



**HAL**  
open science

## Calcul direct de la raideur non linéaire géométrique pour la réduction de modèles de coques en éléments finis

Cyril Touzé, Marina Vidrascu, Dominique Chapelle

### ► To cite this version:

Cyril Touzé, Marina Vidrascu, Dominique Chapelle. Calcul direct de la raideur non linéaire géométrique pour la réduction de modèles de coques en éléments finis. CSMA 2013: 11e Colloque national en Calcul de Structures, May 2013, Giens, France. hal-00860823

**HAL Id: hal-00860823**

**<https://inria.hal.science/hal-00860823>**

Submitted on 11 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

## Calcul direct de la raideur non linéaire géométrique pour la réduction de modèles de coques en éléments finis

Cyril TOUZÉ<sup>1</sup>, Marina VIDRASCU<sup>2</sup>, Dominique CHAPELLE<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech, cyril.touze@ensta-paristech.fr

<sup>2</sup> Inria/Reo et LJLL UMR 7958 UPMC, marina.vidrascu@inria.fr

<sup>3</sup> Inria/M3DISIM, dominique.chapelle@inria.fr

---

**Résumé** — Les vibrations non linéaires géométriques de coques minces, discrétisées par éléments finis, sont considérées. Dans le but de réduire la dynamique vibratoire à des modèles comprenant un petit nombre de degrés de liberté (ddl), la base des modes propres linéaires est utilisée. La projection fait alors apparaître un ensemble de coefficients de couplage non linéaires quadratiques et cubiques. Une méthode directe permettant le calcul de ces coefficients est proposée et implémentée. Une fois le modèle projeté, des études de bifurcation des solutions périodiques sont alors possibles à moindre coût, ce qui permet de calculer les branches stables et instables des solutions libres et forcées.

**Mots clés** — raideur non linéaire géométrique, éléments de coques, réduction de modèles, bifurcations

---

## 1 Introduction

En vibration non linéaire de structures minces, les modèles utilisant des éléments finis permettent aisément des intégrations temporelles directes pour résoudre des problèmes aux conditions initiales. Cependant, de par le nombre de ddl mis en jeu, ils se prêtent difficilement à des études de bifurcations, où l'on cherche à prédire exactement les états stables ainsi que les états instables, les bifurcations et leur nature, pour une structure dont on veut faire varier un ou plusieurs paramètres. Parallèlement, des études sont menées sur des coques et des plaques de géométrie plus simple, où la discrétisation n'utilise pas les éléments finis mais des bases de fonctions continues (qui peuvent être les modes propres du système), et qui permettent, par le faible nombre de ddl, de mener des études de bifurcations, cf. par exemple [1, 2] et ses références. Afin de combiner ces deux approches, une idée simple consiste à utiliser la base modale pour projeter le problème non linéaire discrétisé par éléments finis. Ce faisant, on fait apparaître des coefficients de couplage non linéaires, quadratiques et cubiques, qu'il faut calculer afin de pouvoir réduire la dynamique aux modes importants et effectuer les études de bifurcations.

Le calcul de cette raideur non linéaire géométrique a déjà été proposé par le passé [4], en utilisant une méthode indirecte, où les coefficients de couplage sont déduits d'une série de calculs de déformations statiques bien choisies. La méthode a ensuite été utilisée dans [6] pour la réduction de modèles à paramètres incertains, et dans [7] pour des vibrations de poutres NEMs piezoélectriques.

Dans cette contribution nous proposons une méthode de calcul directe. Celle-ci repose sur une représentation modale du déplacement et une écriture analytique des coefficients de couplage quadratiques et cubiques. Cette formulation est ensuite implémentée avec des éléments finis de coque MITC [5]. Pour illustrer les avantages de la méthode, des relations amplitudes-fréquences pour une plaque, montrant la richesse de la dynamique hamiltonienne, sont calculées, ainsi que des réponses vibratoires en régime forcé, montrant des phénomènes typiquement non linéaires (sauts, bifurcations, pertes de stabilité, ...).

