



**HAL**  
open science

## Modélisation par développements asymptotiques raccordés d'une structure présentant une fine couche d'inclusions rigides disposées périodiquement

Giuseppe Geymonat, Sofiane Hendili, Françoise Krasucki, Marina Vidrascu

► **To cite this version:**

Giuseppe Geymonat, Sofiane Hendili, Françoise Krasucki, Marina Vidrascu. Modélisation par développements asymptotiques raccordés d'une structure présentant une fine couche d'inclusions rigides disposées périodiquement. CFM 2011 - 20 ème congrès français de mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-00648615

**HAL Id: hal-00648615**

**<https://inria.hal.science/hal-00648615>**

Submitted on 6 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation par développements asymptotiques raccordés d'une structure présentant une fine couche d'inclusions rigides disposées périodiquement

G. Geymonat<sup>a</sup>, S. Hendili<sup>b,c</sup>, F. Krasucki<sup>c</sup>, M. Vidrascu<sup>b</sup>

a. LMGC, Université Montpellier 2/CNRS, France, [geymonat@univ-montp2.fr](mailto:geymonat@univ-montp2.fr)

b. EPI MACS, INRIA Rocquencourt, France, {[marina.vidrascu](mailto:marina.vidrascu@inria.fr),[soufiane.hendili](mailto:soufiane.hendili@inria.fr)}@inria.fr

c. I3M, Université Montpellier 2/CNRS, France, {[krasucki](mailto:krasucki@math.univ-montp2.fr),[shendili](mailto:shendili@math.univ-montp2.fr)}@math.univ-montp2.fr

## Résumé :

On considère une structure 3D contenant une couche d'épaisseur  $\varepsilon$  dans laquelle sont disposées périodiquement des inclusions rigides de taille  $\varepsilon$ . Dans le cadre des développements asymptotiques raccordés, on propose une méthode efficace et robuste pour modéliser le comportement élastique linéaire de cette structure multi-échelle. Le problème limite est caractérisé par des conditions de transmission spécifiques et il est résolu numériquement par une méthode de décomposition de domaine adaptée.

## Abstract :

We consider a 3D structure containing an  $\varepsilon$ -thin layer of  $\varepsilon$ -periodically distributed rigid inclusion. In order to model the elastic behavior of this multiscale structure, we propose an efficient and robust method based on the matched asymptotic expansion. The limit problem, characterized by specific transmission conditions, is numerically solved by an adapted domain decomposition method.

**Mots clefs** : Multi-échelles, Elasticité, Inclusions rigides

## 1 Introduction

On s'intéresse au comportement élastique linéaire d'une structure contenant une fine couche d'inclusions rigides. Les équations qui régissent ce type de problème sont bien connues et peuvent être résolues numériquement par une méthode d'éléments finis. Cependant la présence des contrastes géométriques entraîne des contraintes de coût qui dégradent l'efficacité de la méthode numérique employée.

L'alternative que nous proposons est de reformuler le problème de départ en s'appuyant sur une décomposition du domaine permettant une prise en compte des échelles de calcul de manière séparée. Cette modélisation est obtenue en adaptant la méthode des développements asymptotiques raccordés qui, dans un contexte similaire, a été introduite par Nguetseng et Sanchez-Palencia dans [4] puis développée dans [1] et [3].

Dans la suite de ce document, les tenseurs et les vecteurs seront désignés en caractères gras. De plus on adoptera la convention de l'indice répété, et on notera  $\otimes$  le produit tensoriel et  $\otimes_S$  le produit tensoriel symétrisé, i.e.  $\mathbf{e}_1 \otimes_S \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ .

