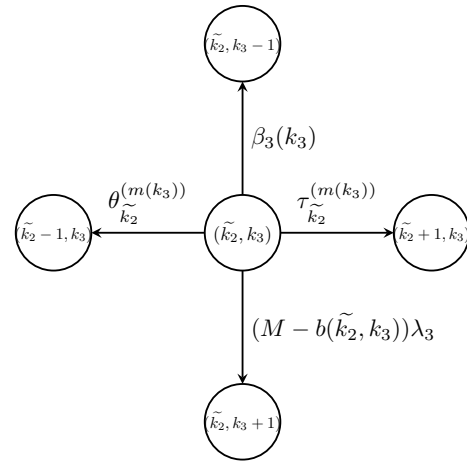


FIGURE 4 – Représentation synthétique des taux de transition de la CMTC associés au couple  $(\widetilde{k}_2, k_3)$ .

Après avoir déterminé la distribution stationnaire la CMTC  $(\widetilde{W}_2, W_3)$ , nous pouvons considérer le processus de naissance et de mort de cardinalité  $(M + R_{min} + 1)$ , où  $R_{min} = \min(\widetilde{R}_2, R_3)$ , décrivant le comportement de la VA  $\widetilde{W}_3$ , et déterminer les nouveaux vecteurs  $\tau^{(M)}$  et  $\theta^{(M)}$ . Comme dans l'étape précédente, il faut étudier les  $M$  CMTC  $(\widetilde{W}_2, W_3)$  associées aux valeurs  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Disposant ainsi des vecteurs  $\tau^{(m)}$  et  $\theta^{(m)}$ ,  $m =$

1, 2, ..., M, nous pouvons étudier la distribution stationnaire des nouvelles CMTC ( $\widetilde{W}_3, W_4$ ), avec les paramètres  $\widetilde{R}_3 = R_{min}$  et  $\widetilde{K}_3 = \widetilde{R}_3 + m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  afin de déterminer les nouveaux vecteurs  $\tau^{(m)}$  et  $\theta^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . D'une façon générale, nous étudions la distribution stationnaire des nouvelles CMTC ( $\widetilde{W}_i, W_{i+1}$ ), avec les paramètres  $\widetilde{R}_i = \min(\widetilde{R}_{i-1}, R_i)$  et  $\widetilde{K}_i = \widetilde{R}_i + m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  afin de déterminer les nouveaux vecteurs  $\tau^{(m)}$  et  $\theta^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Pour la dernière étape,  $i = N - 1$ , Il suffit de déterminer la distribution stationnaire de la CMTC ( $\widetilde{W}_{N-1}, W_N$ ) associée à  $m = M$  pour obtenir les métriques recherchées, telle que la distribution de la VA NBS et son espérance correspondant à une approximation de l'indisponibilité en régime asymptotique. Le squelette de l'algorithme général de la méthode est représenté table 2.

Précisons que si  $R_i = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, (N - 1)$ , cette méthode fournit la solution exacte (identique à celle du modèle de référence) ; de plus, certaines simplifications sont possibles puisque dans ce cas les composantes communes des vecteurs  $\tau^{(m)}$  (resp.  $\theta^{(m)}$ ) et  $\tau^{(m')}$ , (resp.  $\theta^{(m')}$ ) prennent des valeurs identiques.

TABLE 2 – Squelette de l'algorithme général.

---

Début
Initialiser les vecteurs $\tau^{(m)}$ et $\theta^{(m)}$ , à l'aide du PNM associé à la VA $\widetilde{W}_1$ lorsque les $m$ pseudo-systèmes ne comprennent que la LRU de type 1, $m = 1, 2, \dots, M$ .
$n = 1$
Tant que $n < (N - 1)$ Faire
Pour $m = 1, 2, \dots, M$ Faire
Déterminer les vecteurs $\tau^{(m)}$ et $\theta^{(m)}$ relatifs au PNM déduit de la CMTC ( $\widetilde{W}_n, W_{n+1}$ ) pour laquelle le nombre de pseudo-systèmes est égal à $m$ .
FinPour
$n = n + 1$
FinTantque
Etudier la CMTC ( $\widetilde{W}_{N-1}, W_N$ ) pour en déduire la distribution et l'espérance de la VA NBS.
Fin

---

### 2.3 Prise en compte de la phase d'échange

Dans cette étude, nous négligeons le temps d'attente potentiel associé à une éventuelle indisponibilité du technicien chargé de la mise en place de la nouvelle LRU en supposant que le nombre  $ns$  de techniciens est égal au nombre  $M$  de systèmes ( $ns = M$ ). Dans ce cas, si  $\Lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j$ , alors  $\Lambda^{-1}$  représente le temps

moyen de bon fonctionnement d'un système.

