



HAL
open science

Robustesse des systèmes complexes : étude du rôle de l'aléa dans la dynamique des automates cellulaires

Nazim A. Fatès

► **To cite this version:**

Nazim A. Fatès. Robustesse des systèmes complexes : étude du rôle de l'aléa dans la dynamique des automates cellulaires. Automates cellulaires et gaz sur réseau [nlin.CG]. Université de Lorraine, 2023. tel-04165486

HAL Id: tel-04165486

<https://inria.hal.science/tel-04165486>

Submitted on 19 Jul 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Robustesse des systèmes complexes : étude du rôle de l'aléa dans la dynamique des automates cellulaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 24 mai 2023

pour l'obtention d'une

Habilitation de l'université de Lorraine

(mention informatique)

par

Nazim FATÈS

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Bernard DE BAETS	professeur à l'université de Gand
	Bernadette CHARRON-BOST	directrice de recherche au CNRS, ÉNS Paris
	Bastien CHOPARD	professeur à l'université de Genève
<i>Examineurs :</i>	Philippe CHASSAING	professeur à l'université de Lorraine
	Enrico FORMENTI	professeur à l'université Côte d'Azur
	Emmanuel JEANDEL	professeur à l'université de Lorraine

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Dans mon pays, les tendres preuves du printemps et les oiseaux mal habillés sont préférés aux buts lointains.

La vérité attend l'aurore à côté d'une bougie. Le verre de fenêtre est négligé. Qu'importe à l'attentif.

Dans mon pays, on ne questionne pas un homme ému.

Il n'y a pas d'ombre maligne sur la barque chavirée.

Bonjour à peine, est inconnu dans mon pays.

On n'emprunte que ce qui peut se rendre augmenté.

Il y a des feuilles, beaucoup de feuilles sur les arbres de mon pays. Les branches sont libres de n'avoir pas de fruits.

On ne croit pas à la bonne foi du vainqueur.

Dans mon pays, on remercie.

René Char

En acceptant la tâche de participer au jury, les rapporteurs et examinateurs de cette thèse m'honorent grandement. Qu'ils reçoivent ici l'expression de ma reconnaissance sincère et, par avance, de mes remerciements pour leurs remarques qui contribueront à l'amélioration de ce texte qui n'est que l'esquisse d'un travail à venir, et que nous espérons plus complet.

Les personnes rencontrées lors ce parcours de recherches de plus de vingt ans sont trop nombreuses pour être saluées individuellement. Qu'il me soit donc permis simplement de dire que ce sont les nombreux « coups d'aile », les sourires, les paroles bienveillantes, les soins et les bons conseils qui ont rendu possible cette aventure. Le retrait étant propice à l'éclosion, qu'on me permette de garder tous ces noms enfouis dans un sillon, afin que germent à l'abri les fruits issus de l'affection et de l'amitié.

Sommaire

Introduction	1
---------------------	----------

Partie I Approche analytique des automates cellulaires asynchrones	7
---	----------

Chapitre 1

Classification des automates cellulaires élémentaires avec mise à jour totalement asynchrone

1.1 Définitions	11
1.2 Une « mécanique élémentaire » des ACE asynchrones	13
1.2.1 Mécanique élémentaire	16
1.2.2 Graphe de de Bruijn	16
1.2.3 Le tableau des réécritures	18
1.2.4 Fonctions potentiels	18
1.3 Règles à convergence logarithmique	19
1.4 Règles à convergence linéaire	23
1.5 Règles à convergence quadratique	26
1.6 Règles à convergence exponentielle	26
1.7 Règles non convergentes	30

Chapitre 2

Récurrence des automates cellulaires élémentaires

2.1 Définitions	34
2.2 Conditions de non-récurrence	34
2.3 Récurrence de dix-huit règles	35
2.4 Détermination des classes de récurrence	35
2.4.1 Règles avec un nombre de classes de communication exponentiel en n	36
2.4.2 Règles avec un nombre linéaire de classes de communication	36
2.4.3 Règles avec deux classes de communication	38

2.4.4	Règle avec une unique classe de communication	38
2.5	Questions	40

Chapitre 3

Une cartographie de travaux sur la question de l'asynchronisme

3.1	Approches expérimentales	42
3.1.1	Études générales	43
3.1.2	Transitions de phase	43
3.1.3	Coalescence	44
3.1.4	Deux variations de la définition de l'asynchronisme	45
3.1.5	Asynchronisme et bruit	45
3.2	Approches analytiques	46
3.2.1	Classifications à partir de chaînes de Markov	46
3.2.2	Analyse des densités asymptotiques	47
3.2.3	Modèles m-asynchrones	47
3.3	Calculer avec des automates cellulaires asynchrones	47
3.3.1	Simulation de modèles (a)synchrones par des modèles (a)synchrones	47
3.3.2	Dépendance à l'ordre de mise à jour	48
3.3.3	Généralisations	49
3.4	Modéliser avec des automates cellulaires asynchrones	49
3.4.1	Théorie des jeux et écologie	49
3.4.2	Phénomènes de synchronisation physiques et biologiques	50
3.4.3	Résolution de problèmes	50
3.5	Autres systèmes complexes	51
3.5.1	Liens aux systèmes multi-agents	51
3.5.2	Autre modèles	51

Partie II Approche expérimentale des systèmes complexes 53

Chapitre 4

Modèle de Greenberg-Hastings

4.1	Présentation du modèle	56
4.2	Transitions de phase	57
4.3	Robustesse du phénomène	59
4.4	Perturbation de la topologie	59
4.5	Développements analytiques	61

4.6	Problème inverse : diagnostic décentralisé	63
-----	--	----

Chapitre 5

Un modèle de formation d'essaims

5.1	Une première observation	65
5.2	Définition du modèle	66
5.2.1	Invariant du damier	68
5.2.2	Récurrence de la chaîne de Markov	68
5.3	Exploration des motifs stables	68
5.4	Quantification de l'ordre	68
5.4.1	Formation de bandes diagonales	69
5.4.2	Phase avec motifs à damiers	70
5.4.3	Phase d'amas	72

Chapitre 6

Turmites

6.1	Des modèles discrets simples	75
6.1.1	Turmites	76
6.1.2	Neuf variations	77
6.2	Fondations	77
6.2.1	Cycles	79
6.2.2	Planeurs	80
6.2.3	Blocages	81

Partie III	Résolution de problèmes inverses	83
-------------------	---	-----------

Chapitre 7

Problème de la classification de la densité
--

7.1	Formalisation du problème	86
7.2	Structure de l'espace des AC probabilistes	87
7.3	Règles de Fukés et Schüle	88
7.4	Règle de Circulation-Majorité	91
7.5	Structures infinies	92

Chapitre 8

Problème de la synchronisation globale

8.1	Formalisation du problème	96
-----	-------------------------------------	----

8.2	Propriétés élémentaires	97
8.3	Cas stochastique binaire	98
8.4	Généralisation au cas multicolore	100

Chapitre 9

Modèle bio-inspiré pour le problème du regroupement décentralisé

9.1	Présentation du problème et des travaux reliés	103
9.2	Description du modèle	105
9.3	Observation du phénomène d'agrégation	106
9.3.1	Formation de foyers et effet de <i>pacemaker</i>	106
9.3.2	Explications de la dynamique du modèle	109
9.3.3	Robustesse du modèle	109
9.4	Développements du modèle	110
9.4.1	Problème de l'infotaxie collective	110
9.4.2	Des amibes & des robots	112
9.4.3	Des amibes pour classer des données	114

Ouvertures et pistes de recherche	117
--	------------

Bibliographie

Introduction

Systèmes complexes

La question de l'émergence d'ordre dans les systèmes complexes s'identifie peu ou prou à la question de la *morphogenèse*, telle que l'a posée TURING en 1952 [244] :

Comment un système constitué d'éléments initialement indifférenciés peut-il s'organiser sans intervention extérieure pour faire apparaître un motif, c'est-à-dire former un tout qui soit plus complexe que la somme de ses parties ?

Ainsi formulée, la question n'a pas encore un sens scientifique : ni le mathématicien ni le physicien ne peuvent s'en emparer telle quelle pour échafauder un système d'explications. Il faut en effet préciser les termes de la question : Comment se définit le système et quels sont ses éléments ? Comment interagissent-ils ? Comment évaluer l'organisation du tout ? Comment s'assurer que l'« extérieur » n'intervient pas, ou peu ? etc.

Les automates cellulaires peuvent être vus comme un moyen pour aborder cette question, pour l'aborder de manière *radicale* pourrait-on ajouter. Ce modèle mathématique nous permet de définir des systèmes constitués d'éléments discrets appelés *cellules* ; ces éléments sont disposés sur une grille régulière et interagissent de façon locale à chaque pas de temps. Cette localité se définit à l'aide d'une fonction appelée *voisinage* qui dit comment chaque cellule est liée à un ensemble fixe de cellules proches, déterminées par une relation uniforme (le même voisinage relatif est appliqué partout). Classiquement, les interactions surviennent de manière synchrone, c'est-à-dire que toutes les cellules changent d'état en même temps. Les cellules ont un espace d'états fini, et on suppose généralement que cet espace est « petit », voire « minimal », c'est-à-dire que les règles d'interaction entre cellules ne sont pas obtenues par passage du continu au discret mais par une prise en compte directe des transformations entre états.

Le recueil le plus connu du poète Francis Ponge s'intitule *Le parti pris des choses*. On pourrait dire par analogie que l'utilisation d'automates cellulaires pourrait s'appeler *le parti pris discret des choses*, ou, plutôt, un parti pris discret de la modélisation. Depuis les années 1950 et les travaux fondateurs de von Neumann et Ulam [250], les travaux sur ce modèle de calcul se sont développés dans de nombreuses directions. Pour une classification grossière des travaux sur ce thème, nous proposons de distinguer trois types de questions :

1. Celles touchant *aux propriétés calculatoires* du modèle. L'automate cellulaire est vu comme une machine à calculer reliant des entrées et des sorties. On cherche alors à faire des calculs autrement qu'avec une machine de Turing ; le parallélisme et la localité permettent notamment de s'approcher de ce qu'on observe dans la nature, où de nombreux éléments interagissent en vue d'une fin commune.
2. Celles qui se rapportent à *la théorie des systèmes dynamiques*. Les automates cellulaires sont vus comme des objets qui évoluent dans un espace structuré. De nombreuses questions peuvent être posées sur la dynamique : on peut par exemple analyser si les tra-

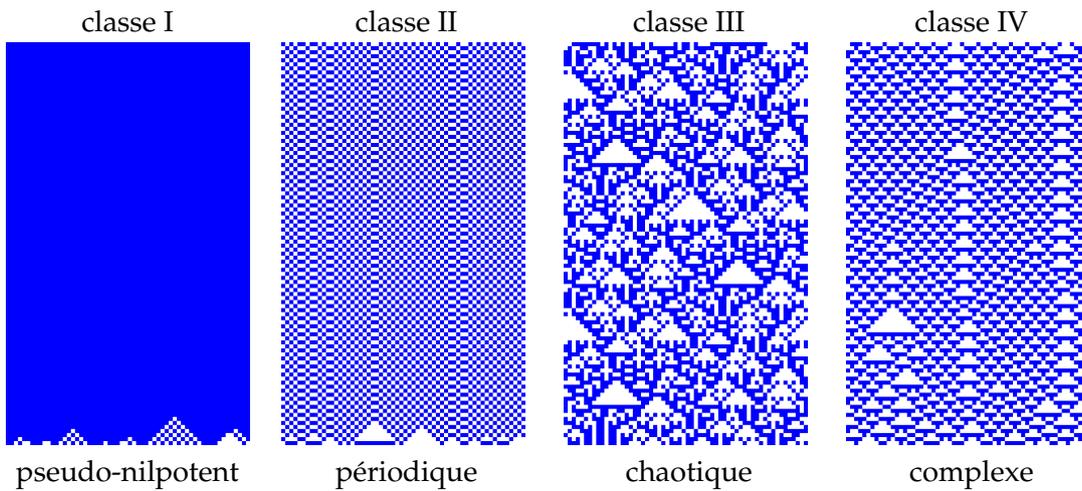


FIGURE 1 – Diagrammes espace-temps de quatre automates cellulaires correspondant aux quatre classes de Wolfram. Le temps va du bas vers le haut. Les carrés blancs et bleus représentent les états 0 et 1, respectivement.

jectoires partant d'un ensemble de configurations initiales données sont périodiques, chaotiques ou complexes, et chercher à comprendre comment la forme de la règle locale induit tel ou tel type de comportement. L'esprit général consiste à rechercher les propriétés qui permettent de décrire comment l'automate cellulaire parcourt l'espace des configurations au cours de son évolution et la « forme » des trajectoires obtenues.

3. Celles qui sont en lien avec des *problèmes de modélisation*. On voit alors les automates cellulaires comme un moyen privilégié de simplifier une situation réelle, issue de l'observation d'un système naturel ou artificiel. Les simplifications radicales opérées ne visent pas à rendre compte fidèlement du réel observé mais plutôt à en donner une version simplifiée mais non triviale. L'observateur, par le biais de simulations numériques et d'études analytiques cherche à expliquer comment les lois qu'il a introduites au niveau local produisent tel ou tel comportement qualitatif au niveau global.

La question de la complexité

Depuis les années 1970, les automates cellulaires ont donné lieu à un foisonnement de questions liées à la *complexité algorithmique*. En effet, on sait que ce modèle de calcul étant universel au sens Turing, aucune question ne sera décidable en toute généralité (analogue du théorème de Rice). En revanche, que se passe-t-il quand on se restreint à des familles particulières de règles, par exemple en fixant la dimension ou le nombre d'états, ou lorsque l'on ne considère que des configurations finies? Prenons par exemple le problème suivant :

Prédécesseur AC
 Entrée : Un automate cellulaire F (règle globale) et une configuration x finie
 Question : Existe-t-il un antécédent a tel que $F(a) = x$?

On sait que la version unidimensionnelle de ce problème est dans la classe P alors qu'en dimension supérieure ou égale à deux, le problème est NP -complet (voir par exemple l'ouvrage de Moore et Mertens [172], p. 159). Les questions de complexité algorithmique cherchent à relier la quantité de calculs à effectuer en fonction de la taille de l'entrée. On constate qu'il est

assez aisé de rencontrer des questions difficiles, même si l'on se restreint à d'espaces de règles simples : par exemple on s'est longtemps interrogé pour savoir s'il existait un *automate cellulaire élémentaire*¹ qui soit universel au sens de Turing. Autre exemple : jusqu'à présent, on ne sait pas décider de la périodicité de la suite binaire générée par la colonne centrale d'un automate cellulaire élémentaire particulier (règle n° 30) quand on part d'une configuration qui contient un unique 1. Les lecteurs qui souhaitent en savoir plus sur ce sujet peuvent se rapporter au site de Wolfram où ce problème, réprécisé selon trois questions différentes, a été dotée de trois prix de dix mille dollars chacun².

Les problèmes liés à la théorie de la complexité algorithmique cherchent à examiner les différences entre les modèles de calculs classiques séquentiels et le parallélisme massif des automates cellulaires. On peut par exemple développer une notion d'universalité plus forte, appelée *universalité intrinsèque*, car, sur une grille infinie, on dispose d'une infinité de processeurs pouvant chacun effectuer un calcul local à chaque pas de temps [187].

Plutôt que de chercher à décrire précisément le comportement de chaque règle, on peut également chercher à les regrouper selon diverses catégories de comportement : c'est la question de la *classification* des automates cellulaires. La figure 1 montre quatre diagrammes espace-temps d'automates cellulaires élémentaires. Même si l'on ne connaît pas le détail des règles qui ont généré ces images, on perçoit intuitivement qu'elles correspondent à des comportements qualitatifs différents. À la suite de la définition informelle de ces quatre classes par Wolfram en 1984 [38], différentes tentatives de formalisation sont apparues, dont la plus fameuse est sans doute celle proposée par Kůrka en 1997 [142]. S'il est bien sûr hors de portée de décider de l'appartenance de toute règle aux classes ainsi définies formellement, on peut néanmoins tenter d'avoir des classifications complètes pour des espaces de règles *restreints* : de façon surprenante, il a fallu attendre 2012 et le travail rigoureux et précis de Schůle et Stoop pour disposer enfin d'une classification complète des 256 automates cellulaires élémentaires (ACE) selon les critères de Kůrka [227].

On constate donc que les difficultés sont nombreuses pour parvenir à bâtir une théorie unifiée des automates cellulaires, qui permettrait d'analyser le comportement d'une règle en partant de sa définition locale. Une autre approche consiste à décrire le comportement des automates cellulaires à l'aide de simulations numériques, mais cette façon de faire laisse le mathématicien insatisfait, notamment parce qu'elle revêt toujours un caractère partiel : sur combien d'observations s'appuie-t-on ? Comment les paramètres des simulations ont-ils été choisis ? etc.

Position de notre travail : la question de la robustesse

Par son caractère simplificateur, l'utilisation d'un automate cellulaire, que ce soit pour comprendre les effets du parallélisme massif, pour modéliser un phénomène ou pour inventer une nouvelle méthode de calcul, relève donc toujours d'un parti pris. Comme l'ont exprimé plusieurs auteurs, la difficulté est de savoir quand on fait une observation « quelle part est due à la structure discrète du modèle et quelle part est due aux règles locales » [37]. Autrement dit, que se passe-t-il si les *hypothèses structurelles* du modèle sont modifiées tout en gardant la règle locale inchangée ? Le système va-t-il changer du tout au tout ou observera-t-on un effet modéré de ces perturbations, voire pas d'effet du tout sur le long terme ?

1. Un automate cellulaire élémentaire est défini avec une règle unidimensionnelle à états binaires et un voisinage constitué de la cellule et de ses deux voisins immédiates. Voir le paragraphe 1.1 p. 11.

2. <http://rule30prize.org/>

Nous regroupons ces interrogations sous le terme générique de *question de la robustesse*. Cette question forme le cœur de notre travail et motive notre recherche. Ce mémoire aborde cette question en étudiant un certain nombre de cas simples et vise, autant que faire se peut, à dégager quelques observations clés pour éclairer le problème. Nous regarderons ce qui se produit si l'on ne travaille plus sur une grille régulière, si les transitions des cellules ne sont plus synchrones, si ces transitions sont perturbées par un bruit, etc.

Comme pour la question de la complexité, on se gardera de toute prétention à la généralité : même après une vingtaine d'années de recherches, nous sommes bien loin de disposer d'une théorie qui nous permettrait d'unifier les observations. Notre objectif devra donc être modeste et se borner à quelques explorations en vue d'essayer d'identifier les limites des différentes approches, en particulier savoir quand l'utilisation de l'analyse mathématique est pertinente et quand il est préférable de recourir aux simulations numériques. Notre souhait est que ce travail puisse préparer le terrain aux personnes qui souhaiteront poursuivre cette aventure scientifique. Ce mémoire vise donc avant tout à effectuer un passage de relai, et nous déléguons ainsi la tâche d'explorer plus à fond la question de la robustesse à nos « neveux », suivant ainsi une longue tradition initiée par « ce cavalier français parti d'un si bon pas »³ :

Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

R. Descartes, *La géométrie*

3. Charles PÉGUY, *Note conjointe sur M. Descartes et la philosophie cartésienne*.

Plan du mémoire

Ce mémoire est divisé en trois parties, elles-mêmes divisées en trois chapitres.

La *première partie* est consacrée à traiter l'approche analytique. Nous nous concentrons sur l'analyse des effets de la mise à jour asynchrone des automates cellulaires. Nous présentons tout d'abord les résultats que nous avons établis sur la dynamique asynchrone des automates cellulaires élémentaires (chap. 1) avec une mise à jour totalement asynchrone, c'est-à-dire quand une unique cellule est choisie pour être mise à jour à chaque pas de temps. Nous étudions ensuite (chap. 2) les propriétés de récurrence de ces systèmes, c'est-à-dire leur propension à revenir à leur état initial. Le chapitre 3 présente un état de l'art partiel, qui permettra de faire connaître aux lecteurs un ensemble de recherches liées aux problèmes posés par une mise à jour non synchrone des cellules.

Dans la *deuxième partie*, nous abordons l'approche expérimentale à l'aide de simulations numériques. Nous cherchons à savoir quels sont les aspects de la robustesse des systèmes complexes qu'il est préférable d'aborder en observant le comportement des modèles plutôt qu'en cherchant à établir une description analytique exacte. Le premier volet est le chapitre 4 ; il concerne le phénomène de réaction-diffusion modélisé avec l'automate cellulaire de Greenberg-Hastings. Le chapitre 5 présente le phénomène de formation d'essaims et sa modélisation avec un automate cellulaire de gaz sur réseaux (*lattice-gas cellular automata*). Nous présentons ensuite une étude d'un système multi-agent « ultra-simple » avec le modèle des termites, également appelées *fourmis de Langton* (chap. 6).

La *troisième partie* traite du rôle de l'aléa pour la résolution de problèmes inverses. Dans cette approche, on se donne une tâche à résoudre et on cherche à trouver des automates cellulaires qui apportent une solution de manière stricte ou approchée. Le premier problème traité est le problème de la classification de la densité (chap. 7). Nous montrons que les automates cellulaires stochastiques permettent d'obtenir des solutions aussi proches que l'on souhaite d'une solution parfaite, alors même qu'il n'existe justement pas de solution parfaite. Dans le chapitre 8, nous présentons le problème de la synchronisation globale, où, là encore, l'aléa permet d'obtenir des solutions simples et dont on peut quantifier la dynamique à l'aide des outils analytiques vus dans la première partie. Enfin, dans le chapitre 9 nous quittons le monde des automates cellulaires stricts pour aborder ce qui est plus un « système de particules », voire un « système multi-agent réactif ». Ce modèle, inspiré du comportement de l'amibe sociale *Dictyostelium discoideum*, permet de regrouper un grand nombre de particules initialement dispersées de manière décentralisée et avec des interactions locales et simples.

Le mémoire se clôt sur quelques remarques permettant de mettre en perspective nos recherches : nous proposons un florilège de questions qui émanent des différents thèmes explorés. Il ne s'agit évidemment d'une sélection partielle, que les lecteurs compléteront à leur guise, à leur *discrétion* avons-nous envie de dire...

Première partie

**Approche analytique des automates
cellulaires asynchrones**

1

Classification des automates cellulaires élémentaires avec mise à jour totalement asynchrone

Ce chapitre présente un résumé des travaux en lien avec la classification des automates cellulaires asynchrones, publiés dans actes de conférences ou des revues [97, 75, 78]. À la suite d'une invitation à faire paraître un tutoriel sur le sujet, ils ont été synthétisés dans un article paru en 2020 [87], article dont nous reprenons ici la structure en l'allégeant.

Nous commençons notre voyage au sein des automates cellulaires par une question touchant à leur *classification*. Les 256 règles que nous allons examiner forment la famille la plus étudiée du domaine. Nous présentons différents résultats ayant trait à leur comportement avec une mise à jour totalement asynchrone. Dans une approche strictement concentrée sur la question de la robustesse, on aurait aimé pouvoir graduellement passer du cas synchrone au cas asynchrone, par exemple en utilisant le mode α -synchrone avec un taux de synchronisme diminuant de façon continue. Malheureusement, l'obtention de résultats analytiques pour ce cas est extrêmement difficile et conduit à des phénomènes curieux comme des transitions de phase. Aussi, nous nous contentons ici de présenter le cas extrême où une seule cellule est mise à jour à chaque pas de temps. Comme nous allons le voir, cela simplifie les choses mais sans les rendre triviales, loin de là.

TABLE 1.1 – Règles démontrées ou conjecturées logarithmiques selon le PTCM.

diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		0	EFGH	→	←]0[*1*	LOG
		2	BFGH	↔	←]0[*1*	LOG
		4	FGH	→	←]0[]1[LOG
		5	AFGH	→	←]0[]1[LOG
		8	EGH	.	←]0[*1*	LOG
		10	BEGH	←	←]0[*1*	LOG?
		12	GH	.	←]0[]1[LOG
		13	AGH	.	←]0[]1[LOG
		18	BCEFGH	↔	↔]0[*1*	LOG?
		24	CEGH	.	↔]0[*1*	LOG?
		26	BCEGH	←	↔]0[*1*	LOG?
		32	DEFGH	→	←	*0*	*1*	LOG
		34	BDEFGH	↔	←	*0*	*1*	LOG

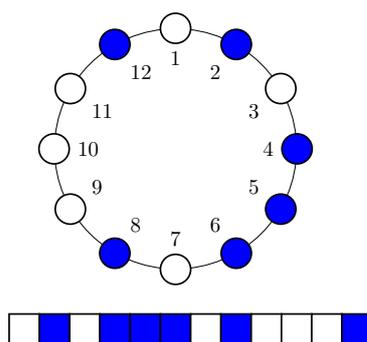
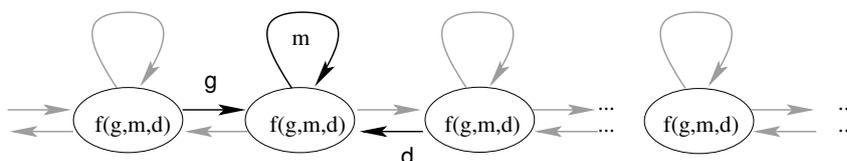
FIGURE 1.1 – Représentation d’une configuration sur $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ en anneau et en ligne.

FIGURE 1.2 – Représentation de la fonction de transition d’un ACE.

1.1 Définitions

Un automate cellulaire élémentaire (ACE) est un automate cellulaire binaire, unidimensionnel, avec un voisinage $V = \{-1, 0, 1\}$.

Nous nous intéressons ici au cas *fini* et l’on supposera que les cellules sont disposées en anneau. L’ensemble des cellules est donc représenté par $\mathcal{L} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

L’état de l’automate à un instant donné est appelé une *configuration*; l’ensemble des configurations est noté $\mathcal{E}_n = \{0, 1\}^{\mathcal{L}}$, il correspond ici à l’ensemble des états des cellules (voir figure 1.1).

L’évolution d’un ACE est gouvernée par sa fonction de transition locale $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$. Cette fonction dicte comment une cellule met à jour son état en fonction de son état propre et des états des cellules de droite et de gauche.

On appelle *transition* la relation entre un triplet d’états (g, m, d) et la valeur $f(g, m, d)$, où par convention g, m, d sont respectivement l’état de la cellule à gauche, l’état de la cellule mise à jour et l’état de la cellule à droite (cf. fig. 1.2). Si $f(g, m, d) \neq m$ la transition est *active* et dans le cas contraire elle sera dite *passive*. Par extension, pour une configuration x donnée, on dira qu’une cellule $i \in \mathcal{L}$ est *active* ou *passive* selon que la transition qui s’applique en i est respectivement active ou passive.

Mode totalement asynchrone

Nous nous intéressons ici au cas où un automate cellulaire est mis à jour de façon *totalement asynchrone*, c’est-à-dire qu’une seule cellule est mise à jour à chaque pas de temps; cette cellule est tirée au hasard de manière uniforme et sans mémoire d’un pas de temps au suivant.

On dénote par $(U_t)_{t \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}$ la suite de cellules qui sont tirées pour être mises à jour. L’évolution d’un ACE est donnée par la suite de configurations $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$ ainsi définies : $x^0 = x$ et

$x^{t+1} = F(x, U_t)$, avec :

$$\forall i \in \mathcal{L}, x_i^{t+1} = \begin{cases} f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) & \text{si } i = U_t \\ x_i^t & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans notre cas, on considère que (U_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes qui tirent un élément de manière uniforme dans \mathcal{L} . Comme la suite (U_t) est connue, on se contentera d'écrire simplement $x^{t+1} = F(x^t)$ pour décrire l'évolution du système à partir de la configuration x^t . On considère que (x^t) est un processus stochastique, c'est-à-dire que chaque x^t est une variable aléatoire. Cette notation simplifie les choses mais n'est pas tout à fait rigoureuse; elle cache en effet les difficultés inhérentes à la définition des variables aléatoires en théorie des probabilités. Pour une définition plus canonique de ces objets, on pourra par exemple se rapporter à un article de Marcovici et Mairesse où les automates cellulaires sont définis en termes de transformations sur des distributions définies « proprement » à l'aide de la théorie de la mesure [162].

Critère de classification

Une configuration $x \in \mathcal{E}_n$ est appelée *point fixe* si la relation $F(x) = x$ est un événement certain. Ceci revient à dire que toutes les cellules sont passives. On note \mathcal{FP} l'ensemble des points fixes.

On remarquera que la propriété d'être un point fixe est indépendante du mode de mise à jour : en effet, si une configuration n'est constituée que de cellules passives, mettre à jour tout ou partie des cellules ne change rien. L'ensemble des points fixes est donc conservé lors du passage du synchrone à l'asynchrone.

Notre but est ici de classer les automates cellulaires en fonction du temps moyen mis pour atteindre un point fixe. On note $T(x)$ la variable aléatoire qui correspond au temps mis pour atteindre un point fixe :

$$T(x) = \min\{t \in \mathbb{N}, x^t \in \mathcal{FP}\}.$$

Lorsque le système n'atteint jamais de point fixe, cette valeur vaut l'infini.

On remarque que si l'on souhaite comparer les modes de mise à jour synchrone et asynchrone, il peut être intéressant de considérer qu'une unité de temps en mode totalement synchrone correspond à n pas de temps en mode asynchrone. On examinera donc de préférence un temps de convergence *rééchelonné* (*rescaled* en anglais), obtenu en divisant $T(x)$ par n .

Pour une taille d'anneau donnée n , on définit le *pire temps de convergence moyen* (PTCM) selon :

$$\tau(n) = \frac{1}{n} \max_{x \in \mathcal{E}_n} \mathbb{E}\{T(x)\}.$$

Autrement dit, nous nous intéressons à la valeur maximale du temps de convergence rééchelonné pour toutes les configurations d'une taille donnée. Lorsque la limite de $\tau(n)$ pour n grand n'existe pas, on dira que l'automate est *non convergent*.

Notre objectif est de trouver comment se comporte $\tau(n)$ pour les 256 automates cellulaires élémentaires. L'intuition qui motive cette étude est que le comportement qualitatif de l'automate influera la façon dont τ varie avec le nombre de cellules n . On espère donc trouver des familles de comportement qui permettent de séparer de manière analytique les différentes classes de règles.

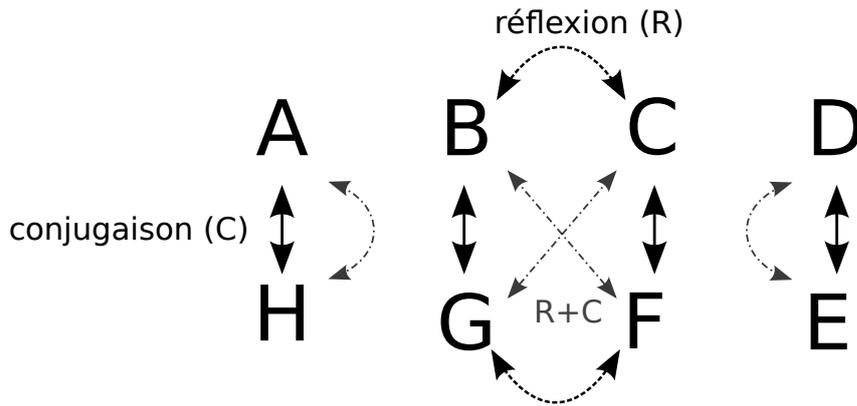


FIGURE 1.3 – Illustration des symétries des automates cellulaires.

Rappelons les notations usuelles : $\tau(n) \in \mathcal{O}(\phi(n))$ signifie que ϕ majore τ à une constante près, et $\tau(n) \in \Theta(\phi(n))$ signifie que ϕ minore τ à constante près et majore τ à une constante près.

Par souci de simplicité, on emploiera parfois simplement le terme de *temps de convergence* pour parler de τ dans la suite.

TABLE 1.3 – Notation par transitions: lettres associées à chaque transition active.

A	B	C	D
000	001	100	101
010	011	110	111
E	F	G	H

1.2 Une « mécanique élémentaire » des ACE asynchrones

En suivant une convention introduite par Wolfram, nous désignerons chaque ACE f par un code décimal $W(f)$ obtenu en convertissant les bits de la table de transition de f en un nombre compris entre 0 et 255 : $W(f) = f(0, 0, 0) \cdot 2^0 + f(0, 0, 1) \cdot 2^1 + \dots + f(1, 1, 1) \cdot 2^7$.

En complément, nous introduisons une autre représentation des ACE, que nous appelons le *code par transitions*, qui consiste à désigner un ACE f avec un mot formé des lettres $\{A, B, \dots, H\}$, où chaque lettre dénote une *transition active* de la règle. La correspondance entre les lettres et les transitions est donnée dans la table 1.3.

Exemple 1. Considérons la règle du XOR $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$, où \oplus désigne le ou exclusif. Le code décimal associé à cette règle est 150. Ses transitions actives sont : $001 \rightarrow 1$ (B), $100 \rightarrow 1$ (C), $011 \rightarrow 0$ (F), $110 \rightarrow 0$ (G), ce qui donne comme code par transitions : BCFG.

Symétries des ACE

Un point important qui concerne les automates cellulaires est la connaissance des symétries qui ne modifient pas leurs propriétés globales.

La première de ces symétries est la *réflexion*, où l'on échange les directions droite et gauche. Notons par $R : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ la fonction qui opère sur les configurations et telle que : $\forall x \in \mathcal{E}_n, y =$

$R(x) \implies \forall i \in \mathcal{L}, y_i = x_{n-1-i}$. Pour une fonction locale $f(x, y, z)$ et on définit le symétrique par réflexion de f par $f^R(x, y, z) = f(z, y, x)$. Si F et F^R sont les fonctions globales associées respectivement à f et f^R , alors on a $R \circ F = F^R \circ R$ et $F^R = R \circ F \circ R$. Autrement dit, partant d'une configuration donnée, il est équivalent de regarder l'image de cette configuration par F dans un miroir ou de regarder l'image de F^R sur la configuration retournée par un miroir.

Il en va de même pour la *symétrie de conjugaison*, que l'on définit selon : $\forall x \in \mathcal{E}_n, y = C(x) \implies \forall i \in \mathcal{L}, y_i = 1 - x_i$. La règle locale conjuguée de f est $f^C(x, y, z) = 1 - f(1 - x, 1 - y, 1 - z)$. Là aussi, on a l'invariance suivante : $C \circ F = F^C \circ C$ qui s'écrit aussi : $F^C = C \circ F \circ C$. Autrement dit, regarder l'effet de F à l'aide de « lunettes inversant les couleurs » est équivalent à regarder l'effet de F^C sur la configuration dont les couleurs ont été inversées.

On peut évidemment combiner les deux symétries pour en obtenir une troisième, la réflexion-conjugaison, et l'on obtient la règle locale $f^+(x, y, z) = 1 - f(1 - z, 1 - y, 1 - x)$ en appliquant les deux symétries correspondantes.

Connaissant le code décimal de Wolfram d'une règle f , il n'est pas immédiat de trouver le code de Wolfram des règles symétriques : sauf cas particulier, il faut écrire la table de transition, puis lui opérer la symétrie et recalculer le nouveau code décimal. En revanche, avec le code par transitions, l'obtention des symétriques est direct : la réflexion est obtenue en permutant les couples de lettres B et C (c'est-à-dire en remplaçant le B par un C et le C par un B) et en permutant les couples F et G ; la conjugaison est obtenue en échangeant les lettres selon les couples suivants : A et H, B et G, C et F, et, D et E. La réflexion-conjugaison est quant à elle obtenue en combinant ces deux opérations. Ces opérations sont représentées sur la figure 1.3.

Pour connaître le nombre de classes d'équivalence de ces symétries, nous procédons à un dénombrement simple. Il existe $2^6 = 64$ règles invariantes par réflexion, $2^4 = 16$ règles invariantes par conjugaison, $2^6 = 16$ règles invariantes par réflexion-conjugaison. Il existe $2^3 = 8$ règles invariantes par réflexion *et* par conjugaison. Nous avons donc $64 - 8 = 56$ règles invariantes par R uniquement, $16 - 8 = 8$ règles invariantes par C uniquement et, $16 - 8 = 8$ règles invariantes par $R \circ C$ uniquement. Le nombre de règles qui ne sont pas invariantes par R ou C est $256 - (56 + 8 + 8 + 8) = 176$. Ceci nous permet d'affirmer que le nombre de classes d'équivalence est $176/4 + 56/2 + 8/2 + 8/2 + 8/1 = 44 + 28 + 4 + 4 + 8 = 88$.

Dans le reste du texte, nous examinerons une règle par classe d'équivalence, choisie comme étant celle qui a le plus petit code de Wolfram : nous parlons alors d'automate cellulaire élémentaire *minimal*.

TABLE 1.2 – Règles démontrées ou conjecturées logarithmiques selon le PTCM.

diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		36	DFGH	→	←	*0*]1[LOG?
		40	DEGH	.	←	*0*	*1*	LOG
		42	BDEGH	←	←	*0*	*1*	LOG?
		44	DGH	.	←	*0*]1[LOG?
		50	BCDEFGH	↔	↔	*0*	*1*	LOG?
		56	CDEGH	.	↔	*0*	*1*	LOG?
		58	BCDEGH	←	↔	*0*	*1*	LOG?
		72	EH	.	.]0[*1*	LOG
		76	H	.	.]0[]1[LOG
		77	AH	.	.]0[]1[LOG
		104	DEH	.	.	*0*	*1*	LOG?
		106	BDEH	←	.	*0*	*1*	LOG?
		200	E	.	.]0[*1*	LOG
		232	DE	.	.	*0*	*1*	LOG

1.2.1 Mécanique élémentaire

La notation par transitions va nous permettre d’analyser la dynamique des automates cellulaires asynchrones. Notre but est de mettre en place une sorte de « mécanique élémentaire » qui permettra d’analyser le comportement des 88 ACE minimaux.

Pour une configuration donnée, nous appelons une q -région un ensemble maximal de cellules adjacentes dans l’état q . Les *frontières* sont les cellules qui séparent deux régions.

Les lois de mécanique élémentaire peuvent se formuler ainsi :

- Si une transition A (resp. H) est *passive*, la taille d’une 0-région (resp. d’une 1-région) peut croître ou décroître mais cette région ne peut être brisée en deux.
- Les transitions B et F contrôlent les mouvements des frontières 01 : B (resp. F) déplace cette frontière à gauche (resp. à droite). Si les deux transitions sont actives, la frontière 01 se déplace selon une marche aléatoire non biaisée.
- Symétriquement, les transitions C et G commandent les déplacements des frontières 10.
- La transition D conditionne la fusion des 1-régions : l’absence de D implique que les 0-régions ne peuvent pas disparaître. De même, les 1-régions ne peuvent disparaître que si E est active.

Ces propriétés sont résumées dans la table 1.4.

Nous recommandons fortement aux lecteurs d’avoir une copie du tableau 1.3 et de ces règles devant eux. En effet, la majeure partie des démonstrations qui suivront s’appuient sur ces éléments.

1.2.2 Graphe de de Bruijn

Le code par transitions que nous avons présenté ci-dessus (cf. tableau 1.3) est défini par une application $\tau : Q^3 \rightarrow \{a, \dots, h\}$. Cette application sera utilisée pour nous donner une vue complémentaire des configurations ; pour cela, on associe à une configuration $x \in Q^{\mathcal{L}}$ une configuration $\tilde{x} \in \{a, \dots, h\}^{\mathcal{L}}$, l’image T de x ; obtenue en associant à chaque cellule une étiquette a, b, \dots selon que la transition A, B, ... s’y applique (indépendamment du fait que cette transition soit active ou non). Nous écrirons $x \stackrel{\tau}{\mapsto} \tilde{x}$ pour signifier que $\tilde{x} = t(x)$ est l’image T de x . Un exemple de transformation des configurations et leurs images T est donné sur la figure 1.4.

Cette transformation peut se faire directement mais il est également intéressant de considérer le graphe de de Bruijn (cf. fig. 1.5), qui permet de faire cette transformation en lisant un symbole binaire après l’autre en parcourant le graphe en suivant l’arc qui correspond au symbole binaire qui a été lu.

TABLE 1.4 – à gauche : Description synthétique des effets de chaque transition dans les ECA. à droite: Effets des combinaisons de deux transitions.

A	0-régions instables		
B	dépl. à gauche des frontières 01		
C	dépl. à droite des frontières 10	ni A ni H	règles doublement quiescentes
D	disparitions des 0-régions		
E	disparitions des 1-régions	B+ F	marche aléatoire des frontières 01
F	dépl. à droite des frontières 01		
G	dépl. à gauche des frontières 10	C+ G	marche aléatoire des frontières 10
H	1-régions instables		

```

00110011111100
abfgcbfhhhgca
      ↑
00110010111100
abfgcbefhgca
    
```

FIGURE 1.4 – Exemple de deux configurations binaires et de leurs images T. La configuration du haut est obtenue par la mise à jour de la cellule de la configuration du bas indiquée par une flèche.

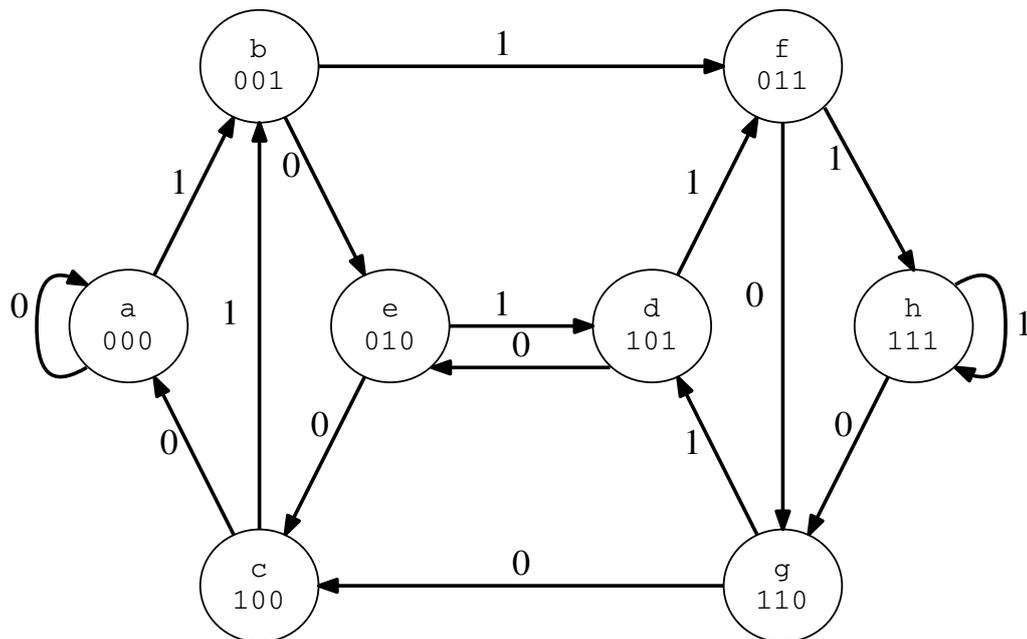


FIGURE 1.5 – Graphe de de Bruijn construit selon la correspondance entre séquences binaires de longueur 3 et les transitions A, . . . , H. Les étiquettes sur les arcs montrent la valeur donnée en entrée lorsqu'on lit une séquence de gauche à droite.

Ce graphe permet de déterminer diverses propriétés des automates cellulaires. En particulier, on peut d'ores et déjà noter que puisque les configurations sont définies sur un anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, les points fixes d'une règle sont les configurations pour lesquelles un circuit dans le graphe de de Bruijn ne passe jamais par un nœud avec une transition active.

Pour une configuration particulière $x \in \mathcal{E}_n$, nous notons par $a(x), \dots, h(x)$ le nombre d'occurrences des étiquettes a, \dots, h dans \tilde{x} , l'image T de x . Notons que dans la plupart des cas, l'argument x sera omis pour les fonctions a, \dots, h puisqu'il sera donné implicitement par le contexte.

Pour un motif $P \in Q^*$, notons $|x|_P$ le nombre d'occurrences de P dans x . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} b = c, \quad f = g, \\ |x|_{01} = b + d = c + d = e + f = e + g = |x|_{10}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ces équations nous permettront de transformer diverses expressions afin de quantifier les temps de convergence.

1.2.3 Le tableau des réécritures

TABLE 1.5 – Tableau des réécritures des 32 triplets des images T. Les colonnes correspondent aux huit étiquettes pour la cellule centrale, les lignes aux quatre étiquettes possibles à gauche et à droite.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	aaa	abe	eca	ede	bec	bfh	fgc	fhh
	bec	bfh	fgc	fhh	aaa	abe	eca	ede
2	aab	abf	ecb	edf	bed	bfh	fgd	fhh
	bed	bfh	fgd	fhh	aab	abf	ecb	edf
3	caa	cbe	gca	gde	dec	dfg	hgc	hhg
	dec	dfg	hgc	hhg	caa	cbe	gca	gde
4	cab	cbf	gcb	gdf	ded	dfh	hgd	hhh
	ded	dfh	hgd	hhh	cab	cbf	gcb	gdf

On peut remarquer que dans les images T, lorsqu'une cellule active est mise à jour, il y a trois cellules qui changent d'étiquette : la cellule mise à jour, mais aussi ses voisines de droite et de gauche (cf. fig. 1.4). Si l'on veut avoir une vue de toutes les possibilités de transformation qui ont lieu dans les images T lors d'une mise à jour unique, nous devons donc prendre en compte toutes les mises à jour possibles de triplets d'étiquettes, ce qui correspond à 5 états binaires, donc 32 possibilités.

Ces transitions sont représentées sur la table 1.5, le *tableau de réécriture*. Les triplets correspondent aux séquences $(\alpha, x, y, z, \beta) \in \{0, 1\}^5$ ainsi présentées : chaque colonne correspond à une valeur fixée (x, y, z) , et les quatre colonnes correspondent aux valeurs des bords (α, β) selon l'ordre $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ et $(1, 1)$.

Notons que pour une règle donnée, les seules colonnes à prendre en compte sont celles qui correspondent aux transitions actives.

1.2.4 Fonctions potentiels

Il sera fréquemment fait usage de fonctions qui vont de l'ensemble des configurations \mathcal{E}_n à l'ensemble des entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Nous utiliserons le terme de *potentiel* pour qualifier ces

fonctions, en effet, par analogie avec ce qui se pratique en physique, elles seront utilisées pour estimer la distance à l'ensemble des points fixes.

On appelle *étiquette* (en anglais *label*) les lettres d'une image T d'une configuration donnée.

Définition 1. Un potentiel $W : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbb{N}$ est *p-linéaire* s'il se définit comme une combinaison linéaire du nombre d'étiquettes d'une configuration et que tous les coefficients de la combinaison sont positifs. Formellement : $W(x) = \omega_a \cdot a(x) + \dots + \omega_h \cdot h(x)$ avec $\omega_a, \dots, \omega_h \in \mathbb{N}$.

Nous introduisons quelques définitions pour la suite.

Définition 2. On dira que W est *équilibré* si pour toute configuration, la différence de potentiel produite par une mise à jour d'une cellule ne dépend que de l'étiquette de cette cellule.

On remarquera que comme la mise à jour d'une cellule modifie trois étiquettes, la différence de potentiel dépend en général des trois étiquettes de départ et d'arrivée ; le cas équilibré est donc un cas particulier et le lemme suivant précise ses conditions d'obtention.

Lemme 1 ([78, 87]). Si W est un potentiel *p-linéaire* tel que : $\omega_a + \omega_d = \omega_b + \omega_c$ et $\omega_e + \omega_h = \omega_f + \omega_g$, alors W est équilibré.

Quand un potentiel est équilibré, nous noterons δ_τ la décroissance de potentiel produite par la mise à jour d'une cellule portant l'étiquette τ (dans l'image T).

Pour rappel, $F(x)$ dénote la variable aléatoire qui représente l'évolution du système à partir d'une configuration x . Nous notons $\Delta W(x) = W(F(x)) - W(x)$ qui représente la variation de potentiel à partir de x et $E\Delta W(x)$ l'espérance de cette variation de potentiel à partir de x . Par exemple, si x a une unique cellule active dont la mise à jour produit une variation de potentiel de -3 , on a $E\Delta W(x) = -3/n$ car la probabilité que cette cellule soit mise jour est $1/n$. Dans la suite, nous écrirons plus volontiers $n \cdot E\Delta W(x) = -3$ de façon à ne manipuler que des entiers.

Commençons par établir un fait simple qui nous sera utile plus tard : si une règle a un potentiel *p-linéaire* qui peut toujours décroître jusqu'à atteindre une valeur nulle qui correspond à un point fixe, alors le temps d'atteinte de ce point fixe est presque sûrement fini⁴.

Formellement, en notant (x^t) le processus qui modélise l'évolution du système à partir d'une configuration x ; nous avons :

Lemme 2. Si une règle f est telle qu'il existe un potentiel *p-linéaire* W tel que pour toute taille d'anneau n , il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{E}_n$

$$\Pr\{\Delta(x) < 0\} \geq \epsilon,$$

alors pour tout $x \in \mathcal{E}_n$, la variable aléatoire $T(x) = \min\{t \in \mathbb{N} : W(x^t) = 0\}$ est presque sûrement finie.

1.3 Règles à convergence logarithmique

Nous commençons notre exposé de la classification par les règles à convergence *logarithmique*, c'est-à-dire celles pour lesquelles le temps de convergence s'écrit $\tau(n) = \Theta(\log n)$. On trouve dans cette classe pas moins de 27 règles minimales dont l'observation expérimentale

4. Nous utilisons l'expression « presque sûrement » au sens de la théorie de la mesure, c'est-à-dire qu'il existe un certain nombre de cas où la convergence n'a pas lieu, mais ces cas sont de mesure nulle dans l'espace des mises à jour possibles.

TABLE 1.6 – Liste des règles candidates pour une convergence logarithmique, divisées selon les classes RCH et RCN.

RCH	0-EFGH	2-BEFGH	8-EGH	10-BEGH
	18-BCEFGH	24-CEGH	26-BCEGH	32-DEFGH
	34-BDEFGH	40-DEGH	42-BDEGH	50-BCDEFGH
	56-CDEGH	58-BCDEGH	106-BDEH	
RCN	4-FGH	5-AFGH	12-GH	13-AGH
	36-DFGH	44-DGH	72-EH	76-H
	77-AH	104-DEH	200-E	232-DE

laisse penser qu'elles sont à convergence logarithmique; leur liste est présentée dans le tableau 1.6, selon qu'elles convergent rapidement vers un point fixe homogène (RCH) ou non-homogène (RCN).

Les diagrammes espace-temps de ces règles, ainsi que leurs propriétés de « mécanique élémentaire » sont présentés dans les tables 1.1 et 1.2. On constate que toutes ces règles ont en commun la présence d'un *processus de fragmentation* : les régions de 1 ont tendance à se briser en plus petits morceaux, qui vont progressivement disparaître. Essayons maintenant de rendre cette intuition plus formelle.

Borne inférieure et borne supérieure

Lemme 3. *La règle d'identité mise à part, la convergence de tous les automates cellulaires est au moins logarithmique.*

Ceci vient du simple fait que si une règle possède au moins une transition active, on peut construire une configuration où cette transition est présente dans une cellule sur trois. Il faut donc au moins que ces cellules actives soient mises à jour et soient rendues inactives pour que le système atteigne un point fixe. On montre par un argument de type collectionneur de vignettes (*coupon collector*) que ce temps est logarithmique en $n/3$, donc également logarithmique en n .

Pour la borne supérieure, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4. *Si pour une règle f différente de l'identité, il existe un entier m et un potentiel p -linéaire W tel que pour toute taille d'anneau $n \in \mathbb{N}$:*

$$(a) \quad W(x) = 0 \implies x \in \mathcal{FP}, \text{ et}$$

$$(b) \quad \forall x \notin \mathcal{FP}, \quad n \cdot E\Delta W(x) \leq -\frac{W(x)}{m},$$

alors f a un temps de convergence logarithmique : $\tau(n) \in \Theta(\log(n))$.

La démonstration de ce lemme est assez technique; elle a été effectuée dans notre article de tutoriel [87] de 2020, ce qui nous a permis d'unifier les techniques de preuves. L'idée intuitive du lemme est que si la baisse de potentiel est proportionnelle au potentiel, alors la convergence se fait en temps logarithmique.

Règles avec une activité strictement décroissante

On dit qu'une règle a une activité strictement décroissante si le nombre de cellules actives décroît à chaque fois qu'une cellule active est mise à jour. On peut par exemple prendre l'ACE

76-H. Cette règle a une unique transition active et seules les cellules h sont actives. Par ailleurs, les h sont transformés en d et les h ne peuvent jamais apparaître par mise à jour d'une cellule.

Théorème 1. *Les règles 0-EFGH, 4-FGH, 12-GH, 76-H, 77-AH, 200-E, et 232-DE ont une activité strictement décroissante et ont une convergence logarithmique.*

Il est facile de montrer que ces règles sont logarithmiques puisque leur potentiel est simplement défini comme le nombre de cellules actives.