## 2 Position du problème

On note  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées cartésiennes associées. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  composé de deux parties  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  séparées par une fine couche  $B^\varepsilon$ , d'épaisseur  $\varepsilon$ , centrée autour de  $\omega$ , la section de  $\Omega$  contenue dans le plan d'équation  $x_1 = 0$ . Soit  $\tilde{Y} = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  et  $I$  une partie de  $\tilde{Y}$  de diamètre  $D < 1$ . On suppose que  $B^\varepsilon$  est l'union de  $\mathcal{N}(\varepsilon) \approx \frac{\text{aire}(\omega)}{\varepsilon^2}$  cubes de taille  $\varepsilon\tilde{Y}$ . On suppose également qu'un corps élastique linéaire occupe dans sa position de

référence le domaine  $\Omega \setminus I^\varepsilon$  où  $I^\varepsilon$  est l'union de  $\mathcal{N}(\varepsilon)$  inclusions de taille  $\varepsilon I$ , et que  $I^\varepsilon$  contient un matériau indéformable. On note  $\Gamma_0^\varepsilon$  le bord encastré de la structure et  $\Gamma_F^\varepsilon$  la partie complémentaire de  $\partial\Omega^\varepsilon$  soumise à des efforts surfaciques.

Soient  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  les champs de déplacement et de contrainte à l'équilibre. Ces champs sont solutions

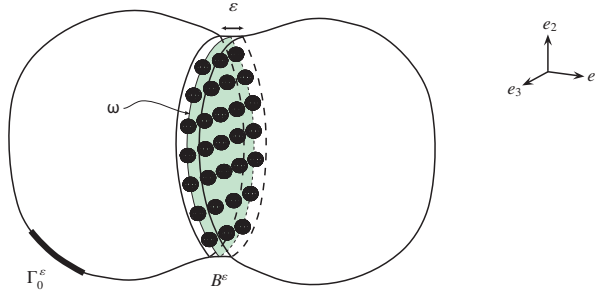


FIGURE 1 – Paramètres du problème réel dans le repère  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

du problème suivant

$$P^\varepsilon \begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{f} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^\varepsilon) \text{ dans } \Omega \setminus I^\varepsilon \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{n} = \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_F^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{R}, \int_{\partial I^\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{n} = \int_{I^\varepsilon} \mathbf{f} d\mathbf{x} \text{ et } \int_{\partial I^\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} = \int_{I^\varepsilon} \mathbf{f} \wedge \mathbf{x} d\mathbf{x} \text{ sur } \partial I^\varepsilon \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{f}$  est une densité volumique de forces définie sur tout  $\Omega$ ,  $\mathbf{A}$  est le tenseur d'élasticité,  $\boldsymbol{\gamma}$  est le tenseur des déformations linéarisées,  $\mathbf{F}$  est une densité surfacique de forces définie sur  $\Gamma_F^\varepsilon$  et  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des déplacements rigides, i.e.  $\mathcal{R} := \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) / \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}$ . Dans les sections suivantes, afin de simplifier la présentation des calculs, on négligera les forces volumiques  $\mathbf{f}$ .

### 3 Etude asymptotique

#### 3.1 Développements asymptotiques

En suivant [4], on introduit deux développements asymptotiques afin de capter le comportement des champs  $\mathbf{u}^\varepsilon$  et  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  dans toute la structure et dont on assure la compatibilité par des conditions de raccord :

- *Développement extérieur* : dans une zone loin de  $\omega$ , nous postulerons l'existence d'un développement dit extérieur de  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)$  de la forme

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}^i(x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\sigma}^i(x_1, x_2, x_3) \quad (2)$$

- *Développement intérieur* : dans une zone proche de  $\omega$ , nous postulerons l'existence d'un développement dit intérieur de  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)$  de la forme

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{v}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}), \quad \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \quad (3)$$

avec  $y_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = (x_2, x_3)$  et  $\hat{\mathbf{y}} = (y_2, y_3)$  et où les  $\mathbf{v}^i$  et les  $\boldsymbol{\tau}^i$  sont des fonctions  $\hat{\mathbf{y}}$ -périodiques :

$$\mathbf{v}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}} + p\boldsymbol{\alpha} + q\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{v}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}), \quad \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}} + p\boldsymbol{\alpha} + q\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\tau}^i(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}^2 \quad (4)$$

Pour fixer les notations, on suppose que  $(y_1, \hat{\mathbf{y}}) \in Y \setminus I$  où  $Y := \mathbb{R} \times \hat{Y}$  et  $\hat{Y} = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

– *Conditions de raccord* : dans une zone intermédiaire, on suppose que les deux développements, intérieur et extérieur, sont valides et satisfont des conditions convenables de raccord qui, aux ordres 0 et 1, s'écrivent :