Désignons par  $\gamma^{-1}$  le temps moyen d'échange d'une LRU. La quantité  $[\Lambda^{-1} + \gamma^{-1}]$  correspond alors au temps moyen écoulé entre le début de la remise en bon état d'un système (par remise d'une nouvelle LRU en bon état) et la future panne du système. Quand un système n'est pas bloqué par manque d'une LRU, on considère ici que le taux d'arrivée d'une panne d'une LRU de type  $i$  sur le système considéré est égale à :

$$\frac{\lambda_i}{\Lambda} \times [\Lambda^{-1} + \gamma^{-1}]^{-1} = \frac{\lambda_i \gamma}{\Lambda + \gamma}. \quad (11)$$

Cela nous conduit à utiliser les taux de panne

$$\widehat{\lambda}_i = \lambda_i \left( \frac{\gamma}{\Lambda + \gamma} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

pour calculer l'espérance ou la distribution du nombre de systèmes bloqués par manque de LRU de rechange à l'aide de la méthode récurrente présentée. Par complémentation, on en déduit l'espérance, notée  $\widehat{\mathbb{E}}$ , du nombre de systèmes opérationnels ou en cours d'échange de LRU. Finalement, on retient la quantité

$$\widehat{\mathbb{E}} \times \frac{\Lambda^{-1}}{[\Lambda^{-1} + \gamma^{-1}]} = \widehat{\mathbb{E}} \left( \frac{\gamma}{\Lambda + \gamma} \right), \quad (13)$$

comme approximation de l'espérance du nombre de systèmes opérationnels sur le site. Il suffit de diviser cette quantité par  $M$  pour obtenir la valeur approchée de la disponibilité opérationnelle d'un système. Précisons que dans le cas où  $R_i = 0$   $i = 1, 2, \dots, N$ , la méthode proposée fournit encore la solution exacte car le modèle global incluant la station d'échange des LRU correspond encore à un réseau (fermé) de files d'attente à forme produit pour lequel la méthode présentée est une façon d'obtenir la solution exacte (Marie (1978)).

## 3 Tests numériques

### 3.1 Premier exemple de calcul de la disponibilité

Nous examinons ici la variation de la disponibilité normalisée  $((M - \mathbb{E}[NBS])/M)$  en fonction de  $M$  lorsque le produit  $M\lambda_i$  reste constant. Afin de simplifier la description des paramètres d'expérience, les taux de livraison  $\beta_i(k_i)$  sont pris tels que  $\beta_i(k_i) = k_i\beta$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Nous considérons d'abord une première version où chaque système est constitué de 4 types de LRU en série ( $N = 4$ ). Un tel nombre réduit de types de LRU permet de comparer la réponse obtenue avec la méthode originale à la solution exacte pour un nombre raisonnable de valeurs de  $M$ . Sur la figure 5,  $M$  varie de 1 à 30 ; le produit  $M\lambda_i$  restant égal à 0.75,  $i = 1, 2, 3, 4$  et le paramètre  $\beta$  étant égal à 0.6. La disponibilité calculée par la méthode originale est représentée pour les

trois situations suivantes : i)  $R_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ , ii)  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$ , iii)  $R_i = 2, i = 1, 2, 3, 4$ . Comme espéré, la disponibilité augmente avec la valeur de  $R_i$ . Dans les cas  $R_i = 1$  et  $R_i = 2$ , les croix correspondent aux solutions exactes calculées pour  $M \leq 18$  lorsque  $R_i = 1$  et pour  $M \leq 12$  lorsque  $R_i = 2$ . Lorsque les valeurs exactes sont disponibles, on peut remarquer que les valeurs four-

nies par la méthode proposée ne sont pratiquement pas distinguables des valeurs exactes. Pour  $M = 10$ , le nombre d'états du modèle de référence est égal respectivement à 2586 et à 5241 quand  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$  et  $R_i = 2, i = 1, 2, 3, 4$ . Toujours pour  $M = 10$ , la méthode approchée donne le résultat avec une erreur relative de  $7.8844 \cdot 10^{-5}$  lorsque  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$  et de  $3.9457 \cdot 10^{-5}$  lorsque  $R_i = 2, i = 1, 2, 3, 4$ .

