



HAL
open science

Méthodes mathématiques et numériques pour des problèmes de propagation d'ondes double échelles

Sébastien Imperiale

► **To cite this version:**

Sébastien Imperiale. Méthodes mathématiques et numériques pour des problèmes de propagation d'ondes double échelles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Institut polytechnique de Paris, 2022. tel-03944626

HAL Id: tel-03944626

<https://inria.hal.science/tel-03944626v1>

Submitted on 18 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

Méthodes mathématiques et numériques pour des problèmes de propagation d'ondes double échelles

Habilitation à diriger des recherches
Habilitation présentée et soutenue à Palaiseau, le 27 Septembre 2022, par

SÉBASTIEN IMPERIALE

Composition du Jury :

Gregoire Allaire Institut Polytechnique de Paris	Rapporteur
Bernardo Cockburn University of Minnesota	Rapporteur
Alexandre Ern Ecole des Ponts ParisTech	Rapporteur
Eric Bonnetier Université Grenoble-Alpes	Président
Bruno Després Sorbonne Université	Examineur
Sonia Fliss Institut Polytechnique de Paris	Examinatrice
Bertrand Maury Université Paris-Sud	Examineur
Patrick Joly Institut Polytechnique de Paris	Invité

Table des matières

1	Remerciements	1
2	Introduction	3
2.1	Préambule	3
2.2	Introduction et organisation du manuscrit	4
2.3	Autres contributions non détaillées dans ce manuscrit	8
3	Analyse asymptotique de problèmes double-échelles	11
3.1	Un cadre abstrait	11
3.1.1	La famille de problèmes	12
3.1.2	Trois sous-catégories de problèmes	14
3.2	Analyse asymptotique	15
3.2.1	Espace de fonctions tests et espace des solutions	15
3.2.2	Le problème limite	16
3.2.3	Solutions propagatives et solutions non-propagatives	16
3.2.4	Le cas des séparations d'échelles fortes et strictes	18
3.2.5	Analyse de convergence vers le problème limite	18
3.3	Applications	20
3.3.1	Elastodynamique en milieux quasi-incompressibles	22
3.3.2	Milieux homogènes isotropes mous	26
3.3.3	Ondes dans des plaques stratifiées	32
3.3.4	Câbles coaxiaux en électromagnétisme	37
3.3.5	Approximation quasi-statique en piézoélectricité	45
3.4	Discussions et perspectives	49
3.4.1	Homogénéisation périodique	49
3.4.2	Généralisations	51
3.4.3	Correcteurs, couches limites et modèles effectifs	51
3.4.4	Problème multi-échelles	53
4	Discretisation en temps de problèmes double-échelles semi-discrets	55
4.1	Objectifs et remarques préliminaires	55
4.2	Le schéma saute-mouton et ses variantes	58
4.2.1	Schémas saute-moutons classiques : les θ -schémas	58
4.2.2	Les schémas saute-moutons généralisés	59
4.2.3	Schémas implicites-explicites	65
4.2.4	Schémas explicites stabilisés	68
4.2.5	Schéma implicite stabilisé	71
4.3	L'équation modifiée et ses variantes	72
4.3.1	Les (θ, φ) -schémas	75

4.3.2	Problèmes dissipatifs	78
5	Autres techniques de discrétisation en temps d'équations d'ondes	83
5.1	Discrétisation de problèmes sous contraintes	83
5.2	Discrétisation de problèmes de transmission	86
5.2.1	Schémas d'ordre 2 avec stabilisation explicite	87
5.2.2	Schémas d'ordre 4 implicites	88
5.3	Couches parfaitement adaptées	90
6	Conclusion et Perspectives générales	95

CHAPITRE 1

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury, à commencer par les rapporteurs qui ont lu, corrigé mon manuscrit ainsi que pour leurs questions le jour de la soutenance. Je remercie également les autres membres du jury pour s'être intéressés à mes travaux et pour leurs questions et suggestions le jour de la soutenance. Je suis par ailleurs content que cette soutenance ait pu se faire en présentiel avec la quasi-totalité de mon jury.

Je remercie particulièrement Patrick Joly pour m'avoir bien formé, c'est grâce à lui, et à son encadrement durant ma thèse, toujours très rigoureux, mais bienveillant, que j'ai pu réaliser une partie des travaux présentés dans ce manuscrit. J'essaye à mon tour de transmettre de la même manière à mes étudiants.

Je remercie toute l'équipe M3DISIM pour l'environnement de travail très agréable et stimulant dans lequel j'évolue et, en particulier, Philippe Moireau et Dominique Chapelle qui m'ont soutenu lors de ma candidature en tant que chargé de recherche chez Inria. Je les remercie également pour m'avoir ouvert à d'autres horizons scientifiques, à savoir, l'assimilation de données, la mécanique cardiaque, l'électrophysiologie, l'hémodynamique...j'ai beaucoup appris ces dernières années sur ces questions-là. Merci.

Je remercie également tous mes collaborateurs, et particulièrement les premiers, je pense notamment à Juliette Chabassier, Edouard Demaldent et Cedric Bellis. Nos collaborations ont été très riches sur mes premières années de chercheurs, en post-doc ou en thèse. Cela s'est révélé important et très motivant pour persister dans le métier.

Parmi mes collaborateurs, je dois mentionner mon frère, Alexandre, qui a suivi le même parcours académique que moi et qui travaille dans le même domaine. Nous collaborons sur des sujets très techniques de propagations d'ondes. Ce type de collaboration est assez singulier et très enrichissant. C'est clairement une chance et j'espère que cela le restera longtemps.

Pour finir, je remercie mes proches, mes parents et mes beaux-parents qui nous ont soutenus ces derniers temps de crise sanitaire, notamment en gardant nos magnifiques enfants qui ne sont bien sûr jamais malade et toujours sage et de bonne humeur. Je remercie surtout Anne-Claire pour tous les moments de soutien qui m'ont permis de rédiger cette habilitation. Cela ne devait pas durer deux ans (désolé) mais Heloïse est venu pointer le bout de son nez.

CHAPITRE 2

Introduction

2.1 Préambule

Je présente dans ce manuscrit d'habilitation à diriger des recherches, mes travaux effectués au cours de mon activité de chercheur en mathématiques appliquées (début de mon doctorat en septembre 2008). Hormis le présent chapitre d'introduction, le manuscrit est organisé en trois chapitres.

Les chapitres 3 et 4 concernent l'étude de problèmes double-échelles dans le cadre de problèmes de propagation d'ondes. Le chapitre 3 porte sur l'analyse asymptotique de ces problèmes, tandis que le chapitre 4 porte sur leur discrétisation temporelle. Dans le chapitre 5 sont présentés des stratégies de discrétisation en temps pour différentes variantes autour de problèmes d'équations d'ondes.

Les références bibliographiques sont séparées en trois catégories. Tout d'abord, mes propres contributions (publiées et soumises), d'autre part les thèses que j'ai co-encadré et que je co-encadre actuellement, et finalement la bibliographie au sens usuel.

Je me suis prêté à l'exercice de construire un cadre théorique abstrait commun à un sous-ensemble des différentes études réalisé. Ce cadre théorique est présenté de façon synthétique dans le chapitre 3 mais également de façon précise dans l'article [SI34] qui a été rédigé parallèlement à ce manuscrit. Ce travail a nécessité de nombreux aller-retour entre les aspects théoriques et leurs applications (j'en détaille cinq). La difficulté principale rencontrée a été de trouver des points communs sur la structure mathématique des problèmes considérés sans construire *un monstre* : c'est-à-dire un cadre abstrait difforme que j'aurais étiré de tout côté pour faire entrer, au chausse-pied, mes différentes études applicatives.

Compte-tenu des efforts réalisés pour aller au bout de l'exercice, je fonde naturellement beaucoup d'espairs, sûrement trop, sur la pertinence et l'utilisation future de ce cadre abstrait. Quand bien même ces efforts ne seraient pas récompensés, le fait d'avoir pu prendre le temps de formaliser ce cadre m'a été bénéfique et m'a permis d'apprécier la rédaction de ce manuscrit. Notamment, j'ai particulièrement apprécié le sentiment de comprendre certains aspects de mes travaux sous un angle tout à fait différent.

Pour finir, environ la moitié de ce manuscrit concerne les techniques de discrétisation en temps de problèmes d'équations d'ondes. Ces aspects numériques sont plus proches de ma formation initiale qui est orientée méthodes numériques. Avec le recul apporté par la rédaction de ce document, je me suis aperçu que je ne me suis pas lassé d'étudier ces aspects de discrétisation en temps de l'équation des ondes : je présente entre les chapitres 4 et 5 une dizaine de variantes du schéma-saute mouton ! J'ai trouvé dans l'étude de ces variantes de la richesse et un intérêt (plus ou moins fort) que j'ai essayé de retranscrire le mieux possible.

2.2 Introduction et organisation du manuscrit

Problèmes double-échelles. Mes travaux de recherches ont essentiellement porté sur l'analyse asymptotique et la discrétisation d'équations aux dérivées partielles. Dans cette thématique, la majeure partie de mon activité s'est focalisée sur l'étude de problèmes propagatifs de type équation d'ondes pour lesquels j'ai considéré principalement deux aspects : l'analyse asymptotique ainsi que la discrétisation en temps. Les problèmes que j'ai étudiés peuvent s'écrire, **très formellement**, sous la forme

$$\ddot{u}_\delta(t) + \delta^{-2} (A_0 + \delta A_1 + \delta^2 A_2) u_\delta(t) + B_0 \dot{u}_\delta(t) = f(t), \quad (2.1)$$

où A_0, A_1, A_2 et B_0 sont des opérateurs qui représentent, dans les exemples considérés, des opérateurs aux dérivées partielles et où, u_δ , l'inconnue principale du problème, est une fonction dépendant d'un petit paramètre δ . L'analyse de systèmes abstraits de la forme (2.1) n'a pas été le fil conducteur de mes travaux de recherches : j'ai spécifié et analysé ce formalisme abstrait pendant le premier confinement (printemps-été 2020). Le fil conducteur a été l'analyse de nombreux problèmes appliqués qui peuvent s'écrire dans un même formalisme et que j'ai eu l'occasion d'aborder depuis le début mes travaux de thèse en 2008. Plus précisément, j'ai été amené à étudier les équations de l'élastodynamique dans des milieux mous [SI4, SI19, SI20, SI21, SI30] et [TH3], dans des domaines minces tels que des plaques [TH4] ou même des domaines mous et mince [TH10], j'ai également étudié les équations de Maxwell dans des câbles coaxiaux [SI5, SI8, SI12, SI27, SI35] et [TH1] ainsi que [TH5] (les câbles représentant un domaine élancé) ainsi que les équations de la piézo-électricité dans des barreaux minces [SI10] et leur approximation quasi-statique [SI2]. Par ailleurs, j'ai étudié, durant ma thèse, des problèmes d'homogénéisation en piézoélectricité ainsi que plus récemment des problèmes double-échelles en hydroacoustique [TH9]. Dans chacun des problèmes mentionnés, au moins deux échelles co-existent et peuvent être, sans être exhaustif, de trois natures différentes :

- dans le cas de systèmes d'équations d'ondes où une des vitesses de propagation d'un type d'onde est grande devant les autres : c'est le cas en piézoélectricité, pour la propagation d'ondes en milieux mous et en hydroacoustique ;
- une ou deux dimensions du domaine de propagation sont petites devant les autres comme pour l'étude de la propagation d'ondes dans des domaines minces ou élancés ;
- finalement, un paramètre physique peut varier à une échelle d'espace petite devant la longueur d'onde de propagation, c'est typiquement le cas en homogénéisation.

Comme illustré ci-dessus le terme double-échelle est utilisé dans un sens large. Ce terme est généralement utilisé pour décrire le cas où un paramètre (ou la géométrie) varie à une échelle spatiale plus petite devant la longueur d'onde (typiquement pour des problèmes d'homogénéisation). Les problèmes en piézoélectricité ou milieux mous peuvent être vus d'un point de vue mathématique comme des problèmes de perturbations singulières, bien que d'un point de vue des phénomènes physiques, l'emploi du terme double-échelle peut se justifier. Les problèmes de propagations dans les domaines minces peuvent se voir, mathématiquement, comme des problèmes de perturbations singulières uniquement pour les cas simples. Devant la richesse des situations que l'on peut rencontrer, le terme **double-échelle** a été retenu dans ce manuscrit pour caractériser l'ensemble de ces problèmes.

Dans les trois cas mentionnés ci-dessus, je me suis intéressé à l'étude du problème limite, au sens où je suppose que le rapport adimensionné entre les deux échelles, représenté par un paramètre δ , est petit. J'ai analysé les problèmes de la forme (2.1) en suivant deux approches complémentaires,

- **par analyse asymptotique.** La question essentielle à laquelle il faut répondre est la caractérisation des équations satisfaites par le terme limite u_0 vers lequel converge u_δ lorsque δ tends vers 0.
- **par la construction de discrétisations temporelles robustes.** Il s'agit ici de construire des schémas numériques qui présentent des propriétés de convergence et d'efficacité qui sont indépendantes du petit paramètre δ .

Ces deux approches peuvent sembler être à deux opposés d'un spectre : si des schémas numériques sont disponibles pour résoudre efficacement (2.1) pour des petites valeurs de δ , alors la connaissance des équations satisfaites par le terme limite u_0 sont d'un intérêt moindre. En fait, cette dernière remarque n'est pas correcte et ces aspects (analyses asymptotiques/schémas numériques robustes) sont davantage liés que ce que l'on peut croire en première lecture. Par exemple,

- l'analyse de schémas en temps dits implicites-explicites [TH4] appliqués à la propagation dans des domaines minces repose sur la compréhension du comportement limite de la fonction u_δ qui est approchée ;
- pour des problèmes de propagation d'ondes en milieux incompressibles [SI19, SI30], nous avons proposé un schéma numérique pour calculer u_δ qui s'appuie sur la discrétisation d'équations limites (celles satisfaites par u_0) pénalisées au niveau continu. Une étude asymptotique est nécessaire pour comprendre l'influence de cette pénalisation.

Avant de détailler le contenu de chaque chapitre, je mentionne deux aspects. Tout d'abord dans (2.1) j'ai introduit un opérateur B_0 qui a pour objectif de représenter des effets dissipatifs (lorsque B_0 est un opérateur auto-adjoint), de couplage (lorsque B_0 est un opérateur anti-adjoint) ou les deux. La question de l'introduction de cet opérateur s'avère essentielle dans certains problèmes, notamment en piézo-électricité où c'est le seul terme qui est responsable des couplages entre les ondes électromagnétiques et électrodynamiques, dans ce cas, l'opérateur B_0 est non borné, compliquant ainsi l'analyse. Ensuite, dans le cas de la propagation d'ondes électromagnétiques dans des câbles, l'opérateur B_0 correspond à un terme de dissipation due à la conductivité naturelle du milieu de propagation. Bien que dans ce cas B_0 soit un opérateur borné, l'analyse asymptotique des équations sous-jacentes débouche sur des problèmes qui sont non-locaux en temps, dissipatifs et dispersifs [SI8, SI12], je reviendrai ultérieurement sur ces phénomènes. Finalement, je pense qu'il est important de remarquer que les problèmes rencontrés lors des différentes études que j'ai réalisées ne sont pas directement considérés sous une forme où le petit paramètre δ apparait explicitement de façon un peu artificielle. Une partie de mes travaux, qui sont généralement données en parties préliminaires (comme dans [SI2] et [SI27]), a consisté à justifier l'introduction de ce petit paramètre par une démarche d'adimensionnalisation qui est d'autant plus complexe que la physique considérée est complexe (dans [SI28] cette démarche est proposée dans un cadre élastodynamique non-linéaire). Ce type de démarche a pour intérêt de limiter le côté arbitraire dans l'introduction du petit paramètre ainsi que

de déduire des gammes de validités des modèles ou schémas numériques obtenus.

Analyse asymptotique abstraite de problèmes double-échelles (Chapitre 3).

Dans ce chapitre, je montre comment les problèmes appliqués mentionnés dans le paragraphe précédent (ondes dans les milieux mous, les plaques, les câbles coaxiaux, les milieux piézoélectriques) s'écrivent dans un formalisme abstrait proche de (2.1). Le formalisme en question a été récemment proposé [SI34]. Je reproduis les principales définitions et résultats dans ce chapitre, ces derniers permettent, d'une part, d'énoncer des preuves abstraites de convergences asymptotiques et d'autre part de classer les différents problèmes en fonction de certaines caractéristiques mathématiques (pour cela, j'ai introduit la notion de séparation d'échelles). Cette étude permet de factoriser de nombreuses analyses menées au cas par cas dans mes précédents travaux, mais surtout, elle ouvre de nombreuses perspectives que je mentionnerai (entre autres : analyse abstraite de problèmes double-échelles couplés hyperboliques-paraboliques, étude abstraite de correcteurs asymptotiques, problèmes abstraits multi-échelles...).

Discrétisation en temps de problèmes double-échelles (Chapitre 4).

La discrétisation en temps de systèmes semi-discrets du type (2.1) est un problème que j'ai abordé à de nombreuses reprises [SI3, SI9, SI17, SI29] et donc je résume les principaux résultats dans ce chapitre. Après s'être donné une discrétisation par éléments finis (typiquement des éléments finis d'ordre élevé conforme avec condensation de masse [24, 53]), nous avons développé et analysé des discrétisations en temps adaptés à différentes catégories de problèmes avec deux objectifs : soit garantir des propriétés de stabilité robustes (par exemple une condition de stabilité CFL indépendante de δ) soit une consistance d'ordre élevé (typiquement à l'ordre 4 en utilisant des techniques dites d'équations modifiées). Je couvre dans ce chapitre plusieurs classes de problèmes rencontrés en n'abordant que les aspects de stabilités des schémas. Les résultats de convergence (espace-temps) peuvent être trouvés dans les références mentionnées. Ce chapitre offre une perspective importante : bien que les différents schémas présentés ont fait l'objet d'études de stabilité (uniforme en δ) et de convergences (non-uniforme en δ !), il reste à établir dans la plupart des cas des résultats d'étude de convergence espace-temps uniforme en δ . Nous avons commencé à étudier cette question dans [TH4]) pour un cas bien spécifique (voir Section 4.2.3) mais ce sujet reste une perspective générale.