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \int_{\hat{Y}} \mathbf{v}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{u}^0(0\pm, \hat{\mathbf{x}}), \quad \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\hat{Y}} \mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} - (\mathbf{u}^1(0\pm, \hat{\mathbf{x}}) + y_1 \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\mathbf{x}})) \right) = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\sigma}^0(0\pm, \hat{\mathbf{x}}), \quad \lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \int_{\hat{Y}} \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\hat{\mathbf{y}} - (\boldsymbol{\sigma}^1(0\pm, \hat{\mathbf{x}}) + y_1 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0\pm, \hat{\mathbf{x}})) \right) = 0 \quad (6)$$

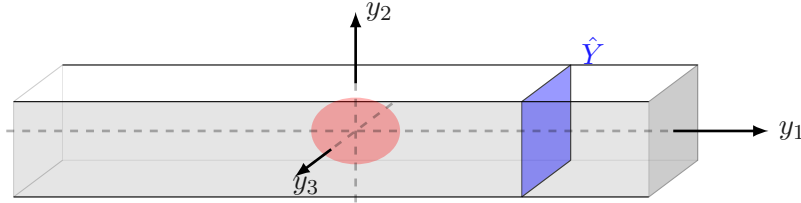


FIGURE 2 – Cellule Y

### 3.2 Equations des problèmes aux différents ordres

En injectant les développements (2) et (3) dans le problème de départ (1), on obtient les équations vérifiées par les termes  $\mathbf{u}^i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^i$ ,  $\mathbf{v}^i$  et  $\boldsymbol{\tau}^i$  :

#### Equations d'équilibre

| Ordre      | dans $\Omega \setminus \omega$                      | dans $\omega \times (Y \setminus I)$   |
|------------|---|--|
| -1         |   | $\mathbf{div}_y \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{0}$  |
| $i \geq 0$ | $\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{0}$ | $\mathbf{div}_y \boldsymbol{\tau}^{i+1} + \mathbf{div}_x \boldsymbol{\tau}^i = \mathbf{0}$ |

#### Conditions aux bords

| Ordre   | dans $\Omega \setminus \omega$   | dans $\omega \times (Y \setminus I)$  |
|---------|--|---|
| $i=0$   | $\boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} = \mathbf{F}$ sur $\Gamma_F$<br>$\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ sur $\Gamma_0$ | $\int_{\partial I} \boldsymbol{\tau}^0 \mathbf{n} = \mathbf{0}$<br>$\int_{\partial I} \boldsymbol{\tau}^0 \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$<br>$\mathbf{u}^0 \in \mathcal{R}$ sur $\partial I$ |
| $i > 0$ | $\boldsymbol{\sigma}^i \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur $\Gamma_F$<br>$\mathbf{u}^i = \mathbf{0}$ sur $\Gamma_0$ | $\int_{\partial I} \boldsymbol{\tau}^i \mathbf{n} = \mathbf{0}$<br>$\int_{\partial I} \boldsymbol{\tau}^i \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$<br>$\mathbf{u}^i \in \mathcal{R}$ sur $\partial I$ |

#### Lois de comportement

| Ordre      | dans $\Omega \setminus \omega$   | dans $\omega \times (Y \setminus I)$  |
|------------|--|---|
| -1         |  | $\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_y(\mathbf{v}^0) = \mathbf{0}$   |
| $i \geq 0$ | $\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_x(\mathbf{u}^i) = \boldsymbol{\sigma}^i$ | $\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_y(\mathbf{v}^{i+1}) + \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_x(\mathbf{v}^i) = \boldsymbol{\tau}^i$ |

### 3.3 Problème d'ordre 0

**Proposition 1.** (i)  $\mathbf{u}^0$  et  $\boldsymbol{\sigma}^0$  sont solutions du problème extérieur suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^0) \text{ dans } \Omega \setminus \omega \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{n} = \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_F, \mathbf{u}^0 = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \\ [\boldsymbol{\sigma}^0] \mathbf{e}_1 = [\mathbf{u}^0] = \mathbf{0} \text{ sur } \omega \end{cases} \quad (7)$$

(ii)  $\mathbf{v}^0$  est donné par  $\mathbf{v}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}^0(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})$

La démonstration est analogue que pour le cas des cavités dans [2].