Règles avec un potentiel monotone

Dans certains cas compter le nombre de cellules actives ne suffit pas. Prenons l'exemple de la règle EH. Si l'on regarde le table de réécriture des transitions E et H (voir table 1.5), on voit que le nombre de cellules actives décroît toujours sauf dans le cas où un h produit deux e. Nous pouvons donc compter un h comme trois e pour que l'on continue à observer une décroissance de potentiel.

On généralise cette idée comme suit. On dit que f a un potentiel *monotone* W si $\forall x \in \mathcal{E}_n, \forall i \in \mathcal{A}(x) \subseteq \mathcal{L}, W(F(x, i)) - W(x) < 0$, où $\mathcal{A}(x)$ représente l'ensemble des cellules actives de x .

Théorème 2. *Les ACE 5-AFGH, 8-EGH, 13-AGH, 72-EH ont un potentiel monotone ; leur convergence est logarithmique.*

Pour l'ACE 8-EGH, on prendra $W = e + 2g + h$. C'est un potentiel équilibré pour lequel on a : $\delta_E = \delta_G = \delta_H = -1$. De même, pour l'ACE 72-EH on prend $W = e + 3h$.

Pour les ACE 5-AFGH et 15-ABGH, on prend $W = a + f + g + 2h = a + 2g + 2h$. Ce potentiel n'est pas équilibré mais les conditions d'application du lemme sont vérifiées.

Règles avec un potentiel décroissant en moyenne

Nous terminons l'examen des règles logarithmique avec le cas où la décroissance n'est garantie qu'en moyenne.

Théorème 3. *La convergence des ACE 2-BEFGH, 32-DEFGH, 34-BDEFGH, 40-DEGH est logarithmique.*

Pour ces quatre règles, on prendra $W = 3e + 5f + 2h$. Pour montrer que ce potentiel permet l'application du lemme, on utilise le tableau de réécriture (cf. § 1.2.3 p. 1.2.3) et les équivalences des équations 1.2.

Règles restantes

Conjecture 1. *Les ACE 10-BEGH, 18-BCEFGH, 24-CEGH, 26-BCEGH, 36-DFGH, 42-BDEGH, 44-DGH, 50-BCDEFGH, 56-CDEGH, 58-BCDEGH, 104-DEH, et 106-BDEH ont une convergence logarithmique.*

Nous pensons qu'il n'est pas possible de définir des potentiels p-linéaires pour étudier ces règles. Une solution serait d'utiliser des potentiels définis avec des sous-mots de longueur supérieure à trois. On pourra se reporter au travail de Regnault sur la quantification des transitions de phase pour de l'utilisation de telles techniques [203]. Il est quelque peu surprenant qu'en dépit du fait que nous ayons toujours des *processus de fragmentation* en jeu, nous ne disposons pas d'outils analytiques suffisamment généraux pour pouvoir s'appliquer aux règles citées ci-dessus. Un travail avait été entrepris en collaboration avec Lucas Gerin (École polytechnique) mais sans conduire à des résultats suffisamment aboutis pour être publiés.

TABLE 1.7 – Liste des treize règles démontrées ou conjecturées linéaires selon le PTCM.

diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		128	EFG	→	←]0[*1*	LIN
		130	BEFG	↔	←]0[*1*	LIN
		132	FG	→	←]0[]1[LIN
		136	EG	.	←]0[*1*	LIN
		140	G	.	←]0[]1[LIN
		160	DEFG	→	←	*0*	*1*	LIN
		162	BDEFG	↔	←	*0*	*1*	LIN
		164	DFG	→	←	*0*]1[LIN
		168	DEG	.	←	*0*	*1*	LIN
		172	DG	.	←	*0*]1[LIN
		74	BEH	←	.]0[*1*	LIN?
		78	BH	←	.]0[]1[LIN
		94	BCH	←	→]0[]1[LIN

1.4 Règles à convergence linéaire

Les lecteurs peuvent se faire une idée des comportements qui conduisent à une convergence linéaire en regardant les règles marquées LIN dans le tableau 1.7 (p. 22).

Ce type convergence correspond à l'idée intuitive que l'on a de la façon dont un système est attiré vers son point fixe : « la distance » maximale qu'il a à parcourir pour se stabiliser est proportionnelle à sa taille. Cependant, comme nous allons le voir, ce comportement ne concerne que 13 règles sur 88 et parmi celles-ci, il y a des cas qui sont loin d'être simples.

Le lemme suivant formalise l'idée qu'en dépit de la mise à jour aléatoire du système, il existe un potentiel qui décroît régulièrement en moyenne.

Lemme 5. *Si une règle f admet un potentiel p -linéaire W tel que pour n suffisamment grand :*

(a) $\forall x \in \mathcal{E}_n, W(x) = 0 \implies x \in \mathcal{FP}$ et

(b) $\forall x \notin \mathcal{FP}, n \cdot E\Delta W(x) \leq -1,$

alors la convergence de f est au plus linéaire, c'est-à-dire : $\tau(n) \in \mathcal{O}(n)$.

Idée de la démonstration : On considère le processus $Y_t = X_t + \varepsilon t$ avec $\varepsilon = 1/n$ et l'on montre que c'est une surmartingale, c'est-à-dire un processus stochastique dont la valeur moyenne a tendance à décroître au fil du temps.

Théorème 4 (convergence linéaire). *Les règles 128-EFG, 130-BEFG, 132-FG, 136-EG, 140-G, 160-DEFG, 162-BDEFG, 164-DFG, 168-DEG, 172-DG ont une convergence linéaire : $\tau(n) = \Theta(n)$.*

Démonstration. Nous procéderons en deux temps : nous montrerons d'abord qu'il existe pour chaque règle ci-dessus un potentiel p -linéaire qui vérifie les conditions du lemme 5 ; ceci nous donne une borne supérieure sur le temps de convergence. Dans un second temps, nous exhiberons une borne inférieure sur $\tau(n)$ en calculant le temps de convergence d'une configuration particulière.

Bornes supérieures. Pour les règles 128-EFG, 132-FG, 136-EG et 140-G, on peut prendre le nombre de 1 comme potentiel : $W(x) = |x|_1 = e + f + g + h$. En effet pour chaque mise à jour d'une cellule active, un 1 est supprimé et, d'autre part, on ne peut pas créer de 1 : $x \notin \mathcal{FP} \implies n \cdot E\Delta W(x) \leq -1$.

Si l'on considère les quatre règles 160-DEFG, 164-DFG, 168-DEG et 172-DG, on constate que le nombre de 1 décroît aussi, sauf quand une transition D est mise à jour. Un d ne peut être créé car A, B, C et H sont passives (voir Tab. 1.5). On prendra $W(x) = 2d(x) + |x|_1 = 2d + e + f + g + h$. En effet, quand une cellule à l'état 0 est mise à jour (un d), $|x|_1$ augmente de 1 mais $2d(x)$ décroît de 2, ce qui produit un bilan négatif.

Le cas des règles 130-BEFG et 162-BDEFG est légèrement plus complexe, en effet, les frontières 01 suivent une marche aléatoire non biaisée. En analysant les lois de « mécanique élémentaire » décrites plus haut (cf. Sec. 1.2.1), on trouve la fonction de potentiel : $W(x) = |x|_1 + |x|_{01} = b + d + e + f + g + h$.

Nous laissons aux lecteurs le soin de la vérification de la condition (b) du lemme.

Bornes inférieures. Considérons la condition initiale $x = 001^{n-2}$. On peut noter que toutes les configurations évoluant à partir de x sont des configurations à deux régions ou des configurations homogènes, c'est-à-dire que pour tout t , x^t est équivalent par décalage à $1^i 0^{n-i}$ avec $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

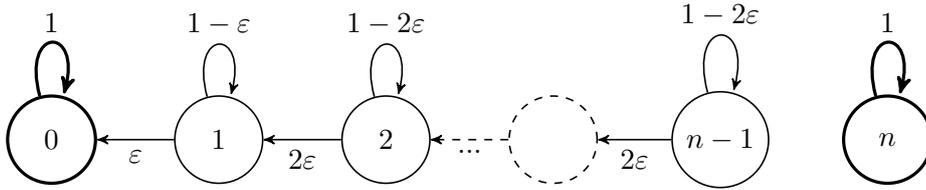


FIGURE 1.6 – Chaîne de Markov qui décrit l'évolution de la règle 128-EFG à partir d'une configuration $1^i 0^{n-i}$. L'étiquette de l'état de la chaîne de Markov correspond à i (nombre de 1).

Examinons les règles 128-EFG et 132-FG, 136-EG, 140-G et les quatre autres règles 160-DEFG, 164-DFG, 168-DEG, 172-DG. L'évolution de ces règles est monotone : le nombre de 1 ne peut que décroître. À chaque pas de temps, la probabilité de faire décroître le nombre de 1 est donc $1/n$ ou $2/n$, ce qui correspond à un temps d'attente de n or $n/2$ en moyenne. En sommant $n - 2$ opérations de cette sorte, on obtient donc un nombre de pas qui varie quadratiquement en n , donc un temps de convergence rééchelonné linéaire en n . Une telle évolution est bien représentée par une chaîne de Markov : la figure 1.6 traite le cas de la règle 128-EFG.

Pour la règle 130-BEFG, on note que $1 = 1^{\mathcal{L}}$ n'est pas atteignable. La règle converge sur 0, et plus lentement que la règle 128-EFG puisque B augmente le nombre de 1.

Pour la règle 162-BDEFG, les choses deviennent plus délicates : le point fixe 1 est désormais atteignable puisque D est active. Néanmoins, les simulations montrent que le système est attiré vers 0. On peut calculer exactement le temps de convergence du système à l'aide de la méthode du pas en avant (cf. ref. [97]). En notant T_i le temps moyen de convergence à un point fixe à partir de $1^i 0^{n-i}$, il vient : $T_0 = 0, T_n = 0$ et, en prenant $\varepsilon = 1/n$, on obtient :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \begin{aligned} T_1 &= 1 + \varepsilon \cdot T_0 + (1-2\varepsilon)T_1 + \varepsilon \cdot T_2 \\ T_i &= 1 + 2\varepsilon \cdot T_{i-1} + (1-3\varepsilon)T_i + \varepsilon \cdot T_{i+1} \end{aligned}$$

La solution de ce système a la forme $\frac{1}{\varepsilon} \kappa(n)$, où $\kappa(n)$ a un terme linéaire en n et un terme qui décroît exponentiellement en n . Ceci nous donne bien un temps de convergence quadratique en n , c'est-à-dire un temps rééchelonné qui varie linéairement en n . On remarquera que ce système est très proche du problème de la ruine d'un joueur (*Gambler's ruin problem*) avec une pièce non équilibrée. \square

Théorème 5. Les règles 78-BH et 94-BCH ont un temps de convergence linéaire.

Pour ces deux règles, on prendra $W = 2a + b + c + h = 2a + 2b + h$. La forme de ce potentiel reflète le fait que les 0-régions ont une tendance à être « grignotées » (voir fig. 1.7).

Conjecture 2. La règle 74-BEH a un temps de convergence qui est linéaire.

Le comportement de cette règle est assez intrigant. Sur les simulations, on observe à partir de conditions initiales aléatoires que la règle a une tendance à converger très rapidement (en temps logarithmique). Cependant, il est possible de construire des conditions initiales pour lesquelles la convergence semble se faire en temps linéaire (ou plus). Par exemple, pour $k > 0$, les conditions initiales de type $001(011)^k$ génèrent des cascades qui se propagent de gauche à droite et font progressivement converger le système vers $0 = 0^{\mathcal{L}}$ (voir fig. 1.7). Déterminer la convergence de cette règle est un problème ouvert.

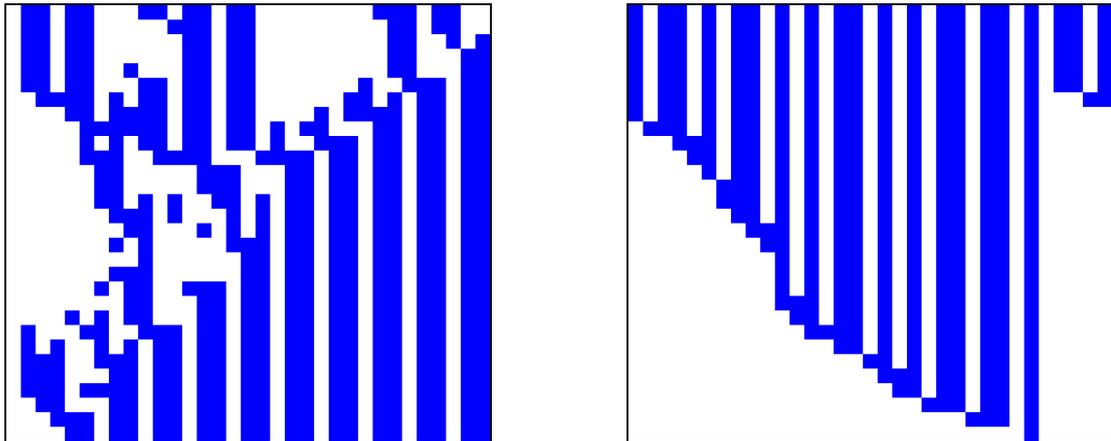


FIGURE 1.7 – Diagrammes espace-temps pour $n = 33$. (gauche) : règle 74-BEH avec condition initiale $000(011)^{10}$. (droite) : règle 78-BH avec condition initiale $(0^{27})1(0^5)$. Le temps va du bas vers le haut ; les états 0 et 1 sont représentés par les couleurs blanc et bleu, respectivement. Le temps est rééchélonné d'un facteur $1/n$: un pas de temps (une ligne) correspond à n mises à jour indépendantes. Cette convention est gardée dans la suite document.

TABLE 1.8 – Liste de six règles démontrées quadratiques selon le PTCM.

diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		138	BEG	←	←]0[*1*	QUAD
		146	BCEFG	↔	↔]0[*1*	QUAD
		152	CEG	.	↔]0[*1*	QUAD
		170	BDEG	←	←	*0*	*1*	QUAD
		178	BCDEFG	↔	↔	*0*	*1*	QUAD
		184	CDEG	.	↔	*0*	*1*	QUAD

1.5 Règles à convergence quadratique

Par souci de concision, on ne donnera pas ici le lemme qui permet d’obtenir le résultat sur le temps quadratique. En effet, nous présenterons au paragraphe 7.3 (page 88) un lemme similaire.

Théorème 6. *Les règles 170-BDEG, 178-BCDEFG et 184-CDEG ont un temps de convergence quadratique.*

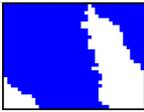
La démonstration repose sur la construction d’une martingale qui consiste à compter le nombre 1, quantité que l’on corrige plus ou moins selon les cas spéciaux que sont les 0 ou 1 isolés [97].

On remarque que les trois règles citées sont bien connues : la règle 170-BDEG correspond au décalage à gauche (*shift*), la règle 178 à la règle « bascule-si-non-égalité » (*FLIP-IF-NOT-EQUAL*), étudiée notamment par Regnault pour le cas de l’ α -synchronisme [201]; la règle 184 est la règle de circulation (*traffic*). Cette dernière règle sera notamment utilisée dans le chapitre 7 (p. 85).

Théorème 7 ([97]). *Les règles 138-BEG, 146-BCEFG, 152-CEG ont un temps de convergence quadratique.*

Ce comportement est plus surprenant. En effet, pour ces trois règles, bien que la tendance générale soit à conserver le nombre de 1, on ne peut converger que vers le point fixe 0. Ceci peut facilement se comprendre en analysant le code par transitions : la transition D est passive, ce qui rend la disparition du dernier 0 impossible. Il se produit donc un phénomène de « rebond » de la marche aléatoire. Pour obtenir une convergence en temps quadratique, on utilise une technique bien connue : on effectue un couplage entre le processus qui évolue entre 0 et $n - 1$ (qui rebondit sur n) et une marche aléatoire « classique » entre 0 et $2n$.

TABLE 1.9 – Liste de trois règles démontrées ou conjecturées exponentielles selon le PTCM.

diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		154	BCEG	←	↔]0[*1*	EXP
		90	BCEH	←	→]0[*1*	EXP?
		122	BCDEH	←	→	*0*	*1*	EXP?

1.6 Règles à convergence exponentielle

Théorème 8. *La règle 154-BCEG a un temps de convergence exponentiel.*

La figure 1.8 montre l’évolution de cette règle. Là aussi, le fait que la transition D soit passive rend le point fixe 1 inatteignable et produit de nouveau un phénomène de rebond. La démonstration de la convergence exponentielle se fait en deux temps : on calcule d’abord le temps mis

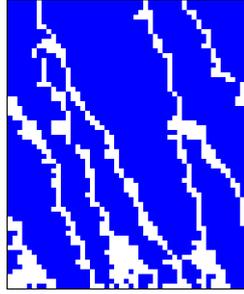


FIGURE 1.8 – Espace-temps d’une évolution de la règle 154-BCEG avec une condition initiale aléatoire.

par les configurations à deux zones. Ceci se fait par la résolution du système suivant :

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_i &= 1 + \varepsilon T_{i-1} + (1 - 3\varepsilon)T_i + 2\varepsilon T_{i+1} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, n-2\} \\ T_{n-1} &= 1 + \varepsilon T_{n-2} + (1 - \varepsilon)T_{n-1}. \end{aligned}$$

où T_i est le temps d’atteinte du point fixe $\mathbf{0}$ à partir d’une configuration $1^i 0_{n-i}$.

Dans un second temps, on procède à un couplage pour montrer qu’une convergence d’une configuration à plusieurs zones x est *plus rapide* que la convergence d’une configuration à *deux zones* particulière y . Pour cela, on marque une zone de 0 arbitraire dans la configuration de départ x , on construit y en mettant les mêmes cellules à l’état 0 et toutes les autres cellules à l’état 1. On fait évoluer les deux processus en mettant à jour les mêmes cellules et en décalant y de manière à ce que la frontière 01 marquée dans x et celle de y coïncident. Le système étant invariant par décalage, l’ajout de cette étape supplémentaire ne perturbe pas les temps de convergence des processus. On montre que si y converge, alors x converge. On a donc majoré le cas général par un cas à deux zones, que l’on sait traiter. La mécanique de la démonstration reste donc assez complexe et il serait intéressant de chercher à la simplifier.

Conjecture 3. *Les règles 90-BCEH et 122-BCDEH ont un temps de convergence exponentiel.*

On peut noter que pour ces deux règles, $\mathbf{0}$ est un point fixe pour tout n et pour $n = 3k$, la configuration $x_F = (101)^k \stackrel{t}{=} (\text{gdf})^k$ est également un point fixe.

Pour démontrer que la convergence est au moins exponentielle, on pourrait montrer que $\mathbf{0}$ est atteignable à partir de toute configuration qui n’est pas un point fixe. Dans un second temps, on chercherait à établir une borne supérieure pour le temps d’absorption vers $\mathbf{0}$.

C’est un problème ouvert que d’établir un lemme qui unifierait les approches et donnerait un outil général d’analyse de la convergence exponentielle d’une règle. Ces règles sont dans un état *métastable* : elles passent un temps très long dans un espace d’états qui est loin de l’énergie minimale puis une combinaison peu probable de mises à jour conduit le système à atteindre un point fixe (les diagrammes espace-temps de la table 1.9 peuvent difficilement montrer cela). On pourra par exemple se référer à la synthèse de Cirillo et al. pour en savoir plus sur les phénomènes de métastabilité [48]

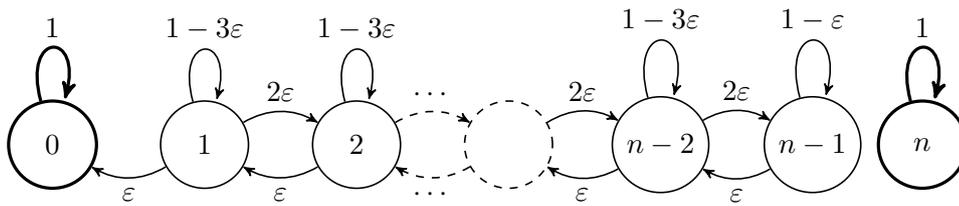


FIGURE 1.9 – Représentation de la chaîne de Markov qui décrit l'évolution de la règle 154-BCEG à partir de la configuration $1^i 0^{n-i}$. L'état de la chaîne de Markov correspond au nombre de 1.

TABLE 1.10 – Liste de règles démontrées non convergentes (19 premières).

diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		1	A EFGH	→	←]0[*1*	NCV
		3	A B EFGH	↔	←]0[*1*	NCV
		6	BFGH	↔	←]0[]1[NCV
		7	A BFGH	↔	←]0[]1[NCV
		9	A EGH	.	←]0[*1*	NCV
		11	A B EGH	←	←]0[*1*	NCV
		14	BGH	←	←]0[]1[NCV
		15	A B GH	←	←]0[]1[NCV
		19	A B C EFGH	↔	↔]0[*1*	NCV
		22	B C FGH	↔	↔]0[]1[NCV
		23	A B C FGH	↔	↔]0[]1[NCV
		25	A C EGH	.	↔]0[*1*	NCV
		27	A B C EGH	←	↔]0[*1*	NCV
		28	C GH	.	↔]0[]1[NCV
		29	A C GH	.	↔]0[]1[NCV
		30	B C GH	←	↔]0[]1[NCV
		33	A D EFGH	→	←	*0*	*1*	NCV
		35	A B D EFGH	↔	←	*0*	*1*	NCV
		37	A D FGH	→	←	*0*]1[NCV

TABLE 1.11 – Liste de règles démontrées non convergentes (suite).

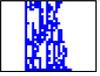
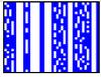
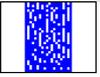
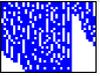
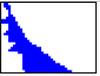
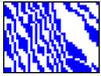
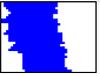
diag.	diag.	Wcode	Tcode	01	10	101	010	conv.
		38	BDFGH	\leftrightarrow	\leftarrow	*0*]1[NCV
		41	ADEGH	.	\leftarrow	*0*	*1*	NCV
		43	ABDEGH	\leftarrow	\leftarrow	*0*	*1*	NCV
		45	ADGH	.	\leftarrow	*0*]1[NCV
		46	BDGH	\leftarrow	\leftarrow	*0*]1[NCV
		51	ABCDEFGH	\leftrightarrow	\leftrightarrow	*0*	*1*	NCV
		54	BCDFGH	\leftrightarrow	\leftrightarrow	*0*]1[NCV
		57	ACDEGH	.	\leftrightarrow	*0*	*1*	NCV
		60	CDGH	.	\leftrightarrow	*0*]1[NCV
		62	BCDGH	\leftarrow	\leftrightarrow	*0*]1[NCV
		73	AEH	.	.]0[*1*	NCV
		105	ADEH	.	.	*0*	*1*	NCV
		108	DH	.	.	*0*]1[NCV
		110	BDH	\leftarrow	.	*0*]1[NCV
		126	BCDH	\leftarrow	\rightarrow	*0*]1[NCV
		134	BFG	\leftrightarrow	\leftarrow]0[]1[NCV
		142	BG	\leftarrow	\leftarrow]0[]1[NCV
		150	BCFG	\leftrightarrow	\leftrightarrow]0[]1[NCV
		156	CG	.	\leftrightarrow]0[]1[NCV

TABLE 1.12 – Liste des ACE non convergents.

1-AEFGH	3-ABEFGH	6-BFGH	7-ABFGH	9-AEGH	11-ABEGH
14-BGH	15-ABGH	19-ABCEFGH	22-BCFGH	23-ABCFGH	25-ACEGH
27-ABCEGH	28-CGH	29-ACGH	30-BCGH	33-ADEFGH	35-ABDEFGH
37-ADFGH	38-BDFGH	41-ADEGH	43-ABDEGH	45-ADGH	46-BDGH
51-ABCDEFHG	54-BCDFGH	57-ACDEGH	60-CDGH	62-BCDGH	73-AEH
105-ADEH	108-DH	110-BDH	126-BCDH	134-BFG	142-BG
150-BCFG	156-CG				

1.7 Règles non convergentes

Théorème 9. *Les 38 règles énumérées dans les tables 1.12 sont non-convergentes.*

Il existe plusieurs raisons pour laquelle ces règles sont classées dans la catégorie des « non-convergentes ». Nous allons maintenant énumérer ces raisons sans entrer dans les détails des preuves.

La première cause de non-convergence vers un point fixe est qu'une règle... n'admette pas de point fixe!

Proposition 1. *Les règles suivantes n'admettent pas de point fixe : 1-AEFGH, 3-ABEFGH, 9-AEGH, 11-ABEGH, 19-ABCEFGH, 25-ACEGH, 27-ABCEGH, 33-ADEFGH, 35-ABDEFGH, 41-ADEGH, 43-ABDEGH, 51-ABCDEFHG, 57-ACDEGH.*

On se convainc assez facilement de cette proposition en examinant les diagrammes de de Bruijn (cf. § 1.2.2 p. 16).

Une autre raison simple de non-convergence est l'impossibilité à atteindre un point fixe.

Proposition 2. *Pour les règles suivantes, 0 est un point fixe unique, qui n'est pas atteignable à partir d'autres configurations que lui-même : 38-BDFGH, 46-BDGH, 54-BCDFGH, 60-CDGH, 62-BCDGH, 110-BDH et 126-BCDH.*

On peut également avoir des ensembles de configurations qui ne conduisent jamais à une convergence : on dit qu'elles forment un ensemble récurrent (cf. chap. suivant).

Proposition 3. *Les règles 28-CGH, 29-ACGH, 73-AEH, et 108-DH ont des ensembles récurrents de configurations pour une infinité de valeurs de n .*

On observe pour ces règles des phénomènes de « clignotement » : pour certaines configurations, on oscille entre deux ou plusieurs configurations et en revenant toujours à la condition initiale. Ce phénomène sera étudié plus en détail dans le chapitre suivant.

Un autre phénomène apparaît pour certaines règles : la tendance naturelle à produire des bandes où les 0 et les 1 alternent.

Proposition 4. *Les règles 6-BFGH, 7-ABFGH, 14-BGH, 15-ABGH, 22-BCFGH, 23-ABCFGH, 30-BCGH sont non-convergentes.*

Pour ces règles si on examine l'évolution d'une configuration de type $x = 001(01)^k$, on s'aperçoit qu'elle est « frustrée » : étant de taille impaire elle contient nécessairement une paire de cellules adjacentes dans le même état 00 ou 11 ; cette paire ne peut disparaître.

Ce phénomène de bandes se généralise à des alternances d'états de période supérieure à 2 :

Proposition 5. *Pour $n \in 4\mathbb{N}$, la règle 105-ADEH a un unique point fixe, aux décalages près et pas de point fixe pour $n \notin 4\mathbb{N}$.*

Pour $n \in 3\mathbb{N}$, les règles 37-ADFGH et 45-ADGH ont un unique point fixe, aux décalages près, et pas de point fixe pour $n \notin 3\mathbb{N}$.

Pour $n \in 2\mathbb{N}$, les règles 7-ABFGH, 15-ABGH, 23-ABCFGH et 29-ACGH un unique point fixe, aux décalages près, et pas de point fixe pour $n \notin 2\mathbb{N}$.

Nous avons donc réussi à classer, soit de manière analytique, soit de manière empirique, les 88 règles non-équivalentes d'automates cellulaires élémentaires. Si le critère du PTCM ne capture pas tout le comportement asynchrone d'une règle, il permet d'en saisir une caractéristique importante.

Nous achevons donc ce premier chapitre sur la liste de questions suivantes :

Question 1. Montrer la convergence logarithmique des ACE 10-BEGH, 18-BCEFGH, 24-CEGH, 26-BCEGH, 36-DFGH, 42-BDEGH, 44-DGH, 56-CDEGH, 58-BCDEGH, 104-DEH, et 106-BDEH en proposant si possible une théorie générale utilisant le fait que des processus de fragmentation sont en jeu.

Question 2. Montrer la convergence linéaire de l'ACE 74-BEH.

Question 3. Montrer la convergence exponentielle des ACE 90-BCEH et 122-BCDEH.

Question 4. Étudier analytiquement ou numériquement comment sont reliées les convergences selon le mode totalement asynchrone et selon le mode α -synchrone.

2

Récurrence des automates cellulaires élémentaires

Ce chapitre présente les travaux effectués avec nos collaborateurs de l'université du Bengale oriental en Inde. Le premier résultat est paru en 2014 dans les actes de la conférence TAMC [228] et le second résultat a été publié en 2018 dans le *Festschrift* dédié au professeur Kenichi Morita [99]. En se focalisant sur une question précise, ce chapitre permet d'approfondir l'apport des chaînes de Markov dans la compréhension du comportement des automates asynchrones.

La question de la réversibilité des automates cellulaires constitue un champ d'étude important, notamment parce qu'elle lie la question du temps et la question de la conservation de l'information au cours de l'évolution d'un système [139].

En physique, c'est un problème bien connu que de comprendre comment des lois réversibles au niveau local produisent des phénomènes irréversibles au niveau global : c'est le fameux « second principe de la thermodynamique ».

Dans le contexte particulier des automates cellulaires, un effort important a été déployé pour comprendre sous quelles conditions une règle locale était réversible. On pourra se référer à l'article d'état de l'art de Morita pour plus de détails [173].

Dans la majorité des cas, on interprète la réversibilité comme un déterminisme rétrograde (*backward determinism*), c'est-à-dire la capacité à revenir de manière unique au temps précédent, étant donné une configuration [10, 208, 240]. Il est à noter que dans le cas des automates finis, et dans ce cas seulement, ceci implique que le système « boucle » en revenant infiniment souvent aux mêmes configurations.

Nous nous demandons maintenant quel est l'équivalent de la propriété de réversibilité quand l'évolution de l'automate cellulaire est soumise à un aléa. Dans nos automates cellulaires asynchrones, l'aléa dans la mise à jour implique que chaque configuration peut avoir plusieurs successeurs, aussi on ne peut plus continuer à utiliser le critère de la bijectivité de la fonction de transition globale (i.e., la mise en correspondance unique d'une configuration et son image). On peut néanmoins garder l'idée d'examiner quels sont les systèmes qui reviennent infiniment souvent à leur condition initiale : de tels systèmes seront dits *récurrents* et, comme leurs analogues déterministes, ils conservent une partie de l'information liée à la condition initiale au cours de leur évolution.

Un équivalent possible de la réversibilité dans le monde des systèmes dynamiques discrets stochastiques est donc la *récurrence*. Plutôt que de chercher des conditions générales d'application, nous proposons maintenant simplement d'examiner l'espace des 256 automates cellulaires élémentaires et d'examiner si nous pouvons les classer en règles récurrentes et non-récurrentes.

2.1 Définitions

Soient $x, y \in \mathcal{E}_n$ deux configurations de taille n , on dit que y est un successeur de x s'il existe $u \in \mathcal{L}$ tel que $F(x, u) = y$. Pour $x \in \mathcal{E}_n$, on dénote par $\text{succ}(x) = \{F(x, u), u \in \mathcal{L}\}$ l'ensemble des successeurs x et par $\text{succ}(S) = \cup_{x \in S} \text{succ}(x)$ l'ensemble des successeurs de $S \subseteq \mathcal{E}_n$.

La relation *accessible* (ou atteignable) est obtenue comme la clôture transitive la relation *successeur*, c'est-à-dire que de y est accessible à partir de x s'il existe un chemin de configurations qui mène à y en partant de x , chaque configuration étant le successeur de la suivante.

Définition 3. Une configuration (de taille n) $x \in \mathcal{E}_n$ est *récurrente* si pour toute configuration $y \in \mathcal{E}_n$ qui est accessible de x , x est également accessible de y . Une configuration qui n'est pas récurrente est *transiente*.

Lorsque y est accessible de x et x est accessible de y , on dit que x et y *communiquent*. Par convention, une configuration communique avec elle-même. La relation *communiquer avec* est une relation d'équivalence; elle permet de découper l'ensemble des configurations en *classes de communication*. On note $\mathcal{C}(n)$ le nombre de classes de communication pour une taille d'anneau n .

Deux comportements existent donc : pour les configurations transientes, le système reste un temps fini dans sa classe de communication, puis la quitte définitivement, alors que si le système est initialisé sur une configuration récurrente, il reste éternellement dans la classe de communication de cette configuration.

On dira qu'une règle est récurrente pour la taille n si toutes les configurations de taille n sont récurrentes. Par extension, on appelle *règle récurrente* une règle récurrente pour toute taille.

2.2 Conditions de non-récurrence

Une règle est dite *non-récurrente* si elle possède au moins une configuration transiente, c'est-à-dire, pour laquelle le système ne revient pas infiniment souvent.

Pour une règle donnée, nous noterons par A, B, \dots , par \bar{A}, \bar{B}, \dots le fait que les transitions A, B, \dots sont respectivement actives ou passives.

Théorème 10 ([228]). Une règle est non-récurrente si elle vérifie l'une de ces conditions :

- 1a : \overline{AE} ou 1b : \overline{DH} ,
- 2a : \overline{AE} ou 2b : \overline{DH} ,
- 3a : $\overline{ABCE}F$ ou 3b : $\overline{ABCE}G$ ou 3c : $\overline{BDF}GH$ ou 3d : $\overline{CDF}GH$,
- 4a : $\overline{ABE}FG$ ou 4b : $\overline{ACE}FG$ ou 4c : $\overline{BCD}FH$ ou 4d : $\overline{BCD}GH$.

Notons que les conditions énoncées sur la même ligne sont équivalentes par conjugaison ou par réflexion. La preuve du théorème réside simplement dans la possibilité de trouver des contre-exemples à une évolution réversible pour chacun des cas. Par exemple, si l'on considère la règle BCE, celle-ci vérifie la condition (2a) puisque A est active et E est passive. Si nous analysons l'évolution de la configuration $x = 00100$ et mettons à jour la troisième cellule, nous atteignons le point fixe 00000 et nous ne pouvons plus alors revenir à la condition initiale x .

Le théorème énoncé ci-dessus concerne 70 règles minimales. Il est à noter que dans cet ensemble, il en existe 46 qui sont *fortement irréversibles* dans le sens où elles possèdent des configurations pour lesquelles le système ne revient jamais au point de départ.

2.3 Récurrence de dix-huit règles

Il nous reste donc 18 règles minimales candidates qui sont potentiellement récurrentes. Le théorème suivant établit que ces règles sont bien récurrentes.

Théorème 11 ([99]). *Les 16 règles suivantes sont récurrentes pour toutes les tailles d'anneau n :*

35-ABDEFGH, 38-BDFGH, 43-ABDEGH, 46-BDGH,
51-ABCEFGH, 54-BCDFGH, 57-ACDEGH, 60-CDGH,
62-BCDGH, 105-ADEH, 108-DH, 134-BFG,
142-BG, 150-BCFG, 156-CG, 204-I.

Les règles 33-ADEFGH et 41-ADEGH sont récurrentes pour $n \neq 3$.

Les démonstrations demandent une analyse fine du comportement des automates cellulaires. Nous invitons les lecteurs à consulter la ref. [99] pour découvrir les techniques d'analyse des espaces de chaînes de Markov. La propriété suivante présente néanmoins un cas où cette analyse est simple.

Définition 4. *Pour une paire de configurations $x, y \in \mathcal{E}_n$, on dit que y est un successeur de x s'il existe une mise à jour $u \in \mathcal{L}$ telle que $F(x, u) = y$. On dit que y est atteignable à partir de x s'il existe une suite de relations successeur qui mènent de x à y .*

Définition 5. *Une règle est directement récurrente si pour toute paire de configurations $x, y \in \mathcal{E}_n$, si y est successeur de x , alors x est successeur de y .*

Proposition 6. *Les règles suivantes sont directement récurrentes : 51-ABCEFGH, 54-BCDFGH, 57-ACDEGH, 60-CDGH, 105-ADEH, 108-DH, 150-BCFG, 156-CG, 204-I.*

En effet, une règle est directement récurrente si et seulement si pour chacune des quatre paires de transitions suivantes : A et E, B et F, C et G, D et H, les deux transitions sont toutes deux actives ou toutes deux passives.

2.4 Détermination des classes de récurrence

Pour aller plus loin dans l'analyse de la dynamique, nous cherchons à analyser la structure des ensembles de configurations récurrentes. Notre but est de déterminer le nombre et la « forme » des classes de récurrence des dix-huit règles minimales identifiées.

Lemme 6. *Étant donné une règle f et une taille d'anneau n , soit $(E_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ une partition de l'espace des configurations \mathcal{E}_n et soit $\{r_i\}$ un ensemble de configurations tel que : $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $r_i \in E_i$. Si, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$:*

- (a) *toute configuration de E_i communique avec r_i ,*
- (b) *E_i est clos par l'application de F (i.e., les successeurs des éléments de E_i sont dans E_i),*

alors f est récurrente et ses classes de communication sont formées par les ensembles (E_i) .

Chaque configuration r_i est appelée *configuration-représentant* de sa classe de communication. Il va de soi que l'on choisira pour chaque classe une configuration qui facilitera l'application du lemme.

On peut alors utiliser ce lemme pour déterminer le nombre de classes de communication d'une règle donnée. Nous présentons maintenant différents cas, en allant du plus grand nombre de classe au plus petit nombre.

2.4.1 Règles avec un nombre de classes de communication exponentiel en n

Clairement, l'identité 204-I a un nombre de classes égal au nombre de configurations, donc égal à 2^n et exponentiel en n .

Proposition 7. *La règle 156-CG est récurrente. Le nombre de ses classes de communication \mathcal{C}_{CG} varie exponentiellement en n . En effet, on a $\mathcal{C}_{CG}(n) \sim \phi^n$, où $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.*

On montre en effet que le nombre de classes de communication est très proche du nombre de mots binaires qui ne contiennent pas le motif 11. Il est connu que le nombre de tels mots est donné par la suite de Fibonacci, dont le ratio entre un nombre et son successeur tend vers le nombre d'or. Les premiers éléments de la suite $\mathcal{C}_{CG}(n)$ sont 2, 4, 5, 8, 12, 19, 30. Cette suite porte l'indice A001612 dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS).

Proposition 8. *La règle 108-DH est récurrente et le nombre de ses classes de communication $\mathcal{C}_{DH}(n)$ croît exponentiellement en n . Plus précisément, la suite obéit à la relation récurrence suivante : $\mathcal{C}_{DH}(n) = \mathcal{C}_{DH}(n-1) + \mathcal{C}_{DH}(n-2) + \mathcal{C}_{DH}(n-4)$ avec $\mathcal{C}(1) = 2, \mathcal{C}(2) = 2, \mathcal{C}(3) = 5, \mathcal{C}(4) = 10$.*

Cette suite porte le numéro A259967 dans l'OEIS. Pour trouver l'équivalent de la suite en l'infini, on cherche les racines du polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + x - 1)$. On peut vérifier que les quatre racines de P sont $-1, \lambda \approx 1.75488$, et deux solutions complexes dont le module est strictement inférieur à 1. Par conséquent on a : $\mathcal{C}_{DH}(n) \sim C \cdot \lambda^n$ où C est une constante qui, de façon inexplicite, vaut 1.

2.4.2 Règles avec un nombre linéaire de classes de communication

Proposition 9. *Les règles 134-BFG, 142-BG, sont 150-BCFG sont récurrentes. Leurs classes de communications sont formées par leurs points fixes et par les configurations qui ont même nombre de régions de 1.*

Le nombre de leurs classes de communication est donné par : $\mathcal{C}(n) = \begin{cases} 3 + n/2 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z}, \\ 2 + \lfloor n/2 \rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour la règle 142-BG, un exemple illustratif est fourni sur la table 2.1. Il montre comment passer d'une configuration arbitraire à une configuration-représentant et vice versa.

Proposition 10. *La règle 105-ADEH est récurrente. Le nombre de ses classes de communication \mathcal{C} varie selon la taille de l'anneau n selon :*

$$\mathcal{C}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ n/2 + 3 & \text{if } n \in 4\mathbb{Z} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

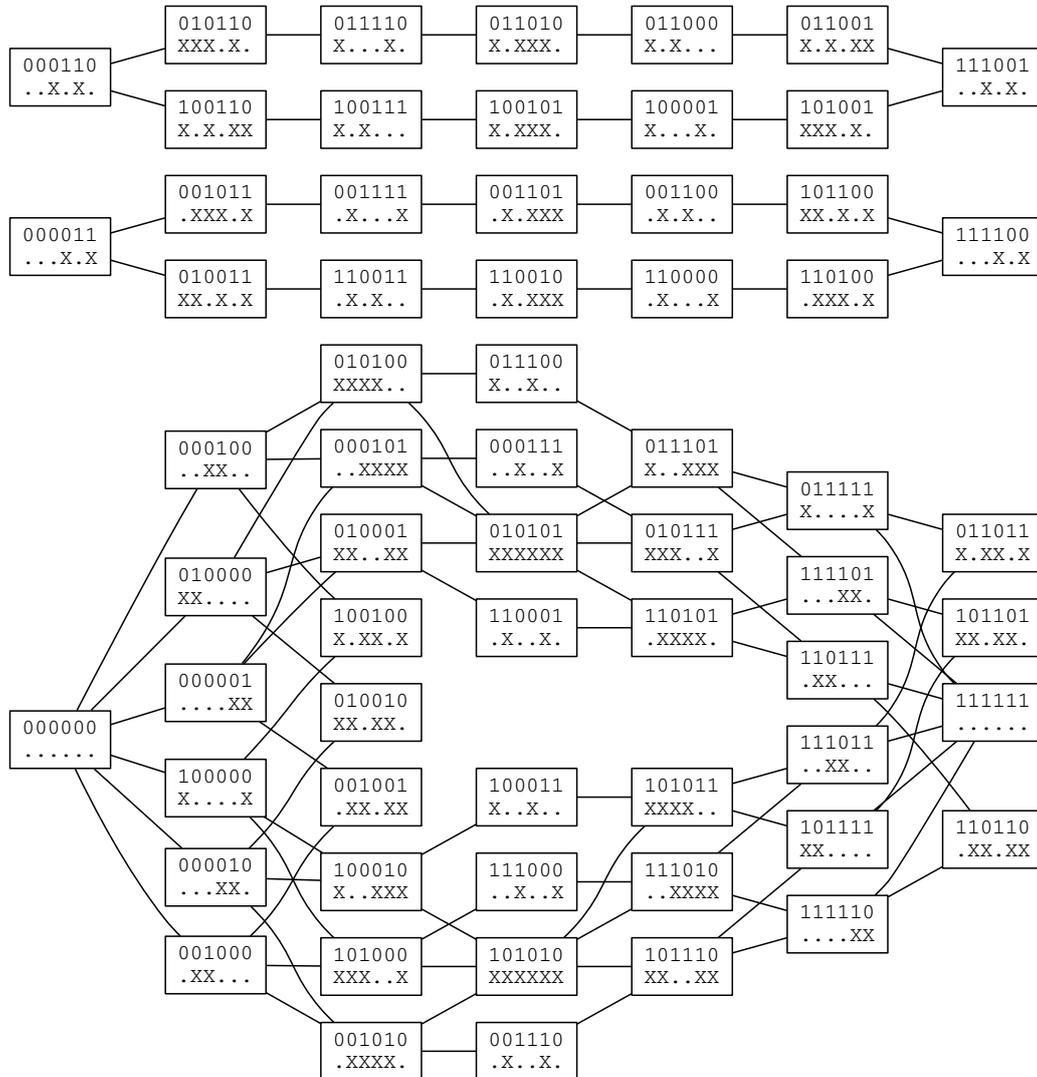


FIGURE 2.1 – Graphe de communication pour la règle 105-ADEH et une taille d’anneau $n = 6$. Les symboles X et . représentent respectivement la présence ou l’absence d’une différence entre l’état d’une cellule et sa voisine de droite. Les liens d’une configuration vers elle-même ne sont pas représentés ; les liens sont bidirectionnels.

TABLE 2.1 – Règle 142-BG : Suite de configurations montrant la communication entre une configuration arbitraire x et une configuration-représentant s_3 . Les configurations α , β , γ et δ sont des étapes intermédiaires.

x	1100111010111 hgcbfhgdedchh	s_3	1010100000000 ededecaaaaaab
α	0000100010100 aaabecabedeca	γ	0000001010100 aaaaabededeca
β	0000101010000 aaabededecaaa	δ	0100001010000 becaaaabedeca
s_3	1010100000000 ededecaaaaaab	x	1100111010111 hgcbfhgdedchh
vers une configuration-représentant		à partir d'une configuration-représentant	

Nous sommes là en présence de l'une des règles les plus délicates à analyser [99]. Notons que la règle locale s'écrit $f(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$, c'est-à-dire qu'elle donne l'inverse du XOR sur les trois arguments.

L'idée de la démonstration est la suivante. On transforme les configurations en faisant un *ou exclusif* entre une cellule et sa voisine de droite. On montre alors que les paires de 11 (transformées) sont conservées lors de l'évolution du système. C'est cette structure qui explique la dépendance du nombre de classes de communication selon la divisibilité par 4. Un exemple du graphe de communication pour la taille 6 est donné sur la figure 2.1.

2.4.3 Règles avec deux classes de communication

Proposition 11. *Les cinq règles 38-BDFGH , 46-BDGH , 54-BCDFGH , 60-CDGH , et 62-BCDGH sont récurrentes. Leurs classes de communication sont constituées du point fixe $\mathbf{0}$ et par le reste de l'espace des configurations $\mathcal{E}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

La démonstration de cette proposition repose sur le fait que la configuration homogène $\mathbf{1}$ est un « point olympique » : d'une part, ce point peut être atteint à partir de n'importe quelle configuration (montée). D'autre part, on peut atteindre n'importe quelle configuration à partir de ce point en transformant des 1 en 0 (descente).

2.4.4 Règle avec une unique classe de communication

Proposition 12. *Pour une taille d'anneau $n \neq 3$, les règles 33-ADEFHG et 41-ADEGH sont ergodiques, c'est-à-dire que l'espace des configurations constitue leur unique classe de communication.*

La preuve de la propriété est obtenue en trois étapes : (a) $\mathbf{0}$ est un « point aternal », c'est-à-dire qu'il peut être atteint à partir de n'importe quelle configuration en transformant des 0 en 1 ; (b) $\mathbf{1}$ est atteignable à partir de $\mathbf{0}$; (c) $\mathbf{1}$ est un point olympique.

Proposition 13. *Les quatre règles suivantes sont récurrentes : 35-ABDEFHG , 43-ABDEGH , 51-ABCDEFHG , et 57-ACDEGH .*

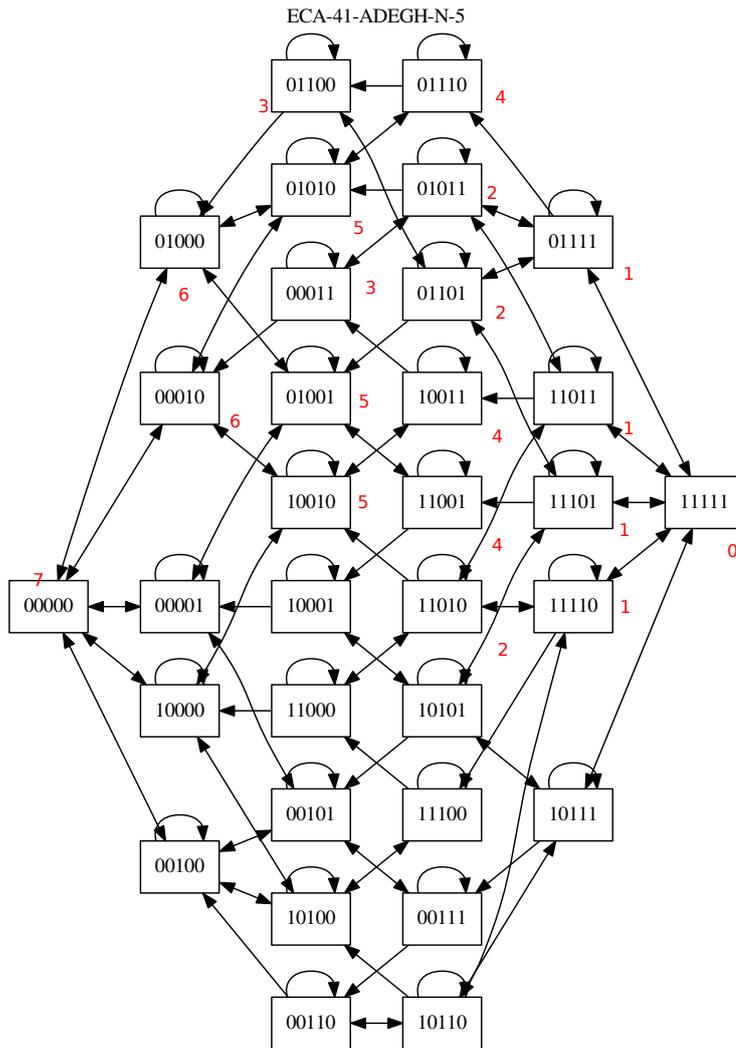


FIGURE 2.2 – Graphe de communication pour la règle 41-ADEGH et une taille d’anneau $n = 5$. Les nombres en rouge montrent la distance au point olympique 1.

La démonstration est plus simple : on montre que **1** peut être atteint à partir de n'importe quelle configuration et que c'est un point olympique. On se rapportera à la figure 2.1 pour un exemple de graphe de communication donné pour la taille 5.

2.5 Questions

Ce chapitre nous donc permis de découvrir un autre cas où l'analyse des chaînes de Markov des règles asynchrones était satisfaisante. Les analyses présentées permettent de classer les règles selon un critère de récurrence et même de dénombrer les classes de communication des systèmes obtenus. Nous pensons néanmoins que ce type d'approche reste assez « régional » dans le sens où il est aujourd'hui difficile de faire bien mieux que de considérer les règles une à une. Nous savons par ailleurs que le simple fait de passer du totalement asynchrone à de l' α -synchrone nous fait quitter le domaine de l'analysable, ceci en raison des phénomènes complexes qui entrent alors en jeu, tels que les transitions de phase. Il serait néanmoins judicieux de songer à généraliser les différentes techniques autant que possible : jusqu'à quel point pouvons-nous parvenir à englober une large gamme d'automates cellulaires dans notre projet d'étude de l'asynchronisme ? Plus largement, comment ces résultats « régionaux » éclairent-ils la question plus générale de savoir quelles sont les règles robustes aux perturbations et celles qui ne le sont pas, ou partiellement ?

Avant de passer au chapitre suivant et de présenter un panorama plus large du paysage de l'asynchronisme, posons quelques questions plus précises.

Question 5. Comment peut-on généraliser la notion de récurrence étudiée ici au cas d'une ligne infinie de cellules ?

Les définitions doivent sans doute être adaptées avec soin de manière à ne pas conduire à des résultats trop triviaux. Par exemple, si l'on exige que la récurrence implique de revenir exactement à la même configuration, on risque de ne plus avoir de règle récurrente du tout...

Question 6. Comment la notion étudiée ici s'étend-elle à des classes de règles plus grandes ? En particulier, peut-on décrire une famille infinie de systèmes asynchrones avec une unique classe de communication (donc ergodiques) ?

Question 7. Peut-on analyser dénombrer et analyser la forme des classes de communication des règles non-récurrentes ?

Un travail est en cours pour répondre à cette question avec nos collaborateurs indiens Suktanta Das et Souvik Roy (Indian Institute of Engineering Science and Technology, Shibpur).

3

Une cartographie de travaux sur la question de l'asynchronisme

Ce chapitre reprend et développe l'article de l'état de l'art paru dans le *Journal of cellular automata* en 2014 [77]. Bien que ce panorama des articles sur l'asynchronisme des automates cellulaires reste incomplet, différents points ont été revus, notamment à la faveur de l'écriture de notre entrée dans l'encyclopédie des systèmes complexes [85].

Avoir une mise à jour synchrone dans un système comporte de nombreux avantages. Pour les automates cellulaires, les transitions d'état simultanées des cellules permettent d'avoir une définition du modèle simple, où il n'est pas question de s'embarrasser avec un ordre dans la mise à jour et des effets éventuels que cet ordre induit. Il existe néanmoins plusieurs raisons pour lesquelles on souhaite s'intéresser aux automates cellulaires *asynchrones* :

1. Dans le cadre des systèmes dynamiques, la question est d'évaluer comment les automates cellulaires réagissent aux perturbations de leur mise à jour. Que signifie pour un système dynamique d'être robuste ou sensible à cette perturbation ?
2. Dans le cadre du calcul parallèle, on se demande comment concevoir un dispositif de calcul qui n'utilise pas d'horloge centrale. On s'attend ainsi à des gains en termes de simplicité d'architecture, de consommation énergétique, etc.
3. Dans le cadre de la modélisation, il est nécessaire de s'interroger sur le degré de synchronisme des transitions des cellules. Que représente un pas de temps ? Pourquoi cette échelle de temps et non une autre ? Est-ce réaliste de considérer que toutes les cellules changent d'état en même temps ou qu'une seule cellule seulement change d'état, etc. ?

L'étymologie du terme est claire : $\alpha\text{-}\sigma\upsilon\nu\text{-}\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ (*a-sun-chronos*) signifie *non-même-temps* en grec ancien. La nature *négative* de la définition laisse entendre qu'il n'y a pas une définition unique de l'asynchronisme : on utilisera ce terme dès que l'on s'écartera de la définition standard où toutes les cellules sont mises à jour simultanément.