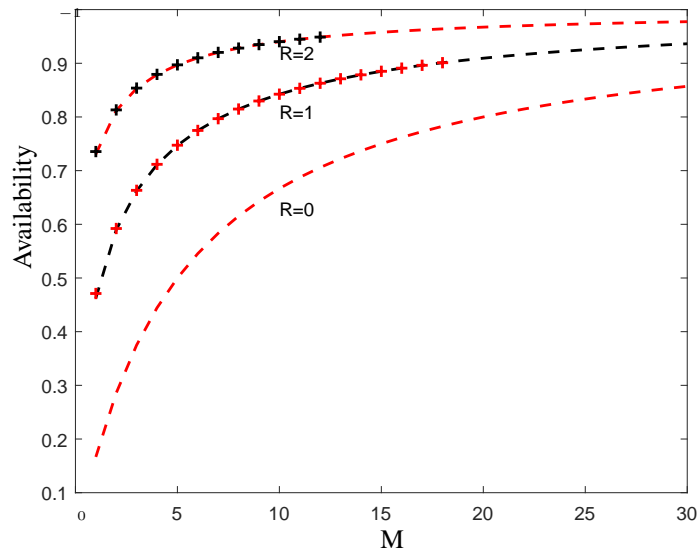


FIGURE 5 – Disponibilité pour  $R = 0, 1, 2$ . Influence de  $M$  quand le produit  $M\lambda_i$  reste égal à 0.75. Cas  $N = 4$  et  $\beta = 0.6$ .

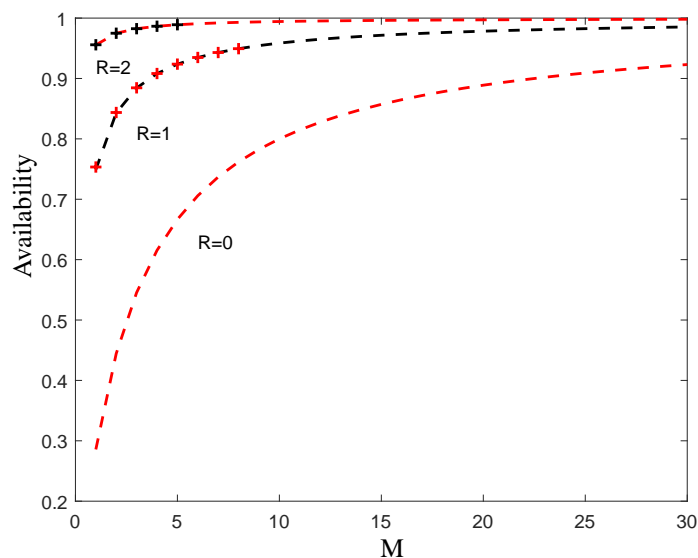


FIGURE 6 – Disponibilité pour  $R = 0, 1, 2$ . Influence de  $M$  quand le produit  $M\lambda_i$  reste égal à 0.25. Cas  $N = 6$  et  $\beta = 0.6$ .

La seconde version considérée est celle où chaque système est constitué de 6 types de LRU en série. Avec cette augmentation de  $N$ , nous devons réduire le champ des résultats exacts. Le produit  $M\lambda_i$  est ici

égal à 0.25,  $i = 1, 2, 3, 4$ . En conservant les autres données identiques à celles de la première version, nous obtenons les résultats de la figure 6. Les solutions exactes sont calculées pour  $M \leq 8$  lorsque  $R_i = 1$  et