### 3.4 Problème d'ordre 1

Les champs  $\mathbf{u}^1$  et  $\boldsymbol{\sigma}^1$  satisfont :

$$\boxed{\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^1) \text{ dans } \Omega \setminus \omega, \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_F, \mathbf{u}^1 = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0.} \quad (8)$$

Les conditions de transmission manquantes sur  $\omega$  sont obtenues en 3.4.2 en utilisant les conditions de raccord sur  $\mathbf{v}^1$  et  $\boldsymbol{\tau}^1$ .

### 3.4.1 Détermination de $\mathbf{v}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^0$

Comme on peut le constater dans [4] puis dans [1] et [3], il est courant de simplifier l'application de la condition de raccord (5)<sub>2</sub> en effectuant l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = y_1 \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}^\#(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (9)$$

Cependant la condition (5)<sub>2</sub>, de caractère asymptotique, est vérifiée uniquement loin des hétérogénéités alors que la décomposition (9) est valable dans tout le domaine  $Y \setminus I$ . Afin de prendre en compte la condition de raccord (5)<sub>2</sub> uniquement pour  $y_1 \rightarrow \infty$ , on suppose que :

$$\mathbf{v}^1(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = f(y_1; a, b) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad , \quad \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}(y_1, \mathbf{u}^0) + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (10)$$

où  $f(y_1; a, b)$  est une fonction régulière impaire telle que :

$$f(y_1; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < |y_1| \leq a \\ y_1 & \text{si } |y_1| \geq b \end{cases} \quad (11)$$

Le tenseur  $\mathbf{G}$  est défini par  $\mathbf{G}(y_1, \mathbf{u}^0) = \mathbf{A} \left( \gamma_x(\mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) + \gamma_y \left( f(y_1) \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) \right) \right)$

**Proposition 2.**  $\hat{\mathbf{v}}$  est la solution unique, à une translation près, du problème :

- $\text{div}_y \hat{\boldsymbol{\tau}} = -f''(y_1) \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_1 \right) \mathbf{e}_1$  dans  $\omega \times \mathbf{Y} \setminus I$
- $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{A} \gamma_y(\hat{\mathbf{v}})$  dans  $\omega \times \mathbf{Y} \setminus I$
- $\hat{\mathbf{v}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n}$  périodiques sur  $\omega \times \partial \mathbf{Y}$
- $\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\mathbf{x}}, y_1, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$  pour  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \in \omega \times \hat{Y}$
- $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{R}$  sur  $\omega \times \partial I$
- $\int_{\partial I} \hat{\boldsymbol{\tau}}(x_2, \mathbf{y}) \mathbf{n} \, d\Gamma = - \int_{\partial I} \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{n} \, d\Gamma$  sur  $\omega \times \partial I$
- $\int_{\partial I} \hat{\boldsymbol{\tau}}(x_2, \mathbf{y}) \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma = - \int_{\partial I} \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma$  sur  $\omega \times \partial I$

Par linéarité, ce problème peut être décomposé en 9 problèmes élémentaires. Pour cela on pose  $\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{u}_i^0}{\partial x_k}(0, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{V}^{lk}(\mathbf{y}) + \check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$  et  $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{u}_i^0}{\partial x_k}(0, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{T}^{lk}(\mathbf{y})$  avec  $\check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$  un déplacement rigide. A cause de la périodicité, ce déplacement rigide est réduit à une translation.

**Proposition 3.** Pour  $l$  et  $k$  fixés,  $(\mathbf{V}^{lk}, \mathbf{T}^{lk})$  sont solutions des problèmes élémentaires  $P^{lk}$  suivants :