## 2 Calcul de la raideur non linéaire

Nous nous plaçons dans le cas des non linéarités géométriques pour les structures minces. La loi de comportement est donc supposée élastique linéaire. La raideur non linéaire géométrique provient de la dérivée de l'énergie interne :  $\delta W_{int} = \int_{\Omega} \mathbf{e} : \mathbf{C} : \delta \mathbf{e}$ , où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité et  $\mathbf{e}$  le tenseur des déformations :  $\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla + \nabla^t + \nabla^t \cdot \nabla) \mathbf{y}$ , avec  $\mathbf{y}$  le déplacement. Pour une structure de géométrie donnée, la première étape du calcul consiste à calculer les modes propres du système. On insère ensuite l'expansion modale :  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{\infty} X_p(t) \phi_p(\mathbf{x})$  dans les équations dynamiques, ce qui nous amène à des équations d'oscillateurs couplés sous forme générique :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + \sum_{i,j} g_{ij}^p X_i X_j + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^p X_i X_j X_k = 0. \quad (1)$$

L'expression des coefficients de couplage non linéaire  $g_{ij}^p$  et  $h_{ijk}^p$  s'en déduit alors :

$$g_{ij}^p = \frac{1}{4} \int_{\Omega} [\nabla^t \phi_i \cdot \nabla \phi_j : \mathbf{C} : (\nabla \phi_p + \nabla^t \phi_p) + (\nabla \phi_i + \nabla^t \phi_i) : \mathbf{C} : (\nabla^t \phi_p \cdot \nabla \phi_j + \nabla^t \phi_j \cdot \nabla \phi_p)] \quad (2a)$$

$$h_{ijk}^p = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \nabla^t \phi_i \cdot \nabla \phi_j : \mathbf{C} : (\nabla^t \phi_p \cdot \nabla \phi_k + \nabla^t \phi_k \cdot \nabla \phi_p) \quad (2b)$$

Ces formules sont exploitées dans le code de calcul Shelddon (Inria). Des éléments de coques MITC sont utilisés pour le calcul, ce qui conduit à employer des opérateurs d'interpolation spécifiques sur les différentes composantes des gradients. Les particularités de la formulation ont conduit d'une part à exprimer les produits de gradients soit en base intrinsèque, soit en base mixte, selon que le gradient de fonction propre à calculer se trouve dans un produit ou pas ; et d'autre part à exprimer la matrice d'élasticité sous forme non symétrisée, du fait des termes non symétriques  $\nabla^t \phi_i \cdot \nabla \phi_j$ . La validation du code a été effectuée en comparant les résultats du calcul direct avec la méthode proposée par Muravyov [4], montrant un accord parfait.

## 3 Application au cas d'une plaque circulaire mince

Une première application de la méthode est proposée sur une plaque circulaire mince encastrée à son bord. La convergence des résultats est d'abord montrée, puis la dynamique non linéaire autour du mode fondamental est étudiée, en régime libre et en régime forcé. Des comparaisons avec des résultats analytiques obtenu selon le modèle de von Kármán (qui néglige l'inertie longitudinale et utilise une fonction d'Airy pour représenter les mouvements dans le plan) sont aussi discutées. Pour les simulations, les dimensions et paramètres matériaux suivants ont été retenus : rayon  $a=20$  cm, épaisseur  $h=1$  mm, module d'Young  $E=85$  GPa, masse volumique  $\rho=7974$  kg/m<sup>3</sup> et coefficient de Poisson  $\nu=0.38$ .

### 3.1 Convergence

La convergence des fréquences propres en fonction du nombre d'éléments est montrée dans le tableau 1. Les éléments utilisés sont des quadrangles MITC4. Comme l'étude dynamique montrée section suivante est autour du premier mode (axisymétrique), seules des fréquences propres axisymétriques sont données. La dénomination des modes de plaque circulaire se fait classiquement selon deux indices  $(k, n)$ ,  $k$  représentant le nombre de diamètres nodaux, et  $n$  le nombre de cercles nodaux (bord compris). Pour la comparaison, les fréquences propres sont adimensionnées selon la formule [8] :

$$\omega^{adim} = \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{E}} \omega^{dim},$$

et comparées au résultat analytique que l'on obtient classiquement avec un modèle de Krichhoff-Love, cf. par exemple [9, 8], pour le cas de la plaque circulaire.