Rappelons les deux types de mise à jour qui sont utilisées dans notre travail et dans la majeure partie de la littérature scientifique :

- mise à jour *totale*ment asynchrone : Une seule cellule est mise à jour à chaque pas de temps de manière aléatoire uniforme.

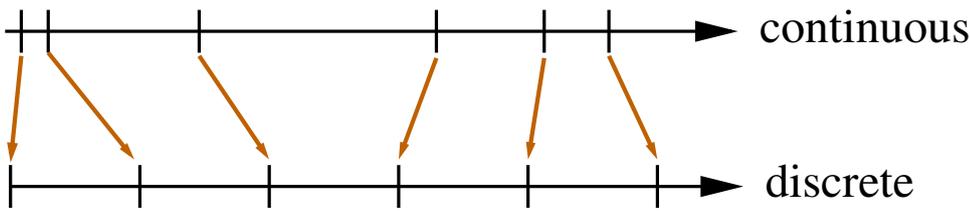


FIGURE 3.1 – Correspondance de la mise à jour en temps continu et discret pour le mode totalement asynchrone.

— mise à jour α -synchrone : À chaque pas de temps, chaque cellule est mise à jour avec une probabilité donnée α , appelée *taux de synchronisme*.

Comment choisir? Laquelle de ces deux méthodes est la plus « naturelle »? Même s'il n'existe évidemment pas de réponse définitive à cette question, on notera que les auteurs ont généralement une préférence pour l'une ou pour l'autre.

Peut-être dira-t-on que la mise à jour totalement asynchrone est la plus « naturelle » si l'on suit le raisonnement suivant : (a) la réalité du temps est continue; (b) les transitions se produisent à des instants aléatoires; (c) il y a une probabilité nulle ou négligeable que deux transitions se produisent en même temps; (d) l'ordre des transitions dans l'espace continu peut être projeté sur un axe de temps discret en prenant la succession des événements de mise à jour (voir la figure 3.1 et par exemple la ref. [224]).

Ces arguments sont pertinents sous l'hypothèse d'avoir des transitions qui soient « instantanées », c'est-à-dire que l'on puisse négliger le temps de passage d'un état à l'autre. Si cette hypothèse se justifie dans le cadre de la physique, par exemple lorsqu'on modélise des transitions d'état d'atomes ou de molécules, il est en revanche beaucoup plus douteux de la considérer comme valide par défaut dans le reste des cas. On pense notamment à la biologie, où un certain degré de synchronisme devrait être supposé. On éviterait ainsi les deux extrêmes du spectre : la synchronie parfaite est trop régulière pour un phénomène biologique, et l'asynchronisme total est trop exigeant, car il suppose une transmission d'information quasi-instantanée. Cependant, on voit difficilement comment mesurer un degré de synchronisme sur un système réel, si bien que l'on préfère en général choisir arbitrairement un mode de mise à jour ou bien synchrone ou bien totalement asynchrone⁵.

Notons que l'on peut aussi définir des méthodes de mises à jour asynchrones qui ne soient pas aléatoires, par exemple en effectuant la mise à jour des cellules paires puis des cellules impaires (voir p. ex. la ref. [200]). On pourra se référer aux travaux de Schönfisch et de Roos [224], Cornforth et al. [52], Bandini et al. [16] pour des présentations de telles méthodes. Dans la suite du texte, nous nous concentrons de manière exclusive sur les mises à jour asynchrones *probabilistes*.

3.1 Approches expérimentales

Comme nous l'avons mentionné en introduction, le problème de la classification des automates cellulaires classiques, c'est-à-dire *synchrones*, suscite encore de nombreuses interro-

5. L'idéal serait peut-être que chaque modèle soit observé à la fois en mode totalement asynchrone et en mode α -synchrone pour différentes valeurs du taux de synchronisme α , mais nous sommes bien loin de telles pratiques; la majeure partie des auteurs préfère s'en tenir à un choix déterminé de méthode de mise à jour et ne pas s'embrasser d'un examen de la robustesse de leurs modèles face aux variations de synchronisme.

gations (voir p. ex. le travail de Schüle [227, 225] ou celui de Martínez [169]). On pourrait donc penser que la classification expérimentale ou analytique des automates cellulaires asynchrones est alors bien plus difficile. En fait, il n'en est rien : comme nous le verrons dans ce chapitre, l'asynchronisme ouvre une nouvelle dimension, laquelle est simplement différente de la dimension synchrone, et n'est ni plus complexe ni plus simple. L'objet des paragraphes qui suivent est de clarifier ce point en montrant toute la richesse des approches développées par différents auteurs au cours des quarante dernières années.

3.1.1 Études générales

En 1984, un travail expérimental fondateur a été réalisé par Ingerson et Buvel, qui ont montré que le comportement de règles simples pouvait être bouleversé par des changements de mise à jour [37]. C'est dans ce travail qu'apparaît pour la première fois la question de savoir quelle part attribuer à la règle locale et quelle part attribuer à la mise à jour dans l'observation d'un comportement donné.

Bersini et Detours reprirent le flambeau quelques années plus tard en explorant la différence entre le Jeu de la vie et quelques variantes asynchrones [22]. Leur contribution principale a été d'observer l'existence d'un « effet stabilisant » de l'asynchronisme. Comme leurs observations se déroulaient sur de petites grilles, ils purent observer que le système pouvait se « geler » sur des points fixes ayant des formes de labyrinthes. Néanmoins, des travaux plus récents ont montré que ce comportement ne pouvait être extrapolé aux tailles de grilles plus grandes [24, 70].

Les travaux de Schönfisch et de Roos furent les premiers à donner des analyses détaillées du comportement des règles asynchrones mais leurs observations restèrent limitées à quelques règles déterminées [224].

Position de notre travail. Avec Michel Morvan, nous avons proposé une première étude exhaustive des 256 automates cellulaires élémentaires avec une mise à jour α -asynchrone [96]. Les changements de comportement ont été estimés en calculant une approximation de la densité asymptotique, ce paramètre étant considéré comme un premier moyen de détecter des changements de comportement qualitatifs. Parmi les résultats les plus surprenants de l'étude, nous avons noté l'absence de correspondance entre les classes de robustesse que nous avons définies et les classes de complexité d'automates cellulaires généralement utilisées. C'est-à-dire qu'une règle complexe pouvait devenir simple et, réciproquement, une règle synchrone simple pouvait devenir complexe, comme dans le cas de l'ACE 50 qui génère des transitions de phase avec un changement qualitatif de comportement qui dépend du taux de synchronisme⁶.

3.1.2 Transitions de phase

Blok et Bergersen ont été les premiers auteurs à identifier le changement qui se produit dans le jeu de la vie avec une mise à jour α -asynchrone [24]. Ce changement de comportement est une transition de phase de second ordre, c'est-à-dire que le passage d'une phase à l'autre se produit de façon continue et en suivant des lois bien définies étudiées en physique statistique. Plus précisément, les auteurs observent que cette transition de phase appartient à la classe d'universalité de la percolation dirigée (aussi appelée *percolation orientée*).

Position de notre travail. Nous avons identifié des phénomènes similaires dans les automates cellulaires élémentaires et montré que pas moins de *neuf* règles engendraient de telles

6. Des observations similaires ont été faites par Bandini et al., en testant sur différentes méthodes de mises à jour et sur des automates cellulaires unidimensionnels avec un voisinage de taille 2 [16].

transitions de phase [68]. Nous avons montré qu'au voisinage du seuil critique, la densité suivait une évolution conforme aux lois de puissance prévues pour les phénomènes de percolation dirigée. Une seule règle, l'ACE 178, a été identifiée dans une autre classe d'universalité, du fait du rôle symétrique joué par les états 0 et 1.

Nous avons également réexaminé la transition de phase qui se produit dans le jeu de la vie asynchrone, notamment en examinant ce qu'il se produit lorsqu'on introduit des erreurs dans la topologie [69, 70]. Nous avons montré l'existence d'une dépendance forte entre la valeur du seuil critique et la quantité de défauts présents dans la grille.

En ce qui concerne les autres règles bidimensionnelles, citons le travail de Regnault et al. qui ont réalisé un travail pionnier en examinant de près les différents comportements de la règle de minorité en fonction de la topologie choisie et du type d'asynchronisme [202, 204, 214]. Parmi les observations étonnantes, notons que la règle de minorité se stabilisera sur un motif en damier ou sur un motif en bandes selon que la règle s'applique à un voisinage de von Neumann ou à un voisinage de Moore.

Notons que deux points de vue complémentaires peuvent être adoptés sur les transitions de phase : la plupart des auteurs considèrent des systèmes infinis pour lesquels ils montrent qu'un changement qualitatif survient. Regnault a proposé une approche différente en montrant de façon analytique que sur des systèmes de taille finie, la transition correspondait à un changement du temps de convergence vers un point fixe, lequel passait d'une fonction linéaire à une fonction exponentielle en la taille de l'anneau [203].

3.1.3 Coalescence

Dans notre étude des ACE asynchrones, nous avons remarqué un phénomène curieux en observant les trajectoires de deux conditions initiales différentes qui sont mises à jour avec la même règle locale et la même suite de mises à jour : dans certains cas une *coalescence des trajectoires* pouvait avoir lieu rapidement, c'est-à-dire que les deux systèmes atteignent un même état et évoluent ensuite de la même façon (puisqu'ils reçoivent les mêmes mises à jour) [96]. Ce phénomène est facile à expliquer dans bien des cas, notamment quand le système tend rapidement vers un point fixe, mais on peut également l'observer alors que l'automate évolue de façon régulière, par exemple pour l'automate cellulaire élémentaire 46.

De façon imagée, on peut donner l'interprétation suivante : il existe des systèmes asynchrones pour lesquels l'évolution devient rapidement tributaire de la suite des mises à jour et non pas de la condition initiale.

Ce phénomène a formé le cœur du travail de doctorat de Rouquier, qui a étudié de manière très complète ce phénomène pour les 256 ACE [211, 213]. Cette étude a révélé qu'on pouvait observer tout type de comportement vis-à-vis de la coalescence : certaines règles coalescent toujours, d'autres jamais, alors que d'autres coalescent uniquement sur certaines plages du taux d'asynchronisme.

Position de notre travail. Expliquer ce phénomène de façon analytique reste une question ouverte. Nous avons exploré cette question lors du stage de Master de Francès de Mas [107] et des pistes intéressantes ont été explorées, sans pour autant déboucher sur une analyse complète du phénomène. Une poursuite de ces recherches reste à faire, peut-être en s'inspirant des résultats obtenus avec d'autres méthodes de couplage [221, 212].

3.1.4 Deux variations de la définition de l'asynchronisme

Alors que la majeure partie des études sur l'asynchronisme ont été consacrées à des types de mises à jour où les cellules étaient soit mises à jour soit laissées en l'état, nous avons abordé lors du doctorat d'Olivier Bouré un modèle d'asynchronisme qui prenait en compte des communications imparfaites entre voisins [27, 28, 26]. Ce modèle a été décliné en deux versions, appelées asynchronisme β et γ , qui considèrent respectivement que des erreurs aléatoires surviennent soit sur l'ensemble du voisinage, soit sur chaque voisin de manière indépendante.

De nombreuses observations ont été effectuées sur ce modèle mais le phénomène le plus intrigant est sans doute que les transitions de phase observées avec l'asynchronisme de type α disparaissaient dans certains cas seulement. Plus précisément, les ACE 6, 38 et 134 n'ont plus de transitions de phase avec les asynchronismes de type β et γ . Le cas de l'ACE 58 est encore plus troublant puisque il existe une transition de phase pour l'asynchronisme de type α et β mais pas de type γ ! Ces phénomènes de disparition de transition de phase par passage d'un modèle d'asynchronisme à l'autre sont un cas assez intéressant de non-robustesse du modèle et il serait intéressant de regarder ce qui se produit au niveau microscopique pour savoir ce qui fait qu'une transition de phase peut ainsi disparaître.

Nos observations ont également montré que différentes quantités pouvaient être conservées au cours de l'évolution des systèmes en fonction du modèle d'asynchronisme utilisé. Par exemple, pour l'ACE 50 il existe des conservations de parité des configurations avec l'asynchronisme de type β qui n'existent pas avec le type α . Ceci souligne la nécessité de poursuivre le travail d'exploration et d'invention de nouveau type d'asynchronisme afin de mieux comprendre à quel point la dynamique des automates cellulaires dépend de leur mode de mise à jour. Signalons le travail récent de Li et al. qui approfondit cette question de manière significative [155].

3.1.5 Asynchronisme et bruit

Une autre question concernant l'asynchronisme est de savoir comment cette perturbation se conjugue avec l'introduction de bruit « classique », c'est-à-dire un changement d'état aléatoire des cellules. Gharavi et Anantharam ont été parmi les premiers à examiner ce problème, et ont approfondi un résultat de Toom, en prenant notamment en compte les délais dans les communications entre cellules [123]. Le travail de Kanada [138] sur les 256 ACE, et le travail de Mamei et al. [165] sont également en lien avec cette question.

L'étude de Silva et Correia est une des plus approfondies à ce jour [229]. Dans leur évaluation des effets de l'asynchronisme, ces auteurs s'intéressent aux « motifs de différences » (*difference patterns*), c'est-à-dire aux changements induits par une ou plusieurs modifications de l'état de cellules données. Ils procèdent aussi à une remise à l'échelle du temps en fonction du taux de synchronisme afin d'avoir un nombre moyen de mises à jour moyen par pas de temps qui soit constant.

Le cas des mises à jour asynchrones sur des topologies non régulières a été examiné par Baetens et al., qui ont pris des pavages créés à partir de cellules de Voronoi pour observer l'effet de différentes règles à voisinage de taille variable [14]. Ces auteurs ont analysé les exposants de Lyapunov de différentes règles totalisantes (*totalistic*) pour évaluer comment la stabilité des règles dépendait de la méthode de mise à jour.

3.2 Approches analytiques

Nous nous concentrons maintenant sur les approches analytiques de l'asynchronisme. Il est évident que le découpage approche expérimentale *vs.* approche analytique est totalement infondé. En effet, nous ne surprendrons personne en affirmant que les études analytiques les plus intéressantes sont issues d'observations patientes de simulations numériques, et, réciproquement, les simulations numériques les plus stimulantes sont celles qui donnent naissance à des questions où il s'agit d'analyser et démontrer les propriétés observées⁷.

3.2.1 Classifications à partir de chaînes de Markov

L'une des premières études analytiques des automates cellulaires asynchrones à l'aide de chaînes de Markov est due à Agapie et al. [5]. Ces auteurs se sont concentrés sur le cas de la mise à jour totalement asynchrone et pour des règles très spécifiques (symétriques par échange de 0 et 1 et à taux positifs⁸). On remarquera que le nombre de frontières entre zones de 0 et de 1 est un paramètre central de leur étude.

Position de notre travail. Les recherches effectuées au cours de notre doctorat (2004) nous ont amené à classer systématiquement le comportement des 64 ACE doublement quiescents [1, 97] (voir le chapitre 1). Rappelons que les règles ont été classées en fonction de leur temps de convergence moyen vers un point fixe. Nous avons montré que la variation de ce temps de convergence en fonction de la taille des anneaux se retrouvait dans les catégories suivantes : temps logarithmique, temps linéaire, temps quadratique, temps exponentiel et temps infini (règles non convergentes). Ces temps correspondent bien à des comportements *qualitativement différents*, repérables par l'inspection visuelle des diagrammes espace-temps. Regnault et al. ont étendu ces résultats au cas de l' α -asynchronisme [98]; Chassaing et Gerin ont considéré un modèle continu par passage à la limite pour des tailles d'anneau tendant vers l'infini [44].

Avec Lucas Gerin, nous avons également considéré le cas de règles bidimensionnelles avec une mise à jour totalement asynchrone [91]. Cette étude a conduit au repérage de règles au comportement *métastable* : on n'observe pas de convergence vers un point fixe si on se limite à des temps « raisonnables » alors que l'on pense qu'il existe à chaque instant une probabilité non-nulle d'atteindre le point fixe en quelques pas de temps. La clarification de ce phénomène de métastabilité nous a amené, lors d'une collaboration avec Jörg Hoffmann et Hector Palacios, à utiliser des techniques de planification sous contraintes afin de montrer qu'une de ces règles métastables avait en effet une convergence vers un point fixe avec un temps exponentiel en la taille de la grille [133].

Les lecteurs souhaitant en savoir sur les techniques d'analyse par chaînes de Markov pourront se reporter à l'entrée proposée pour une encyclopédie des systèmes complexes [85] ainsi qu'à l'article de synthèse proposé pour la revue *Natural Computing*⁹ [87] (voir aussi les deux premiers chapitres de ce mémoire).

7. Rappelons qu'originellement, *theoria* et *praxis* forment un couple indissociable et seule une connaissance réelle et approfondie d'un domaine peut donner lieu à une théorie ou un théorème. (Les Grecs anciens n'auraient donc jamais dit « ceci est théorique » dans le sens : « ceci est pure spéculation »...)

8. Une règle est dite à taux positifs si chaque état peut être atteint avec une probabilité non-nulle pour chaque état du voisinage.

9. Cet article étend et corrige les résultats présentés dans les ref. [75] et [78].

3.2.2 Analyse des densités asymptotiques

Comme nous l'avons vu ci-dessus, un paramètre clé pour étudier les systèmes asynchrones est l'étude de la densité asymptotique. Fukš et Skelton ont réussi à donner l'expression exacte de celle-ci dans le cas α -asynchrone pour un ensemble de règles bien choisies [113].

Avec Henryk Fukš, nous avons poursuivi cette direction en considérant des approximations de champ moyen qui prennent en compte, non pas seulement la densité de cellules à l'état 1, mais la densité des motifs d'ordre k donné [111]. Cette approche s'appuie sur la *théorie des structures locales* (*local structure theory*) développée par Gutowitz [128] en 1987. Notre étude prédit correctement l'apparition de transitions de phase pour les règles où cela se produit effectivement, ce qui est un premier pas, mais l'approximation est telle qu'elle ne permet pas d'estimer correctement la valeur du seuil critique.

3.2.3 Modèles m -asynchrones

Les propriétés des automates cellulaires telles que l'injectivité, la surjectivité, la permutivité, etc. ont fait l'objet d'un grand nombre d'études analytiques. En 2012, Manzoni a étudié la façon dont ces propriétés pouvaient être redéfinies dans le contexte des automates cellulaires asynchrones [166]. Dennunzio et al. ont approfondi ce travail en développant la notion d'automate cellulaire *m-asynchrone*, pour laquelle les possibilités de définition de la fonction de mise à jour sont définies avec des outils de probabilités avancées [57]. Leur cadre d'étude est suffisamment large pour permettre de décrire des probabilités de mises à jour différentes pour chaque cellule, et ce même dans le cas où le système est infini. Nous nous référons à un article de synthèse de Formenti pour une description des différents résultats obtenus avec ce modèle [106].

Les questions qui se posent à l'issue de l'examen de cette partie touchent donc à la définition de la nature de l'asynchronisme et de sa position au sein des automates cellulaires probabilistes.

3.3 Calculer avec des automates cellulaires asynchrones

Nous nous intéressons maintenant aux contributions liées aux capacités calculatoires des automates cellulaires asynchrones, en décrivant de façon brève les questions et les techniques qui émanent de ce thème.

3.3.1 Simulation de modèles (a)synchrones par des modèles (a)synchrones

Nous avons vu dans les chapitres précédents que le comportement des règles simples binaires était souvent fortement affecté par un changement de mise à jour. Si l'on s'autorise à utiliser un nombre d'états arbitraire, peut-on simuler le comportement synchrone avec un modèle asynchrone, c'est-à-dire construire des modèles qui soient parfaitement robustes à l'asynchronisme? Nakamura a été l'un des auteurs pionniers sur la question du calcul avec des automates cellulaires asynchrones [176, 175]. Cet auteur décrit différentes techniques pour construire des règles asynchrones qui soient universelles au sens de Turing et a montré comment simuler une règle classique avec q états avec une règle asynchrone à $3q^2$ états. L'idée de Nakamura est qu'une cellule doit « attendre » ses voisines et ne faire sa transition que quand elle est sûre que celles-ci sont « au même temps » qu'elle. Après une mise à jour, elle garde son ancien état à disposition des cellules en retard sur elle, afin que les voisines puissent faire le bon calcul.

On pourra se reporter au travail de Lipton et al. [157], Toffoli [241] et Nehaniv [179] pour des constructions similaires. La construction de Nakamura a également été améliorée par Lee,

Peper et leurs collaborateurs, qui n'utilisent « que » $q^2 + 2q$ états pour leur simulation [152, 190]. Peper et al. ont également examiné le cas non classique où une cellule pouvait activer les cellules du voisinage et ont montré que le coût en nombre d'états pouvait être réduit à $\mathcal{O}(q\sqrt{q})$ [191].

On trouvera chez Takada et al. d'autres résultats de ce type, notamment l'existence d'une règle asynchrone, symétrique par rotation, qui utilise 15 états sur un voisinage de von Neuman et qui est universelle au sens de Turing¹⁰.

En 1978, Golze a montré comment simuler une règle n -dimensionnelle synchrone à l'aide d'une règle asynchrone à $n + 1$ dimensions [124]. Cette solution a de nombreux avantages, mais on peut la considérer comme une sorte de déploiement de la technique de Nakamura sur une dimension supplémentaire. Wang a généralisé cette construction au cas où la règle d'origine n'était pas déterministe mais malheureusement sans positionner son travail par rapport aux travaux antérieurs, ce qui rend difficile la comparaison avec les travaux de Nakamura et Golze [251]. Dennunzio et al. ont également proposé des techniques de simulation et de calcul en mode asynchrone, avec une estimation du ralentissement causé par la mise à jour asynchrone [56].

3.3.2 Dépendance à l'ordre de mise à jour

Une propriété centrale dans l'analyse des systèmes asynchrones est ce que nous pourrions désigner par « non-recouvrement des influences » : Si deux cellules c et c' sont telles que leur voisinage n'ont aucune cellule en commun, alors les trajectoires suivies par le système seront les mêmes si c est mise à jour avant c' ou l'inverse, ou si les deux sont mises à jour simultanément. L'ordre de mise à jour peut donc influencer ou non les trajectoires selon les formes du voisinage et les états générés par la fonction de transition locale.

En 2001, Gács a été un des premiers auteurs à regarder de près cette propriété [114]. Il a montré que bien que la propriété d'être insensible à l'ordre des mises à jour était indécidable, mais qu'il existait des conditions suffisantes permettant de la vérifier. Mortveit, McAuley et al. ont considéré le cas des automates cellulaires élémentaires et ont regardé à quelle condition des mises à jour cycliques produisaient des orbites dont la forme ne dépend pas de l'ordre de mise à jour [160, 161, 159]. Leur étude a conduit à identifier 104 règles élémentaires qui ont une telle propriété d'indépendance à la mise à jour ; elle les a en outre conduits à proposer une représentation originale des règles de transitions locales (à comparer avec la notation par transitions actives que nous avons donnée au chapitre 1.2 [1, 97]).

Récemment, Perrot et ses collaborateurs ont introduit des outils d'analyse qui reposent principalement sur les relations de dépendances entre cellules induites par la relation « est mis à jour avant » [193, 186]. Ces techniques sont transposées de l'univers des réseaux booléens asynchrones [183, 12]. En considérant différentes relations d'équivalence induites par la mise à jour, les auteurs parviennent à estimer quelles sont les règles maximales sensibles au changement de mise à jour et celles qui ne le sont pas.

Le problème de l'insensibilité à l'ordre de mise à jour a également été considéré par Worsch qui a montré que l'on pouvait construire un simulateur universel au sens de Turing qui ait cette propriété [254]. Son étude généralise celle de Golze en considérant un large éventail de méthodes de mise à jour. Ce travail soulève de nombreuses questions, en particulier celui de bien définir la notion de simulation d'une règle asynchrone par une autre règle asynchrone

10. Cette règle est également universelle dans le sens où elle peut construire toutes les configurations finies que l'on souhaite dans une partie de la grille.

(voir aussi la ref. [13] pour des considérations similaires sur les automates cellulaires probabilistes).

Notons également que Vielhaber a proposé un cadre formel où, pour une règle fixée, il s'intéresse au cas où le calcul de fonctions binaires sur des anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ se fait en fixant *seulement* l'ordre de mise à jour des cellules [247]. Il a pour cela utilisé l'ACE 57 et a cherché à généraliser son approche pour construire des modèles universels au sens de Turing.

3.3.3 Généralisations

Dès 1978, Priese s'est intéressé à regarder les automates cellulaires asynchrones bidimensionnels comme des cas particuliers de systèmes de réécriture (systèmes de Thue) [197]. Dans ce cadre, on considère que plusieurs cellules peuvent être modifiées en même temps et les propriétés de ces systèmes sont établies par équivalence aux réseaux de Petri. Zielonka lui a ensuite emboîté le pas en regardant comment les règles asynchrones pouvaient être utilisées pour décrire les situations de concurrence (*concurrency*) qui se produisent dans les systèmes distribués [51]. Pighizzini a par la suite clarifié les résultats de Zielonka [194] et des résultats similaires sur les automates cellulaires asynchrones de Büchi ont été présentés par Muscholl au même moment [174]. Droste [63] et Kuske [64, 144, 145] ont également généralisé et précisé le cadre posé par Zielonka et Hagiya et al. [129].

Mentionnons enfin le champ de recherche prometteur de la conception de circuits électroniques fonctionnant sur un modèle d'automates cellulaires asynchrones. Peper, Lee, et leurs collaborateurs en sont les principaux artisans. Ils développent un modèle où les calculs sont réalisés avec des particules qui suivent un mouvement brownien et qui interagissent dans des portes spécifiques [4, 3, 151, 192]. Ces auteurs proposent plusieurs façons de construire des circuits universels au sens de Turing qui sont insensibles aux délais introduits par les mouvements aléatoires des particules [149, 154].

Schneider et Worsch ont également proposé une règle à trois états qui permet de simuler des circuits insensibles aux délais [223]. Lee et al. ont ensuite généralisé leur travail en prenant comme outil les automates cellulaires qui conservent la masse (*number-conserving cellular automata*) [153].

3.4 Modéliser avec des automates cellulaires asynchrones

Dans cette partie, nous donnons cet aperçu des travaux liés à l'asynchronisme en examinant quelques réalisations liées au domaine de la modélisation. Le sujet est tellement vaste qu'il est hors de notre portée d'en donner une vision complète, nous souhaitons seulement éclairer quelques points.

3.4.1 Théorie des jeux et écologie

Huberman et Glance ont été parmi les premiers auteurs à mettre en lumière l'existence d'*artefacts* liés à la mise à jour : ce qu'ils désignent sous ce terme (*artifacts*) est le fait que certains comportements ne sont observés qu'en mode synchrone. Ils ont remis en question la validité des observations faites par simulation numérique sur des modèles spatiaux du dilemme du prisonnier [136]. Leurs travaux montrent que de nouvelles conclusions émergent, quant à la viabilité des phénomènes coopératifs, pour peu que l'on s'autorise à changer le mode de mise à jour des systèmes.

Cette question a été reprise par Newth et Cornforth qui ont également montré que de nouveaux états de coopération entre joueurs pouvaient être observés dans un cadre asynchrone et absents du cadre synchrone [181].

Grilo et Correia se sont également intéressés à ce problème et ont utilisé le mode de mise-à-jour α -asynchrone [126]. Leur étude révèle que des changements continus sur le taux de synchronisme peut induire des variations brutales du comportement. Il serait intéressant d'approfondir ces observations, notamment en examinant si ces changements observés sont des transitions de phase du second ordre. Saif et Gade ont quant à eux observé des transitions de phase du premier ordre entre des états où tous les joueurs trahissent et des états où la coopération et la trahison coexistent [217]. Dans tous ces travaux, on retrouve l'idée que le comportement synchrone est soit trompeur, soit trop restrictif par rapport à la richesse de comportement des modèles.

Ruxton et Saravia se sont intéressés à l'importance de la mise à jour dans un contexte écologique où l'on cherche à comprendre la colonisation d'un environnement par une espèce [216]. Les auteurs plaident pour un examen détaillé de procédures de mise à jour et disent que les modèles doivent ajuster ces données structurelles en fonction de ce qui s'observe sur le terrain. Ces arguments sont liés à ceux, plus généraux, de l'apparition de phénomènes émergents en écologie et de la fiabilité des observations issues des simulations numériques [209, 42]¹¹.

3.4.2 Phénomènes de synchronisation physiques et biologiques

Avec un point de vue assez proche de celui de Turing dans ses travaux sur la morphogénèse [244], Gunji a utilisé les automates cellulaires asynchrones pour analyser la formation de motifs chez les mollusques [127]. Une autre modélisation intéressante d'un phénomène biologique est donnée par Messinger et al., qui ont examiné comment les plantes pouvaient synchroniser les ouvertures et fermetures de leurs stomates de manière à obtenir un comportement adéquat¹² [171].

Du côté de la physique, mentionnons les travaux de Le Caër [148] qui a analysé les transitions de phase dans des automates cellulaires stochastiques sur des grilles triangulaires et carrées. Cet auteur observe une différence de nature des transitions de phase selon la grille utilisée et compare ses observations au modèle d'Ising. Radicchi et al. ont conduit des études similaires et observent un changement de phase entre un comportement « ferromagnétique » et « antiferromagnétique » induit par la probabilité de mise à jour [198].

3.4.3 Résolution de problèmes

Tomassini et Venzi [242], Capcarrere [40] et Nehaniv [178] ont étudié comment des règles asynchrones pouvaient être utilisées pour résoudre le problème de la classification de la densité (cf. chapitre 7) et le problème de synchronisation globale (cf. chapitre 8). Les lecteurs intéressés par ce thème peuvent se rapporter à l'étude par Vanneschi et Mauri, dans laquelle se trouve une discussion intéressante sur les modèles cités ci-dessus [245].

Dans le même ordre d'idées, Suzudo s'est intéressé aux modèles asynchrones qui génèrent des motifs non-triviaux [237, 238]. Il classe ses motifs selon trois catégories : damiers, bandes et « sabloïde » (*sand-like*). Dans ces travaux, l'asynchronisme est principalement utilisé pour s'assurer que le nombre de particules est conservé mais c'est également un ingrédient utile pour

11. On notera également une étude du rôle de la mise à jour dans le comportement du célèbre modèle de Sakoda-Schelling de ségrégation spatiale [137].

12. Je préfère ce terme à celui d'optimal, qui n'a sans doute pas sa place dans le contexte biologique...

générer des motifs réguliers à l'aide de règles locales. On pourra se rapporter à nos travaux sur la classification de la densité en deux dimensions pour des liens avec cette thématique [73] (voir aussi le chapitre 7).

Beigy et Meybodi ont quant à eux proposé une piste prometteuse en concevant des systèmes asynchrones qui réalisent des opérations d'apprentissage et proposent d'appliquer leurs méthodes au contrôle de réseaux mobiles [18].

Enfin, mentionnons les travaux de Lee et al. [150] et de Huang et al. [135] qui ont conçu des modèles avec des motifs auto-reproducteurs avec des mises à jour asynchrones (*self-timed cellular automata*).

3.5 Autres systèmes complexes

3.5.1 Liens aux systèmes multi-agents

On remarquera dans les travaux de Cornforth et al. la mention de système multi-agents asynchrones mais, de façon intéressante, leurs modèles sont plutôt des automates cellulaires usuels [52]. En revanche, le travail de Comer a lui bien considéré des modèles multi-agents classiques, définis avec le logiciel Netlogo, mais les modèles qu'il a étudiés (aide à la décision pour l'armée ou pour la finance) sont trop éloignés de notre travail pour que nous puissions établir des liens [49].

On pourra également consulter le travail de Tošić pour une discussion sur le lien entre système multi-agents asynchrones et automates cellulaires [243]. Dans le chapitre 6, nous présenterons une analyse des systèmes multi-agents simples et de l'importance de regarder de près leur mise à jour.

Şamiloğlu et al. ont examiné les effets de l'asynchronisme dans la formation de groupes de particules en déplacement [220]. Leur modèle d'asynchronisme repose sur l'introduction de délais; ils constatent que la cohésion des groupes s'amenuise à mesure que les délais augmentent.

Lors du séjour post-doctoral d'Antoine Spicher, nous avons examiné la question de la « traduction » d'un système multi-agent séquentiel en un automate cellulaire asynchrone [233]. Nous avons défini des *automates cellulaires transactionnels* dans lesquels les mouvements des particules-agents sont synchronisés et où un pas de temps des agents correspond à un enchaînement de trois pas temps successifs de l'automate cellulaire. L'avantage de ce mode de mise à jour est qu'il supprime les effets de biais liés à la mise à jour séquentielle des agents. Nous avons illustré l'existence de tels biais, et leur suppression en nous intéressant au cas de la diffusion limitée par agrégation (*diffusion-limited aggregation*), un modèle particulièrement bien étudié en physique statistique.

On notera que les automates cellulaires de gaz sur réseau (Lattice-Gas Cellular Automata, LGCA) peuvent être vus comme un « pont » entre la mise à jour centrée sur les agents et la mise à jour centrée sur les cellules. Appliquer une forme d'asynchronisme dans un tel modèle ne va pas de soi et nous avons proposé, lors du travail de thèse d'Olivier Bouré, un premier modèle d'automate cellulaire de gaz sur réseau asynchrone [30].

3.5.2 Autre modèles

Les effets de l'asynchronisme dans les réseaux de régulation génétiques (formels) a donné lieu à toute une série d'études. Aracena et al. ont introduit des outils formels permettant de dire dans quelle mesure des mises à jour sont équivalentes [12]. Demongeot et al. [55], et

Noual [182], ont développé ces recherches et évalué la robustesse des systèmes et leur sensibilité aux variations structurelles (ajout de liens entre éléments, etc.).

La question des effets de la mise à jour a également été prise en compte pour les réseaux de neurones. nous pouvons citer le travail de Scherrer [222], et celui de Taouali et al. [239] qui ont proposé des distinctions intéressantes entre différents niveaux d'asynchronisme.

Évoquons aussi le contexte du calcul amorphe (*amorphous computing*), dans lequel Stark discute des capacités de calcul d'un milieu d'unités disposées aléatoirement et subissant des mises à jour aléatoires [235, 234]. Cet auteur suggère, comme nous le montrerons dans la troisième partie du mémoire, que l'aléa peut avoir un rôle positif dans la réalisation de tâches de calcul.

Pour finir cette visite du paysage de la littérature scientifique ayant trait à l'asynchronisme, mentionnons que l'asynchronisme a également été étudié dans le contexte des réseaux d'applications couplées (*coupled-map lattices*) [158, 210, 2] et dans le contexte des processus d'exclusion asymétrique (*Asymmetric Exclusion Process, ASEP*) avec les travaux de Rajewsky et al. [199].

Il existe bien sûr bien d'autres modèles de systèmes complexes dans lequel l'asynchronisme a été pris en compte, avec plus ou moins d'attention, mais nous avons tenu ici à présenter ceux qui nous paraissent les plus proches du modèle clé des automates cellulaires.

En somme, il semble que seule une partie infime de l'univers des automates cellulaires asynchrones ait été explorée à ce jour. Nous demandons donc :

Question 8. Les automates cellulaires asynchrones forment-ils un ensemble spécifique, qui demande une théorie propre et des outils propres, ou doit-on plutôt considérer les règles asynchrones comme des points particuliers de l'ensemble plus vaste des automates cellulaires probabilistes ?

Question 9. Qu'est-ce qu'un bon protocole expérimental pour estimer la robustesse des modèles à une perturbation comme l'asynchronisme ?

Quels sont les paramètres qui peuvent servir à cette estimation ?

Question 10. À quel point les phénomènes de transitions de phase sont-ils fréquents lorsqu'on opère des perturbations continues de la méthode de mise à jour ?

Question 11. Quelles sont les possibilités de définir et de construire une simulation d'un système asynchrone par un autre système asynchrone ?

Deuxième partie

Approche expérimentale des systèmes complexes

4

Modèle de Greenberg-Hastings

Ce chapitre expose un travail effectué en collaboration avec Hugues Berry à partir de 2010 [21]. Il nous permet de décrire les comportements de transitions de phase et d'examiner la classe d'universalité de la percolation orientée. Il est à noter nous avons également étudié ces transitions de phase dans différents systèmes à états binaires : automates cellulaires élémentaires [68] et jeu de la vie [70]. Un article présentant ce sujet a également été publié dans une conférence invitée lors du colloque Solstice'09 [69].

Le phénomène de réaction-diffusion est observé dans une large gamme de situations. Le travail de Turing sur la morphogenèse figure comme l'une des premières modélisations du phénomène [244]. Turing a proposé d'imaginer comment des composés chimiques fictifs, les *morphogènes*, peuvent agir et former spontanément des motifs uniquement par des mécanismes locaux d'amplification, d'inhibition et de diffusion, c'est ce qu'on appelle la *réaction-diffusion*. Par la suite, de nombreux modèles de réaction-diffusion ont été proposés pour expliquer différents phénomènes, par exemple la pigmentation des mollusques [143] ou les battements du cœur [163].

Nous allons présenter une version discrète des systèmes de réaction-diffusion. Le modèle que nous étudions est une variation probabiliste de la règle de Greenberg-Hastings [125]. Il s'agit d'un modèle parmi les plus simples pour étudier les phénomènes de réaction-diffusion. L'idée principale qui régit la règle locale de l'automate cellulaire est que les cellules sont dans un état quiescent, appelé état *neutre*, et deviennent *excitées* avec une certaine probabilité si au moins un de leurs voisins est excité. Une fois excitée, une cellule devient *réfractaire* et prend un pas de temps ou plus pour redevenir neutre. L'effet de ces règles simples est de permettre la propagation d'ondes qui ne s'atténuent pas avec la distance, contrairement aux ondes mécaniques ou aux ondes créés par la diffusion d'une substance telle qu'une phéromone.

En dépit de son apparente simplicité, ce modèle possède une grande richesse de comportement. Nous nous intéressons ici au *changement qualitatif* qui se produit quand la probabilité de transmission de l'état excité varie : dans le cas d'une grille infinie, en diminuant la probabilité d'excitation par un voisin, on passe d'un état global où les ondes vivent « infiniment longtemps » à un état où les ondes ont tendance à disparaître et où l'état tout-neutre agit comme un attracteur [103, 71]. Comme nos simulations se déroulent sur des grilles finies, nous devons

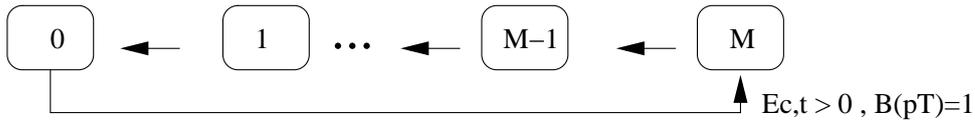


FIGURE 4.1 – Règle de transition locale du modèle de Greenberg-Hastings

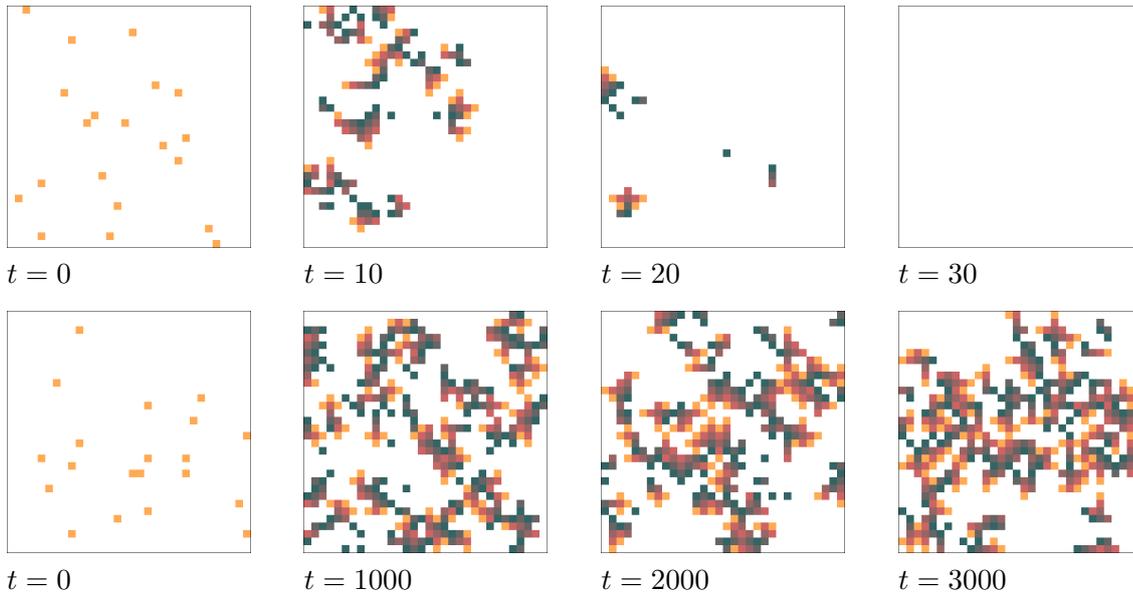


FIGURE 4.2 – Observations de la règle de Greenberg-Hastings probabiliste synchrone avec deux valeurs du taux de transmission p_T . En haut : $p_T = 0.4$, phase sous-critique, on atteint l'état tout-neutre rapidement. En bas : $p_T = 0.6$, phase sur-critique avec observation d'un état stationnaire. Les cellules en blanc et orange sont respectivement neutres et excitées, les autres couleurs indiquent les cellules réfractaires.

estimer la distorsion engendrée par la taille de la grille (effets de taille finie, *finite-size effects* en anglais).

Ce modèle a principalement été étudié sur des grilles régulières et avec des règles locales déterministes (voir p. ex. la ref. [7] pour une des premières références). Copelli et Campos ont considéré le cas où les règles locales étaient appliquées sur des réseaux petit-monde [50], et Doba a étudié le cas de graphes finis de forme arbitraire [61].

4.1 Présentation du modèle

Le système est une grille finie $\mathcal{L} = \{1, \dots, X\} \times \{1, \dots, Y\}$ de taille (X, Y) . L'espace d'états est $Q = \{0, \dots, M\}$: l'état 0 est l'état *neutre*, l'état M est l'état *excité*, les états de 1 à $M - 1$ sont les états *réfractaires*. Le voisinage d'une cellule c est noté \mathcal{N}_c , on note x_c^t l'état d'une cellule c au temps t .

La figure 4.1 décrit la règle locale de l'automate cellulaire. Notons E_c^t le nombre de cellules excitées dans \mathcal{N}_c au temps t : $E_c^t = |\{c' \in \mathcal{N}_c : x_{c'}^t = M\}|$. La règle de Greenberg-Hastings

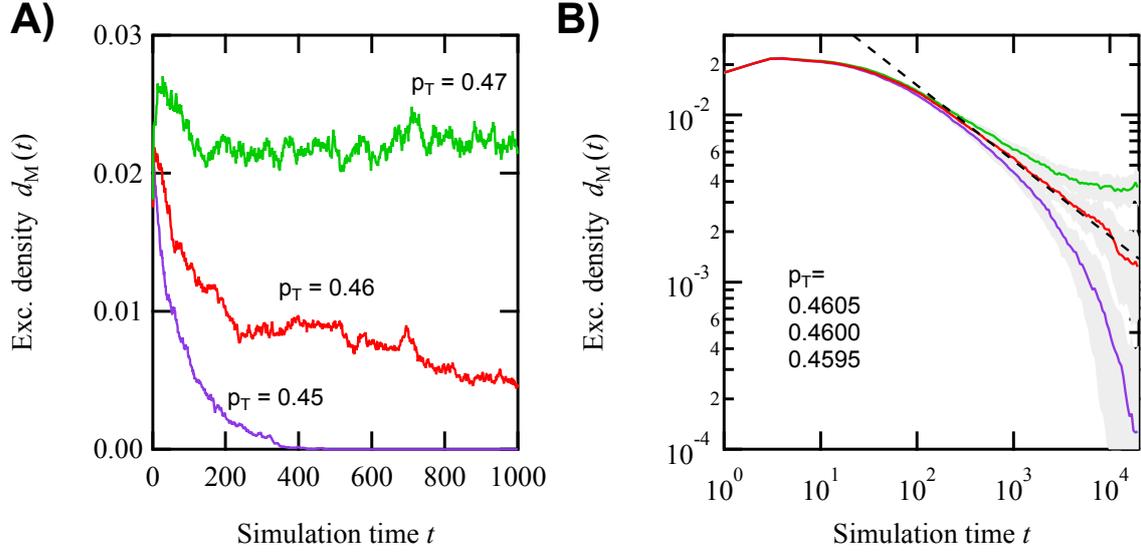


FIGURE 4.3 – Évolution de la densité de cellules excitées en fonction du temps $d_M(t)$ pour $M = 4$ et un voisinage de von Neumann.
 (A) Évolution pour un seul échantillon avec $L = 400$ et $p_T = 0.45$ (état sous-critique, en violet), $p_T = 0.46$ (état critique, en rouge), $p_T = 0.47$ (état sur-critique, en vert).
 (B) Courbe en échelle log-log avec des moyennes pour 30 échantillons avec $L = 800$ et $p_T = 0.4595$ (violet), 0.4600 (rouge) et 0.4605 (vert). Les zones grisées indiquent la déviation par rapport à la moyenne. Le trait en pointillé indique une décroissance compatible avec l'hypothèse de percolation orientée : $d_M(t) \propto t^{-0.451}$. Repris de la ref. [21].

s'écrit [125] :

$$\forall t, \forall c, x_c^{t+1} = \begin{cases} M & \text{si } x_c^t = 0 \text{ et } E_c^t > 0 \text{ avec probabilité } p_T, \\ x_c^t - 1 & \text{si } x_c^t \in \{1, \dots, M\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.1)$$

autrement dit :

- Une cellule neutre qui a au moins une cellule excitée dans son voisinage devient excitée avec probabilité p_T et reste neutre sinon.
- Une cellule excitée (M) devient réfractaire à l'état $M-1$.
- Une cellule réfractaire décrémente son état jusqu'à devenir neutre.

Notons simplement que la règle peut s'appliquer pour différents voisinages \mathcal{N}_c et même un voisinage de taille non-uniforme, comme lorsque l'on travaille sur des grilles avec des conditions aux bords non-périodiques. Dans la suite, sauf mention contraire les expériences présentées utiliseront un voisinage de von Neumann avec des bords périodiques.

4.2 Transitions de phase

Nous allons évaluer l'effet de la variation de la probabilité de transmission.

Quand la probabilité de transmission p_T est suffisamment élevée, le système se stabilise sur un état stationnaire où d_M oscille autour d'une valeur. Ceci correspond à l'état *actif* du système. Quand la probabilité p_T baisse en deçà d'un seuil critique, on atteint l'état d'*extinction* dans lequel toute activité cesse. Ces deux comportements sont exposés sur la figure 4.2 : on y distingue une différence claire entre une tendance rapide à l'extinction (quelques dizaines de pas de temps) et un état stationnaire, qui, quoique métastable, peut se maintenir sur des temps très longs avec une densité moyenne de cellules excitées qui oscille autour d'une valeur moyenne.

Notons $d_M(t)$ la densité de cellules à l'état M au temps t . La figure 4.3 montre les évolutions de $d_M(t)$ pour différentes valeurs de p_T . On remarque que sur une échelle log-log (fig. 4.3-B), la convergence vers un état stationnaire dans la phase active correspond à une forme convexe de la courbe alors que l'état d'extinction est lui repérable par une courbe concave. Notons qu'un changement infime de la valeur de p_T permet de passer d'un comportement à un autre et de repérer $p_{T,c}$, la valeur de la probabilité critique qui sépare les deux régimes.

Selon les lois de la physique statistique, on s'attend à ce que le système suive des lois de puissance au voisinage du seuil critique [132]. On peut comprendre l'apparition de telles lois par l'existence d'une forme d'invariance d'échelle. En particulier, on s'attend à observer $d_M(t) \sim t^{-\delta}$ lorsque $p_T = p_{T,c}$, ce qui signifie que le seuil critique est repéré lorsque la courbe est droite dans une échelle log-log (fig. 4.3-B). De façon remarquable, un même exposant critique peut être observé pour des systèmes de nature différente et on appelle *classe d'universalité* l'ensemble des systèmes qui sont décrits par les mêmes exposants critiques. Le jeu de la vie mis à jour avec un mode α -synchrone a lui aussi par exemple une transition de phase qui dépend du taux de synchronisme α et on mesure les mêmes exposants critiques que ceux trouvés ici [70, 69].

Ce comportement peut être mis en relation avec le phénomène de percolation [32]. Il existe de nombreux types de phénomènes de percolation, qui sont regroupés dans des catégories appelées classes d'universalité, avec la particularité que les différents modèles d'une même classe partagent les mêmes exposants critiques. Cette forme particulière d'« universalité » exprime le fait que des mécanismes avec des règles locales très différentes peuvent conduire à des comportements globaux similaires.

La classe d'universalité de la *percolation dirigée* (ou percolation orientée) a été observée dans de nombreux systèmes. Parmi les premières références, citons l'automate cellulaire de Domany-Kinzel [141, 62]. Dans notre travail, nous avons également observé que la percolation dirigée apparaissait dans le Jeu de la vie asynchrone [24, 70] et dans la dynamique asynchrone des automates cellulaires élémentaires [68, 212]. Pour le cas du modèle de Greenberg-Hastings probabiliste, notre étude a été motivée par l'évaluation du système d'amibes que nous présenterons dans le chapitre 9) et on a mesuré $\delta = 0.451$ comme exposant critique [71], ce qui correspond bien à la valeur attendue pour la classe d'universalité de la percolation dirigée [132, 184].

Notons que la valeur du seuil critique que nous avons mesurée, $p_T = 0.4600$, a été obtenue en itérant le processus qui consiste à repérer les changements de courbure sur une échelle log-log. Il faut ainsi réaliser des moyennes sur un nombre suffisant d'échantillons et calibrer le temps de mesure de façon adéquate, en faisant croître la taille progressivement. Dans notre cas, nous avons été jusqu'à faire des mesures pour des grilles de taille $L = 1200$ [21].

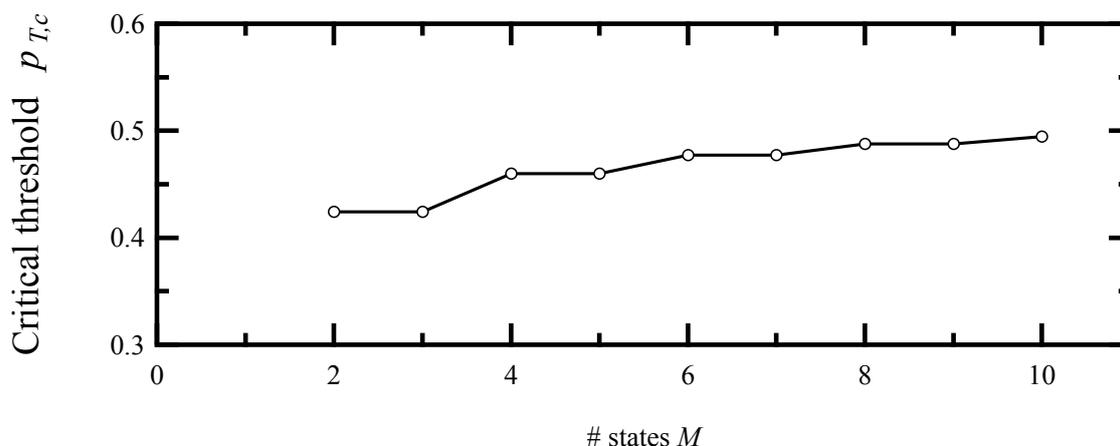


FIGURE 4.4 – Effet d’un changement de la valeur de M sur le seuil critique p_{T_c} . Repris de la ref. [21].

4.3 Robustesse du phénomène

On peut réitérer l’expérience qui consiste à mesurer la valeur du seuil critique en changeant plusieurs paramètres. Commençons par examiner l’effet de la valeur M , c’est-à-dire du nombre d’états non-neutres du modèle. La figure 4.4 expose comment la valeur du seuil critique p_{T_c} varie en fonction de M . Sans surprise, plus M est grand et plus grande est la valeur du seuil critique, et on peut inférer que cette valeur tend vers $1/2$ pour M grand. En effet, quand le nombre d’états est trop grand, la ré-excitation d’une cellule par une onde de réaction-diffusion devient improbable et on retrouve un phénomène de percolation classique.

Lors de notre collaboration avec Bernard Girau, Nikolaos Vlassopoulos et Hugues Berry au sein du projet AMYBIA¹³, nous avons utilisé des dispositifs de calcul parallèle de type FPGA (*field-programmable gate arrays*) [248] pour mesurer rapidement et précisément la valeur du seuil critique p_{T_c} . Ces mesures ont révélé que pour $M = 14$, c’est-à-dire que pour un modèle avec un assez grand nombre d’états, la valeur du seuil critique était de $p_{T_c} \sim 0.503$, avec une précision inférieure à 10^{-3} , ce qui montre une différence nette avec le seuil $1/2$. Nous sommes donc face à un nouveau problème ouvert : savoir si l’on a bien un seuil qui tend vers $1/2$ pour de grandes valeurs de M ou si un décalage avec $1/2$ peut exister.