- |  |   |
|--|---|
| <p>pour <math>(l, k) = (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2)</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\text{div}_y \mathbf{T}^{lk} = \mathbf{0}</math> dans <math>\mathbf{Y} \setminus I</math></li> <li>• <math>\mathbf{T}^{lk} = \mathbf{A} \gamma_y(\mathbf{V}^{lk})</math> dans <math>\mathbf{Y} \setminus I</math></li> <li>• <math>\mathbf{V}^{lk}</math> et <math>\mathbf{T}^{lk} \mathbf{n}</math> périodiques sur <math>\mathbb{R} \times \partial \hat{Y}</math></li> <li>• <math>\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{T}^{lk}(y_1, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}</math> pour <math>\hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y}</math></li> <li>• <math>\mathbf{V}^{lk} \in \mathcal{R}</math> sur <math>\partial I</math></li> <li>• <math>\int_{\partial I} \mathbf{T}^{lk} \mathbf{n} \, d\Gamma = - \int_{\partial I} (A_{ijkl} n_j) \mathbf{e}_i \, d\Gamma</math> sur <math>\partial I</math></li> <li>• <math>\int_{\partial I} \mathbf{T}^{lk} \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma = - \int_{\partial I} (A_{ijkl} n_j) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma</math> sur <math>\partial I</math></li> </ul> | <p>pour <math>(l, 1), l=1, 2, 3</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\text{div}_y \mathbf{T}^{l1} = -f''(y_1) A_{i1l1} \mathbf{e}_i</math> dans <math>\mathbf{Y} \setminus I</math></li> <li>• <math>\mathbf{T}^{l1} = \mathbf{A} \gamma_y(\mathbf{V}^{l1})</math> dans <math>\mathbf{Y} \setminus I</math></li> <li>• <math>\mathbf{V}^{l1}</math> et <math>\mathbf{T}^{l1} \mathbf{n}</math> périodiques sur <math>\mathbb{R} \times \partial \hat{Y}</math></li> <li>• <math>\lim_{y_1 \rightarrow \pm\infty} \mathbf{T}^{l1}(y_1, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}</math> pour <math>\hat{\mathbf{y}} \in \hat{Y}</math></li> <li>• <math>\mathbf{V}^{l1} \in \mathcal{R}</math> sur <math>\partial I</math></li> <li>• <math>\int_{\partial I} \mathbf{T}^{l1} \mathbf{n} \, d\Gamma = \mathbf{0}</math> sur <math>\partial I</math></li> <li>• <math>\int_{\partial I} \mathbf{T}^{l1} \mathbf{n} \wedge \mathbf{y} \, d\Gamma = \mathbf{0}</math> sur <math>\partial I</math></li> </ul> |
|--|---|

Les 9 problèmes élémentaires ont les propriétés suivantes : les champs  $\mathbf{T}^{ij}$  décroissent exponentiellement vers zéro et les champs  $\mathbf{V}^{ij}$  tendent vers un vecteur constant, noté  $\mathbf{V}^{ij\pm}$ , lorsque  $y_1$  tend vers  $\pm\infty$ . Les  $\mathbf{V}^{ij}$  sont définis à une constante près. Cette dernière peut être déterminée par la condition  $\mathbf{V}^{ij+} + \mathbf{V}^{ij-} = \mathbf{0}$ . On détermine  $\check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$  par  $\check{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^{1+}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}^{1-}(\hat{\mathbf{x}}))$ .

### 3.4.2 Conditions de transmission sur $\omega$

Grâce aux résultats précédents, en notant  $[\mathbf{V}^{ij}]^\infty = \mathbf{V}^{ij+} - \mathbf{V}^{ij-}$ , les conditions de transmission en déplacement s'écrivent :

$$\boxed{[\mathbf{u}^1](\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\mathbf{x}}) [\mathbf{V}^{ij}]^\infty} \quad (12)$$

On déduit de (6)<sub>2</sub> :

$$[\boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{e}_1] = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left( \int_{\hat{Y}} (\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, L, \hat{\mathbf{y}}) - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, -L, \hat{\mathbf{y}})) d\hat{\mathbf{y}} - 2L \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_1 \right)$$