Autres discrétisation en d'équation d'ondes (Chapitre 5)

Ce chapitre a pour intérêt de présenter des discrétisations en temps qui ne concernent pas directement des systèmes double-échelles de la forme (2.1) mais qui concernent tout de même des problèmes de propagation d'ondes.

Discrétisations de problèmes sous contraintes (Section 5.1).

Dans l'objectif de simuler la propagation d'ondes dans des milieux incompressibles (typiquement des tissus humains ou des milieux mous), nous avons développé une technique de pénalisation efficace si couplée à un solveur rapide pour les problèmes de Laplace (tel que celui développé dans [SI25]). Cette stratégie trouve son origine dans les travaux bien connus relatifs à la discrétisation en temps des équations de Stokes incompressibles (voir [38] entre autres, les études sur ce sujet étant très nombreuses).

Discrétisations de problèmes de transmission (Section 5.2).

Une partie de mes travaux a concerné la construction de techniques de pas de temps locaux pour l'équation

des ondes. La stratégie que nous avons proposée est originale. On écrit, d'une part, un problème de transmission entre deux sous-domaines du domaine de propagation (on utilise pour cela des éléments finis mortiers au niveau discret). D'autre part, on écrit un schéma stabilisé (c'est-à-dire que le pas de temps peut être choisi plus grand que celui imposé par contrainte CFL standard du schéma saute-mouton, voir Section 4.2.2) dans une des régions qui est supposé très rigide ou à géométrie complexe. Finalement, on s'assure, par l'ajout de termes de transmission, de la consistance à l'ordre 2 en temps du couplage. Ainsi, la méthode construite n'est pas directement interprétable comme une technique de pas de temps local, mais on montre qu'elle est bien similaire d'un point de vue algorithmique. Nous avons proposé une analyse de convergence espace-temps pour cette famille de méthodes et montré que l'ordre de convergence espace-temps obtenu est optimal. Nous avons utilisé cette même stratégie s'appuyant sur un problème de transmission pour construire des méthodes localement implicites à l'ordre 4 en temps.

Milieux ouverts (Section 5.3). Les couches parfaitement adaptées (PML) permettent de borner le domaine de calcul d'équations d'ondes posées en domaine infini. Les PML sont des milieux non-physiques ajoutés pour absorber les ondes rentrantes sans créer de réflexions parasites. Je reproduis dans cette section les résultats de [SI26] où la question de la stabilité par énergie du problème discret a été étudié.

2.3 Autres contributions non détaillées dans ce manuscrit

Dans cette section, je présente brièvement mes contributions scientifiques qui n'ont pas pu être incorporées dans le corps du manuscrit (par exemple [SI33]), car un peu trop éloigné de *l'histoire* que je vais essayer de raconter.

Homogénéisation en électrophysiologie. Dans l'objectif de construire des modèles précis de contraction cardiaque, nous nous sommes intéressés dans [SI18] et [SI23] à la justification rigoureuse des équations homogénéisées en électrophysiologie. Il s'agit d'un problème double-échelles (l'échelle de l'organe et l'échelle de la cellule) complètement différentes des problèmes d'homogénéisation d'équation d'ondes. En effet, les équations, écrites au niveau de la cellule composant le tissu cardiaque et régissant la propagation de potentiels électriques sont composées d'équations de Laplace dans le milieu intra et extra-cellulaire ainsi que d'une équation d'évolution non linéaire entre les deux milieux. Cette équation représente les échanges chimiques et électriques entre les milieux. Après homogénéisation, les équations obtenues sont les équations dénommées bidomaines qui sont du type réaction-diffusion. Nous avons justifié la stratégie d'homogénéisation de façon rigoureuse en établissant un théorème de convergence vers les équations bidomaines. L'étude de cette stratégie d'homogénéisation a été étendue dans un cadre plus formel en prenant en compte le fait que la propagation électrique en électrophysiologie est couplée avec le mouvement mécanique du coeur. Les équations obtenues sont originales et devraient permettre, et c'est une perspective, d'expliquer certains phénomènes observés (typiquement, que la vitesse de propagation de l'onde électrique dépend peu de l'état de déformation du coeur).

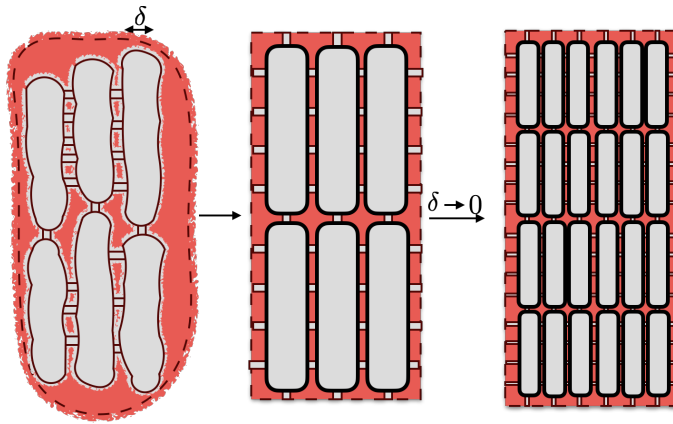


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du processus d'homogénéisation en électrophysiologie. Après s'être placé dans un cadre idéalisé périodique, nous supposons que la période du milieu tend vers 0 et étudions la suite de solutions ainsi que le problème limite correspondant. Le domaine rouge correspond au milieu extracellulaire et le gris au milieu intracellulaire. Dans une configuration 3D, ces deux milieux sont connexes (cette propriété se révèle importante dans le processus d'homogénéisation).

Problèmes inverses pour l'élastographie. L'imagerie par élastographie est une technique qui vise à utiliser des ondes élastiques (ondes de pression et de cisaillement) pour reconstruire différents paramètres d'un tissu (typiquement sa rigidité). D'un point de vue mathématique, ce problème entre dans la classe des problèmes inverses dit hybride (voir [7, 8]) où une première technique de problèmes inverses permet de reconstruire une mesure intérieure d'un autre phénomène ondulatoire, tandis qu'une seconde technique de problèmes inverses, utilisant les mesures obtenues, permet de remonter aux paramètres physiques.

Parmi les différentes techniques d'élastographie, j'en ai étudié deux.

L'élastographie par IRM. La zone à sonder du patient est excitée périodiquement et mécaniquement à basse fréquence (par un stéthoscope évolué typiquement) et est simultanément imagée par résonance magnétique. On obtient ainsi une mesure interne du champ de déplacement des vibrations. Si l'expérience est répétée de façon suffisamment décorrélée, en faisant varier l'excitation, on peut alors remonter aux coefficients élastiques en interprétant les équations élastodynamiques comme des équations dont les paramètres sont les mesures internes et dont les inconnues sont les paramètres élastiques (voir [SI13] ou [5]).

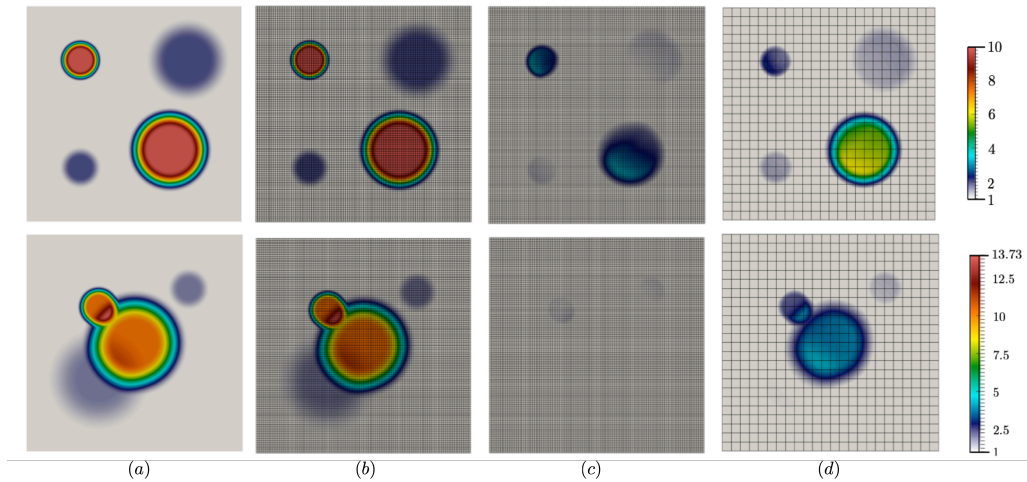


FIGURE 2.2 – Figure extraite de [SI13]. (a) paramètres élastodynamiques $(\alpha, \beta) = (2(\lambda + \mu), 2\mu)$ d'un problème isotrope. (b) Reconstruction en utilisant deux mesures décorrélés sans bruit. (c) Reconstruction après ajout de bruit. (d) Correction par technique de régularisation par projection sur des espaces éléments finis d'ordre élevé définis sur maillage grossier.

L'élastographie transitoire. Brièvement (voir Section 3.3.1 pour plus de détails sur la modélisation mathématique de la mesure associée), cette technique consiste à générer une onde de cisaillement transitoire à l'intérieur du tissu à sonder puis à imager cette onde par des ondes de pression (environ 1000 fois plus rapides) par technique de corrélation à partir de la frontière du domaine sondé. Une fois la mesure de l'onde de cisaillement obtenue, on peut remonter aux coefficients élastiques. J'ai contribué sur ces deux aspects. D'une part, nous avons étudié des techniques de corrélation pour la reconstruction, par le bord du domaine [SI13], de déplacements de petites hétérogénéités (il s'agissait de reconstruire, en utilisant des ondes de pressions, le mouvement de ces hétérogénéités généré par les ondes de cisaillement), d'autre part, nous étudions l'utilisation de techniques d'assimilation de données (voir [57] ou [SI22]). Ces sujets offrent de nombreuses perspectives et axes d'améliorations et une partie de ces axes a été incluse dans le projet ANR Elastoheart (projet ANR dont je suis porteur et débutant en 2021).

CHAPITRE 3

Analyse asymptotique de problèmes double-échelles

Dans la section 3.1, je définis un cadre abstrait double-échelles adapté à l'analyse asymptotique d'équations d'ondes, La section 3.2 est dédiée à la présentation des résultats de convergences tandis que la section 3.3 se concentre sur les applications du cadre abstrait. Des discussions et perspectives sont données Section 3.4. Le cadre que je décris dans ce chapitre a été obtenu par un processus itératif impliquant des vas-et-vient entre la construction du formalisme abstrait en question et son application aux différents problèmes appliqués mentionnés en introduction. Il s'agissait de trouver les hypothèses minimales, mais suffisamment caractérisantes, pour faire rentrer les différents problèmes double-échelles dans la théorie.

3.1 Un cadre abstrait

L'ensemble des problèmes que l'on pourrait qualifier de double-échelles étant large, je précise tout de suite que j'ai considéré essentiellement des problèmes d'équations d'ondes, c'est à dire, une sous-catégorie de problème de type hyperbolique. En effet à l'exception de travaux en homogénéisation appliqués à l'électrophysiologie [SI18, SI23] présentés Section 2.3, qui rentrent dans la classe des problèmes de type réaction-diffusion, mon activité s'est concentrée sur des problèmes de types hyperbolique.

Je rappelle que, **formellement**, nous nous intéressons à des problèmes sous la forme

$$\ddot{u}_\delta(t) + \delta^{-2} (A_0 + \delta A_1 + \delta^2 A_2) u_\delta(t) + B_0 \dot{u}_\delta(t) = f(t), \quad (3.1)$$

L'écriture sous la forme (3.1) est très pratique dans le cadre de l'analyse asymptotique formelle. En effet, après avoir supposé le développement suivant (il s'agit de l'*ansatz* asymptotique),

$$u_\delta = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 \dots,$$

on peut en déduire une cascade d'équations qui permet de calculer chacun des termes du développement et ainsi construire une approximation de u_δ . Cependant, le passage de l'écriture formelle de (3.1) à une écriture mathématiquement exacte ne se fait pas sans douleur. En effet, dans la plupart des problèmes intéressants, A_0, A_1 et A_2 représentent des opérateurs non bornés, dont les propriétés (domaine de définition, opérateurs fermés ...) sont à soigneusement déterminer pour chaque opérateur ainsi que pour leur somme (la somme d'opérateurs fermés n'étant pas nécessairement fermée ni fermable...). Pour simplifier l'analyse, l'ensemble des problèmes qui seront analysés sera réduit. En supposant dans un premier temps que les effets de couplages et/ou de dissipations impliquant $\dot{u}_\delta(t)$

sont négligés (c'est-à-dire que $B_0 = 0$ dans 3.1), les problèmes étudiés s'écrivent sous la forme,

$$\ddot{u}_\delta(t) + \delta^{-2} G_\delta^* G_\delta u_\delta(t) = f(t), \quad G_\delta : D(G_\delta) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{G}, \quad (3.2)$$

où \mathcal{H} et \mathcal{G} sont des espaces de Hilbert et où G_δ est un opérateur fermé de domaine $D(G_\delta)$ dense dans \mathcal{H} et dit double-échelles (voir la définition plus bas). Les équations considérées s'écrivent plus naturellement dans le cadre d'une formulation variationnelle. Si l'on définit l'espace de Hilbert,

$$\mathcal{V}_\delta = D(G_\delta)$$

on cherchera la solution $u_\delta(t) \in \mathcal{V}_\delta$ de

$$\frac{d^2}{dt^2} (u_\delta(t), v)_\mathcal{H} + \delta^{-2} (G_\delta u(t), G_\delta v)_\mathcal{G} = (f(t), v)_\mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{V}_\delta. \quad (3.3)$$

Je passe momentanément sous silence (voir [SI34] pour plus de détails) le fait que le problème doit être complété avec des conditions initiales (qui peuvent dépendre du petit paramètre δ), d'un terme source qui pourrait également dépendre de δ et que ces données doivent être bien préparées pour que la solution u_δ converge vers un certain u_0 .

Pour décrire plus en détail la classe de problèmes que je présente dans ce manuscrit, je définis la notion de suite d'opérateur double échelle. Une suite d'opérateurs double-échelles, notée $\{G_\delta\}$, est une suite d'opérateurs fermés de \mathcal{H} dans \mathcal{G} tels que

$$G_\delta = \overline{G_0 + \delta G_1} \quad (3.4)$$

avec G_0 et G_1 des opérateurs fermés dont les domaines de définition $D(G_0)$ et $D(G_1)$ sont denses dans \mathcal{H} . L'opérateur G_δ est la fermeture de l'opérateur $G_0 + \delta G_1$ dont le domaine de définition est $D(G_0) \cap D(G_1)$ (voir [52] pour la définition des termes utilisés ici). Avec ces hypothèses seules, il est difficile d'analyser (3.3). Ceci motive l'ajout d'hypothèses en Section 3.1.2, qui vont permettre d'analyser et de classifier les problèmes rencontrés.

Notons que dans (3.4) il a été introduit la fermeture de l'opérateur $G_0 + \delta G_1$. On peut se demander si c'est utile et si, au regard de (3.2), on pourrait utiliser (3.1) avec

$$A_0 = G_0^* G_0, \quad A_1 = G_0^* G_1 + G_1^* G_0, \quad A_2 = G_1^* G_1. \quad (3.5)$$

Pour répondre à cette question je présente un cas (voir Section 3.3.4) où l'introduction de la fermeture de $G_0 + \delta G_1$ est essentiel et donc où l'équation (3.1) avec la décomposition (3.5) n'est pas correcte. Cette difficulté peut paraître anodine, mais c'est un des problèmes rencontrés par le passage de l'écriture formelle (3.1) à un cadre plus rigoureux.

3.1.1 La famille de problèmes

Je décris maintenant en détail la famille de problèmes qui sera analysée en incluant notamment les termes de couplages et/ou de pertes. Pour cela, j'introduis un troisième espace de Hilbert \mathcal{B} (indépendant de δ) qui satisfait

$$\mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{H}, \quad (3.6)$$

où, pour chaque inclusion, l'injection correspondante est uniformément continue par rapport à δ . De plus, on suppose donnée une forme bilinéaire continue $b_0 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$, indépendante de δ et satisfaisant

$$\forall u \in \mathcal{B}, \quad 0 \leq b_0(u, u).$$

À noter que dans les cas où b_0 représente des effets dissipatifs simples on a $\mathcal{B} = \mathcal{H}$. C'est le cas lorsque l'on considère la dissipation liée à la conductivité électrique en Section 3.3.4. Il est aussi possible que \mathcal{B} soit bien un espace intermédiaire entre \mathcal{V}_δ et \mathcal{H} , c'est-à-dire que les inclusions (3.6) sont strictes, c'est le cas en Section 3.3.5 lorsque b_0 représente des phénomènes de couplages en piézoélectricité.

