



**HAL**  
open science

# Processus de Galton-Watson et applications en dynamique des populations

Nicolas Champagnat

► **To cite this version:**

Nicolas Champagnat. Processus de Galton-Watson et applications en dynamique des populations. Master. École Supérieure des Sciences et Technologies de Hammam Sousse, Tunisie. 2015, pp.46. cel-01216832

**HAL Id: cel-01216832**

**<https://inria.hal.science/cel-01216832>**

Submitted on 17 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Processus de Galton-Watson et applications en dynamique des populations

Nicolas Champagnat

17 octobre 2015

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Processus de Galton-Watson</b>	<b>2</b>
2.1	Définition et premières propriétés . . . . .	3
2.2	Moments et fonction génératrice . . . . .	5
2.3	Le processus de Galton-Watson vu comme un arbre et la propriété de branchement . . . . .	8
2.4	Probabilité d'extinction . . . . .	11
2.5	Comportement asymptotique du processus de Galton-Watson	14
2.6	Processus de Galton-Watson avec immigration . . . . .	17
2.7	L'arbre biaisé . . . . .	20
2.8	Cas sur-critique : le théorème de Kesten-Stigum . . . . .	23
2.9	Cas sous-critique : le théorème de Yaglom . . . . .	25
2.10	Cas critique . . . . .	28
2.11	Quelques mots sur le cas multi-types, sous forme d'exercice .	30
<b>3</b>	<b>Processus de Galton-Watson et marches aléatoires</b>	<b>32</b>
3.1	Chemin de Lukasiewicz . . . . .	32
3.2	Formule de Kemperman et loi de la descendance totale d'un processus de Galton-Watson . . . . .	35
3.3	Processus de contour . . . . .	37
3.4	Généalogie des processus de Galton-Watson géométriques . .	40

Merci de me signaler les erreurs et les fautes de frappe!

## 1 Introduction

Ces notes de cours ont été préparées à l’occasion d’un cours donné à l’École Supérieure des Sciences et Technologies de Hammam Sousse (Tunisie) en octobre 2015 dans le cadre du Master de Recherche “double diplôme” en Mathématiques et Applications, commun avec l’Université de Lorraine.

Le but de ce cours est de présenter quelques aspects de la théorie des processus de branchement en temps discret, aussi appelés *processus de Galton Watson*, puis d’appliquer ces outils à l’étude de propriétés généalogiques de ces processus, en lien avec la théorie de la *Génétiq ue des Populations*.

On supposera connues les notions de base en théorie des probabilités (notamment le lemme de Borel Cantelli), quelques notions sur les chaînes de Markov discrètes en temps discret — notamment l’espérance conditionnelle — et les résultats standards de convergence des martingales. On s’efforcera quand c’est possible à donner des preuves élémentaires (c’est-à-dire utilisant aucunes des notions précédentes) des résultats (éventuellement sous des hypothèses plus contraignantes).

Les démonstrations en petits caractères sont plus difficiles et peuvent être omises dans une première lecture.

## 2 Processus de Galton-Watson

Un processus de Galton-Watson est un modèle simple de reproduction de population (de bactéries, de neutrons, d’individus porteurs d’une maladie...), appartenant à la famille des processus de branchement, caractérisés par le fait que chaque individu dans la population meurt et se reproduit indépendamment des autres individus. Il s’agit d’un processus en temps discret : chaque individu naît à une date entière  $k$ , meurt au temps  $k + 1$  et produit un nombre aléatoire (éventuellement nul) de descendants à l’instant  $k + 1$ , qui vont vivre, mourir et se reproduire selon les mêmes mécanismes, de façon indépendante.

Ce modèle a été introduit pour la première fois par Watson en 1874 pour étudier la survivance des noms de famille, dans un article répondant à un problème posé par Galton, cosigné par Galton. C’est pourquoi ce modèle est appelé *processus de Galton-Watson*. En fait, un modèle similaire avait déjà été étudié en 1845 par le mathématicien français Bienaymé, ce qui fait que le nom correct qu’il faudrait donner à ce modèle est *processus de Bienaymé-Galton-Watson*, mais ce nom est rarement utilisé. Pour la petite histoire, tous ces auteurs ont obtenu la probabilité d’extinction du processus de Galton-Watson, mais par un raisonnement faux.

La présentation de cette partie est inspirée de plusieurs sources, notamment [7] (pour les sections 2.6, 2.9 et 2.9), [5] (pour les sections 2.2, 2.4 et 2.10), [1, 4] (pour la section 2.11), [3] (pour les sections 2.3, 2.5, 2.7, 2.8,

2.9), [8] (pour la section 2.6) et [9] (pour les sections 2.1, 2.2 et 2.5).

## 2.1 Définition et premières propriétés

On considère une mesure de probabilité  $\mathbf{p} = (p_k, k \geq 0)$  sur  $\mathbb{N}$  ( $p_k \geq 0$  et  $\sum_{k \geq 0} p_k = 1$ ), et une famille dénombrable de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a. i.i.d.) de loi  $\mathbf{p}$

$$(\xi_{n,i}, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^*).$$

**Définition 2.1** *On se donne également une v.a.  $Z_0$  indépendante de la famille  $(\xi_{n,i})$ . Le processus de Galton-Watson est la suite de v.a.  $(Z_n, n \geq 0)$  définie par récurrence par*

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{n,i}, \quad \forall n \geq 0, \quad (1)$$

avec la convention qu'une somme de  $i = 1$  à 0 vaut 0.

On voit alors que, si  $Z_0 = 1$ , alors  $Z_1 = \xi_{0,1}$  a pour loi  $\mathbf{p}$ , et que chaque individu vivant à la date  $n$  (chaque individu parmi les  $Z_n$ ) a un nombre d'enfants de loi  $\mathbf{p}$  indépendant des autres individus.  $\mathbf{p}$  est appelé *loi de reproduction*, et  $Z_n$  représente le nombre d'individus vivants à la génération (ou date)  $n$ .

Le plus souvent, la population initiale sera supposée composée d'un seul individu, appelé *ancêtre*, c'est-à-dire  $Z_0 = 1$ .

**Exercice 1 (Branchement Bernoulli)** *On suppose  $Z_0 = 1$ . Que vaut  $Z_n$  si  $p_1 = 1$ ? Quelles sont les valeurs possibles de  $Z_n$  lorsque  $p_0 + p_1 = 1$ ? Quelle est alors la loi du temps d'extinction de la population, c'est-à-dire du premier instant d'atteinte de 0 par  $(Z_n)$ ?*

Pour éviter le cas trivial, on supposera toujours dans la suite que  $p_1 < 1$ .

**Proposition 2.2** *Le processus de Galton-Watson de la définition précédente est une chaîne de Markov à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de matrice de transition*

$$P = (p_{ij}, i, j \geq 0), \quad \text{où } p_{ij} = p_j^{*i}, \quad (2)$$

où  $\mathbf{p}^{*k} = (p_j^{*k}, j \geq 0)$  désigne la puissance  $k$ -ième de convolution de la loi  $\mathbf{p}$ , c'est-à-dire la loi de la somme de  $k$  v.a. i.i.d. de loi  $\mathbf{p}$ , caractérisée par

$$p_\ell^{*k} = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \ell_1 + \dots + \ell_k = \ell} \prod_{i=1}^k p_{\ell_i}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Ce résultat découle du lemme suivant, qui est une caractérisation pratique des chaînes de Markov.

**Lemme 2.3** *Soit  $(\mathbb{U}, \mathcal{U})$  un espace mesurable quelconque. Soit un processus  $(Z_n, n \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est défini par une v.a.  $Z_0 \in \mathbb{N}$  et la relation de récurrence*

$$Z_{n+1} = F(Z_n, U_n), \quad (3)$$

où  $F : \mathbb{N} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction mesurable et  $(U_n, n \geq 0)$  est une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{U}$ , indépendante de  $Z_0$ . Alors  $(Z_n, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov.

Réciproquement, étant donné une matrice de transition  $(p_{ij}, i, j \geq 0)$ , une v.a.  $Z_0$  et une suite  $(U_n, n \geq 0)$  indépendante de  $Z_0$  et i.i.d. de la loi uniforme sur  $[0, 1]$ , il existe une fonction  $F : \mathbb{N} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$  mesurable telle que le processus  $(Z_n, n \geq 0)$  défini par (3) est une chaîne de Markov de matrice de transition  $(p_{ij}, i, j \geq 0)$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $i_0, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_0 = i_0, Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(F(Z_n, U_n) = i_{n+1} \mid Z_0 = i_0, Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(F(Z_n, U_n) = i_{n+1} \mid Z_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(F(i_n, U_n) = i_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(F(i_n, U_0) = i_{n+1}), \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle de l'indépendance de  $Z_0, \dots, Z_{n-1}$  avec  $U_n$ , évidente puisque  $Z_0, \dots, Z_{n-1}$  sont des fonctions de  $Z_0, U_0, \dots, U_{n-1}$  seulement. Le fait que  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_0 = i_0, Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n)$  ne dépende que de  $i_n$  et de  $i_{n+1}$  et pas de  $n, i_0, \dots, i_{n-1}$  est exactement la définition d'une chaîne de Markov.  $\square$

**Exercice 2** *Démontrer la réciproque du lemme précédent en utilisera la propriété bien connue que, pour toute v.a. réelle  $X$  de fonction de répartition  $F$ ,  $F^{-1}(U)$  a même loi que  $X$  si  $U$  est une v.a. uniforme sur  $[0, 1]$ , où  $F^{-1}$  est la fonction inverse généralisée de  $F$ , définie par  $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$  pour tout  $y \in ]0, 1[$ .*

**Démonstration de la proposition 2.2** Le processus de Galton-Watson est un exemple de processus satisfaisant (3) avec  $U_n = (\xi_{n,i}, i \geq 1)$  et  $F(n, u) = \sum_{i=1}^n u_i$ , donc c'est une chaîne de Markov grâce au lemme précédent. La probabilité de transition de  $i$  vers  $j$  est donnée d'après la preuve du lemme 2.3 par

$$p_{ij} = \mathbb{P}(F(i, U_0) = j) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^i \xi_{0,k} = j\right),$$

qui est bien égal à  $p_j^{*i}$ . □

**Exercice 3 (Branchement binaire)** *Un modèle de Galton-Watson très utilisé en biologie est celui du branchement binaire, tel que  $p_0 = 1 - p$  et  $p_2 = p$  pour un certain  $p \in [0, 1]$ . Vérifier que*

$$p_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \binom{j}{k/2} p^{k/2} (1-p)^{j-k/2}, & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

*Expliquer pourquoi cette loi ressemble à une loi binomiale.*

## 2.2 Moments et fonction génératrice

Commençons par rappeler quelques propriétés de base des fonctions génératrices. Étant donnée une v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , sa fonction génératrice  $G_X$  est définie par

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{P}(X = n), \quad \forall s \in [-1, 1].$$

$G_X$  est une fonction analytique sur  $] -1, 1[$ , convexe sur  $[0, 1]$ , strictement convexe sur  $[0, 1]$  lorsque  $\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$ , et  $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$  et  $G_X(1) = 1$ . De plus  $G_X$  caractérise la loi de  $X$  puisqu'on vérifie facilement que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0), \quad \forall k \geq 0,$$

où  $G_X^{(k)}$  est la dérivée  $k$ -ième de  $G_X$ . Remarquons que le calcul de  $G_X^{(k)}(0)$  ne nécessite de connaître  $G_X$  que pour  $s \in [0, \varepsilon]$  pour un  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , et donc la fonction caractéristique  $G_X$  restreinte à  $[0, \varepsilon]$  caractérise également la loi de la v.a.  $X$ .

De plus,  $X$  admet un moment fini d'ordre  $k$  si et seulement si  $G_X^{(k)}(1-) = \lim_{s \rightarrow 1-} G_X^{(k)}(s)$  existe et est finie, et dans tous les cas

$$\mathbb{E}[X(X-1) \dots (X-k+1)] = G_X^{(k)}(1-).$$

En outre, si  $X$  et  $X'$  sont deux v.a. indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors

$$G_{X+X'}(s) = G_X(s)G_{X'}(s), \quad \forall s \in [-1, 1].$$

Enfin, si pour tout  $n \geq 1$ ,  $G_n$  est la fonction génératrice d'une v.a.  $X_n \geq 0$  et si  $G_n(s) \rightarrow G(s)$  pour tout  $s \in [0, 1[$  avec  $G(1-) = \lim_{s \rightarrow 1-} G(s) = 1$ , alors  $G$  est la fonction génératrice d'une v.a.  $X$  finie et  $X_n \rightarrow X$  en loi.

Revenons maintenant au processus de Galton-Watson. Étant donné une loi  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{N}$  comme dans la section précédente, on notera  $G = G_{\mathbf{p}}$  la fonction

génératrice d'une v.a. de loi  $\mathbf{p}$ , appelée *fonction génératrice de reproduction*. Étant donné le processus de Galton-Watson  $Z_n$  de la section précédente, issu d'un unique ancêtre ( $Z_0 = 1$ ), on définit également pour tout  $n \geq 0$

$$G_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \sum_{k \geq 0} s^k \mathbb{P}(Z_n = k), \quad \forall s \in [-1, 1],$$

la fonction génératrice de  $Z_n$ . Remarquons que

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0).$$

Nous commençons par le lemme suivant.

**Lemme 2.4** *Soit  $Y, X_1, X_2 \dots$  une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telle que les  $X_i$  ont tous même loi. Soit  $g$  la fonction génératrice de  $X_1$  et  $h$  la fonction génératrice de  $Y$ . Alors, la v.a.*

$$S = \sum_{i=1}^Y X_i$$

*satisfait*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^S) &= h \circ g(s), \quad \forall s \in [-1, 1], \\ \mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y), \\ \text{Var}(S) &= \text{Var}(X_1)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_1)^2\text{Var}(Y), \\ \mathbb{E}(S \mid Y) &= \mathbb{E}(X_1)Y. \end{aligned}$$

**Démonstration** On ne démontre que la première et la dernière relation, les deux autres s'obtiennent par différentiation de la première (on laisse la vérification en exercice).

$$\mathbb{E}(s^S) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(s^S \mid Y)] = \mathbb{E}[(\mathbb{E}(s^{X_1}))^Y] = \mathbb{E}[g(s)^Y] = h \circ g(s).$$

Si l'on préfère ne pas manipuler d'espérance conditionnelle dans le calcul précédent, on peut le réécrire de façon parfaitement équivalente comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^S) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[s^S \mid Y = k] \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_k}] \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(s^{X_1})^k \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{E}[(\mathbb{E}(s^{X_1}))^Y] \end{aligned}$$

et la fin du calcul est la même.

Pour vérifier la dernière relation, par définition de l'espérance conditionnelle, il suffit de montrer que pour toute v.a.  $U$   $\sigma(Y)$ -mesurable,  $\mathbb{E}(US) =$

$\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(UY)$ . Or une v.a.  $\sigma(Y)$ -mesurable est une fonction mesurable de la v.a.  $Y$ , donc on veut montrer que pour tout  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbb{E} \left( F(Y) \sum_{i=1}^Y X_i \right) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(F(Y)Y).$$

Cette relation est évidente si, comme ci-dessus, on conditionne par rapport à  $Y$  dans l'espérance du membre de gauche.  $\square$

En utilisant la définition (1) de  $Z_{n+1}$ , on déduit du lemme précédente que

$$G_{n+1}(s) = G_n \circ G(s) = \dots = G^{\circ(n+1)}(s),$$

où  $G^{\circ k}$  est la composition de  $G$  par lui-même  $k$  fois. En particulier, si l'on note

$$m = \mathbb{E}(\xi) = G'(1) = \sum_{k \geq 1} kp_k$$

le nombre moyen d'enfants par individu, aussi appelée *moyenne de reproduction*, et

$$\sigma^2 = \text{Var}(\xi) = \sum_{k \geq 1} k^2 p_k - m^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$$

la *variance de reproduction*, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= m\mathbb{E}(Z_{n-1}), \\ \text{Var}(Z_n) &= \sigma^2\mathbb{E}(Z_{n-1}) + m^2\text{Var}(Z_{n-1}). \end{aligned}$$

Il est alors immédiat de vérifier par récurrence que

**Théorème 2.5** *Dans le cas où  $Z_0 = 1$ , la fonction génératrice de  $Z_n$  est  $G^{\circ n}$ , sa moyenne est  $m^n$ , et sa variance est*

$$\begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{si } m \neq 1, \\ n\sigma^2, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Remarquons que ces formules sont également vraies si  $m = \mathbb{E}(\xi) = +\infty$  et/ou  $\mathbb{E}(\xi^2) = +\infty$  (avec la convention dans ce cas que  $\sigma^2 = +\infty$ ). Dans la suite, sauf lorsque c'est explicitement mentionné, on supposera toujours que  $m = \mathbb{E}(\xi) < \infty$ .