Plus surprenante encore fut l’observation d’une égalité parfaite entre les valeurs obtenues pour les couples de valeurs pair-impair qui se suivent ($M = 2k$ et $M = 2k + 1$). Nous n’avons pas de démonstration de cette observation, même si l’on perçoit intuitivement que le voisinage de von Neumann joue un rôle central dans ce phénomène d’égalité.

4.4 Perturbation de la topologie

Nous évaluons maintenant l’effet de l’introduction de défauts dans la grille. Nous considérons deux types de défauts : (a) une cellule peut devenir défectueuse et ne plus répondre aux excitations des voisines ; (b) les liens entre cellules peuvent devenir défectueux et ne plus relayer l’information d’une cellule à l’autre. Ces deux défauts sont introduits au départ et restent

13. <https://amybia.loria.fr/>

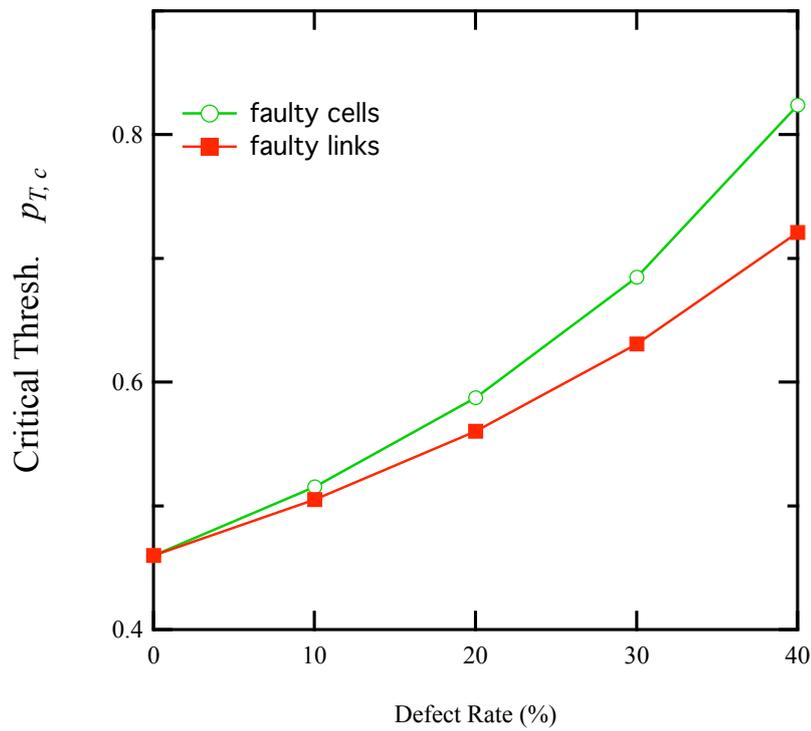


FIGURE 4.5 – Évolution du seuil critique $p_{T,c}$ en fonction de taux de cellules manquantes et en fonction du taux de liens manquants (carrés). Les courbes sont obtenues avec 15 échantillons, $M = 4$, une taille de grille de $L = 1200$ et un voisinage de von Neumann. Les positions des défauts sont modifiées d'un échantillon à l'autre. Repris de la ref. [21].

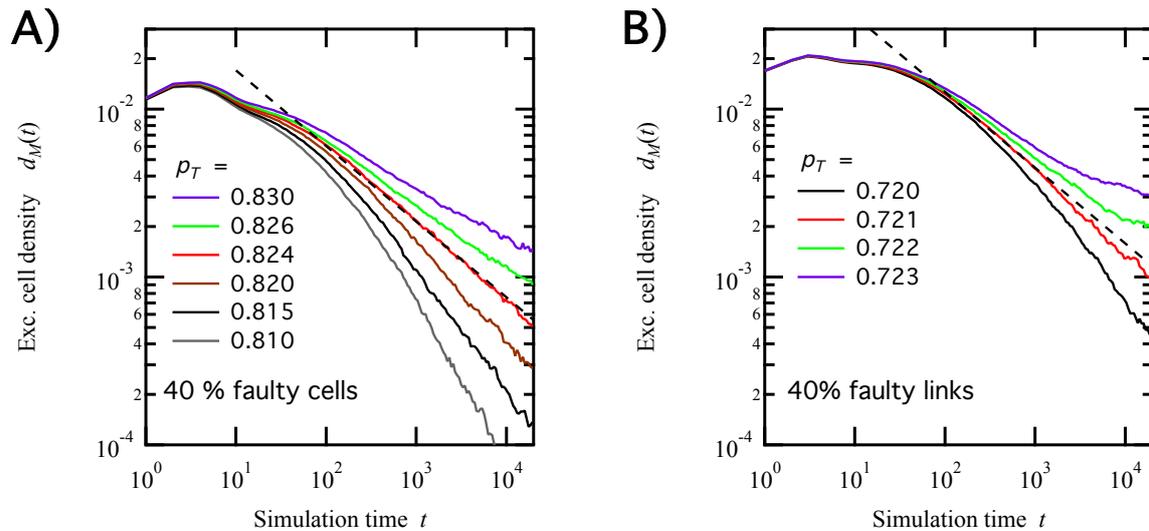


FIGURE 4.6 – Observations de la transition de phase avec un taux 40% de cellules manquantes (A) ou 40% de liens manquants (B). Les autres paramètres restent inchangés (cf. fig. 4.5.). Repris de la ref. [21].

fixes au cours du temps.

La figure 4.5 montre l'effet de ces perturbations. Comme on pouvait s'y attendre, le seuil critique augmente avec le taux de défauts. Ceci s'explique facilement du fait que les défauts empêchent une bonne propagation des excitations à travers la grille et qu'il faut donc que la probabilité de transmission soit plus grande pour compenser cette atténuation.

Nous avons néanmoins été surpris de constater la détermination du seuil critique devient plus difficile à mesure que le taux de défauts croissait. Tout se passe comme si la transition entre le régime d'extinction et le régime actif était « floutée » par l'introduction de défauts. La figure 4.6 montre les résultats des simulations pour 40% de cellules manquantes et 40% de liens manquants. Il est à noter que comparé aux graphiques précédents, le pas de variation est ici de 10^{-3} . On constate que là où on avait pour cette variation un net changement de courbure en échelle log-log, on a désormais des courbes assez droites, ce qui complique l'identification du seuil critique.

4.5 Développements analytiques

Les résultats qui viennent d'être présentés ont été obtenus à l'aide de simulations numériques. Peut-on obtenir des confirmations de ces observations par l'analyse mathématique? Avec Hugues Berry, nous avons conduit une analyse de champ moyen de cette transition de phase. Cette étude a conduit à l'établissement d'une *loi de proportionnalité inverse* : la valeur du seuil critique varie en C/N où C est une constante et N est le nombre moyen de voisins par cellule. L'approximation du champ moyen donne $C = 1$ alors que les études expérimentales donnent $C \sim 2$. La figure 4.7 montre comment le seuil critique varie en fonction de différents voisinages, réguliers ou irréguliers, et de leur valeur correspondante N .

Il est à noter que Reyes et Laroze ont confirmé cette observation et l'ont même étendue au cas des « graphes petit-monde » (*small-world networks*) [206, 205]. Soto Forero et Ceballos ont

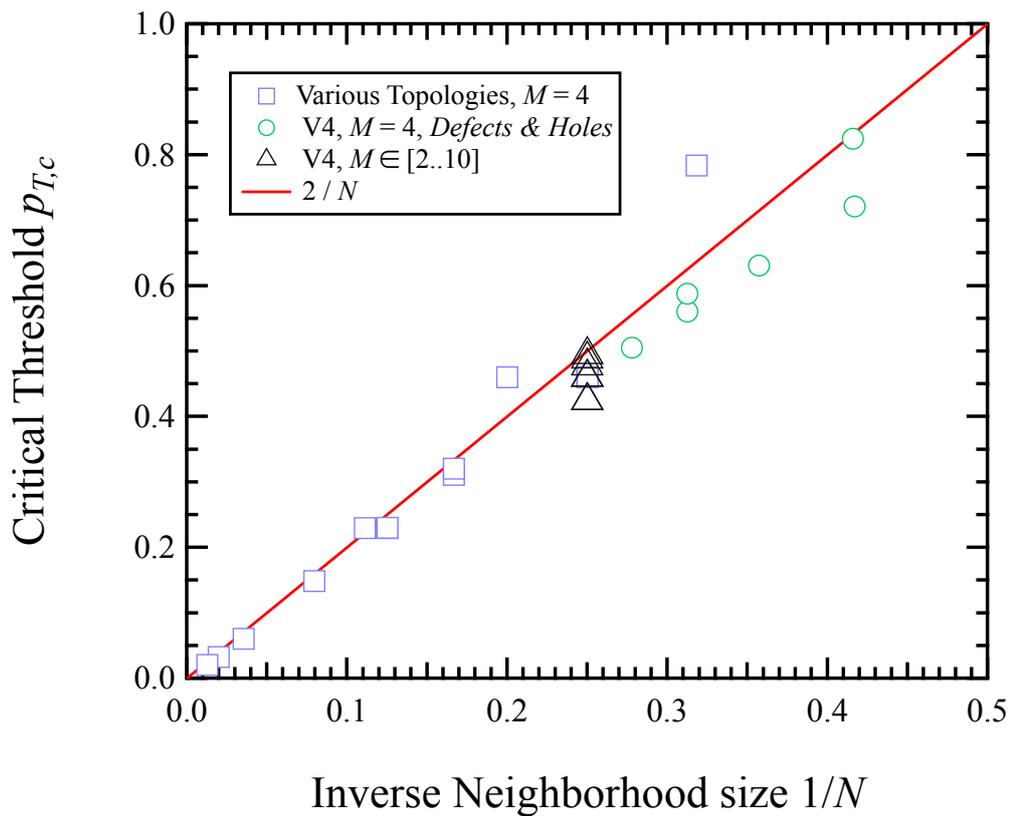


FIGURE 4.7 – Illustration de la proportionnalité entre p_{T_c} et $1/N$, où N est le nombre moyen de voisins. Les carrés correspondent à différents voisinages; les cercles à $M = 4$ et au voisinage de von Neumann avec différents taux de défauts. Les triangles correspondent au voisinage de von Neumann avec M variant de 2 à 10. La courbe rouge correspond à la fonction $p_{T_c} = 2/N$. Repris de la ref. [21].

quant à eux réalisé une étude de la règle de Greenberg-Hastings sur des graphes avec des liens dynamiques, en examinant en particulier des stratégies pour maintenir la phase active, et ce selon différents scénarios [232].

4.6 Problème inverse : diagnostic décentralisé

À partir de ces observations, notant la grande robustesse de cette loi, nous avons proposé d'inverser le processus pour en faire un système de *diagnostic décentralisé* [122]. Le problème se pose ainsi : supposons que l'on ait un système constitué de composants en interaction locale qui peuvent tomber en panne à chaque pas de temps. Comment faire en sorte que le système puisse détecter de manière autonome quand le taux de composants défectueux franchit un seuil d'alerte fixé à l'avance ?

Notre idée est simple. Si on imagine que des défauts surviennent en mettant certaines cellules hors-jeu, ceci va changer la connectivité moyenne des cellules et transformer le système en le faisant passer d'un état sur-critique à un état sous-critique. La détection de ce changement de phase peut permettre de détecter, de manière collective et non centralisée, que le taux de défauts a passé un certain seuil.

Cette idée a fait l'objet du stage de Master de Nicolas Gauville, co-encadré avec Irène Marcovici [122]. Nous y reviendrons dans la conclusion de ce mémoire.

Nous pouvons clore ce chapitre en relevant quelques questions.

Question 12. Comment expliquer l'invariance du seuil selon les couples de valeur paire-impair pour M et pour le voisinage de von Neumann ?

Question 13. Le processus de mesure des transitions de phase (seuils critiques et exposants critiques) étant très gourmand en calcul, comment l'améliorer et l'automatiser de façon à explorer des grands espaces de règles ? Est-il préférable d'utiliser des calculateurs classiques ou des outils dédiés tels que les FPGA ou les GPGPU (*general-purpose graphical processing units*) ?

Question 14. Peut-on utiliser le phénomène du déplacement du seuil critique en fonction de la topologie pour concevoir un système de diagnostic décentralisé ?

Un modèle de formation d'essaims

Nous considérons ici un phénomène collectif, la formation d'essaims, comme exemple de système complexe où le hasard joue un rôle structurant. Le contenu de ce chapitre reprend une partie de la thèse d'Olivier Bouré, que nous avons co-encadrée avec Vincent Chevrier de 2010 à 2013 [26]. Ce travail a donné lieu à une publication en conférence [29] puis à une version longue dans la revue *Natural Computing* [30]. En 2018, une synthèse reprenant les observations précédentes en les précisant a été publiée dans un Festschrift dédié à Eric Goles [90].

Examinons maintenant un modèle de mouvement collectif. L'automate cellulaire que nous allons utiliser dérive d'une classe particulière d'automates, appelés *automates de gaz sur réseaux*, en anglais *lattice-gas cellular automaton* (LGCA). Ce modèle a été inventé pour étudier les mouvements des particules de gaz ou de liquides dans les années 1970 et jusqu'à présent ils ont été principalement utilisés dans ce cadre. Nous allons ici sortir de ce contexte et nous intéresser à leur utilisation en biologie. Nous suivons ici la proposition d'Andreas Deutsch, qui a proposé en 1996 un modèle de gaz sur réseaux pour étudier la formation d'essaims [58].

La particularité des gaz sur réseaux est que chaque cellule peut contenir une ou plusieurs particules, jusqu'à quatre, chaque particule ayant une direction parmi les quatre directions cardinales. Initialement, les particules sont réparties de manière aléatoire uniforme et avec des directions aléatoires. À chaque pas de temps, les particules vont interagir avec leurs voisines en changeant leur direction, puis elles vont avancer dans la direction qui est la leur. Nous nous intéressons aux conditions qui permettent l'apparition de phénomènes de formation de motifs de particules avec des déplacements cohérents des particules.

5.1 Une première observation

Avant de nous attacher aux détails du modèle et à sa description formelle, observons simplement le phénomène d'auto-organisation qui est présenté sur la figure 5.1. Avec un peu d'imagination, on peut voir des oiseaux former un essaim ou des poissons former un banc. Nous voyons que les particules se regroupent et se déplacent en diagonale : comment comprendre ce phénomène ? Quel est le rôle du hasard dans la formation de cette bande diagonale ? Ce regroupement est-il robuste aux changements de valeur des paramètres et aux différentes perturbations du modèle ?

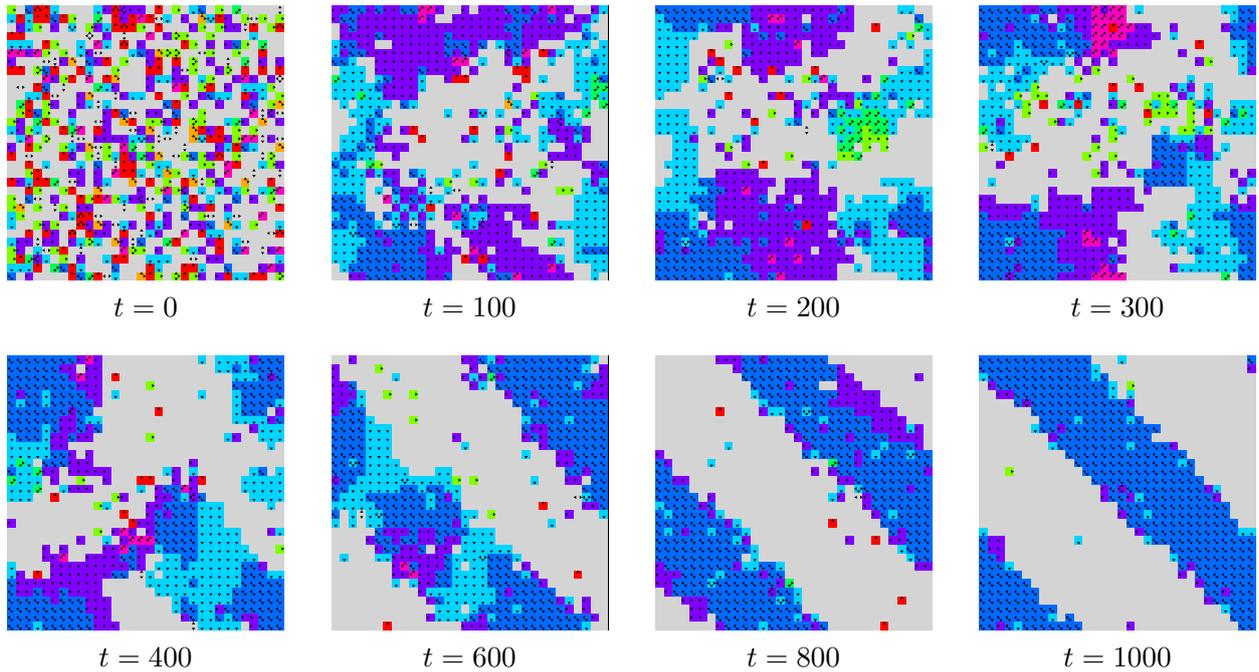


FIGURE 5.1 – Évolution du système à partir d’une condition initiale aléatoire pour $L = 32$, $\sigma = 2.0$ et $d_{\text{ini}} = 0.2$.

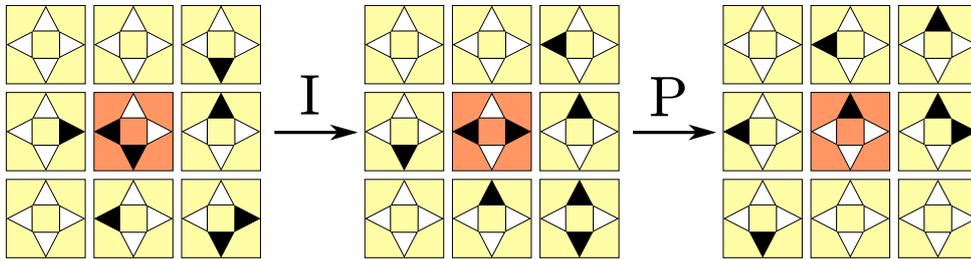


FIGURE 5.2 – Représentation des étapes d’interaction et de propagation.

5.2 Définition du modèle

On note $\mathcal{L} = (\mathbb{Z}/X.\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/Y.\mathbb{Z})$ la grille avec des conditions aux bords périodiques, c’est-à-dire que l’espace est torique. Notons que l’on pourrait également travailler sur $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$.

Chaque cellule comporte quatre *canaux*, chacun des canaux étant associé à une direction cardinale n, e, s, w qui correspondent respectivement aux directions nord, est, sud, ouest. Un canal qui contient une particule est *occupé*, et *libre* sinon.

L’état d’une cellule est donc représenté par un quadruplet $(q_n, q_e, q_s, q_w) \in Q = \{0, 1\}^4$, où 0 et 1 représentent respectivement l’absence ou la présence d’une particule dans un canal.

Dans ce chapitre, nous noterons les configurations comme des *fonctions* afin d’éviter la surcharge d’indices (pour le canal et pour la cellule). L’espace des configurations est noté $\mathcal{E}_n = Q^{\mathcal{L}}$.

La règle globale est notée $F : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ et son application se décompose en deux temps :

1. l’étape d’*interaction*, où les particules sont redistribuées au sein de la même cellule, et
2. l’étape de *propagation*, où les particules sont déplacées d’une cellule à ses voi-

sines.

Ce dernier mouvement est simple : chaque particule se déplace dans la cellule qui correspond à sa direction. Une particule du canal nord dans une cellule (x, y) arrive dans le canal nord de la cellule $(x, y + 1)$; s'il se trouvait une particule dans ce canal, comme les mouvements sont synchrones, cette particule se déplace aussi au nord et il n'y a pas de collision. Formellement : $x^{t+1} = F(x^t) = F_{\text{prop}} \circ F_{\text{interact}}(x^t)$.

Décrivons d'abord l'étape de propagation, qui est la plus simple.

En notant $x = (x_n(c), x_e(c), x_s(c), x_w(c))$ et $y(c) = (y_n(c), y_e(c), y_s(c), y_w(c)) = F_{\text{prop}}(x)$, il vient, pour toute cellule $c \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} y_n(c) &= x_n(c - v_n) & \text{avec} & & v_n &= (0, 1); \\ y_e(c) &= x_e(c - v_e) & & & v_e &= (1, 0); \\ y_s(c) &= x_s(c - v_s) & & & v_s &= (0, -1); \\ y_w(c) &= x_w(c - v_w) & & & v_w &= (-1, 0). \end{aligned}$$

Passons à l'étape d'interaction. Soit $q = (q_n, q_e, q_s, q_w)$ l'état d'une cellule; nous appelons un tel état une *tuile*. Nous allons replacer cette tuile par une tuile contenant le même nombre de particules, selon une règle stochastique. On note $N(q) = q_n + q_e + q_s + q_w$ le nombre de particules d'une tuile q et $\pi(q)$ l'ensemble des tuiles ayant même nombre de particules : $\pi(q) = \{q' \in \{0, 1\}^4, N(q') = N(q)\}$.

Nous associons à chacune de ces tuiles un *poids* défini par une fonction $w : \{0, 1\}^4 \rightarrow \mathbb{R}^+$. La probabilité $p_w(q)$ de sélectionner une tuile q après application de l'étape d'interaction vaut alors

$$p_w(q) = \frac{w(q)}{\sum_{q' \in \pi(q)} w(q')}.$$

Pour calculer ce poids, nous introduisons maintenant les paramètres suivants :

— Le *flux local* $\varphi : Q^4 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ d'une cellule $c \in \mathcal{L}$ est la quantité de mouvement des particules de cette cellule. En notant $x(c) = (q_n, q_e, q_s, q_w)$, on a :

$$\varphi(x(c)) = q_n \cdot v_n + q_e \cdot v_e + q_s \cdot v_s + q_w \cdot v_w.$$

— Le *champ directeur* $D \in \mathbb{Z}^2$ d'une cellule c est la somme des flux locaux des voisines de c :

$$D(x, c) = \varphi(x, c + v_n) + \varphi(x, c + v_e) + \varphi(x, c + v_s) + \varphi(x, c + v_w).$$

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{Z}^2 . Pour une *force d'alignement* σ , l'étape d'interaction est donnée par la probabilité $P(x \rightarrow x_I)$ de remplacer une configuration x par une configuration x_I :

$$P(x \rightarrow x_I) = \prod_{c \in \mathcal{L}} \frac{\exp\{\sigma \langle D(x, c), \varphi(x_I(c)) \rangle\}}{Z(x, c)},$$

où :

$$Z(x, c) = \sum_{q \in \pi(x(c))} \exp\{\sigma \langle D(x, c), \varphi(q) \rangle\}$$

est le facteur de renormalisation.

Le rôle de σ est de favoriser l'apparition d'une tuile alignée avec le flux local et de défavoriser l'apparition des tuiles dont le flux local est opposé à celui de la cellule considérée.

5.2.1 Invariant du damier

Par construction cet automate possède une quantité conservée non désirée. En effet, si nous appelons paires et impaires les particules qui sont respectivement situées sur une case paire ou impaire, c'est-à-dire l'équivalent d'une case noire ou blanche du damier, alors on peut vérifier que le nombre de particules paires et impaires est échangé à chaque pas de temps.

Notons (x^t) l'évolution du système, et $\mathcal{L}_0 = \{c = (c_x, c_y) \in \mathcal{L}, c_x + c_y \in 2\mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$ les ensembles de cellules paires et impaires, respectivement, $N_0(t) = \sum_{c \in \mathcal{L}_0} N(x^t(c))$ et $N_1(t) = \sum_{c \in \mathcal{L}_1} N(x^t(c))$ le nombre de cellules paires et impaires, respectivement. On peut vérifier que l'application des règles des gaz sur réseaux donne toujours : $(N_0, N_1)(t + 1) = (N_1, N_0)(t)$.

La présence de cet invariant est un défaut du modèle puisque, contrairement à la conservation du nombre de particules, il ne résulte pas d'un choix délibéré. C'est ce qui amène certains auteurs à préférer l'utilisation d'une grille hexagonale pour les modèles de gaz sur réseaux. On pourra se rapporter au travail de Barberousse et Imbert pour une discussion plus approfondie sur les simulations par gaz sur réseaux [17]. Notons que notre construction d'automates de gaz sur réseaux avec mise à jour *asynchrone*, quoi qu'elle complique la définition du modèle, permet de se débarrasser de cet invariant indésirable [26, 30].

5.2.2 Récurrence de la chaîne de Markov

La deuxième propriété remarquable est que la chaîne de Markov qui décrit l'évolution du système est récurrente : si à un temps donné le système se trouve dans une configuration x cette même configuration sera revisitée infiniment souvent. Ceci a une conséquence importante : sur des grilles finies, les motifs que nous observerons seront toujours asymptotiquement instables, c'est-à-dire que quand nous observerons des motifs stables, ils seront en réalité *métastables*. En d'autres termes, ils seront stables sur des durées très longues, excédant largement tous les temps mesurables, mais ils seront à terme voués à la destruction.

Notons que dans ce qui suit le terme de *motif* sera utilisé de manière informelle pour désigner un ensemble de configurations ayant la même apparence visuelle. La récurrence du système implique qu'une connaissance finie du système demanderait d'étudier les motifs avec deux quantités : leur *attractivité*, c'est-à-dire leur probabilité d'apparaître en partant d'une condition initiale aléatoire et leur *stabilité*, c'est-à-dire le temps moyen durant lequel ils seront observables. Nous laissons ces pistes comme des problèmes ouverts.

À ce jour peu de résultats analytiques ont été donnés sur ce modèle. Les approximations de champ moyen ont été utilisées avec un certain succès pour prédire le passage d'un état ordonné à un état désordonné (voir ref. [36] et ref. [59, Chap. 8]) mais de telles approches ne permettent pas de rendre compte de la richesse de motifs que l'on peut observer dans ce modèle. Signalons qu'Irène Marcovici a également étudié des éléments invariants de ce modèle dans sa thèse de doctorat [167, Chap. 2.6].

5.3 Exploration des motifs stables

5.4 Quantification de l'ordre

On notera $\gamma(x)$ l'*alignement moyen* d'une configuration $x \in \mathcal{E}_n$. Ce paramètre évalue dans quelle mesure les particules d'une cellule ont tendance à être alignées avec les cellules voisines ;

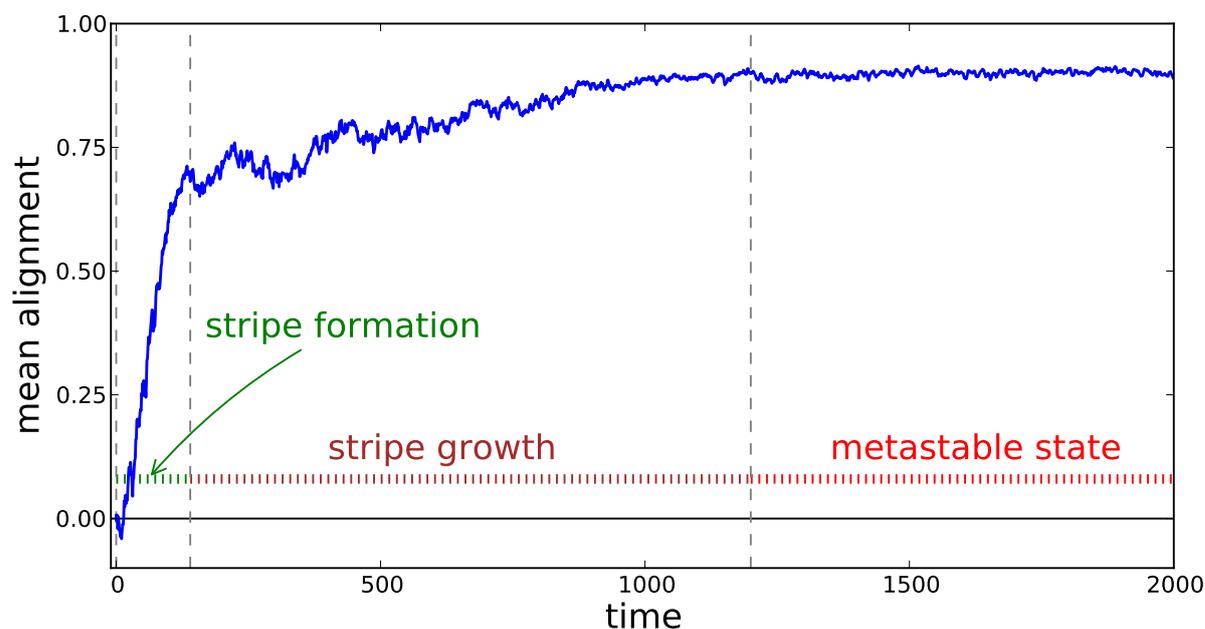


FIGURE 5.3 – Évolution de l'alignement moyen pour la trajectoire observée sur la fig. 5.1: $L = 32$, $d_{ini} = 0.2$, $\sigma = 2.0$.

il est défini par

$$\gamma(x) = \frac{1}{4N(x)} \sum_{c \in \mathcal{L}} \langle \varphi(x, c), D(x, c) \rangle .$$

La division par 4 assure que γ a une valeur dans $[-1, 1]$: une valeur proche de 1 (resp. -1) indique qu'en moyenne les particules sont alignées (resp. « anti-alignées ») avec les particules voisines, une valeur de 0 indique une absence d'alignement.

5.4.1 Formation de bandes diagonales

La figure 5.3 montre l'évolution temporelle de l'alignement moyen pour la même évolution que celle qui est montrée dans la figure 5.1.

Cette évolution peut être divisée en trois phases : la première est la formation de la bande, qui survient en un temps relativement court. Dans un second temps la bande diagonale s'« affirme » et devient de plus en plus régulière. Après environ un millier d'étapes, le système a atteint un état stationnaire métastable.

Pour estimer le temps nécessaire à la formation de la bande, on répète l'expérience en reprenant des conditions initiales aléatoires et pour chaque trajectoire, on mesure le temps pour atteindre la valeur $\gamma = 0.5$. En effet, à ce stade, la bande diagonale ne peut disparaître qu'avec une probabilité infinitésimale (métastabilité).

La figure 5.4 montre l'histogramme montrant la distribution des temps de formation de la bande, mesurés pour $L = 32$. L'échantillon est de taille 10 000 et la densité initiale est $d_{ini} = 0.2$. On observe une distribution qui semble suivre une loi de Poisson. En doublant la taille des dimensions de la grille ($L = 64$), on remarque une légère augmentation du temps moyen de la formation de la bande mais un resserrement de la distribution. Ceci montre que le phénomène devient plus régulier avec des grandes tailles; on pourra se rapporter à l'article de Bouré et al.

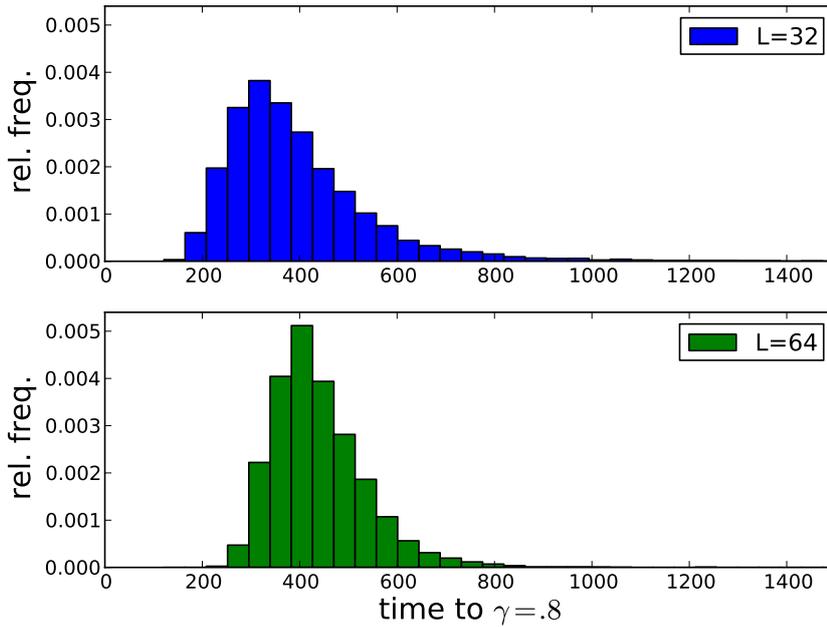


FIGURE 5.4 – Distribution du temps de formation d’une bande diagonale pour $L = 32$ et $L = 64$.

pour plus détails [30].

5.4.2 Phase avec motifs à damiers

Observons maintenant ce qui se produit si l’on part d’une plus haute densité tout en gardant la force d’alignement constante ($\sigma = 0.2$). Prenons par exemple $d_{\text{ini}} = 0.4$, ce qui correspond à un doublement de la valeur du paramètre.

La figure 5.5 montre l’évolution du système pour ce réglage : nous observons alors un phénomène surprenant puisque les particules ont désormais une tendance à l’*anti-alignement* ! En effet, les simulations montrent que des zones de couleurs homogènes apparaissent assez rapidement et que dans ces zones les couleurs alternent comme sur un damier. En y regardant de plus près, on peut assez facilement comprendre d’où provient la stabilité de ces zones : à chaque pas de temps la composition de l’étape d’interaction et de l’étape de propagation fait

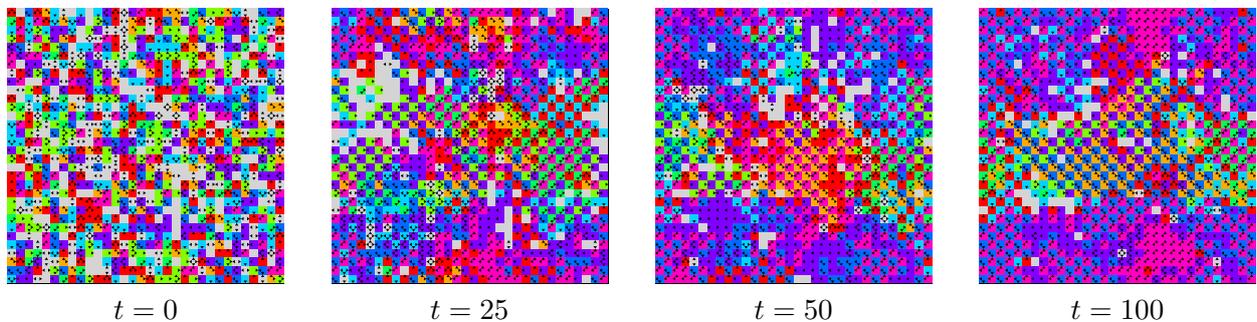


FIGURE 5.5 – Évolution du système à partir d’une condition initiale aléatoire pour $L = 32$, $\sigma = 2.0$ et $d_{\text{ini}} = 0.4$.

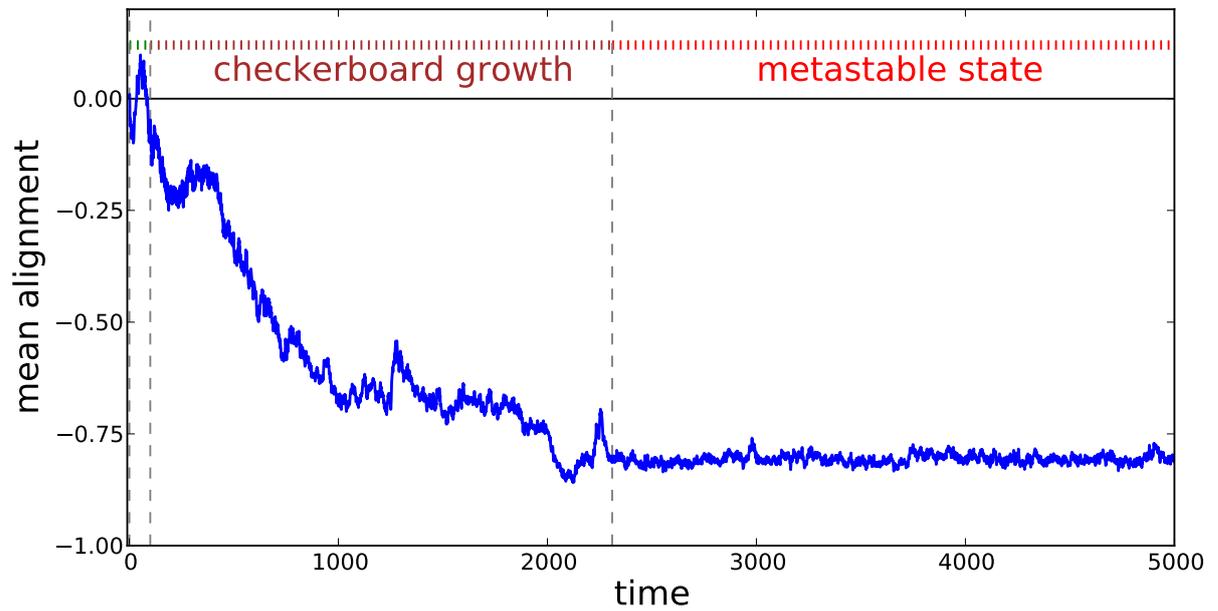


FIGURE 5.6 – Évolution de l'alignement moyen pour la trajectoire observée sur la fig. 5.5: $L = 32$, $d_{\text{ini}} = 0.4$, $\sigma = 2.0$.

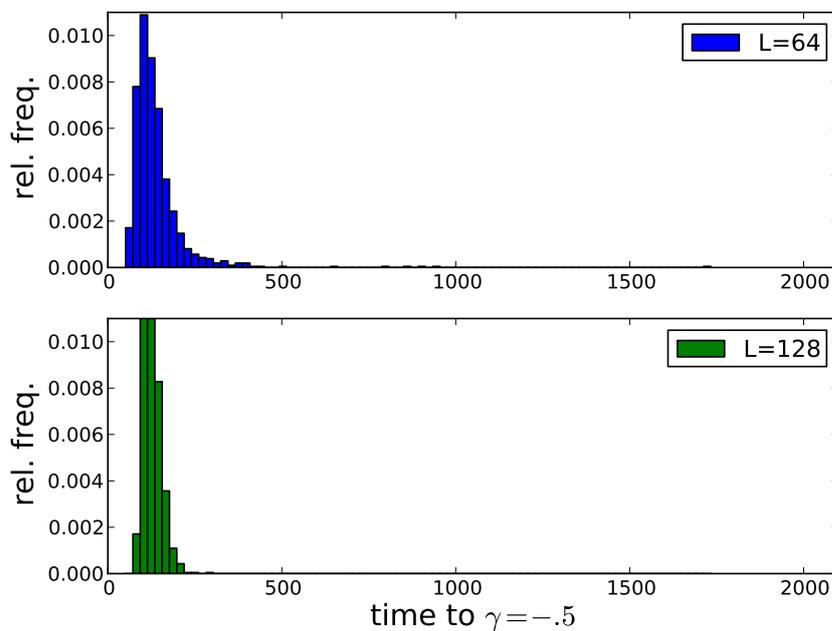


FIGURE 5.7 – Distribution du temps de formation d'une configuration-damier pour $L = 64$ et $L = 128$.

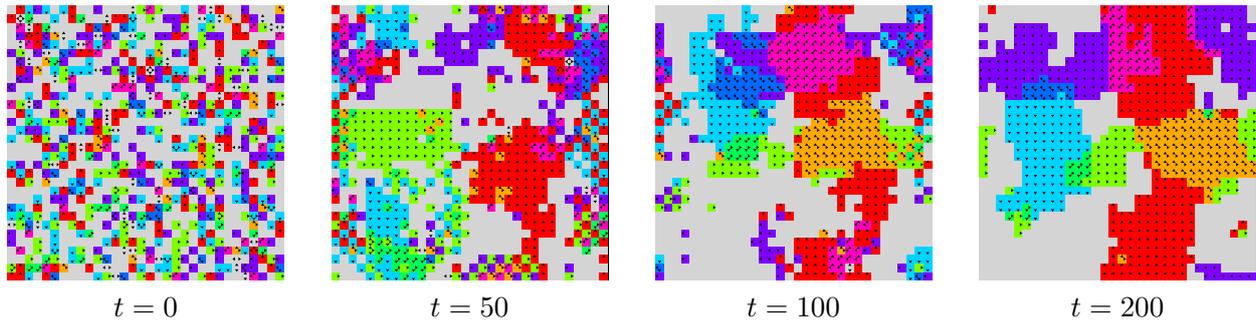


FIGURE 5.8 – Evolution of the system from a random initial configuration. The grid size is $L = 32$, the alignment force is $\sigma = 4.0$ and the initial density is equal to $d_{ini} = 0.2$.

que les directions des particules se conservent. En effet, lors de l'étape d'interaction les particules d'une cellule « essaient » de s'aligner avec les particules voisines mais, comme le même mouvement se produit dans les cellules voisines, celles-ci changent également leur orientation et après l'étape de propagation, les directions sont inchangées.

Bien sûr des fluctuations apparaissent et les zones de damier ont tendance à dériver sur la grille. Lorsque deux zones se rencontrent, des instabilités surviennent aux frontières. Les zones peuvent alors croître ou décroître, et parfois fusionner jusqu'à former une unique zone de damier. De façon intéressante on notera qu'un phénomène similaire se produit avec la dynamique de la règle minorité avec une mise à jour totalement asynchrone [204] ou avec un modèle d'Ising qui tend à l'anti-alignement des spins.

Sur la figure 5.6, on observe l'évolution de l'alignement moyen sur la même trajectoire que celle de la figure 5.5. On voit que l'alignement moyen décroît de manière régulière jusqu'à ce que se forme un damier unique, qui forme alors un équilibre métastable. La figure 5.7 permet de se faire une idée du temps nécessaire à la formation d'un damier : le temps mesuré correspond au temps d'atteinte de la valeur $\gamma = -0.5$.

5.4.3 Phase d'amas

Observons maintenant ce qui se produit si l'on reprend la densité initiale de départ ($d_{ini} = 0.2$) et si on double la valeur de la force d'alignement : $\sigma = 4$.

La figure 5.8 montre l'évolution du système : on observe qu'un état stationnaire apparaît, dans lequel des groupes de particules se déplacent de façon cohérente selon les quatre directions cardinales. Nous appelons cet état, l'état d'amas. Ces amas restent cohérents lorsqu'ils se rencontrent et donnent l'impression de se traverser quasiment sans interagir. Il y a néanmoins des fluctuations dues à l'aléa qui font que les groupes gagnent ou perdent des particules au fil du temps.

La figure 5.9 montre l'évolution temporelle de l'alignement moyen γ pour la même trajectoire que celle de la figure 5.8. Nous mesurons le temps nécessaire à atteindre la valeur $\gamma = 0.8$ et montrons les distributions de ce temps dans la figure 5.10. Nous sommes assez surpris d'observer que pour de petites tailles de grille ($L < 128$), on trouve des trajectoires qui ne forment pas cet état d'amas ; le système se stabilise alors sur un état dit « état serpent » (voir [26, 30]).

En somme, ce modèle montre bien en quoi une approche expérimentale des systèmes complexes reste nécessaire : si l'on prend l'étape d'interaction seule, on a un modèle qui n'est pas

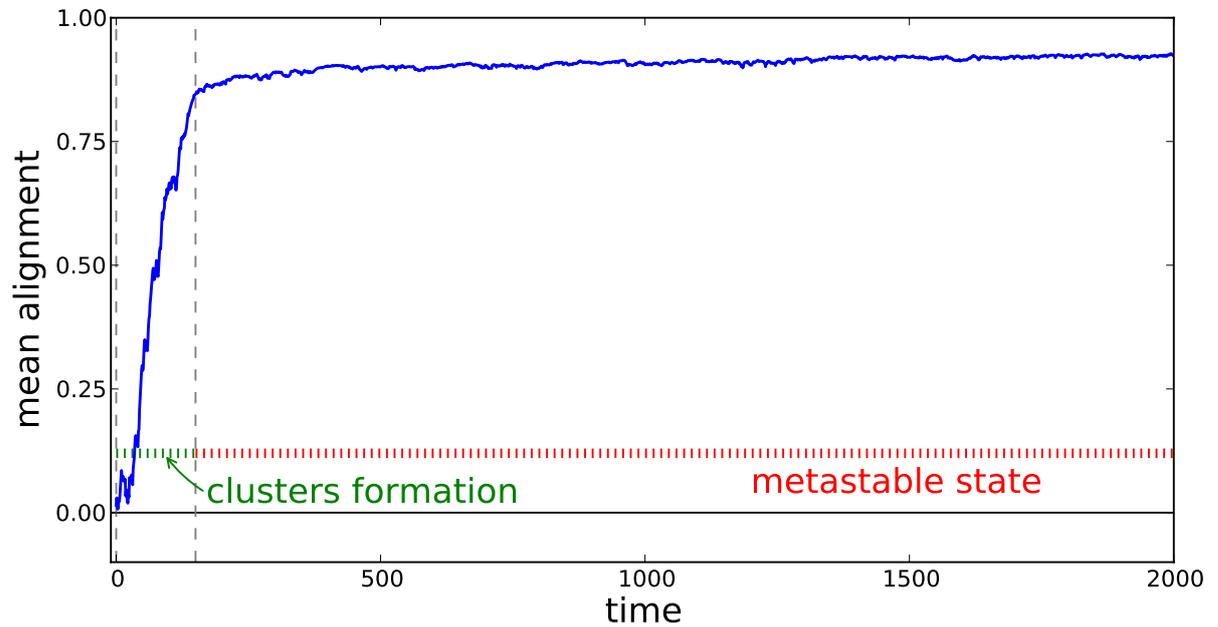


FIGURE 5.9 – Évolution de l'alignement moyen pour la trajectoire observée sur la fig. 5.8: $L = 32$, $d_{ini} = 0.2$, $\sigma = 4.0$.

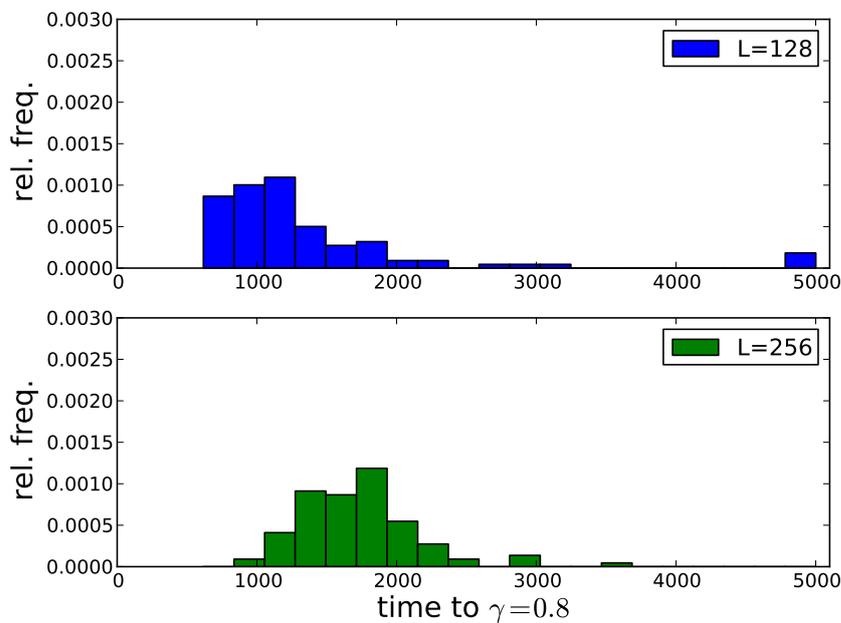


FIGURE 5.10 – Distribution du temps de formation d'une configuration à motifs d'amas pour $L = 128$ et $L = 256$ (100 échantillons).

bien différent des modèles « classiques » de magnétisation tels que les modèles d'Ising. Il a suffi d'ajouter l'étape de propagation pour que l'on arrive dans un domaine quasiment inconnu. Nous constatons aussi que le passage de l'ordre au désordre, bien loin de se limiter à deux comportements-type, comme dans le cas du modèle de Greenberg-Hastings par exemple, comporte plusieurs motifs stables, dont les trois principaux sont la bande, les damiers et les amas. Il y a donc *plusieurs* transitions de phase à étudier si l'on veut disposer d'une bonne cartographie du modèle. Des éclairages extrêmement limités peuvent être apportés par l'analyse mais ceux-ci ne parviennent pas à notre connaissance à expliquer toute la richesse des phénomènes observés. On constate donc que la modélisation et la compréhension des mouvements collectifs, aussi simples soient-ils au niveau local, reste une question scientifique de taille.

Finissons ce chapitre en relevant ces questions :

Question 15. Comment mesurer avec précision les transitions de phase existantes entre l'état désordonné et les différents motifs ?

Question 16. Comment évaluer l'attractivité et la *stabilité* des motifs observés ?

6

Turmites

Ce chapitre présente des travaux effectués en collaboration avec Vincent Chevrier [45, 46] et développés en 2012 lors du stage de Master 2 de Selma Belgacem [19]. Nous avons cherché à donner aux systèmes multi-agents un cadre formel proche de celui des automates cellulaires et à tirer profit de ces descriptions pour élargir le spectre des observations faites par simulation numérique sur le modèle particulier des turmites (ou fourmis de Langton).

6.1 Des modèles discrets simples

Dans un article fondateur sur la « vie artificielle » publié en 1986 [147], Langton écrit que « Le comportement global d'une société est un phénomène émergent, qui résulte de toutes les interactions locales de ses membres. (...) Nous savons que des comportements complexes peuvent émerger à partir des interactions de parties très simples. Les colonies d'insectes sociaux fournissent un bon sujet pour l'étude de la vie artificielle car elles montrent immédiatement un comportement complexe qui émerge des interactions entre des parties vivantes très simples. »¹⁴

La méthode poursuivie par Langton se rapproche de celle que Turing a empruntée lorsque celui-ci travaillait sur la morphogenèse [244] : au lieu d'essayer de prendre en compte de plus en plus d'aspects de la réalité, ce qui est souvent un travail sans fin, chercher plutôt à simplifier le modèle autant que faire se peut, jusqu'à identifier les mécanismes qui sont *suffisants* pour qu'un phénomène donné se produise. Langton a donc proposé de considérer un système simple, composé d'un ou plusieurs agents, qui agissent sur une grille bidimensionnelle avec des cellules ayant un état binaire, noté 0 et 1. Son but est double, d'abord trouver un cas illustrant la complexité du passage du local au global pour un agent seul, puis, dans un second temps, observer ce qu'il se produit dans une « société d'agents ».

14. The global behaviour of a society is an emergent phenomenon, arising out of all of the local interactions of its members. [...] We know that complex behaviour can emerge from the interaction of very simple parts. Colonies of social insects provide a good subject material to the study of artificial life because they so readily exhibit complex behaviour emerging from the interaction of very simple living parts.

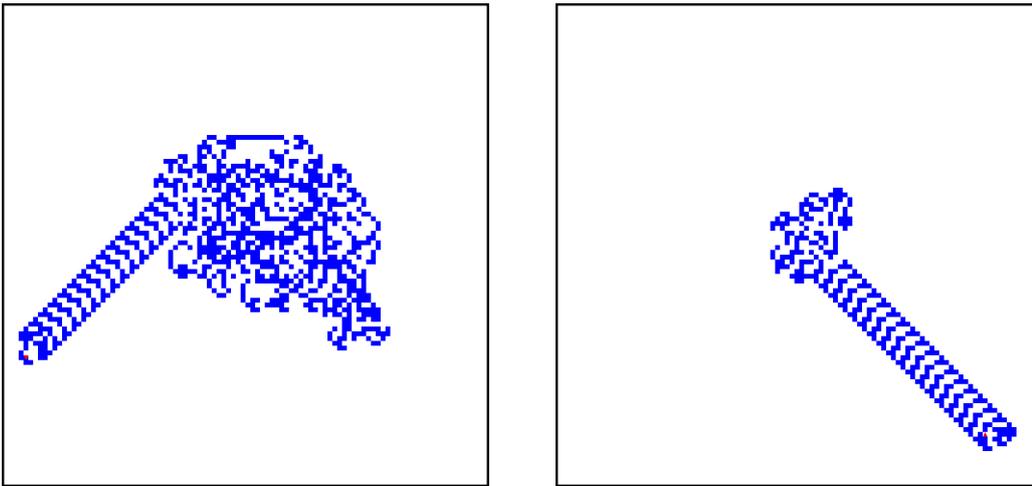


FIGURE 6.1 – Evolution d’une turmite seule. **à gauche** : à partir d’une grille initialement vide (toutes les cellules à l’état 0, en blanc); **à droite** : à partir d’une unique cellule à l’état 1 (en bleu) aux coordonnées (1, 0).

Le système est à temps et à états discrets et les agents, appelés fourmis de Langton, ou *turmites* selon le bon mot de Dewey [60], sont sans mémoire et suivent deux règles¹⁵ :

- (a) Une turmite qui est sur une cellule à l’état 0, transforme cet état en un 1, tourne à gauche et avance d’une case.
- (b) Une turmite qui est sur une cellule à l’état 1, transforme cet état en un 0, tourne à droite et avance d’une case.