La famille de problèmes que l'on considère est la suivante : soit T un temps final d'observation, pour tout scalaire $\delta \in (0, 1)$, trouver

$$u_\delta \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C^0([0, T]; \mathcal{V}_\delta), \quad (3.7)$$

satisfaisant pour tout $v \in \mathcal{V}_\delta$,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u_\delta, v)_{\mathcal{H}} + \delta^{-2}(G_\delta u_\delta, G_\delta v)_{\mathcal{G}} + \frac{d}{dt}b_0(u_\delta, v) = (f_\delta, v)_{\mathcal{H}}, & \mathcal{D}'(0, T), \\ u_\delta(0) = u_\delta^0, \\ \dot{u}_\delta(0) = u_\delta^1, \end{cases} \quad (3.8)$$

où $f_\delta \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ et $(u_\delta^0, u_\delta^1) \in \mathcal{V}_\delta \times \mathcal{H}$. On montre de façon assez classique le résultat suivant :

Théorème d'existence et d'unicité. Pour chaque $\delta \in (0, 1)$, il existe une unique solution à (3.8), elle satisfait la relation d'énergie

$$\sqrt{\mathcal{E}_\delta(t)} \leq \sqrt{\mathcal{E}_\delta(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f_\delta(\tau)\|_{\mathcal{H}} d\tau, \quad (3.9)$$

où

$$\mathcal{E}_\delta(t) = \frac{1}{2} \left(\|\dot{u}_\delta(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \delta^{-2} \|G_\delta u_\delta(t)\|_{\mathcal{G}}^2 \right). \quad (3.10)$$

Le résultat d'énergie (3.9) montre que pour espérer obtenir la convergence de u_δ vers une fonction u_0 , il faut que

$$\mathcal{E}_\delta(0) \quad \text{et} \quad \int_0^t \|f_\delta(\tau)\|_{\mathcal{H}} d\tau$$

soit à minima bornés indépendamment de δ . L'ensemble des hypothèses sur les données du problème pour obtenir les résultats de convergence souhaités sont données plus bas, on dira que les données sont bien préparées lorsque ces hypothèses sont satisfaites.

3.1.2 Trois sous-catégories de problèmes

Pour pouvoir espérer analyser de façon abstraite (3.8), les différentes échelles du problème, représentées par les opérateurs G_0 et G_1 doivent, dans un sens à préciser, être partiellement décorrélées. Pour préciser cette idée, j'ai introduit dans [SI34] trois propriétés dites de séparation d'échelles.

- **Séparation d'échelles faible.** J'ai regroupé dans cette propriété les hypothèses minimales utilisées pour démontrer la convergence faible de u_δ vers une fonction u_0 (qui appartient au noyau de G_0) et qui est solution d'un problème limite (donné plus bas). Ces hypothèses sont les suivantes,

$$\begin{cases} D(G_0) \cap D(G_1) \text{ dense dans } D(G_0), \\ D(G_0^*) \cap D(G_1^*) \text{ dense dans } D(G_0^*), \\ \text{Ker } G_0^* \cap D(G_1^*) \text{ dense dans } \text{Ker } G_0^*. \end{cases} \quad (3.11)$$

- **Séparation d'échelles forte.** La suite d'opérateurs double-échelles $\{G_\delta\}$ satisfait la séparation d'échelles forte lorsque

$$\begin{cases} D(G_0) \cap D(G_1) \text{ dense dans } D(G_0), \\ \forall (u, v) \in D(G_0) \times D(G_1), \quad (G_0 u, G_1 v)_G = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Si la séparation d'échelles forte est vérifiée alors la séparation d'échelles faible l'est également. Cette propriété permet de nombreuses simplifications aux problèmes considérés. En effet, en admettant que l'écriture (3.1) à un sens, la séparation d'échelles forte implique que $A_1 = 0$ et donc que le problème ne dépend que du paramètre δ^2 . Par ailleurs on montre que dans ce cas on a nécessairement

$$G_\delta = G_0 + \delta G_1,$$

C'est-à-dire que la somme d'opérateurs $G_0 + \delta G_1$ est fermée.

- **Séparation d'échelles stricte.** La suite d'opérateur double-échelles $\{G_\delta\}$ satisfait la séparation d'échelles stricte lorsque

$$\begin{cases} \forall (g, h) \in D(G_0^*) \times D(G_1^*), \quad (G_0^* g, G_1^* h)_H = 0, \\ \forall (u, v) \in D(G_0) \times D(G_1), \quad (G_0 u, G_1 v)_G = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

L'étude de problèmes satisfaisant la séparation d'échelles stricte est la plus simple et on verra que ce type de problème se rencontre lors de l'étude des équations piézoélectriques. Par ailleurs, si la séparation d'échelles stricte est vérifiée alors la séparation d'échelles forte l'est également.

La notion de séparation d'échelles faible donne les hypothèses minimales pour énoncer le théorème qui suit (voir [SI34] pour plus de détails). Pour énoncer ce résultat il faut introduire l'opérateur Q_0 qui est la projection orthogonale pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_G$ dans $\text{Ker } G_0^*$.

Théorème sur les suites d'opérateur double-échelles. Soit $G_\delta = \overline{G_0 + \delta G_1}$ une suite d'opérateur double échelles satisfaisant la séparation d'échelle faible, alors, $Q_0 G_\delta \subset \delta \overline{Q_0 G_1}$ et

$$\forall u \in D(G_\delta), \quad \|\overline{Q_0 G_1} u\|_{\mathcal{G}} \leq \delta^{-1} \|G_\delta u\|_{\mathcal{G}}.$$

Par ailleurs, pour toute suite de fonctions $\{u_\delta\}$ de $D(G_\delta)$ satisfaisant

$$\|u_\delta\|_{\mathcal{H}} + \delta^{-1} \|G_\delta u_\delta\|_{\mathcal{G}} \leq C,$$

où C est indépendant de δ , alors il existe $u_0 \in \text{Ker } G_0$ tel que $u_\delta \xrightarrow[\mathcal{H}]{} u_0$. De plus si

$$\forall v \in \mathcal{D}(G_0) \cap D(G_1), \quad (\delta^{-1} G_\delta u_\delta, G_0 v)_{\mathcal{G}} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0,$$

alors $\delta^{-1}(I - Q_0) G_\delta u_\delta \xrightarrow[\mathcal{G}]{} 0$.

Sans rentrer dans les détails, ce théorème sert d'une part à définir l'espace dans lequel appartient la solution limite, d'autre part, il sert à passer à la limite, δ tend vers 0 dans la formulation variationnelle (3.8) (en fait une version espace-temps de cette formulation) pour obtenir le problème limite qui est introduit dans la section qui vient.

3.2 Analyse asymptotique

Maintenant que j'ai présenté la formulation abstraite que l'on considérera, je peux introduire la problématique principale qui a orienté une partie importante de mes travaux de recherches depuis une dizaine d'années : l'analyse asymptotique de problèmes double-échelles.

Dans sa version la plus simple, cette problématique consiste à chercher un terme limite u_0 , indépendant de δ , solution d'une équation limite indépendante de δ , telle que u_δ tende vers u_0 dans un certain sens lorsque δ tend vers 0. Ce problème soulève déjà plusieurs questions auxquelles je vais apporter des réponses dans cette section : Quelle est la définition du problème limite ? Quelles sont ses propriétés ? En quel sens la convergence a lieu ? Faible ? Fort ? Quelles sont les hypothèses minimales pour obtenir la convergence forte ? Est-il possible d'obtenir des estimations d'erreurs ?

3.2.1 Espace de fonctions tests et espace des solutions

La description du problème limite nécessite la définition de plusieurs espaces fonctionnels. Pour soulager les notations, j'introduis tout d'abord l'espace de Hilbert \mathcal{V}_∞ et \mathcal{V}_0 donnés par

$$\mathcal{V}_\infty = D(G_0) \cap D(G_1), \quad \mathcal{V}_0 = D(\overline{Q_0 G_1})$$

et satisfaisant $\mathcal{V}_\infty \subset \mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{V}_0$. Ces espaces sont équipés de normes directement déduites, respectivement, de la norme du graphe des opérateurs $G_0 + \delta G_1$ et $\overline{Q_0 G_1}$ (le produit scalaire correspondant se déduit aisément). L'espace \mathcal{V}_∞ est un espace (indépendant de δ) utilisé comme espace de fonction test ; \mathcal{V}_0 un espace dans lequel $u_\delta(t)$ converge faiblement. Notons que le fait que $\overline{Q_0 G_1}$ soit fermable (cette propriété n'est a priori pas garantie) est une conséquence de la séparation d'échelle faible.

Pour caractériser plus en détail l'espace dans lequel la solution du problème limite appartient, j'introduis les notations suivantes

$$\mathcal{V}_\infty^0 = \mathcal{V}_\infty \cap \text{Ker } G_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_0^0 = \mathcal{V}_0 \cap \text{Ker } G_0.$$

Finalement, il faut définir un dernier espace de Hilbert, l'espace $\mathcal{H}^0 \subset \text{Ker } G_0 \subset \mathcal{H}$ donné par

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{V}_0^0}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}}. \quad (3.14)$$

Il est montré dans [SI34] que si la séparation d'échelles forte est vérifiée alors $\overline{Q_0 G_1} = G_1$ et $\mathcal{V}_\infty^0 = \mathcal{V}_0^0$. Par ailleurs, si la séparation d'échelles stricte est vérifiée, alors on a directement $\mathcal{H}_0 = \text{Ker } G_0$.

L'ensemble des propriétés mentionnées Section 3.1.2 n'est toujours pas suffisant pour analyser la convergence de la famille de problèmes (3.8). Nous devons rajouter une hypothèse de densité qui sera trivialement satisfaite si la séparation d'échelles forte est vérifiée.

$$\mathcal{V}_\infty^0 \text{ dense dans } \mathcal{V}_0^0. \quad (3.15)$$

L'utilisation de cette hypothèse est la suivante : par un processus limite on obtient une formulation variationnelle pour le terme limite $u_0(t) \in \mathcal{V}_0^0$, faisant intervenir un espace de fonctions tests dont les fonctions sont, à t fixé, dans \mathcal{V}_∞^0 . L'hypothèse (3.15) permet d'étendre cette formulation à des fonctions dans \mathcal{V}_0^0 . On obtient ainsi une formulation bien posée qui caractérise complètement le terme limite u_0 .

Malgré mes efforts, je n'ai pas pu me débarrasser de l'hypothèse (3.15) qui ne semble pas être une conséquence des hypothèses précédentes. Je ne sais pas à l'heure actuelle si cette hypothèse est réellement nécessaire et je ne connais pas non plus d'exemples applicatifs où elle n'est pas vérifiée.

3.2.2 Le problème limite

Le fait que la séparation d'échelle faible soit satisfaite nous garantit que l'opérateur $\overline{Q_0 G_1}$ a bien un sens et ceci nous permet d'écrire le problème limite. Ce problème est le suivant : trouver

$$u_0 \in C^1([0, T]; \mathcal{H}_0) \cap C^0([0, T]; \mathcal{V}_0^0),$$

tel que pour tout $v \in \mathcal{V}_0^0$,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u_0, v)_{\mathcal{H}} + (\overline{Q_0 G_1} u_0, \overline{Q_0 G_1} v)_{\mathcal{G}} + \frac{d}{dt} b_0(u_0, v) = (f_0, v)_{\mathcal{H}}, & \mathcal{D}'(0, T), \\ u_0(0) = u^0, \\ \dot{u}_0(0) = P_0 u^1, \end{cases} \quad (3.16)$$

où $f_0 \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ et $(u^0, u^1) \in \mathcal{V}_0^0 \times \mathcal{H}$ et où P_0 est l'opérateur de projection orthogonale sur \mathcal{H}_0 . Pour finir, je fais remarquer que le problème (3.16) à un sens bien défini car il est possible de démontrer la propriété suivante : $\mathcal{V}_0^0 \subset \mathcal{B}$ et

$$\forall v \in \mathcal{V}_0^0, \quad \|v\|_{\mathcal{B}} \leq C_{\mathcal{I}} \|v\|_{\mathcal{V}_0^0}.$$

3.2.3 Solutions propagatives et solutions non-propagatives

Même si G_δ ne possède pas de noyau non-trivial, ce n'est pas nécessairement le cas de l'opérateur $\overline{Q_0 G_1}$ qui intervient de façon fondamentale dans (3.16). C'est pourquoi il est intéressant d'introduire l'espace

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{V}_0^0 \cap \text{Ker } \overline{Q_0 G_1} = \text{Ker } G_0 \cap \text{Ker } \overline{Q_0 G_1}$$

ainsi que son complément orthogonal \mathcal{S}_0 défini par

$$\mathcal{V}_0^0 = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{S}_0$$

où l'orthogonalité a lieu pour le produit scalaire dans \mathcal{H} et dans \mathcal{V}_0 . On a également $\mathcal{H}_0 = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_0^\perp$, où la décomposition est orthogonale au sens du produit scalaire dans \mathcal{H} et on définit par ailleurs $\mathcal{Q}_{\mathcal{R}} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{R}_0$ le projecteur orthogonal dans \mathcal{R}_0 . L'espace \mathcal{S}_0 est appelé l'espace des solutions propagatives tandis que l'espace \mathcal{R}_0 est appelé l'espace des solutions non-propagatives. L'introduction de ces deux espaces permet les remarques suivantes :

- Tout d'abord, dans le cas où $b_0 = 0$, on peut observer que si on décompose u_0 comme $u_0 = s_0 + r_0$ avec $s_0(t) \in \mathcal{S}_0$ et $r_0(t) \in \mathcal{R}_0$ alors r_0 satisfait l'équation

$$\ddot{r}_0(t) = \mathcal{Q}_{\mathcal{R}} f_0(t), \quad \text{dans } \mathcal{R}_0,$$

c'est-à-dire que r_0 satisfait une équation différentielle ordinaire et *ne se propage donc pas*. À titre d'exemple, dans le cas de plaques élastiques minces étudiées Section 3.3.3, l'espace \mathcal{R}_0 est l'espace des déplacements homogènes dans la direction de l'épaisseur et polarisés dans cette même direction. On peut alors constater que lorsque $\mathcal{Q}_{\mathcal{R}} f_0 = 0$ alors le problème sur r_0 devient *encore plus décevant* et il faut chercher des modèles d'ordres supérieurs pour retrouver des équations intéressantes sur l'approximation de u_δ dans \mathcal{R}_0 (voir la discussion Section 3.4.3).

- Ensuite, lorsque b_0 est non-nulle, positive et symétrique, c'est-à-dire lorsque le problème d'équation d'ondes sous-jacent est dissipatif, alors les termes r_0 et s_0 sont couplés. Il est possible d'obtenir une équation uniquement sur s_0 après remplacement du terme r_0 par sa valeur en fonction de s_0 . On obtient ainsi une équation non locale en temps où ces non localités sont des termes dispersifs et dissipatifs. À titre d'exemple, en supposant les données initiales du problème nulles et $f_0 \in L^1(0, T; \mathcal{S}_0)$, le problème que l'on obtient s'écrit : trouver

$$s_0 \in C^1([0, T]; \mathcal{R}_0^\perp) \cap C^0([0, T]; \mathcal{S}_0),$$

satisfaisant, pour tout $s \in \mathcal{S}_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2}(s_0, v)_{\mathcal{H}} + (\overline{Q_0 G_1} s_0, \overline{Q_0 G_1} s)_G \\ \quad + \frac{d}{dt} b_0(s_0, s) + b_0(\Psi_t B_S^{\mathcal{R}} s_0, s) = (f_0, s)_{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{D}'(0, T), \\ s_0(0) = 0, \\ \dot{s}_0(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

où $B_S^{\mathcal{R}} : \mathcal{S}_0 \mapsto \mathcal{R}_0$ est l'opérateur borné défini par : pour tout $(s, r) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{R}_0$

$$(B_S^{\mathcal{R}} s, r)_{\mathcal{V}_0} = (B_S^{\mathcal{R}} s, r)_{\mathcal{H}} = b_0(s, r).$$

L'opérateur $\Psi_t : C^0([0, T]; \mathcal{R}_0) \rightarrow C^0([0, T]; \mathcal{R}_0)$ est un opérateur non local en temps donné par

$$\forall r \in C^0([0, T]; \mathcal{R}_0), \quad \Psi_t r = B_{\mathcal{R}} \int_0^t e^{B_{\mathcal{R}}(t-\tau)} r(\tau) d\tau - r(t),$$

où $B_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}_0 \mapsto \mathcal{R}_0$ est l'opérateur borné défini par : pour tout $(r, \tilde{r}) \in \mathcal{R}_0 \times \mathcal{R}_0$,

$$(B_{\mathcal{R}} r, \tilde{r})_{\mathcal{V}_0} = (B_{\mathcal{R}} r, \tilde{r})_{\mathcal{H}} = b_0(r, \tilde{r}).$$

Ce phénomène se retrouve dans l'étude asymptotique de câbles coaxiaux [SI8]. Le même phénomène pourrait être observé si l'on considérait la propagation et la dissipation d'ondes dans des plaques élastiques. Des effets similaires sont bien connus dans les problèmes d'homogénéisation [62, 17] lorsque certains termes de dissipations sont introduits. On peut remarquer que, ici, ce phénomène non local ne vient pas naturellement lors du passage à la limite, mais s'obtient uniquement après réduction des équations limites sur \mathcal{S}_0 . Il en aurait été autrement sans l'hypothèse sur l'espace \mathcal{B} et la forme bilinéaire b_0 .

3.2.4 Le cas des séparations d'échelles fortes et strictes

Dans le cas où la séparation d'échelle forte ou stricte est satisfaite par la suite d'opérateur double-échelles de nombreuses simplifications se produisent. Elles sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème sur la séparation d'échelle forte et stricte. Si la suite d'opérateur double-échelles G_δ satisfait la séparation d'échelle forte, alors

$$\begin{cases} \mathcal{V}_\infty = \mathcal{V}_\delta = D(G_0) \cap D(G_1), \\ \mathcal{V}_0 = D(G_1), \\ \mathcal{V}_\infty^0 = \mathcal{V}_0^0 = D(G_1) \cap \text{Ker } G_0, \\ \mathcal{R}_0 = \text{Ker } G_1 \cap \text{Ker } G_0 \end{cases}$$

et pour tout (u, v) dans $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0$, $a_0(u, v) = (G_1 u, G_1 v)_{\mathcal{G}}$. De plus si la séparation d'échelle stricte est satisfaite,

$$\begin{cases} \mathcal{V}_\infty = \mathcal{V}_\infty^0 \oplus (D(G_0) \cap \text{Ker } G_1), \\ \mathcal{H}_0 = \text{Ker } G_0, \\ \mathcal{R}_0 = \{0\}, \\ \mathcal{S}_0 = \mathcal{V}_\infty^0, \end{cases} \quad (3.18)$$

La décomposition dans (3.18) est orthogonal pour le produit scalaire dans \mathcal{H} et dans \mathcal{V}_∞ .