**Exercice 4 (Cas déterministe)** *Que dire de  $Z_n$  dans le cas particulier où  $m$  est entier et  $\mathbf{p}$  est la masse de Dirac en  $m$ ? Retrouver dans ce cas l'espérance et la variance du théorème précédent sans calcul.*

### 2.3 Le processus de Galton-Watson vu comme un arbre et la propriété de branchement

Étant donné un processus de branchement, il est assez naturel de construire l'arbre généalogique associé. Nous prenons ici le point de vue inverse et cherchons à donner une définition alternative des processus de Galton-Watson comme une v.a. sur l'espace des arbres.

Soit  $U$  l'espace des suites finies  $u = j_1 \dots j_n$  d'entiers strictement positifs. La suite  $\emptyset$  appartient aussi à  $U$ . Ainsi

$$U = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{N}^*)^n.$$

La longueur d'une suite est notée  $|u|$  et la suite obtenue par concaténation de  $u$  et  $v$  est notée  $uv$ .

**Définition 2.6 (Arbre et notation de Ulam-Harris-Neveu)** *Un arbre  $\omega$  est un sous-ensemble de  $U$  qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $\emptyset \in \omega$ ,
- (ii)  $uv \in \omega \implies u \in \omega$ ,
- (iii)  $u \in \omega \implies \exists N_u(\omega)$  tel que  $uj \in \omega, j \geq 1 \iff 1 \leq j \leq N_u(\omega)$ .

*On notera plutôt  $N$  au lieu de  $N_\emptyset$ . On notera également  $\Omega$  l'ensemble des arbres muni de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par les  $\Omega_u$  pour  $u \in U$ , où  $\Omega_u = \{\omega \in \Omega : u \in \omega\}$ .*

Remarquons que la v.a.  $N_u$  peut être interprété comme le nombre d'enfants de  $u$  dans l'arbre. Notons également que les  $N_u$  sont des v.a. définies sur  $\Omega_u$  mesurables par rapport à  $\mathcal{F}$  (si on les prolonge par une valeur arbitraire, par exemple 0 en dehors de  $\Omega_u$ ). Remarquons qu'un arbre peut être fini ou infini. Une représentation graphique d'un arbre avec la notation précédente est donnée en figure 1. On rappelle la terminologie habituelle des arbres : l'ancêtre est également appelé *racine de l'arbre*, chaque  $u \in \omega$  est appelé *sommet* ou *nœud*, chaque  $u \in \omega$  tel que  $N_u = 0$  est appelé *feuille de l'arbre*, chaque nœud qui n'est pas une feuille est appelé *nœud interne* et enfin chaque paire  $(u, v) \in \omega^2$  telle que  $v = ui$  pour un certain  $i \in \mathbb{N}^*$  est appelée *arête* ou *branche*.

Pour tout entier  $n$ , la  $n$ -ième génération est définie par

$$z_n(\omega) = \{u \in \omega : |u| = n\}$$

et sa taille est

$$Z_n(\omega) = \text{Card } z_n(\omega).$$

En particulier, on a  $Z_1 = N$ .

On peut également munir l'espace des arbres  $\Omega$  d'une filtration  $\mathcal{F}_n$  engendrée par les  $z_m$  pour  $0 \leq m \leq n$ . C'est la tribu de toutes les informations

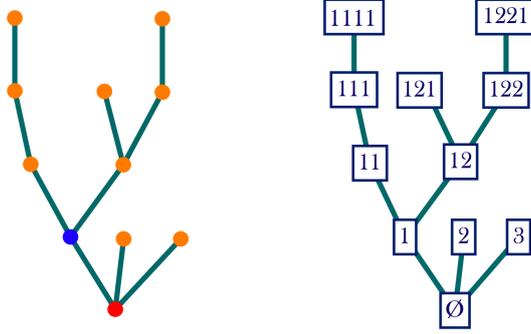


FIGURE 1 – Un arbre de hauteur 4 et la notation de Ulam-Harris-Neveu de ses nœuds. Le nœud rouge représente l’ancêtre et on adopte la convention que les individus d’une même génération sont numérotés de gauche à droite. Le nœud bleu est donc le premier enfant de l’ancêtre (l’individu noté 1).

disponibles à la génération  $n$  et avant. L’espace  $\Omega$  peut également être muni des translations

$$T_u : \Omega \rightarrow \Omega$$

$$\omega \mapsto T_u(\omega) = \{v \in U : uv \in \omega\}.$$

Ainsi, pour tout  $n$  et  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$Z_{n+k} = \sum_{u \in z_n} Z_k \circ T_u. \quad (4)$$

**Théorème 2.7 (Arbre de Galton-Watson)** *Étant donnée une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{N}$ , il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$  (notée  $\mathbb{P}$  quand il n’y a pas d’ambiguïté sur  $\mathbf{p}$ ) sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que*

- (i)  $N$  a pour loi  $\mathbf{p}$ ,
- (ii) conditionnellement à  $\{N = j\}$ , les v.a.  $T_1, T_2, \dots, T_j$  sont i.i.d. de loi  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ .

**Démonstration** Soit  $n \geq 1$ . Si la mesure de probabilités  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$  existe, alors sa restriction  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  à  $\mathcal{F}_n$  satisfait que, pour tout  $j \geq 0$  et pour tout  $A_1, \dots, A_j \in \mathcal{F}_{n-1}$ ,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n(T_1 \in A_1, \dots, T_j \in A_j \mid N = j) = \prod_{i=1}^j \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^{n-1}(A_i).$$

Nous allons démontrer par récurrence sur  $n \geq 1$  qu’il existe une unique telle mesure de probabilité  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  sur  $\mathcal{F}_n$  telle que  $N$  a pour loi  $\mathbf{p}$ . C’est évidemment vrai pour  $n = 1$  puisque  $\mathcal{F}_1 = \sigma(z_1) = \sigma(N)$ . Supposons que c’est vrai pour  $n \geq 1$ . Alors on a nécessairement

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^{n+1}(N = j, T_1 \in A_1, \dots, T_j \in A_j) = p_j \prod_{i=1}^j \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n(A_i),$$

ce qui caractérise  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^{n+1}$  sur la tribu  $\mathcal{G}$  engendrée par les événements de la forme  $\{N = j, T_1 \in A_1, \dots, T_j \in A_j\}$  avec  $A_1, \dots, A_j \in \mathcal{F}_n$ . Puisque  $\{N = j\} = \{z_1 = (1, 2, \dots, j)\}$  et, par définition de  $\mathcal{F}_n$ ,  $A_i = \{z_0 \cup z_1 \cup \dots \cup z_n \in B_j\}$  pour un certain  $B_j \subset U$ , la tribu  $\mathcal{G}$  est engendrée par les événements de la forme

$$\{z_1 = (1, \dots, j), z_0 \circ T_1 \cup \dots \cup z_n \circ T_1 \in B_1, \dots, z_0 \circ T_j \cup \dots \cup z_n \circ T_j \in B_j\}. \quad (5)$$

Il est alors clair que  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_{n+1}$ . Pour l'inclusion inverse, il suffit d'observer qu'un événement de  $\mathcal{F}_{n+1}$ , c'est-à-dire un événement de la forme

$$\{z_1 = (1, \dots, j), z_2 \cup \dots \cup z_{n+1} \in B\},$$

peut toujours être réécrit sous la forme (5) en découpant convenablement  $B$  en  $B_1 \cup \dots \cup B_j$ .

On a donc démontré qu'il existe pour tout  $n \geq 1$  une unique probabilité  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n$  sur  $\mathcal{F}_n$  satisfaisant les propriétés souhaitées. Ceci donne directement l'unicité dans le théorème. 2.7, et l'existence du prolongement  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$  à  $\mathcal{F}$  de la famille de probabilités  $(\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^n, n \geq 1)$  découle directement du théorème de Daniell-Kolmogorov (rappelé en début de section 2.7) puisque ces probabilités sont clairement compatibles.  $\square$

Le corollaire suivant donne une première conséquence (évidente par récurrence) de ce théorème.

**Corollaire 2.8** *Pour tout  $n \geq 0$ , conditionnellement à  $\mathcal{F}_n$ , les v.a.  $\{T_u, u \in z_n\}$  sont i.i.d. de loi  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ . Autrement dit, pour toutes fonctions mesurables positives  $f_u, u \in U$ ,*

$$\mathbb{E}_{\mathbf{p}} \left( \prod_{u \in z_n} f_u \circ T_u \mid \mathcal{F}_n \right) = \prod_{u \in z_n} \mathbb{E}_{\mathbf{p}}(f_u). \quad (6)$$

En particulier, pour tout  $s \in [0, 1[$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{p}}(s^{z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{\mathbf{p}} \left( \prod_{u \in z_n} s^{Z_1 \circ T_u} \mid \mathcal{F}_n \right) = \mathbb{E}_{\mathbf{p}}(s^N)^{Z_n} = G(s)^{Z_n}.$$

Puisque la fonction caractéristique caractérise la loi d'une v.a., on en déduit que la loi de  $Z_{n+1}$  sachant  $\mathcal{F}_n$  ne dépend que de  $Z_n$ . C'est exactement la définition d'une chaîne de Markov. De plus, la relation précédente, qui caractérise la matrice de transition de la chaîne de Markov, est également satisfaite par le processus de Galton-Watson des sections précédentes. On en déduit que

**Proposition 2.9** *La loi du processus  $(Z_n, n \geq 0)$  sur  $\Omega$  sous  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$  est la même que la loi du processus de Galton-Watson  $(Z_n, n \geq 0)$  défini par (1) avec  $Z_0 = 1$ .*

Pour conclure cette section, nous déduisons du corollaire 2.8 la *propriété de branchement*, qui est d'une grande importance dans l'étude des processus de Galton-Watson.

**Proposition 2.10 (Propriété de branchement)** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé. Le processus de Galton-Watson  $(Z_n, n \geq 0)$  défini par (1), associé à la mesure  $\mathbf{p}$  et avec  $Z_0 = k$  a même loi que le processus

$$(Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + \dots + Z_n^{(k)}, n \geq 0),$$

où  $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(k)}$  sont des processus de Galton-Watson i.i.d. associés à la même mesure  $\mathbf{p}$  et issus de  $Z_0^{(1)} = \dots = Z_0^{(k)} = 1$ .

**Démonstration** Pour  $n \geq 0$  fixé, on note  $Z^n$  le processus  $(Z_{n+k}, k \geq 0)$ . Remarquons que, d'après (4), les processus  $Z^n$  est égal au processus

$$\left( \sum_{u \in z_n} Z_k \circ T_u, k \geq 0 \right).$$

Or, d'après le corollaire 2.8, conditionnellement à  $z_n$ , les processus  $(Z_k \circ T_u, k \geq 0)$  pour  $u \in z_n$  des processus de Galton-Watson issus d'un seul ancêtre i.i.d. En particulier, pour tout sous-ensemble  $z$  de  $U$  formés de  $k$  suites de longueur  $n$ , le processus  $Z^n$  sachant  $z_n = z$  a même loi que  $Z^{(1)} + \dots + Z^{(k)}$ . En sommant sur tous les  $z$  possibles, on en déduit la propriété de branchement.  $\square$

On déduit directement de la propriété de branchement précédente et du théorème 2.5 le

**Corollaire 2.11** Lorsque  $Z_n$  est défini par (1) avec  $Z_0 = k$ , la fonction génératrice de  $Z_n$  est donnée par

$$\mathbb{E}(s^{Z_n} \mid Z_0 = k) = G^{\circ n}(s)^k, \quad \forall s \in [-1, 1].$$

En particulier,  $\mathbb{E}(Z_n \mid Z_0 = k) = m^n k$ .

## 2.4 Probabilité d'extinction

On note l'événement d'extinction de la population

$$\text{Ext} = \{Z_n \rightarrow 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{Z_k = 0\}$$

Puisque  $Z_n = 0 \implies Z_{n+k} = 0, \forall k \geq 0$ , on a

$$\text{Ext} = \{\exists n \geq 1 : Z_n = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$$

et

$$\mathbb{P}(\text{Ext}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0).$$

En particulier, ceci montre que la limite de droite existe.

**Théorème 2.12** *La probabilité d'extinction  $\mathbb{P}(\text{Ext})$  est la plus petite racine positive ou nulle de  $G(s) = s$ . Si  $m \in [0, 1]$  et  $p_1 \neq 1$ , alors  $\mathbb{P}(\text{Ext}) = 1$ . Si  $m \in ]1, +\infty]$ , alors  $\mathbb{P}(\text{Ext}) < 1$ , et il n'y a pas d'autre solution de  $G(s) = s$  dans  $[0, 1[$ .*

**Démonstration** Rappelons que l'on a exclu le cas trivial  $p_1 = 1$  et que  $G(1) = 1$ . Puisque  $G^{on}(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$  converge en croissant vers  $\mathbb{P}(\text{Ext})$  et que  $G$  est continue sur  $[0, 1]$ , on a

$$G(\mathbb{P}(\text{Ext})) \leftarrow G \circ G^{on}(0) = G^{o(n+1)}(0) \rightarrow \mathbb{P}(\text{Ext}),$$

et donc  $\mathbb{P}(\text{Ext}) = G(\mathbb{P}(\text{Ext}))$ .

Soit  $a \in [0, 1]$  tel que  $G(a) = a$ . Puisque  $G$  est croissante, on a alors par récurrence que  $G^{on}(a) \leq a$ . On en déduit que  $\mathbb{P}(\text{Ext})$  est la plus petite racine de  $G(a) = a$  dans  $[0, 1]$ .

Si  $m \leq 1$  et  $p_1 \neq 1$ , alors pour tout  $s < 1$ ,

$$(G(s) - s)' = G'(s) - 1 < G'(1) - 1 = m - 1 \leq 0.$$

Donc  $G(s) - s$  est strictement décroissante. Puisque  $G(1) = 1$ , on en déduit que  $G(s) > s$  pour tout  $s \in [0, 1[$ , et on a donc démontré que 1 est le seul point fixe de  $G$  sur  $[0, 1]$ , et  $\mathbb{P}(\text{Ext}) = 1$ .

Supposons maintenant  $m > 1$ . Puisque  $G'(1) = m$ , on a alors  $G(s) < s$  pour  $s < 1$  dans un voisinage de 1. Mais puisque  $G$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $G(0) \geq 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe  $q \in [0, 1[$  tel que  $G(q) = q$ .

Supposons maintenant qu'il y en a deux :  $0 \leq q_1 < q_2 < 1$  tels que  $G(q_1) = q_1$  et  $G(q_2) = q_2$ . La fonction  $G(s) - s$  a alors trois zéros en  $q_1, q_2$  et 1. Or, puisque  $p_1 < 1$ , cette fonction est strictement convexe, donc ce n'est pas possible.  $\square$

Remarquons au passage que, lorsque  $m > 1$ , puisque  $G(s) - s$  est strictement convexe et change de signe, son minimum est atteint en un point de  $] \mathbb{P}(\text{Ext}), 1[$ , et donc  $G'(\mathbb{P}(\text{Ext})) - 1 < 0$ .

Au vu du théorème précédent, il est naturel de distinguer entre les cas  $m > 1$  et  $m \leq 1$ . Lorsque  $m = 1$ , on observe que  $Z_n \rightarrow 0$  p.s. mais, d'après le théorème 2.5, sa variance tend vers l'infini. Ce cas est donc également assez particulier et justifie que l'on distingue en fait 3 cas. On dira que le processus de Galton-Watson est

- (i) **sur-critique** lorsque  $m > 1$ ,
- (ii) **critique** lorsque  $m = 1$ ,
- (iii) **sous-critique** lorsque  $m < 1$ .

**Exercice 5** *Montrer que  $\mathbb{P}(\text{Ext}) = 0$  si et seulement si  $p_0 = 0$ .*

**Proposition 2.13** *La chaîne de Markov  $(Z_n, n \geq 0)$  admet 0 pour état absorbant et tout  $k \in \mathbb{N}^*$  est transient. Presque sûrement (p.s.) sur  $\text{Ext}^c$ ,  $Z_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

**Démonstration** Le fait que 0 est absorbant est évident par définition (1) de  $Z_n$ . Rappelons qu'on dit qu'un état d'un chaîne de Markov est transient lorsque cet état n'est visité p.s. qu'un nombre fini de fois par la chaîne de Markov. Remarquons également qu'il n'y a rien à prouver si  $\mathbb{P}(\text{Ext}) = 1$ . On peut donc supposer  $m > 1$ , c'est-à-dire que  $G'(\mathbb{P}(\text{Ext})) < 1$ .