Langton a observé que le comportement d’une turmite seule était déjà un phénomène étonnant (figure 6.1). De plus, dans le cas où plusieurs agents étaient mis ensemble, des phénomènes de collaboration pouvaient survenir et mener à l’apparition de structures complètement différentes de celles observées dans le cas d’une turmite solitaire. Néanmoins, Langton est obligé de concéder que : « Il y a tellement de façons avec lesquelles ces fourmis virtuelles peuvent se rencontrer que nous n’avons pas encore pris en compte toutes les rencontres possibles »¹⁶. Notre but dans ce chapitre sera donc de poursuivre sur cette voie et de relever le défi posé par Langton en définissant différentes interactions entre turmites et en observant les modifications que ces différences entraînent.

6.1.1 Turmites

Il existe un certain nombre d’articles qui présentent des études avec une seule turmite [119, 25, 118, 164]. Partant d’une grille où toutes les cellules sont à l’état 0, la fourmi suit une trajectoire irrégulière pendant environ 10 000 pas de temps, après quoi elle entre sans crier gare dans un comportement cyclique qui lui fait décrire un chemin qui se translate (voir la figure 6.1). Différentes généralisations de cette situation ont été proposées [117, 116] mais, de façon surprenante, les systèmes à plusieurs turmites ont été peu étudiés jusqu’à présent. Les études de

¹⁵. On notera que Bunimovich and Troubetzkoy ont proposé des règles similaires dans un contexte de système de particules [33].

¹⁶. “There are so many ways that these virtual ants can encounter one another that the transition rules have not yet been worked out for all of the possible encounters.”

Chopard et Droz [47], ainsi que celles de Beuret and Tomassini [23], sont les seules dont nous avons connaissance jusqu'à la préparation de ce manuscrit. Nous avons néanmoins trouvé un article de Wang et Xu décrivant un modèle multi-turmite utilisé pour des applications de cryptage d'image (*scrambling*) [252]. Néanmoins, cette approche a été critiquée et il semble qu'une seule turmite suffise à obtenir d'aussi bons résultats, voire de meilleurs [66].

6.1.2 Neuf variations

Comme le mentionnait Langton, étudier un système à plusieurs turmites n'est pas simple du fait de la variété des interactions possibles entre turmites. Ceci se généralise au cas de la plupart des systèmes multi-agents : même quand le comportement d'un agent est parfaitement bien défini, il reste un large choix de possibilités pour définir ses interactions avec les autres agents. Aussi, avec Vincent Chevrier, nous avons mis en place un formalisme permettant de spécifier ces interactions dans un cas général [45, 46]. Ce formalisme s'appuie sur le paradigme « influence-réaction » proposé par Ferber et Muller en 1996 [102]. Nous présentons ici une instanciation de ce formalisme dans le cas d'un système à plusieurs turmites : notre idée est qu'un tel système est suffisamment simple pour pouvoir se livrer à un travail complet de formalisation, et suffisamment riche pour pouvoir nous permettre d'observer des comportements qualitatifs variés en fonction des définitions choisies.

6.2 Fondations

La présentation du formalisme suit le travail que nous avons effectué avec Vincent Chevrier [45], mais de manière allégée.

On note $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$ la grille ; chaque cellule $c \in \mathcal{L}$ a un état dans $\mathcal{Q} = \{0, 1\}$. L'état général de la grille est noté $\mathbf{S} \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$. Soit N le nombre de turmites, on notera $[N] = \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des turmites.

On assigne à chaque turmite i une position $P_i \in \mathcal{L}$ et une orientation $O_i \in \mathcal{D} = \{\mathbf{N}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{W}\}$ correspondant respectivement aux directions nord, est, sud et ouest.

On note $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_N) \in \mathcal{L}^N$ et $\mathbf{O} = (O_1, \dots, O_N) \in \mathcal{D}^N$, le N -uplet des positions et orientations des turmites. Par extension avec la terminologie des automates cellulaires, on appelle *configuration* l'état général du système, qui est noté $\sigma = (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{O}) \in \Sigma = \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \times \mathcal{L}^N \times \mathcal{D}^N$.

Avec ces notations, le système multi-turmite est un système dynamique discret sur Σ , et, un pas de temps sera donné par l'application de la *fonction de transition globale* : $\Gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Notre problème consiste maintenant à décrire Γ sachant que :

- (a) nous voulons mettre à jour les agents de différentes façons, et,
- (b) nous souhaitons avoir différentes procédures de résolution de conflits.

Nous définissons donc Γ avec deux fonctions auxiliaires :

- (a) la fonction de *mise à jour* Δ et,
- (b) la *procédure de résolution de conflits* ξ .

On note $\Gamma_{\Delta, \xi}$ la fonction de transition globale obtenue avec Δ et ξ . L'orbite d'un système est la suite des configurations $(\sigma(t))_{t \in \mathbb{N}} = \text{ORB}(\Delta, \xi, \sigma)$ obtenue avec : $\sigma(0) = \sigma$ et $\forall t \in \mathbb{N}$, $\sigma(t+1) = \Gamma_{\Delta, \xi}(\sigma(t))$.

La méthode de mise à jour est une fonction $\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}([N])$ où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X ; cette fonction définit l'ensemble des turmites mises à jour à chaque pas de temps. Nous définissons trois fonctions de mise à jour Δ :

- Δ_s *synchrone* : les turmites sont toutes mises à jour simultanément à chaque pas de temps.
On a : $\Delta_s(t) = [N]$.
- Δ_c *cyclique* : les turmites sont mises à jour séquentiellement dans l'ordre de leur indice.
On a : $\Delta_c(t) = \{t \bmod N + 1\}$.
- Δ_r *aléatoire* : les turmites sont mises à jour séquentiellement, mais dans un ordre qui varie à chaque pas de temps. On a : $\Delta_r(t) = \pi_k(t')$ où $t' = t \bmod N$, $k = \lfloor t/N \rfloor$ et $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires qui échantillonnent de manière uniforme l'ensemble des permutations des entiers de 1 à N .

Nous pouvons maintenant définir Γ en spécifiant, de manière indépendante, d'une part l'évolution des états des cellules \mathbf{S} , d'autre part les évolutions des positions \mathbf{P} et des orientations \mathbf{O} . L'évolution de l'état de la grille suit :

$$\forall c \in \mathcal{L}, S_c(t+1) = \begin{cases} 1 - S_c(t) & \text{si } c \in \{P_i, i \in \Delta(t)\} \\ S_c(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette règle dit que l'état $S_c(t)$ est modifié si une cellule c contient au moins une turmite qui a été mise à jour (par Δ).

Pour définir $(\mathbf{P}, \mathbf{O})(t)$, nous devons décrire les interactions. Premièrement, notons que les positions et orientations sont fixes pour les cellules non mises à jour : $\forall i \notin \Delta(t), (P_i, O_i)(t+1) = (P_i, O_i)(t)$. Pour une turmite $i \in \Delta(t)$, la façon de calculer $(P_i, O_i)(t+1)$ dépend de ξ ; notons $(\tilde{P}_i(t), \tilde{O}_i(t))$ l'état que prendrait la turmite i au temps suivant s'il n'y avait pas de conflit au temps t .

Notons R et L les rotations à droite et à gauche, respectivement, avec $R(N) = E$, $L(N) = W, \dots$. On a alors les définitions suivantes de $(\tilde{P}_i(t), \tilde{O}_i(t))$:

$$\tilde{O}_i(t) = \begin{cases} R(O_i(t)) & \text{si } S_{P_i(t)}(t) = 0, \\ L(O_i(t)) & \text{si } S_{P_i(t)}(t) = 1. \end{cases}$$

et

$$\forall i \in [N], \tilde{P}_i(t) = P_i(t) + dP(\tilde{O}_i(t))$$

où $dP(N) = (0, 1)$, $dP(E) = (1, 0)$, $dP(S) = (0, -1)$, $dP(W) = (-1, 0)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir ξ ; nous le ferons selon trois versions.

1. *Règle d'indépendance* ξ_{AL} . Cette règle, notée `Allow` (AL), autorise les turmites à se déplacer sans tenir compte des conflits :

$$\xi_{AL} : \forall i \in \Delta(t), (P_i, O_i)(t+1) = (\tilde{P}_i, \tilde{O}_i)(t).$$

2. *Règle d'exclusion* ξ_{EX} : Quand un conflit survient, cette règle, notée `Exclude` (EX), interdit aux turmites de se déplacer et de tourner. Les conflits peuvent survenir dans deux cas :

- type A : une turmite cherche à aller dans une case occupée;
- type B : deux turmites ou plus cherchent à se déplacer dans la même case.

L'identification de ces conflits utilise une fonction n qui compte le nombre de turmites dans une cellule $c \in \mathcal{L}$ étant donnée une configuration \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} n : \mathcal{L}^N \times \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (\mathbf{P}, c) &\mapsto |i \in [N], P_i = c|. \end{aligned}$$

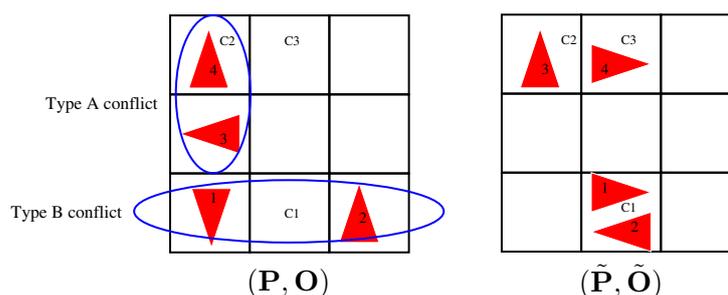


FIGURE 6.2 – De la position (\mathbf{P}, \mathbf{O}) à la position $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{O}})$. On a: $n[\mathbf{P}, c_1] = 0$, $n[\tilde{\mathbf{P}}, c_1] = 2$, $n[\mathbf{P}, c_2] = 1$, $n[\tilde{\mathbf{P}}, c_2] = 1$, $n[\mathbf{P}, c_3] = 0$ et $n[\tilde{\mathbf{P}}, c_3] = 1$. Cette situation génère un conflit de type A avec la turmite 3 et un conflit de type B avec les turmites 1 and 2 et pas de conflit avec la turmite 4.

La figure 6.2 montre un exemple de conflit de type A et de type B. Nous renvoyons aux ref. [45, 46] pour plus de détails sur les conflits.

La règle d'exclusion Exclude se définit alors par :

$$\xi_{\text{EX}} : (P_i, O_i)(t+1) = \begin{cases} (\tilde{P}_i, \tilde{O}_i)(t) & \text{si la turmite } i \text{ n'est pas en conflit,} \\ (P_i, O_i)(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La règle tourner-et-voir ξ_{TS} : Cette règle est notée $\text{Turn}' \text{ n' See}$ (TS) : les turmites en conflit ne bougent pas mais sont autorisées à tourner. On prend toujours : $O_i(t+1) = \tilde{O}_i(t)$ et on a :

$$\xi_{\text{TS}} : P_i(t+1) = \begin{cases} \tilde{P}_i(t) & \text{si la turmite } i \text{ n'est pas en conflit} \\ P_i(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons donc trois méthodes de mise à jour et trois règles de résolution de conflit. Voyons donc si ces différences de définition du système amènent ou non à des différences notables de comportement, alors même que, rappelons-le, le comportement individuel de chaque turmite reste inchangé en dehors des interactions.

6.2.1 Cycles

On sait qu'une turmite seule ne peut avoir de comportement cyclique (au sens strict) puisqu'elle finit toujours par sortir de tout rectangle préalablement fixé [33, 47]. En revanche, cette propriété n'est plus vraie avec plusieurs turmites...

Observation 1. Pour le modèle Allow synchrone, un nombre pair de turmites placées horizontalement et orientées nord produisent un cycle. Formellement : pour $N \in 2\mathbb{N}$ et pour une condition initiale $\sigma = (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{O}) : \mathbf{S} = \mathbf{0}; \forall i \in [N], P_i = (i, 0), O_i = N$, l'orbite $\text{ORB}(\Delta_s, \xi_{\text{AL}}, \sigma)$ est cyclique.

Nous avons déterminé expérimentalement que la période du cycle varie comme $16N - 4$ et que le temps transitoire est de 0. De plus, les cellules visitées par les turmites se limitent à une zone rectangulaire de taille $3N \times 2N$.

La figure 6.3 montre un cycle avec 4 turmites. La configuration au temps $t = 60$ montre la fin du cycle, lorsque la configuration est identique à la configuration initiale.

Pour l'ensemble des conditions initiales décrites ci-dessus, le phénomène de cycle n'apparaît qu'avec la mise à jour synchrone et la règle Allow . Il est donc peu robuste.

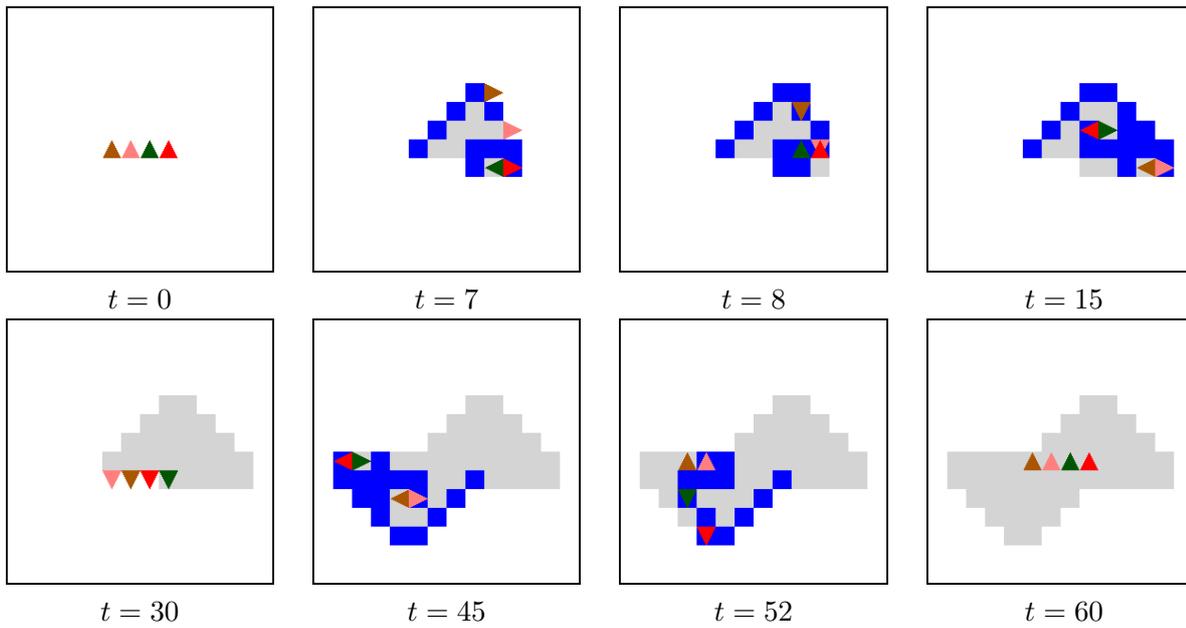


FIGURE 6.3 – Phénomène d’horloge avec 4 turmites. Chaque turmite a sa propre couleur.

6.2.2 Planeurs

Les planeurs (*gliders*) sont des phénomènes rares dans l’ensemble des simulations que nous avons conduites sur un système multi-turmite, c’est-à-dire qu’il a fallu conduire un grand nombre d’expériences « à la main » pour pouvoir les observer.

Definition 1 (Planeurs). On dit qu’une orbite $(\sigma(t))_{t \in \mathbb{N}}$ est un *planeur* si :

- toutes les turmites sont dans la même translation infinie, c’est-à-dire, pour tout $i \in [N]$:

$$\exists \rho \in \mathcal{L}, \exists T \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N}, P_i(t+T) = P_i(t) + \rho \text{ et } O_i(t+T) = O_i(t),$$

- En partant d’une grille vide, la « trace » laissée par les turmites est nulle, c’est-à-dire :

$$\mathbf{S}(0) = \mathbf{0} \text{ et } \forall c \in \mathcal{L}, \exists t \in \mathbb{N}, t' \geq t \implies S_i(t) = 0.$$

Ces planeurs sont des phénomènes analogues aux planeurs observés dans le Jeu de la vie. Le premier planeur que nous avons observé a été nommé *F-glider* [46]. Nous présentons ici le *B-glider* :

Observation 2. Pour la règle `ALLOW` quatre turmites placées en position carrée avec une orientation nord forment un planeur. Formellement : pour $N = 4$, pour $\Delta \in \{\Delta_s, \Delta_c, \Delta_r\}$, l’orbite $\text{ORB}(\Delta, \xi_{\text{AL}}, \sigma)$ obtenue avec la condition initiale $\sigma = (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{O}) : \mathbf{S} = \mathbf{0}; P_0 = (0, 0), P_1 = (1, 0), P_2 = (1, 1), P_3 = (0, 1); O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = \mathbb{N}$ est un planeur.

La figure 6.4 montre quatre étapes de l’évolution du B-glider; ce planeur se déplace avec une distance de 2 cellules (horizontalement ou verticalement) tous les 12 pas.

On notera avec satisfaction qu’à la différence du F-glider, qui n’est observé qu’avec la mise à jour synchrone et la politique `ALLOW`, le B-glider est robuste aux changements de la méthode de mise à jour. Cependant, il n’est pas robuste aux changements de méthode de résolution des conflits.

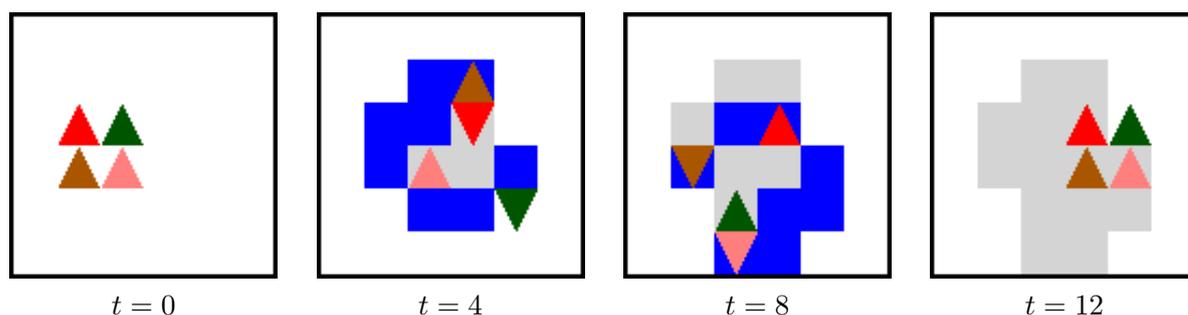


FIGURE 6.4 – Quatre étapes dans la translation du B-glider.

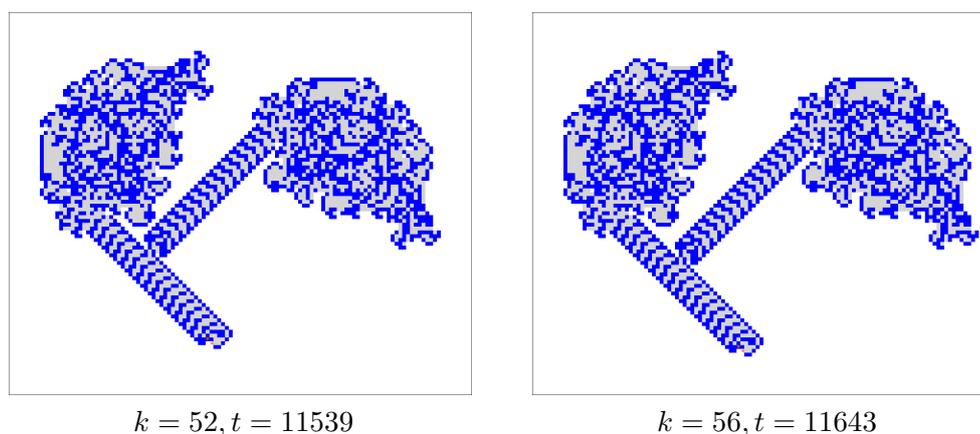


FIGURE 6.5 – Deux blocages obtenus avec une distance initiale entre turmites de 52 et 56 cellules.

6.2.3 Blocages

Nous présentons maintenant notre troisième classe de conditions initiales, qui produit un phénomène que nous appelons un *blocage* (*stalemate*).

Definition 2. Une orbite $(\sigma(t))_{t \in \mathbb{N}}$ contient un *blocage* si la position des turmites n'évolue plus après un certain temps :

$$\exists t_0, \forall t \geq t_0, \forall i \in [N], P_i(t) = P_i(t_0).$$

Observation 3. Pour le mode synchrone $\text{Turn}'n'See$, deux turmites placées à une distance horizontale k l'une de l'autre, avec des orientations orthogonales ouest et nord, produisent toujours un blocage si k est un multiple de 4 et supérieur à 52. Formellement : pour $N = 2$, pour $k \in 4\mathbb{N}^*$ et $k \geq 52$ et $\sigma = \{\mathbf{S} = \mathbf{0}, P_1 = (0, 0), O_1 = \text{W}; P_2 = (k, 0), O_2 = \text{N}\}$, l'orbite $\text{ORB}(\Delta_s, \xi_{\text{TS}}, \sigma)$ contient un blocage.

La figure 6.5 montre deux blocages obtenus avec deux distances k . On notera que les blocages sont également observés pour $k < 52$, mais il n'y a pas de régularité dans la façon dont le phénomène se produit. En revanche, pour $k \geq 52$, nous pouvons garantir que les deux turmites interagissent toujours de la même manière. En effet, cette « distance de sécurité minimale » est telle que l'on peut s'assurer que chaque turmite génère bien son propre chemin et n'est pas « perturbée » par un chevauchement de sa trace et de la trace de l'autre turmite. Si cette condition est respectée, la turmite 2 croise toujours le chemin de la turmite 1 de la même manière :

elle suit le chemin, le contourne puis rattrape la turmite 1. Cela produit un conflit de type B qui aboutit toujours à une impasse.

En augmentant la valeur de k de 4 cellules, on s'assure que les deux turmites suivent la même séquence de comportement avant de se rencontrer. Cette régularité est due à la périodicité spatiale de la construction du chemin, qui est invariante par une translation de $(2, -2)$ (voir fig. 6.5). Nous observons également qu'une augmentation de k de 4, augmente le temps de blocage de 104, un résultat en accord avec les résultats analytiques obtenus par Boon [25]. Le temps de blocage varie donc avec k comme : $t_{st}(k) = t_{st}(52) + \frac{k-52}{4} \times 104$, avec la valeur expérimentale $t_{st}(52) = 11539$.

Nous n'avons observé de blocage qu'avec le mode synchrone Turn ' n' See, c'est donc un phénomène peu robuste.

En résumé, nous avons décrit trois phénomènes qui résultent de collaboration entre turmites. Nous avons observé que, selon le cas considéré, il existe une grande variété de réponses du système aux variations du schéma de mise à jour et de la politique de résolution des conflits mais qu'en général les phénomènes collectifs sont peu robustes aux changements de définition du système, même si le comportement individuel des agents reste inchangé.

Nous laissons les lecteurs intéressés par une analyse détaillée de la robustesse de ces phénomènes consulter la partie 4 de la référence [19]; une étude des divergences et des convergences qui se produisent au niveau microscopique y est développée pour expliquer la robustesse et la sensibilité des trois phénomènes décrits ci-dessus.

Nous retenons les questions suivantes :

Question 17. Peut-on démontrer que partant d'une condition initiale avec un nombre fini de 1 sur la grille, une turmite seule finit toujours par s'échapper à l'infini en créant une « route » de même nature que celle observée pour une grille initialement vide ?

Question 18. Quels sont les autres phénomènes intéressants que l'on peut avoir avec un nombre quelconque de turmites ?

Question 19. Quel lien peut-on faire entre ce modèle et d'autres systèmes multi-agents simples comme celui des fourmis virtuelles par exemple ?

Troisième partie

Résolution de problèmes inverses

Problème de la classification de la densité

Ce chapitre nous plonge dans un nouvel aspect de la thématique de ce mémoire : l'apport de l'aléa pour créer une dynamique qui permette de résoudre des problèmes calculatoires¹⁷. Nous commençons par une question spécifique avec le problème de la classification de la densité. Les recherches sur le modèle unidimensionnel ont été publiées dans article court paru dans les actes de STACS'11 [72] et dans un article plus développé dans la revue *Theory of Computing systems* [76]. Entre 2012 et 2016, différents travaux d'extension aux grilles (AC bidimensionnels) ont été publiés dans des actes de conférence ou dans des revues [73, 34, 35, 93].

Le problème de classification de la densité est un problème-pivot de la théorie des automates cellulaires. Sa formulation est étonnamment simple : Comment un système dynamique discret distribué peut-il atteindre un état de consensus qui représente l'état majoritairement présent dans sa configuration initiale ?

Le problème est plutôt trivial dans la plupart des modèles de calcul mais la difficulté réside ici dans le respect des contraintes suivantes :

1. *autonomie* : Il n'y a pas de tête ou d'opérateur pour faire le calcul. L'évolution du système se fait par des changements d'états de composants autonomes du système, les cellules.
2. *consensus* : La fin du calcul est atteinte lorsque le système atteint un état stable homogène où toutes les cellules sont dans un même état.
3. *localité* : Chaque cellule n'a qu'une vue partielle du système, restreinte aux voisins situés à une certaine distance.
4. *uniformité* : Les cellules évoluent en suivant une même règle locale, qui reste fixe avec le temps.
5. *simplicité* : L'état des cellules est binaire.

17. Par « dynamique », on peut même ici entendre le mot dans son sens étymologique, car *dunamis* indique originellement l'idée de potentiel, de possibilité gardée en réserve, de retenue dans l'accomplissement d'une chose, etc.

Ce problème est aussi connu sous l'appellation de problème de la majorité (*majority problem*) et a été étudié principalement pour le cas des automates binaires unidimensionnels finis. Différents travaux ont été conduits sur des systèmes bidimensionnels [8], sur des réseaux [53, 20, 43], ou sur des systèmes à états continus que l'on discrétise [31]. On trouvera dans l'article d'état de l'art d'Oliveira un bon aperçu des différents cas qui ont été traités au cours du temps [185].

Ce problème rentre dans la catégorie des problèmes de synthèse de comportement, appelés aussi *problèmes inverses*. Il fut initialement formulé par Packard [189] comme un moyen de stimuler la communauté de chercheurs qui s'intéresse à l'exploration de grands espaces d'automates cellulaires. Il faut toutefois noter qu'originellement, la recherche est motivée par le problème de savoir s'il existe des règles unidimensionnelles non-ergodiques et robustes au bruit [115].

En 1995, Land et Belew ont donné un résultat-clé : il n'existe pas de règle pouvant classer la densité de manière parfaite [146]. Notons que dans l'article publié dans la revue *Electronic Journal of Probability*, nous avons présenté un théorème plus général et qui s'appuie sur une démonstration plus simple [35].

Fukš fut le premier auteur à penser à utiliser de l'aléa pour résoudre ce problème. Sa solution revient à faire une copie aléatoire d'un des états du voisinage [110]. Le problème de cette règle, analysée formellement ci-dessous, est qu'elle ne produit pas de « force » qui attire un système vers le bon point fixe. Une deuxième étape fut franchie par Schüle *et al.* qui ont également proposé d'utiliser l'aléa pour résoudre le problème avec l'introduction de la fonction XOR, qui « mélange » les états de manière locale [226]. Ceci permet au système d'arriver à une solution plus rapidement mais la qualité générale reste limitée (cf. ci-dessous).

La construction que nous présentons a pour principe de mélanger deux règles qui travaillent en des sens opposés : la règle de majorité a tendance à homogénéiser localement les configurations et à les attirer vers le point fixe le plus « proche » alors que la règle de circulation a tendance à créer des inhomogénéités en espaçant autant que possible la répartition d'états différents. C'est par un bon dosage des deux règles que l'on parvient à trouver une réponse au dilemme qui consiste à aller vers plus d'homogénéité au niveau global (pour aller vers la solution) et vers plus d'hétérogénéité au niveau local (pour rompre l'uniformité).

7.1 Formalisation du problème

Dans cette partie, on supposera que n est impair; ceci nous permettra d'éviter de traiter le cas des conditions initiales avec un nombre égal de 0 et de 1.

Pour une fonction globale donnée, soit $T(x)$ la variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \infty$ et définie par :

$$T(x) = \min \{t : x^t \in \{0, 1\}\}.$$

On dira qu'une fonction globale C est un *classificateur de la densité* si 0 et 1 sont ses seuls points fixes et si $T(x)$ est presque sûrement fini pour toute configuration $x \in \mathcal{E}_n$.

On définit l'événement « **C** classe correctement x » selon : $T(x)$ est fini et $x^{T(x)} = 1$ pour $\rho(x) > 1/2$ et $x^{T(x)} = 0$ pour $\rho(x) < 1/2$, où $\rho(x) = |x|_1/n$ est la densité d'une configuration x . La *probabilité de bonne classification* $B(x)$ d'une configuration x est donc la probabilité que cet événement se réalise.

Afin d'évaluer correctement une règle qui classe la densité, il est nécessaire de bien définir la distribution initiale. On trouve dans la littérature plusieurs types de distributions initiales — et parfois aucune description explicite — et il arrive parfois que des résultats différents soient donnés pour une même règle! (Voir par exemple les ref. [41] et [146]). Dans ce qui suit, on se

TABLE 7.1 – Rappel du code par transitions.

A	B	C	D	E	F	G	H
000	001	100	101	010	011	110	111
1	1	1	1	0	0	0	0

restreindra au cas des configurations initiales choisies de manière uniforme dans l'espace des configurations, ce qui revient à initialiser chaque cellule indépendamment avec équiprobabilité d'être 0 ou 1.

7.2 Structure de l'espace des AC probabilistes

On peut décrire l'espace des ACE probabilistes (ACEP) comme un hypercube de dimension 8. Les sommets de cet hypercube sont les 256 automates cellulaires élémentaires. On peut donc considérer l'espace des ACEP comme analogue à $[0, 1]^8$ et munir cet espace de l'opération d'addition et multiplication par un réel.

Soient k ACEP f_1, \dots, f_k et w_1, \dots, w_k des nombres réels dans $[0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^k w_i = 1$, le barycentre des ACEP (f_i) avec les poids w_i est l'ACEP g défini par :

$$\forall a, b, c \in \{0, 1\}, g(a, b, c) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(a, b, c).$$

Notons que cette définition nous donne deux façons *équivalentes* d'interpréter le comportement de l'ACEP g : soit avec une table transition classique, soit en disant que pour chaque cellule, de façon indépendante, la règle f_i est appliquée avec la probabilité w_i . Ceci sera illustré plus concrètement avec l'examen de règles précises.

L'espace des ACEP peut donc être décrit avec la base des 8 ACE déterministes qui ont une seule transition qui mène à l'état 1 (cf. la définition ci-dessus avec $f(x, y, z)$). Nous pouvons également, en suivant la démarche qui a été proposée au chapitre 1, décrire un ACEP comme le barycentre des 8 ACE qui ont une unique transition *active*, c'est-à-dire ceux dont le code par transitions est décrit par une unique lettre.

Ces ACE sont A, B, ..., H (cf. tableau 7.1) et pour tout ACEP f , il existe un octuplet $(\omega_A, \omega_B, \dots, \omega_H) \in [0, 1]^8$ tel que : $f = \omega_A \cdot A + \omega_B \cdot B + \dots + \omega_H \cdot H$.

Nous notons cette égalité de manière plus compacte : $f = [\omega_A, \omega_B, \dots, \omega_H]_T$, où l'indice T rappelle les *transitions actives*.

Notons qu'avec cette notation les opérations de symétrie s'obtiennent de façon analogue au cas déterministe : la symétrie de réflexion s'obtient en permutant les valeurs des probabilités ω_B et ω_C , d'une part, et ω_F et ω_G , d'autre part ; la symétrie de conjugaison s'obtient en permutant les valeurs des probabilités ω_A et ω_H , ω_B et ω_G , ω_C et ω_F , ω_D et ω_E .

Pour comparer différentes règles entre elles, on définit Q_b la *qualité* d'un classificateur C pour une taille n comme la probabilité de réaliser une bonne classification en partant d'une distribution uniforme :

$$Q_b(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \mathcal{E}_n} B(x).$$

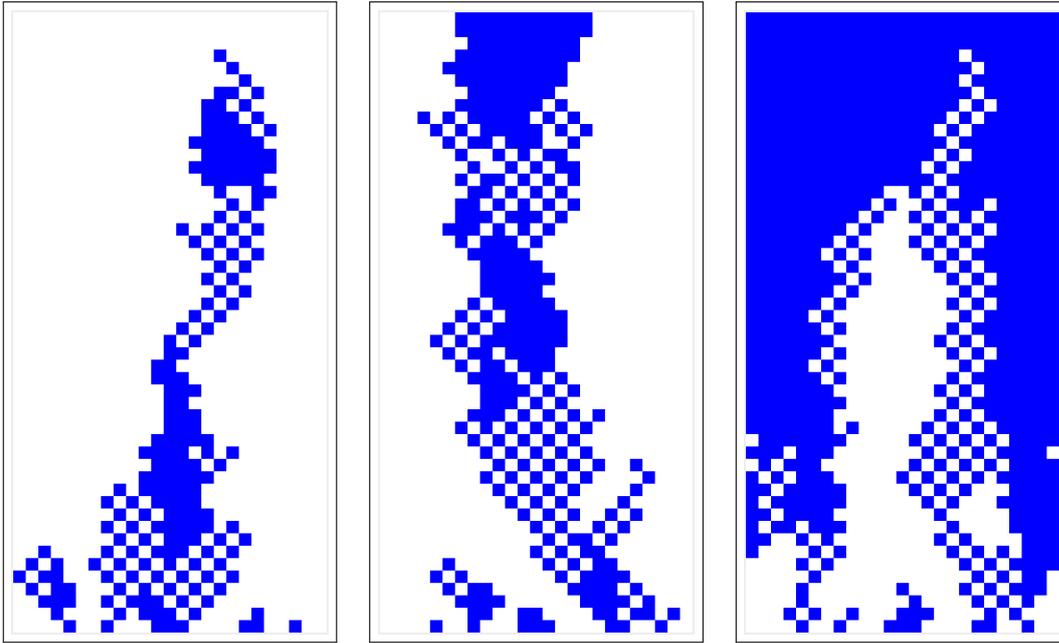


FIGURE 7.1 – Diagrammes espace-temps montrant l'évolution de la règle de Fuk's. On a pris $n = 25$, $p = 0.48$ et une condition initiale avec huit cellules à l'état 1.

7.3 Règles de Fuk's et Schüle

Examinons maintenant comment l'utilisation de l'aléa permet de construire des solutions, plus ou moins bonnes. Comme point de départ, considérons la règle proposée par Fuk's [110]. Pour $p \in (0, 1/2]$, la règle locale C_F se définit selon la table de transition « classique » :

$$\begin{array}{rcccccccc}
 (x, y, z) & 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\
 C_F(x, y, z) & 0 & p & 1 - 2p & 1 - p & p & 2p & 1 - p & 1
 \end{array}$$

où les valeurs exprimées sont les probabilités de prendre l'état 1. On remarquera que 0 et 1 sont les seuls points fixes.

Avec la notation par transitions, le changement de base expliqué plus haut donne :

$$\begin{aligned}
 C_F &= [0, p, p, 2p, 2p, p, p, 0]_T \\
 &= p \cdot BDEG + p \cdot CDEF + (1 - 2p) \cdot I
 \end{aligned}$$

On voit donc que la règle de Fuk's peut s'interpréter comme l'application pour chaque cellule de manière indépendante : (a) d'un décalage à gauche (170-BDEG) avec probabilité p , (b) d'un décalage à droite (240-CDEF) avec probabilité p , et (c) de l'identité avec probabilité $1 - 2p$ (voir fig. 7.1).

Théorème 12. Pour la règle de Fuk's C_F avec $p \in (0, 1/2]$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{E}_n, \mathbf{B}(x) = \max \{ \rho(x), 1 - \rho(x) \} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\{T(x)\} \leq \frac{|x|_1 (n - |x|_1)}{p}.$$

On reconnaît là un résultat analogue à celui qui avait été présenté pour les règles quadratiques avec mise à jour totalement asynchrone (cf. § 1.5, p. 26). La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 7. Soit (X_t) une suite de variables aléatoires qui représente l'évolution d'un processus de Markov dans $\{0, \dots, m\}$ où m est un entier. Soit $T(x) = \min\{t : X_t = 0 \text{ or } X_t = m\}$ le temps d'absorption du processus.

Si X_t et $\Delta X_{t+1} = X_{t+1} - X_t$ sont tels que :

- (X_t) est une martingale,
- pour $t < T$, $\mathbb{E}\{\Delta X_{t+1}^2 | X_t\} > v$,

alors :

$$\Pr\{X_T = m\} = \frac{q}{m}$$

et T est presque sûrement fini et vérifie :

$$\mathbb{E}\{T(x)\} \leq \frac{q(m-q)}{v} \leq \frac{m^2}{4v}$$

où $q = \mathbb{E}\{X_0\}$.

Le résultat sur $\mathbf{B}(x)$ permet de calculer la qualité du classificateur de Fukš \mathbf{C}_F

$$Q_b(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}.$$

Concrètement, pour $n = 49$, on a : $Q_b(n) = 0.557$, autrement dit le gain par rapport à un choix purement aléatoire est de moins de 6%. Pour la valeur de référence $n = 149$, ce gain descend à 3,3%. On voit donc que la qualité de classification s'approche très vite du seuil 1/2 lorsque n grandit.

Le temps moyen de classification est quadratique : $T_b \in \mathcal{O}(n^2)$. Ceci n'est pas une coïncidence, le fait que la règle de Fukš conserve en moyenne la densité induit une convergence qui ne peut pas être plus rapide que le temps quadratique. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, ce comportement résulte d'une tendance qu'ont les zones à faire des marches aléatoires non biaisées, ce qui fait que la fusion des zones ne peut s'établir que lorsque deux de ces frontières se rencontrent. On voit là un point important de l'étude des systèmes complexes : des comportements qualitatifs similaires peuvent apparaître, indépendamment des mécanismes microscopiques qui leur donnent naissance.

Passons maintenant à la règle de Schüle \mathbf{C}_S . Celle-ci s'exprime, pour $\varepsilon \in (0, 1)$, selon la table de transition suivante :

(x, y, z)	000	001	010	011	100	101	110	111
$\mathbf{C}_S(x, y, z)$	0	$1 - \varepsilon$	$1 - \varepsilon$	ε	$1 - \varepsilon$	ε	ε	1

Dans la base des transitions actives, on peut également l'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_S &= [0, 1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, 0]_T \\ &= (1 - \varepsilon) \cdot \text{BCFG} + \varepsilon \cdot \text{DE}. \end{aligned}$$

Cette règle peut donc s'interpréter comme l'application, pour chaque cellule, de manière indépendante, de : (a) la règle du XOR 150-BCFG avec probabilité $1 - \varepsilon$ et (b) la règle de majorité 232-DE avec probabilité ε (voir fig. 7.2).

On appelle *diploïde* un ACEP qui peut, comme ci-dessus, être décomposé en l'application d'un ACE avec probabilité p et d'un ACE avec probabilité $1 - p$. En 2017, nous avons consacré une étude expérimentale aux diploïdes, en nous concentrant particulièrement sur l'apparition de transitions de phase liées aux variations du taux de mélange p [83].

Il n'est pas aisé de donner une estimation analytique du comportement du système pour toute valeur de ε . Toutefois, pour $\varepsilon = 2/3$, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

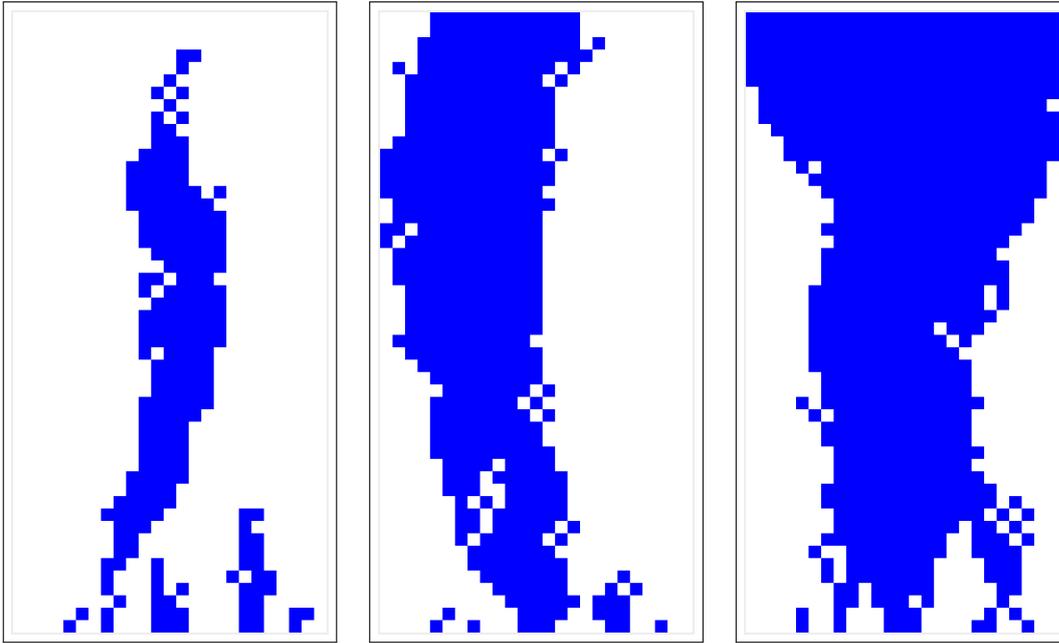


FIGURE 7.2 – Diagrammes espace-temps montrant l'évolution de la règle de C_S . On a pris $n = 25$, $\epsilon = 0.75$ et une condition initiale avec huit cellules à l'état 1.

Théorème 13. Pour la règle de Schüle C_S avec $\epsilon = 2/3$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{E}_n, B(x) = \max \{ \rho(x), 1 - \rho(x) \} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\{T(x)\} \leq \frac{|x|_1(n - |x|_1)}{\epsilon(1 - \epsilon)}.$$

Par conséquent, pour la valeur $\epsilon = 2/3$, la qualité de cette règle est identique à celle de Fukš. Par ailleurs, son temps moyen de classification T_b est du même ordre de grandeur : $T_b \in \mathcal{O}(n^2)$. Il est à noter que Schüle avait obtenu ce résultat en faisant appel à l'approximation du champ moyen [226] et que nous avons confirmé ce résultat en l'obtenant de façon exacte à l'aide des techniques de martingales exposées plus haut [76].

Pour ne pas alourdir ce document, nous ne développons pas davantage l'analyse de cette règle. Notons toutefois les conjectures suivantes [76] :

- Pour $\epsilon < 2/3$, le système est métastable. Informellement, cela signifie qu'il n'a pas tendance à être attiré vers un des deux points fixes. Formellement, on peut tenter de démontrer que le temps de convergence croît de manière exponentielle avec la taille de l'anneau.
- Pour $\epsilon > 2/3$, la probabilité de bonne classification d'une configuration x de densité inférieure à $1/2$ est proche de $1 - \rho^*$, où ρ^* est la densité de la configuration obtenue en itérant la règle de majorité sur x de façon synchrone. Le cas où la densité est supérieur à $1/2$ est symétrique.

En somme, cette combinaison, si elle améliore les choses par rapport à la règle Fukš (pour $\epsilon > 2/3$), ne permet pas encore de saut qualitatif. Les mesures expérimentales de la qualité et du temps de convergence en fonction du paramètre ϵ sont données sur la figure 7.4.

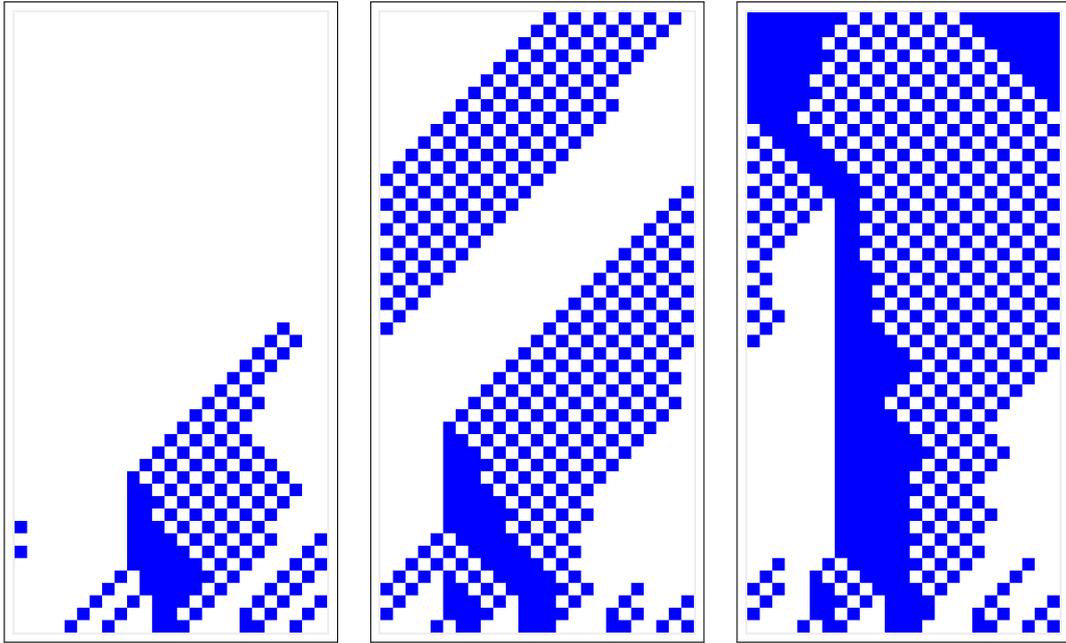


FIGURE 7.3 – Diagrammes espace-temps montrant l'évolution de la règle de C_{CM} . On a pris $n = 25$, $\eta = 0.30$ et une condition initiale avec huit cellules à l'état 1.

7.4 Règle de Circulation-Majorité

Nous arrivons maintenant au résultat principal de ce chapitre. La règle dite de *circulation-majorité* est le diploïde formé du couple ACE 184 (circulation) et ACE 232 (majorité). Notons que l'association de ces deux règles avait déjà été considérée par Fukés qui a montré que pour des anneaux de taille n donnée, on obtient une classification parfaite en appliquant d'abord la circulation pendant $n/2$ pas de temps puis la majorité pendant $n/2$ pas de temps [109]¹⁸.

Pour $\eta \in (0, 1]$, considérons la règle C_{CM} définie avec le tableau suivant :

(x, y, z)	000	001	010	011	100	101	110	111
$C_{CM}(x, y, z)$	0	0	0	1	$1 - \eta$	1	η	1

Avec les transitions actives, il vient :

$$\begin{aligned} C_{CM} &= [0, 0, 1 - \eta, 1, 1, 0, 1 - \eta, 0]_T \\ &= \eta \cdot DE + (1 - \eta) \cdot CDEG. \end{aligned}$$

Pour $\eta \in (0, 1)$, l'effet de la règle revient donc à appliquer pour chaque cellule et de manière indépendante : (a) la règle dite de « circulation » 184-CDEG avec probabilité $1 - \eta$ et (b) la règle de majorité 232-DE avec probabilité η . Nous appelons donc cette règle la règle de Circulation-Majorité. Son comportement peut être observé sur la figure 7.3.

La propriété centrale de cette règle est qu'il existe des configurations qui peuvent être classées sans erreur, et ce en dépit de l'aléa des transitions.

Définition 6. Pour un état $q \in \{0, 1\}$, on dira qu'une configuration x est un q -archipel si toutes les cellules à l'état q sont isolées, c'est-à-dire, si x ne contient pas deux cellules adjacentes à l'état q .

¹⁸. Cependant, nous n'avions pas connaissance de ce résultat au moment où nous avons étudié la règle de circulation-majorité.

Lemme 8. *Toute configuration qui est archipel est bien classée avec probabilité 1. Pour un réglage η de la règle de majorité-circulation, une configuration x qui est q -archipel avec k cellules à l'état q a un temps de convergence moyen de $\mathbb{E}\{T(x)\} \leq k/\eta$.*

Pour une configuration donnée, nous pouvons donc nous assurer de son bon classement sous la condition qu'elle atteigne un archipel de bonne densité, c'est-à-dire un archipel dont la densité est respectivement inférieure ou supérieure à $1/2$ selon que la densité de configuration de départ était supérieure ou inférieure à $1/2$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 9. *Pour tout $\varepsilon \in [0, 1)$, il existe un réglage η de la règle de circulation-majorité C_{CM} tel que toute configuration $x \in \mathcal{E}_n$ atteindra un archipel de bonne densité avec une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$.*

On peut facilement s'assurer du résultat par un argument « direct » : on sait que si pendant $n/2$ pas de temps la règle de circulation est appliquée de manière synchrone, toute configuration évolue vers un archipel de bonne densité. Pour $\eta \rightarrow 0$, la probabilité de cet événement tend vers 1, ce qui assure la validité du lemme.

Notons cependant que la règle serait de peu d'utilité si la classification était faussée dès que la densité évolue dans le mauvais sens. En pratique, on peut dire que l'irruption de quelques « erreurs », lorsque la majorité s'applique en éloignant la configuration du bon point fixe, ne perturbe pas trop le processus. C'est un problème ouvert que de savoir évaluer l'effet de ces erreurs.

Ces deux lemmes combinés nous permettent dès lors d'énoncer notre théorème :

Théorème 14. *Pour une probabilité $p \in [0, 1)$ fixée à l'avance et une taille d'anneau n fixée, il existe une valeur de η (suffisamment petite) telle que pour la règle de Circulation-Majorité C_{CM} , la probabilité de bonne classification de toute configuration soit supérieure à p : $\forall x \in \mathcal{E}_n, \mathbf{B}(x) \geq p$.*

Ce théorème montre que l'on peut obtenir une qualité aussi haute que l'on souhaite : on a $Q_b(n) \rightarrow 1$ pour $\eta \rightarrow 0$. Les mesures expérimentales de la qualité et du temps de convergence en fonction du paramètre η sont données sur la figure 7.4. Dans la figure 7.5 permet quant à elle de se rendre expérimentalement compte de la différence entre un temps de convergence quadratique pour les règles de Fuk's et de Schüle et une convergence linéaire avec la règle de Circulation-Majorité.

7.5 Structures infinies

Dans notre travail réalisé avec Ana Bušić, Irène Marcovici et Jean Mairesse, nous avons étudié le problème de la classification sur différents espaces infinis : lignes, grilles et arbres [35]. En ce qui concerne les grilles finies, nous avons montré qu'il n'existe pas de règle, déterministe ou probabiliste, permettant de classer parfaitement la densité, et ce, quelle que soit la dimension de la grille. Ce résultat généralise le théorème établi par Land et Belew en 1995 [146].

On aboutit ainsi à une situation paradoxale : en une dimension, on sait construire des solutions arbitrairement bonnes pour le cas fini mais on ne sait pas résoudre le cas infini. En deux dimensions le cas infini est simple à résoudre, mais le cas fini est redoutablement difficile [93].

Les questions les plus importantes de ce chapitre émergent assez clairement.

Question 20. Cas unidimensionnel infini. Existe-t-il un automate cellulaire qui classe la densité sur la ligne bi-infinie \mathbb{Z} lorsque le système est initialisé de façon indépendante uniforme avec probabilité p d'être à l'état 0 et $1 - p$ d'être à l'état 1 ?