3.2.5 Analyse de convergence vers le problème limite

Nous commençons par définir la notion de données bien préparées qui permettra d'énoncer les résultats de convergence souhaités. Les données sont bien préparées si

$$(u_\delta^0, u_\delta^1) \in \mathcal{V}_\delta \times \mathcal{H} \quad \text{et} \quad f_\delta \in L^1(0, T; \mathcal{H})$$

et s'il existe $(u^0, u^1) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{H}$ et $f_0 \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ tels que

$$u_\delta^0 \xrightarrow{\mathcal{V}_0} u^0, \quad u_\delta^1 \xrightarrow{\mathcal{H}} u^1 \quad \text{et} \quad f_\delta \xrightarrow{L^1(0, T; \mathcal{H})} f_0. \quad (3.19)$$

de plus nous supposons qu'il existe $C_0 > 0$ indépendant de δ tel que

$$\|G_0 u_\delta^0\|_{\mathcal{G}} \leq \delta C_0. \quad (3.20)$$

Cette dernière hypothèse est la plus contraignante. Elle impose que u_δ^0 soit adapté à la structure asymptotique de la solution. Plus précisément, cette propriété implique que u^0 appartient à $\text{Ker } G_0$ et donc $u_0 \in \mathcal{V}_0^0$. Par ailleurs le fait que les données soient bien préparées implique que la suite de solutions $\{u_\delta\}$ de (3.8) soit bornées uniformément par rapport à δ dans des normes qui nous permettront d'appliquer les résultats précédemment introduits sur les opérateurs double-échelles. Plus précisément :

Stabilité uniforme. Si les données sont bien préparées alors u^0 appartient à \mathcal{V}_0^0 et il existe $C > 0$ indépendant de δ tel que la suite de solutions $\{u_\delta\}$ de (3.8) satisfait,

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|\dot{u}_\delta(t)\|_{\mathcal{H}} + \delta^{-1} \|G_\delta u_\delta\|_{\mathcal{G}}) \leq C. \quad (3.21)$$

Convergence faible. On montre dans [SI34] que si les données sont bien préparées alors, si la séparation d'échelles faible est vérifiée et si le résultat de densité (3.15) est vérifié,

$$u_\delta \xrightarrow{H^1(0, T; \mathcal{H})} u_0 \quad \text{and} \quad u_\delta \xrightarrow{L^2(0, T; \mathcal{V}_0)} u_0,$$

où $\{u_\delta\}$ est solution de la famille de problèmes (3.3) et u_0 est la solution du problème limite (3.16) avec comme données (u^0, u^1) et f_0 défini par (3.19).

Convergence forte. Dans le cas où la séparation d'échelles forte est vérifiée et si l'injection de \mathcal{V}_0^0 dans \mathcal{H}_0 est compacte, on montre alors que

$$P_0 u_\delta \xrightarrow{L^2(0, T; \mathcal{H})} u_0.$$

Par ailleurs si

$$\exists C > 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0^\perp \cap D(G_0), \quad \|u\|_{\mathcal{H}} \leq C \|G_0 u\|_{\mathcal{G}}. \quad (3.22)$$

alors

$$(I - P_0) u_\delta \xrightarrow{L^2(0, T; \mathcal{H})} 0 \quad \text{et donc} \quad u_\delta \xrightarrow{L^2(0, T; \mathcal{H})} u_0.$$

Estimation d'erreur. Il est possible d'établir des estimations d'erreur abstraites qui sont énoncées dans ce qui suit dans le cas plus simple de données initiales nulles $u^0 = 0$ et $u^1 = 0$ et $f_\delta = f_0 \in L^1(0, T; \mathcal{H})$. Lorsque la séparation d'échelles stricte est vérifiée et si l'inégalité (3.22) est vérifiée alors

$$\sup_{t \in [0, T]} (\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|G_1(\mathbb{U}_\delta(t) - \mathbb{U}_0(t))\|_{\mathcal{G}}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \delta C(T)$$

où $C(T)$ est une fonction positive croissante de T et indépendante de δ . Dans l'inégalité précédente, \mathbb{U}_δ et \mathbb{U}_0 sont les primitives en temps de u_δ et u_0 respectivement,

$$\mathbb{U}_\delta(t) = \int_0^t u_\delta(s) ds \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_0(t) = \int_0^t u_0(s) ds.$$

Lorsque la séparation d'échelles forte est vérifiée, il est nécessaire de supposer une hypothèse plus forte que (3.22). Pour l'énoncer, il faut introduire l'opérateur borné $\mathbf{G}_0 : \mathcal{V}_\infty \mapsto \mathcal{G}$ défini par

$$\forall v \in \mathcal{V}_\infty, \quad \mathbf{G}_0 v = G_0 v.$$

En supposant que,

$$\exists C > 0, \quad \forall u \in (\text{Ker } \mathbf{G}_0)^\perp, \quad \|u\|_{\mathcal{V}_\infty} \leq C \|G_0 u\|_{\mathcal{G}}, \quad (3.23)$$

où l'orthogonalité est satisfaite pour le produit scalaire dans \mathcal{V}_∞ . Il est alors possible de montrer une estimation d'erreur (il se trouve que la condition (3.23) correspond à une condition *inf-sup*, voir [14]). Cette estimation est de la forme

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\|\mathbf{U}_\delta(t) - \mathbf{U}_0(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|G_1 \int_0^t (\mathbf{U}_\delta(\tau) - \mathbf{U}_0(\tau)) \, d\tau\|_{\mathcal{G}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta C(T), \quad (3.24)$$

où $C(T)$ est une autre fonction positive croissante de T et indépendante de δ .

3.3 Applications

Les applications présentées ici concernent des problèmes en électro-mécanique. Plus précisément, les applications qui seront considérées sont les suivantes.

- **Elastodynamique en milieux quasi-incompressibles fibrés** (voir [SI19, SI30, SI28] et Section 3.3.1). Cette application concerne la propagation d'ondes émises, par exemple, par des capteurs piézoélectriques, dans le corps humain dans l'objectif de remonter, par des techniques de problèmes inverses, aux propriétés mécaniques ou géométriques des tissus. Les tissus humains sont des milieux quasi-incompressible (ceci est dû au fait qu'ils sont composés essentiellement d'eau) et peuvent être fibrés (c'est le cas des tissus musculaires ou cardiaques).
- **Milieux homogènes isotropes mous** (voir [SI4, SI20, SI21] et Section 3.3.2). Cette application, qui est un cas particulier de l'application précédente, est plutôt académique, mais est intéressante d'un point de vue mathématique et pourrait s'avérer très utile dans l'étude de problèmes de contrôle non-destructifs de milieux mous tels que des pneus (milieux composés de caoutchouc renforcé par des fibres de metal).
- **Ondes dans des plaques stratifiées** (voir [TH4] et Section 3.3.3). Cette application concerne le contrôle non-destructifs de plaques utilisées en aéronautique. Le milieu de propagation des ondes générées par les capteurs est mince par rapport aux longueurs d'ondes émises et stratifié pour des raisons structurelles (typiquement pour l'optimisation du rapport entre le poids et des propriétés mécaniques de la structure).
- **Ondes électromagnétiques dans des câbles coaxiaux** (voir [SI5, SI8, SI12] et Section 3.3.4). Cette application concerne la propagation de potentiels et intensité électriques dans des câbles coaxiaux et concerne de nombreuses applications (aéronautique et ferroviaire par exemple). La compréhension de ces phénomènes est un enjeu critique pour l'optimisation ou le contrôle de ces câbles.
- **Piézoélectricité** (voir [SI2, SI10] et Section 3.3.5). L'application industrielle visée est la modélisation de capteurs piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques convertissent les variations de champs électriques en variations mécaniques et réciproquement. Ils sont utilisés comme émetteur d'onde élastique et comme outil de mesures de ces mêmes ondes.

J'introduis maintenant les notations nécessaires à la lecture des équations linéaires sous-jacentes, à savoir, les équations de l'élastodynamique, les équations de Maxwell et leur couplage dans le cas des équations de la piézoélectricité.

Équations de Maxwell, élastodynamique et piézoélectricité. Soit Ω et Ω_E deux domaines de \mathbb{R}^3 tels que $\Omega \subset \Omega_E$, de frontière Γ et Γ_E et de normale sortante unitaire \mathbf{n} et \mathbf{n}_E et soit T un temps final d'observation. Dans ce qui suit sont rappelées les équations classiques de la piézoélectricité qui couplent les équations de Maxwell, posées dans $\Omega_E \times [0, T]$ et les équations de l'élastodynamique, posées dans $\Omega \times [0, T]$. Toutes les quantités intervenant dans ces équations sont résumées Table 3.1.

Le domaine Ω_E représente un milieu diélectrique dans lequel on cherche à calculer, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_E$ et $t \in [0, T]$, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, le champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ et le champ de déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$. On considère que ces quantités sont gouvernées par les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{D} + \sigma \mathbf{E} - \mathbf{curl} \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \Omega_E \times [0, T], \\ \mu \partial_t \mathbf{H} + \mathbf{curl} \mathbf{E} = \mathbf{0}, & \Omega_E \times [0, T], \end{cases} \quad (3.25)$$

où $\mu(\mathbf{x})$ est la perméabilité du milieu, $\sigma(\mathbf{x})$ sa conductivité électrique et $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ une densité de courant supposée donnée.

Le domaine Ω représente un milieu élastique, éventuellement fibré, dans lequel on cherche à calculer, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, les champs suivants : le déplacement élastique linéarisé $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$, la vitesse particulière $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ (l'espace des matrices – ou des tenseurs – symétriques). On considère que ces quantités sont gouvernées par les équations de l'élastodynamique linéarisées,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{v} & \Omega \times [0, T], \\ \rho \partial_t \mathbf{v} - \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, & \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (3.26)$$

où $\rho(\mathbf{x})$ est la densité du milieu et $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ une densité de charge supposée connue.

Les équations (3.25) et (3.26) sont complétées par des lois d'états qui, dans le cas de la prise en compte de couplages piézoélectriques couplent \mathbf{D} , \mathbf{E} et \mathbf{u} . Ces lois d'états s'écrivent

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{d}^* \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \Omega_E \times [0, T] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{d} \mathbf{E} \quad \Omega \times [0, T]. \quad (3.27)$$

Dans les équations (3.27), $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ est la permittivité du milieu, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ le champ de déformation défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^t),$$

et $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ le tenseur d'élasticité défini comme la forme linéaire suivante,

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda(\mathbf{x}) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2 \mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon} + \gamma(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \otimes \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

où $\lambda(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont les deux coefficients de Lamé, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ une direction de fibre du milieu (si le milieu n'est pas fibré $\gamma = 0$ et $\boldsymbol{\tau}$ n'intervient pas) et $\gamma(\mathbf{x})$ un coefficient représentant la raideur des fibres du milieu. Finalement le tenseur piézoélectrique $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ est une forme linéaire qui, en chaque $\mathbf{x} \in \Omega$, envoie les vecteurs de \mathbb{R}^3 vers $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$. Son adjoint, l'opérateur linéaire $\mathbf{d}^*(\mathbf{x}) : \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3} \mapsto \mathbb{R}^3$, est défini de la façon suivante

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{d}(\mathbf{x}) \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}.$$

\mathbf{u}	Champ des déplacements	ρ	Densité	\mathbf{C}	Tenseur élastique
\mathbf{v}	Champ des vitesses	λ	1er coeff. de Lamé	$\boldsymbol{\tau}$	Direction de fibre
$\boldsymbol{\sigma}$	Champ des contraintes	μ	2nd coeff. de Lamé	\mathbf{d}	Tenseur piézoélectrique
\mathbf{E}	Champ électrique	γ	Raideur de fibre		
\mathbf{H}	Champ magnétique	ϵ	Permittivité		
\mathbf{D}	Déplacement électrique	μ	Perméabilité		
		σ	Conductivité		

TABLE 3.1 – Inconnues et paramètres physiques utilisés.

À noter que dans la première équation de (3.27) il est sous-entendu que \mathbf{d}^* et $\varepsilon(\mathbf{u})$ sont étendus par $\mathbf{0}$ dans $\Omega_E \setminus \Omega$.

En éliminant \mathbf{D} et $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{u} en utilisant (3.27), on obtient que les équations de la piézoélectricité sont un système d'équations en $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{u})$ s'écrivant

$$\begin{cases} \mu \partial_t \mathbf{H} + \operatorname{curl} \mathbf{E} = \mathbf{0}, & \Omega_E \times [0, T], \\ \epsilon \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{d}^* \varepsilon(\partial_t \mathbf{u}) - \operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{j}, & \Omega_E \times [0, T], \\ \rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \operatorname{Div} \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}) + \operatorname{Div} \mathbf{d} \mathbf{E} = \mathbf{f}, & \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ces équations sont complétées par des données initiales et des données aux bords. Les données initiales s'écrivent

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}^0(\mathbf{x}), \quad \Omega_E, \quad (3.30)$$

et

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}), \quad \Omega.$$

Les conditions aux bords que l'on considérera pour le champ de déplacement sont de deux types différents, bords encastrés ou surface libre,

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_D \times [0, T], \\ (\mathbf{C}(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - \mathbf{d}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, & (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_N \times [0, T], \end{cases} \quad (3.31)$$

avec $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$. Concernant le champ électrique, nous supposons, pour simplifier, que le milieu diélectrique (ou piézoélectrique) Ω_E est entouré d'un conducteur parfait et donc que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n}_E(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \Gamma_E \times [0, T]. \quad (3.32)$$

3.3.1 Elastodynamique en milieux quasi-incompressibles

Une application spécifique : la propagation d'ondes de cisaillement en élastographie. Une des applications cible est la propagation d'ondes élastiques dans les tissus vivant dans le contexte de l'imagerie élastographique en transitoire. Dans cette technique d'imagerie des ondes de cisaillement sont générées à l'intérieur du tissu (qui peut être fibré, comme par exemple le tissu musculaire) par la focalisation d'ondes de pression (voir [TH2] et [SI28] pour une justification de ce phénomène qui est intrinsèquement non-linéaires) et voir Figure 3.2 pour une illustration. Ensuite, le déplacement du tissu généré par les ondes

de cisaillement est imagé à des nombreux instants par des techniques de corrélations en utilisant des ondes de pression (voir [SI15] pour une étude mathématique sur des stratégies de problèmes inverses reposant sur ce principe). La séquence obtenue donne ainsi accès à des mesures interne du phénomène physique et il est alors possible de remonter à certaine propriétés du milieu de propagation.

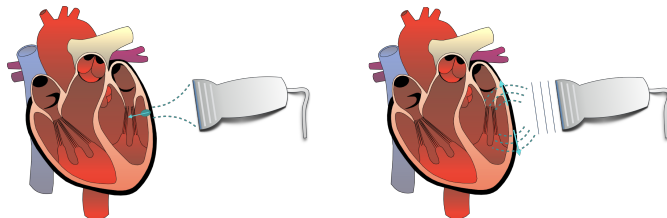


FIGURE 3.1 – Figure issue des travaux de [TH2]. Grâce à une sonde (un capteur piézoélectrique multi-éléments) des ondes de pression sont focalisées dans le tissu cardiaque. A cause de phénomènes non-linéaires lié à la dissipation du milieu une onde de cisaillement est générée puis imagés.

Cette stratégie est possible grâce aux propriétés mécaniques du milieu :

- sa non-linéarité et son caractère dissipatif ; C'est nécessaire pour la génération interne d'ondes de cisaillement par la focalisation d'ondes de pression générées en surface (voir [SI28]) ;
- sa quasi-incompressibilité ; Cette propriété entraine le découplage quasi-statique des ondes de pression et de cisaillement. C'est-à-dire que les ondes de pression (caractérisées par une polarisation presque parallèle à la direction de propagation) se propagent beaucoup plus vite que les ondes de cisaillement (caractérisées par une polarisation presque orthogonale à la direction de propagation).

Dans l'objectif d'améliorer cette technique d'imagerie, il est important de pouvoir simuler efficacement la propagation d'ondes de cisaillement. Ce problème, on va le voir plus bas, rentre dans la classe des problèmes double-échelles par le rapport de vitesses entre les ondes de pressions (environ 1500 m/s) et les ondes de cisaillement (environ 1 m/s à 10 m/s) dans les tissus. Figure 3.2, illustre les ondes de cisaillement générées en élastographie transitoire dans un cube de matière.

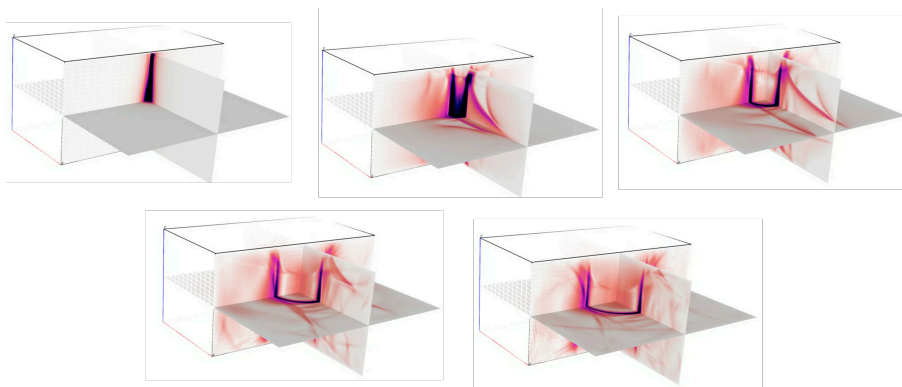


FIGURE 3.2 – Figure extraite de [SI19]. Propagation d'une onde de cisaillement dans un cube de matière incompressible. La source correspond qualitativement à une source provenant de la focalisation d'ondes de pression.