En utilisant que  $G(\mathbb{P}(\text{Ext})) = \mathbb{P}(\text{Ext})$ , on démontre par récurrence que

$$G'_n(\mathbb{P}(\text{Ext})) = (G'(\mathbb{P}(\text{Ext})))^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Supposons d'abord que  $\mathbb{P}(\text{Ext}) > 0$ , c'est-à-dire que  $p_0 > 0$  (cf. exercice 5). Alors, pour tout  $k, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq k) &= \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Z_n = j) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Z_n = j) \frac{\mathbb{P}(\text{Ext})^{j-1} j}{\mathbb{P}(\text{Ext})^k} \leq \frac{G'_n(\mathbb{P}(\text{Ext}))}{\mathbb{P}(\text{Ext})^k} = \frac{(G'(\mathbb{P}(\text{Ext})))^n}{\mathbb{P}(\text{Ext})^k}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq k) < \infty,$$

et le lemme de Borel-Cantelli montre que  $(Z_n, n \geq 0)$  visite l'intervalle  $[1, k]$  p.s. un nombre fini de fois.

Dans le cas où  $p_0 = 0$ , la suite  $(Z_n, n \geq 0)$  est croissante, et puisque  $p_1 < 1$ , elle a une probabilité positive de croître strictement à chaque pas de temps. Il est alors clair que le temps d'atteinte de tout niveau est fini p.s., c'est-à-dire que  $Z_n \rightarrow \infty$  p.s.  $\square$

**Exercice 6 (Processus dual)** *On suppose que  $m > 1$  et on note  $q = \mathbb{P}(\text{Ext})$ . Montrer que, sur l'événement  $\text{Ext}$ ,  $(Z_n, n \geq 0)$  a même loi qu'un Galton-Watson sous-critique  $(Z_n^*, n \geq 0)$  de loi de reproduction  $p_k^* = q^{k-1} p_k$  de fonction génératrice*

$$G^*(s) = q^{-1} G(qs), \quad \forall s \in [-q^{-1}, q^{-1}].$$

*Le processus  $Z^*$  est appelé processus dual de  $Z$ .*

**Exercice 7 (Lignées infinies)** *Énoncer et démontrer un résultat similaire pour le sous-arbre des lignées infinies conditionnellement à  $\text{Ext}^c$ . On définit l'arbre des lignées infinies comme le sous-arbre de l'arbre de Galton-Watson formé des individus dont la descendance ne s'éteint jamais.*

**Exercice 8 (Modèle binaire généralisé)** On suppose que  $p_k = 0$  pour tout  $k \geq 3$ . Dans quel cas le processus de Galton-Watson est-il sur-critique. Quelle est alors la probabilité d'extinction et le processus dual ?

**Exercice 9 (Modèle de Poisson)** Mêmes question que dans l'exercice précédent lorsque  $\mathbf{p}$  est une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , c'est-à-dire  $p_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ .

**Exercice 10 (Modèle linéaire-fractionnaire)** Mêmes question que dans l'exercice précédent lorsque  $p_0 = b$  et  $p_k = (1-b)(1-a)a^{k-1}$  pour  $k \geq 1$ , avec  $a, b \in ]0, 1[$ .

## 2.5 Comportement asymptotique du processus de Galton-Watson

On suppose que  $m < \infty$ . On définit

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n}, \quad \forall n \geq 0.$$

On rappelle qu'un processus  $(X_n, n \geq 0)$  est une martingale par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$  si  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$  pour tout  $n \geq 0$  et

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n, \quad \forall n \geq 0, \text{ p.s.} \quad (7)$$

**Proposition 2.14** *Le processus  $(W_n, n \geq 0)$  est une martingale par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_n$  de la section 2.3. Elle converge p.s. vers une v.a.  $W$  à valeurs dans  $[0, +\infty[$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Dans le cas particulier où  $m \leq 1$  la v.a.  $W$  est p.s. nulle.*

**Démonstration** La v.a.  $Z_n$  est clairement  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et on a déjà démontré dans le théorème 2.5 que  $\mathbb{E}(Z_n) = m^n < \infty$ . Puisque les  $T_u$  pour  $u \in z_n$  sont indépendants conditionnellement à  $\mathcal{F}_n$  (corollaire 2.8), la propriété (7) découle directement de la relation

$$Z_{n+1} = \sum_{u \in z_n} Z_1 \circ T_u,$$

qui est un cas particulier de (4). En effet,

$$\mathbb{E}(W_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{m^{n+1}} \mathbb{E} \left( \sum_{u \in z_n} Z_1 \circ T_u \middle| \mathcal{F}_n \right) = \frac{1}{m^{n+1}} Z_n \mathbb{E}(Z_1) = W_n.$$

On utilise ensuite la propriété générale que toute martingale positive converge presque sûrement lorsque  $n \rightarrow +\infty$  vers une v.a. finie p.s.

Le fait que  $W = 0$  p.s. si  $m \leq 1$  découle du fait que  $1 = \mathbb{P}(\text{Ext}) = \mathbb{P}(\exists n \geq 0 : Z_n = 0) = \mathbb{P}(\exists n \geq 0 : W_n = 0)$  et que  $W_{n+k} = 0$  pour tout  $k \geq 0$  si  $W_n = 0$ .  $\square$

On peut retrouver ce résultat de façon élémentaire (sans utiliser de théorème général sur les martingales) dans un cas particulier, qui sera inclut dans un résultat plus général plus loin.

**Théorème 2.15** *On suppose que  $Z_0 = 1$ ,  $m > 1$  et la variance de reproduction  $\sigma^2$  est finie. Alors  $W_n$  converge p.s. et dans  $L^2(\Omega)$  vers une v.a.  $W \geq 0$  telle que*

$$\mathbb{E}(W) = 1 \quad \text{et} \quad \text{Var}(W) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}.$$

De plus,  $\{W = 0\} = \text{Ext}$  p.s.

Afin de prouver ce résultat, on commence par établir une loi du 0-1 pour les processus de Galton-Watson. Nous utilisons les notations de la section 2.3. On rappelle que  $T_u$  est le sous-arbre issu de  $u$ .

**Définition 2.16** *On dit qu'une propriété d'un arbre est **héritée** quand, lorsqu'un arbre possède cette propriété, les arbres  $T_1, T_2, \dots, T_{Z_1}$  la possèdent aussi, et si tout arbre fini la possède.*

**Proposition 2.17** *Conditionnellement à  $\text{Ext}^c$ , toute propriété héritée est de probabilité 0 ou 1. Autrement dit, la probabilité d'une propriété héritée vaut soit  $\mathbb{P}(\text{Ext})$  soit 1.*

**Démonstration** Soit  $E$  l'ensemble des arbres possédant une certaine propriété héritée. Puisque  $\omega \in E$  implique que  $T_1(\omega), \dots, T_{Z_1}(\omega) \in E$ , par la propriété de branchement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &\leq \mathbb{P}(T_1(\omega), \dots, T_{Z_1}(\omega) \in E) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(T_1(\omega), \dots, T_k(\omega) \in E) \mathbb{P}(Z_1 = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(E)^k p_k = G(\mathbb{P}(E)). \end{aligned}$$

Puisque tout arbre fini appartient à  $E$ , on a  $\mathbb{P}(E) \geq \mathbb{P}(\text{Ext})$ , et d'après le théorème 2.12, on a nécessairement  $\mathbb{P}(E) \in \{\mathbb{P}(\text{Ext}), 1\}$ .  $\square$

Puisque, d'après (4),

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} = \sum_{u \in \mathcal{Z}_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n \circ T_u}{m^{n+1}} = \sum_{u \in \mathcal{Z}_1} W \circ T_u,$$

$\{W = 0\}$  est clairement une propriété héritée et on a la

**Proposition 2.18**  $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(\text{Ext})$  ou 1, c'est-à-dire  $W = 0$  p.s. ou bien  $\{W > 0\} = \text{Ext}^c = \{Z_n \rightarrow \infty\}$ .

On démontre ensuite le

**Lemme 2.19** (i) Pour tout  $n, k \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(W_{n+k}W_n) = \mathbb{E}(W_n^2)$ .

(ii) Pour tout  $n, k \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[(W_{n+k} - W_n)^2] \leq \frac{\sigma^2 m^{-n}}{m^2 - m}$ .

**Exercice 11** Démontrer le point (i) en utilisant soit le fait que  $(W_n, n \geq 0)$  est une martingale, soit en conditionnant par rapport aux valeurs de  $Z_n$  et en utilisant la propriété de Markov.

**Démonstration** On prouve le point (ii). En utilisant (i) puis le théorème 2.5,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_{n+k} - W_n)^2] &= \mathbb{E}(W_{n+k}^2) - 2\mathbb{E}(W_{n+k}W_n) + \mathbb{E}(W_n^2) = \mathbb{E}(W_{n+k}^2) - \mathbb{E}(W_n^2) \\ &\leq \mathbb{E}(W_{n+k}^2) - \mathbb{E}(W_n^2) = \frac{\sigma^2 m^{-n}}{m^2 - m}. \quad \square \end{aligned}$$

**Démonstration du théorème 2.15** Le lemme 2.19 montre que  $(W_n, n \geq 0)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Elle converge donc dans  $L^2(\Omega)$  vers une v.a.  $W$ , et  $W_n^2$  converge dans  $L^1(\Omega)$  vers  $W^2$ . En utilisant le théorème 2.5, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(W_n) = 1, \\ \mathbb{E}(W^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(W_n^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \sigma^2 m^{-n} \frac{1 - m^{-n}}{m^2 - m} \right) = 1 + \frac{\sigma^2}{m^2 - m}. \end{aligned}$$

Démontrons maintenant que la convergence de  $W_n$  vers  $W$  a lieu p.s. Pour cela, nous allons utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour la suite d'événements  $A_n = \{|W_n - W| > \varepsilon\}$  pour un  $\varepsilon > 0$  fixé. En faisant tendre  $k$  vers l'infini dans le lemme 2.19 (ii), on a

$$\mathbb{E}[(W - W_n)^2] \leq \frac{\sigma^2}{m^2 - m} m^{-n}.$$

Donc, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}[|W - W_n| > \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2(m^2 - m)} m^{-n},$$

et, puisque  $m > 1$ , la série de terme général  $\mathbb{P}(|W - W_n| > \varepsilon)$  est convergente. Le lemme de Borel-Cantelli nous assure alors que, p.s., seulement un nombre finin d'événements  $A_n$  se produisent. En d'autres termes, il existe un entier  $n(\omega)$  (aléatoire) tel que  $|W_n - W| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq n(\omega)$ . Comme cette propriété est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a démontré que  $W_n \rightarrow W$  p.s.

Pour terminer, démontrons que  $\{W = 0\} = \text{Ext}$  p.s., ou autrement dit que  $\mathbb{P}(\{W = 0\}) = \mathbb{P}(\text{Ext})$ , puisqu'on a l'inclusion évidente  $\text{Ext} \subset \{W = 0\}$ . Or, il est impossible que  $\mathbb{P}(W = 0) = 1$  puisque  $\mathbb{E}(W) = 1$ , donc le résultat découle directement de la proposition 2.18.  $\square$

**Exercice 12** *En utilisant la propriété de branchement, formulez et démontrer une version du théorème 2.15 lorsque  $Z_0 = k \geq 1$ .*

## 2.6 Processus de Galton-Watson avec immigration

Nous faisons ici un bref aparté sur les processus de Galton-Watson avec immigration, afin d'énoncer deux résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Si l'on suppose qu'en plus du mécanisme de reproduction dans le processus de branchement, des individus (immigrants) peuvent arriver à chaque pas de temps de façon i.i.d., on obtient un processus de Galton-Watson avec immigration. Plus précisément, si l'on se donne une seconde mesure de probabilité  $\mathbf{q}$  sur  $\mathbb{N}$ , et que l'on considère une suite i.i.d.  $(\zeta_k, k \geq 0)$  de loi  $\mathbf{q}$ , on construit le processus de Galton-Watson  $(Z_n^I, n \geq 0)$  avec loi de reproduction  $\mathbf{p}$  et loi d'immigration  $\mathbf{q}$  comme suit (l'exposant  $I$  est pour "immigration") :  $Z_0^I = 0$  et

$$Z_{n+1}^I = \zeta_n + \sum_{i=1}^{Z_n^I} \xi_{n,i}, \quad \forall n \geq 0.$$

Remarquons que chaque migrant arrivé à une certaine date  $n$  se reproduit ensuite comme un processus de Galton-Watson standard.

On voit facilement comme précédemment que  $(Z_n^I, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov et que, si  $H_n(s)$  est la fonction caractéristique de  $Z_n^I$ , on a pour tout  $n \geq 0$ ,

$$H_{n+1}(s) = H(s)H_n \circ G(s), \quad \forall s \in [-1, 1],$$

où  $H(s)$  est la fonction génératrice de  $\mathbf{q}$ , c'est-à-dire  $H(s) = H_1(s)$ . On déduit alors facilement par récurrence que

$$H_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} H \circ G^{\circ k}(s), \quad \forall s \in [-1, 1],$$

avec la convention que  $G^{\circ 0}(s) = s$ .

Le but de cette section est de démontrer les deux résultats suivants.

**Théorème 2.20 (Heathcote, 1966)** *Supposons que  $m < 1$ . Alors on a la dichotomie suivante :*

$$\mathbb{E}(\log^+ \zeta) < \infty \implies (Z_n^I, n \geq 0) \text{ converge en loi,}$$

$$\mathbb{E}(\log^+ \zeta) = \infty \implies (Z_n^I, n \geq 0) \text{ converge en probabilité vers } +\infty,$$

où  $\log^+(x) = \log(x)$  si  $x \geq 1$  et  $\log^+(x) = 0$  si  $x < 1$ .

**Théorème 2.21 (Seneta, 1970)** *Supposons que  $m > 1$ . Alors on a la dichotomie suivante :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\log^+ \zeta) < \infty &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} Z_n^I \text{ existe et est finie p.s.}, \\ \mathbb{E}(\log^+ \zeta) = \infty &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} c^{-n} Z_n^I = +\infty \text{ pour tout } c > 0 \text{ p.s.} \end{aligned}$$

**Exercice 13** 1. *Soit  $X$  une v.a. réelle positive (on ne suppose pas nécessairement que  $\mathbb{E}(X) < \infty$ ). Montrer que, pour tout  $a > 0$ ,*

$$a \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq ka) \leq \mathbb{E}(X) \leq a \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X \geq ka).$$

2. *En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, si  $X, X_1, X_2, \dots$  sont des v.a. positives i.i.d., alors p.s.*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbb{E}(X) < \infty, \\ +\infty, & \text{si } \mathbb{E}(X) = \infty. \end{cases}$$

**Exercice 14** *Déduire de l'exercice 13 que, si  $X, X_1, X_2, \dots$  sont des v.a. positives i.i.d., alors*

$$\begin{aligned} \text{si } \mathbb{E}(X) < \infty, \text{ alors } \sum_{n \geq 1} e^{X_n} c^n < \infty \text{ pour tout } c \in ]0, 1[, \\ \text{si } \mathbb{E}(X) = \infty, \text{ alors } \sum_{n \geq 1} e^{X_n} c^n = \infty \text{ pour tout } c \in ]0, 1[, \end{aligned}$$

**Démonstration du théorème 2.20** Soit  $\mathcal{G}$  la tribu engendrée par les v.a.  $(\zeta_n, n \geq 0)$  (la tribu de l'immigration). Pour  $k \leq n$ , on note  $Z_{n,k}$  le nombre de descendants à la génération  $n$  des particules immigrantes de la génération  $k$ . On a alors la relation

$$Z_n^I = \sum_{k=1}^n Z_{n,k}. \quad (8)$$

Remarquons que, pour tout  $k \geq 1$ , le processus  $(Z_{n,k}/m^{n-k}, n \geq k)$  est un Galton-Watson (sans immigration) issu de  $\zeta_{k-1}$  individus lorsque  $n = k$ . Donc, la loi de  $Z_{n,k}$  ne dépend que de  $n - k$ , et  $Z_n^I$  a même loi que

$$\sum_{k=1}^n Z_{2k-1,k}.$$

Or, cette somme est croissante en  $n$ , et donc converge vers une limite notée  $Z'_\infty$ . Puisque c'est une somme de v.a. indépendantes, par la loi du 0-1 de Kolmogorov, cette v.a. est soit p.s. finie, soit p.s. infinie. Ainsi, pour conclure la preuve, il suffit de démontrer que  $Z'_\infty < \infty$  si et seulement si  $\mathbb{E}[\log^+ \zeta] < \infty$ .

Supposons d'abord que  $\mathbb{E}(\log^+ \zeta) < \infty$ . En utilisant de nouveau que  $(Z_{n,k}/m^{n-k}, n \geq k)$  est un Galton-Watson issu de  $\zeta_{k-1}$ , on a

$$\mathbb{E}[Z'_\infty | \mathcal{G}] = \sum_{k \geq 0} \zeta_k m^k.$$

D'après l'exercice 14, cette somme converge p.s. et donc  $Z'_\infty < \infty$  p.s.