pour  $M \leq 5$  lorsque  $R_i = 2$ . Là encore, les valeurs fournies par la méthode proposée ne sont pratiquement pas distinguables des valeurs exactes fournies. Pour  $M = 5$ , le nombre d'états du modèle de référence est égal respectivement à 5336 et à 26262 quand  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$  et  $R_i = 2, i = 1, 2, 3, 4$ . Pour cette valeur de  $M$ , la méthode approchée donne le résultat avec une erreur relative de  $8.4051 \cdot 10^{-5}$  lorsque  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$  et de  $3.8500 \cdot 10^{-6}$  lorsque  $R_i = 2, i = 1, 2, 3, 4$ . Notons que la disponibilité obtenue avec cette version est meilleure que dans la version précédente alors qu'ici  $N = 6$  car le produit  $M\lambda_i$  est ici trois fois plus faible. Ces résultats permettent encore de constater que la donnée du produit  $M\lambda_i$  ne suffit pas pour évaluer la disponibilité opérationnelle du parc de systèmes. Ainsi, avec les données retenues pour effectuer l'expérimentation, lorsque  $M$  prend successivement les valeurs 1, 5, 25 et 50 alors que  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$ , les valeurs respectives de la disponibilité opérationnelle sont 0.166667, 0.500000, 0.833333 et 0.909091. La notion de flux de consommation (souvent exprimée par le produit  $M\lambda_i$ ) ne suffit

pas à établir de bonnes prédictions de la disponibilité opérationnelle.

### 3.2 Second exemple de calcul de la disponibilité

Maintenant, le taux de défaillance des LRU reste constant et nous examinons la variation de la disponibilité opérationnelle en fonction de  $M$ . Les résultats sont représentés figure 7 pour  $M$  variant de 1 à 30. La disponibilité calculée par la méthode originale est là aussi représentée pour les trois situations suivantes : i)  $R_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ , ii)  $R_i = 1, i = 1, 2, 3, 4$ , iii)  $R_i = 2, i = 1, 2, 3, 4$  et les croix correspondent aux solutions exactes. Lorsque les valeurs exactes sont disponibles, on peut à nouveau remarquer que les valeurs fournies par la méthode proposée ne sont pratiquement pas distinguables des valeurs exactes. Pour  $R_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ , la disponibilité opérationnelle obtenue est exacte et égale à 0.75 quelle que soit la valeur de  $M$ . Ce dernier point découle de ce que les taux de livraisons ont été choisis proportionnels à  $k_i$ .

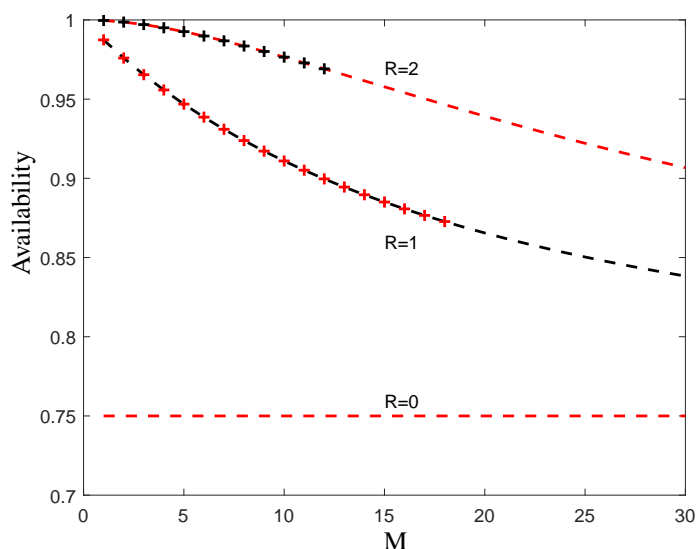


FIGURE 7 – Disponibilité en fonction de  $M$ , alors que le taux individuel  $\lambda_i$  reste constant (égal à 0.075), pour  $R = 0, 1, 2$ . Cas  $N = 4$  et  $\beta = 0.6$ .

### 3.3 Erreur relative de la nouvelle méthode de calcul de la disponibilité

La figure 8 illustre la variation de l'erreur relative de la disponibilité opérationnelle en fonction de  $\beta$  pour  $R_i = 1, 2$  et  $3, i = 1, 2, \dots, N$ , avec ici  $N = 4$ ; le paramètre  $\beta$  variant de 0.01 à 0.7. Rappelons que l'erreur relative est nulle lorsque  $R_i = 0$ . On peut constater que si la précision est acceptable lorsque la valeur de  $\beta$  est inférieure à 0.1, elle est remarquablement faible lorsque  $\beta$  prend des valeurs supérieures à 0.1. Ajoutons que pour  $\beta = 0.01$ , la disponibilité opérationnelle est égale à 0.0703 si  $R_i = 1$  et à 0.1142 si  $R_i = 3$ .