Problème double-échelles. Le milieu de propagation est un milieu élastique décrit par un tenseur d'élasticité où le premier coefficient de Lamé λ est très élevé par rapport aux autres paramètres. En considérant que le domaine Ω est connexe, borné et régulier (typiquement Lipschitz) et en considérant que $\Gamma_D = \Gamma$ (condition d'encastrement sur toute la frontière) la formulation variationnelle du problème s'écrit, après adimensionnalisation : trouver $\mathbf{u}_\delta(t) \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)^3$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \delta^{-2} \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} \mu \varepsilon(\mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \gamma (\varepsilon(\mathbf{u}_\delta) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dans la formulation précédente $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé adimensionnalisés, par ailleurs pour prendre en compte le caractère fibré du milieu sous-jacent, il a été considéré un terme faisant intervenir une direction de fibre normalisée $\boldsymbol{\tau}$ ainsi que $\gamma \geq 0$ un coefficient lié à la rigidité relative de la fibre. Finalement, le champ de vecteur \mathbf{f} est un terme source volumique et la formulation (3.33) est complétée par des conditions initiales nulles pour simplifier. En posant formellement

$$G_\delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \delta \varepsilon(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = L^2(\Omega) \times L_{\text{sym}}^2(\Omega)^{3 \times 3}, \quad (3.34)$$

la formulation (3.33) s'écrit, pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)^3$,

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u}_\delta, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}} + \delta^{-2} (G_\delta \mathbf{u}_\delta, G_\delta \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{G}} = (\rho^{-1} \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}} \quad (3.35)$$

où $\mathcal{H} = L^2(\Omega)^3$ est équipé du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x},$$

et, où \mathcal{G} est équipé du produit scalaire suivant : pour tout couple de champs (φ, ε) et $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varepsilon})$ dans $L^2(\Omega) \times L_{\text{sym}}^2(\Omega)^{3 \times 3}$,

$$\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{G}} = \int_{\Omega} \lambda \varphi \tilde{\varphi} \, d\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} \mu \varepsilon : \tilde{\varepsilon} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \gamma (\varepsilon \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\tilde{\varepsilon} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\mathbf{x}$$

Plus rigoureusement, on définit complètement G_δ en posant $D(G_\delta) = H_0^1(\Omega)^3$. On peut montrer qu'avec cette définition G_δ est bien un opérateur fermé. En effet, on pourrait vouloir définir

$$D(G_\delta) = \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \varepsilon(\mathbf{u}) \in L_{\text{sym}}^2(\Omega)^{3 \times 3}, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \}, \quad (3.36)$$

qui est a priori un espace plus grand que $H_0^1(\Omega)^3$ sur lequel la définition de G_δ donnée par (3.34) à un sens (en effet, la divergence de \mathbf{u} s'obtient en prenant la trace de $\varepsilon(\mathbf{u})$). On montre, grâce à la première inégalité de Korn, que la définition (3.36) à un sens et est équivalente à $D(G_\delta) = H_0^1(\Omega)^3$.

Première inégalité de Korn. Soit Ω un domaine borné Lipschitz de \mathbb{R}^3 alors il existe un scalaire $c_K > 0$ tel que pour tout $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}^2 \leq c_K \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2.$$

Il faut maintenant montrer que G_δ est bien un opérateur double-échelles. Pour cela, on introduit naturellement les opérateurs suivant,

$$G_0 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad G_1 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

avec $D(G_1) = H_0^1(\Omega)^3 = D(G_\delta)$ et

$$D(G_0) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} = H_0(\operatorname{div}, \Omega). \quad (3.38)$$

On peut vérifier que ces opérateurs sont bien de domaines denses et fermés et que, par construction, on a $G_0 + \delta G_1 \subset G_\delta$ (c'est-à-dire que les opérateurs $G_0 + \delta G_1$ et G_δ coïncident sur $D(G_0 + \delta G_1)$ et cet espace est inclus dans $D(G_\delta)$). On remarque cependant que

$$D(G_0 + \delta G_1) = D(G_0) \cap D(G_1) = D(G_1) = D(G_\delta),$$

et donc, on en déduit que $G_\delta = G_0 + \delta G_1$. Comme G_δ est fermé on trouve que

$$G_\delta = \overline{G_\delta} = \overline{G_0 + \delta G_1}.$$

L'opérateur G_δ est bien une suite d'opérateurs double-échelles.

Séparation d'échelles forte et problème limite. Notre objectif est maintenant de vérifier les propriétés de séparations d'échelles présentées dans Section 3.1.2. Il est assez clair, étant donnée la définition (3.37) que

$$\forall (\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) \in D(G_0) \times D(G_1), \quad (G_0 \mathbf{u}, G_1 \tilde{\mathbf{u}})_G = 0.$$

Il suffit donc de vérifier que $D(G_0) \cap D(G_1)$ est dense dans $D(G_0)$, c'est-à-dire, que $H_0^1(\Omega)^3$ est dense dans $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$. Cette propriété est immédiate par densité de $D(\Omega)^3$ dans $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ (voir [35]).

Comme la séparation d'échelles forte est vérifiée, nous avons $\overline{Q_0 G_1} = G_1$ et

$$\mathcal{V}_\infty^0 = \mathcal{V}_0^0 = \operatorname{Ker} G_0 \cap D(G_1) = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\},$$

et l'hypothèse de densité (3.15) est trivialement vérifiée. Par ailleurs, en utilisant le résultat de densité donné dans [35] (Théorème 2.8), on peut vérifier que

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\} \\ & \text{dense dans } \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ce résultat implique, d'après la définition (3.14), que

$$\mathcal{H}_0 = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} = \operatorname{Ker} G_0.$$

Comme \mathbf{f} ne dépend pas de δ et en le supposant dans $L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$, nous pouvons appliquer les résultats de convergence faible abstraits. On montre que \mathbf{u}_δ converge faiblement vers la solution du problème limite : trouver $\mathbf{u}_0(t) \in \mathcal{V}_0^0$ solution de, pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_0^0$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}})_\mathcal{H} + \delta^{-2}(G_1 \mathbf{u}_0, G_1 \tilde{\mathbf{u}})_G = (\rho^{-1} \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})_\mathcal{H} \quad (3.40)$$

qui se réécrit,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} \mu \varepsilon(\mathbf{u}_0) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \gamma(\varepsilon(\mathbf{u}_0) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cette formulation est complétée par des conditions initiales nulles. La formulation du problème limite (3.41) se distingue de la formulation (3.33) par un unique aspect. L'espace des fonctions tests ainsi que l'espace de la solution (à chaque instant) sont l'espace réduit \mathcal{V}_0^0 ! Cependant, la résolution par éléments finis du problème (3.41) ne se fait pas directement, car il est difficile de construire des fonctions tests de l'espace \mathcal{V}_0^0 . Pour palier à cette difficulté de nombreuses stratégies (au niveau discret et continu) ont été développées dans la littérature (pour une variante statique des équations de l'élastodynamique ou les équations de Stokes), voir [19, 20, 63, 64], [13, 43, 44, 45, 46] et [38, 39, 40]. Finalement, nous avons proposé dans [SI19] et analysé dans [SI30] une stratégie de discrétisation en temps du problème (3.41) (voir Section 5.1).

Enfin, nous pouvons démontrer la convergence forte vers le problème limite en vérifiant l'inégalité (3.23). Cette inégalité est équivalente à démontrer que l'image de \mathbf{G}_0 est fermé dans \mathcal{G} . C'est-à-dire que l'image de l'opérateur de divergence de $H_0^1(\Omega)^3$ dans $L^2(\Omega)$ est fermé. Grâce au Corollaire 2.4 Chapitre 1 de [35] nous pouvons affirmer que

$$\text{Im } \mathbf{G}_0 = \left\{ (p, \mathbf{0}) \in \mathcal{G} \mid \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

qui est bien un sous-espace fermé de \mathcal{G} .

3.3.2 Milieux homogènes isotropes mous

Introduction. Avec les mêmes notations que la section précédente, nous supposons que Ω est, soit un domaine borné connexe Lipschitz, soit \mathbb{R}^3 et que

$$\gamma(x) = 0, \quad \nabla \rho(x) = \nabla \mu(x) = \mathbf{0}.$$

Comme $\gamma = 0$ le milieu de propagation est considéré isotrope et le fait que μ et ρ soient homogènes implique que les ondes de pressions et de cisaillements (la définition précise de ces types d'ondes est donnée plus bas) se découpent à l'intérieur du domaine de propagation. Nous allons caractériser cette dernière affirmation de deux façons différentes :

- tout d'abord, nous montrerons que le problème abstrait sous-jacent satisfait la séparation d'échelle stricte lorsque $\Omega = \mathbb{R}^3$;
- puis nous reformulerons le problème en utilisant une décomposition de la solution $u_{\delta}(t)$ semblable à une décomposition de Helmholtz (voir [6]) et montrerons que chaque terme de cette décomposition représente un type d'ondes particulier (pression ou cisaillement) et satisfait, si on les considère réguliers, des équations d'ondes qui ne sont couplées qu'aux bords.

Nous avons commencé ce type d'études dans [SI4] pour le cas de conditions aux bords encastées (voir Figure 3.3) dans \mathbb{R}^2 et traité le cas, bien plus difficile, des conditions de surface libre dans [SI20, SI21]. L'objectif de ces travaux est de pouvoir discrétiser sur deux

maillages différents adaptés, les ondes de pression et les ondes de cisaillement. Ainsi, le gain en coût de calcul est double : d'une part, le maillage adapté aux ondes de pression sera bien plus grossier que le maillage adapté aux ondes de cisaillement (si $\lambda \gg \mu$ comme c'est le cas pour les milieux mous) et d'autre part, la condition de stabilité sera peu pénalisée par la vitesse des ondes de pression (voir Section 4.2.3 pour plus de détails sur ces aspects).

Problème double-échelles. La formulation variationnelle est donnée par : trouver $\mathbf{u}_\delta(t) \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)^3$,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \delta^{-2} \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

En utilisant l'égalité suivante (voir [SI20] pour une preuve simple en 2 dimensions) : pour tout \mathbf{u} et pour tout \mathbf{v} dans $H_0^1(\Omega)^3$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (3.43)$$

on peut réécrire la formulation (3.42) sous une forme qui ne fait apparaître que des opérateurs rotationnels et divergence. A une redéfinition du processus d'adimensionnement près (et donc à un changement de δ et des paramètres près), la formulation (3.42) et la décomposition (3.43) suggère d'étudier le nouveau problème : trouver $\mathbf{u}_\delta(t) \in H_0^1(\Omega)^3$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)^3$,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \delta^{-2} \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}_\delta \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u}_\delta \cdot \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Une différence importante entre la formulation (3.44) avec la formulation (3.42) est l'utilisation de l'opérateur curl puisque'on a la propriété bien connue : pour tout $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$,

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{u} = 0.$$

Cette propriété permet de montrer que la séparation d'échelles est stricte. Avant d'en arriver à ce point, il faut d'abord écrire le problème (3.42) sous une forme qui fait apparaître une suite d'opérateurs double-échelles. En posant formellement

$$G_\delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \delta \operatorname{curl} \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^3, \quad (3.45)$$

on retrouve bien la formulation (3.40) (le produit scalaire dans \mathcal{G} est un produit scalaire à poids faisant intervenir λ et μ). En choisissant $D(G_\delta) = H_0^1(\Omega)^3$ on montre que G_δ est bien un opérateur fermé grâce à la propriété (voir [35], Chapitre 1, Lemme 2.5 et Remarque 2.6)

$$H_0^1(\Omega)^3 = H_0(\operatorname{div}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{curl}, \Omega). \quad (3.46)$$

où $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ est défini par (3.38) et

$$H_0(\operatorname{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{curl} \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Pour montrer que G_δ est une suite d'opérateurs double échelle on introduit naturellement les opérateurs

$$G_0 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad G_1 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

avec $D(G_0) = H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ et $D(G_1) = H_0(\operatorname{curl}, \Omega)$. Comme $D(G_0) \cap D(G_1) = D(G_\delta)$ et que G_δ est fermé, on trouve que

$$G_\delta = G_0 + \delta G_1 = \overline{G_0 + \delta G_1}.$$

Cette dernière égalité implique que G_δ set bien une suite d'opérateurs double-échelles, car G_0 et G_1 sont fermés et définis de manière dense dans $\mathcal{H} = L^2(\Omega)^3$.

Séparation d'échelle forte et problème limite. On observe, de la même façon que dans la section précédente, que

$$(G_0 \mathbf{u}, G_1 \mathbf{v})_{\mathcal{G}} = 0 \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in D(G_0) \times D(G_1).$$

Par ailleurs, de la même façon que dans la section précédente, on a $D(G_0) \cap D(G_1)$ égal à $H_0^1(\Omega)^3$ dense dans $D(G_0) = H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ et donc la séparation d'échelles forte est vérifiée. En notant

$$\mathcal{V}_0^0 = \operatorname{Ker} G_0 \cap D(G_1) = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\},$$

le problème limite s'écrit : trouver $\mathbf{u}_0(t) \in \mathcal{V}_0^0$ tel que, pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_0^0$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx + \frac{\mu}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} \mathbf{u}_0 \cdot \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{u}} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx. \quad (3.48)$$

Finalement, comme dans la section précédente on a $\mathcal{H}_0 = \operatorname{Ker} G_0$ et la convergence faible de u_δ vers u_0 . Pour l'instant, je n'ai pas abordé de réelles différences avec les résultats de la section précédente. Les différences vont être abordées dans les paragraphes suivants.

Opérateur adjoint. Un calcul direct nous permet d'obtenir l'expression des opérateurs adjoints G_0^* et G_1^* , on trouve (en utilisant le fait que ρ est homogène) que

$$G_0^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = -\nabla \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \varphi, \quad G_1^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\rho} \operatorname{curl} \mathbf{u}, \quad (3.49)$$

où les domaines de ces opérateurs sont donnés par $D(G_0^*) = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$ et $D(G_1) = L^2(\Omega) \times H(\operatorname{curl}, \Omega)$ et sont bien inclus dans \mathcal{G} . Pour tout élément,

$$g = \begin{pmatrix} \varphi_p \\ \tilde{\Phi}_s \end{pmatrix} \in D(\overline{\Omega})^4 \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_p \\ \tilde{\tilde{\Phi}}_s \end{pmatrix} \in D(\overline{\Omega})^4$$

on trouve que

$$\begin{aligned} (G_0^* g, G_1^* \tilde{g})_{\mathcal{H}} &= - \int_{\Omega} \rho \nabla \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \varphi_p \cdot \frac{\mu}{\rho} \operatorname{curl} \tilde{\Phi}_s \, dx \\ &= -\mu \int_{\Gamma} \left(\nabla \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \varphi_p \right) \times \mathbf{n} \cdot \tilde{\Phi}_s \, dx. \end{aligned} \quad (3.50)$$

On va maintenant distinguer deux cas. Un premier cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$ et le terme dans (3.50) est nul et un second cas où Ω est borné.

Le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$. Dans ce cas où le domaine n'a pas de bord on déduit de (3.50) que la séparation d'échelles stricte est satisfaite. Il y a donc un découplage total des ondes de pression et ondes de cisaillement. En effet, lorsque la séparation d'échelles stricte est vérifiée on a (voir [SI34])

$$\mathcal{V}_\infty = \mathcal{V}_0^0 \oplus (D(G_0) \cap \text{Ker } G_1),$$

où la décomposition est orthogonale pour le produit scalaire dans \mathcal{H} et dans \mathcal{V}_∞ . Appliquée au problème en question ici, cette propriété s'écrit

$$H^1(\mathbb{R}^3)^3 = \mathcal{V}_0^0 \oplus \mathcal{V}_0^1 \quad \text{avec} \quad \mathcal{V}_0^1 = D(G_0) \cap \text{Ker } G_1 = \{\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3 \mid \mathbf{curl} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Il est alors possible d'utiliser cette décomposition pour modifier la formulation (3.44) de façon à obtenir deux équations d'ondes découplées. En effet, en écrivant que

$$\mathbf{u}_\delta(t) = \mathbf{u}_{\delta,s}(t) + \mathbf{u}_{\delta,p}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_{\delta,s}(t) \in \mathcal{V}_0^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{\delta,p}(t) \in \mathcal{V}_0^1,$$

on déduit de la formulation (3.44) et des relations d'orthogonalité entre \mathcal{V}_0^0 et \mathcal{V}_0^1 ,

$$\begin{cases} \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_0^1, & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_{\delta,p} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \delta^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{div } \mathbf{u}_{\delta,p} \text{div } \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}, \\ \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_0^0, & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_{\delta,s} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \frac{\mu}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{curl} \mathbf{u}_{\delta,s} \cdot \mathbf{curl} \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}. \end{cases}$$

La fonction $\mathbf{u}_{\delta,p}$ décrit la propagation des ondes de pression tandis que la fonction $\mathbf{u}_{\delta,s}$ décrit la propagation des ondes de cisaillement. Par inspection de (3.48), on peut remarquer que l'on a $\mathbf{u}_{\delta,s} = \mathbf{u}_0$ et donc que le problème limite ne décrit en fait que la propagation des ondes de cisaillement.

Le cas Ω borné connexe Lipschitz. On va supposer que les données initiales du problème élastodynamique sont nulles pour simplifier le propos qui sera plus formel que dans les sections précédentes. De plus, nous allons quitter, momentanément, le cadre abstrait des problèmes double-échelles pour être plus concrets.