Supposons maintenant que  $Z'_\infty < \infty$  p.s. Par la propriété de branchement,

$$Z_{2k-1,k} = \sum_{i=1}^{\zeta_{k-1}} Z_{k-1}^{(i,k)},$$

où les  $Z^{(i,k)}$  sont des processus de Galton-Watson i.i.d. issus d'un seul ancêtre. On peut donc écrire

$$Z'_\infty = \sum_{k \geq 1} \sum_{i=1}^{\zeta_{k-1}} Z_{k-1}^{(i,k)}$$

comme une somme aléatoire de v.a. indépendantes à valeurs entières. Seul un nombre fini d'entre elles sont non nulles, puisque  $Z'_\infty < \infty$ . Sachant  $\mathcal{G}$ , on peut donc appliquer le lemme de Borel-Cantelli (plus précisément sa réciproque pour des événements indépendants) pour en déduire que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{k-1} \mathbb{P}(Z_{k-1} > 0) < \infty \quad \text{p.s.},$$

où  $(Z_n, n \geq 0)$  est un Galton-Watson standard issu d'un seul ancêtre. Or, pour avoir  $Z_{k-1} > 0$ , il faut nécessairement qu'au moins  $k-1$  parmi les v.a.  $\xi_{k,n}$  utilisées pour construire le Galton-Watson jusqu'au temps  $k-1$  soient non nulles. Donc  $\mathbb{P}(Z_{k-1} > 0) \geq \mathbb{P}(\xi > 0)^{k-1}$ , et on déduit de l'exercice 14 que  $\mathbb{E}(\log^+ \zeta) < \infty$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 2.21** Supposons d'abord que  $\mathbb{E}(\log^+ \zeta) = \infty$ . D'après l'exercice 14,  $\limsup \zeta_n/c^n = \infty$  p.s. Puisque  $Z_n^I \geq \zeta_n$ , on en déduit directement le résultat.

Supposons maintenant que  $\mathbb{E}(\log^+ \zeta) < \infty$ . On utilise les mêmes notations  $\mathcal{G}$  et  $Z_{n,k}$  que dans la preuve précédente. On déduit de (8) que

$$\mathbb{E}[Z_n^I/m^n | \mathcal{G}] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m^n} \sum_{k=1}^n Z_{n,k} \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{m^k} \mathbb{E} \left[ \frac{Z_{n,k}}{m^{n-k}} \middle| \mathcal{G} \right].$$

Or, pour tout  $k \geq 1$ , le processus  $(Z_{n,k}/m^{n-k}, n \geq k)$  est un Galton-Watson (sans immigration) issu de  $\zeta_{k-1}$  individus lorsque  $n = k$ . Donc

$$\mathbb{E}[Z_n^I/m^n | \mathcal{G}] = \sum_{k=1}^n \frac{\zeta_{k-1}}{m^k}.$$

D'après l'exercice 14, cette suite converge p.s., et donc, par Fatou,  $\liminf Z_n^I/m^n < \infty$  p.s. Enfin, puisque, sachant  $\mathcal{G}$ ,  $Z_n^I/m^n$  est une sous-martingale d'espérance p.s. bornée, elle converge p.s.  $\square$

## 2.7 L'arbre biaisé

Par le théorème de Daniell-Kolmogorov, toute famille de probabilités  $\mathbb{Q}_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ , où  $\mathcal{F}_n$  est une filtration, compatible au sens où, pour tout  $m > n$ , la restriction de  $\mathbb{Q}_m$  à  $\mathcal{F}_n$  coïncide avec  $\mathbb{Q}_n$ , induit une unique probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  qui prolonge les  $\mathbb{Q}_n$ , où  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$  est la tribu engendrée par les  $\mathcal{F}_n$ .

En considérant  $\Omega$  l'espace des arbres et  $\mathcal{F}$  la tribu de la section 2.3 et la probabilité  $\mathbb{P}$  donnée par le théorème 2.7, on peut alors définir une probabilité  $\hat{\mathbb{P}}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que

$$\hat{\mathbb{P}} = \frac{Z_n}{m^n} \cdot \mathbb{P} = W_n \cdot \mathbb{P} \quad \text{sur } \mathcal{F}_n, \quad \forall n \geq 0.$$

En effet, les mesures  $\mathbb{Q}_n = W_n \cdot \mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_n$  sont compatibles grâce au fait que  $(W_n, n \geq 0)$  est une martingale : pour tout  $A \in \mathcal{F}_n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{n+1}(A) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A W_{n+1}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbb{1}_A W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)] \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A W_n) = \mathbb{Q}_n(A). \end{aligned}$$

On appellera **arbre biaisé** l'arbre sous  $\hat{\mathbb{P}}$ .

Notons  $T_{\text{ext}}$  le temps d'extinction du processus de Galton-Watson, c'est-à-dire le premier entier  $n$  tel que  $Z_n = 0$ . Remarquons que

$$\hat{\mathbb{P}}(T_{\text{ext}} > n) = \hat{\mathbb{P}}(Z_n \neq 0) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{Z_n \neq 0} \frac{Z_n}{m^n} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \frac{Z_n}{m^n} d\mathbb{P} = \mathbb{E}(W_n) = 1.$$

On en déduit que  $\hat{\mathbb{P}}(T_{\text{ext}} = \infty) = 1$ , et on voit en particulier que, si  $m \leq 1$ ,  $\mathbb{P}$  et  $\hat{\mathbb{P}}$  sont étrangères. Plus précisément,

**Proposition 2.22** *Si  $m \leq 1$ , pour tout  $A \in \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$ ,*

$$\hat{\mathbb{P}}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A \mid Z_n \neq 0).$$

Ainsi, l'arbre biaisé est obtenu en conditionnant un arbre critique ou sous-critique à survivre indéfiniment.

**Démonstration** Soit  $A \in \mathcal{F}_k$ . Pour tout  $n \geq 0$ , en conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_k$  à l'intérieur de l'espérance et en utilisant ensuite la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \mid Z_{n+k} \neq 0) &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{P}(Z_{n+k} \neq 0 \mid \mathcal{F}_k)]}{\mathbb{P}(Z_{n+k} \neq 0)} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{P}(Z_{n+k} \neq 0 \mid Z_k)]}{\mathbb{P}(Z_{n+k} \neq 0)}. \end{aligned}$$

Or, par la propriété de branchement, pour tout  $i \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(Z_{n+k} \neq 0 \mid Z_k = i) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0 \mid Z_0 = i) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0 \mid Z_0 = 1)^i$ . On en déduit donc

$$\mathbb{P}(A \mid Z_{n+k} \neq 0) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_A \frac{1 - G^{\circ n}(0)^{Z_k}}{1 - G^{\circ(n+k)}(0)} \right].$$

Le résultat découle du lemme suivant par convergence dominée.  $\square$

**Lemme 2.23** *Supposons  $m \leq 1$  et fixons  $k \geq 0$ . Alors, pour tout  $i \geq 1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - G^{\circ n}(0)^i}{1 - G^{\circ(n+k)}(0)} = im^{-k}, \quad (9)$$

où la convergence est dominée, au sens où

$$\sup_{i, n \geq 1} \frac{1}{i} \frac{1 - G^{\circ n}(0)^i}{1 - G^{\circ(n+k)}(0)} < \infty. \quad (10)$$

**Démonstration** Pour  $i \geq 1$  fixé, puisque  $1 - G^{\circ n}(0) = \mathbb{P}(Z_n \neq 0) \rightarrow 0$ ,

$$1 - G^{\circ n}(0)^i \sim i(1 - G^{\circ n}(0))$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Il suffit alors pour démontrer la convergence (9) de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - G^{\circ(n+1)}(0)}{1 - G^{\circ n}(0)} = m.$$

Ceci découle facilement des relations  $G^{\circ(n+1)}(0) = G(G^{\circ n}(0))$ ,  $G^{\circ n}(0) \rightarrow 1$  et  $G(x) = 1 + m(x - 1) + o(x - 1)$  lorsque  $x \rightarrow 1$ .

Il reste à montrer la borne uniforme (10). Puisque  $\frac{1 - G^{\circ n}(0)}{1 - G^{\circ(n+k)}(0)} \rightarrow m^{-k}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on voit qu'il suffit de démontrer que

$$\sup_{i, n \geq 1} \frac{1}{i} \frac{1 - G^{\circ n}(0)^i}{1 - G^{\circ n}(0)} < \infty.$$

En utilisant l'inégalité  $1 - e^{-z} \leq z$  pour tout  $z \geq 0$ , on obtient pour tout  $i \geq 1$

$$\frac{1 - e^{-iz}}{i(1 - e^{-z})} \leq \frac{z}{1 - e^{-z}} \wedge \frac{1}{i(1 - e^{-z})} \leq \frac{z \wedge 1}{1 - e^{-z}} \leq C < \infty, \quad \forall z > 0.$$

On conclut en posant  $z = -\log G^{\circ n}(0)$ .  $\square$

**Proposition 2.24** *Lorsque  $m \leq 1$ , pour tout  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  et pour tout  $k \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbb{P}}(Z_1 = k, T_1 \in A_1, \dots, T_k \in A_k) \\ &= \frac{kp_k}{m} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{j-1}) \widehat{\mathbb{P}}(A_j) \mathbb{P}(A_{j+1}) \dots \mathbb{P}(A_k). \end{aligned}$$

**Démonstration** Soit  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}_n$ . Par définition de  $\widehat{\mathbb{P}}$  (pour la première et la dernière égalité), puis par (4) (pour la seconde), puis le corollaire 2.8 (pour la quatrième), on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}}(Z_1 = k, T_1 \in A_1, \dots, T_k \in A_k) &= \mathbb{E}(W_{n+1} \mathbb{1}_{Z_1=k, T_1 \in A_1, \dots, T_k \in A_k}) \\
&= \frac{1}{m^{n+1}} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{Z_1=k} \sum_{i=1}^k Z_n \circ T_i \mathbb{1}_{T_i \in A_1, \dots, T_k \in A_k} \right) \\
&= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^k p_k \mathbb{E} [\mathbb{1}_{T_1 \in A_1} \dots (\mathbb{1}_{T_i \in A_i} Z_n \circ T_i) \dots \mathbb{1}_{T_k \in A_k} \mid Z_1 = k] \\
&= \frac{p_k}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{A_i}) \dots \mathbb{P}(A_k) \\
&= \frac{p_k}{m} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_1) \dots \widehat{\mathbb{P}}(A_i) \dots \mathbb{P}(A_k). \quad \square
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe  $\widehat{\mathbb{P}}$ -p.s. une v.a.  $J$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que  $J \leq Z_1$  et

$$T_{\text{ext}} \circ T_J = +\infty, \quad T_{\text{ext}} \circ T_i < +\infty, \quad \forall i \neq J, \quad 1 \leq i \leq Z_1$$

et pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}}(Z_1 = k, J = i, T_1 \in A_1, \dots, T_k \in A_k) \\
= \frac{k p_k}{m} \frac{1}{k} \mathbb{P}(A_1) \dots \mathbb{P}(A_{i-1}) \widehat{\mathbb{P}}(A_i) \mathbb{P}(A_{i+1}) \dots \mathbb{P}(A_k).
\end{aligned}$$

Autrement dit, pour l'arbre biaisé, la loi de reproduction  $\widehat{\xi}$  de l'ancêtre est biaisée par rapport à celle de  $\xi$ , plus précisément  $\mathbb{P}(\widehat{\xi} = k) = \frac{k p_k}{m} = \frac{k}{m} \mathbb{P}(\xi = k)$ . Puis un descendant  $J$  est choisi au hasard uniformément parmi la première génération et l'arbre  $T_J$  sera biaisé tandis que les  $T_j$ ,  $j \neq J$  sont des arbres de Galton-Watson ordinaires.

Il y a donc dans l'arbre biaisé une branche infinie, appelée *épine dorsale*, sur laquelle se "greffent" des arbres de Galton-Watson ordinaires.

**Remarque 2.25** Une remarque important pour la suite est que l'arbre biaisé peut être également vu comme un processus de Galton-Watson avec immigration lorsque l'on "retire" l'épine dorsale. En effet, sous  $\widehat{\mathbb{P}}$ , le processus  $(Z_n - 1, n \geq 0)$  est un processus de Galton-Watson avec immigration  $\zeta_n = \widehat{\xi}_n - 1$ , où  $\widehat{\xi}$  a pour loi  $\mathbb{P}(\widehat{\xi} = k) = \frac{k p_k}{m}$ .

## 2.8 Cas sur-critique : le théorème de Kesten-Stigum

L'objectif de cette section est de raffiner les résultats du théorème 2.15.

**Théorème 2.26 (Kesten, Stigum, 1966)** *Supposons  $m \in ]1, \infty[$  et  $Z_0 = 1$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(\text{Ext})$ ,
- (ii)  $\mathbb{E}(W) = 1$ ,
- (iii)  $W_n \rightarrow W$  dans  $L^1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,
- (iv)  $\mathbb{E}(\sup_n W_n) < \infty$ ,
- (v)  $\sum_{k=2}^{\infty} (k \log k) p_k < \infty$ , c'est-à-dire  $\mathbb{E}(\xi \log^+ \xi) < \infty$ .

**Démonstration** L'équivalence entre (ii) et (iii) est une propriété générale pour les v.a. positives (lemme de Scheffé). On a déjà démontré dans le théorème 2.15 que (ii) implique (i). L'implication (iv)  $\Rightarrow$  (iii) est une conséquence du théorème de convergence dominée.

Montrons (ii)  $\Rightarrow$  (iv). Soit  $a \in ]0, 1[$  et  $t \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(W \geq at) &\geq \mathbb{P}(W \geq at, \sup_n W_n \geq t) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(W \geq at, W_n \geq t, W_k < t \forall k < n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(W \geq at \mid Z_n \geq tm^n, W_k < t \forall k < n) \mathbb{P}(W_n \geq t, W_k < t \forall k < n) \\
 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \sum_{j=1}^{tm^n} \frac{W^{(j)}}{tm^n} > a \right] \mathbb{P}(W_n \geq t, W_k < t \forall k < n) \\
 &\geq b \mathbb{P}(\sup_n W_n > t),
 \end{aligned} \tag{11}$$

où les  $W^{(j)}$  sont des copies i.i.d. de  $W$  et

$$b = \inf_{n \geq 1} \mathbb{P} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{W^{(j)}}{n} > a \right]$$

Puisque, par la loi des grands nombres,  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W^{(j)} \rightarrow \mathbb{E}(W) = 1 > a$  p.s., alors il existe  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\mathbb{P}[\sum_{j=1}^n \frac{W^{(j)}}{n} > a] \geq 1/2$ . Puisque d'autre part on a clairement  $\mathbb{P}[\sum_{j=1}^n \frac{W^{(j)}}{n} > a] > 0$  pour tout  $n \geq 1$ , on en déduit que  $b > 0$ .

On déduit de (11) que

$$\mathbb{E}(\sup_n W_n) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\sup_n W_n > t) dt \leq 1 + \frac{1}{b} \int_1^{\infty} \mathbb{P}(W > at) dt \leq 1 + \frac{\mathbb{E}(W)}{ab} < \infty,$$

et on a donc démontré que (ii)  $\Rightarrow$  (iv).

La fin de la démonstration se déduit de l'étude de l'arbre biaisé. On remarque que (v)  $\Leftrightarrow \mathbb{E}(\log^+ \hat{\xi}) < \infty$ , où la v.a.  $\hat{\xi}$  de loi  $\mathbb{P}(\hat{\xi} = k) = \frac{k p_k}{m}$  a été introduite dans la section 2.7.

Nous avons besoin du lemme suivant, démontré à la fin de cette preuve.

**Lemme 2.27** *Supposons  $m < \infty$ . On définit pour tout arbre  $\omega \in \Omega$ ,  $W(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} W_n(\omega)$ . Remarquons que, p.s. sous  $\mathbb{P}$ , cette définition coïncide avec la définition de  $W$  comme limite de  $W_n$ , donc nous ferons l'abus d'utiliser la même notation pour les deux. Pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,*

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A W) + \widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{W = \infty\}).$$

On en déduit que, de deux choses l'une,

soit  $W = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s., ce qui est équivalent à  $W = \infty$   $\widehat{\mathbb{P}}$ -p.s.,

soit  $\mathbb{E}(W) = 1$ , ce qui est équivalent à  $W < \infty$   $\widehat{\mathbb{P}}$ -p.s.

Supposons (v). Alors  $\mathbb{E}(\log^+ \widehat{\xi}) < \infty$ , et sous  $\widehat{\mathbb{P}}$ ,  $Z_n - 1$  est un Galton-Watson avec immigration  $\widehat{\xi} - 1$  (cf. remarque 2.25). Par le théorème 2.21, on en déduit que  $W < \infty$   $\widehat{\mathbb{P}}$ -p.s. et donc que  $\mathbb{E}(W) = 1$ , c'est-à-dire (ii).