La figure 1 montre la convergence du coefficient de couplage cubique  $h_{p,p,p}^p$  apparaissant Eq. (1), pour le premier et le sixième mode axisymétrique. Cette convergence est plus lente que pour les fréquences propres. Ceci est lié au fait que le calcul des coefficients de couplage fait intervenir des intégrales sur

$N_e$	432	2352	4800	10800	<b>Analytique</b>
$\omega_{0,1}$	10.2639	10.2240	10.2192	10.2163	<b>10.2158</b>
$\omega_{0,2}$	40.8322	39.9530	39.8510	39.7901	<b>39.7710</b>
$\omega_{0,3}$	94.5246	90.0054	89.4974	89.1930	<b>89.1041</b>
$\omega_{0,6}$	474.560	371.081	362.098	356.996	<b>355.569</b>

Tableau 1 – Convergence des pulsations propres adimensionnées en fonction du nombre d’éléments, et comparaison au résultat analytique obtenu avec un modèle de Kirchhoff-Love.

les fonctions propres de l’opérateur linéaire, cf. Eqs (3), or la convergence sur les fonctions propres est plus lente, quadratique en le nombre d’éléments tandis qu’une convergence linéaire est observée pour les fréquences propres [10]. Ceci a par ailleurs déjà été observé dans le calcul de coefficients avec des méthodes analytiques, cf. par exemple [11].

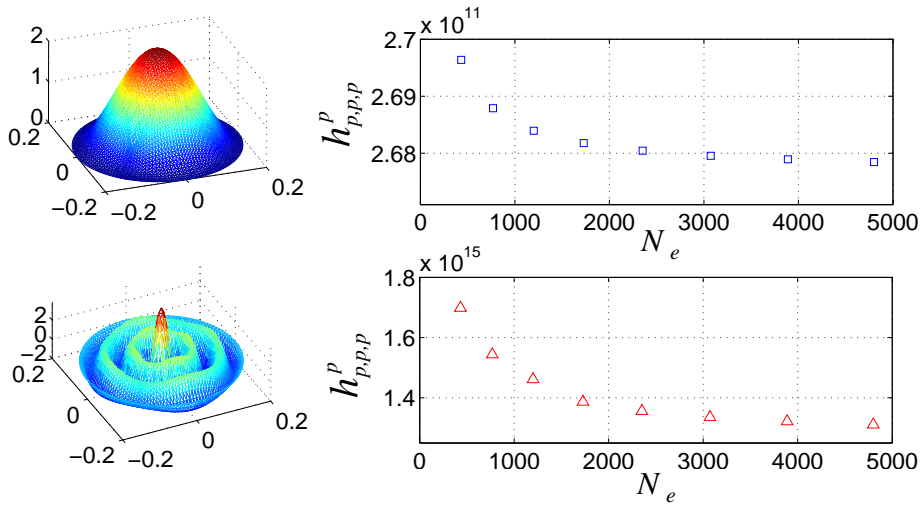


Fig. 1 – Convergence du coefficient de couplage cubique  $h_{p,p,p}^p$  en fonction du nombre d’éléments.  $p$  désigne le numéro du mode, haut :  $p=1$ , premier mode axisymétrique (0,1), bas :  $p=74$  : mode (0,6).

### 3.2 Analyse dynamique

Dans cette section on utilise le calcul de coefficients de couplage pour une analyse de la dynamique non linéaire de la plaque mince au voisinage de sa fréquence fondamentale, à l’aide d’un modèle réduit ne comprenant que les modes propres importants. La méthode proposée permet ainsi d’avoir accès à toutes les branches stables et instables des solutions périodiques au voisinage du point d’équilibre, ainsi que de classifier les bifurcations du système et les régimes couplés. En régime libre et conservatif, nous calculons par une méthode de continuation les orbites périodiques du système, aussi appelées *modes non linéaires* [12, 13]. En régime forcé et amorti, les courbes de résonance au voisinage de la fréquence fondamentale, sont montrées, et leur relation avec la courbe conservative est discutée. Dans toute cette section, un maillage à 3072 éléments (15688 ddls) a été retenu pour le calcul des coefficients non linéaires.