On introduit deux quantités $\varphi_{\delta,p}$ et $\Phi_{\delta,s}$ définies par

$$\partial_t \varphi_{\delta,p} = \delta^{-1} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \text{div } \mathbf{u}_\delta, \quad \partial_t \Phi_{\delta,s} = \frac{\mu}{\rho} \mathbf{curl} \mathbf{u}_\delta,$$

qui s'annulent au temps initial. En supposant ces quantités régulières (comme mentionnés on restera formel ici) on trouve, en utilisant (3.44) que,

$$\partial_t \mathbf{u}_\delta - \delta^{-1} \nabla \varphi_{\delta,p} + \mathbf{curl} \Phi_{\delta,s} = \int_0^t \mathbf{f}(s) \, ds. \quad (3.51)$$

La décomposition (3.51) peut être vue comme une décomposition de Helmholtz (voir [58] ou [6]). En prenant d'une part la divergence de (3.51) et d'autre part son rotationnel on obtient

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \partial_t^2 \varphi_{\delta,p} - \delta^{-2} \Delta \varphi_{\delta,p} = \text{div} \int_0^t \mathbf{f}(s) \, ds & \Omega \times [0, T], \\ \frac{\rho}{\mu} \partial_t^2 \Phi_{\delta,s} + \mathbf{curl} \mathbf{curl} \Phi_{\delta,s} = \mathbf{curl} \int_0^t \mathbf{f}(s) \, ds & \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.52)$$

La relation (3.51) évaluée à la frontière nous permet de coupler ces équations aux bords. En effet, comme \mathbf{u}_δ s'annule aux bords, on trouve,

$$\begin{cases} \delta^{-1} \nabla \varphi_{\delta,p} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{curl} \Phi_{\delta,s} \cdot \mathbf{n} - \int_0^t \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{n} \, ds & \Gamma \times [0, T], \\ \mathbf{curl} \Phi_{\delta,s} \times \mathbf{n} = \delta^{-1} \nabla \varphi_{\delta,p} \times \mathbf{n} + \int_0^t \mathbf{f}(s) \times \mathbf{n} \, ds & \Gamma \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.53)$$

Dans [SI4] (mais aussi dans [TH3]) les équations (3.52) et (3.53) ont été résolues, voir Figure 3.3, en deux dimensions d'espace (dans ce cas, $\Phi_{\delta,s}$ est une inconnue scalaire). Les conditions (3.53) correspondent alors à des conditions de Neumann inhomogènes pour chacun des potentiels $\varphi_{\delta,p}$ et $\Phi_{\delta,s}$. De plus, comme déjà discuté, les deux potentiels sont discrétisés sur des maillages différents adaptés aux longueurs d'ondes des ondes de pression et de cisaillement.

Je conclus en signalant que l'introduction des potentiels $\varphi_{\delta,p}$ et $\Phi_{\delta,s}$ aurait pu se faire de manière plus abstraite. C'est-à-dire que l'on aurait pu rester dans le cadre théorique des problèmes double-échelles et obtenir de façon rigoureuse un problème équivalent à (3.53). Je laisse ce travail de formalisation en perspective à court terme.

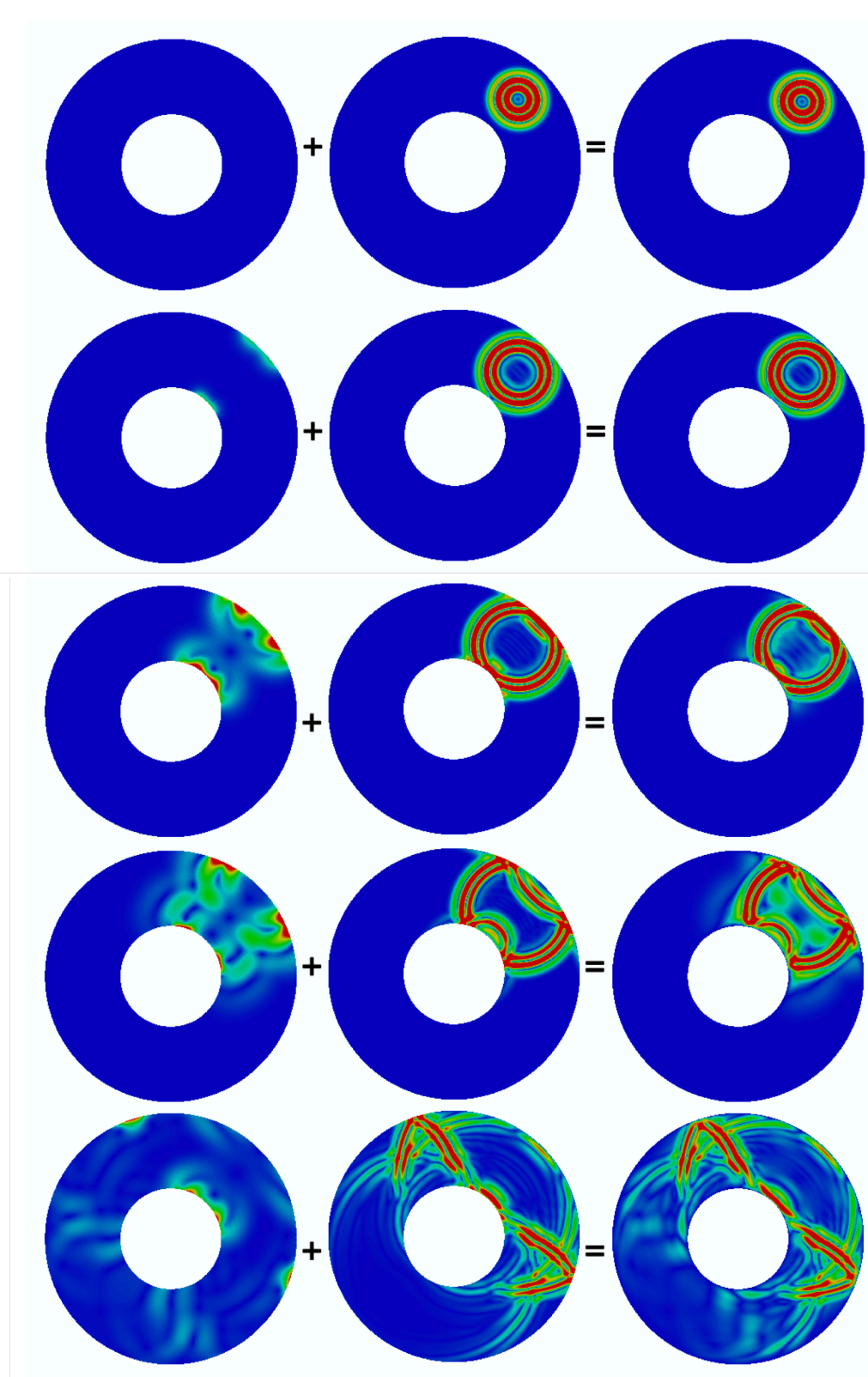


FIGURE 3.3 – Figure extraite de [SI4]. Colonne de gauche, propagation des ondes de pressions dans un domaine encastré, colonne centrale propagation des ondes de cisaillement, colonne de droite, propagation du champ total. Le couplage des ondes de pression et de cisaillement n'a lieu qu'aux bords.

3.3.3 Ondes dans des plaques stratifiées

Introduction. L'étude de la déformation de plaques est maintenant un sujet très standard sur lequel on peut trouver de nombreuses références (par exemple [21, 22, 29, 27, 28, 18]). Cependant, moins d'études concernent l'analyse de la propagation d'ondes dans ces milieux (voir tout de même [25, 47, 61, 54] ou [26]). Évidemment, si l'on considère des milieux orthotropes stratifiés, comme on en trouve dans l'application ciblée décrite plus bas, moins d'études en mathématiques appliquées existent sur la question. L'analyse asymptotique rigoureuse de la propagation d'ondes dans de tels milieux n'a donc pas été abordée en détail bien que le problème limite que l'on va obtenir dans cette section est classique (il l'est du moins dans des cas homogènes isotropes). Un aspect assez important à préciser, lorsque l'on parle d'analyse asymptotique sur les plaques est la structure des termes sources. En effet on peut distinguer deux situations :

- Lorsque le terme source est polarisé de façon tangente à la plaque, le problème limite correspond à un problème de type élastodynamique en deux dimensions d'espace qui gouverne la propagation d'un champ polarisé dans la direction tangente et homogène dans l'épaisseur. En reprenant le vocabulaire de la Section 3.2.3, ce champ appartient, à chaque instant, à l'espace des solutions propagatives.
- Lorsque le terme source est polarisé de façon transverse à la plaque, alors la solution limite est également polarisée de façon transverse et homogène dans l'épaisseur et se propage très lentement. En fait, dans ce cas, le champ limite appartient à chaque instant, à l'espace des solutions non-propagatives. En fait, une équation (non hyperbolique) peut-être récupérée pour ce champ en construisant des modèles effectifs d'ordre supérieur (thématique que je mentionne brièvement en Section 3.4.3). Ce régime très particulier est généralement le régime qui est considéré dans la littérature (par exemple dans [22]) lors de l'étude de modèles de plaques en dynamique.

Dans cette section, je montre comment le problème de la propagation d'ondes dans des plaques est bien un problème double-échelles comme décrit Section 3.1 et donne l'expression du problème limite.

Une application industrielle : Santé intégrée en aéronautique. L'application cible est le contrôle d'ailes d'avions en santé intégrée (SHM Structure Health Monitoring). Des capteurs piézoélectriques sont embarqués dans la structure, ici l'aile d'avion, et des contrôles d'intégrité peuvent être réalisés à intervalle fréquent sans intervention extérieure. Ces contrôles se font par propagation d'ondes ultrasonores. J'ai abordé l'étude de cette thématique dans le cadre de l'encadrement des thèses [TH4] et [TH7]. Dans l'objectif, d'une part, de construire des schémas numériques efficaces pour simuler la propagation d'ondes (voir [TH4] et Section 4.2.3) et, d'autre part de modéliser des précontraintes et apporter des premiers éléments de problèmes inverses pour le contrôle non-destructif [TH7].

Dans cette application le milieu de propagation est mince (pour des raisons évidentes de contraintes industrielles) et composé de matériaux fibrés stratifiés : chaque couche de la stratification est fibrée dans une direction différente des couches inférieures et supérieures. Cette stratification a pour objectif d'optimiser certaines propriétés mécaniques de la plaque. En pratique, le domaine à considérer est courbe et précontraint (il est pré-déformé car soumis à son propre poids). Je néglige ces aspects-là dans la présentation ci-dessous, mais ils sont en cours d'étude dans la thèse [TH7].

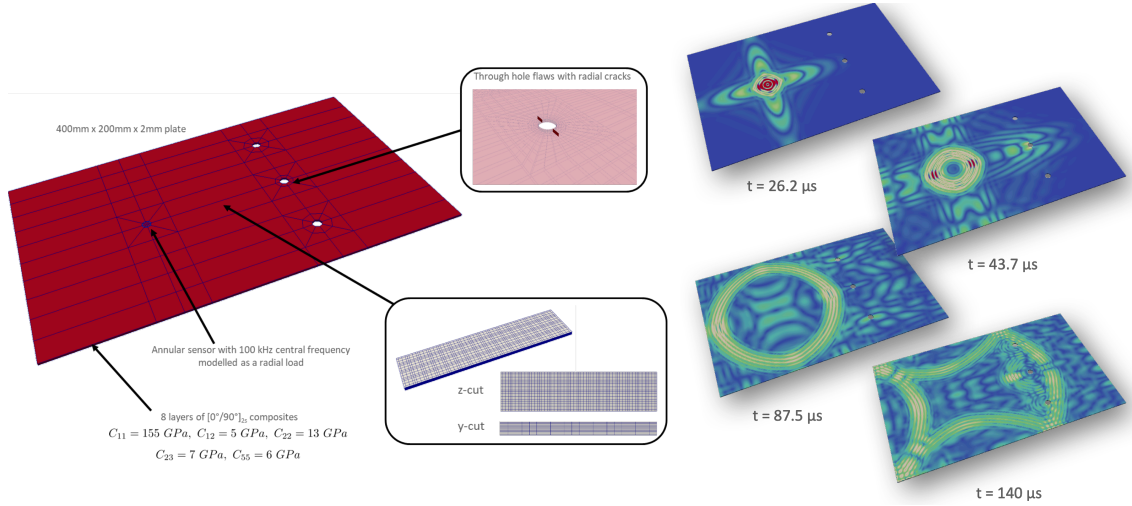


FIGURE 3.4 – *Figure et simulation de A. Imperiale (CEA List)*. Exemple d'application de contrôle de fissures dans une plaque par un capteur collé sur la plaque. Les simulations sont réalisées avec le schéma numérique décrit Section 4.2.3 et une discrétisation d'ordre élevé anisotrope comme décrit dans [TH4].

Problème double-échelles. Pour simplifier le discours, je ne présente pas ici la mise à l'échelle du problème. Je suppose donc que le domaine de propagation est infini et d'épaisseur fixe,

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times [-1, 1].$$

Après adimensionnalisation et en considérant que $\Gamma_N = \Gamma$ (les conditions aux bords sont de type surface libre) la formulation variationnelle du problème s'écrit : trouver $\mathbf{u}_\delta(t) \in H^1(\Omega)^3$ tel que, pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)^3$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{C} (\delta^{-1} \varepsilon_3(\mathbf{u}_\delta) + \varepsilon_\sigma(\mathbf{u}_\delta)) : (\delta^{-1} \varepsilon_3(\tilde{\mathbf{u}}) + \varepsilon_\sigma(\tilde{\mathbf{u}})) \, dx \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, dx. \end{aligned} \quad (3.54)$$

où $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ est donné par (3.28) et

$$\varepsilon_\sigma(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 & \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 & 2 \partial_2 u_2 & \partial_2 u_3 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_3(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_3 u_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 & \partial_3 u_2 & 2 \partial_3 u_3 \end{pmatrix},$$

où l'on a noté,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Le paramètre δ qui apparaît dans (3.54) est une trace de la remise à l'échelle du problème. En effet, avant cette remise à l'échelle et après adimensionnalisation, l'épaisseur de la plaque est 2δ .

Pour simplifier l'étude (et parce que, pour l'application considérée, l'hypothèse qui vient est vérifiée) on va supposer que la direction de la fibre du milieu est tangente à la plaque, c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

et que sa raideur $\gamma(\mathbf{x})$ est positive ou nulle. Notons que, dans le cadre de l'application cible, il est pertinent de considérer un terme source surfacique correspondant à l'excitation d'un capteur posé sur la surface de la plaque. Cependant, il est également pertinent (et plus simple mathématiquement) de considérer un terme source volumique dans le cadre de l'application en santé intégrée. Finalement, la formulation (3.54) est complétée par des conditions initiales nulles. En posant formellement

$$G_\delta \mathbf{u} = \varepsilon_3(\mathbf{u}_\delta) + \delta \varepsilon_\sigma(\mathbf{u}_\delta), \quad \mathcal{H} = L^2(\Omega)^3, \quad \mathcal{G} = L^2(\Omega)^{3 \times 3},$$

la formulation (3.54) s'écrit, trouver $\mathbf{u}_\delta(t) \in H^1(\Omega)^3$ tel que pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)^3$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u}_\delta, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}} + \delta^{-2}(G_\delta \mathbf{u}_\delta, G_\delta \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{G}} = (\rho^{-1} \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}}, \quad (3.56)$$

où les produits scalaires sur \mathcal{H} et \mathcal{G} sont des produits scalaires L^2 à poids (les poids sont $\rho(\mathbf{x})$ et $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ respectivement). En posant

$$D(G_\delta) = H^1(\Omega)^3$$

il est possible de montrer que G_δ est bien un opérateur fermé. La preuve se fait en deux étapes. La première étape est d'introduire une factorisation de l'opérateur G_δ (on s'inspire ici de [29]). Pour cela, nous définissons κ_δ par

$$\kappa_\delta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 & \delta^{-1}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) \\ \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 & 2 \partial_2 u_2 & \delta^{-1}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) \\ \delta^{-1}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) & \delta^{-1}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) & 2\delta^{-2} \partial_2 u_2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors, pour tout $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$,

$$G_\delta \mathbf{u} = \kappa_\delta(s_\delta(\mathbf{u})) = \varepsilon_\sigma(\mathbf{u}) + \delta^{-1} \varepsilon_3(\mathbf{u}) \quad \text{avec} \quad s_\delta(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \delta u_3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, nous rappelons la seconde inégalité de Korn (voir [33] Théorème 3.1 ou [59]).

Seconde inégalité de Korn (cas particulier). Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$, alors il existe $c_K > 0$ tel que pour tout $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}^2 \leq c_K (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2).$$

Comme, $\|\varepsilon(s_\delta(\mathbf{u}))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \leq \|\kappa_\delta(s_\delta(\mathbf{u}))\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}$ car $\delta < 1$, par une application directe de l'inégalité de Korn, nous obtenons que pour tout $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$,

$$\|s_\delta(\mathbf{u})\|_{H^1(\Omega)^3}^2 \leq c_K (\|s_\delta(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|G_\delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2),$$

et donc

$$\delta^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3}^2 \leq c_K (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|G_\delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2). \quad (3.57)$$

Cette dernière inégalité nous permet de conclure que G_δ est fermé lorsque l'on choisit $D(G_\delta) = H^1(\Omega)^3$. Nous cherchons maintenant à montrer que G_δ est bien une suite d'opérateurs double-échelles. Pour cela, il faut introduire les opérateurs

$$G_0 \mathbf{u} = \varepsilon_3(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad G_1 \mathbf{u} = \varepsilon_\sigma(\mathbf{u})$$

avec pour domaines

$$D(G_0) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \varepsilon_3(\mathbf{u}) \in \mathcal{G}\} = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \partial_3 \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3\}$$

et

$$D(G_1) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \varepsilon_\sigma(\mathbf{u}) \in \mathcal{G}\} = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \varepsilon_\sigma(\mathbf{u}) \in L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3}\}$$

On peut montrer, par des techniques standards, que ces opérateurs sont définis de manières denses et fermés. Par ailleurs, nous avons

$$\mathcal{V}_\infty = D(G_0) \cap D(G_1) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \partial_3 \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3, \varepsilon_\sigma(\mathbf{u}) \in L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3}\} \supset H^1(\Omega)^3.$$

Cependant, grâce à la seconde inégalité de Korn, nous pouvons montrer que

$$\mathcal{V}_\infty \subset \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \varepsilon(u) \in L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3}\} \subset H^1(\Omega)^3$$

et donc $\mathcal{V}_\infty = H^1(\Omega)^3 = D(G_\delta)$ ce qui implique que

$$G_\delta = G_0 + \delta G_1 = \overline{G_0 + \delta G_1}.$$

La suite d'opérateurs G_δ est bien une suite d'opérateurs double-échelles. On montre assez facilement que la séparation d'échelles forte ne peut pas être satisfaite et vérifions plus bas que la séparation d'échelles faible est bien satisfaite.