Inversement, si (v) est faux, par le même théorème,  $W = \infty$   $\widehat{\mathbb{P}}$ -p.s., donc  $\mathbb{P}(W = 0) = 1$  et (i) n'est pas vérifié.  $\square$

**Démonstration du lemme 2.27** On veut montrer que

$$\widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{W < \infty\}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A W).$$

Remarquons que  $W = \limsup W_n < \infty$  si et seulement si  $\sup W_n < \infty$ . Donc

$$\widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{W < \infty\}) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{\sup W_n \leq w\}). \quad (12)$$

Avec les notations de la section 2.3, pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $U_n = \{u \in U : |u| \leq n\}$  et

$$A_n = \{\omega \in \Omega : \exists \omega' \in A \text{ tel que } \omega \cap U_n = \omega' \cap U_n\}.$$

On a clairement que  $A \subset A_n$ , la suite  $(A_n, n \geq 1)$  est décroissante et  $\bigcap A_n = A$ . Donc, pour  $w > 0$  fixé, la suite des événements  $A_n \cap \{\sup_{1 \leq k \leq n} W_k \leq w\}$  décroît vers  $A \cap \{\sup_n W_n \leq w\}$ , et

$$\widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{\sup W_n \leq w\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{P}}\left(A_n \cap \left\{\sup_{1 \leq k \leq n} W_k \leq w\right\}\right).$$

Puisque  $A_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, par définition de  $\widehat{\mathbb{P}}$ ,

$$\widehat{\mathbb{P}}\left(A_n \cap \left\{\sup_{1 \leq k \leq n} W_k \leq w\right\}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{\sup_{1 \leq k \leq n} W_k \leq w} W_n\right).$$

Or, la v.a.  $\mathbb{1}_{\sup_{1 \leq k \leq n} W_k \leq w} W_n$  est uniformément majorée et converge  $\mathbb{P}$ -p.s. vers  $\mathbb{1}_{\sup_n W_n \leq w} W$ , donc, par convergence dominée,

$$\widehat{\mathbb{P}}(A \cap \{\sup W_n \leq w\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{P}}\left(A_n \cap \left\{\sup_{1 \leq k \leq n} W_k \leq w\right\}\right) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\sup_n W_n \leq w} W).$$

On conclut par convergence monotone et par (12)  $\square$

## 2.9 Cas sous-critique : le théorème de Yaglom

Lorsque  $m < 1$ , le processus s'éteint p.s. La question est de savoir à quelle vitesse et quel est son comportement avant l'extinction.

**Théorème 2.28 (Yaglom, 1947)** *Supposons  $0 < m < 1$  et  $Z_0 = 1$ . Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_n > 0) = Q(j), \quad \forall j \geq 1, \quad (13)$$

où  $Q$  est une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$ . On appelle  $Q$  la limite de Yaglom du processus de Galton-Watson.

Pour prouver ce résultat, nous démontrons d'abord le

**Lemme 2.29** *Supposons  $m < \infty$ . Soit  $\mu_n$  la loi de  $Z_n$  sachant  $Z_n > 0$ . Alors la suite  $(\mu_n, n \geq 0)$  est croissante au sens où, pour tout  $n \geq 0$ , on peut construire des v.a.  $X_n$  de loi  $\mu_n$  et  $X_{n+1}$  de loi  $\mu_{n+1}$  sur le même espace de probabilité, de façon à ce que  $X_{n+1} \geq X_n$  p.s.*

**Démonstration** Pour un arbre  $\omega \in \Omega$ , on note  $u_n$  le premier enfant de l'ancêtre qui a des descendants à la génération  $n$  et  $H_n$  le nombre de ces descendants. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_n = k \mid Z_n > 0) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_n = k, u_n = j \mid Z_n > 0) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_n = k \mid u_n = j, Z_n > 0) \mathbb{P}(u_n = j \mid Z_n > 0) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n-1} = k \mid Z_{n-1} > 0) \mathbb{P}(u_n = j \mid Z_n > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n-1} = k \mid Z_{n-1} > 0). \end{aligned}$$

Donc  $H_n$  a même loi sachant  $Z_n > 0$  que  $Z_{n-1}$  sachant  $Z_{n-1} > 0$ . Comme on a bien sûr  $H_n \leq Z_n$ , on en déduit que la loi  $\mu_n$  de  $Z_n$  sachant  $Z_n > 0$  croît.  $\square$

**Démonstration du théorème 2.28** Pour tout  $n \geq 0$ , soit

$$F_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n} \mid Z_n > 0) = \frac{G^{on}(s) - G^{on}(0)}{1 - G^{on}(0)} = 1 - \frac{1 - G^{on}(s)}{1 - G^{on}(0)}.$$

Le lemme 2.29 implique que  $(F_n(s), n \geq 0)$  est décroissante pour tout  $s \in [0, 1]$ . Soit

$$F(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s).$$

Remarquons que  $F(s) \leq 1$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Comme  $F_n$ ,  $F$  est croissante et convexe, donc  $F$  est continue sur  $]0, 1[$ . Or,

$$1 - F_n(G(s)) = \Gamma(G^{on}(0))(1 - F_{n+1}(s)),$$

où  $\Gamma(s) = \frac{1-G(s)}{1-s}$ . Puisque  $\Gamma(s) \rightarrow m$  quand  $s \rightarrow 1$  et  $G^{on}(0) \rightarrow 1$  quand  $n \phi \infty$ , on en déduit que  $1 - F(G(s)) = m(1 - F(s))$ . En particulier,

$$1 - F(1-) = 1 - \lim_{s \rightarrow 1-} F(s) = m(1 - F(1-)).$$

Puisque  $F$  est bornée, on en déduit que  $F(1-) = 0$ . Donc, d'après les propriétés générales des fonctions génératrices rappelées en début de section 2.2,  $F$  est la fonction génératrice d'une v.a., vers laquelle  $Z_n$  sachant  $Z_n > 0$  converge en loi. On a donc démontré (13).  $\square$

Le résultat suivant précise les cas où la limite de Yaglom est d'espérance finie.

**Théorème 2.30** *Si  $m < \infty$  alors la suite de terme général  $m^{-n}\mathbb{P}(Z_n > 0)$  est décroissante.*

*Si de plus  $m < 1$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(Z_n > 0)}{m^n} > 0$ ,
- (ii)  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(Z_n | Z_n > 0) < \infty$ ,
- (iii)  $\sum_{k \geq 2} (k \log k) p_k < \infty$ , c'est-à-dire  $\mathbb{E}(\xi \log^+ \xi) < \infty$ .

**Démonstration** Par définition de  $\mu_n$ ,

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{\mathbb{E}(Z_n | Z_n > 0)} = \frac{m^n}{\sum k \mu_n(k)}$$

et donc

$$\frac{\mathbb{P}(Z_n > 0)}{m^n} = \frac{1}{\sum k \mu_n(k)} = \frac{1}{\mathbb{E}(X_n)}, \quad (14)$$

où  $X_n$  a pour loi  $\mu_n$ . Ceci est décroissant d'après le lemme 2.29, et on obtient directement (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) lorsque  $m < 1$ .

Supposons  $m < 1$ . Pour obtenir (iii), on va de nouveau utiliser l'arbre biaisé de la section 2.7 et le fait que, sous  $\widehat{\mathbb{P}}$ ,  $Z_n - 1$  est un processus de Galton-Watson avec immigration de même loi que  $\widehat{\xi} - 1$ , où  $\mathbb{P}(\widehat{\xi} = k) = \frac{k p_k}{m}$ .

Supposons que (iii) est vrai. Alors,  $\mathbb{E}(\log^+ \widehat{\xi}) < \infty$  et, par le théorème 2.20,  $Z_n$  a une limite non-dégénérée sous  $\widehat{\mathbb{P}}$ . Or, pour tout  $k \geq 1$ , par définition de

$\widehat{\mathbb{P}}$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{P}}(Z_n = k) &= \frac{k}{m^n} \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{k}{m^n} \mathbb{P}(Z_n = k, Z_n > 0) \\ &= \frac{k}{m^n} \mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_n > 0) \mathbb{P}(Z_n > 0) \\ &= \frac{k \mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_n > 0)}{\mathbb{E}(Z_n \mid Z_n > 0)}\end{aligned}$$

par (14). Or, le théorème de Yaglom implique que le numérateur admet une limite quand  $n \rightarrow \infty$ , non nulle pour au moins un  $k \geq 1$ . On a donc nécessairement  $\sup_n \mathbb{E}(Z_n \mid Z_n > 0) < \infty$ , c'est-à-dire (Iii).

Réciproquement, si (ii) est vérifié, le calcul précédent et le théorème de Yaglom montrent que  $\widehat{\mathbb{P}}(Z_n = k)$  a une limite non dégénérée, et par le théorème 2.20, c'est nécessairement que  $\mathbb{E}(\log^+ \widehat{\xi}) < \infty$ , c'est-à-dire (iii).  $\square$

**Exercice 15 (Distributions quasi-stationnaires)** 1. Montrer en utilisant la propriété de Markov que la limite de Yaglom  $(Q(j), j \geq 0)$  satisfait

$$\mathbb{P}_Q(Z_n = j \mid Z_n > 0) = Q(j), \quad \forall j \geq 1,$$

où  $\mathbb{P}_Q$  désigne la loi du Galton-Watson lorsque  $Z_0$  a pour loi  $Q$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_Q((Z_n) \in A) = \mathbb{P}((Z_n) \in A \mid Z_0 \sim Q) = \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}((Z_n) \in A \mid Z_0 = j) Q(j).$$

On dit que  $Q$  est une distribution quasi-stationnaire.

2. Montrer que  $\mathbb{P}_Q(T_{\text{ext}} \geq n+k) = \mathbb{P}_Q(T_{\text{ext}} \geq n) \mathbb{P}_Q(T_{\text{ext}} \geq k)$  pour tout  $n, k \geq 0$  et en déduire que  $T_{\text{ext}}$  suit une loi géométrique sous  $\mathbb{P}_Q$ .
3. Déduire de la question 1 que la limite de Yaglom  $(Q(j), j \geq 0)$  satisfait

$$\sum_{j \geq 1} Q(j) p_{ji} = m Q(i), \quad \forall i \geq 1,$$

où  $P = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$  est la matrice de transition du processus de Galton-Watson de (2).

4. En déduire que

$$1 - H(G(s)) = m(1 - H(s)), \quad \forall s \in [0, 1],$$

où  $H$  est la fonction génératrice de la limite de Yaglom  $Q$ , c'est-à-dire

$$H(s) = \sum_{j \geq 1} Q(j) s^j, \quad \forall s \in [0, 1].$$

5. Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on définit

$$H_\alpha(s) = 1 - (1 - H(s))^\alpha, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Montrer que  $g_\alpha$  est la fonction génératrice d'une mesure de probabilité  $Q_\alpha$  sur  $\mathbb{N}$  qui satisfait

$$\sum_{j \geq 1} Q_\alpha(j) p_{ji} = m^\alpha Q_\alpha(i), \quad \forall i \geq 1.$$

6. En déduire qu'il existe une infinité de distributions quasi-stationnaires pour un processus de Galton-Watson sous-critique.

**Exercice 16 (Yaglom et modèle linéaire-fractionnaire)** Dans le modèle linéaire-fractionnaire de l'exercice 10, dans le cas sous-critique, montrer que la limite de Yaglom est géométrique de paramètre  $\min\{a/b, b/a\}$ .

## 2.10 Cas critique

On suppose ici que  $m = 1$  et  $p_1 < 1$ . On a déjà vu que  $\mathbb{P}(Z_n \rightarrow 0) = 1$ ,  $\mathbb{E}(Z_n) = 1$  et  $\text{Var}(Z_n) \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  (cf. théorème 2.5), ce qui suggère que  $Z_n$  est grand lorsqu'il n'est pas nul. Notre but est ici d'étudier la taille asymptotique de  $Z_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Lemme 2.31** Supposons  $m = 1$  et  $\sigma^2 < \infty$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 - G^{on}(s)} - \frac{1}{1 - s} \right) = \frac{\sigma^2}{2},$$

où la convergence est uniforme par rapport à  $s \in [0, 1[$ .

**Démonstration** Puisque  $G'(1) = 1$  et  $G''(1) = \sigma^2$  lorsque  $m = 1$ , un développement limité de  $G$  au voisinage de 1 montre que

$$G(s) = s + \left( \frac{\sigma^2}{2} + \varepsilon(s) \right) (1 - s)^2,$$

pour une fonction  $\varepsilon(s)$  qui tend vers 0 lorsque  $s \rightarrow 1$ . On en déduit que

$$\frac{1}{1 - G(s)} - \frac{1}{1 - s} = \frac{(\frac{\sigma^2}{2} + \varepsilon(s))(1 - s)^2}{(1 - G(s))(1 - s)} = \frac{1 - s}{1 - G(s)} \left( \frac{\sigma^2}{2} + \varepsilon(s) \right) = \frac{\sigma^2}{2} + \widehat{\varepsilon}(s),$$

où de nouveau  $\widehat{\varepsilon}(s) \rightarrow 0$  lorsque  $s \rightarrow 1$ .

En sommant la relation précédente appliquée en  $s = G^{on}(s)$ , on obtient

$$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 - G^{on}(s)} - \frac{1}{1 - s} \right) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{\varepsilon} \circ G^{oj}(s).$$

Puisque  $G^{on}(0) \leq G^{on}(s) \leq 1$  pour tout  $s \in [0, 1]$  et que  $G^{on}(0) \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la convergence de  $G^{on}(s)$  vers 1 lorsque  $n \rightarrow \infty$  est uniforme en  $s \in [0, 1]$ . Puisque  $\widehat{\varepsilon}$  est bornée, le lemme est prouvé.  $\square$

On en déduit le résultat principal du cas critique.

**Théorème 2.32** *Si  $m = 1$  et  $\sigma^2 < \infty$ , alors*

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2},$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \frac{Z_n}{n} \mid Z_n > 0 \right) = \frac{\sigma^2}{2},$$

(iii) *Pour tout  $u \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{Z_n}{n} \leq u \mid Z_n > 0 \right) = 1 - e^{-2u/\sigma^2}$ . Autrement dit, conditionnellement à la non-extinction,  $Z_n/n$  converge en loi vers une v.a. exponentielle de paramètre  $2/\sigma^2$ .*

**Démonstration** Pour (i), d'après le lemme 2.31,

$$n\mathbb{P}(Z_n > 0) = n(1 - G^{on}(0)) = \left\{ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 - G^{on}(0)} - 1 \right) + \frac{1}{n} \right\}^{-1} \rightarrow \frac{2}{\sigma^2}.$$

Pour (ii), d'après le calcul précédent,

$$\mathbb{E} \left( \frac{Z_n}{n} \mid Z_n > 0 \right) = \frac{\mathbb{E}(Z_n)}{n(1 - G^{on}(0))} = \frac{1}{n(1 - G^{on}(0))} \rightarrow \frac{\sigma^2}{2}.$$

Enfin, pour (iii), toujours en utilisant le lemme 2.31,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-uZ_n/n} \mid Z_n > 0 \right) &= 1 - \frac{1 - G^{on}(e^{-u/n})}{1 - G^{on}(0)} \\ &= 1 - \frac{1}{n(1 - G^{on}(0))} \left\{ \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 - G^{on}(e^{-u/n})} - \frac{1}{1 - e^{-u/n}} \right) + \frac{1}{n(1 - e^{-u/n})} \right\}^{-1} \\ &\rightarrow 1 - \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{u} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + u\sigma^2/2}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans le membre de droite la transformée de Laplace d'une v.a. exponentielle de paramètre  $2/\sigma^2$ . On conclut par le critère classique de convergence en loi des v.a. réelles positives avec les transformées de Laplace. Remarquons que l'uniformité dans le lemme 2.31 était indispensable pour le calcul précédent.  $\square$

## 2.11 Quelques mots sur le cas multi-types, sous forme d'exercice

Les processus que nous avons étudié jusqu'à maintenant considéraient des particules indistinguables, au sens où la loi de reproduction ne dépendait pas de la particule. Il est naturel dans les applications de considérer que les particules peuvent être de plusieurs types, chaque type ayant un comportement différent, mais chaque particule de même type ayant la même loi de reproduction. Dans un tel modèle, une particule d'un type donné peut avoir des enfants de plusieurs types différents.

La généralisation des résultats des sections 2.1, 2.2, 2.4 et 2.5 au cas multitype utilise des méthodes très proches. Nous présentons ici quelques-uns de ces résultats comme un exercice d'application de ces méthodes.

Pour simplifier les calculs et les notations, nous allons considérer seulement deux types de particules, mais l'extension à un nombre fini de types de particules est directe.

On suppose donc que les particules peuvent être de type  $a$  ou  $b$ , et on se donne deux mesures de probabilité  $\mathbf{p}^{(a)}$  et  $\mathbf{p}^{(b)}$  sur  $\mathbb{N}^2$ , c'est-à-dire deux suites  $\mathbf{p}^{(a)} = (p_{i,j}^{(a)}, i \geq 0, j \geq 0)$  et  $\mathbf{p}^{(b)} = (p_{i,j}^{(b)}, i \geq 0, j \geq 0)$  de nombres positifs telles que

$$\sum_{i,j \geq 0} p_{ij}^{(a)} = \sum_{i,j \geq 0} p_{ij}^{(b)} = 1.$$

On suppose que chaque particule de type  $a$  (respectivement,  $b$ ) donne naissance à  $i$  particules de type  $a$  et  $j$  particules de type  $b$  avec probabilité  $p_{ij}^{(a)}$  (respectivement,  $p_{ij}^{(b)}$ ), indépendamment des autres individus dans la population.