Soit  $Y_L = ]-L, L[ \times \hat{Y}$ , avec  $L$  fixé suffisamment grand. On a alors :

$$\int_{\hat{Y}} (\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, L, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, -L, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1) d\hat{\mathbf{y}} = - \int_{Y_L \setminus I} \mathbf{div}_x \boldsymbol{\tau}^0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Puisque

$$\int_{Y_L \setminus I} \mathbf{div}_x \mathbf{G}(y_1; \mathbf{u}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) d\mathbf{y} = 2L \mathbf{div}_x (\boldsymbol{\sigma}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) - |I| \mathbf{div}_x \left( \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_3 \right) \right)$$

où  $|I|$  est le volume de l'inclusion et puisque  $\mathbf{div}_x (\boldsymbol{\sigma}^0(0, \hat{\mathbf{x}})) = -\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_1$  on a alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{Y}} (\boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, L, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\tau}^1(\hat{\mathbf{x}}, -L, \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{e}_1) d\hat{\mathbf{y}} - 2L \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}{\partial x_1}(0, \hat{\mathbf{x}}) = \\ & |I| \mathbf{div}_x \left( \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_3 \right) \right) - \mathbf{div}_x \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\mathbf{x}}) \int_{Y \setminus I} \mathbf{T}^{ij}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \end{aligned}$$

En passant à la limite pour  $L \rightarrow \infty$ , on obtient les conditions de transmission sur les contraintes :

$$\boxed{[\boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{e}_1] = |I| \mathbf{div}_x \left( \mathbf{A} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_2}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial x_3}(0, \hat{\mathbf{x}}) \otimes_S \mathbf{e}_3 \right) \right) - \mathbf{div}_x \left( \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}(0, \hat{\mathbf{x}}) \int_{Y \setminus I} \mathbf{T}^{ij}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)} \quad (13)$$

## 4 Étude numérique

On considère le cas d'une structure bidimensionnelle contenant  $\mathcal{N}(\varepsilon)$  inclusions de rayon  $R\varepsilon$ , disposées périodiquement (avec période  $\varepsilon$ ) le long d'une ligne  $\omega$ . Dans ce cas, la cellule  $Y$  est un rectangle de hauteur 1 et de longueur  $L^\infty$ . La valeur numérique de  $L^\infty$  est la valeur à partir de laquelle  $\mathbf{V}^{ij}(y_1 = L^\infty)$  est constant. L'inclusion  $I$ , de rayon  $R=0.25$ , est centrée en  $Y$  et son centre coïncide avec l'origine du repère  $(O, y_1, y_2)$ . Les propriétés de symétrie de ce problème simplifient le calcul des conditions de transmission (12) et (13) : les coefficients  $[\mathbf{V}^{ij}]^\infty$  et  $\int_{Y \setminus I} \mathbf{T}^{ij} d\mathbf{y}$  sont nuls pour  $(i, j) \neq (1, 1); (2, 1)$ . On considère deux fonctions  $f_1(y_1; a, b)$  et  $f_2(y_2; a, b)$ , qui vérifient la condition (11), définies par :

|                  | pour $a \leq y_1 \leq b$   | pour $-b \leq y_1 \leq -a$  |
|------------------|--|---|
| $f_1(y_1; a, b)$ | $(y_1 - a)^3 (Ay_1^2 + By_1 + C)$                                | $(y_1 + a)^3 (Ay_1^2 - By_1 + C)$                                 |
| $f_2(y_1; a, b)$ | $(y_1 - a)^3 (\alpha y_1^3 + \beta y_1^2 + \gamma y_1 + \delta)$ | $(y_1 + a)^3 (-\alpha y_1^3 + \beta y_1^2 - \gamma y_1 + \delta)$ |

Pour ces deux choix de la fonction  $f$ , et en considérant un matériau isotrope de module d'Young  $E =$

1MPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ , les problèmes  $P^{11}$  et  $P^{21}$  ont été résolus numériquement par une méthode d'éléments finis. Le chargement correspondant à ces deux problèmes dépend de la fonction  $f$ ; l'influence du choix de  $f$  sur l'allure du chargement est mis en avant dans les figures (3) et (4).