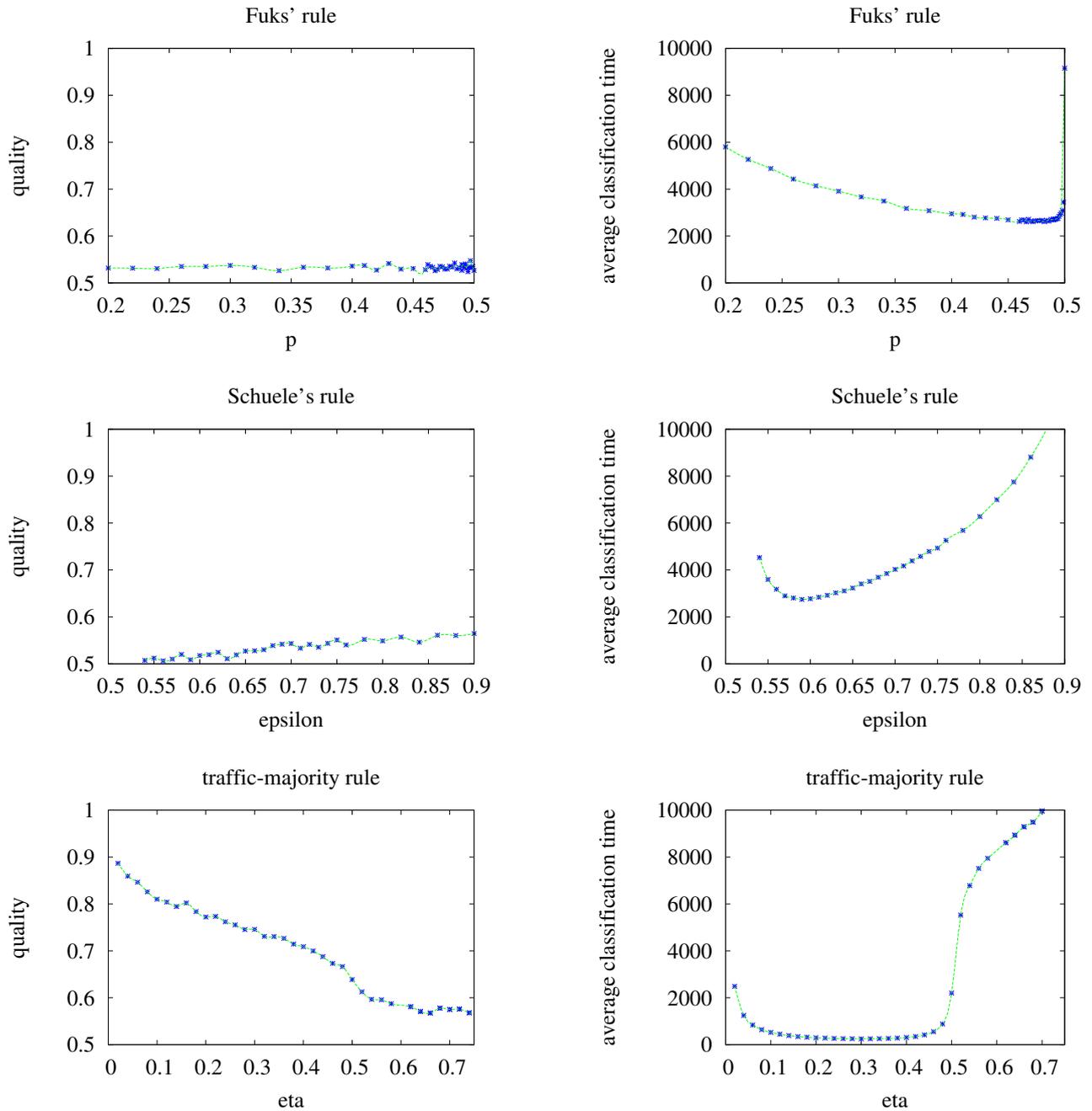


FIGURE 7.4 – Qualité de classification Q_b et temps de convergence T_b pour une taille d'anneau de $n = 149$. Les moyennes sont obtenues avec 10 000 échantillons. (haut) règle de Fuks; (milieu) règle de Schüle ; (bas) règle de Circulation-Majorité.

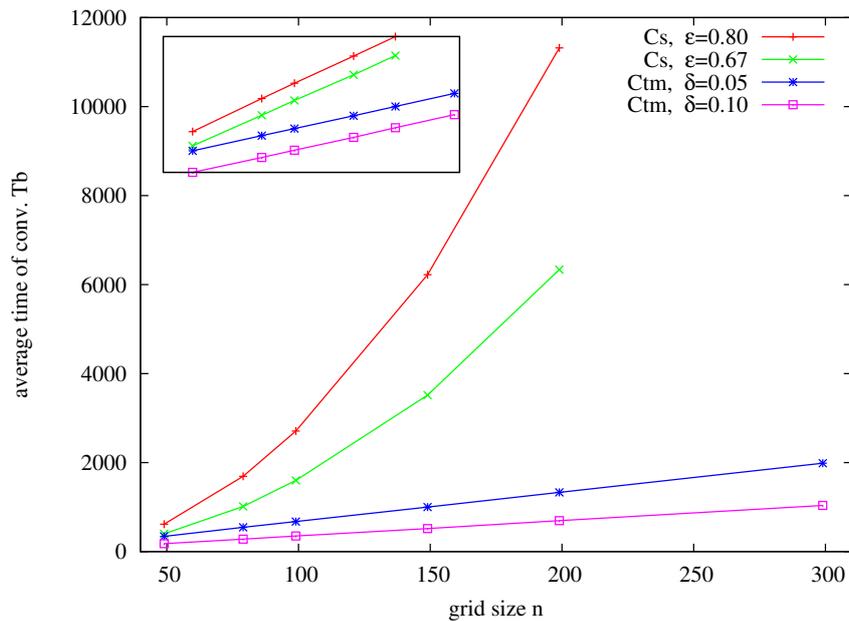


FIGURE 7.5 – Temps de convergence T_b en fonction de la taille de l’anneau n pour différents réglages des règles C_S and C_{CM} . insert: mêmes données, représentées avec une échelle logarithmique

Question 21. Cas bidimensionnel fini. Existe-t-il un automate cellulaire synchrone ou asynchrone qui approche la solution parfaite d’aussi près que l’on souhaite sur des grilles toriques, c’est-à-dire avec des conditions aux bords périodiques ?

Question 22. Cas bidimensionnel infini bruité. Sur \mathbb{Z} , quelles sont les capacités de correction de la règle circulation-majorité dans le cas où l’évolution est bruitée, c’est-à-dire soumise à un changement d’état aléatoire avec une certaine probabilité ? En particulier, le système est-il ergodique¹⁹ pour un bruit très petit ou permet-il de fournir un contre-exemple à la conjecture des taux positifs [156] ?

19. Intuitivement, un système est ergodique s’il a tendance à « oublier » sa condition initiale.

Problème de la synchronisation globale

Nous présentons dans ce chapitre notre travail sur le problème de la synchronisation globale, d'abord présenté en conférence en 2015 [79] puis publié dans une version longue en revue en 2019 [86]. Ceci permettra de présenter un exemple où les effets de l'aléa sont peut-être encore plus spectaculaires que dans le chapitre précédent. En effet, nous verrons que si d'après le théorème de Richard-Redeker, il n'existe pas de solution déterministe, presque toutes les règles stochastiques sont des solutions. Il n'en demeure pas moins que seules un nombre restreint de ces solutions est efficace, dans le sens où leur temps de convergence est polynomial. Nous estimons ce temps de convergence à l'aide des techniques analytiques présentées dans les chapitres précédents de ce mémoire et montrons qu'il existe des solutions quadratiques et peut-être pas de solutions linéaires.

La première mise à jour (scientifique) du phénomène de synchronisation mutuelle est attribuée à HUYGHENS (1629-1695). Celui-ci cherchait à construire des horloges qui soient suffisamment précises pour permettre aux marins de mesurer la longitude. Il fallait en particulier que de telles horloges puissent être embarquées à bord des navires et ne pas se dérégler en dépit des secousses qu'elles auraient à subir.

Dans leur monographie sur la synchronisation, Pikovsky et al. racontent que dans une lettre à son père datée de février 1665, Huyghens dit avoir observé que deux horloges à balancier qui étaient suspendues à un mur avaient tendance à osciller en rythme [195]. Il nomme ce phénomène « la sympathie des horloges », en propose une première explication et suggère que l'on pourrait utiliser cette forme de synchronisation pour stabiliser la pulsation des horloges embarquées à bord des navires.

Dans notre contexte, nous définissons le phénomène d'*auto-synchronisation* comme le développement d'une forme d'oscillation commune entre des parties d'un système qui sont couplées de manière faible. Le terme *auto* signale que ce phénomène doit survenir sans l'intervention d'un acteur extérieur. Il est à noter qu'il n'est pas toujours facile de distinguer ce qui est auto-synchronisant de ce qui ne l'est pas car on pourra toujours penser qu'il existe un phénomène extérieur qui a déclenché la synchronisation. Les cas emblématiques de synchronisation sont le clignotement synchrone des lucioles²⁰, les applaudissements d'une salle en fin de

20. Voir : Bénédicte Salthun-Lassalle, « Le clignotement synchrone des lucioles », *Pour la science*, 2010 et Charlotte Mauger, « Le ballet synchronisé des lucioles modélisé », *Pour la science* n° 543, 2022.

concert, ou les mouvements de panique d'une foule. En biologie, citons un cas intéressant et inattendu : des chercheurs ont mis en évidence que les deux flagelles qui sont utilisés par certaines cellules pour « nager » dans un milieu liquide ne sont pas directement couplées mais se synchronisent en fonction des mouvements de la cellule [108].

Dans le domaine des automates cellulaires, le mot synchronisation est souvent évoqué, mais avec des acceptions qui varient d'un auteur à l'autre. Ce terme est par exemple employé pour désigner le phénomène de fusion des trajectoires lorsqu'on part de deux configurations différentes et que l'on force certaines cellules à prendre la même valeur avec une probabilité donnée. On se rapportera aux travaux de Bagnoli et Rechtman pour en savoir plus à ce sujet [15].

Rouquier et Morvan ont également étudié le phénomène de *coalescence* où l'on observe également que deux trajectoires d'un automate cellulaire asynchrone fusionnent mais cette fois-ci le couplage appliqué consiste simplement à mettre à jour les *mêmes cellules* dans les deux systèmes étudiés [213]. Il est à noter que ce phénomène avait été constaté par hasard lors de nos expériences sur les automates cellulaires élémentaires α -asynchrones [96]. La coalescence a également fait l'objet d'une étude approfondie par Jordina Frances de Mas lors d'un stage de Master que nous avons co-encadré avec Irène Marcovici [107].

Le problème dont nous nous préoccupons ici est différent. Le système évolue sans autre influence que sa règle d'évolution locale et nous cherchons à obtenir un état où toutes les cellules s'accordent pour réaliser une forme de clignotement en rythme.

Le problème de la synchronisation globale a été formulé par Das et al. en 1994 [54]. Il a depuis lors reçu une attention plutôt limitée de la part de la communauté des chercheurs. Ce peu d'intérêt vient probablement du fait que le problème est *en apparence* facile à résoudre : il est possible d'obtenir des solutions qui parviennent quasiment toujours à synchroniser un ensemble de conditions initiales tirées aléatoirement. Das et al. montrent qu'en utilisant des algorithmes génétiques, on peut « inventer » des règles qui ont une performance proche de 100% pour des tailles d'anneau qui vont jusqu'à 999. En vérité, l'intérêt des auteurs n'était pas tant de parvenir à une bonne performance que de montrer qu'il était possible de trouver des règles exhibant une forme d'émergence, au sens où ces règles parvenaient à établir un *consensus* sur l'état des cellules en annihilant les défauts qui marquent les différences de synchronisation entre régions synchronisées.

Nous demandons maintenant si des solutions *parfaites* peuvent être obtenues, c'est-à-dire que nous exigeons que *toutes* les conditions initiales convergent vers un état synchronisé et non pas seulement un ensemble de conditions initiales tirées aléatoirement.

8.1 Formalisation du problème

Nous quittons le cas binaire et considérons l'ensemble des entiers de 0 à $k - 1$ muni de l'addition modulo k ; l'ensemble des états des cellules est noté $Q = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. L'ensemble des configurations est $\mathcal{E}_n = Q^{\mathcal{L}}$ avec $\mathcal{L} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau de taille n .

Notons v la taille du voisinage d'une règle donnée notée $f : Q^v \rightarrow Q$. La fonction d'évolution globale sera notée : $F : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$.

Pour un état $q \in Q$, nous notons $\mathbf{q} = q^{\mathcal{L}}$ la configuration homogène où toutes les cellules sont à l'état q et $\mathcal{H} = \{\mathbf{q}, q \in Q\}$ l'ensemble des k configurations homogènes.

On dira que la fonction F *synchronise* une configuration $x \in \mathcal{E}_n$ si le système qui a x pour condition initiale atteint une configuration homogène puis visite les configurations de \mathcal{H} dans

l'ordre. Formellement :

$$\exists q \in Q, t \in \mathbb{N}; F^t(x) = \mathbf{q} \text{ and } \forall \tau \in \mathbb{N}, F^{t+\tau} = (\mathbf{q} + \tau) = (q + \tau)^{\mathcal{L}}.$$

On dit que F synchronise la taille n si toutes les configurations de \mathcal{E}_n sont synchronisées.

On notera que dans la formulation choisie pour définir le problème, le système ne peut pas être aidé par des états auxiliaires pour parvenir à la synchronisation. On peut envisager une version du problème, plus facile, où des états hors de Q sont pris par certaines cellules sachant que ces états disparaissent à la fin. Nous avons montré que l'ajout d'états auxiliaires permet de résoudre sans difficulté le problème de la synchronisation globale [86]; nous excluons donc cette possibilité dans la suite.

Le problème de la synchronisation globale se formule donc comme :

Trouver une règle locale f telle que pour toute taille d'anneau n , la fonction globale F synchronise \mathcal{E}_n .

8.2 Propriétés élémentaires

On notera que si une règle est une solution au problème de la synchronisation, alors la règle réfléchie et les règles conjuguées par permutation des états (§ 1.2 p. 14) sont également solutions.

On dit que f est *isochromatique*²¹ si la règle locale est invariante par permutation des couleurs, c'est-à-dire si pour toute permutation π de Q ,

$$\forall (q_1, \dots, q_s) \in Q^s, f(\pi(q_1), \dots, \pi(q_s)) = \pi(f(q_1, \dots, q_s)).$$

Proposition 14. *Une règle synchronisante ne peut être isochromatique.*

Pour s'en convaincre, on prendra simplement la configuration de taille k contenant tous les états disposés en ordre : $x = (i)_{i \in \{0, k-1\}}$. Supposons que x soit synchronisé sur l'état q , c'est-à-dire que la première configuration homogène atteinte soit \mathbf{q} . Considérons le décalé de x , alors par invariance selon le décalage $\sigma(x)$ devrait être synchronisé sur \mathbf{q} . Par ailleurs, considérons π la permutation qui a tout état q associe l'état $q + 1$ (modulo k) et Π l'opérateur sur les configurations qui applique π sur chaque cellule. Alors, la règle étant isochromatique, $\Pi(x)$ doit être synchronisé sur $q + 1$ mais on remarque que $\Pi(x) = \sigma(x)$, ce qui indique que $\Pi(x)$ devrait être synchronisé sur q , ce qui mène à une contradiction.

Soit σ le décalage à gauche (c'est-à-dire la fonction $\sigma : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ telle que $\forall i \in \mathcal{L}, \sigma(x)_i = x_{i+1}$). On appelle *rotations* de x l'ensemble des configurations obtenues en appliquant σ un nombre de fois arbitraires sur x ; on note cet ensemble : $[x] = \{\sigma^m(x), m \in \mathbb{N}\} = \{\sigma^m(x), m \in \{0, \dots, n-1\}\}$.

On appelle *configuration translatante* toute configuration dont l'image est une rotation d'elle-même. On remarquera que si F synchronise une configuration non-homogène $x \notin \mathcal{H}$, alors x ne peut être translatante, en particulier x ne peut pas être un point fixe. Il est également clair que F synchronise x implique que F synchronise toutes les rotations de $[x]$.

21. En anglais, Salo et Torma appellent cette propriété *color-blind*, c'est-à-dire insensible aux couleurs [219]. Cette appellation est cependant ambiguë car, de façon évidente, la règle « voit » bien les différentes couleurs, mais elle réagit de la même façon aux différentes combinaisons de couleurs...

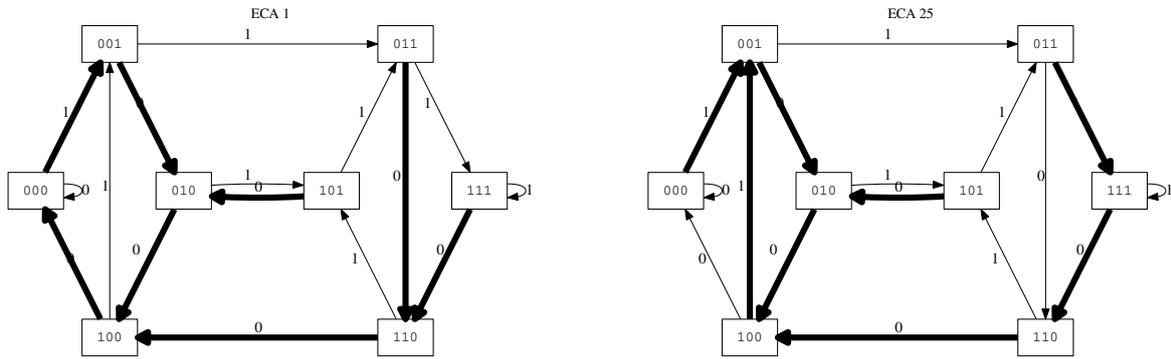


FIGURE 8.1 – Graphes de de Bruijn permettant la construction de configurations translatantes pour l’ACE 1 (à gauche) et l’ACE 25 (à droite). Ces configurations sont construites d’après les cycles obtenus en suivant les arêtes en gras.

Lemme 10 ([207]). *Tout automate cellulaire possède une configuration translatante : $\exists n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathcal{E}_n, i \in \mathbb{N}; F(x) = \sigma^i(x)$.*

La démonstration de cette propriété nous a été donnée par Gaëtan Richard à l’issue de notre exposé sur la synchronisation globale au cours du colloque AUTOMATA 2015. De façon surprenante, Markus Redeker nous a également transmis cette même démonstration par courriel un peu plus tard alors qu’il ne connaissait manifestement pas l’argument de Richard.

L’idée de Richard et Redeker est que pour un automate cellulaire avec un voisinage de taille de v , on peut choisir une chaîne $q_1, \dots, q_v \in Q^v$ librement et itérer le processus qui consiste à ajouter à cette chaîne le résultat de l’application de f aux v derniers caractères de la chaîne. On tombe alors nécessairement sur un comportement périodique du processus et il suffit d’extraire la partie périodique de la chaîne pour avoir une configuration translatante (avec un décalage de v cellules par pas de temps).

On donne ici une autre présentation de cet argument, strictement équivalente, à l’aide de diagrammes de de Bruijn. Sans trop entrer dans les détails, présentons simplement un exemple de la façon de construire une configuration translatante. On construit le graphe suivant : les sommets sont les huit motifs $000, \dots, 111$ et chaque sommet xyz possède une unique arête sortante qui le relie au motif $yz\alpha$ avec $\alpha = f(x, y, z)$. On peut ajouter à cette arête l’étiquette α pour simplifier les choses. Ce graphe contient nécessairement un cycle et la configuration translatante est obtenue en lisant les étiquettes des arêtes du cycle.

Le corollaire du Lemme 10 est qu’il n’existe pas de solution parfaite au problème de la synchronisation globale.

Intéressons-nous maintenant au cas stochastique : dans quelle mesure l’ajout de bruit dans le fonctionnement de la règle locale de l’automate cellulaire peut-elle aider à la résolution du problème ?

8.3 Cas stochastique binaire

Comme pour le problème de la classification de la densité, nous pouvons nous focaliser sur le cas des plus proches voisins et commencer par examiner le cas binaire. On prendra donc une

fonction de transition locale $\phi : \{0, 1\}^3 \rightarrow [0, 1]$, qui donne la probabilité d'être mis à jour à 1 pour un voisinage donné.

Pour une configuration initiale x , l'évolution du système est décrite²² par le processus stochastique $(x^t)_{t \in \mathbb{N}}$. La suite de variable aléatoires (x^t) se définit récursivement selon : $x^0 = x$ et

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathcal{L}, x_i^{t+1} = \mathcal{B}(\phi(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)), \quad (8.1)$$

où $\mathcal{B}(p)$ décrit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Définissons maintenant le problème dans le cadre probabiliste. La condition de synchronisation se traduit localement par $\phi(0, 0, 0) = 1$ et $\phi(1, 1, 1) = 0$. Pour une règle qui satisfait cette condition, pour une configuration initiale $x \in \mathcal{E}_n$, on définit le temps de synchronisation $T(x)$ comme la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre un état homogène : $T(x) = \min\{t, x^t \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}\}$.

Le temps moyen de synchronisation de x est noté $\mathbb{E}\{T(x)\}$. Pour une taille d'anneau n , on définit le *pire temps moyen de synchronisation* (PTMS) selon :

$$\text{PTMS}(n) = \max_{x \in \mathcal{E}_n} \mathbb{E}\{T(x)\},$$

On dit qu'un automate cellulaire probabiliste f *synchronise* la taille n si $\text{PTMS}(n)$ est fini. On dira de même que f est une solution au problème de la synchronisation globale si f synchronise toutes les tailles d'anneau $n \in \mathbb{N}$.

Examinons maintenant comment construire une solution. Nous définissons ϕ avec les variables : $p_0 = \phi(0, 0, 0)$, $p_1 = \phi(0, 0, 1)$, \dots , $p_7 = \phi(1, 1, 1)$.

Théorème 15 ([86]). *Soit ϕ un ECA stochastique tel que $p_0 = 1$, $p_7 = 0$ et $\forall i \in \{1, \dots, 6\}, p_i \in]0, 1[$, alors ϕ est une solution au problème de la synchronisation globale.*

La démonstration est assez facile à établir. On remarque que les configurations $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ sont des états récurrents (§ 2.1 p. 34); ils correspondent à l'état synchronisé du système. Toutes les autres configurations sont des états transients du système : pour un anneau de taille n , on peut en effet montrer qu'à partir de chaque état il existe une probabilité non nulle d'atteindre $\mathbf{0}$ (ou $\mathbf{1}$) en moins de n pas de temps [86].

Ceci ne règle pas tout pour autant. En effet, on aimerait que le système ne converge pas par pur hasard sur les états synchronisés. On peut formaliser cette exigence en disant que l'on souhaite que la convergence ait lieu en temps polynomial en la taille de l'anneau. Un temps linéaire en n serait bien sûr idéal – on ne peut guère espérer mieux – mais nous allons voir que contrairement au cas de la classification de la densité, cela semble hors d'atteinte...

Théorème 16. *For $p \in]0, 1/2[$, soit l'ACE stochastique ϕ défini selon :*

$$\phi(x, y, z) = 1 - (p \cdot x + (1 - 2p) \cdot y + p \cdot z). \quad (8.2)$$

ϕ est une solution au problème de la synchronisation globale et on a $\text{PTMS}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

Pour démontrer que la convergence est quadratique, nous avons montré qu'on pouvait se ramener à l'observation d'un système « stroboscopique » où l'on applique un opérateur d'inversion des configurations un temps sur deux [86]. On observe alors que les frontières des

22. On notera que la définition ci-dessus est plus une caractérisation qu'une définition en bonne et due forme. Comme mentionné plus haut, les lecteurs qui souhaitent avoir accès à une définition plus rigoureuse des automates cellulaires probabilistes peuvent se rapporter à un article de Marcovici et Mairesse [162].

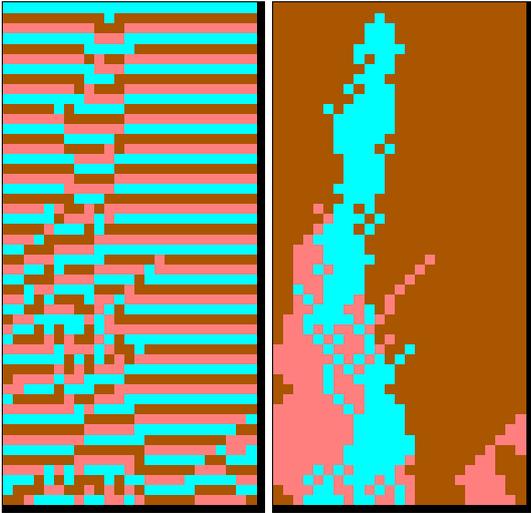


FIGURE 8.2 – (gauche) Diagramme espace-temps de ϕ_k pour $k = 3$. (droite) : même évolution mais sans appliquer l'opérateur \mathbb{S} dans la règle de transition : la règle consiste devient une simple copie d'un voisin choisi aléatoirement. Les trois couleurs codent les états 0,1,2. (La règle est isochromatique.)

différentes zones synchronisées suivent une marche aléatoire non biaisée et que ces frontières s'annihilent lorsqu'elles se rencontrent. On a alors exactement le comportement de la règle de Fukš mentionnée ci-dessus (voir le § 7.3), ce qui nous donne un temps de convergence quadratique. Cette opération est illustrée sur la figure 8.2 où l'on représente le déroulement « normal » de la règle à gauche et le déroulement modifié à droite.

8.4 Généralisation au cas multicolore

Théorème 17. Soit ϕ_k la règle locale stochastique définie par :

$$\forall (x, y, z) \in Q^3, \phi_k(x, y, z) = \mathcal{U}(\{x, y, z\}) + 1,$$

où $\mathcal{U}(E)$ est la variable aléatoire de choix uniforme dans E . Cette règle est une solution au problème de la synchronisation globale et on a : $\text{PTMS}(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

L'obtention du temps quadratique n'est pas aussi simple que dans le cas binaire. On peut bien sûr faire la même opération de suppression du décalage d'état (effet du +1 dans la fonction de transition locale), mais on a alors un processus où chaque zone peut être assignée à une couleur. On peut penser à différentes techniques pour se ramener au cas précédent ; notre choix a été d'adapter le lemme de convergence quadratique.

Lemme 11. Soient n et k deux entiers strictement positifs et soient k processus stochastiques $(X_1^t), \dots, (X_k^t)$, à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Soit F_t une filtration adaptée à ces processus²³. Le temps d'absorption du processus est défini par $T = \min\{t \in \mathbb{N}; \exists i \in \{1, \dots, k\}, X_i^t = n\}$.

Si les processus sont des martingales, c'est-à-dire que chaque (X_i^t) vérifie :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall t \in \mathbb{N}; \mathbb{E}\{X_i^{t+1} | \mathcal{F}_t\} = X_i^t,$$

et s'il existe une constante ϵ telle que :

$$\forall t < T, \exists i \in \{1, \dots, k\}; \mathbb{E}\{(X_i^{t+1} - X_i^t)^2 | \mathcal{F}_t\} \geq \epsilon, \text{ alors}$$

$$\mathbb{E}\{T\} \leq n^2/\epsilon.$$

23. Informellement, cela signifie que la seule information dont on dispose pour conditionner les variables aléatoires est la connaissance des valeurs de ces processus jusqu'au temps t .

On reconnaît là une simple adaptation du lemme de convergence en temps quadratique vu plus haut (partie 7, p. 89).

En somme, les solutions fournies plus haut donnent une illustration assez éloquente de l'utilisation de l'aléa pour la résolution de problèmes inverses : alors qu'il n'existe aucune solution déterministe, construire des solutions stochastiques « parfaites » n'est pas si difficile. Les techniques analytiques nous permettent d'estimer le temps de convergence moyen et montrer qu'en une dimension des convergences quadratiques sont obtenues en mélangeant deux ACE simples (c'est une autre règle diploïde).

Nous terminons en demandant :

Question 23. Existe-t-il une solution qui converge plus rapidement qu'avec un temps quadratique ?

Nous conjecturons qu'une telle règle n'existe pas, du moins pas dans le cas binaire. En effet, nous pensons que pour faire mieux que le résultat obtenu avec des marches aléatoires non biaisées, il faudrait, justement, biaiser le sens marches aléatoires. Cependant, l'effet du clignotement serait d'annuler le biais introduit au pas suivant car les couleurs sont alors inversées... Formaliser cette intuition et construire une démonstration reste néanmoins difficile à ce stade.

Modèle bio-inspiré pour le problème du regroupement décentralisé

Ce chapitre présente les travaux qui ont été au centre du projet AMYBIA [71]²⁴, et notamment du post-doc de Nikolaos Vlassopolous [100, 248, 249], dont nous avons été l'encadrant de 2010 à 2012. Bien plus tard, en 2020, le stage de Master 2 d'Amaury Saint-Jore nous a permis de retravailler sur ce modèle en donnant un exemple d'utilisation du modèle bio-inspiré à des fins de classification de données [218].

9.1 Présentation du problème et des travaux liés

Dans ce chapitre, nous examinons quels sont les ingrédients minimaux permettant à un ensemble d'agents évoluant sur une grille de se regrouper de manière décentralisée, c'est-à-dire sans chef et sans distinction de rôle entre ces agents.

Supposons donc que des robots soient initialement jetés au hasard dans un environnement hostile. Ils cherchent à se regrouper et à former un ensemble compact. Pour plus de commodité, on supposera qu'ils évoluent dans un espace discret, un automate cellulaire bidimensionnel, et qu'ils doivent donc s'entendre pour se regrouper dans une zone donnée de cette grille. La difficulté est qu'ils n'ont aucune carte à disposition ni même de boussole pour s'orienter, de plus, ils ne perçoivent que l'état de la cellule de la grille où ils sont et celui des cellules environnantes. La seule bonne nouvelle est qu'ils peuvent changer les états de la cellule où ils se trouvent et comme l'environnement est un automate cellulaire, celui-ci peut relayer l'information de proche en proche. Dans ces conditions, comment faire pour que les robots se regroupent? Quelles sont les conditions les plus simples qui permettent de réaliser un tel regroupement?

Un des premiers travaux à s'intéresser au problème de contrôle des robots pour former des ensembles compacts est l'article de Sugihara et Suzuki [236]. Leurs robots n'ont aucune limitation de perception, ce qui leur permet d'utiliser des algorithmes où le groupe vers un « centre

24. <https://amybia.loria.fr/>

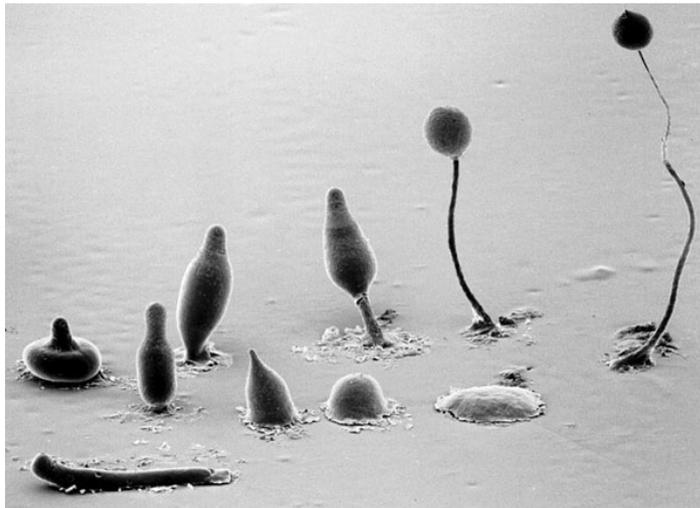


FIGURE 9.1 – Cycle de vie de *Dictyostelium*. Crédits: M.J. Grimson & R.L. Blanton, Biological Sciences Electron Microscopy Laboratory, Texas Tech University. Les images montrent la transformation à partir d'un état de « limace » (*slug*) (en bas à gauche) jusqu'à celui de corps fructifère (en haut à droite).

de gravité » et s'assurer que les liens de visibilité ne sont pas rompus. D'autres travaux ont par la suite considéré des hypothèses plus restrictives, notamment une visibilité limitée [11]. Notons que dans notre travail, la visibilité des agents n'est pas une contrainte puisque les agents communiquent par l'intermédiaire de l'environnement, c'est-à-dire que, pour reprendre le néologisme forgé par Grassé en 1959, les agents se coordonnent par un mécanisme de *stigmergie*²⁵.

On trouvera dans les travaux de Floccini [105, 104] et Precipe [196] des développements théoriques intéressants sur une version du problème où les agents évoluent sur un plan continu et doivent se retrouver *exactement* sur le même point. La thèse de doctorat de Gauci est également un bon point d'entrée dans la littérature des systèmes de robotique en essaim où, point important, le traitement de l'information est réduit à son strict minimum [121].

Le problème du regroupement décentralisé a une certaine parenté avec le problème de l'élection d'un chef (*leader election problem*) introduit par Smith en 1971 [231]. Dans ce problème, toutes les cellules d'un automate cellulaire sont dans un même état et l'objectif est d'atteindre un état où une cellule unique est dans un état distingué. On notera que nous pourrions résoudre le problème du regroupement décentralisé en résolvant d'abord le problème de l'élection d'un chef, puis faire en sorte que tous les « subordonnés » rejoignent le chef. Cependant, le problème d'élection de chef n'a pas de solution avec un petit nombre d'états dans le monde des automates cellulaires et il est surtout étudié dans un contexte d'informatique distribuée, dans lequel chaque agent a un identifiant unique et peut ainsi être facilement distingué des autres.

Le modèle que nous présentons ici s'inspire de la biologie, et plus particulièrement du phénomène appelé *chimiotaxie*. Il désigne la capacité de certaines cellules vivantes à s'orienter dans un milieu en fonction de la présence d'une substance chimique. L'étude de ce phénomène à l'aide de modèles informatiques a été initiée dans les années 1970 et s'est poursuivie depuis sans discontinuer [140, 131]. L'utilisation de modèles où l'espace est continu et où les cellules sont modélisées par un simple point pose des problèmes, par exemple lorsque toutes les cellules ont tendance à se concentrer dans une zone de plus en plus resserrée (les équations font

25. Du Grec *στίγμα*, piqûre, signe, dérivé du verbe *στίζω*, et de *ἔργον* (le travail).

apparaître une singularité) [188, 180]. Ici, nous n’aurons pas ce type d’obstacle puisque nous travaillerons sur une grille discrète, et il y sera plus simple d’y imposer des contraintes d’occupations de l’espace (une ou plusieurs amibes par cellule de la grille). Ceci explique peut-être que l’on plusieurs modèles biologiques où la préférence est donnée à un espace discret plutôt que continu [230, 59].

9.2 Description du modèle

Nous décrivons le modèle en trois étapes : (a) l’environnement, (b) les amibes, (c) les interactions entre environnement et amibes.

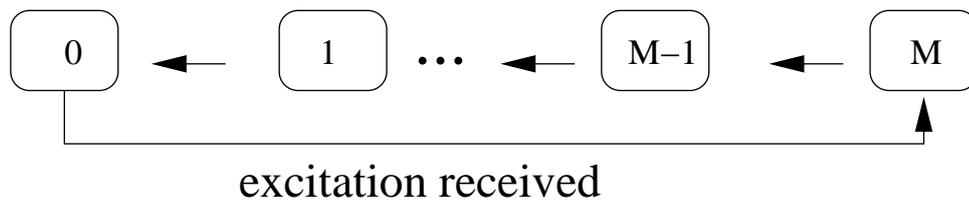


FIGURE 9.2 – Règle de transition du modèle de la couche d’environnement (modèle de Greenberg-Hastings).

L’ensemble des états des cellules est $\{0, \dots, M\}$: l’état 0 est l’état *neutre*, l’état M est l’état *excité*, les états de 1 à $M - 1$ sont des états *réfractaires*. L’évolution d’une cellule est représentée sur la Fig. 9.2 et se décrit comme suit :

- Une cellule neutre qui a au moins une cellule excitée autour d’elle devient excitée avec probabilité p_T , sinon elle reste neutre.
- Une cellule excitée devient réfractaire de niveau $M - 1$.
- Une cellule réfractaire décrémente son état jusqu’à devenir neutre (0).

Décrivons maintenant les mouvements des amibes. On dira qu’une cellule est *vide* si elle ne contient pas d’amibe et *non saturée* si elle est vide ou contient une unique amibe. Les règles de déplacement des amibes s’énoncent alors comme suit :

- Avec probabilité p_A , se déplacer sur une cellule voisine non saturée.
- S’il y a une ou plusieurs cellules excitées non saturées parmi les voisines, se déplacer sur l’une des cellules, en la choisissant de manière aléatoire uniforme.
- Sinon, rester sur la même cellule.

La probabilité p_A a donc pour but de créer un bruit sur le mouvement des amibes, on l’appellera *taux d’agitation*.

Notons qu’à chaque pas de temps, une seule amibe est autorisée à se déplacer à partir d’une cellule source donnée. D’autre part, une cellule qui contient deux amibes ou plus est saturée et ne peut recevoir d’autre amibe²⁶ Ces règles, qui sont assez arbitraires, visent simplement à limiter de trop grandes concentrations d’amibes dans une même région sans pour autant trop

26. Comme les déplacements sont synchrones, une cellule peut donc contenir plus de deux amibes, dans le cas où, au même pas temps, elle reçoit une amibe de la part de plus de deux cellules voisines.

gêner le mouvement des amibes. Notons que nous aurions pu mettre en place un mécanisme de résolution de conflit plus complexe, comme dans le cas des turmites (cf. chap. 6, mais nous pensons cela aurait compliqué la description du modèle sans nécessairement le changer de manière significative.

Passons à la formalisation de ce modèle dans le langage des systèmes dynamiques discrets.

La grille sera finie $\mathcal{L} = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ou torique $\mathcal{L} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Notons \mathcal{A}_c^t le nombre d'amibes contenues dans une cellule $c \in \mathcal{L}$ au temps t .

Pour une cellule c de voisinage \mathcal{N}_c , notons E_c^t l'ensemble des cellules excitées au temps t : $E_c^t = \{c' \in \mathcal{N}_c \mid \sigma_{c'}^t = M\}$.

On rappelle que l'on note $\mathcal{B}(\alpha)$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre α . Pour exprimer l'évolution de la couche automate cellulaire, nous écrivons :

$$\sigma_c^{t+1} = \begin{cases} M & \text{si } \sigma_c^t = 0 \\ & \text{et } [|E_c^t| > 0 \text{ ou } (\mathcal{A}_c^t > 0 \text{ et } \mathcal{B}(\lambda) = 1)], \quad (R1) \\ \sigma_c^t - 1 & \text{si } \sigma_c^t \in \{1, \dots, M\}, \quad (R2) \\ 0 & \text{sinon.} \quad (R3) \end{cases}$$

On reconnaît là une modification de modèle de Greenberg-Hastings [125]. Cette règle (R1) dit qu'une cellule devient excitée si elle reçoit une excitation, qui peut provenir soit d'une cellule voisine soit, avec probabilité λ , d'une amibe qu'elle contient.

Pour modéliser les mouvements des amibes, posons \tilde{N}_c^t et \tilde{E}_c^t comme étant respectivement l'ensemble des cellules *non-saturées* et l'ensemble des cellules *excitées non-saturées* dans le voisinage d'une cellule c au temps t . Le déplacement d'une amibe c dans une cellule cible Δ_c^t s'écrit :

$$\text{si } \mathcal{B}(p_A) = 1 \quad \text{alors } \Delta_c^t = \mathcal{U}[\tilde{N}_c^t] \quad (R4)$$

$$\text{sinon si } \sigma_c^t = 0 \text{ et } |\tilde{E}_c^t| > 0 \quad \text{alors } \Delta_c^t = \mathcal{U}[\tilde{E}_c^t] \quad (R5)$$

$$\text{sinon } \Delta_c^t = \emptyset, \quad (R6)$$

où $\mathcal{U}(E)$ représente la variable aléatoire qui choisit de manière uniforme un élément dans un ensemble E et où $\Delta_c^t = \emptyset$ signifie qu'il n'y a pas de mouvement.

Le nombre d'amibes contenues dans une cellule c est donc mis à jour selon :

$$\mathcal{A}_c^{t+1} = \mathcal{A}_c^t + |\{c' \in \mathcal{L} : \Delta_{c'}^t = c\}| - |\{\Delta_c^t\}|.$$

On ne manquera pas de remarquer qu'une conséquence de ces règles est qu'une amibe n'est pas attirée par les ondes de réaction-diffusion qu'elle émet.

9.3 Observation du phénomène d'agrégation

Pour découvrir la dynamique de ce modèle, on commencera par considérer le cas où l'agitation des amibes est nulle $p_A = 0$: ceci signifie que l'aléa n'intervient que dans les moments où les amibes émettent une onde.

9.3.1 Formation de foyers et effet de *pacemaker*

Examinons ce qui se produit pour un taux d'émission fixé arbitrairement à $\lambda = 0.01$. Nous fixons la densité initiale à $d_{\text{ini}} = 10\%$, c'est-à-dire que chaque cellule a initialement une probabilité de 0.1 de contenir une (et unique) amibe. Ces conditions sont en accord avec celles choisies

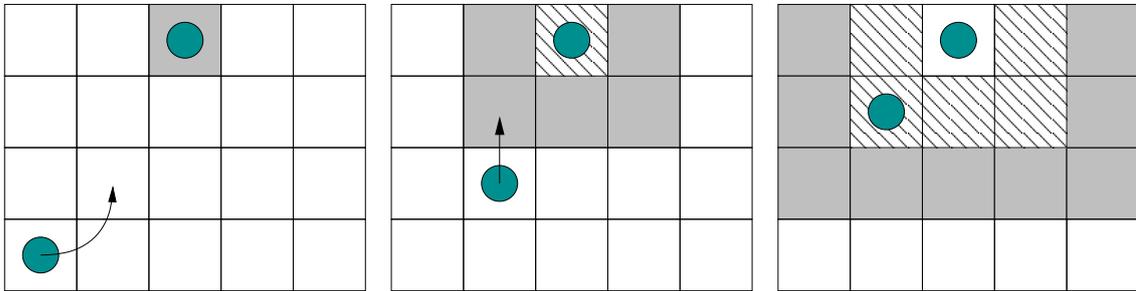


FIGURE 9.3 – Trois pas de temps montrant une évolution avec deux amibes (cercles). Les états excité, réfractaire et neutre sont respectivement représentés en gris, en hachuré et en blanc. L'amibe de gauche se déplace aléatoirement sur la figure de gauche et elle suit un front d'excitation sur le diagramme du milieu.

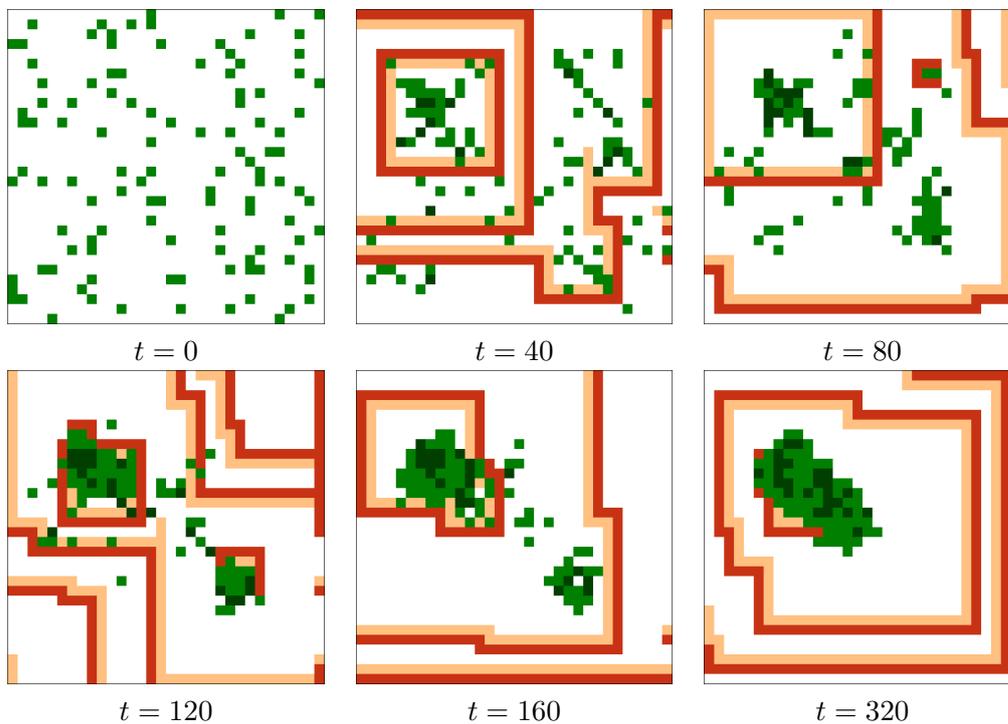


FIGURE 9.4 – Formation d'un *pacemaker*.

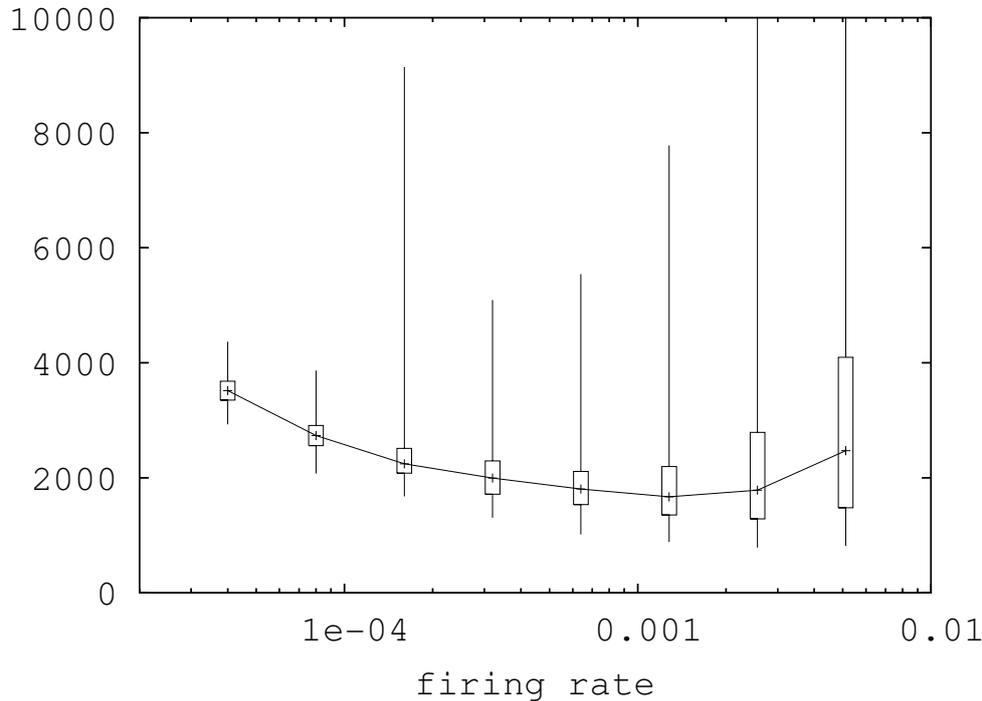


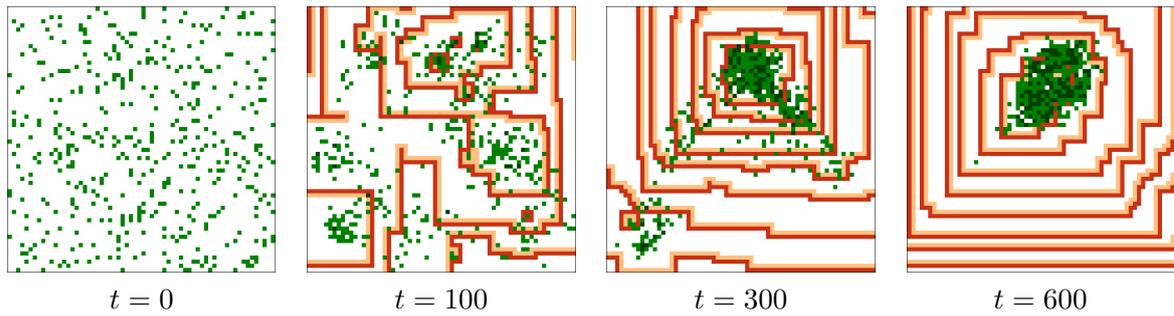
FIGURE 9.5 – Temps d’agrégation en fonction du taux d’émission λ . Échelle logarithmique pour l’axe des abscisses. La taille de la grille est de 150×100 . Reproduit de la ref. [71]. Les boîtes indiquent les premier et troisième quartiles ; les traits indiquent les valeurs minimales et maximales observées pour un échantillon de taille 50.

par d’autres auteurs [6]. Dans la suite, on travaille avec une grille finie et des conditions aux bords non périodiques ; ceci dit, les observations sont également valides sur une grille torique.

La figure 9.4 montre l’évolution du système : un foyer compact se forme en quelques centaines de pas, puis se met à émettre des ondes avec une bonne régularité. Le regroupement est obtenu de façon rapide.

La figure 9.5 présente une évaluation de la vitesse de regroupement en fonction du taux d’émission λ . Pour quantifier le phénomène de regroupement, nous mesurons le temps que met le processus pour être contenu dans une boîte dont la surface correspond à $1/4$ de la surface totale de la grille. En effet, pour de telle valeur du ratio, nous ne sommes plus très loin de former un groupe compact et connexe. Les simulations montrent l’existence d’une valeur optimale du taux d’émission λ^* . On remarque que les valeurs du temps d’agrégation restent proches de la valeur minimale sur une large plage de valeurs, ce qui montre que le réglage de λ peut se faire de manière approximative sans que la dynamique ne soit trop ralentie.

On peut facilement comprendre l’existence d’un temps d’agrégation optimal par le raisonnement pur. En effet, dans le cas limite où l’on fixe $\lambda = 1$, les amibes tentent d’émettre une onde à chaque pas de temps et se trouvent face à un modèle quasiment déterministe. Cependant, les amibes sont statiques car les ondes qu’elles émettent ne peuvent atteindre d’autres amibes puisque les ondes de réaction-diffusion se propagent et s’annulent lorsqu’elles se rencontrent frontalement, c’est-à-dire avec des sens de propagation opposés. De même, pour l’autre cas limite, quand λ tend vers 0, le phénomène d’agrégation se voit d’autant plus ralenti que λ est petit car les ondes sont de moins en moins émises. En supposant que le temps d’agrégation

FIGURE 9.6 – Regroupement avec $p_A = 0.1$ et $\lambda = 0.01$.

moyen est une fonction continue de λ , on voit donc qu'il existe un λ optimal qui minimise le temps d'agrégation.

9.3.2 Explications de la dynamique du modèle

Expérimentalement, on observe que pour des valeurs de λ plus petites que λ^* , le processus de convergence est assez « fluide » : les amibes s'attirent en formant un groupe relativement homogène, et celui-ci devient de plus en plus compact à mesure que le temps passe. En revanche, pour un taux d'émission λ plus grand que λ^* , un phénomène nouveau apparaît : des groupes stables apparaissent et ces groupes se « combattent » jusqu'à ce qu'un groupe « absorbe » un autre groupe. Ce phénomène d'absorption résulte lui-même d'un autre processus émergent : les groupes formés ont tendance à émettre des ondes de manière régulière, la probabilité d'émission d'une onde par un groupe augmentant avec le nombre d'amibes qu'il contient.

Pour comprendre ce phénomène de lutte entre groupes, observons en pensée ce qu'il se produit avec deux groupes seulement, A et B, en supposant que la taille de A est légèrement supérieure à celle de B. Lorsque les ondes émises par ces deux groupes se rencontrent, elles s'annulent et ne se traversent pas. Il en résulte la formation d'un *front d'excitation* qui délimite les *zones d'influence* de chaque groupe. Ce front avance ou recule selon les aléas des temps d'émission des amibes mais on peut remarquer que comme A est plus grand, il émet des ondes de manière plus régulière et il a donc tendance à faire déplacer le front dans la direction de B et donc à étendre sa *zone d'influence*. Lorsque sa zone d'influence touche le groupe B, les amibes de ce groupe ont tendance à « migrer » vers A jusqu'à atteindre les amibes de A et fusionner avec elles. Nous avons donc là un exemple manifeste de phénomène *d'émergence* : il est difficile de prédire la dynamique du système à la seule vue des règles locales, les groupes, fronts d'excitation et zones d'influence sont des objets d'ordre supérieur qui permettent de mieux comprendre l'évolution du système et, dans une certaine mesure, de faire des prédictions sur la façon dont le regroupement décentralisé se produit.

9.3.3 Robustesse du modèle

On peut dans un second temps ajouter du bruit sur le mouvement des amibes et prendre une valeur de p_A strictement positive.

On constate alors que pour des valeurs de p_A « raisonnables », c'est-à-dire inférieures à 0.25, le processus de regroupement n'est pas affecté par l'introduction de bruit sur le mouvement des amibes (voir fig. 9.6). On constate même que dans certains cas la présence de bruit peut rendre

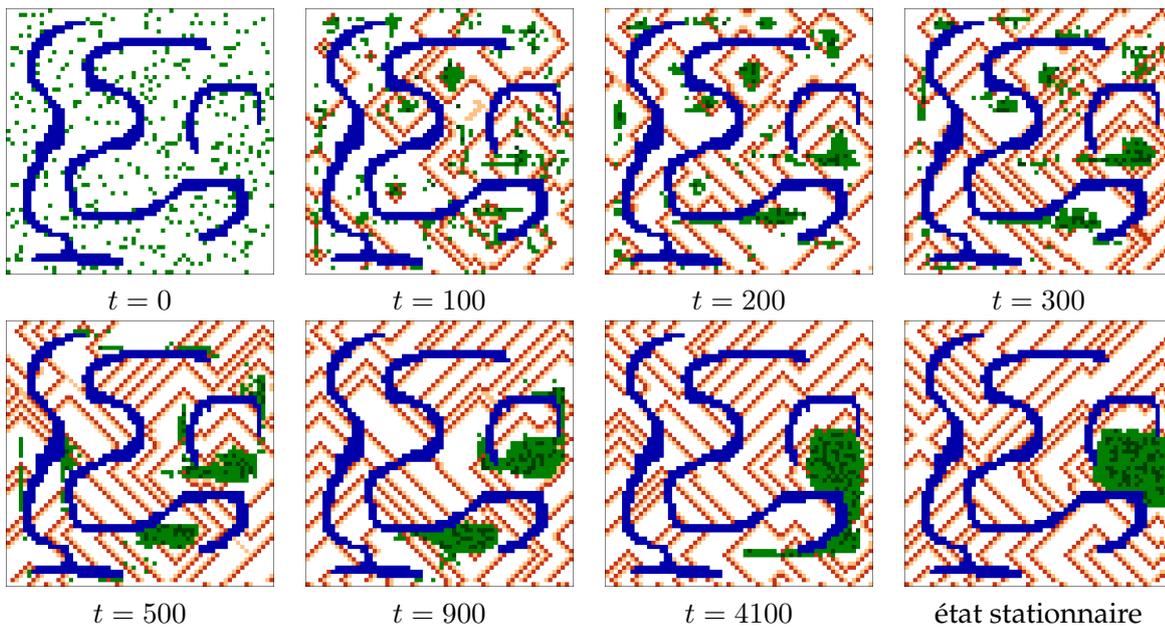


FIGURE 9.7 – Regroupement avec $p_A = 0.1$ et $\lambda = 0.01$ et avec présence d’obstacles. On notera que l’on a utilisé un voisinage de von Neumann.

les mouvements collectifs des amibes plus fluides. La forme du groupe final est également modifiée, devenant plus circulaire. Pour de plus hautes valeurs de p_A , on observe également un processus de regroupement, mais celui-ci peut devenir plus lent et le groupe final est bien sûr de moins en moins compact à mesure que p_A augmente. La question de savoir de façon plus précise dans quelle mesure le bruit modifie le processus de regroupement est un problème à étudier.