On définit les fonctions génératrices (à deux variables) de ces deux lois par

$$G^{(a)}(s, t) = \sum_{i,j \geq 0} s^i t^j p_{ij}^{(a)} \quad \text{et} \quad G^{(b)}(s, t) = \sum_{i,j \geq 0} s^i t^j p_{ij}^{(b)},$$

pour tout  $s, t \in [0, 1]$ . On note également  $\mathbf{G}(s, t) = (G^{(a)}(s, t), G^{(b)}(s, t))$ . La fonction  $\mathbf{G}$  est définie sur  $[0, 1]^2$ , à valeurs dans  $[0, 1]^2$ .

**Exercice 17** On se donne deux suites  $(\xi_{n,k}^{(a)}, n \geq 0, k \geq 0)$  et  $(\xi_{n,k}^{(b)}, n \geq 0, k \geq 0)$  de v.a. i.i.d. de lois  $\mathbf{p}^{(a)}$  et  $\mathbf{p}^{(b)}$ , respectivement. Ces v.a. sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$ , donc on écrira  $\xi_{n,k}^{(a)} = (\xi_{n,k}^{(a)}(a), \xi_{n,k}^{(a)}(b))$  et similairement pour  $\xi_{n,k}^{(b)}$ .

1. Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $Z_n^{(a)}(a)$  et  $Z_n^{(a)}(b)$  le nombre de particules à la génération  $n$  de type  $a$  et  $b$  respectivement, lorsque  $Z_0^{(a)}(a) = 1$  et  $Z_0^{(a)}(b) = 0$ . On note également  $\mathbf{Z}_n^{(a)} = (Z_n^{(a)}(a), Z_n^{(a)}(b))$ . Donner une construction par récurrence de ces suites à l'aide des suites  $(\xi_{n,k}^{(a)})$  et  $(\xi_{n,k}^{(b)})$ .

2. Démontrer que  $(\mathbf{Z}_n^{(a)}, n \geq 0)$  est une chaîne de Markov (inutile de calculer sa matrice de transition).
3. On définit  $\mathbf{Z}_n^{(b)} = (Z_n^{(b)}(a), Z_n^{(b)}(b))$  comme ci-dessus, avec la différence que  $Z_0^{(b)}(a) = 0$  et  $Z_0^{(b)}(b) = 1$ . On note  $G_n^{(a)}(s, t)$  et  $G_n^{(b)}(s, t)$  les fonctions génératrices de  $\mathbf{Z}_n^{(a)}$  et  $\mathbf{Z}_n^{(b)}$ . On note enfin  $\mathbf{G}_n(s, t) = (G_n^{(a)}(s, t), G_n^{(b)}(s, t))$ .  
Montrer que

$$\mathbf{G}_{n+1}(s, t) = \mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}(s, t), \quad \forall (s, t) \in [0, 1]^2.$$

4. Montrer que  $\mathbb{P}[\mathbf{Z}_n^{(a)} \rightarrow (0, 0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(a)}(0, 0)$ .
5. Montrer que le vecteur

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\mathbf{Z}_n^{(a)} \rightarrow (0, 0)) \\ \mathbb{P}(\mathbf{Z}_n^{(b)} \rightarrow (0, 0)) \end{pmatrix}$$

est un point fixe de  $\mathbf{G}$ .

6. Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathbf{Z}_n^{(a)}] = (1, 0)M^n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbf{Z}_n^{(b)}] = (0, 1)M^n,$$

où

$$M = \begin{pmatrix} m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ba} & m_{bb} \end{pmatrix},$$

avec  $m_{aa} = \mathbb{E}[\xi_{0,0}^{(a)}(a)]$ ,  $m_{ab} = \mathbb{E}[\xi_{0,0}^{(a)}(b)]$ ,  $m_{ba} = \mathbb{E}[\xi_{0,0}^{(b)}(a)]$  et  $m_{bb} = \mathbb{E}[\xi_{0,0}^{(b)}(b)]$ .

7. Les coefficients de la matrice  $M$  sont positifs ou nuls. Donner une condition simple sur  $m_{aa}$  et  $m_{bb}$  assurant qu'il existe une puissance de  $M$  dont tous les coefficients sont strictement positifs. On supposera que cette condition est vérifiée dans toute la suite.
8. Montrer que la matrice  $M$  est diagonalisable et a une unique valeur propre positive, qu'on notera  $\rho$  dans la suite.
9. Montrer que  $M^n \rightarrow 0$  lorsque  $\rho < 1$ ,  $M^n$  tend vers une matrice  $M_\infty$  finie lorsque  $\rho = 1$ , et  $M^n \rightarrow \infty$  lorsque  $\rho > 1$ .
10. On admettra<sup>1</sup> que tous les états différents de  $(0, 0)$  sont transients pour la chaîne de Markov  $(\mathbf{Z}_n^{(a)}, n \geq 0)$ .  
Dédurre des questions 6 et 9 que, lorsque  $\rho \leq 1$ ,  $\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n^{(a)} \rightarrow (0, 0)) = \mathbb{P}(\mathbf{Z}_n^{(b)} \rightarrow (0, 0)) = 1$ .

---

1. Pour cela, on a besoin de supposer que  $\mathbf{G}(s, t)$  n'est pas une fonction linéaire par rapport aux variables  $s$  et  $t$ .

11. Démontrer que  $\mathbf{G}^{\circ n}(1-s, 1-t) = \binom{1}{1} - M^n \binom{s}{t} + o(s+t)$  lorsque  $s, t \rightarrow 0$ , pour  $s, t \geq 0$ .
12. On suppose  $\rho > 1$ . Dédurre de la question 9 qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $s, t \geq 0$  dans un voisinage de  $(0, 0)$ ,

$$\left| \binom{1}{1} - \mathbf{G}^{\circ n_0}(1-s, 1-t) \right| > s+t,$$

13. En déduire que, si  $\rho > 1$ ,  $\mathbf{q} \neq \binom{1}{1}$  (on raisonnera par l'absurde et on cherchera à contredire le fait que  $\mathbf{G}^{\circ n}(0)$  croît vers  $\mathbf{q}$ ).
14. Soit  $u$  un vecteur propre de la matrice  $M$  pour la valeur propre  $\rho$ . Montrer qu'on peut choisir  $u$  tel que toutes ses coordonnées sont strictement positives.
15. Montrer que  $W_n = \frac{u \cdot \mathbf{Z}_n^{(a)}}{\rho^n}$  est une martingale positive, et qu'elle converge donc p.s. vers une v.a. finie  $W$ .

### 3 Processus de Galton-Watson et marches aléatoires

Le but de cette partie est de présenter deux descriptions différentes d'un arbre par une marche aléatoire, qui permettent d'obtenir des propriétés fines sur la loi de la descendance totale et sur des propriétés généalogiques dans les arbres de Galton-Watson.

Les sections 3.1 et 3.2 sont tirées de [7]. La section 3.4 est inspirée de [6, 2].

#### 3.1 Chemin de Lukasiewicz

On reprend ici la notation de Ulam-Harris-Neveu de la section 2.3. Nous commençons par décrire un algorithme d'exploration de l'arbre, qui vise à "visiter" chaque nœud de l'arbre une et une seule fois.

On rappelle d'abord la notion de marche.

**Définition 3.1 (Marches et marches aléatoires)** (i) *Étant donnée une suite  $(x_k, k \geq 1)$  dans  $\mathbb{Z}$ , on appelle **marche de pas**  $(x_k, k \geq 1)$  la suite  $(s_n, n \geq 0)$  définie par*

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=1}^n x_k & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

*On associe de même la marche  $(s_k, 0 \leq k \leq t)$  à d'un vecteur de pas  $(x_k, 1 \leq k \leq t)$  de taille  $t$ .*

(ii) Une **marche aléatoire** est une marche  $(S_n, n \geq 0)$  de pas aléatoires  $(X_k, k \geq 1)$  i.i.d. :

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \sum_{k=1}^n X_k & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Une marche aléatoire arrêtée au temps  $T$  (qui peut être aléatoire) est une marche de pas  $(X_k, 1 \leq k \leq T)$  pour une suite  $(X_k, k \geq 1)$  i.i.d.

**Définition 3.2 (Parcours de l'arbre "en profondeur")** Soit  $\omega \in \Omega$  un arbre. L'**algorithme d'exploration de l'arbre  $\omega$  "en profondeur"** consiste à visiter les nœuds de  $\omega$  dans l'ordre lexicographique de la notation de Ulam-Harris-Neveu. L'étape 0 de l'algorithme consiste à visiter l'ancêtre  $\emptyset$ , puis l'étape 1 à visiter l'individu 1 (s'il existe), et ainsi de suite. L'algorithme se termine lorsque tous les nœuds de  $\omega$  ont été visités. On note  $M(\omega)$  le nombre d'étapes de l'algorithme et  $u_n(\omega)$  le nœud de  $\omega$  visité à la  $n$ -ième étape de l'algorithme, pour  $0 \leq n \leq M(\omega) - 1$ .

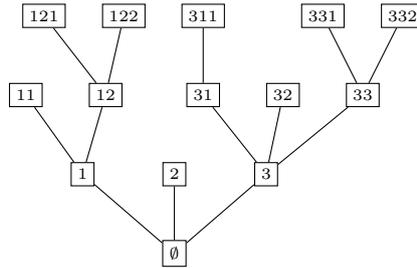


FIGURE 2 – Un arbre fini avec la notation de Ulam-Harris-Neveu.

On a toujours  $u_0(\omega) = \emptyset$ . Dans l'exemple de la figure 2, l'algorithme visite successivement les nœuds  $\emptyset, 1, 11, 12, 121, 122, 2, 3, 31, 311, 32, 33, 331, 332$ , c'est-à-dire que  $u_1 = 1, u_2 = 11, \dots, u_{13} = 332$  et  $M = 14$ . Il y a autant d'étapes que de nœuds dans l'arbre, donc

$$M(\omega) = \sum_{n \geq 0} Z_n(\omega) = \sum_{n=0}^{T_{\text{ext}}-1} Z_n(\omega).$$

On appellera cette v.a. la *descendance totale de l'arbre*. Remarquons que si l'arbre  $\omega$  est infini, alors l'algorithme ne s'arrête jamais ( $M(\omega) = +\infty$ ), et en général tous les nœuds de l'arbre ne sont pas visités. On parle de parcours "en profondeur" car on commence par descendre au plus profond de l'arbre en suivant toujours la branche la plus à gauche, avant de parcourir les autres branches.

Pour tout  $i, j \in \mathbb{N}^*$  tels que  $i < j$  et pour tout  $u \in U$ , on dira que  $uj$  est plus jeune que  $ui$  (autrement dit, on suppose qu'on numérote les enfants

dans l'ordre de leur naissance, donc  $ui$  est né avant  $uj$ ). Pour  $u, v \in U$ , on note également  $u \preceq v$  si  $u$  est un ancêtre de  $v$ , c'est-à-dire s'il existe  $w \in U$  tel que  $v = uw$  (en particulier,  $u \preceq u$ , c'est-à-dire qu'on considère que  $u$  est son propre ancêtre). Par exemple, dans la figure 2, les nœuds  $\emptyset$ , 1 et 11 sont les ancêtres de 11.

Enfin, pour tout arbre  $\omega \in \Omega$  et pour tout  $u \in \omega$ , on note  $\rho(u)$  le nombre de frères/sœurs de  $u$  plus jeunes que  $u$  présents dans l'arbre. Par exemple, dans la figure 2,  $\rho(2) = 1$ ,  $\rho(31) = 2$  et  $\rho(122) = 0$ .

**Définition 3.3 (Marche de Lukasiewicz)** *La marche de Lukasiewicz d'un arbre  $\omega$  fini est définie par  $(W_n, 0 \leq n \leq M(\omega))$ , où*

$$\begin{cases} W_0 = 0, \\ W_n = \sum_{u \preceq u_n(\omega)} \rho(u), & \forall n \in \{1, 2, \dots, M(\omega) - 1\}, \\ W_{M(\omega)} = -1. \end{cases}$$

La marche de Lukasiewicz associée à l'arbre de la figure 2 est montré en figure 3.

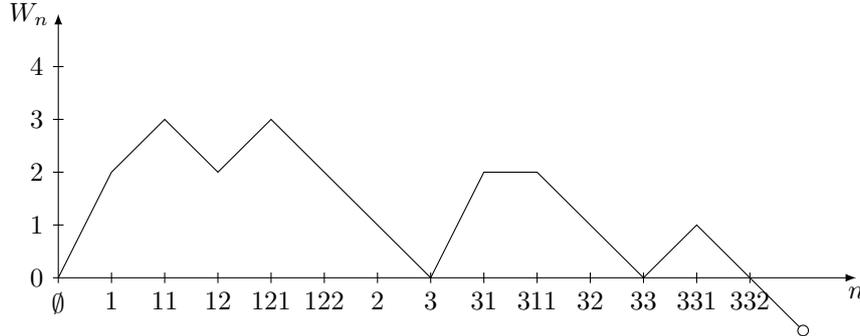


FIGURE 3 – La marche de Lukasiewicz associée à l'arbre de la figure 2.

**Proposition 3.4** *Si on munit l'espace des arbres  $\Omega$  de la loi  $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$  d'un arbre de Galton-Watson critique ou sous-critique, le processus  $(W_n, 0 \leq n \leq M)$  est une marche aléatoire arrêtée à son premier temps d'atteinte de  $-1$ , dont les pas sont i.i.d. à valeurs dans  $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$  et de même loi que  $\xi - 1$ , où la v.a.  $\xi$  a pour loi  $\mathbf{p}$ .*

On admettra ce résultat. L'idée est que  $W_{n+1} - W_n + 1$  est exactement le nombre d'enfants de  $v_n(\omega)$  (on peut par exemple le vérifier sur la figure 3). L'indépendance des sauts est facile à vérifier, mais la preuve est délicate à cause du fait que les étiquettes des nœuds visités par l'algorithme d'exploration sont aléatoires.

Le corollaire suivant est évident.

**Corollaire 3.5** *La descendance totale d'un Galton-Watson critique ou sous-critique a même loi que le premier temps d'atteinte de  $-1$  par une marche aléatoire de pas i.i.d. de même loi que  $\xi - 1$  et issue de 0.*

### 3.2 Formule de Kemperman et loi de la descendance totale d'un processus de Galton-Watson

Le lien précédent entre processus de Galton-Watson et marche aléatoire permet d'obtenir des informations précises sur la loi de la descendance totale du processus de Galton-Watson. C'est l'objet de cette section.

On commence par un lemme de combinatoire. Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un vecteur d'entiers dans  $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$  tel que

$$\sum_{i=1}^n x_i = -k, \quad \text{pour un certain } k \geq 1.$$

On dit que  $(s_j, 0 \leq j \leq n)$  est la marche de pas  $(x_1, \dots, x_n)$  si  $s_0 = 0$  et

$$s_j = \sum_{i=1}^j x_i, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on note  $\sigma_i$  l'application de décalage cyclique de pas  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ , c'est-à-dire

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j+i & \text{si } j+i \leq n, \\ j+i-n & \text{si } j+i > n, \end{cases} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Lemme 3.6** *Il existe exactement  $k$  entiers  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tels que la marche de pas  $(x_{\sigma_i(1)}, x_{\sigma_i(2)}, \dots, x_{\sigma_i(n)})$  touche  $-k$  pour la première fois au temps  $n$ .*

**Démonstration** Soit  $m$  le plus petit entier  $i$  tel que  $s_i = \min_{1 \leq j \leq n} s_j$ . Quitte à remplacer  $(x_1, \dots, x_n)$  par  $(x_{\sigma_m(1)}, \dots, x_{\sigma_m(n)})$ , on peut supposer que la marche  $s_j$  touche  $-k$  pour la première fois au temps  $n$  (cf. figure 4 a) et b)).

Soit

$$t_j = \inf\{1 \leq i \leq n : s_i = -j\}, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

Puisque la marche ne peut décroître que de 1 à chaque pas de temps, tous les  $t_j$  sont bien définis. On voit alors facilement que la marche de pas  $(x_{\sigma_i(1)}, \dots, x_{\sigma_i(n)})$  atteint  $-k$  pour la première fois au temps  $n$  si et seulement si  $i$  est l'un des  $t_j$  (cf. figure 4 b) et c)).  $\square$

Supposons maintenant que les v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont i.i.d. à valeurs dans  $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Soit  $(S_j, 0 \leq j \leq n)$  la marche (aléatoire) de pas  $(X_1, \dots, X_n)$ . On note  $T_{-k}$  le premier temps d'atteinte de  $-k$  par cette marche aléatoire.