Lors de la construction du modèle réduit, il convient de conserver des modes tangentiels ainsi que des modes transverses afin de rendre compte correctement du couplage membrane-flexion. Dans le cas de la plaque parfaitement plane, les modes sont complètement découplés, soit en flexion, soit en membrane. De plus, de la nature des couplages non linéaires entre les mouvements dans le plan et les mouvements transverses, la forme des équations (1) peut être précisée : si l’on note  $q_i$  les composantes des modes

transverses et  $\eta_j$  celles des modes tangentiels, alors les équations (1) peuvent se réécrire en :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{l,k} g_{lk}^i q_l \eta_k + \sum_{p,l,k} h_{plk}^i q_p q_l q_k = 0, \quad (3a)$$

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j + \sum_{l,k} g_{lk}^j q_l q_k = 0. \quad (3b)$$

Ainsi, pour l'étude de la dynamique du premier mode de flexion,  $i = 1$ , le choix des modes de membrane à retenir dans la troncature se fait en sélectionnant ceux dont le terme de couplage  $g_{11}^i$  est non-nul, puisque ce terme brise l'invariance du premier mode linéaire en couplant de manière non-résonnante le mode  $j$  au mode 1. Les trois premiers modes remplissant ce critère sont montrés figure 2, où l'on a représenté uniquement la composante radiale du déplacement longitudinal (la composante orthoradiale étant d'un ordre inférieur). On observe que le couplage se fait uniquement avec des modes axisymétriques, ce qui est logique et peut sans doute se démontrer à l'aide d'arguments de symétrie.

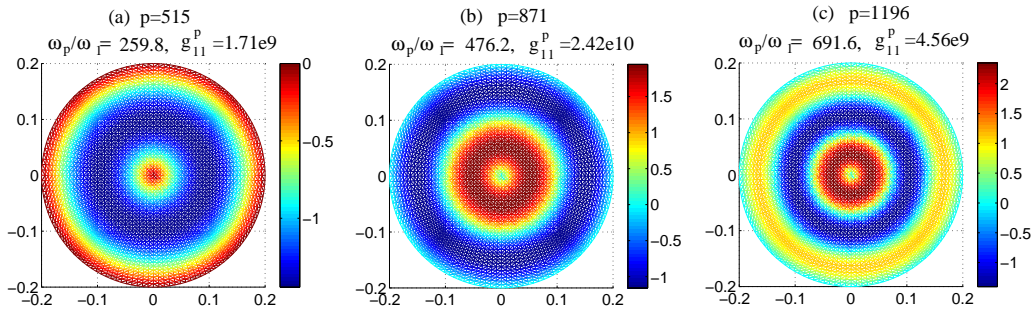


Fig. 2 – Composante radiale des trois premiers modes tangentiels axisymétriques présentant un couplage fort avec le premier mode de flexion axisymétrique. L'indice  $p$  correspond au numéro du mode lorsque ceux-ci sont triés par ordre de fréquences croissantes.

L'étude dynamique est d'abord menée sur la relation amplitude/fréquence des oscillations non linéaires du premier mode (la "backbone curve" en anglais, ou encore la famille d'orbites périodiques et donc le premier mode non linéaire). Les résultats montrés figure 3 sont obtenus par continuation numérique des orbites périodiques avec le logiciel AUTO [14], utilisant une méthode de pseudo-longueur d'arc. La figure insérée montre la convergence en fonction du nombre de modes tangentiels retenus. Pour s'assurer d'une bonne convergence, une comparaison est faite avec la même courbe calculée sur un modèle de von Kármán que nous détaillerons à la section suivante. Un seul mode de flexion, le mode fondamental, est retenu, et l'on augmente le nombre de modes de membrane axisymétriques jusqu'à obtenir convergence. La figure montre que l'essentiel du couplage membrane/flexion est porté par le deuxième mode tangentiel, puisque le groupe de courbes confondues notée T1 comprend les troncatures sans et avec le premier mode tangentiel, tandis que le groupe T2 comprend les troncatures avec 2, 3 et 4 modes de membrane, ainsi que la réponse calculée avec le modèle de von Kármán. Afin de comparer des grandeurs équivalentes, il faut noter que l'amplitude représentée en ordonnée correspond au produit  $X_1 \Phi_1(0)/h$ , où  $X_1$  est le maximum de l'amplitude modale du premier mode sur une période,  $\Phi_1(0)$  la valeur de la déformée modale au centre de la plaque et  $h$  l'épaisseur, si bien que cette grandeur représente la valeur maximale du déplacement au centre de la plaque, rapportée à l'épaisseur.