Séparation d'échelles faible et problème limite. Pour vérifier la séparation d'échelle faible il est nécessaire de calculer les opérateurs adjoints G_0^* et G_1^* (plus précisément, on a besoin de déterminer $D(G_0^*)$, $D(G_1^*)$ et $\text{Ker } G_0^*$). Pour cela, nous introduisons les opérateurs \mathbf{Div}_3 et \mathbf{Div}_σ définis par

$$\mathbf{Div}_3 \varepsilon = \partial_3 \varepsilon_{13} \mathbf{e}_1 + \partial_3 \varepsilon_{23} \mathbf{e}_2 + \partial_3 \varepsilon_{33} \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{Div}_\sigma = \mathbf{Div} - \mathbf{Div}_3,$$

où l'opérateur \mathbf{Div} est la divergence matricielle. On peut alors montrer que

$$\begin{cases} G_0^* \varepsilon = -\rho^{-1} \mathbf{Div}_3 (\mathbf{C} \varepsilon), \\ G_1^* \varepsilon = -\rho^{-1} \mathbf{Div}_\sigma (\mathbf{C} \varepsilon), \end{cases} \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{cases} D(G_0^*) = \{\varepsilon \in L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3} \mid \mathbf{Div}_3 (\mathbf{C} \varepsilon) \in L^2(\Omega)^3, (\mathbf{C} \varepsilon) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\}, \\ D(G_1^*) = \{\varepsilon \in L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3} \mid \mathbf{Div}_\sigma (\mathbf{C} \varepsilon) \in L^2(\Omega)^3\}. \end{cases} \quad (3.59)$$

On déduit de la définition de G_0^* que

$$\text{Ker } G_0^* = \{\varepsilon \in L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3} \mid (\mathbf{C} \varepsilon) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega\}.$$

Vérifions maintenant les propriétés de densité (3.11). Il est assez direct de montrer que $\mathcal{V}_\infty = H^1(\Omega)^3$ est dense dans $D(G_0)$, Par ailleurs en utilisant des suites de fonctions régulières approchant $\mathbf{C}\varepsilon$ on peut vérifier que $D(G_0^*) \cap D(G_1^*)$ est dense dans $D(G_0^*)$. Finalement, il faut vérifier que

$$\text{Ker } G_0^* \cap D(G_1^*) \quad \text{dense dans} \quad \text{Ker } G_0^*.$$

Ce résultat s'obtient de la même façon, en approchant, les composantes non-nulles de $\mathbf{C}\varepsilon$ par des suites de fonctions régulières. La séparation d'échelles faible est donc bien satisfaite.

Pour définir le problème limite et également pour vérifier la propriété (3.15), il nous faut maintenant définir $\mathcal{V}_0 = D(\overline{Q_0 G_1})$ et donc Q_0 le projecteur orthogonal sur $\text{Ker } G_0^*$. En toute généralité, cette opération est délicate, mais grâce à l'hypothèse que les fibres sont tangentes (3.55), il est possible de vérifier que cet opérateur est donné par

$$Q_0 \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\overline{Q_0 G_1}$ est alors donné par

$$D(\overline{Q_0 G_1}) = \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \partial_1 u_1 \in L^2(\Omega), \partial_2 u_2 \in L^2(\Omega), \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \in L^2(\Omega)\},$$

et

$$\overline{Q_0 G_1} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \frac{1}{2} \partial_1 u_2 + \frac{1}{2} \partial_2 u_1 & 0 \\ \frac{1}{2} \partial_1 u_2 + \frac{1}{2} \partial_2 u_1 & \partial_2 u_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer ici que $D(\overline{Q_0 G_1})$ est bien différent de $D(Q_0 G_1) = D(G_1)$ et donc que l'opérateur $Q_0 G_1$ n'est pas fermé. De plus, on montre, par l'utilisation d'une inégalité de Korn en dimension 2 d'espace, que \mathcal{V}_0 est donné par

$$\mathcal{V}_0 = D(\overline{Q_0 G_1}) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid u_1 \in H^1(\Omega), u_2 \in H^1(\Omega)\}.$$

On en déduit alors que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ker } G_0 = \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \partial_3 u = \mathbf{0} \text{ in } \Omega\}, \\ \mathcal{V}_0^0 = \mathcal{V}_0^0 \cap \text{Ker } G_0 = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid u_1 \in H^1(\Omega), u_2 \in H^1(\Omega), \partial_3 \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega\}, \\ \mathcal{V}_\infty^0 = \mathcal{V}_\infty^0 \cap \text{Ker } G_0 = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3 \mid \partial_3 \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega\}. \end{array} \right.$$

On observe alors que \mathcal{V}_∞^0 est bien différent de \mathcal{V}_0^0 (on perd le contrôle des dérivées tangentielles de la troisième composante des champs), mais on peut montrer facilement que \mathcal{V}_∞^0 est dense dans \mathcal{V}_0^0 , c'est-à-dire (3.15) (on se ramène pour cela à montrer que $H^1(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^2)$). En utilisant ce même résultat de densité bien connu, on montre également que \mathcal{V}_0^0 est dense dans $\text{Ker } G_0$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_0 = \text{Ker } G_0$. Le résultat de densité (3.15), nous permet d'affirmer que la suite de solutions \mathbf{u}_δ du problème considéré converge vers le problème limite qui est donné par : trouver $\mathbf{u}_0(t) \in \mathcal{V}_0^0$ tel que, pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_0^0$,

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}} + (\overline{Q_0 G_1} \mathbf{u}_0, \overline{Q_0 G_1} \tilde{\mathbf{u}})_G = (\rho^{-1} \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathcal{H}}, \quad (3.60)$$

où, pour tout \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathcal{V}_0^0 ,

$$\begin{aligned} & (\overline{Q_0 G_1} \mathbf{u}, \overline{Q_0 G_1} \mathbf{v})_{\mathcal{G}} \\ &= (\alpha \lambda \operatorname{div}_{\sigma} u_{\sigma}, \operatorname{div}_{\sigma} v_{\sigma})_{L^2(\Omega)} + 2 (\mu \varepsilon_{\sigma}(u_{\sigma}), \varepsilon_{\sigma}(v_{\sigma}))_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \\ & \quad + (\gamma \varepsilon_{\sigma}(u_{\sigma}) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}, \varepsilon_{\sigma}(v_{\sigma}) \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

où $\operatorname{div}_{\sigma} u_{\sigma} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$,

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{2\mu(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})}.$$

On peut remarquer que la formulation (3.60) avec la définition (3.61) correspond à un problème d'élasticité en dimension 2 où le premier coefficient de Lamé est réduit par rapport au problème en dimension 3 (le contraire aurait été étonnant, car il impliquerait, dans le cas isotrope homogène, que les ondes de pression dans le problème limite se propagent plus rapidement).

Espace des solutions propagatives et non-propagatives. Un des aspects intéressants du problème considéré vient du fait que l'espace des solutions non-propagatives n'est pas trivial. En effet, nous avons, en utilisant le fait que les mouvements rigides dans le plan (x_1, x_2) n'appartiennent pas à \mathcal{V}_0^0 ,

$$\mathcal{R}_0 = \operatorname{Ker} G_0 \cap \operatorname{Ker} \overline{Q_0 G_1} = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid u_1 = u_2 = 0 \text{ in } \Omega, \partial_3 u_3 = 0 \text{ in } \Omega\}.$$

C'est-à-dire que les solutions polarisées dans la direction de l'épaisseur ne se propagent pas à la limite. Il se trouve que si l'on cherche à construire un modèle d'évolution pour les solutions appartenant à cet espace (voir sur ce sujet la discussion 3.4.3), on retombe sur les modèles de la littérature et plus précisément sur le modèle de Kirchhoff-Love [21]. Finalement, l'espace des solutions propagatives est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \{u \in \mathcal{V}_0^0 \mid u_3 = 0 \text{ in } \Omega\}.$$

Comme nous n'avons pas considéré d'effets dissipatifs, la formulation (3.60) pourrait être réduite sur ce sous-espace de \mathcal{V}_0^0 .

3.3.4 Câbles coaxiaux en électromagnétisme

Une application : le contrôle non-destructif de réseaux de câbles coaxiaux. L'étude de la propagation d'ondes dans ce type de câbles a de nombreuses applications notamment en contrôle non-destructif. L'objectif en contrôle non-destructif est de pouvoir tester et identifier d'éventuels défauts dans un réseau compliqué de câbles (par exemple on compte plusieurs kilomètres de câbles dans un avion), éventuellement en fonctionnement, en mesurant la diffraction d'impulsions électriques envoyées dans le réseau. Avant de considérer ces problématiques avancées, nous nous sommes posés la question de la modélisation asymptotique de ces câbles. Il est connu que les équations limites régissant le comportement électromagnétique de ces câbles sont les équations des télégraphistes 1D qui gouvernent la propagation de courants et potentiels électriques. Ce qui est moins connu est leur lien avec les équations de Maxwell 3D, la géométrie du câble, ses hétérogénéités (qui peuvent être des défauts ou non) et finalement, le lien entre le potentiel et le courant électriques et les champs électromagnétiques.

J'ai eu l'occasion d'aborder ces problèmes durant ma thèse [SI1], puis dans [TH1] et dans [SI5, SI8, SI12, SI27]. Dans ces travaux, des situations assez générales ont été

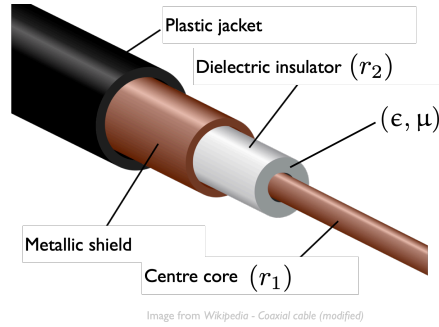


FIGURE 3.5 – Description d’un câble coaxial simple : l’âme métallique centrale, fortement conductrice est de rayon r_1 , le diélectrique est de permittivité ϵ et de perméabilité μ , il est entouré d’une couche de métal fortement conductrice de rayon r_2 . Le tout est protégé par une enveloppe en plastique.

considérées (câble déformé, coefficients hétérogènes, câble avec plusieurs âmes métalliques, effets de peau, jonctions de câbles).

Dans cette section, je montre comment des problèmes de propagation d’ondes électromagnétiques dans des câbles coaxiaux (voir Figure 3.5) peuvent s’écrire comme des problèmes double-échelles. Parmi les différents exemples que j’ai abordés Section 3.3, celui-ci est de loin le plus technique et donc pour simplifier légèrement la présentation, je vais considérer dans ce qui suit le cas d’un câble droit de permittivité et perméabilité homogène, mais de conductivité électrique hétérogène.

Equations de Maxwell dans un câble droit. Le câble étant supposés fin, on introduit une famille de problèmes en supposant que son diamètre normalisé δ tend vers 0. Notre point de départ sera donc l’écriture des équations de Maxwell adimensionnalisées dans le domaine $\Omega_E = \Omega$ remis à l’échelle,

$$\Omega = \Sigma \times \mathbb{R},$$

ici Σ est la section, de frontière C^2 , non simplement connexe du domaine remis à l’échelle (le fait que la section soit non simplement connexe est fondamental!), qui correspond au matériau diélectrique (voir Figure 3.6). Le lecteur intéressé par le processus d’adimensionnalisation, pourra consulter [SI27].

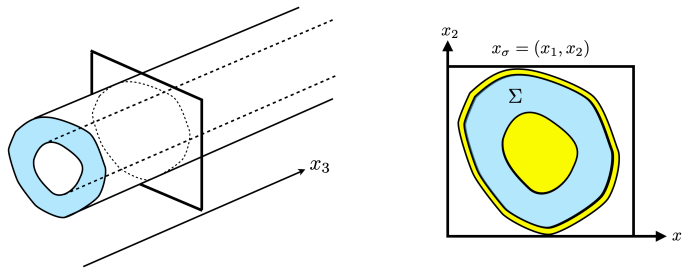


FIGURE 3.6 – Représentation du domaine de propagation. À gauche vue en perspective d’une portion de câble. À droite vue de la section du câble. La partie jaune représente un milieu fortement conducteur dans lequel on suppose que les ondes ne se propagent pas.

Les équations mises à l’échelle régissant la propagation du champ électrique adimensionné $\mathbf{E}_\delta(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ et du champ magnétique adimensionné $\mathbf{H}_\delta(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ se déduisent des

équations de Maxwell (3.25) et sont données par

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E}_\delta + \sigma \mathbf{E}_\delta - \mathbf{curl}_\delta \mathbf{H}_\delta = \mathbf{j}, & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ \partial_t \mathbf{H}_\delta + \mathbf{curl}_\delta \mathbf{E}_\delta = \mathbf{0}, & \text{in } \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.62)$$

Après le processus d'adimensionnalisation, le seul coefficient qui intervient est la conductivité relative du milieu noté $\sigma(\mathbf{x})$. L'opérateur \mathbf{curl}_δ est un opérateur rotationnel mis à l'échelle et est donné par

$$\mathbf{curl}_\delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \times \partial_3 E_\sigma + \delta^{-1} \mathbf{rot} E_3 \\ \delta^{-1} \mathbf{rot} E_\sigma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_\sigma \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

où les opérateurs \mathbf{rot} et \mathbf{rot} sont définis pour toute fonction scalaire u et pour tout champ vectoriel v de composantes v_1 et v_2 par,

$$\mathbf{rot} u = \begin{pmatrix} \partial_2 u \\ -\partial_1 u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rot} v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1,$$

de plus

$$\mathbf{e}_3 \times v = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{rot} u = \mathbf{grad} u.$$

On suppose que le milieu diélectrique est entouré de milieux parfaitement conducteurs, ce qui revient à supposer les conditions aux bords (3.32) vérifiées. Ces conditions s'écrivent, après mise à l'échelle

$$E_\sigma \times n_\sigma = E_1 n_2 - E_2 n_1 = 0 \quad \text{et} \quad E_3 = 0, \quad \Gamma \times [0, T] \quad (3.63)$$

où la normale unitaire à Ω est donnée par

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_\sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La condition (3.63) est en fait une approximation qui prend en compte la très forte conductivité des milieux entourant le diélectrique. Des conditions plus précises, prenant en compte le phénomène d'effet de peau, ont été développées dans [SI27]. Pour rentrer dans le cadre abstrait de la section 3.1, il est nécessaire d'obtenir un système d'ordre 2. Pour cela, nous pouvons éliminer le champ magnétique du système : en dérivant, par rapport au temps, la première équation de (3.62) et en remplaçant $\partial_t \mathbf{H}$ en utilisant la deuxième équation, nous obtenons

$$\partial_t^2 \mathbf{E}_\delta + \sigma \partial_t \mathbf{E}_\delta + \mathbf{curl}_\delta \mathbf{curl}_\delta \mathbf{E}_\delta = \partial_t \mathbf{j}, \quad \Omega \times [0, T]. \quad (3.64)$$

Une formulation faible associée au problème (3.64) peut être déduite directement : trouver $\mathbf{E}_\delta(t)$ suffisamment régulier tel que, pour tout champ vectoriel $\tilde{\mathbf{E}}$ suffisamment régulier, on ait

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_\Omega \mathbf{E}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, dx + \frac{d}{dt} \int_\Omega \sigma \mathbf{E}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, dx + \int_\Omega \mathbf{curl}_\delta \mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{curl}_\delta \tilde{\mathbf{E}} \, dx = \int_\Omega \partial_t \mathbf{j} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, dx. \quad (3.65)$$

Problème double-échelles. Le problème précédent entre dans le cadre des problèmes double-échelles. Pour montrer cela, on pose tout d'abord

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega)^3$$

équipé du produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)^3$ et

$$\mathcal{V}_\delta = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{curl}_\delta \mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3, E_\sigma \times n_\sigma = 0 \text{ et } E_3 = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma)\}.$$

Il est important de noter que l'on peut montrer ici que l'espace \mathcal{V}_δ est bien dépendant de δ , ce n'est pas le cas dans les sections précédentes! On montre que l'espace \mathcal{V}_δ est bien un espace fermé par isomorphisme avec l'espace usuel des fonctions à rotationnel L^2 défini sur la géométrie non remise à l'échelle. On pose maintenant

$$\mathcal{G} = L^2(\Omega)^3$$

équipé du produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)^3$ ainsi que $G_\delta : D(G_\delta) = \mathcal{V}_\delta \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{G}$ défini par

$$G_\delta \mathbf{E} = \mathbf{curl}_\delta \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{rot} E_3 + \delta \mathbf{e}_3 \times \partial_3 E_\sigma \\ \mathbf{rot} E_\sigma \end{pmatrix}.$$