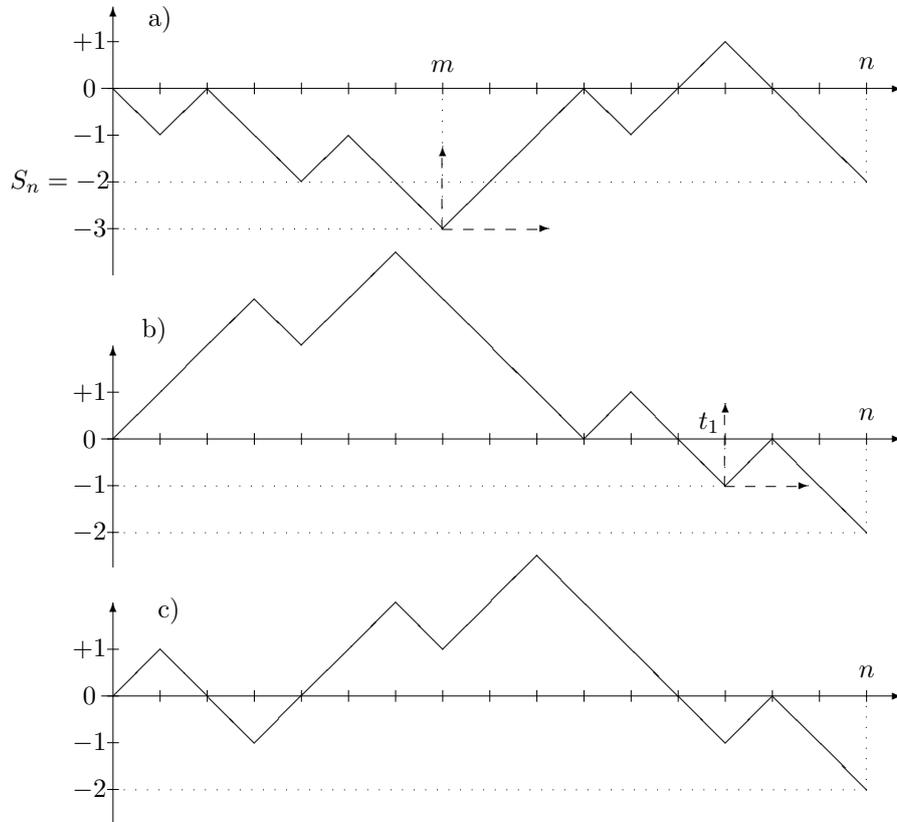


FIGURE 4 – a) Une marche  $S$  qui atteint son minimum  $-3$  pour la première fois au temps  $m$ , avec  $S_n = -2$ ; b) la marche obtenue par la permutation cyclique de a) partant de  $m$ ; c) la marche obtenue par permutation cyclique de b) partant du premier temps d'atteinte  $t_1$  de  $-1$ .

**Proposition 3.7 (Kemperman, 1961)** *Pour tout  $n \geq 1$  et  $1 \leq k \leq n$ ,*

$$\mathbb{P}(T_{-k} = n) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(S_n = -k).$$

**Démonstration** Pour toute permutation cyclique  $\sigma_i$ ,  $(X_{\sigma_i(1)}, \dots, X_{\sigma_i(n)})$  a même loi que  $(X_1, \dots, X_n)$ , et donc la loi de  $(X_{\sigma_i(1)}, \dots, X_{\sigma_i(n)})$  sachant

$\{S_n = -k\}$  est la même que la loi de  $(X_1, \dots, X_n)$  sachant  $\{S_n = -k\}$ . Alors

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}(T_{-k} = n \mid S_n = -k) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T_{-k}=n} \mid S_n = -k) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T_{-k}^{(i)}=n} \mid S_n = -k) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{T_{-k}^{(i)}=n} \mid S_n = -k \right), \end{aligned}$$

où  $T_{-k}^{(i)}$  est le premier temps d'atteinte de  $-k$  par la marche aléatoire de pas  $(X_{\sigma_i(1)}, \dots, X_{\sigma_i(n)})$ . On conclut grâce au lemme 3.6.  $\square$

En observant que, d'après la proposition 3.4, la marche de Lukasiewicz associée à  $k$  arbres de Galton-Watson i.i.d., obtenue en mettant bout-à-bout les marches de Lukasiewicz de chaque arbre, est une marche aléatoire issue de 0 et arrêtée à son premier temps d'atteinte de  $-k$ , le corollaire suivant est évident.

**Corollaire 3.8** *Soit  $(Z_n, n \geq 0)$  un processus de Galton-Watson critique ou sous-critique de loi de reproduction  $\mathbf{p}$ , et soit  $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$  sa descendance totale. Alors*

$$\mathbb{P}(Y = n \mid Z_0 = k) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(\xi_1 + \dots + \xi_n = n - k) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(Z_1 = n - k \mid Z_0 = n),$$

où les v.a.  $\xi_1, \xi_2, \dots$  sont i.i.d. de loi  $\mathbf{p}$ .

**Exercice 18** *En utilisant l'exercice 6, déterminer la loi de  $Y$  pour un processus de Galton-Watson sur-critique.*

### 3.3 Processus de contour

On peut construire autre marche que la marche de Lukasiewicz, appelée processus de contour, basée sur un autre algorithme d'exploration. Ce processus de contour est particulièrement bien adapté à l'étude des propriétés généalogiques de la population décrite par l'arbre.

**Définition 3.9 (Parcours d'exploration par "contour")** *Soit  $\omega \in \Omega$ . On considère l'algorithme d'exploration suivant. On pose  $v_0(\omega) = \emptyset$  (étape 0 de l'algorithme). Supposons avoir construit  $v_0(\omega), v_2(\omega), \dots, v_k(\omega) \in \omega$ , pour un certain  $k \geq 0$ . Alors*

- si  $v_k(\omega)$  a un enfant qui n'a pas encore été visité par l'algorithme (c'est-à-dire qui n'est pas l'un des  $v_0, \dots, v_k$ ), alors on pose  $v_{k+1}(\omega)$  le premier enfant (pour l'ordre lexicographique) de  $v_k(\omega)$  qui n'a pas encore été visité ;

- si  $v_k(\omega)$  n'a pas d'enfant ou si tous ses enfants ont déjà été visités,
  - si  $v_k(\omega) = \emptyset$ , l'algorithme s'arrête à l'étape  $k$  ;
  - si  $v_k(\omega) \neq \emptyset$ , alors on pose  $v_{k+1}(\omega)$  le parent de  $v_k(\omega)$ .

On note  $T(\omega)$  le nombre d'étapes de l'algorithme. Ainsi, l'algorithme s'arrête à l'étape  $T(\omega) - 1$ . Le parcours d'exploration par contour de l'arbre de la figure 2 est donné en abscisse de la figure 5. Dans cet exemple,  $v_0 = \emptyset, v_1 = 1, v_2 = 11, v_3 = 1, \dots, v_{26} = \emptyset$  et  $T(\omega) = 27$ . On observe que chaque arête de l'arbre est parcourue exactement deux fois, d'abord en descendant en profondeur dans l'arbre, puis en remontant vers la racine. Ainsi,  $T(\omega)$  est égal au double du nombre d'arêtes plus 1. De plus, il est facile de voir qu'un arbre comporte toujours un nœud de plus que son nombre d'arêtes. Puisque le nombre d'arêtes de l'arbre est égal à sa descendance totale, on en déduit que

$$T(\omega) = 2 \sum_{n \geq 0} Z_n(\omega) - 1.$$

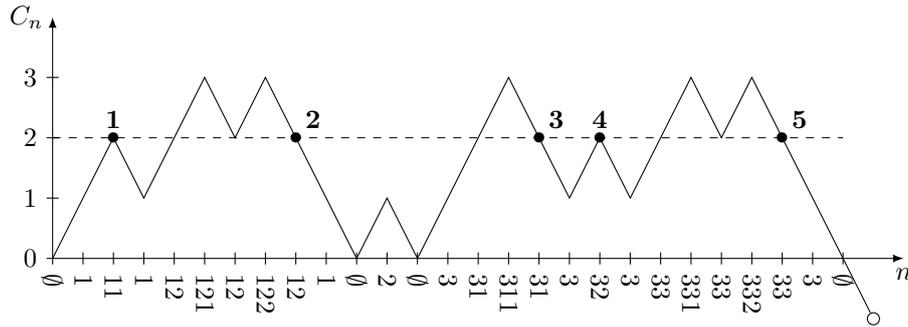


FIGURE 5 – Le processus de contour de l'arbre de la figure 2. En abscisse se trouve la suite des nœuds visités par l'algorithme de parcours par contour. Les individus vivants à la génération 2 sont indiqués par des  $\bullet$ , à l'instant de leur dernière visite par le processus de contour. Ils sont numérotés de **1** à **5**, dans l'ordre de leur visite par le processus de contour.

On remarque que les nouveaux individus sont visités par le processus d'exploration dans l'ordre lexicographique. On parle de parcours par *contour* car la suite des nœuds visités par l'algorithme est donnée par la suite des nœuds visités quand on fait le tour de l'arbre en partant à gauche de la racine. Comme pour la marche de Lukasiewicz, lorsque l'arbre  $\omega$  est infini, l'algorithme ne s'arrête pas et en général tous les nœuds de l'arbre ne sont pas visités.

**Définition 3.10** Soit  $\omega \in \Omega$  et  $(v_n, 0 \leq n \leq T-1)$  la suite des nœuds visités dans l'algorithme d'exploration de  $\omega$  de la définition 3.9. Le **processus de**

**contour** ( $C_n, n \in \{0, 1, \dots, T\}$ ) de  $\omega$  est défini par

$$C_n = \begin{cases} |v_n| & \text{si } 0 \leq n \leq T - 1, \\ -1 & \text{si } n = T. \end{cases}$$

Remarquons qu'on a toujours  $C_0 = |\emptyset| = 0$ . Le processus de contour associé à l'arbre de la figure 2 est représenté dans la figure 5. Il est clair d'après la définition 3.9 que le processus de contour est une marche dont les pas sont soit 1 soit  $-1$ , issue de 0 et arrêtée à son premier temps d'atteinte de  $-1$ .

Lorsque l'arbre est fini, le passage du processus de contour à l'arbre qui lui correspond peut se visualiser d'une manière assez commode : supposons que l'on enduise de colle le dessous de la courbe du processus de contour de la figure 5, et que l'on écrase la courbe dans la direction horizontale. Les parties du processus de contour qui sont en face les unes des autres seront alors collées, et on obtient l'arbre de la figure 2 en dépliant les parties non-collées. Inversement, si on se donne un arbre comme celui de la figure 2, on obtient le processus de contour en découpant en deux toutes les arêtes dans le sens de la longueur, sauf les extrémités des arêtes qui sont des feuilles. Lorsque l'on étire la courbe ainsi obtenue, on retrouve la figure 5.

Ceci suggère que l'application qui à un arbre associe son processus de contour est une bijection entre l'ensemble des arbres finis et l'ensemble des marches de pas  $\pm 1$  issues de 0 et arrêtées en  $-1$  (on l'admettra).

Le processus de contour permet de caractériser facilement de nombreuses propriétés, notamment généalogiques, d'un arbre fini. Par exemple, le nombre d'individus  $Z_k$  vivants à la génération  $k$  est égal au nombre de pas de  $k$  vers  $k - 1$  dans le processus de contour. La figure 5 montre un exemple avec  $k = 2$ . On notera  $t_1^k, t_2^k, \dots, t_{Z_k}^k$  la suite des temps  $t$  tels que  $C_t = k$  et  $C_{t+1} = k - 1$ , et on numérotera ces individus  $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{Z}_k$  dans l'ordre de visite par le processus de contour, c'est-à-dire l'ordre lexicographique (cf. figure 5).

Rappelons qu'on appelle *excursion sous le niveau  $k$*  pour une marche  $(S_n, n \geq 0)$  de pas  $\pm 1$ , une sous suite  $(S_n, i \leq n \leq j)$  telle que  $S_i = S_j = k$  et  $S_\ell < k$  pour tout  $\ell \in \{i + 1, i + 2, \dots, j - 1\}$ .

Si l'on définit  $H_1^{(k)}, \dots, H_{Z_k-1}^{(k)}$  les profondeurs des excursions successives sous le niveau  $k$  du processus de contour, c'est-à-dire

$$H_i^{(k)} = k - \inf_{t_i^k \leq n \leq t_{i+1}^k} C_n, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, Z_k - 1\},$$

alors on voit que  $H_i^{(k)}$  est le temps depuis le *plus récent ancêtre commun* (ou PRAC) entre les individus  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i} + \mathbf{1}$ . La figure 6 montre les valeurs des  $H_i^{(3)}$  dans le processus de contour de la figure 5. En comparant avec la figure 2, on peut vérifier que  $H_i^{(3)}$  est bien le temps depuis le PRAC de  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i} + \mathbf{1}$ .

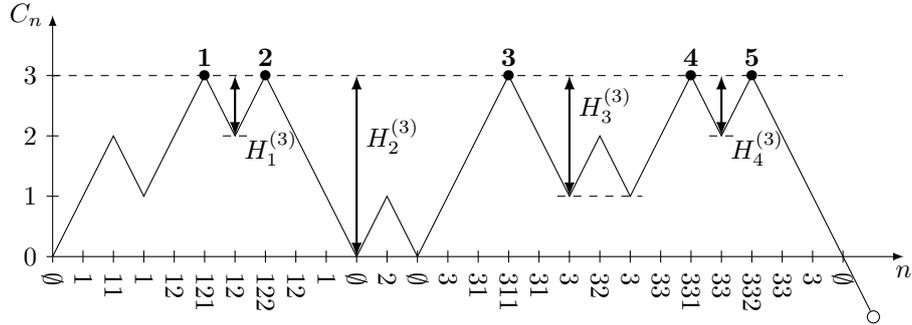
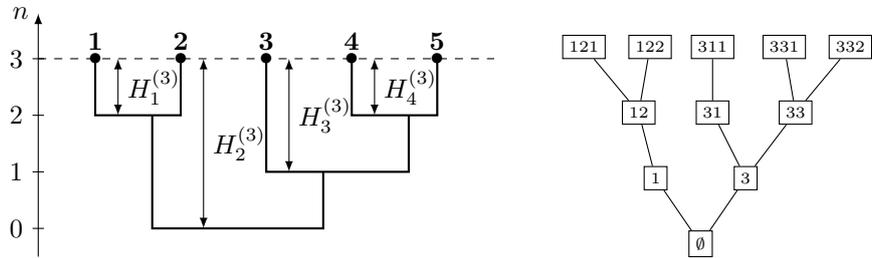


FIGURE 6 – Les profondeurs  $H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, H_3^{(k)}, H_4^{(k)}$  des excursions sous  $k = 3$  dans le processus de contour de l’arbre de la figure 2.

Remarquons que les valeurs de  $H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \dots, H_{Z_k-1}^{(k)}$  permettent de reconstruire la généalogie complète des individus vivants à la génération  $k$ , c’est-à-dire l’arbre obtenu en retirant tous les nœuds qui n’ont pas de descendant à la date  $k$ , comme montré dans la figure 7. En particulier, le temps écoulé depuis le PRAC de toute la population vivante au temps  $k$  est

$$T_{\text{PRAC}}^{(k)} = \sup\{H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \dots, H_{Z_k-1}^{(k)}\}. \quad (15)$$



(a) Généalogie des individus vivants à la date  $k = 3$  construite à partir des profondeurs des excursions  $H_1^{(3)}, H_2^{(3)}, H_3^{(3)}, H_4^{(3)}$  du processus de contour de la figure 6.

(b) Généalogie obtenue en retirant de l’arbre de la figure 2 tous les nœuds qui n’ont pas de descendants à la génération 3.

FIGURE 7 – Deux représentations équivalentes de la généalogie des individus vivants à la date  $k = 3$  dans l’arbre de la figure 2.