Le résultat du calcul des coefficients  $[V^{ij}]$  et  $\int_{Y \setminus I} T^{ij} d\mathbf{y}$  est donné dans le tableau ci-dessous avec 46106 d.d.l. (ligne 3) et 182034 d.d.l. (ligne 4) :

| $[V_1^{11}]^\infty$ |         | $[V_2^{21}]^\infty$ |         | $\int_{Y \setminus I} T_{11}^{11}$ |         | $\int_{Y \setminus I} T_{22}^{11}$ |         | $\int_{Y \setminus I} T_{12}^{21}$ |         |
|---------------------|---------|---------------------|---------|------------------------------------|---------|------------------------------------|---------|------------------------------------|---------|
| $f_1$               | $f_2$   | $f_1$               | $f_2$   | $f_1$                              | $f_2$   | $f_1$                              | $f_2$   | $f_1$                              | $f_2$   |
| -0.2777             | -0.2815 | -0.3583             | -0.3620 | -0.2962                            | -0.3002 | -0.0741                            | -0.0751 | -0.1433                            | -0.1448 |
| -0.2796             | -0.2794 | -0.3601             | -0.3600 | -0.2982                            | -0.2980 | -0.0746                            | -0.0745 | -0.1441                            | -0.1440 |

TABLE 1 – Mise en évidence de l'indépendance en  $f$  du calcul des  $[V_k^{ij}]^\infty$  et des  $\int_{Y \setminus I} T_{kl}^{ij}$

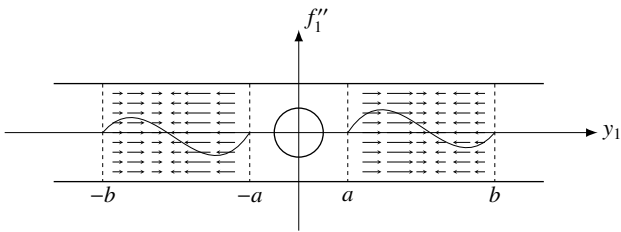


FIGURE 3 – Chargement de  $P^{11}$  :  $f = f_1$

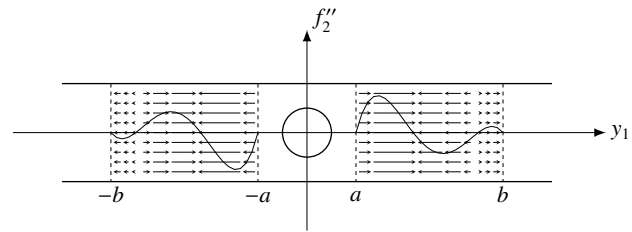


FIGURE 4 – Chargement de  $P^{11}$  :  $f = f_2$

## 5 Conclusion

A l'échelle macroscopique, l'approximation du champ  $\mathbf{u}^\varepsilon$  est obtenue par le calcul de  $\mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1$ . Les champs  $\mathbf{u}^0$  et  $\mathbf{u}^1$  sont solutions de problèmes de transmission définis sur  $\Omega^- \cup \omega \cup \Omega^+$  où la bande d'inclusions n'apparaît plus. Ces résultats sont obtenus en proposant une variante de la méthode des développements asymptotiques raccordés qui consiste à introduire la fonction  $f(y_1; a, b)$  permettant la prise en compte du caractère asymptotique des conditions de raccord. Une étude numérique a permis de mettre en évidence l'indépendance du choix de cette fonction dans le calcul des conditions de transmission  $[\mathbf{u}^1]$  et  $[\boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{e}_1]$ . Cette propriété de robustesse étant vérifiée on pourra envisager une étude numérique pour déterminer l'efficacité du modèle asymptotique.

**Remerciements.** Ce travail est en partie financé par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) dans le cadre du projet *epsilon* (BLAN08-2\_312370) "Décomposition de domaines et calculs multi-échelles de singularités dans les structures mécaniques"

## Références

- [1] R. Abdelmoula et J. J. Marigo. 2000 The effective behavior of a fiber bridged crack. *J. Mech. Phys. Solids* **48(11)** 2419-2444.
- [2] G. Geymonat, S. Hendili, F. Krasucki et M. Vidrascu. à paraître The matched asymptotic expansion for the computation of the effective behavior of an elastic structure with a thin layer of holes *Journal for Multiscale Computational Engineering*
- [3] J.J. Marigo et C. Pideri. à paraître The effective behavior of elastic bodies containing microcracks or microholes localized on a surface, *International Journal of Damage Mechanics*
- [4] G. Nguetseng et E. Sanchez-Palencia. 1986 Stress concentration for defects distributed near a surface. *P. Ladevèze (ed.) : Local Effects in the Analysis of Structures. Elsevier, Amsterdam, 55-74.*