On peut également observer ce qui se produit lorsqu’on introduit des obstacles sur la grille. La figure 9.7 présente une simulation du système pour une grille de taille 64×64 , pour $p_A = 0.10$. Les obstacles sont matérialisés en bleu : ce sont des cellules qui sont imperméables aux ondes de réaction-diffusion et qui ne laissent pas passer les amibes. On remarquera que l’on a également choisi un voisinage de von Neumann de façon à travailler dans les conditions les plus difficiles qui soient. L’observation des simulations montre que le comportement du système est robuste : l’ajout d’obstacles ne constitue pas un frein au regroupement car les ondes de réaction-diffusion, de par leur dynamique, contournent les obstacles et peuvent se ré-amplifier après avoir franchi des ouvertures étroites.

9.4 Développements du modèle

9.4.1 Problème de l’infotaxie collective

Nous allons maintenant voir comment cette « mécanique » de coordination des amibes peut être mise à profit pour coordonner une équipe d’agents dont le but est de localiser de manière non conventionnelle une source diffusant des ondes chimiques. De nouveau, nous travaillons dans un cadre très contraint : outre les restrictions précédentes nous supposons que les localisations de la source ne peuvent se faire que de façon sporadique et que les événements de localisation de la source sont de type binaire : *ils disent qu’une source a été détectée mais ne donnent*

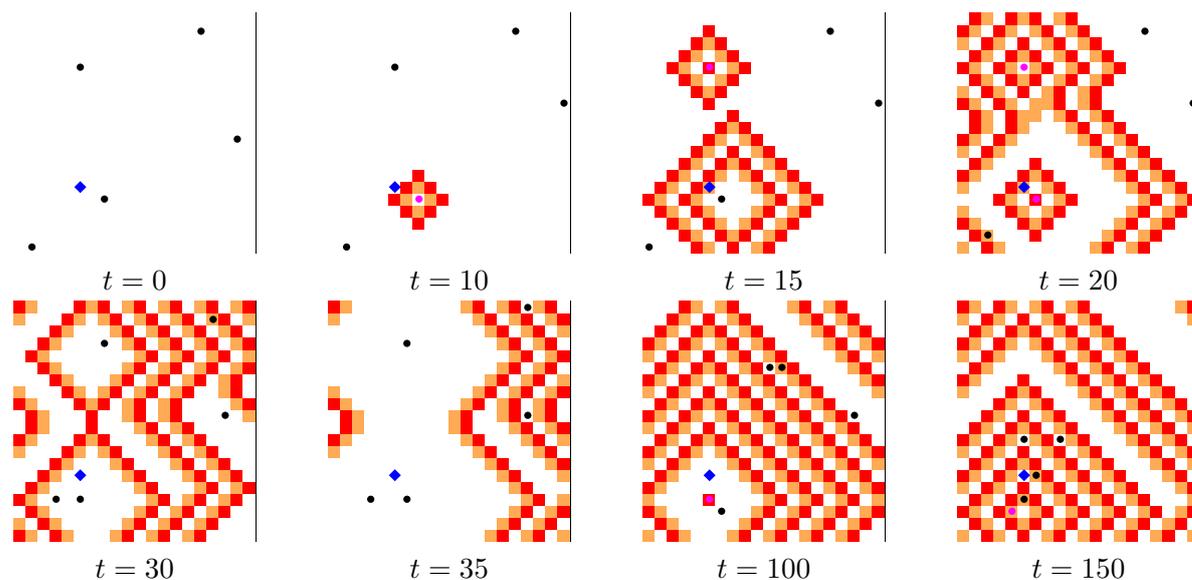


FIGURE 9.8 – Évolution du système pour $N = 5$ amibes pour une grille de taille 20×20 , $p_A = 0.2$, et $p_R = 0.9$. La source est représentée en bleu (forme de « carreau »); les amibes sont les cercles noirs (état *rec*) ou en violet (état *emi*). Les cellules sont en rouge, orange et blanc ce qui correspond respectivement aux états *E*, *R* et *N*.

aucune information sur sa direction, ni la distance où celle-ci se trouve.

De telles situations sont observées dans la nature, par exemple dans le cas où la femelle d'un papillon de nuit émet des phéromones pour attirer les mâles. La phéromone se diffuse par paquets de forte concentration (des « patches ») qui se déplacent de manière plus ou moins aléatoire dans l'espace en raison des tourbillons et courants qui se forment naturellement dans les mouvements d'air. Lorsqu'un mâle rencontre un de ces paquets, il sait seulement qu'une femelle est proche mais il ne sait pas exactement où elle se trouve. Les insectes savent cependant utiliser à leur avantage l'information du sens de déplacement du vent : ils cherchent tout d'abord un endroit où les détections sont fréquentes puis remontent en sens opposé de direction du vent. Ce problème a été nommé *infotaxie* par Vergassola et al. [246] : le mot est composé de *info-* qui est l'apocope d'*information* et du grec *τάξις* (*taxis*) qui signifie : *mise ordre, arrangement, disposition* (Bailly).

Notre article de 2016 expose ce modèle d'infotaxie collective et les observations par simulation numérique [81]. Nous en rappelons ici les principales caractéristiques.

La première chose à décrire est la probabilité de faire une détection. On note $\sigma \in \mathcal{L}$ la position de la source. La probabilité ρ de détection de la source dans une cellule $c \in \mathcal{L}$ quelconque s'exprime alors comme : $\rho(\sigma) = 1$ et

$$\forall c \neq \sigma, \rho(c) = \frac{K}{d(c, \sigma)^2},$$

où $d(c, \sigma)$ est la distance de Manhattan entre c et σ , et où K est une constante, arbitrairement fixée à $K = 0.5^{27}$.

27. D'autres auteurs ont préféré prendre une fonction qui décroît de manière exponentielle avec la distance. Le choix d'une fonction qui décroît avec le carré de la distance facilite les choses et permet aux amibes de faire des détections sans avoir à être nécessairement très près de la source.

Lorsqu'une détection se produit, une amibe passe de l'état receveur (r_{ec}) à l'état émetteur e_{mi} . Ceci l'amène à déclencher une onde de réaction-diffusion, à la condition que la cellule sur laquelle elle se trouve soit à l'état neutre (N). D'autre part, pour accélérer la convergence vers la source, nous ajoutons la possibilité qu'une amibe émette *plusieurs ondes* lorsqu'elle fait une détection. Ceci est modélisé par le fait qu'une amibe reste dans l'émetteur avec probabilité p_R et passe dans l'état receveur (r_{ec}) avec probabilité $1-p_R$. Le temps passé dans l'état émetteur suit donc une loi géométrique de paramètre p_R ; la valeur de ce paramètre est fixée empiriquement à $p_R = 0.9$.

La figure 9.8 montre l'évolution du système pour un jeu de paramètres donné²⁸. Cette figure illustre le comportement le plus courant du système et ses différentes phases :

- (a) régime de dispersion : Les amibes se déplacent aléatoirement et font quelques rares détections.
- (b) régime de concentration : Lorsqu'une amibe, par le jeu du hasard, se retrouve proche de la source, elle émet de façon plus fréquente et attire à elle les autres amibes.
- (c) phase finale : Les amibes sont regroupées autour de la source, elles émettent beaucoup d'ondes, qui se contrarient l'une l'autre. Une amibe finit par trouver la source grâce à la combinaison des mouvements aléatoires et des ondes émises.

L'étude détaillée des différentes phases a fait l'objet du stage de Quentin Ladeveze, étudiant de Licence 3 en informatique à l'université de Lorraine, réalisé en 2016. Ce stage a permis de déterminer les différentes plages de paramètres pour lesquelles le processus d'infotaxie se déroulait le plus rapidement. Parmi les observations les plus remarquables, notons que « plus n'est pas mieux » : de façon paradoxale, il existe une valeur optimale du nombre d'amibes. En effet, si les amibes sont trop nombreuses, la phase (c) devient trop longue car les ondes se détruisent les unes les autres et les amibes deviennent incapables de converger de façon cohérente vers la source.

La figure 9.9 montre comment varie le temps de détection en fonction de la probabilité d'agitation pour 20 amibes sur une grille de taille 80×80 . On remarquera que le gain par rapport à une pure marche aléatoire est appréciable pour des valeurs de p_A assez grandes ($p_A < 0.4$ environ). D'autre part, on constate une fois de plus que la présence d'un peu d'agitation est bénéfique : la valeur minimale du temps de détection est en effet obtenue pour $p_A = 0.2$!

9.4.2 Des amibes & des robots

Nous avons cherché à savoir si ces propriétés, observées uniquement par le truchement de la simulation numérique, pouvaient être également « transférées » sur un système réel. Nous nous sommes donc intéressés à réaliser un système de regroupement décentralisé à l'aide de robots [100].

Nous avons pour cela bénéficié de l'aide du professeur Guy Theraulaz, de l'université de Toulouse, qui a mis à notre disposition les robots Alice qui avaient été utilisés pour étudier la dynamique des fourmis à l'aide de robots [120]. Nous avons également procédé à des expériences sur des robots Khepera III, sur une table spéciale où les robots pouvaient réagir à des ondes lumineuses projetées par le bas.

Il est à noter que la transposition du modèle cellulaire au cas de robots réels n'est pas une tâche anodine. Notamment dans le cas des robots Alice, qui, dans la configuration que nous avons, ne disposaient que de deux capteurs de lumière. Les résultats que nous avons obtenus

28. Voir aussi les suppléments visuels sur : <https://hal.inria.fr/hal-01327983>

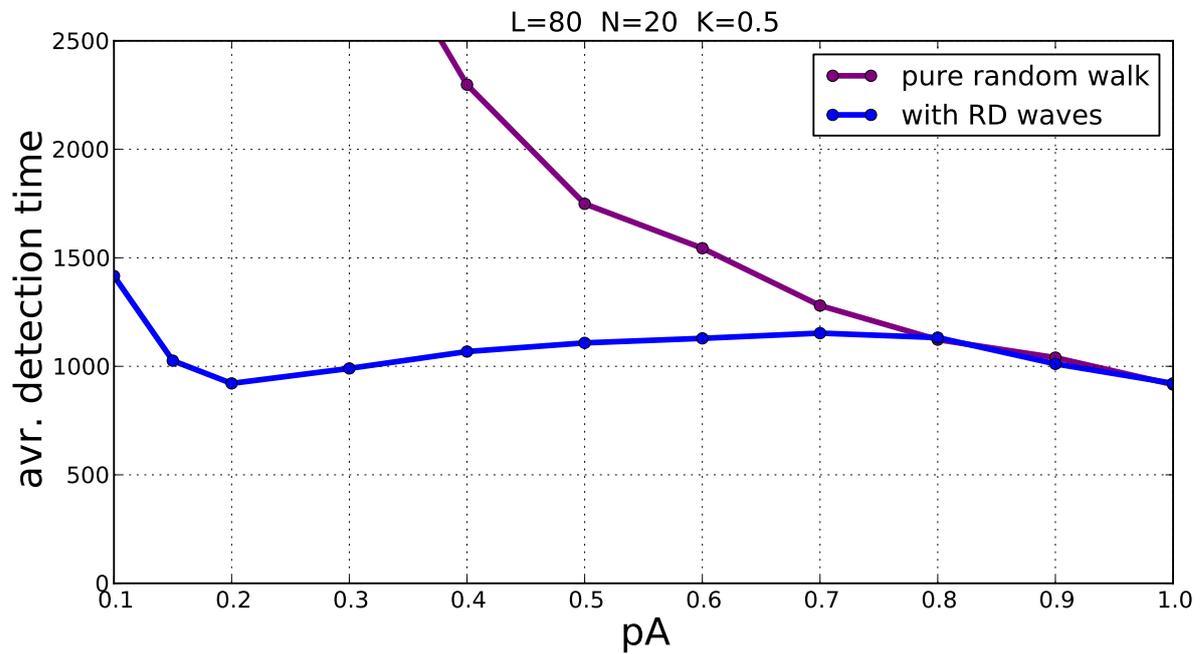


FIGURE 9.9 – Temps de détection moyen en fonction de la probabilité d’agitation p_A . Le jeu de paramètres est: $N = 20$ amibes, $L = 80$, $K = 0.5$, $p_A = 0.1$, et $p_R = 0.9$ (en bleu). La courbe en violet montre une évolution purement aléatoire (sans ondes de réaction-diffusion). Repris de la ref. [81].

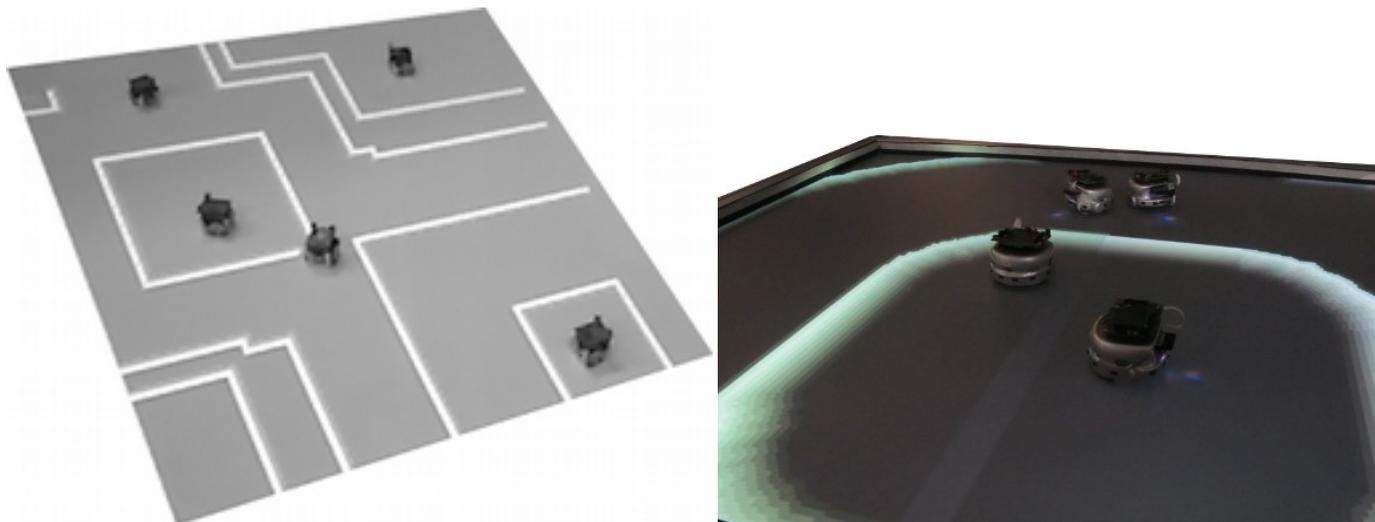


FIGURE 9.10 – Image montrant le dispositif expérimental avec les robots Alice (à gauche) et avec les robots Khepera (à droite). Repris de la ref. [100].

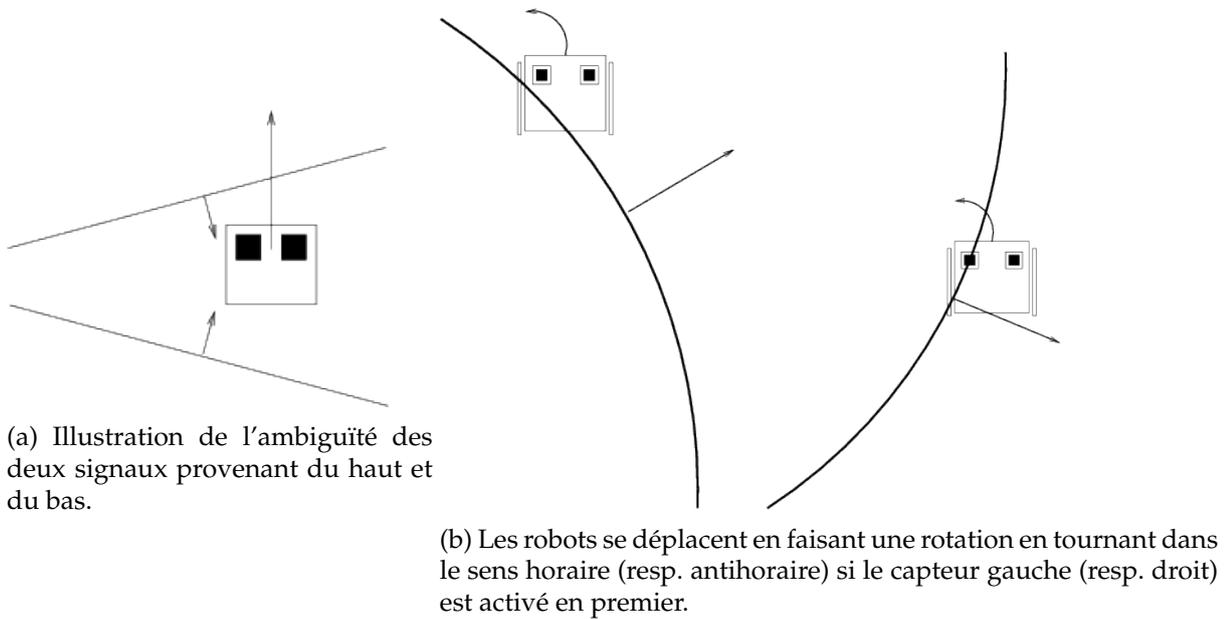


FIGURE 9.11 – Mouvements des robots Alice. Repris de la ref. [100].

étaient néanmoins encourageants et nous ont permis de démontrer la faisabilité d'une application des méthodes de regroupement des amibes dans des cas « physiques ». Un obstacle majeur reste cependant présent : pour les robots Alice comme pour les robots Khepera III, nos expériences ont simulé la propagation des ondes de réaction-diffusion. Implémenter la diffusion de ces informations dans un milieu réel, par exemple à l'aide d'un réseau de capteurs, reste le défi principal pour la poursuite de ces recherches.

9.4.3 Des amibes pour classer des données

Après avoir observé les propriétés remarquables des deux modèles d'amibes précédents, nous nous sommes demandés si la formation des groupes ne pourrait pas se faire en fonction de données contenues par les amibes, autrement dit s'il était possible de faire réaliser une tâche de partitionnement de données (*data clustering* en anglais) [218].

Des modèles bio-inspirés ont déjà été utilisés pour ce type de tâche [130, 177, 170].

La mise en œuvre du modèle d'agrégation des amibes pour le partitionnement de données repose sur les principes suivants :

1. Chaque amibe porte une donnée du jeu de données.
2. Les amibes émettent des excitations dans la cellule où elles se trouvent avec une certaine probabilité.
3. Ces excitations se transmettent avec le mécanisme de réaction-diffusion (automate cellulaire de Greenberg-Hastings) en portant la donnée dans le front d'excitations.
4. Les amibes réagissent aux excitations reçues en fonction d'une comparaison avec leur propre donnée : si la différence est faible, l'excitation est perçue comme étant attractive et l'amibe remonte le front, si la différence est élevée, l'excitation est perçue comme répulsive et l'amibe se déplace en s'écartant du front.

Les caractéristiques exprimées ci-dessus sont assez simples à saisir mais leur mise en œuvre concrète pose une multitude de problèmes. Il faut évidemment traiter du cas où plusieurs

amibes sont superposées, régler convenablement la différence entre attraction et répulsion, choisir un taux d'émission pour les amibes, etc. Ce travail a fait l'objet du stage de Master 2 d'Amaury Saint-Jore, avec lequel, en collaboration avec Emmanuel Jeandel, nous avons pu montrer que sous certaines conditions, ce modèle pouvait séparer des données générées selon plusieurs lois gaussiennes. Par ailleurs, des résultats encourageants ont été obtenus avec le jeu de données « classique » des Iris de Fischer [218]. Cette piste de recherche doit néanmoins être consolidée si l'on souhaite promouvoir ce système comme un mode de tri de données bio-inspiré robuste et adaptatif.

Nous pouvons clore ce dernier chapitre sur deux questions.

Question 24. Quels résultats analytiques peuvent être obtenus avec ce modèle? Faut-il le simplifier pour le rendre abordable par l'analyse, par exemple en proposant une version unidimensionnelle? Doit-on recourir à des approximations de champ moyen? Comment décrire le phénomène d'agrégation de façon précise et prédictible en moyenne?

Question 25. Dans quelles autres situations pourrait-on coupler la réaction-diffusion et le déplacement de robots ou d'agents? La piste du tri de données doit-elle être approfondie ou doit-on chercher d'autres problèmes pour lesquels il serait pertinent d'appliquer ce modèle bio-inspiré?

Ouvertures et pistes de recherche

Que retenir au terme de notre parcours en neuf stations ? En recherche, il est toujours délicat de tirer des conclusions fermes à partir de travaux qui sont par nature toujours en chantier. Tâchons cependant sélectionner quelques éléments, « sé-lect-tionner », c'est-à-dire de « cueillir » (c'est un des sens du mot *logos*) quelques fleurs parmi celles qui s'offrent à notre vue.

Sur les liens entre analyse mathématique et simulation numérique

La première partie de ce mémoire s'est concentrée sur l'étude de l'asynchronisme des automates cellulaires à l'aide de méthodes analytiques. Nous avons posé la question de la robustesse des automates cellulaires, et l'asynchronisme nous a paru la façon la plus directe d'aborder cette question.

Les résultats obtenus montrent que même pour des systèmes dont l'évolution est probabiliste, il est possible de prédire le comportement qualitatif de ce système et d'estimer la valeur des temps de convergence avec une assez bonne précision. Ceci nous a permis de présenter une classification des automates cellulaires et d'étudier leurs propriétés de récurrence. Du même coup, les *limites* de l'approche analytique se sont rapidement fait sentir : il reste en effet un certain nombre d'automates cellulaires simples dont on ne sait pas calculer le temps de convergence vers un point fixe. Nous n'avons pas non plus essayé de nous attaquer à des questions plus difficiles, comme l'évaluation du comportement des systèmes avec un synchronisme partiel. Ceci justifie le recours à la simulation numérique pour aller observer différentes propriétés et, dans un second temps, chercher à établir des démonstrations en partant des observations.

Sur le volet analytique, nous constatons que, s'agissant de nos travaux tout autant de ceux de nos collègues, les systèmes à états binaires ont tenu jusqu'à présent une place centrale dans la littérature du domaine. Ceci est tout à fait dans l'ordre des choses puisque la méthode scientifique, d'origine cartésienne, recommande de ne pas s'occuper des problèmes les plus difficiles tant qu'on n'a pas une vue claire des problèmes plus simples. Néanmoins, il nous paraît aujourd'hui nécessaire de se risquer davantage en territoire inconnu en explorant des automates cellulaires avec plusieurs états. On pourra par exemple s'atteler à l'étude des règles ternaires, qui commencent actuellement à peine à être défrichées [112, 253, 65].

Du côté des techniques d'analyse de la dynamique des systèmes probabilistes, nous avons vu que les chaînes de Markov et les martingales tiennent un rôle prépondérant. Pourtant, dès que l'on s'attaque à des systèmes où les interactions sont légèrement plus complexes que celles des automates cellulaires élémentaires, on se heurte à l'impossibilité d'appliquer directement ces outils (partie 2 du mémoire). Il faut alors recourir à des approximations avec des hypothèses fortes, comme nous l'avons vu avec l'hypothèse du champ moyen dans le cas de l'automate de Greenberg-Hastings. Le problème est que le cadre analytique projette alors le comportement du système en le simplifiant et élague ainsi la grande richesse de comportement qu'un modèle

peut receler, comme dans le cas du modèle de formation d'essaims.

En somme, entre analyse et simulation, nous ne choisissons pas notre camp. Il existe de nombreux problèmes où la complémentarité de ces deux approches doit être cultivée et notre souhait est de continuer à travailler à la jonction des deux.

À propos des moyens de calcul

Dans ce mémoire, nous avons évoqué l'aspect matériel du calcul mais sans entrer dans les détails. Rappelons qu'avec Nikolaos Vlassopoulos, Hugues Berry, et Bernard Girau, nous avons implémenté un calcul d'automate cellulaire parallèle à l'aide de systèmes de type FPGA (*field-programme gate arrays*) [249]. Cette piste de travail pourrait être reprise car si au moment où nous avons exploré comment simuler des automates cellulaires à l'aide de FPGA, il n'existait pas de solution « clé en main », la prise en main de tels outils de calcul semble avoir été simplifiée depuis.

La piste des simulations parallèles sur cartes graphiques (GPU) constitue une autre voie possible et, à ce titre, nous pensons qu'il serait intéressant de voir quelles seraient les spécificités engendrées par la simulation de systèmes asynchrones ou probabilistes par rapport aux systèmes déterministes classiques [39]. Au-delà des FPGA et des GPU, qui sont les systèmes auxquels on pense « naturellement » lorsqu'il s'agit de calculer en parallèle, nous sommes persuadés que de nombreux autres systèmes de calcul parallèles et asynchrones seront développés dans les prochaines années. Nous avons évoqué les modèles de calcul « browniens » conçus par Ferdinand Peper, Jia Lee et leurs collaborateurs [101] mais d'autres systèmes sont également en cours de développement, notamment sous la poussée forte du développement de la recherche en intelligence artificielle (puces neuromorphiques, caméras asynchrones, etc.)

Signalons également que nous avons développé notre propre outil de simulation des automates cellulaires : `FiatLux`²⁹, logiciel écrit en java et qui compte maintenant plusieurs centaines de classes. En vingt ans de recherche, ce logiciel s'est considérablement développé mais nous n'avons jamais pris le temps de remettre son architecture à plat et d'écrire une documentation du code et une documentation utilisateur. Même si le développement logiciel ne tient pas une place centrale dans nos activités, nous souhaitons consacrer plus de temps à ce volet dans les années à venir, ne serait-ce que pour laisser une trace à ceux qui souhaiteront continuer ce travail ou le reprendre en repartant du début.

À propos de la robustesse du calcul

Nous avons posé en introduction la question de la réalisation de calculs à l'aide de méthodes robustes, c'est-à-dire qui résistent à différentes perturbations structurelles du modèle. Nous avons constaté sur les exemples donnés que des modèles où le caractère discret est marqué et où les règles semblent assez *ad hoc*, comme dans le cas des turmites, étaient assez peu robustes. La plupart du temps un changement mineur dans la définition du modèle peut conduire à des comportements qualitativement différents. En revanche, pour des modèles inspirés de la biologie et où l'aléa joue un rôle central, comme dans le cas des amibes par exemple, nous avons vu que le modèle était nettement plus robuste. Ceci n'est pas surprenant : si un système parvient à son but par des mécanismes d'auto-organisation en tirant parti de l'aléa, il y a de

29. <https://project.inria.fr/fiatlux/>

fortes chances que les « obstacles » ne viendront pas perturber ses trajectoires de manière trop importante.

Tout cela est évidemment de l'ordre de l'intuition et, pour donner un contenu plus solide à ces idées, l'étude de problèmes inverses nous paraît fondamental. Nous avons présenté dans ce mémoire le problème de la classification de la densité, le problème la synchronisation globale, le problème du regroupement décentralisé. Nous avons également évoqué des problèmes « proches », tels que le problème de l'infotaxie collective ou celui de la classification de données à l'aide des amibes virtuelles. Les lignes ci-dessous présentent quelques autres exemples possibles.

Ouvertures

Pour finir, donnons ici quelques problèmes sur lesquels nous souhaiterions travailler dans un futur proche.

Exploration de l'espace des AC probabilistes

Une exploration complète de l'espace des ACE probabilistes reste à faire : il s'agit de « cartographier » cet espace, paramétré par huit probabilités et donc analogue à $[0, 1]^8$. On pourrait commencer par mesurer par exemple la densité asymptotique moyenne obtenue pour les différents points de cet espace, puis d'autres paramètres comme la densité asymptotique des motifs de plus grandes longueur, voire des quantités comme l'entropie ou le spectre des densités [67]. Où sont les discontinuités, les transitions de phase du premier et second ordre, quels sont les motifs qui apparaissent, etc.? Un tel travail rendrait honneur au projet de Turing de comprendre les mécanismes de naissance des formes à partir de lois locales simples [244].

Problème du diagnostic décentralisé

Nous sommes actuellement engagés dans une collaboration avec Irène Marcovici et Régine Marchand sur le *problème du diagnostic décentralisé* [122]. Plus généralement, les recherches sur les problèmes de consensus distribué nous paraissent fondamentaux. Les automates cellulaires, par leur côté uniforme et simple, sont un terrain de choix pour poser les questions les plus claires mais il ne faudrait pas se limiter strictement à ce cadre : nous souhaitons donc passer de la structure en grille à l'étude des systèmes dynamiques sur des graphes. Un stage de Master 2 vient d'être initié sur ce thème avec Kévin Engrand, étudiant du Master AVR (apprentissage, vision, robotique) de l'université de Lorraine.

Problème de la classification de la parité

Dans le prolongement de nos réflexions sur le problème de la classification de la densité, nous avons traité le problème de la classification de la parité par des systèmes de particules asynchrones. Dans ce problème, un consensus doit également être établi entre les cellules : le système doit converger vers tout-zéro ou tout-un si la configuration initiale contient respectivement un nombre pair ou impair de 1. Nous avons construit une première solution qui consiste à mettre à jour le système par paires, et à changer simultanément l'état des deux cellules mises à jour en fonction de leur voisinage [89]. La parité est donc conservée au fil du temps et la convergence vers tout-zéro ou tout-un se fait à l'aide de mécanismes similaires à ceux observés pour les automates cellulaires quadratiques.

Nous avons démontré que la convergence était quadratique pour les cas les plus simples mais nous n'avons pas su trouver un argument dans le cas général. Ceci montre, une fois de plus, et s'il en était besoin, que des modifications du modèle qui peuvent sembler anodines rendent les choses plus difficiles au niveau de l'analyse. Les simulations confirment en revanche que la convergence est quadratique en moyenne et que le modèle fournit une solution que l'on peut utiliser sur des anneaux de petite taille. Pour des systèmes plus grands, le problème reste ouvert et on pourrait imaginer un système de systèmes où la parité serait calculée par niveaux hiérarchiques. Plus généralement, ce modèle ne vise pas tant à fournir une nouvelle méthode plus efficace que les solutions déterministes [215] mais à dégager de nouvelles façons d'aborder le calcul, en faisant jouer à l'aléa un rôle constructif (voir le travail de Hongu et Hagiya pour un exemple récent [134]).

Problème de l'auto-correction

Dans ce problème, on part d'un pavage du plan obéissant à des contraintes, par exemple un k -coloriage, c'est-à-dire un état de la grille où chaque cellule possède une couleur parmi k et où deux cellules adjacentes ne peuvent avoir la même couleur. On perturbe cet état « admissible » en introduisant des erreurs et on souhaite que les cellules reviennent à un état admissible uniquement à l'aide d'interactions locales. Avec Irène Marcovici et Siamak Taati, nous avons étudié ce problème pour différentes valeurs du nombre de couleurs k et nous avons montré que dans certains cas, les règles stochastiques pouvaient être à la fois plus simples, plus « isotropes » et plus efficaces que les règles déterministes [94, 95].

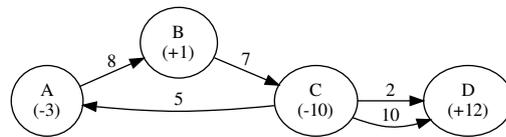
Pour en savoir plus sur ce sujet, nous invitons les lecteurs à se reporter au paragraphe 2.2 de la thèse d'habilitation à diriger les recherches d'Irène Marcovici [168].

Ouverture vers l'économie et la modélisation des échanges inter-entreprises

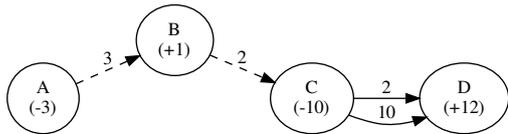
Ce mémoire présenté des modèles liés à la physique (transitions de phase), à la chimie (réaction-diffusion) et à la biologie (*Dictyostelium discoideum*). Afin d'élargir davantage notre champ de recherches, nous avons franchi le pas en allant du côté de l'économie et avons entamé un travail sur le problème de la mutualisation des dettes entre entreprises [9]. En effet, cette question est un enjeu économique majeur, tout particulièrement en période de crise, où les liquidités peuvent manquer et conduire à des faillites d'entreprises pourtant viables.

Nous nous intéressons aux réseaux de paiement entre entreprises afin de réduire la dette qu'ils contiennent. Comme les factures sont généralement payées avec un certain délai (deux mois en zone euro), les dettes qu'elles représentent s'accumulent et peuvent être réduites par mutualisation. En effet, si plusieurs entreprises se doivent mutuellement des sommes, on peut annuler une partie de ces sommes et financer les restes dus (cf. exemple sur la figure 12).

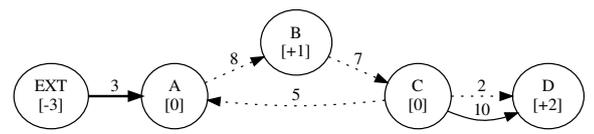
L'ensemble des dettes existant à un moment donné est modélisé par un multigraphe dont les sommets sont les entreprises et les arcs représentent des factures émises pendant un laps de temps donné (par exemple un mois). Nos premiers travaux ont porté sur le cas de la réduction intégrale de dettes, c'est-à-dire que chaque facture est ou bien laissée en l'état ou bien supprimée. Ce problème étant NP-complet, il nécessite des méthodes heuristiques pour trouver comment optimiser la quantité de dettes annulée en fonction des entreprises que l'on peut financer. Nous avons proposé plusieurs heuristiques et commencé à analyser la structure des graphes d'échange, notamment lors du stage de Marie Vela-Mena, étudiante de L3 à l'université de Marseille, et celui d'Arthur Rousseau, étudiant de L3 à l'ENS Paris.



(a) Situation initiale



(b1) avec une réduction partielle



(b2) avec une réduction intégrale

FIGURE 12 – **(a)** Situation initiale ; les positions nettes sont indiquées entre parenthèses **(b1)** avec une réduction partielle du cycle A-B-C : on paye et supprime une facture et on en réduit deux autres ; **(b2)** avec une réduction intégrale avec un financement par EXT de 3 unités sur le sommet A : on paye et supprime quatre factures (en pointillés). Les changements de solde induits par ces paiements sont indiqués entre crochets. Deux dettes subsistent : A vers EXT (montant 3) et C vers D (montant 10).

À terme, le but visé est de transformer les paiements entre une communauté d'acteurs, en tenant compte de leur position nette, c'est-à-dire la somme des crédits diminué de la somme des dettes. Ce système pourrait avoir des effets bénéfiques en favorisant les échanges à l'intérieur d'un groupe d'acteurs économiques fortement liés. Un financement de bourse thèse a été obtenu par le programme d'actions exploratoires de l'Inria³⁰, ce qui nous a permis de lancer le doctorat de Joannès Guichon, avec un encadrement en tandem avec Sylvain Contassot-Vivier. Notre souhait serait de pouvoir d'appliquer les techniques vues sur les systèmes complexes à topologie régulière sur ce cas plus proche du terrain, où les liens entre composants sont bien sûr différemment structurés : ces systèmes économiques sont à première vue plus embrouillés, plus intriqués, plus difficiles à analyser, mais, nous l'espérons, aussi propices à étudier que ceux que nous avons vu dans ce mémoire.

Un pas de côté

Enfin, nous souhaitons mentionner que les automates cellulaires et les systèmes complexes sont également des objets qui peuvent donner lieu à de nombreuses réflexions qui dépassent le strict cadre scientifique [92]. Nous avons pu ainsi au cours des dernières années développer quelques éléments sur l'œuvre de Turing [74, 82], sur les mathématiques [84], sur la question de l'intelligence artificielle [88] ou même proposer une vue esthétique de nos diagrammes espace-temps probabilistes [80]. Il va sans dire que ce travail devra être poursuivi, et même accentué, car c'est au fond tout l'à côté des sciences qui donne son sens à l'activité scientifique.

30. <https://www.inria.fr/fr/murene>

Bibliographie

- [1] Nazim FATÈS. “Robustesse de la dynamique des systèmes discrets : le cas de l’asynchronisme dans les automates cellulaires”. Thèse de doct. École normale supérieure de Lyon, 2004.
- [2] Guillermo ABRAMSON et Damián H. ZANETTE. “Globally coupled maps with asynchronous updating”. In : *Physical Review E* 58 (4 1998), p. 4454-4460. DOI : 10 . 1103 / PhysRevE . 58 . 4454.
- [3] Susumu ADACHI, Ferdinand PEPPER et Jia LEE. “Computation by asynchronously updating cellular automata”. In : *Journal of Statistical Physics* 114.1-2 (2004), p. 261-289.
- [4] Susumu ADACHI, Ferdinand PEPPER et Jia LEE. “Universality of Hexagonal Asynchronous Totalistic Cellular Automata”. In : *Proceedings of ACRI’04*. Sous la dir. de Peter SLOOT, Bastien CHOPARD et Alfons HOEKSTRA. T. 3305. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2004, p. 91-100. DOI : 10 . 1007 / 978 - 3 - 540 - 30479 - 1_10.
- [5] Alexandru AGAPIE, Robins HÖNS et Heinz MÜHLENBEIN. “Markov Chain Analysis for One-Dimensional Asynchronous Cellular Automata (Kluwer Academic Publishers)”. In : *Methodology And Computing In Applied Probability* 6.21 (2004), p. 181-201. DOI : 10 . 1023/B:MCA P . 0000017712 . 55431 . 96.
- [6] Pankaj AGARWAL. “Simulation of aggregation in *Dictyostelium* using the Cell programming language”. In : *Computer Applications in the Biosciences* 10.6 (1994), p. 647-655.
- [7] Jean-Paul ALLOUCHE et Christine REDER. “Oscillations spatio-temporelles engendrées par un automate cellulaire”. In : *Discrete Applied Mathematics* 8.3 (1984), p. 215-254. DOI : 10 . 1016/0166-218X(84)90122-7.
- [8] Ramón ALONSO-SANZ et Larry BULL. “A very effective density classifier two-dimensional cellular automaton with memory”. In : *Journal of Physics A* 42 (2009), p. 485101.
- [9] Massimo AMATO, Nazim FATÈS et Lucio GOBBI. *The economics and algorithmics of an integral settlement procedure on B2B network*. Preprint SSRN. 2021. DOI : 10 . 2139/ssrn . 3915380.
- [10] S. AMOROSO et Y. N. PATT. “Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures”. In : *Journal of Computer and System Sciences* 6 (1972), p. 448-464.
- [11] H. ANDO, Y. OASA, I. SUZUKI et M. YAMASHITA. “Distributed memoryless point convergence algorithm for mobile robots with limited visibility”. In : *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 15.5 (1999), p. 818-828. DOI : 10 . 1109/70 . 795787.

- [12] Julio ARACENA, Eric GOLES, Andrés MOREIRA et Lilian SALINAS. "On the robustness of update schedules in Boolean networks". In : *Biosystems* 97.1 (2009), p. 1-8. DOI : 10.1016/j.biosystems.2009.03.006.
- [13] Pablo ARRIGHI, Nicolas SCHABANEL et Guillaume THEYSSIER. "Stochastic Cellular Automata : Correlations, Decidability and Simulations". In : *Fundamenta Informaticae* 126.2-3 (2013), p. 121-156. DOI : 10.3233/FI-2013-875.
- [14] Jan M. BAETENS, Pieter VAN DER WEEËN et Bernard DE BAETS. "Effect of asynchronous updating on the stability of cellular automata". In : *Chaos, Solitons & Fractals* 45.4 (2012), p. 383-394. DOI : 10.1016/j.chaos.2012.01.002.
- [15] Franco BAGNOLI et Raúl RECHTMAN. "Synchronization and maximum Lyapunov exponents of cellular automata". In : *Physical Review E* 59.2 (1999), R1307.
- [16] Stefania BANDINI, Andrea BONOMI et Giuseppe VIZZARI. "An analysis of different types and effects of asynchronicity in cellular automata update schemes". In : *Natural Computing* 11.2 (2012), p. 277-287. DOI : 10.1007/s11047-012-9310-4.
- [17] Anouk BARBEROUSSE et Cyrille IMBERT. "New Mathematics for Old Physics : The Case of Lattice Fluids". In : *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 44.3 (2013), p. 231-241. DOI : 10.1016/j.shpsb.2013.03.003.
- [18] Hamid BEIGY et M.R. MEYBODI. "Asynchronous cellular learning automata". In : *Automatica* 44.5 (2008), p. 1350-1357. DOI : 10.1016/j.automatica.2007.09.018.
- [19] Selma BELGACEM et Nazim FATÈS. "Robustness of multi-agent models : the example of collaboration between turmites with synchronous and asynchronous updating". In : *Complex Systems* 21.3 (2012), p. 165-182. URL : http://www.complex-systems.com/abstracts/v21_i03_a01.html.
- [20] Florence BÉNÉZIT. "Distributed average consensus for wireless sensor networks". Thèse de doct. Lausanne : EPFL, 2009. DOI : 10.5075/epfl-thesis-4509.
- [21] Hugues BERRY et Nazim FATÈS. "Robustness of the Critical Behaviour in the Stochastic Greenberg-Hastings Cellular Automaton Model". In : *International Journal of Unconventional Computing* 7.1-2 (2011), p. 65-85. URL : <http://www.oldcitypublishing.com/IJUC/IJUCabstracts/IJUC7.1-2abstracts/IJUCv7n1-2p65-85Berry.html>.
- [22] Hugues BERSINI et Vincent DETOURS. "Asynchrony Induces Stability in Cellular Automata Based Models". In : *Proceedings of the 4th International Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems ArtificialLifeIV*. Sous la dir. de Rodney A. BROOKS et Pattie MAES. MIT Press, 1994, p. 382-387.
- [23] Olivier BEURET et Marco TOMASSINI. "Behaviour of multiple generalized Langton's ants". In : *Proceeding of the Artificial Life V Conference*. Sous la dir. de C. LANGTON et K. SHIMOHARA. Nava, Japan : MIT Press, 1998, p. 45-50.
- [24] Hendrik J. BLOK et Birger BERGERSEN. "Synchronous versus Asynchronous Updating in the "game of Life"". In : *Physical Review E* 59 (1999), p. 3876-9.
- [25] Jean-Pierre BOON. "How Fast Does Langton's Ant Move?" In : *Journal of Statistical Physics* 102 (2001), p. 355-360.

- [26] Olivier BOURÉ. “« Le simple est-il robuste? » : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires”. Thèse de doct. Université de Lorraine, 2013. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00918545>.
- [27] Olivier BOURÉ, Nazim FATÈS et Vincent CHEVRIER. “Robustness of Cellular Automata in the Light of Asynchronous Information Transmission”. In : *Proceedings of Unconventional Computation 2011*. Sous la dir. de Cristian CALUDE, Jarkko KARI, Ion PETRE et Grzegorz ROZENBERG. T. 6714. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2011, p. 52-63. DOI : 10.1007/978-3-642-21341-0.
- [28] Olivier BOURÉ, Nazim FATÈS et Vincent CHEVRIER. “Probing robustness of cellular automata through variations of asynchronous updating”. In : *Natural Computing* 11 (2012), p. 553-564. DOI : 10.1007/s11047-012-9340-y.
- [29] Olivier BOURÉ, Nazim FATÈS et Vincent CHEVRIER. “A Robustness Approach to Study Metastable Behaviours in a Lattice-Gas Model of Swarming”. In : *Proceedings of Automata'13*. Sous la dir. de Jarkko KARI, Martin KUTRIB et Andreas MALCHER. T. 8155. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, p. 84-97. DOI : 10.1007/978-3-642-40867-0_6.
- [30] Olivier BOURÉ, Nazim FATÈS et Vincent CHEVRIER. “First steps on asynchronous lattice-gas models with an application to a swarming rule”. In : *Natural Computing* 12.4 (2013), p. 551-560. DOI : 10.1007/s11047-013-9389-2.
- [31] Raimundo BRICEÑO, Pablo MOISSET DE ESPANÉS, Axel OSSES et Ivan RAPAPORT. “Solving the density classification problem with a large diffusion and small amplification cellular automaton”. In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 261 (2013), p. 70-80. DOI : 10.1016/j.physd.2013.07.002.
- [32] Simon Ralph BROADBENT et John Michael HAMMERSLEY. “Percolation Processes I. Crystals and Mazes”. In : *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 53.3 (1957), p. 629-641.
- [33] Leonid A. BUNIMOVICH et Serge E. TROUBETZKOY. “Recurrence properties of Lorentz lattice gas cellular automata”. In : *Journal of Statistical Physics* 67 (1992), p. 289-302. DOI : 10.1007/BF01049035.
- [34] Ana BUŠIĆ, Nazim FATÈS, Jean MAIRESSE et Irène MARCOVICI. “Density Classification on Infinite Lattices and Trees”. In : *Proceedings of LATIN 2012 : Theoretical Informatics*. Sous la dir. de David FERNÁNDEZ-BACA. T. 7256. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2012, p. 109-120. DOI : 10.1007/978-3-642-29344-3_10.
- [35] Ana BUŠIĆ, Nazim FATÈS, Jean MAIRESSE et Irène MARCOVICI. “Density classification on infinite lattices and trees”. In : *Electronic Journal of Probability* 18.51 (2013), p. 1-22. DOI : 10.1214/EJP.v18-2325.
- [36] Harmen J. BUSSEMAKER, Andreas DEUTSCH et Edith GEIGANT. “Mean-Field Analysis of a Dynamical Phase Transition in a Cellular Automaton Model for Collective Motion”. In : *Physical Review Letters* 78.26 (1997), p. 5018-5021. DOI : 10.1103/PhysRevLett.78.5018.
- [37] BUVEL, R.L. et INGERSON, T.E. “Structure in Asynchronous Cellular Automata”. In : *Physica D* 1 (1984), p. 59-68.
- [38] Stephen WOLFRAM. “Universality and Complexity in Cellular Automata”. In : *Physica D* 10 (1984), p. 1-35.

- [39] Daniel CAGIGAS-MUÑIZ, Fernando DIAZ-DEL-RIO, Jose Luis SEVILLANO-RAMOS et Jose-Luis GUISSADO-LIZAR. "Efficient simulation execution of cellular automata on GPU". In : *Simulation Modelling Practice and Theory* (2022), p. 102519. DOI : 10 . 1016 / j . simpat . 2022 . 102519.
- [40] Mathieu CAPCARRERE. "Evolution of Asynchronous Cellular Automata". In : *Proceedings of Parallel Problem Solving from Nature — PPSN VII*. Sous la dir. de Juan Julián Merelo GUERVÓS, Panagiotis ADAMIDIS, Hans-Georg BEYER, Hans-Paul SCHWEFEL et José-Luis FERNÁNDEZ-VILLACAÑAS. T. 2439. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2002, p. 903-912. DOI : 10 . 1007 / 3 - 540 - 45712 - 7 _ 87.
- [41] Mathieu S. CAPCARRERE, Moshe SIPPER et Marco TOMASSINI. "Two-state, $r = 1$ Cellular Automaton that Classifies Density". In : *Phys. Rev. Lett.* 77.24 (1996), p. 4969-4971.
- [42] Geoffrey CARON-LORMIER, Roger W. HUMPHRY, David A. BOHAN, Cathy HAWES et Pernille THORBEEK. "Asynchronous and synchronous updating in individual-based models". In : *Ecological Modelling* 212.3-4 (2008), p. 522-527. DOI : 10 . 1016 / j . ecolmodel . 2007 . 10 . 049.
- [43] Bernadette CHARRON-BOST et Patrick LAMBEIN-MONETTE. "Randomization and quantization for average consensus". In : *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2018, p. 3716-3721.
- [44] Philippe CHASSAING et Lucas GERIN. "Asynchronous cellular automata and brownian motion". In : *DMTCS Proceedings of AofA'07*. T. AH. 2007, p. 385-402. URL : <http://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/article/viewArticle/dmAH0129>.
- [45] Vincent CHEVRIER et Nazim FATÈS. *Multi-agent Systems as Discrete Dynamical Systems : Influences and Reactions as a Modelling Principle*. Rapp. tech. <http://hal.inria.fr/inria-00345954>. INRIA - LORIA, 2009.
- [46] Vincent CHEVRIER et Nazim FATÈS. "How important are updating schemes in multi-agent systems? An illustration on a multi-turmite model". In : *Proceedings of AAMAS '10*. Richland, SC : International Foundation for Autonomous Agents et Multiagent Systems, 2010, p. 533-540. DOI : 10 . 1145 / 1838206 . 1838282.
- [47] Bastien CHOPARD et Michel DROZ. *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press, 1998.
- [48] Emilio N. M. CIRILLO, Francesca R. NARDI et Cristian SPITONI. "Basic Ideas to Approach Metastability in Probabilistic Cellular Automata". In : *Probabilistic Cellular Automata : Theory, Applications and Future Perspectives*. Sous la dir. de Pierre-Yves LOUIS et Francesca R. NARDI. Springer, 2018, p. 37-51. DOI : 10 . 1007 / 978 - 3 - 319 - 65558 - 1 _ 3.
- [49] Kenneth W. COMER. "Who Goes First? An Examination of the Impact of Activation on Outcome Behavior in Agent-based Models". Thèse de doct. George Mason University, Fairfax, Virginia, USA, 2014.
- [50] Mauro COPELLI et Paulo R. A. CAMPOS. "Excitable scale free networks". In : *European Physics Journal B* 56.3 (2007), p. 271-278. DOI : 10 . 1140 / epjb / e2007 - 00114 - 7.
- [51] Robert CORI, Yves MÉTIVIER et Wieslaw ZIELONKA. "Asynchronous Mappings and Asynchronous Cellular Automata". In : *Information and Computation* 106.2 (1993), p. 159-202. DOI : 10 . 1006 / inco . 1993 . 1052.

- [52] David CORNFORTH, David G. GREEN et David NEWTH. "Ordered asynchronous processes in multi-agent systems". In : *Physica D* 204.1-2 (2005), p. 70-82. DOI : 10.1016/j.physd.2005.04.005.
- [53] Christian DARABOS, Mario GIACOBINI et Marco TOMASSINI. "Scale-Free Automata Networks Are Not Robust in a Collective Computational Task". In : *Cellular Automata*. Sous la dir. de Samira EL YACOUBI, Bastien CHOPARD et Stefania BANDINI. T. 4173. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin / Heidelberg, 2006, p. 512-521.
- [54] Rajarshi DAS, James P. CRUTCHFIELD, Melanie MITCHELL et James E. HANSON. "Evolving Globally Synchronized Cellular Automata". In : *Proceedings of 6th ICGA*. San Francisco, USA : Morgan Kaufmann, 1995, p. 336-343.
- [55] Jacques DEMONGEOT, Eric GOLES, Michel MORVAN, Mathilde NOUAL et Sylvain SENÉ. "Attraction Basins as Gauges of Robustness against Boundary Conditions in Biological Complex Systems". In : *PLoS One* 5.8 (2010), e11793. DOI : 10.1371/journal.pone.0011793.
- [56] Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI et Luca MANZONI. "Computing Issues of Asynchronous CA". In : *Fundamenta Informaticae* 120.2 (2012), p. 165-180. DOI : 10.3233/FI-2012-755.
- [57] Alberto DENNUNZIO, Enrico FORMENTI, Luca MANZONI et Giancarlo MAURI. "m-Asynchronous cellular automata : from fairness to quasi-fairness". In : *Natural Computing* 12.4 (2013), p. 561-572. DOI : 10.1007/s11047-013-9386-5.
- [58] Andreas DEUTSCH. "Orientation-induced pattern formation : swarm dynamics in a lattice-gas automaton model". In : *International Journal of Bifurcation and Chaos* 06.09 (1996), p. 1735-1752. DOI : 10.1142/S0218127496001077.
- [59] Andreas DEUTSCH et Sabine DORMANN. *Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation Characterization, Applications, and Analysis*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Second edition. Birkhäuser Basel, 2017. DOI : 10.1007/978-1-4899-7980-3.
- [60] Alexander K. DEWDNEY. "Two-dimensional Turing machines and turmites make tracks on a plane, Computer Recreations". In : *Scientific American* (sept. 1989), p. 180-182.
- [61] Nobutaka DOBA. "The Time Evolution of a Greenberg-Hastings Cellular Automaton on a Finite Graph". In : *Complex Systems* 27 (juin 2018), p. 101-126. DOI : 10.25088/ComplexSystems.27.2.101.
- [62] Eytan DOMANY et Wolfgang KINZEL. "Equivalence of cellular automata to Ising models and directed Percolation". In : *Physical Review Letters* 53 (1984), p. 311-314.
- [63] Manfred DROSTE et Paul GASTIN. "Asynchronous cellular automata for pomsets without auto-concurrency". In : *Proceedings of CONCUR'96*. Sous la dir. d'Ugo MONTANARI et Vladimiro SASSONE. T. 1119. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1996, p. 627-638. DOI : 10.1007/3-540-61604-7_80.
- [64] Manfred DROSTE, Paul GASTIN et Dietrich KUSKE. "Asynchronous cellular automata for pomsets". In : *Theoretical Computer Science* 247.1-2 (2000), p. 1-38. DOI : 10.1016/S0304-3975(00)00166-3.