Afin d'obtenir une vision complète de la dynamique conservative, les modes de flexion sont ensuite ajoutés à la troncature pour obtenir la figure 3 principale, où ont été conservés les 6 premiers modes axisymétriques de flexion et deux modes tangentiels. Les branches de solution sont notées  $B_j^i$ , où  $i$  représente le numéro de la branche (branche principale :  $B^1$ , branches secondaires :  $B^2, B^3, \dots$ ) et  $j$  représente la coordonnée représentée. La branche principale,  $B_1^1$ , montre un couplage non résonnant assez important avec le second mode,  $B_2^1$ . De nombreuses langues de résonance interne interviennent donnant successivement naissance aux branches  $B^2$  à  $B^5$ , où le premier mode échange de l'énergie avec respectivement : le mode 6 ( $B_6^2$ ), le mode 3 ( $B_3^3$ ), le mode 4 ( $B_4^4$ ), et les modes 2 et 5 ( $B_2^5$  et  $B_5^5$ ). Enfin il est à noter qu'au delà de l'amplitude  $X_1/h=1$  (ce qui correspond à une amplitude de vibration au centre

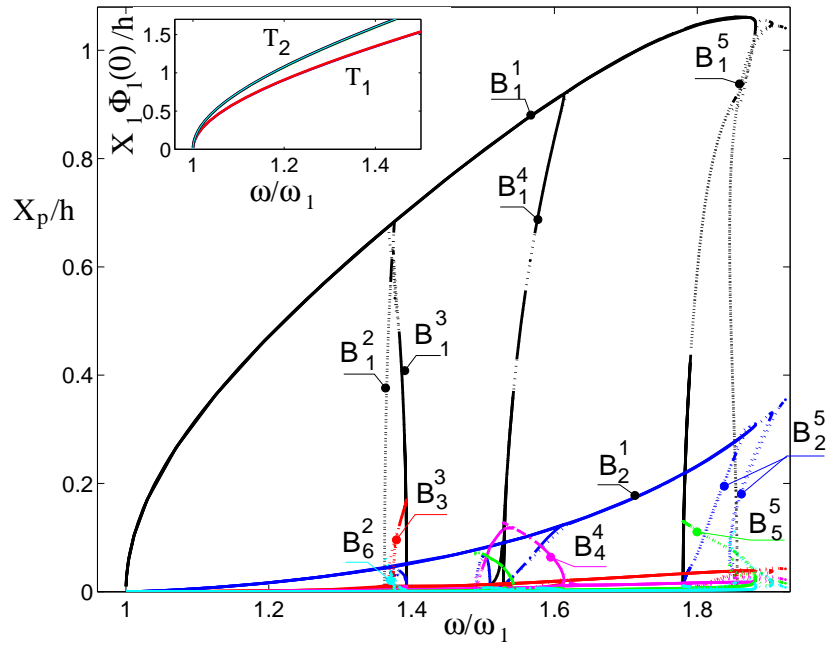


Fig. 3 – Relation amplitude/fréquence des orbites périodiques au voisinage du mode fondamental. Figure en incrustation : convergence en fonction du nombre de modes tangentiels retenus, pour un seul mode transverse dans la troncature, et comparaison avec le modèle de von Kármán. T1 : résultats obtenus avec 0 ou un seul mode de membrane. T2 : résultats obtenus avec 2,3 et 4 modes tangentiels, ainsi que von Kármán. Figure principale : Premier mode non linéaire montrant les couplages par résonance interne.

de 2.3 fois l'épaisseur) il n'y a plus d'orbites périodiques, si bien que les seuls états vibratoires stables sont au moins de nature quasipériodique. Cette valeur d'amplitude est cohérente avec les études menées sur la transition à la turbulence dans les vibrations de plaques minces, cf. [15, 16].