### 3.4 Généalogie des processus de Galton-Watson géométriques

On considère dans cette section un processus de Galton-Watson avec loi de reproduction géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On distinguera les deux

notions de lois géométriques sur  $\mathbb{N}$  et sur  $\mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \text{Geom}_{\mathbb{N}}(p) &= (p_k, k \in \mathbb{N}) \quad \text{avec} \quad p_k = p(1-p)^k, \\ \text{Geom}_{\mathbb{N}^*}(p) &= (p_k, k \in \mathbb{N}^*) \quad \text{avec} \quad p_k = p(1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Nous allons voir que dans ce cas, le processus de contour est une marche aléatoire de pas  $\pm 1$  (c'est-à-dire avec pas i.i.d.). Pour énoncer et prouver ce résultat dans le cas général (c'est-à-dire aussi bien pour les cas critiques, sous-critiques et sur-critiques), il faut considérer les arbres tronqués au-dessus d'un niveau donné. Plus précisément, pour  $\omega \in \Omega$  et  $k \geq 0$ , l'arbre  $\omega$  tronqué au-dessus de  $k$  est défini comme

$$\omega^{(k)} = \{u \in \omega : |u| \leq k\}.$$

Par exemple, l'arbre de la figure 2 tronqué au-dessus de 2 est donné en figure 8 (a). On appelle également contour tronqué au-dessus de  $k$  de l'arbre  $\omega$  le processus de contour de l'arbre  $\omega^{(k)}$ , et on le note  $C^{(k)} = (C_n^{(k)}, 0 \leq n \leq T^{(k)})$ , où

$$T^{(k)} = 2 \sum_{i=0}^k Z_i - 1.$$

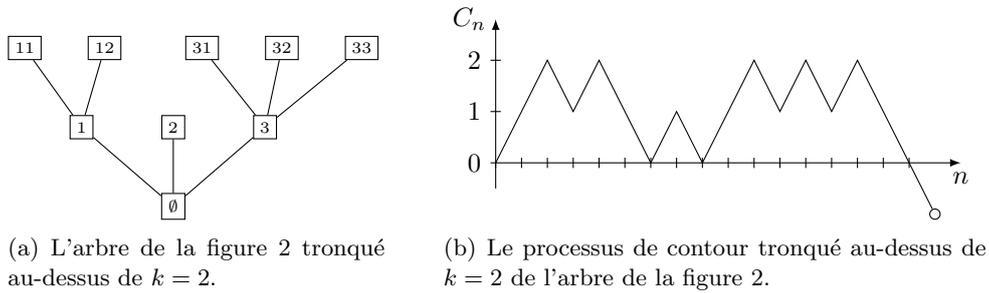
On obtient le contour tronqué  $C^{(k)}$  à partir du contour  $C$  en coupant toutes les parties de  $C$  au-dessus de  $k$  et en recollant les morceaux ainsi obtenus (cf. figure 8 (b) et (c))

**Proposition 3.11** *Si on munit l'espace des arbres  $\Omega$  de la loi  $\mathbb{P}_{\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)}$  avec  $p \in ]0, 1[$ , alors, pour tout  $k \geq 1$ , le processus de contour tronqué au-dessus du niveau  $k$  est une marche aléatoire de issue de 0 réfléchie sous  $k$  et arrêtée au premier temps d'atteinte de  $-1$ , dont les pas sont i.i.d. à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  de même loi que  $X$  où  $\mathbb{P}(X = -1) = p$  et  $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$ .*

Précisons que la marche aléatoire est dite réfléchie sous  $k$  lorsque sa probabilité de transition de  $k$  vers  $k-1$  vaut 1. Ainsi, la marche aléatoire du résultat précédent est une chaîne de Markov sur  $\{-1, 0, 1, \dots, k\}$  de matrice de transition

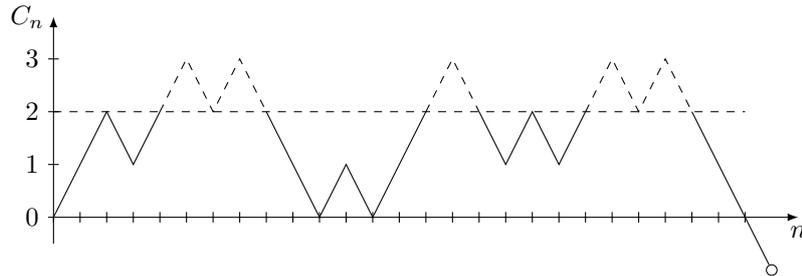
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p & 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p & 0 & 1-p \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ébauche de démonstration** Ce résultat se démontre par récurrence sur  $k \geq 1$ . L'argument complet est pénible à écrire à cause de problèmes de notations des pas du processus de contour, donc nous n'en donnons qu'une ébauche.



(a) L'arbre de la figure 2 tronqué au-dessus de  $k = 2$ .

(b) Le processus de contour tronqué au-dessus de  $k = 2$  de l'arbre de la figure 2.



(c) Le processus de contour de l'arbre de la figure 2. Les parties au-dessus du niveau  $k = 2$  sont indiquées en pointillés. Ce sont ces parties qu'il faut supprimer pour obtenir le processus de contour tronqué de la figure (c).

FIGURE 8 – Arbre et processus de contour tronqués.

Pour  $k = 1$ , le processus de contour tronqué au-dessus de 1 a pour pas

$$+1, -1, +1, -1, \dots, +1, -1, -1,$$

où le nombre de pas successifs  $+1, -1$  a pour loi  $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)$ . On vérifie facilement que la chaîne de Markov sur  $\{-1, 0, 1\}$  de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

issue de 0 fait également des pas  $+1, -1$  un nombre de fois géométrique de paramètre  $p$ , puis fait un pas  $-1$ . La propriété est donc vraie pour  $k = 1$ . Ceci tient au fait qu'à chaque passage en 0 on fait des pas i.i.d.  $X_0, X_1, \dots$  tels que  $\mathbb{P}(X_i = -1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 1)$  et que le premier indice  $i$  tel que  $X_i = -1$  est géométrique de paramètre  $p$ .

Supposons qu'elle est vraie pour  $k$  et montrons-la pour  $k+1$ . Remarquons que l'arbre  $\omega$  tronqué au-dessus du niveau  $k+1$  est formé de l'ancêtre et des sous-arbres  $T_1, T_2, \dots, T_{Z_1}$  tronqués au-dessus de leur  $k$ -ième génération. Ainsi, le contour de  $\omega$  tronqué au-dessus de  $k+1$  est formé du pas  $+1$  suivi des pas du contour de l'arbre  $T_1$  tronqué au-dessus de  $k$ , puis du pas  $+1$  suivis des pas du contour de l'arbre  $T_2$  tronqué au-dessus de  $k$ ,  $\dots$ , puis du

pas +1 suivis des pas du contour de l'arbre  $T_{Z_1}$  tronqué au-dessus de  $k$ , puis du pas  $-1$ . Remarquons que les pas  $+1$  et  $-1$  de la phrase précédente sont en fait des v.a.  $X_0, X_1, \dots$  comme ci-dessus.

Or, d'après le corollaire 2.8, sachant  $Z_1 = \ell$ , les arbres  $T_1, T_2, \dots, T_\ell$  sont des Galton-Watson i.i.d. de loi de reproduction  $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)$ . Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, les pas du contour de l'arbre  $T_i$  tronqué au-dessus de  $k$ , sont ceux d'une marche aléatoire de pas  $\pm 1$  réfléchi sous  $k$ . Tous ces processus de contour tronqués sont i.i.d. et indépendants des v.a.  $X_i$ . La marche obtenue en mettant ces pas bout-à-bout fait donc des pas i.i.d. de  $\pm 1$  tant qu'il n'a pas atteint  $-1$  ou  $k+1$ , il est absorbé en  $-1$  et réfléchi en  $k+1$ . Ceci conclut la récurrence.  $\square$

Le fait que le processus de contour d'un Galton-Watson géométrique est une marche aléatoire permet de déduire facilement de nombreuses propriétés de l'arbre de Galton-Watson. Notre premier exemple est la loi de  $Z_k$  sachant  $Z_k > 0$ .

**Proposition 3.12** *Dans un processus de Galton-Watson de loi de reproduction  $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ , pour tout  $k \geq 1$ , la loi de  $Z_k$  sachant  $Z_k > 0$  est  $\text{Geom}_{\mathbb{N}^*}(\alpha_k)$  où*

$$\alpha_k = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^{k+1}} \quad \text{si } p \neq \frac{1}{2}; \quad \alpha_k = \frac{1}{k+1} \quad \text{si } p = \frac{1}{2},$$

avec  $\beta = \frac{1-p}{p}$ .

**Démonstration** Conditionner  $Z_k$  à être positif revient à conditionner le processus de contour tronqué au-dessus de  $k$  à atteindre  $k$  avant  $-1$ . Si l'on note  $T_a$  le premier temps d'atteinte du point  $a$  par le processus de contour, la propriété de Markov au temps  $T_k$  implique que, pour tout ensemble  $i_1, \dots, i_n \in \{-1, 0, 1, \dots, k\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_k < T_{-1}, C_{T_k+1} = i_1, C_{T_k+2} = i_2, \dots, C_{T_k+n} = i_n) \\ = \mathbb{P}(T_k < T_{-1}) \mathbb{P}_k(C_1 = i_1, C_2 = i_2, \dots, C_n = i_n), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}_k(A) = \mathbb{P}(A \mid C_0 = k)$ . Ainsi, sachant  $\{T_k < T_{-1}\} = \{Z_k > 0\}$ , le processus  $(C_{T_k+n}, n \geq 0)$  est une marche aléatoire issue de  $k$  réfléchi sous  $k$  et arrêtée au premier temps d'atteinte de  $-1$ , et  $Z_k$  est égal au nombre d'atteintes de  $k$  par cette marche aléatoire. Soit  $\ell \geq 1$  et  $T_k^{(\ell)}$  le  $\ell$ -ième temps d'atteinte de  $k$  par cette marche aléatoire. Puisque le processus est réfléchi sous  $k$ , et par la propriété de Markov au temps  $T_k$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_k \geq \ell \mid Z_k > 0) &= \mathbb{P}_k(T_k^{(\ell)} < T_{-1}) = \mathbb{P}_{k-1}(T_k^{(\ell-1)} < T_{-1}) \\ &= \mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{-1}) \mathbb{P}_k(T_k^{(\ell-1)} < T_{-1}) = \mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{-1}) \mathbb{P}(Z_k \geq \ell-1 \mid Z_k > 0). \end{aligned}$$

Cette relation de récurrence implique que  $Z_k$  sachant  $Z_k > 0$  suit une loi géométrique de paramètre  $\mathbb{P}_{k-1}(T_{-1} < T_k)$ . Il reste à calculer la valeur de ce paramètre.

Pour tout  $\ell \in \{-1, 0, 1, \dots, k\}$ , on note  $\pi_\ell = \mathbb{P}_\ell(T_{-1} < T_k)$ . On a  $\pi_{-1} = 1$  et  $\pi_k = 0$ . La propriété de Markov au temps 1 implique que, pour tout  $0 \leq \ell \leq k-1$ ,

$$\pi_\ell = p\pi_{\ell-1} + (1-p)\pi_{\ell+1}.$$

On vérifie que la solution de cette récurrence est, pour tout  $\ell \in \{-1, 0, \dots, k\}$ ,

$$\pi_\ell = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k-\ell}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+1}} & \text{si } \frac{p}{1-p} \neq 1, \\ \frac{k-\ell}{k+1} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16)$$

On obtient la formule annoncée pour  $\mathbb{P}_{k-1}(T_{-1} < T_k) = \pi_{k-1}$ .  $\square$

**Exercice 19** Retrouver cette formule en calculant la fonction génératrice de  $Z_k$ .

Le processus de contour est également particulièrement bien adapté à l'étude du temps  $T_{\text{PRAC}}^{(k)}$  depuis le plus récent ancêtre commun de la population vivante au temps  $k$ . Pour pouvoir exploiter la formule (15), il faut déterminer la loi de la suite  $(H_i^{(k)}, 1 \leq i \leq Z_k)$ .

**Lemme 3.13** Pour tout  $\ell \geq 1$ , sachant  $\{Z_k = \ell\}$ , les v.a.  $H_1^{(k)}, H_2^{(k)}, \dots, H_{\ell-1}^{(k)}$  sont i.i.d. de loi, pour tout

$$\mathbb{P}(H^{(k)} \leq n) = \frac{1 - \alpha_n}{1 - \alpha_k}, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (17)$$

**Proposition 3.14** Dans un Galton-Watson de loi de reproduction  $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ , pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(T_{\text{PRAC}}^{(k)} \leq n \mid Z_k > 0) = \frac{\alpha_k}{\alpha_n}, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

**Démonstration** D'après le lemme précédent et (15), pour tout  $\ell \geq 1$  et  $0 \leq n \leq k$

$$\mathbb{P}(T_{\text{PRAC}}^{(k)} \leq n \mid Z_k = \ell) = \mathbb{P}(\max\{H_1^{(k)}, \dots, H_{\ell-1}^{(k)}\} \leq n) = \mathbb{P}(H_1^{(k)} \leq n)^{\ell-1},$$

où l'expression de  $\mathbb{P}(H_1^{(k)} \leq n)$  est donnée dans (17). D'après la proposition 3.12, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{\text{PRAC}}^{(k)} \leq n \mid Z_k > 0) &= \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}(T_{\text{PRAC}}^{(k)} \leq n \mid Z_k = \ell) \mathbb{P}(Z_k = \ell \mid Z_k > 0) \\ &= \sum_{\ell \geq 1} \alpha_k \left[ (1 - \alpha_k) \mathbb{P}(H_1^{(k)} \leq n) \right]^{\ell-1} \\ &= \frac{\alpha_k}{1 - (1 - \alpha_k) \mathbb{P}(H_1^{(k)} \leq n)}. \end{aligned}$$

On en déduit la formule annoncée en utilisant les expressions exactes de  $\alpha_k$  et  $\mathbb{P}(H_1^{(k)} < n)$ .  $\square$

**Démonstration du lemme 3.13** Nous faisons la démonstration pour  $\ell = 3$ . L'extension de la méthode aux autres valeurs de  $\ell \geq 1$  est immédiate. On suppose également que  $p \neq 1/2$  et on laisse la vérification du cas  $p = 1/2$  en exercice.

En utilisant la propriété de Markov aux temps d'atteinte successifs de  $k$  par le contour tronqué au-dessus de  $k$ , on obtient pour tout  $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_k = 3, H_1^{(k)} \leq i, H_2^{(k)} \leq j) \\ = \mathbb{P}_0(T_k < T_{-1}) \mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{k-i-1}) \mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{k-j-1}) \mathbb{P}_{k-1}(T_{-1} < T_k). \end{aligned}$$

De même,

$$\mathbb{P}(Z_k = 3) = \mathbb{P}(Z_k = 3 \mid Z_k > 0) \mathbb{P}(Z_k > 0) = \alpha_k (1 - \alpha_k)^2 \mathbb{P}_0(T_k < T_{-1}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1^{(k)} \leq i, H_2^{(k)} \leq j \mid Z_k = 3) \\ = \frac{\mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{k-i-1}) \mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{k-j-1}) \mathbb{P}_{k-1}(T_{-1} < T_k)}{\alpha_k (1 - \alpha_k)^2}. \end{aligned}$$

Or, on a déjà calculé les termes du membre de droite dans (16). En effet, puisque la loi de la marche aléatoire est invariante par translation (la loi des pas de la marche ne dépend pas de la valeur de la marche),  $\mathbb{P}_{k-1}(T_k < T_{k-i-1}) = \mathbb{P}_{i-1}(T_i < T_{-1}) = 1 - \frac{1-\beta}{1-\beta^{i+1}} = 1 - \alpha_i$ . De plus,  $\mathbb{P}_{k-1}(T_{-1} < T_k) = \alpha_k$ . On obtient alors

$$\mathbb{P}(H_1^{(k)} \leq i, H_2^{(k)} \leq j \mid Z_k = 3) = \frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_k} \frac{1 - \alpha_j}{1 - \alpha_k}.$$

La forme produit du membre de droite implique que les v.a.  $H_1^{(k)}$  et  $H_2^{(k)}$  sont indépendantes conditionnellement à  $\{Z_k = 3\}$ , de même loi donnée par (17).  $\square$

**Exercice 20** Pour quelles valeurs de  $p \in ]0, 1[$  le Galton-Watson de loi de reproduction  $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)$  est-il sous-critique ? Déterminer dans ce cas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{\text{PRAC}}^{(k)} \leq n \mid Z_k > 0).$$

**Exercice 21** Dans le cas critique, montrer que  $T_{\text{PRAC}}^{(k)}/a_k$  converge en loi vers une v.a. non triviale pour un choix convenable de la suite  $a_k \rightarrow +\infty$ .

## Références

- [1] K. B. ATHREYA et P. E. NEY : *Branching processes*. Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.
- [2] N. CHAMPAGNAT et A. LAMBERT : The process of coalescence times in (some) evolving general branching processes. In preparation, 2015.
- [3] B. CHAUVIN : *Arbres aléatoires et processus de branchement*. Notes de cours, DEA de Modélisation Stochastique et Statistique, Orsay, 2001. <http://chauvin.perso.math.cnrs.fr/coursbranchement2001.ps>.
- [4] T. E. HARRIS : *The theory of branching processes*. Springer-Verlag, 1964.
- [5] P. JAGERS : *Branching processes with biological applications*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], London, 1975. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics—Applied Probability and Statistics.
- [6] A. LAMBERT : The contour of splitting trees is a Lévy process. *Ann. Probab.*, 38(1):348–395, 2010.
- [7] A. LAMBERT : *Some aspects of discrete branching processes*. Lecture Notes of the CIMPA School of April 2010 in Saint-Louis, Sénégal, <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~pardoux/Ecole.CIMPA/CoursALambert.pdf>, 2010.
- [8] R. LYONS et Y. PERES : *Probability on trees and networks*. <https://www.uni-due.de/~hm0110/book.pdf>, 2010.
- [9] P. VALLOIS : *Modélisation stochastique et simulations*. Ellipse, 2007.