- [65] Adam DZEDZEJ, Barbara WOLNIK, Anna NENCA, Jan M. BAETENS et Bernard DE BAETS. "Efficient enumeration of three-state two-dimensional number-conserving cellular automata". In : *Information and Computation* 274 (2020), p. 104534. DOI : 10.1016/j.ic.2020.104534.
- [66] L. O. FADIEIEVA, I. Ye. MAKARENKO et P. V. MERZLYKIN. "The turmite-based cryptographic algorithm". In : *Journal of Physics : Conference Series* 1840.1 (2021), p. 012019. DOI : 10.1088/1742-6596/1840/1/012019.
- [67] Nazim FATÈS. "Experimental study of elementary cellular automata dynamics using the density parameter". In : *Discrete models for complex systems, DMCS '03 (Lyon)*. Proceedings of Discrete Mathematics Theoretical Computer Science AB. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2003, p. 155-165.
- [68] Nazim FATÈS. "Asynchronism Induces Second Order Phase Transitions in Elementary Cellular Automata". In : *Journal of Cellular Automata* 4.1 (2009), p. 21-38. URL : <http://hal.inria.fr/inria-00138051>.
- [69] Nazim FATÈS. "Critical phenomena in cellular automata : perturbing the update, the transitions, the topology". In : *Acta Physica Polonica B - Proceedings Supplement* 3.2 (2010), p. 315-325. URL : <http://www.actaphys.uj.edu.pl/sup3/abs/s3p0315.htm>.
- [70] Nazim FATÈS. "Does *Life* Resist Asynchrony?" In : *Game of Life Cellular Automata*. Sous la dir. d'Andrew ADAMATZKY. Springer London, 2010, p. 257-274. DOI : 10.1007/978-1-84996-217-9_14.
- [71] Nazim FATÈS. "Solving the decentralised gathering problem with a reaction-diffusion-chemotaxis scheme — Social amoebae as a source of inspiration". In : *Swarm Intelligence* 4.2 (2010), p. 91-115. DOI : 10.1007/s11721-010-0038-4.
- [72] Nazim FATÈS. "Stochastic Cellular Automata Solve the Density Classification Problem with an Arbitrary Precision". In : *28th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2011)*. Sous la dir. de Thomas SCHWENTICK et Christoph DÜRR. T. 9. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2011, p. 284-295.
- [73] Nazim FATÈS. "A note on the Density Classification Problem in Two Dimensions". In : *Exploratory papers presented at Automata 2012*. La Marana, Corse, France, 2012. URL : <http://hal.inria.fr/hal-00727558>.
- [74] Nazim FATÈS. "Turing et la dimension ontologique du jeu". In : *Philosophia Scientiæ* 16-3 (2012), p. 7-16. DOI : 10.4000/philosophiascientiae.763.
- [75] Nazim FATÈS. "A Note on the Classification of the Most Simple Asynchronous Cellular Automata". In : *Proceedings of Automata'13*. Sous la dir. de Jarkko KARI, Martin KUTRIB et Andreas MALCHER. T. 8155. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, p. 31-45. DOI : 10.1007/978-3-642-40867-0_3.
- [76] Nazim FATÈS. "Stochastic Cellular Automata Solutions to the Density Classification Problem - When Randomness Helps Computing". In : *Theory of Computing Systems* 53.2 (2013), p. 223-242. DOI : 10.1007/s00224-012-9386-3.
- [77] Nazim FATÈS. "A guided tour of asynchronous cellular automata". In : *Journal of Cellular Automata* 9.5-6 (2014), p. 387-416.

- [78] Nazim FATÈS. "Quick Convergence to a Fixed Point : A Note on Asynchronous Elementary Cellular Automata". In : *Proceedings of ACRI'14*. Sous la dir. de Jarosław WAS, Georgios Ch. SIRAKOULIS et Stefania BANDINI. T. 8751. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2014, p. 586-595. DOI : 10.1007/978-3-319-11520-7_62.
- [79] Nazim FATÈS. "Remarks on the Cellular Automaton Global Synchronisation Problem". In : *Proceedings of AUTOMATA 2015*. Sous la dir. de Jarkko KARI. T. 9099. Lecture Notes in Computer Science. extended version available on <https://members.loria.fr/nazim.fates/dwnld/submitted-GlobalSynchProblem-Fates17.pdf>. Springer, 2015, p. 113-126. DOI : 10.1007/978-3-662-47221-7_9.
- [80] Nazim FATÈS. "Aesthetics and Randomness in Cellular Automata". In : *Designing Beauty: The Art of Cellular Automata*. Sous la dir. d'Andrew ADAMATZKY et Genaro MARTÍNEZ. Springer, 2016, p. 137-139. DOI : 10.1007/978-3-319-27270-2_23.
- [81] Nazim FATÈS. "Collective Infotaxis with Reactive Amoebae : A Note on a Simple Bio-inspired Mechanism". In : *Proceedings of ACRI 2016 – 12th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*. Sous la dir. de Samira EL YACOUBI, Jarosław WAS et Stefania BANDINI. Springer International Publishing, 2016, p. 157-165.
- [82] Nazim FATÈS. « Théoréo, je vois! » – *Lettres à Turing*. Jean-Marc Lévy-Leblond (dir.) Ed. Thierry Marchaisse, 2016.
- [83] Nazim FATÈS. "Diploid Cellular Automata : First Experiments on the Random Mixtures of Two Elementary Rules". In : *Proceedings of AUTOMATA 2017 – Cellular Automata and Discrete Complex Systems - 23rd IFIP WG 1.5 International Workshop*. Sous la dir. d'Alberto Dennunzio et AL. T. 10248. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2017, p. 97-108. DOI : 10.1007/978-3-319-58631-1_8.
- [84] Nazim FATÈS. "Le dire mathématique". In : *Images des mathématiques* (2017). Publ. en ligne : <https://images.math.cnrs.fr/Le-dire-mathematique.html>.
- [85] Nazim FATÈS. "Asynchronous Cellular Automata". In : *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2018, p. 1-21. DOI : 10.1007/978-3-642-27737-5_671-2.
- [86] Nazim FATÈS. "Remarks on the cellular automaton global synchronisation problem : deterministic versus stochastic models". In : *Natural Computing* 18.3 (2019), p. 429-444.
- [87] Nazim FATÈS. "A tutorial on elementary cellular automata with fully asynchronous updating". In : *Natural Computing* 19 (2020), p. 179-197. DOI : 10.1007/s11047-020-09782-7.
- [88] Nazim FATÈS. "Le temps passe-t-il pour l'intelligence artificielle?" In : *The conversation* (2021). Publ. en ligne : <https://theconversation.com/le-temps-passe-t-il-pour-lintelligence-artificielle-162291>.
- [89] Nazim FATÈS. *An asynchronous cellular system that solves the parity problem*. Rapp. tech. Inria Nancy Grand-Est, 2022. URL : <https://hal.inria.fr/hal-03894581>.
- [90] Nazim FATÈS, Vincent CHEVRIER et Olivier BOURÉ. "A Trade-Off Between Simplicity and Robustness? Illustration on a Lattice-Gas Model of Swarming". In : *Probabilistic Cellular Automata : Theory, Applications and Future Perspectives*. Sous la dir. de Pierre-Yves LOUIS et Francesca R. NARDI. Springer, 2018, p. 239-259. DOI : 10.1007/978-3-319-65558-1_16.

- [91] Nazim FATÈS et Lucas GERIN. "Examples of Fast and Slow Convergence of 2D Asynchronous Cellular Systems". In : *Journal of Cellular Automata* 4.4 (2009), p. 323-337.
- [92] Nazim FATÈS et Irène MARCOVICI. "Automates cellulaires : la complexité dans les règles de l'art". In : *La Recherche* (juil. 2018). Réédition après changements mineurs dans le numéro spécial 31 en 2019., p. 67-71. URL : <https://www.larecherche.fr/automates-cellulaires-la-complexite-dans-les-regles-de-lart>.
- [93] Nazim FATÈS, Irène MARCOVICI et Siamak TAATI. "Two-Dimensional Traffic Rules and the Density Classification Problem". In : *Proceedings fo AUTOMATA 2016 – 22nd IFIP WG 1.5 International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. Sous la dir. de Matthew COOK et Turlough NEARY. T. 9664. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2016, p. 135-148. DOI : 10.1007/978-3-319-39300-1_11.
- [94] Nazim FATÈS, Irène MARCOVICI et Siamak TAATI. "Cellular Automata for the Self-stabilisation of Colourings and Tilings". In : *Proceedings of Reachability Problems – 13th International Conference, RP 2019*. Sous la dir. d'Emmanuel FILIOT, Raphaël M. JUNGERS et Igor POTAPOV. T. 11674. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2019, p. 121-136. DOI : 10.1007/978-3-030-30806-3_10.
- [95] Nazim FATÈS, Irène MARCOVICI et Siamak TAATI. "Self-stabilisation of cellular automata on tilings". In : *Fundamenta Informaticae* 185-1 (2022). URL : <https://fi.episciences.org/9184>.
- [96] Nazim FATÈS et Michel MORVAN. "An Experimental Study of Robustness to Asynchronism for Elementary Cellular Automata". In : *Complex Systems* 16 (2005), p. 1-27.
- [97] Nazim FATÈS, Michel MORVAN, Nicolas SCHABANEL et Eric THIERRY. "Fully asynchronous behavior of double-quiescent elementary cellular automata". In : *Theoretical Computer Science* 362 (2006), p. 1-16. DOI : 10.1016/j.tcs.2006.05.036.
- [98] Nazim FATÈS, Damien REGNAULT, Nicolas SCHABANEL et Eric THIERRY. "Asynchronous Behavior of Double-Quiescent Elementary Cellular Automata." In : *Proceedings of LATIN 2006*. Sous la dir. de José R. CORREA, Alejandro HEVIA et Marcos A. KIWI. T. 3887. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2006, p. 455-466. DOI : 10.1007/11682462_43.
- [99] Nazim FATÈS, Biswanath SETHI et Sukanta DAS. "On the Reversibility of ECAs with Fully Asynchronous Updating : The Recurrence Point of View". In : *Reversibility and Unioersality, Essays Presented to Kenichi Morita on the Occasion of his 70th Birthday*. Sous la dir. d'Andrew ADAMATZKY. T. 30. Emergence, Complexity and Computation. Springer, 2018, p. 313-332. DOI : 10.1007/978-3-319-73216-9.
- [100] Nazim FATÈS et Nikolaos VLASSOPOULOS. "A Robust Scheme for Aggregating Quasi-Blind Robots in an Active Environment". In : *International Journal of Swarm Intelligence Research* 3.3 (2012), p. 66-80. DOI : 10.4018/jsir.2012070105.
- [101] Li-Juan FEI, Jia LEE, Xin HUANG et Ferdinand PEPPER. "Effect of random fluctuations on minimizing the complexity of universal asynchronous cellular automata". In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 428 (2021), p. 133052. DOI : 10.1016/j.physd.2021.133052.
- [102] Jacques FERBER et Jean-Pierre MÜLLER. "Influences and Reaction : a Model of Situated Multiagent Systems". In : *Proceedings of the 2nd International Conference on Multi-agent Systems*. 1996, p. 72-79.

- [103] Robert FISCH, Janko GRAVNER et David GRIFFEATH. "Metastability in the Greenberg-Hastings model". In : *The Annals of Applied Probability* 3.4 (1993), p. 935-967.
- [104] Paola FLOCCHINI, Giuseppe PRENCIPE et Nicola SANTORO. *Distributed Computing by Oblivious Mobile Robots*. 1st. Morgan & Claypool Publishers, 2012.
- [105] Paola FLOCCHINI, Giuseppe PRENCIPE, Nicola SANTORO et Peter WIDMAYER. "Gathering of asynchronous robots with limited visibility". In : *Theoretical Computer Science* 337.1-3 (2005), p. 147-168. DOI : 10.1016/j.tcs.2005.01.001.
- [106] Enrico FORMENTI. "A Survey on m-Asynchronous Cellular Automata". In : *Proceedings of Automata'13*. Sous la dir. de Jarkko KARI, Martin KUTRIB et Andreas MALCHER. T. 8155. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, p. 46-66. DOI : 10.1007/978-3-642-40867-0.
- [107] Jordina FRANCÈS DE MAS. "Coalescence in fully asynchronous elementary cellular automata". HAL 01627454. Mém. de mast. Université de Lorraine (Nancy), 2017. URL : <https://hal.inria.fr/hal-01627454>.
- [108] Benjamin FRIEDRICH. "Hydrodynamic synchronization of flagellar oscillators". In : *The European Physical Journal Special Topics* 225.11 (2016), p. 2353-2368. DOI : 10.1140/epjst/e2016-60056-4.
- [109] Henryk FUKŚ. "Solution of the density classification problem with two cellular automata rules". In : *Physical Review E* 55.3 (mar. 1997), R2081-R2084. DOI : 10.1103/PhysRevE.55.R2081.
- [110] Henryk FUKŚ. "Nondeterministic density classification with diffusive probabilistic cellular automata". In : *Physical Review E* 66.6 (2002), p. 066106. DOI : 10.1103/PhysRevE.66.066106.
- [111] Henryk FUKŚ et Nazim FATÈS. "Bifurcations of local structure maps as predictors of phase transitions in asynchronous cellular automata". In : *Proceedings of ACRI'14*. Sous la dir. de Jarosław WAS, Georgios Ch. SIRAKOULIS et Stefania BANDINI. T. 8751. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2014, p. 556-560. DOI : 10.1007/978-3-319-11520-7_58.
- [112] Henryk FUKŚ et Roman PROCYK. "Explorations of ternary cellular automata and ternary density classification problems". In : *Acta Physica Polonica B – Proceedings Supplement* 12.1 (2019). arXiv :2002.08924, p. 75-89.
- [113] Henryk FUKŚ et Andrew SKELTON. "Orbits of the Bernoulli measure in single-transition asynchronous cellular automata". In : *Proceedings of Automata'11*. Sous la dir. de Nazim FATÈS, Eric GOLES, Alejandro MAASS et Ivan RAPAPORT. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings. DMTCS, 2011, p. 95-112. URL : <http://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/article/view/dmAP0107>.
- [114] Péter GÁCS. "Deterministic computations whose history is independent of the order of asynchronous updating". In : *Arxiv CoRR cs.DC/0101026* (2001). URL : <http://arxiv.org/abs/cs.DC/0101026>.
- [115] Peter GÁCS, Georgii L. KURDIUMOV et Leonid A. LEVIN. "One-Dimensional Homogeneous Media Dissolving Finite Islands". In : *Problemy Peredachi Informatsii* 14 (1987), p. 92-98.

- [116] Anahí GAJARDO et Eric GOLES. "Dynamics of a class of ants on a one-dimensional lattice". In : *Theoretical Computer Science* 322.2 (2004), p. 267-283. DOI : 10.1016/j.tcs.2004.03.012.
- [117] Anahí GAJARDO, Eric GOLES et Andrés MOREIRA. "Generalized Langton's Ant : Dynamical Behavior and Complexity". In : *Proceedings of STACS 2001*. Sous la dir. d'Afonso FERREIRA et Horst REICHEL. T. 2010. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2001, p. 259-270.
- [118] Anahí GAJARDO, Eric GOLES et Andrés MOREIRA. "Complexity of Langton's ant". In : *Discrete Applied Mathematics* 117.1-3 (2002), p. 41-50.
- [119] David GALE, Jim PROPP, Scott SUTHERLAND et Serge TROUBETZKOY. "Further Travels with My Ant". In : *Mathematical Entertainments column, Mathematical Intelligencer* 17 (1995), p. 48-56.
- [120] Simon GARNIER, Maud COMBE, Christian JOST et Guy THERAULAZ. "Do Ants Need to Estimate the Geometrical Properties of Trail Bifurcations to Find an Efficient Route? A Swarm Robotics Test Bed". In : *PLOS Computational Biology* 9.3 (mar. 2013), p. 1-12. DOI : 10.1371/journal.pcbi.1002903.
- [121] Melvin GAUCI. "Swarm Robotic Systems with Minimal Information Processing". Thèse de doct. UK : The University of Sheffield, 2014. URL : <http://etheses.whiterose.ac.uk/7569/>.
- [122] Nicolas GAUVILLE, Nazim FATÈS et Irène MARCOVICI. "Diagnostic décentralisé à l'aide d'automates cellulaires". In : *Actes des JFSMA 2019 - 27emes Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents*. ISBN 9782364937192. Toulouse, France : Cépaduès, 2019, p. 96-105. URL : <https://hal.inria.fr/hal-02195799>.
- [123] Reza GHARAVI et Venkat ANANTHARAM. "Effect of Noise on Long-term Memory in Cellular Automata with Asynchronous Delays between the Processors". In : *Complex Systems* 6.3 (1992), p. 287-300. URL : http://www.complex-systems.com/abstracts/v06_i03_a05.html.
- [124] Ulrich GOLZE. "(A-)synchronous (non-)deterministic cell spaces simulating each other". In : *Journal of Computer and System Sciences* 17.2 (1978), p. 176-193.
- [125] J. M. GREENBERG, B. D. HASSARD et S. P. HASTINGS. "Pattern formation and periodic structures in systems modeled by reaction-diffusion equations". In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 84.6 (1978), p. 1296-1327.
- [126] Carlos GRILO et Luís CORREIA. "Effects of asynchronism on evolutionary games". In : *Journal of Theoretical Biology* 269.1 (2011), p. 109-122. DOI : 10.1016/j.jtbi.2010.10.022.
- [127] Yukio GUNJI. "Pigment color patterns of molluscs as an autonomous process generated by asynchronous automata". In : *Biosystems* 23.4 (1990), p. 317-334. DOI : 10.1016/0303-2647(90)90014-R.
- [128] Howard A GUTOWITZ, Jonathan D VICTOR et Bruce W KNIGHT. "Local structure theory for cellular automata". In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 28.1-2 (1987), p. 18-48.

- [129] Masami HAGIYA, Koichi TAKAHASHI, Mitsuharu YAMAMOTO et Takahiro SATO. "Analysis of Synchronous and Asynchronous Cellular Automata Using Abstraction by Temporal Logic". In : *Proceedings of FLOPS'04 : Functional and Logic Programming*. Sous la dir. d'Yukiyoshi KAMEYAMA et Peter STUCKEY. T. 2998. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2004, p. 7-21. DOI : 10.1007/978-3-540-24754-8_2.
- [130] Julia HANDL et Bernd MEYER. "Ant-based and swarm-based clustering". In : *Swarm Intelligence 1.2* (2007), p. 95-113.
- [131] Thomas HILLEN et Kevin J. PAINTER. "A user's guide to PDE models for chemotaxis". In : *Journal of Mathematical Biology* 58 (2009), p. 183-217.
- [132] Håge HINRICHSSEN. "Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing States". In : *Advances in Physics* 49 (2000), p. 815-958.
- [133] Jörg HOFFMANN, Nazim FATÈS et Héctor PALACIOS. "Brothers in Arms? On AI Planning and Cellular Automata". In : *Proceedings of ECAI 2010*. Sous la dir. d'Helder COELHO, Rudi STUDER et Michael WOOLDRIDGE. T. 215. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. IOS Press, 2010, p. 223-228. URL : <http://www.booksonline.iospress.nl/Content/View.aspx?piid=17702>.
- [134] Taiga HONGU et Masami HAGIYA. "Self-stabilizing distributed algorithms by gellular automata". In : *Proceedings of AUTOMATA 2020*. Sous la dir. d'Hector ZENIL. Springer, 2020, p. 86-98.
- [135] Xin HUANG, Jia LEE, Tian-Hao SUN et Ferdinand PEPPER. "Self-adaptive self-reproductions in cellular automata". In : *Physica D* 263 (2013), p. 11-20. DOI : 10.1016/j.physd.2013.07.012.
- [136] Bernardo A. HUBERMAN et Natalie GLANCE. "Evolutionary games and computer simulations". In : *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA* 90 (1993), p. 7716-7718.
- [137] Gabriel ISTRATE. "Stochastic Stability in Schelling's Segregation Model with Markovian Asynchronous Update". In : *Proceedings of ACRI 2018*. Sous la dir. de Giancarlo MAURI, Samira EL YACOUBI, Alberto DENNUNZIO, Katsuhiko NISHINARI et Luca MANZONI. T. 11115. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2018, p. 416-427. DOI : 10.1007/978-3-319-99813-8_38.
- [138] Yasusi KANADA. "The Effects of Randomness in Asynchronous 1D Cellular Automata (Poster)". In : *Artificial Life IV* (1994). URL : <http://www.kanadas.com/CA/AsyncCA/AsyncCAext.pdf>.
- [139] Jarkko KARI. "Theory of cellular automata : A survey". In : *Theoretical Computer Science* 334.1-3 (2005), p. 3-33. DOI : 10.1016/j.tcs.2004.11.021.
- [140] Evelyn F. KELLER et Lee A. SEGEL. "Travelling Bands of Chemotactic Bacteria : A Theoretical Analysis". In : *Journal of Theoretical Biology* 30.2 (1971), p. 235-248.
- [141] Wolfgang KINZEL. "Directed Percolation". In : *Percolation Structures and Processes*. Sous la dir. de R. Zallen G. DEUTSCHER et J. ADLER. Bristol : Adam Hilger Pub. Co., 1983, p. 425.
- [142] Petr KURKA. "Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata". In : *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 17.2 (1997), p. 417-433. DOI : 10.1017/S014338579706985X.
- [143] Ingo KUSCH et Mario MARKUS. "Mollusc Shell Pigmentation : Cellular Automaton Simulations and Evidence for Undecidability". In : *Journal of Theoretical Biology* 178.3 (1996), p. 333-340. DOI : 10.1006/jtbi.1996.0029.

- [144] Dietrich KUSKE. "Emptiness Is Decidable for Asynchronous Cellular Machines". In : *Proceedings of CONCUR 2000 — Concurrency Theory*. Sous la dir. de Catuscia PALAMIDESI. T. 1877. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2000, p. 536-551. DOI : 10.1007/3-540-44618-4_38.
- [145] Dietrich KUSKE. "Weighted asynchronous cellular automata". In : *Theoretical Computer Science* 374.1-3 (2007), p. 127-148. DOI : 10.1016/j.tcs.2006.11.031.
- [146] Mark LAND et Richard K. BELEW. "No Perfect Two-State Cellular Automata for Density Classification Exists". In : *Physical Review Letters* 74.25 (1995), p. 5148-5150. DOI : 10.1103/PhysRevLett.74.5148.
- [147] Christopher G. LANGTON. "Studying Artificial Life with Cellular Automata". In : *Physica D* 22 (1986), p. 120-149.
- [148] Gérard LE CAËR. "Comparison between simultaneous and sequential updating in $2^{n+1}-1$ cellular automata". In : *Physica A* 157.2 (1989), p. 669-687. DOI : 10.1016/0378-4371(89)90061-7.
- [149] Jia LEE. "A Simple Model of Asynchronous Cellular Automata Exploiting Fluctuation". In : *Journal of Cellular Automata* 6.4-5 (2011), p. 341-352. URL : <http://www.oldcitypublishing.com/JCA/JCAabstracts/JCA6.4-5abstracts/JCAv6n4-5p341-352Lee.html>.
- [150] Jia LEE, Susumu ADACHI et Ferdinand PEPPER. "Reliable Self-Replicating Machines in Asynchronous Cellular Automata". In : *Artificial Life* 13.4 (2007), p. 397-413. DOI : 10.1162/artl.2007.13.4.397.
- [151] Jia LEE, Susumu ADACHI, Ferdinand PEPPER et Shinro MASHIKO. "Delay-insensitive computation in asynchronous cellular automata". In : *Journal of Computer and System Sciences* 70.2 (2005), p. 201-220. DOI : 10.1016/j.jcss.2004.10.009.
- [152] Jia LEE, Susumu ADACHI, Ferdinand PEPPER et Kenichi MORITA. "Asynchronous game of life". In : *Physica D* 194.3-4 (2004), p. 369-384. DOI : 10.1016/j.physd.2004.03.007.
- [153] Jia LEE, Katsunobu IMAI et Qing-sheng ZHU. "Fluctuation-driven computing on number-conserving cellular automata". In : *Information Sciences* 187 (2012), p. 266-276. DOI : 10.1016/j.ins.2011.10.017.
- [154] Jia LEE et Qing-Sheng ZHU. "A Direct Proof of Turing Universality of Delay-Insensitive Circuits". In : *International Journal of Unconventional Computing* 8.2 (2012), p. 107-118. URL : <http://www.oldcitypublishing.com/IJUC/IJUCabstracts/IJUC8.2abstracts/IJUCv8n2p107-118Lee.html>.
- [155] Qin LEI, Tao LI, Jia LEE, Wen-Li XU et Ferdinand PEPPER. "Asynchronous communicating cellular automata : Formalization, robustness and equivalence". In : *Information Sciences* 587 (2022), p. 335-353. DOI : 10.1016/j.ins.2021.12.036.
- [156] Thomas Milton LIGGETT. *Interacting particle systems*. T. 2. Springer, 1985.
- [157] R.J. LIPTON, R.E. MILLER et L. SNYDER. "Synchronization and computing capabilities of linear asynchronous structures". In : *Journal of Computer and System Sciences* 14.1 (1977), p. 49-72. DOI : 10.1016/S0022-0000(77)80040-8.
- [158] Erik D. LUMER et Grégoire NICOLIS. "Synchronous versus asynchronous dynamics in spatially distributed systems". In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 71.4 (1994), p. 440-452. DOI : 10.1016/0167-2789(94)90010-8.

- [159] Matthew MACAULEY, Jon MCCAMMOND et Henning MORTVEIT. "Dynamics groups of asynchronous cellular automata". In : *Journal of Algebraic Combinatorics* 33.1 (2011), p. 11-35. DOI : 10.1007/s10801-010-0231-y.
- [160] Matthew MACAULEY, Jon MCCAMMOND et Henning S. MORTVEIT. "Order Independence in Asynchronous Cellular Automata". In : *Journal of Cellular Automata* 3.1 (2008), p. 37-56. URL : <http://www.oldcitypublishing.com/JCA/JCAabstracts/JCA3.1abstracts/JCAv3n1p37-56Macauley.html>.
- [161] Matthew MACAULEY et Henning S. MORTVEIT. "Coxeter Groups and Asynchronous Cellular Automata". In : *Proceedings of ACRI'10*. Sous la dir. de Stefania BANDINI, Sara MANZONI, Hiroshi UMEO et Giuseppe VIZZARI. T. 6350. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2010, p. 409-418. DOI : 10.1007/978-3-642-15979-4_43.
- [162] Jean MAIRESSE et Irène MARCOVICI. "Around probabilistic cellular automata". In : *Theoretical Computer Science* 559.0 (2014), p. 42-72. DOI : 10.1016/j.tcs.2014.09.009.
- [163] Danuta MAKOWIEC. "Cellular automata model of cardiac pacemaker". In : *Acta Physica Polonica B* 39.5 (2008), p. 1067-1085.
- [164] Diego MALDONADO, Anahí GAJARDO, Benjamin HELLOUIN DE MENIBUS et Andrés MOREIRA. "Nontrivial Turmites are Turing-universal". In : *Journal of Cellular Automata* 13.5-6 (2018), p. 373-392. URL : <http://www.oldcitypublishing.com/journals/jca-home/jca-issue-contents/jca-volume-13-number-5-6-2018/jca-13-5-6-p-373-392/>.
- [165] Marco MAMEI, Andrea ROLI et Franco ZAMBONELLI. "Emergence and control of macrospatial structures in perturbed cellular automata, and implications for pervasive computing systems." In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A* 35.3 (2005), p. 337-348. DOI : 10.1109/TSMCA.2005.846379.
- [166] Luca MANZONI. "Asynchronous cellular automata and dynamical properties". In : *Natural Computing* 11.2 (2012), p. 269-276. DOI : 10.1007/s11047-012-9308-y.
- [167] Irène MARCOVICI. "Automates cellulaires probabilistes et mesures spécifiques sur des espaces symbolique". texte en anglais. Thèse de doct. Université Paris 7, 2013.
- [168] Irène MARCOVICI. "Entre aléa et déterminisme : lumière sur quelques structures discrètes". Habilitation à diriger des recherches. Université de Lorraine (Nancy), 2021. URL : <https://hal.science/tel-03480298>.
- [169] Genaro MARTÍNEZ. "A Note on Elementary Cellular Automata Classification". In : *Journal of Cellular Automata* 8.34 (2013). preprint on arXiv 1306.5577, p. 233-259.
- [170] Nesrine MASMOUDI. "Modèle bio-inspiré pour le clustering de graphes : application à la fouille de données et à la distribution de simulations". Thèse de doctorat. Normandie Université; Université de Sfax (Tunisie), 2017. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01745613>.
- [171] Susanna M. MESSINGER, Keith A. MOTT et David PEAK. "Task-performing dynamics in irregular, biomimetic networks : Research Articles". In : *Complexity* 12.6 (2007), p. 14-21. DOI : 10.1002/cplx.v12:6.
- [172] Cristopher MOORE et Stephan MERTENS. *The Nature of Computation*. Oxford University Press, 2011.

- [173] Kenichi MORITA. "Reversible computing and cellular automata — A survey". In : *Theoretical Computer Science* 395.1 (2008), p. 101-131. DOI : 10.1016/j.tcs.2008.01.041.
- [174] Anca MUSCHOLL. "On the complementation of Büchi asynchronous cellular automata". In : *Automata, Languages and Programming*. Sous la dir. de Serge ABITEBOUL et Eli SHAMIR. T. 820. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1994, p. 142-153. DOI : 10.1007/3-540-58201-0_64.
- [175] Katsuhiko NAKAMURA. "Synchronous to asynchronous transformation of polyautomata". In : *Journal of Computer and System Sciences* 23.1 (1981), p. 22-37. DOI : 10.1016/0022-0000(81)90003-9.
- [176] Katsuo NAKAMURA. "Asynchronous Cellular Automata and Their Computational Ability". In : *Systems, Computers, Controls* 5.5 (1974), p. 58-66.
- [177] Satyasai Jagannath NANDA et Ganapati PANDA. "A survey on nature inspired meta-heuristic algorithms for partitional clustering". In : *Swarm and Evolutionary Computation* 16 (2014), p. 1-18. DOI : 10.1016/j.swevo.2013.11.003.
- [178] Chrystopher L. NEHANIV. "Evolution in asynchronous cellular automata". In : *Proceedings of the eighth international conference on Artificial life*. MIT Press, 2003, p. 65-73.
- [179] Chrystopher L. NEHANIV. "Asynchronous Automata Networks Can Emulate any Synchronous Automata Network". In : *International Journal of Algebra and Computation* 14.5-6 (2004), p. 719-739. DOI : 10.1142/S0218196704002043.
- [180] T. J. NEWMAN et R. GRIMA. "Many-body theory of chemotactic cell-cell interactions". In : *Physical Review E* 70.5 (2004), p. 051916.
- [181] David NEWTH et David CORNFORTH. "Asynchronous spatial evolutionary games". In : *Biosystems* 95.2 (2009), p. 120-129. DOI : 10.1016/j.biosystems.2008.09.003.
- [182] Mathilde NOUAL. "Synchronism vs Asynchronism in Boolean networks". In : *CoRR abs/1104.4039* (2011). URL : <http://arxiv.org/abs/1104.4039>.
- [183] Mathilde NOUAL. "Mise à jour de réseaux d'automates". Thèse de doct. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2012. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00726560>.
- [184] Géza ÓDOR. "Universality Classes in nonequilibrium systems". In : *Reviews of modern physics* 76 (2004).
- [185] Pedro P. B. de OLIVEIRA. "On Density Determination With Cellular Automata : Results, Constructions and Directions." In : *Journal of Cellular Automata* 9.5-6 (2014), p. 357-385.
- [186] Pedro Paulo Balbi de OLIVEIRA, Enrico FORMENTI, Kévin PERROT, Sara RIVA et Eurico L. P. RUIVO. "Non-maximal Sensitivity to Synchronism in Periodic Elementary Cellular Automata : Exact Asymptotic Measures". In : *Proceedings of AUTOMATA 2020*. Sous la dir. d'Hector ZENIL. T. 12286. Lecture Notes in Computer Science. Version longue en ligne sur Arxiv <https://arxiv.org/abs/2004.07128>. Springer, 2020, p. 14-28. DOI : 10.1007/978-3-030-61588-8_2.
- [187] Nicolas OLLINGER et Gaétan RICHARD. "Four states are enough!" In : *Theoretical Computer Science* 412.1-2 (2011), p. 22-32.
- [188] Hans G. OTHMER et Angela STEVENS. "Aggregation, Blowup, and Collapse : The ABC's of Taxis in Reinforced Random Walks". In : *SIAM Journal of Applied Mathematics* 57.4 (1997), p. 1044-1081.

- [189] Norman H. PACKARD. "Dynamic Patterns in Complex Systems". In : Singapore : World Scientific, 1988. Chap. Adaptation toward the edge of chaos, p. 293-301.
- [190] Ferdinand PEPPER, Susumu ADACHI et Jia LEE. "Variations on the Game of Life". In : *Game of Life Cellular Automata*. Sous la dir. d'Andrew ADAMATZKY. Springer London, 2010, p. 235-255. DOI : 10.1007/978-1-84996-217-9_13.
- [191] Ferdinand PEPPER, Teijiro ISOKAWA, Noriaki KOUUDA et Nobuyuki MATSUI. "Self-Timed Cellular Automata and their computational ability". In : *Future Generation Computer Systems* 18.7 (2002), p. 893-904. DOI : 10.1016/S0167-739X(02)00069-9.
- [192] Ferdinand PEPPER, Jia LEE et Teijiro ISOKAWA. "Brownian Cellular Automata". In : *Journal of Cellular Automata* 5.3 (2010), p. 185-206.
- [193] Kévin PERROT, Marco MONTALVA-MEDEL, Pedro PB DE OLIVEIRA et Eurico LP RUIVO. "Maximum sensitivity to update schedules of elementary cellular automata over periodic configurations". In : *Natural Computing* 19.1 (2020), p. 51-90.
- [194] Giovanni PIGHIZZINI. "Asynchronous Automata Versus Asynchronous Cellular Automata". In : *Theoretical Computer Science* 132.2 (1994), p. 179-207. DOI : 10.1016/0304-3975(94)90232-1.
- [195] Arkady PIKOVSKY, Michael ROSENBLUM et Jürgen KURTHS. *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*. T. 12. Cambridge university press, 2003.
- [196] Giuseppe PRENCIPE. "Impossibility of gathering by a set of autonomous mobile robots". In : *Theoretical Computer Science* 384.2-3 (2007), p. 222-231. DOI : 10.1016/j.tcs.2007.04.023.
- [197] Lutz PRIESE. "A note on asynchronous cellular automata". In : *Journal of Computer and System Sciences* 17.2 (1978), p. 237-252. DOI : 10.1016/0022-0000(78)90007-7.
- [198] Filippo RADICCHI, Daniele VILONE et Hildegard MEYER-ORTMANN. "Phase Transition between Synchronous and Asynchronous Updating Algorithms". In : *Journal of Statistical Physics* 129.3 (2007), p. 593-603. DOI : 10.1007/s10955-007-9416-8.
- [199] N. RAJEWSKY, L. SANTEN, A. SCHADSCHNEIDER et M. SCHRECKENBERG. "The Asymmetric Exclusion Process : Comparison of Update Procedures". In : *Journal of Statistical Physics* 92.1-2 (1998), p. 151-194. DOI : 10.1023/A:1023047703307.
- [200] Nikolaus RAJEWSKY et Michael SCHRECKENBERG. "Exact results for one-dimensional cellular automata with different types of updates". In : *Physica A* 245.1-2 (1997), p. 139-144. DOI : 10.1016/S0378-4371(97)00010-1.
- [201] Damien REGNAULT. "Directed Percolation Arising in Stochastic Cellular Automata Analysis". In : *Mathematical Foundations of Computer Science 2008*. Sous la dir. d'Edward OCHMAŃSKI et Jerzy TYSZKIEWICZ. Springer Berlin Heidelberg, 2008, p. 563-574.
- [202] Damien REGNAULT. "Sur les automates cellulaires probabilistes : comportements asynchrones". 07ENSL0 494. Thèse de doct. École normale supérieure de lyon, 2008.
- [203] Damien REGNAULT. "Proof of a Phase Transition in Probabilistic Cellular Automata". In : *Proceedings of Developments in Language Theory*. Sous la dir. de Marie-Pierre BÉAL et Olivier CARTON. T. 7907. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, p. 433-444. DOI : 10.1007/978-3-642-38771-5.
- [204] Damien REGNAULT, Nicolas SCHABANEL et Eric THIERRY. "Progresses in the analysis of stochastic 2D cellular automata : A study of asynchronous 2D minority". In : *Theoretical Computer Science* 410.47-49 (2009), p. 4844-4855. DOI : 10.1016/j.tcs.2009.06.024.

- [205] Leonardo REYES et David LAROZE. "Cellular Automata for excitable media on a Complex Network : The effect of network disorder in the collective dynamics". In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 588 (2022), p. 126552. DOI : 10.1016/j.physa.2021.126552.
- [206] Leonardo I. REYES. "Greenberg-Hastings dynamics on a small-world network : the collective extinct-active transition". arXiv 1505.00182. 2017.
- [207] Gaétan RICHARD. "On the Synchronisation Problem over Cellular Automata". In : *Proceedings of STACS 2017*. Sous la dir. d'Heribert VOLLMER et Brigitte VALLÉE. T. 66. LIPIcs. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017, 54 :1-54 :13.
- [208] D. RICHARDSON. "Tessellations with local transformations". In : *Journal of Computer Systems and Sciences* 6 (1972), p. 373-388.
- [209] Pejman ROHANI, Timothy J. LEWIS, Daniel GRÜNBAUM et Graeme D. RUXTON. "Spatial self-organisation in ecology : pretty patterns or robust reality?" In : *Trends in Ecology & Evolution* 12.2 (1997), p. 70-74.
- [210] Juri ROLF, Tomas BOHR et Mogens H. JENSEN. "Directed percolation universality in asynchronous evolution of spatiotemporal intermittency". In : *Physical Review E*. 57.3 (1998), R2503-R2506.
- [211] Jean-Baptiste ROUQUIER. "Robustesse et émergence dans les systèmes complexes : le modèle des automates cellulaires". Thèse de doct. École Normale Supérieure de Lyon, 2008. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00354042>.
- [212] Jean-Baptiste ROUQUIER. "An exhaustive experimental study of synchronization by forcing on elementary cellular automata". In : *Proceedings of the First Symposium on Cellular Automata "Journées Automates Cellulaires" (JAC 2008)*. MCCME Publishing House, Moscow, 2009, p. 250-261.
- [213] Jean-Baptiste ROUQUIER et Michel MORVAN. "Coalescing Cellular Automata : Synchronization by Common Random Source for Asynchronous Updating". In : *Journal of Cellular Automata* 4.1 (2009), p. 55-78. URL : <http://www.oldcitypublishing.com/JCA/JCAabstracts/JCA4.1abstracts/JCAv4n1p55-77Rouquier.html>.
- [214] Jean-Baptiste ROUQUIER, Damien REGNAULT et Éric THIERRY. "Stochastic minority on graphs". In : *Theoretical Computer Science* 412.30 (2011), p. 3947-3963. DOI : 10.1016/j.tcs.2011.02.028.
- [215] Eurico L.P. RUIVO et Pedro P.B. de OLIVEIRA. "A perfect solution to the parity problem with elementary cellular automaton 150 under asynchronous update". In : *Information Sciences* 493 (2019), p. 138-151. DOI : 10.1016/j.ins.2019.04.045.
- [216] Graeme RUXTON et Leonardo SARAVIA. "The need for biological realism in the updating of cellular automata models". In : *Ecological Modelling* 107.2 (1998), p. 105-112.
- [217] M. Ali SAIF et Prashant M. GADE. "The prisoner's dilemma with semi-synchronous updates : evidence for a first-order phase transition". In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2009.7 (2009), P07023. DOI : 10.1088/1742-5468/2009/07/P07023.
- [218] Amaury SAINT-JORE, Nazim FATÈS et Emmanuel JEANDEL. "Amoebae for clustering : a bio-inspired cellular automata method for data classification". preprint. 2020. URL : <https://hal.inria.fr/hal-02973830>.

- [219] Ville SALO et Ilkka TÖRMÄ. "Color Blind Cellular Automata". In : *Journal of Cellular Automata* 9.5-6 (2014), p. 477-509.
- [220] Andaç T ŞAMILOĞLU, Veysel GAZI et A Buğra KOKU. "Effects of Asynchronism and Neighborhood Size on Clustering in Self-propelled Particle Systems". In : *Proceedings of ISCIS 2006*. Sous la dir. d'Albert LEVI, Erkey SAVAŞ, Hüsnü YENIGÜN, Selim BALCISOY et Yücel SAYGIN. T. 4263. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2006, p. 665-676. DOI : 10.1007/11902140_70.
- [221] J. R. SÁNCHEZ et R. LÓPEZ-RUIZ. "Self-synchronization of Cellular Automata : An Attempt to Control Patterns". In : *Proceedings of the 6th International Conference on Computational Science - Part III*. Sous la dir. de Vassil N. ALEXANDROV, G. Dick van ALBADA, Peter M. A. SLOOT et Jack DONGARRA. T. 3993. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2006, p. 353-359. DOI : 10.1007/11758532_48.
- [222] Bruno SCHERRER. "Asynchronous neurocomputing for optimal control and reinforcement learning with large state spaces". In : *Neurocomputing* 63 (2005), p. 229-251. DOI : 10.1016/j.neucom.2004.01.192.
- [223] Oliver SCHNEIDER et Thomas WORSCH. "A 3-State Asynchronous CA for the Simulation of Delay-Insensitive Circuits". In : *Proceedings of ACRI'12*. Sous la dir. de Georgios Ch. SIRAKOULIS et Stefania BANDINI. T. 7495. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2012, p. 565-574. DOI : 10.1007/978-3-642-33350-7_58.
- [224] Birgitt SCHÖNFISCH et André de ROOS. "Synchronous and asynchronous updating in cellular automata". In : *BioSystems* 51 (1999), p. 123-143.
- [225] Martin SCHÜLE. "Natural computation". Thèse de doct. Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) Zürich, 2012. DOI : 10.3929/ethz-a-009787778.
- [226] Martin SCHÜLE, Thomas OTT et Ruedi STOOP. "Computing with Probabilistic Cellular Automata". In : *ICANN '09 : Proceedings of the 19th International Conference on Artificial Neural Networks*. Limassol, Cyprus : Springer-Verlag, 2009, p. 525-533.
- [227] Martin SCHÜLE et Ruedi STOOP. "A full computation-relevant topological dynamics classification of elementary cellular automata". In : *Chaos* 22.4, 043143 (2012), p. 043143. DOI : 10.1063/1.4771662.
- [228] Biswanath SETHI, Nazim FATÈS et Sukanta DAS. "Reversibility of Elementary Cellular Automata under Fully Asynchronous Update". In : *Proceedings of TAMC'14*. Sous la dir. de T.V. GOPAL, Manindra AGRAWAL, Angsheng LI et Barry COOPER. T. 8402. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2014, p. 39-49. DOI : 10.1007/978-3-319-06089-7_4.
- [229] Fernando SILVA et Luís CORREIA. "An experimental study of noise and asynchrony in elementary cellular automata with sampling compensation". In : *Natural Computing* 12.4 (2013), p. 573-588. DOI : 10.1007/s11047-013-9387-4.
- [230] Matthew J. SIMPSON, Alistair MERRIFIELD, Kerry A. LANDMAN et Barry D. HUGHES. "Simulating invasion with cellular automata : Connecting cell-scale and population-scale properties". In : *Physical Review E* 76.2, 021918 (2007), p. 021918.
- [231] Alvy Ray SMITH III. "Two-Dimensional Formal Languages and Pattern Recognition by Cellular Automata". In : *FOCS*. 1971, p. 144-152.

- [232] Daniel SOTO FORERO et Yony CEBALLOS. "Behavior of stochastic reaction-diffusion process in a random network with dynamic links". In : *IAENG International Journal of Computer Science* 3.48 (2021), p. 1-7.
- [233] Antoine SPICHER, Nazim FATÈS et Olivier SIMONIN. "Translating Discrete Multi-Agents Systems into Cellular Automata : Application to Diffusion-Limited Aggregation". In : *Agents and Artificial Intelligence*. Sous la dir. de Joaquim FILIPE, Ana FRED et Bernadette SHARP. T. 67. Communications in Computer and Information Science. Springer Berlin Heidelberg, 2010, p. 270-282. DOI : 10.1007/978-3-642-11819-7_21.
- [234] W. Richard STARK. "Amorphous computing : examples, mathematics and theory". In : *Natural Computing* 12.3 (2013), p. 377-392. DOI : 10.1007/s11047-013-9370-0.
- [235] W. Richard STARK et William H. HUGHES. "Asynchronous, irregular automata nets : the path not taken". In : *BioSystems* 55 (2000), p. 107-117.
- [236] Kazuo SUGIHARA et Ichiro SUZUKI. "Distributed motion coordination of multiple mobile robots". In : *Proceedings of 5th IEEE International Symposium on Intelligent Control*. 1990, p. 138-143.
- [237] Tomoaki SUZUDO. "Searching for Pattern-Forming Asynchronous Cellular Automata - An Evolutionary Approach". In : *Proceedings of ACRI'04*. Sous la dir. de Peter M. A. SLOOT, Bastien CHOPARD et Alfons G. HOEKSTRA. T. 3305. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2004, p. 151-160. DOI : 10.1007/978-3-540-30479-1_16.
- [238] Tomoaki SUZUDO. "Spatial pattern formation in asynchronous cellular automata with mass conservation". In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 343 (2004), p. 185-200. DOI : 10.1016/j.physa.2004.06.067.
- [239] Wahiba TAOUALI, Thierry VIÉVILLE, Nicolas P. ROUGIER et Frédéric ALEXANDRE. "No clock to rule them all". In : *Journal of Physiology - Paris* 105.1-3 (2011), p. 83-90. DOI : 10.1016/j.jphysparis.2011.08.005.
- [240] Tommaso TOFFOLI. "Computation and construction universality of reversible cellular automata". In : *Journal of Computer Systems and Sciences* 15 (1977), p. 213-231.
- [241] Tommaso TOFFOLI. "Integration of the Phase-Difference Relations in Asynchronous Sequential Networks". In : *Proceedings of the Fifth Colloquium on Automata, Languages and Programming*. Sous la dir. de Giorgio AUSIELLO et Corrado BÖHM. T. 62. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1978, p. 457-463. DOI : 10.1007/3-540-08860-1_34.
- [242] Marco TOMASSINI et Mattias VENZI. "Artificially Evolved Asynchronous Cellular Automata for the Density Task". In : *Proceedings of ACRI 2002*. Sous la dir. de Stefania BANDINI, Bastien CHOPARD et Marco TOMASSINI. T. 2493. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2002, p. 44-55. DOI : 10.1007/3-540-45830-1_5.
- [243] Predrag T. TOŠIĆ. "On Modeling Large-Scale Multi-Agent Systems with Parallel, Sequential and Genuinely Asynchronous Cellular Automata". In : *Acta Physica Polonica B - Proceedings Supplement* 4.2 (2011), p. 217-235. DOI : 10.5506/APhysPolBSupp.4.217.
- [244] Alan M. TURING. "The chemical basis of morphogenesis". In : *Philosophical Transactions of the Royal Society (London)* 237 (1952), p. 5-72.
- [245] Leonardo VANNESCHI et Giancarlo MAURI. "A study on learning robustness using asynchronous 1D cellular automata rules". In : *Natural Computing* 11.2 (2012), p. 289-302. DOI : 10.1007/s11047-012-9311-3.

- [246] Massimo VERGASSOLA, Emmanuel VILLERMAUX et Boris I. SHRAIMAN. “‘Infotaxis’ as a strategy for searching without gradients”. In : *Nature* 445.7126 (2007), p. 406-409. DOI : 10.1038/nature05464.
- [247] Michael VIELHABER. “Computation of functions on n bits by asynchronous clocking of cellular automata”. In : *Natural Computing* 12.3 (2013), p. 307-322. DOI : 10.1007/s11047-013-9376-7.
- [248] Nikolaos VLASSOPOULOS, Nazim FATÈS, Hugues BERRY et Bernard GIRAU. “An FPGA Design for the stochastic Greenberg-Hastings Cellular Automata”. In : *International Conference on High Performance Computing and Simulation*. Sous la dir. de Waleed SMARI. New Jersey, USA : IEEE, 2010, p. 565-574.
- [249] Nikolaos VLASSOPOULOS, Nazim FATÈS, Hugues BERRY et Bernard GIRAU. “Large-scale Simulations on FPGAs : Finding the Asymptotic Critical Threshold of the Greenberg-Hastings Cellular Automata”. In : *Journal of Cellular Automata* 7.1 (2012), p. 5-29.
- [250] John VON NEUMANN. *Theory of self-reproducing automata*. A. Burks (editor). University of Illinois press Urbana, 1966.
- [251] Weiguo WANG. “An asynchronous two-dimensional self-correcting cellular automaton”. In : *Proceedings of FOCS’91 (Foundations of Computer Science)*. IEEE Computer Society, 1991, p. 278-285. DOI : 10.1109/SFCS.1991.185379.
- [252] Xingyuan WANG et Dahai XU. “A novel image encryption scheme using chaos and Langton’s Ant cellular automaton”. In : *Nonlinear Dynamics* 79.4 (2014), p. 2449-2456. DOI : 10.1007/s11071-014-1824-0.
- [253] Barbara WOLNIK et Bernard DE BAETS. “Ternary reversible number-conserving cellular automata are trivial”. In : *Information Sciences* 513 (2020), p. 180-189. DOI : 10.1016/j.ins.2019.10.068.
- [254] Thomas WORSCH. “Towards intrinsically universal asynchronous CA”. In : *Natural Computing* 12.4 (2013), p. 539-550. DOI : 10.1007/s11047-013-9388-3.

Résumé

Ce mémoire présente une sélection de travaux sur les automates cellulaires et les systèmes complexes discrets. Nous nous intéressons au thème de la robustesse de ces systèmes, à travers l'utilisation de règles asynchrones ou probabilistes. Nous partons du problème de l'analyse et de la classification des automates cellulaires élémentaires asynchrones. Différentes techniques issues de la théorie des probabilités, chaînes de Markov et martingales, sont mises en œuvre pour expliquer les propriétés de convergence de ces systèmes. Dans la deuxième partie, nous présentons des modèles plus complexes, pour lesquels l'estimation de la robustesse se fait principalement à l'aide de simulations numériques. Les expériences montrent des phénomènes collectifs variés et des réponses aux changements difficiles à prédire par l'analyse des règles locales. Dans la troisième partie, l'exploration se poursuit en présentant trois problèmes inverses, problèmes où l'on cherche à trouver des règles qui réalisent un « calcul » sous forme d'un consensus entre cellules ou entre agents. L'ensemble des travaux présentés permet de parcourir différents modèles discrets avec des approches complémentaires. Nous creusons ainsi la question posée par Turing en 1952 où celui-ci évoquait un rôle constructif de l'aléa dans son article sur la morphogenèse.

Mots-clés: automates cellulaires, systèmes complexes discrets, robustesse des systèmes dynamiques

Abstract

This thesis presents a selection of research works on the theme of cellular automata and discrete complex systems. We are interested in the robustness of these systems, mainly through the use of asynchronous or probabilistic rules. We start from the problem of analysing and classifying the dynamics of asynchronous elementary cellular automata. We use techniques from probability theory such as Markov chains and martingales in order to understand the convergence properties of such systems. In the second part, we present models which are more complex locally and we estimate their robustness properties mainly with numerical simulations. Experiments show that the various collective phenomena we observe have responses to perturbations which are difficult to predict from the analysis of their local rule. The third part consists of the presentation of three inverse problems, where one seeks to find the rules that produce a given behaviour, here a consensus on the state of the cells or the agents. The overall variety of models that are discussed in the thesis allow us to study a variety of models with complementary techniques, thus following the path opened by Alan Turing in his 1952 article on morphogenesis.

Keywords: cellular automata, discrete complex systems, robustness of dynamical systems