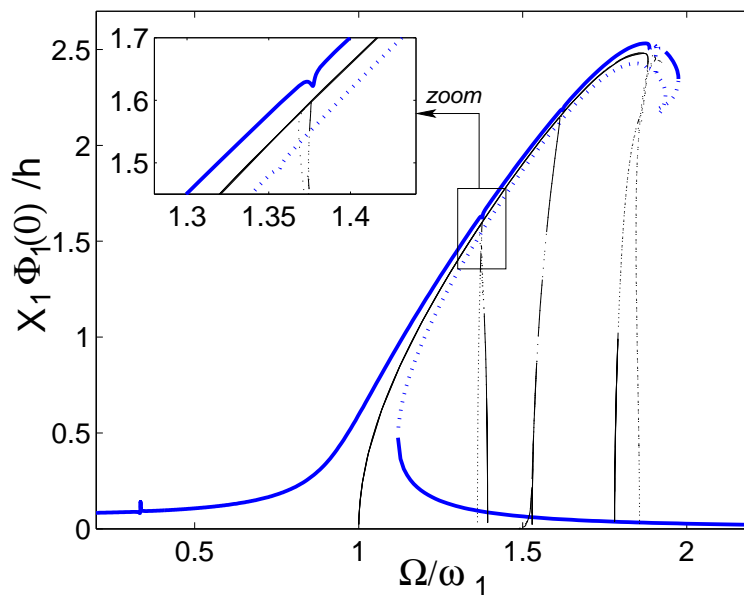


Fig. 4 – Réponse forcée au voisinage de la fréquence du mode fondamental pour une plaque encastree. Forçage appliqué au centre de la plaque, d'amplitude 1 N.

La réponse forcée de la plaque amortie est montrée Fig. 4. Le même modèle d'ordre réduit est retenu (6 premiers modes axisymétriques plus deux modes tangentiels), et un amortissement modal faible est

ajouté à chaque oscillateur, de la forme  $2\xi_p\omega_p\dot{X}_p$ , avec  $\xi_p=0.001 \forall p$ . La figure montre la relation étroite qui existe entre la relation amplitude-fréquence conservative et la réponse forcée. On remarque de plus que la réponse forcée est quasiment insensible aux langues de résonances internes détectées dans le cas non-amorti.

### 3.3 Comparaison avec un modèle de von Kármán

Les résultats précédents sont comparés à ceux donnés par un modèle de von Kármán, où l'inertie membranaire est négligée et les mouvements longitudinaux représentés par une fonction d'Airy. Les modes propres sont calculés analytiquement selon une méthode analogue à celle présentée dans [8], qui traite du cas du bord libre. Les coefficients de couplage non linéaire se déduisent des fonctions propres par des intégrations sur la surface d'une manière comparable au calcul effectué par éléments finis. Ces solutions étant analytiques, elles peuvent être considérées comme exactes, aux hypothèses de modélisation près.

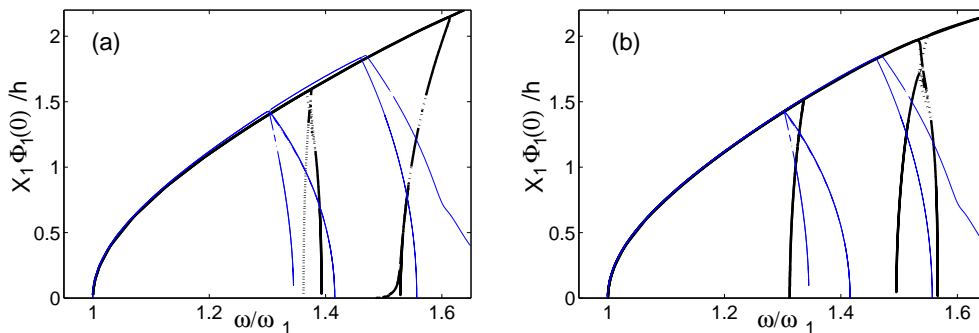


Fig. 5 – Relation amplitude/fréquence pour le mode fondamental d'une plaque circulaire encadrée, comparaison entre le calcul par éléments finis (trait noir) et le calcul sur le modèle de von Kármán (bleu). (a) modèle EF 3072 éléments, (b) : 9521 éléments.