Pour  $\beta = 0.1$ , les valeurs respectives de la disponibilité opérationnelle sont égales à 0.4779 et à 0.7174. Alors que pour  $\beta = 0.5$ , les valeurs respectives de la disponibilité opérationnelle sont égales à 0.8993 et à 0.9950. Ainsi, c'est dans la zone utile du paramètre  $\beta$  que la précision de la méthode est la meilleure. En fait, il est possible qu'une imprécision sur la valeur d'un paramètre d'entrée crée une variation plus grande de la disponibilité opérationnelle que celle induite par l'utilisation de la méthode proposée ; par exemple, si  $\beta = 0.101$  au lieu de  $\beta = 0.1$ , la variation relative du résultat est de  $6 \cdot 10^{-3}$ .

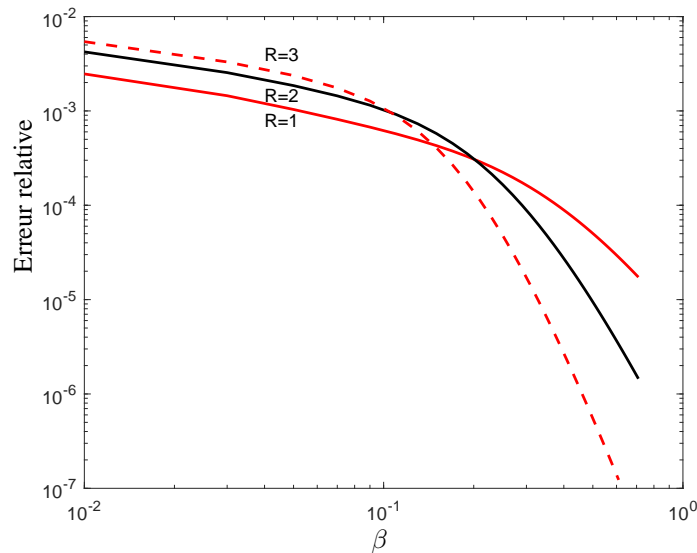


FIGURE 8 – Erreur relative de la disponibilité approchée en fonction de  $\beta$ , pour  $R = 1, 2, 3$ . Cas  $N = 4$ ,  $M = 8$  et  $\lambda_i = 0.05$ .

## 4 Conclusion

Dans cette publication, nous avons mis en évidence une méthode approchée originale permettant d'évaluer l'indisponibilité opérationnelle induite par l'absence éventuelle sur le site opérationnel de la LRU nécessaire à la remise en service d'un système. Elle fournit une réponse dans le cas de flottes importantes de systèmes. L'erreur relative de la réponse de la méthode présentée par rapport à celle du modèle de référence n'apparaît pas plus importante que celles induites par l'incertitude inévitable des données d'entrée (taux de défaillance, taux de livraison, etc.). Il demeure que cette étude ne concerne que les systèmes constitués uniquement de LRU en série. Le cas des systèmes formés de structures redondantes de LRU devra faire l'objet de futurs travaux. Un autre aspect restant à approfondir concerne la prise en compte de l'indisponibilité du technicien effectuant l'échange de la LRU.

## Références

J. L. BON, 1994. *Fiabilité des systèmes, méthodes mathéma-*

*tiques*, Masson, Paris, 1994.

C. COCOZZA-THIVENT, 1997. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer, Collection Mathématiques et Applications, N° 28, 1997.

R. A. MARIE, 1978. *Modélisation par Réseaux de Files d'Attente*, Thèse de Docteur es-sciences, Nov. 1978, Université Rennes 1, France.

R. A. MARIE AND S. FRANCISCO, 2014. *Amélioration des performances de soutien par la cannibalisation*, 19<sup>e</sup> Colloque National de Maîtrise des risques et sûreté de fonctionnement, 21 – 23, 2014, Dijon.

R. A. MARIE, 2016. *Introduction aux probabilités - Applications en informatique et télécommunications, fiabilité et gestion d'incertitudes*, Ellipses, Paris, 2016.

B. SERICOLA, 2013. *Markov chains. Theory, Algorithms and Applications*, ISTE - Wiley, 2013.

W. J. STEWART, 1994. *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, 1994.

K. S. TRIVEDI, 2016. *Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications*, John Wiley and Sons, New York, 2016.