La figure 5 montre la comparaison entre les deux approches sur la relation amplitude-fréquence. On observe une excellente correspondance sur la branche principale  $B_1^1$ , ce qui montre le bon accord entre les deux modèles pour des amplitudes vibratoires allant jusqu'à quasiment 2 fois l'épaisseur. Les langues de résonance interne sont quant à elle qualitativement bien retrouvées par les deux modèles, puisque les couplages avec les modes analysés sur la figure 3 sont similaires. Par contre, on observe des différences quantitatives sur la position de ces branches. Ces langues de résonance interne sont caractérisées par un couplage fort, résonnant, dû à une relation de commensurabilité entre les fréquences non linéaires des modes concernés. Ces rapports de fréquence peuvent être complexes si bien que des petites erreurs sur les fréquences propres peuvent aisément conduire aux différences quantitatives que l'on observe.

Afin d'étayer cette hypothèse, un calcul des coefficients de couplage par éléments finis a été réalisé avec un maillage très fin afin d'assurer la meilleure convergence possible des fréquences propres et des coefficients non linéaires. Un maillage à 9521 éléments (47605 ddl) a été retenu. La figure 5(b) montre la relation amplitude-fréquence correspondante. On remarque que les langues de résonance interne se sont sensiblement rapprochées de celles du modèle de von Kármán. La convergence parfaite vers ces branches secondaires apparaît donc comme difficile, et rien ne nous assure non plus que les écarts observés ne résultent pas des différences de modélisation entre les deux modèles étudiés. Cependant, comme montré Fig. 4 avec le cas forcé, les réponses physiquement observables du système (états stables du régime forcé avec amortissement) sont finalement très peu sensibles à ces branches secondaires, si bien que la partie essentielle que se doit de rendre un modèle réduit est la branche principale de solution, ce que fait très bien le modèle proposé avec un nombre modéré d'éléments et très peu de modes linéaires dans la troncature.

## 4 Conclusion

Une méthode de calcul direct par éléments finis de la raideur non linéaire géométrique, pour des structures de type coques minces discrétisées en éléments finis MITC, a été présentée. Elle repose sur des formules analytiques établies à partir de l'énergie interne et permet un traitement plus efficace et plus rapide que la méthode indirecte proposée par Muravyov et Rizzi [4]. Cette étape ouvre la voie à des études de bifurcations complètes sur les régimes dynamiques non linéaires des structures minces. Des modèles réduits utilisant la base modale peuvent être proposés afin de trouver, par des méthodes de continuation par exemple, les états stables et instables, en vibrations libres ou forcées.

## Références

- [1] M. Amabili, *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] C. Touzé, M. Amabili, O. Thomas, *Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia*, CMAME, **197**(21-24), 2030-2045, 2008.
- [3] M. Amabili, C. Touzé, *Reduced-order models for non-linear vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells : comparison of POD and asymptotic non-linear normal modes methods*, J. of Fluids and Struct., **23**(6), 885-903, 2007.
- [4] A.A. Muravyov, S.A. Rizzi, *Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures*, Comp. & Struct., **81**, 1513-1523, 2003.
- [5] D. Chapelle and K.-J. Bathe, *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*, Second edition, Springer, 2011.
- [6] M. Mignolet, C. Soize, *Stochastic reduced-order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems*, CMAME, **197**, 3951-3963, 2008.
- [7] A. Lazarus, O. Thomas, J.-F. Deü, *Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS*, FEAD, **49**, 35-51, 2012.
- [8] C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, *Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory*, J. Sound Vib., **258**(4), 649-676, 2002.
- [9] A. H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley and sons, New-York, 1979.
- [10] K.J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [11] C. Camier, C. Touzé, O. Thomas, *Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells*, Eur. J. Mechanics, A/solids, **28**(3), 500-515, 2009.
- [12] R. M. Rosenberg, *The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems*, Journal of Applied Mechanics, **29**, 7-14, 1962.
- [13] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Philipchuck, A. A. Zevin, *Normal modes and localization in non-linear systems*, Wiley, New-York, 1996.
- [14] E.J. Doedel, R. Paffenroth, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, X. Wang, *AUTO 2000 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*, Rapport technique, Concordia University, 2002.
- [15] C. Touzé, O. Thomas, M. Amabili, *Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates*, International Journal of non-linear Mechanics, **46**, 234-246, 2011.
- [16] C. Touzé, S. Bilbao, O. Cadot, *Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates*, Journal of Sound and Vibration, **331**(2), 412-433, 2012.