Montrons maintenant que G_δ est une suite d'opérateurs double-échelles. On introduit G_0 et G_1 de domaine $D(G_0) \subset \mathcal{H}$ et $D(G_1) \subset \mathcal{H}$ à valeur dans \mathcal{G} définis par

$$G_0 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{rot} E_3 \\ \mathbf{rot} E_\sigma \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad G_1 \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \times \partial_3 E_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

où les domaines $D(G_0)$ et $D(G_1)$ sont donnés par

$$D(G_0) = \{\mathbf{E} \in \mathcal{H} \mid \mathbf{rot} E_3 \in L^2(\Omega)^2, \mathbf{rot} E_\sigma \in L^2(\Omega), \\ E_\sigma \times n_\sigma = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma) \text{ et } E_3 = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

et

$$D(G_1) = \{\mathbf{E} \in \mathcal{H} \mid \partial_3 E_\sigma \in L^2(\Omega)^2\}.$$

On peut montrer que ces opérateurs sont définis de manière dense (on utilise des fonctions de $D(\Omega)^3$ pour montrer cette propriété) et fermé. Par ailleurs, on trouve que

$$\mathcal{V}_\infty = D(G_0) \cap D(G_1) \\ = \{\mathbf{E} \in \mathcal{H} \mid \partial_3 E_\sigma \in L^2(\Omega_E)^2, \mathbf{rot} E_\sigma \in L^2(\Omega), \mathbf{rot} E_3 \in L^2(\Omega)^2, \\ E_\sigma \times n_\sigma = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma) \text{ et } E_3 = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On s'aperçoit ici que \mathcal{V}_∞ est un sous-espace propre de $\mathcal{V}_\delta = D(G_\delta)$. Cependant, il est possible de montrer que \mathcal{V}_∞ est bien dense dans $D(G_\delta)$ (pour la norme du graphe de G_δ) et d'en déduire que

$$G_\delta = \overline{G_0 + \delta G_1}, \quad (3.67)$$

et donc que G_δ est bien une suite d'opérateurs double-échelles. Ce type de résultats peut en fait être montré pour des opérateurs différentiels assez généraux. Finalement, en introduisant la forme bilinéaire b_0 définie par $\mathcal{B} = \mathcal{H}$ et

$$b_0(\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}) = (\sigma \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega)^3}, \quad \forall (\mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

on montre que le problème de propagation d'ondes dans les câble coaxiaux considérés s'écrivent sous la forme : trouver $\mathbf{E}_\delta(t) \in \mathcal{V}_\delta$ tel que, pour tout $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathcal{V}_\delta$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_\delta, \tilde{\mathbf{E}})_{\mathcal{H}} + \delta^{-2}(G_\delta \mathbf{E}_\delta, G_\delta \tilde{\mathbf{E}})_{\mathcal{G}} + \frac{d}{dt}b_0(\mathbf{E}_\delta, \tilde{\mathbf{E}}) = (\partial_t \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{E}})_{\mathcal{H}}.$$

Le problème en question est bien un problème double-échelles tel que défini Section 3.1. Dans la suite nous montrons que la séparation d'échelles faible est satisfaite (la séparation d'échelles forte ne l'est évidemment pas). De plus, notons qu'il s'agit du seul exemple présenté dans ce manuscrit où le domaine de $G_0 + \delta G_1$ est bien un sous-espace propre de $D(G_\delta)$ et où l'utilisation de la fermeture dans (3.67) est importante.

La propriété de séparation d'échelles faible. On définit tout d'abord les opérateurs adjoints G_0^* et G_1^* . Pour tout champ de vecteur régulier, $\tilde{\mathbf{E}} \in D(\bar{\Omega})^3$ nous avons, pour tout $\mathbf{E} \in D(G_0)$,

$$\begin{aligned} (G_0 \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}})_{\mathcal{G}} &= \int_{\Omega} \mathbf{rot} E_3 \cdot \tilde{E}_\sigma \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{rot} E_\sigma \cdot \tilde{E}_3 \, dx \\ &= \int_{\Omega} E_3 \mathbf{rot} \tilde{E}_\sigma \, dx + \int_{\Omega} E_\sigma \cdot \mathbf{rot} \tilde{E}_3 \, dx. \\ &= (\mathbf{E}, G_0^* \tilde{\mathbf{E}})_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

où l'opérateur adjoint G_0^* est formellement donné par

$$G_0^* \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{rot} E_3 \\ \mathbf{rot} E_\sigma \end{pmatrix}.$$

L'égalité (3.68) nous permet également de déduire que le domaine de G_0^* est donné par (la preuve de ce résultat nécessite d'écrire (3.68) au sens des distributions)

$$D(G_0^*) = \{\mathbf{E} \in \mathcal{G} \mid \mathbf{rot} E_3 \in L^2(\Omega)^2, \mathbf{rot} E_\sigma \in L^2(\Omega)^2\}.$$

De même, l'opérateur adjoint G_1^* se déduit aisément, il est donné par

$$G_1^* \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\mathbf{e}_3 \times \partial_3 E_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D(G_1^*) = \{\mathbf{E} \in \mathcal{G} \mid \partial_3 E_\sigma \in L^2(\Omega)^2\}.$$

Les espaces $D(G_1)$ et $D(G_1^*)$ sont donc des espaces de fonctions L^2 possédant une régularité supplémentaire en x_3 . Cette observation nous permet de nous convaincre que

- l'espace $\mathcal{V}_\infty = D(G_0) \cap D(G_1)$ est dense dans $D(G_0)$;
- l'espace $D(G_0^*) \cap D(G_1^*)$ est dense dans $D(G_0^*)$;
- en observant que

$$\text{Ker } G_0^* = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{rot} E_3 = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \mathbf{rot} E_\sigma = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

l'espace $\text{Ker } G_0^* \cap D(G_1^*)$ est dense dans $\text{Ker } G_0^*$.

Les preuves de ces résultats sont obtenues, par exemple, en utilisant des techniques de régularisation par convolution dans la direction longitudinale au câble. Nous venons tout juste de vérifier les hypothèses (3.11) : la séparation d'échelles faible est vérifiée.

Le problème limite. La difficulté principale de cette étape réside dans la définition de l'opérateur Q_0 qui est la projection orthogonale dans $\text{Ker } G_0^*$. Pour définir cette projection, nous allons utiliser une décomposition de Helmholtz (voir par exemple [6, 58]). Cette décomposition est d'abord écrite sur Σ puis est obtenue par extension sur Ω (voir [S18]). Pour énoncer la décomposition de Helmholtz, nous introduisons la fonction scalaire ϕ de $H^1(\Sigma)$ solution du problème de Dirichlet :

$$\Delta \phi = 0 \text{ dans } \Sigma, \quad \phi = 1 \text{ sur } \Gamma_i, \quad \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_e, \quad (3.69)$$

où Γ_i et Γ_e sont les frontières intérieures et extérieures de Σ respectivement (voir Figure 3.7).

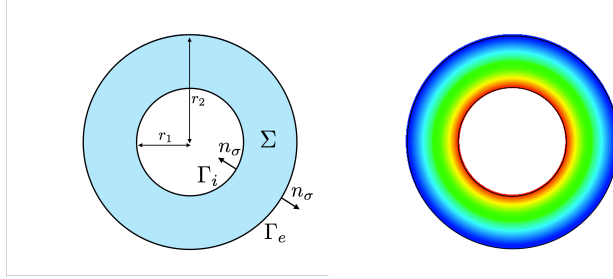


FIGURE 3.7 – A gauche, schéma d'une section de câble circulaire. A droite, représentation de la fonction ϕ sur cette section. La fonction est harmonique et vaut 1 sur la frontière intérieure et 0 sur la frontière extérieure.

Décomposition de Helmholtz dans un câble coaxial. Tout champ de vecteur $E_\sigma \in L^2(\Omega)^2$ satisfait les décompositions orthogonales dans $L^2(\Omega)^2$ suivantes ,

$$\begin{aligned} E_\sigma(\mathbf{x}) &= V(x_3; E_\sigma) \text{grad } \phi(x_\sigma) + \text{grad } \varphi_D(\mathbf{x}; E_\sigma) + \mathbf{rot } \varphi_N(\mathbf{x}; E_\sigma), \\ &= V(x_3; \mathbf{e}_3 \times E_\sigma) \mathbf{rot } \phi(x_\sigma) + \mathbf{rot } \varphi_D(\mathbf{x}; \mathbf{e}_3 \times E_\sigma) - \text{grad } \varphi_N(\mathbf{x}; \mathbf{e}_3 \times E_\sigma), \end{aligned} \quad (3.70)$$

où $V \in L^2(\mathbb{R})$ et (φ_D, φ_N) sont définis par

$$\begin{cases} \varphi_D \in \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \text{grad } \varphi \in L^2(\Omega)^2, \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \\ \varphi_N \in \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \text{grad } \varphi \in L^2(\Omega)^2, \int_\Sigma \varphi \, dx_\sigma = 0\}, \end{cases}$$

et, pour presque tout $x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} V(x_3; E_\sigma) = \frac{(E_\sigma(\cdot, x_3), \text{grad } \phi)_{L^2(\Sigma)^2}}{\|\text{grad } \phi\|_{L^2(\Sigma)^2}^2}, \\ \forall \psi_D \in H_0^1(\Sigma), \quad (\text{grad } \varphi_D(\cdot, x_3; E_\sigma), \text{grad } \psi_D)_{L^2(\Sigma)^2} = (E_\sigma(\cdot, x_3), \text{grad } \psi_D)_{L^2(\Sigma)^2}, \\ \forall \psi_N \in H^1(\Sigma), \quad (\mathbf{rot } \varphi_N(\cdot, x_3; E_\sigma), \mathbf{rot } \psi_N)_{L^2(\Sigma)^2} = (E_\sigma(\cdot, x_3), \mathbf{rot } \psi_N)_{L^2(\Sigma)^2}. \end{cases}$$

On déduit des définitions précédentes que pour tout champ de vecteur $E_\sigma \in L^2(\Omega)^2$, on a

les équivalences,

$$\begin{cases} \text{rot } E_\sigma = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } E_\sigma \times n_\sigma = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma) & \Leftrightarrow \varphi_N(E_\sigma) = 0, \\ \text{rot } E_\sigma = 0 \text{ dans } \Omega & \Leftrightarrow \varphi_D(\mathbf{e}_3 \times E_\sigma) = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

En utilisant la deuxième équivalence (3.71), on montre que Q_0 est donné par

$$Q_0 \mathbf{E} = Q_0 \begin{pmatrix} E_\sigma \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(\mathbf{e}_3 \times E_\sigma) \mathbf{rot} \phi - \text{grad} \varphi_N(\mathbf{e}_3 \times E_\sigma) \\ \frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma E_3 dx_\sigma \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'expression de G_1 donné par (3.66), on en déduit donc que l'opérateur $\overline{Q_0 G_1}$ est donné formellement par

$$\overline{Q_0 G_1} \mathbf{E} = \overline{Q_0 G_1} \begin{pmatrix} E_\sigma \\ E_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} V(\partial_3 E_\sigma) \mathbf{rot} \phi - \text{grad} \varphi_N(\partial_3 E_\sigma) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour définir complètement $\overline{Q_0 G_1}$, il nous définir son domaine. D'un point de vue pratique, ce dernier peut être cherché comme l'espace fermé le plus grand, incluant $D(G_1)$, tel que l'expression ci-dessus à un sens dans $L^2(\Omega)^3$. On montre ici que l'on a,

$$\mathcal{V}_0 = D(\overline{Q_0 G_1}) = D(G_1) = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3 \mid \partial_3 E_\sigma \in L^2(\Omega)^2\}.$$

À chaque instant, la solution appartient à l'espace \mathcal{V}_0^0 qui est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^0 = \text{Ker } G_0 \cap D(\overline{Q_0 G_1}) &= \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega)^3 \mid \partial_3 E_\sigma \in L^2(\Omega)^2, \\ &\text{rot } E_\sigma = 0 \text{ et } E_3 = 0 \text{ dans } \Omega, E_\sigma \times n_\sigma = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

Le problème limite s'écrit donc : trouver $\mathbf{E}_0(t) \in \mathcal{V}_0^0$ tel que, pour tout $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathcal{V}_0^0$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_\Omega \mathbf{E}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}} d\mathbf{x} + (\overline{Q_0 G_1} \mathbf{E}_0, \overline{Q_0 G_1} \tilde{\mathbf{E}})_g + \frac{d}{dt} \int_\Omega \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}} d\mathbf{x} = (\partial_t \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{E}})_\mathcal{H}. \quad (3.72)$$

La formulation (3.72) n'est pas complètement satisfaisante, car un peu trop abstraite. Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord donner l'expression des espaces des solutions propagatives et non-propagatives et ensuite exhiber une écriture simplifiée qui fait apparaître une équation des télégraphistes similaire à celle obtenue dans [SI8].

Espace des solutions propagatives et non-propagatives. L'espace des solutions non-propagatives se déduit en cherchant le noyau de l'opérateur $\overline{Q_0 G_1}$ réduit aux fonctions de \mathcal{V}_0^0 . Pour cela, nous introduisons d'abord la décomposition des fonctions de $\mathbf{E} \in \mathcal{V}_0^0$. On a, grâce à la première relation d'équivalence dans (3.71),

$$E_\sigma = V(E_\sigma) \text{grad} \phi + \text{grad} \varphi_D(E_\sigma). \quad (3.73)$$

On observe, après calculs, que

$$\begin{aligned} \overline{Q_0 G_1} \begin{pmatrix} \text{grad} \varphi_D(E_\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \\ = - \begin{pmatrix} V(\text{grad} \varphi_D(\partial_3 E_\sigma)) \mathbf{rot} \phi - \text{grad} \varphi_N(\text{grad} \varphi_D(\partial_3 E_\sigma)) \\ 0 \end{pmatrix} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

En utilisant le fait que la décomposition (3.73) est orthogonale pour le produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)^2$, on déduit de cette observation que

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 = \{\mathbf{E} \in \mathcal{V}_0^0 \mid E_\sigma = \text{grad } \varphi_D \text{ avec } \varphi_D \in L^2(\Omega) \text{ et } \text{grad } \varphi_D \in L^2(\Omega)^2, \varphi_D = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \\ \mathcal{S}_0 = \{\mathbf{E} \in \mathcal{V}_0^0 \mid E_\sigma = V \text{ grad } \phi \text{ avec } V \in H^1(\mathbb{R})\}. \end{cases}$$

Equation des télégraphistes. L'équation des télégraphistes s'obtient en utilisant dans (3.72) des fonctions tests dans \mathcal{S}_0 , c'est-à-dire dans l'espace des solutions propagatives. Ce cas particulier de la théorie développée Section 3.2.3 illustre bien l'intérêt de spécifier l'espace des solutions propagatives et les équations régissant uniquement les composantes propagatives de la solution. La décomposition de la solution limite en composantes propagatives et non-propagatives s'écrit

$$E_{\sigma,0}(\mathbf{x}, t) = V_0(x_3, t) \text{ grad } \phi(x_\sigma) + \text{grad } \varphi_{D,0}(\mathbf{x}, t)$$

Comme expliqué, on choisit $\tilde{\mathbf{E}}$ tel que $\tilde{E}_\sigma = \tilde{V} \text{ grad } \phi$ avec $\tilde{V} \in H^1(\mathbb{R})$ et $\tilde{E}_3 = 0$ dans (3.72). La formulation variationnelle que l'on obtient pour $V_0(x_3, t)$ à une forme simple grâce au fait que

$$\begin{aligned} \overline{Q_0 G_1} \begin{pmatrix} E_{\sigma,0} \\ 0 \end{pmatrix} &= \overline{Q_0 G_1} \begin{pmatrix} V_0 \text{ grad } \phi(x_\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} V(\partial_3 V_0 \text{ grad } \phi(x_\sigma)) \mathbf{rot } \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\partial_3 V_0 \begin{pmatrix} \mathbf{rot } \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $\tilde{V} \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}} V_0 \tilde{V} dx_3 + \int_{\mathbb{R}} \partial_3 V_0 \partial_3 \tilde{V} dx_3 + \frac{1}{C} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sigma V_0 \tilde{V} |\text{grad } \phi|^2 d\mathbf{x} \\ + \frac{1}{C} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sigma \text{ grad } \varphi_{D,0} \cdot \tilde{V} \text{ grad } \phi d\mathbf{x} = \frac{1}{C} (\partial_t j_\sigma, \tilde{V} \text{ grad } \phi)_{L^2(\Omega)^2}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

où

$$C = \|\text{grad } \phi\|_{L^2(\Sigma)^2}^2.$$

Par ailleurs, on obtient une équation sur $\text{grad } \varphi_{D,0}$ en choisissant dans (3.72) une fonction test dans \mathcal{R}_0 . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \text{grad } \varphi_{D,0} \cdot \text{grad } \tilde{\varphi}_D d\mathbf{x} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sigma \text{ grad } \varphi_{D,0} \cdot \text{grad } \tilde{\varphi}_D d\mathbf{x} \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sigma V_0 \nabla \phi \cdot \text{grad } \tilde{\varphi}_D d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_t j_\sigma \cdot \text{grad } \tilde{\varphi}_D d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Interprétons maintenant (3.75), cette équation peut s'écrire sous la forme forte de la façon suivante

$$\partial_t^2 V_0 - \partial_3^2 V_0 + G \partial_t V_0 + \frac{1}{C} \int_{\Sigma} \sigma \text{ grad } \partial_t \varphi_{D,0} \cdot \text{grad } \phi d\mathbf{x} = \frac{1}{C} \int_{\Sigma} \partial_t j_\sigma \cdot \text{grad } \phi d\mathbf{x} \quad (3.77)$$

avec

$$G(x_3) = \frac{1}{C} \int_{\Sigma} \sigma(x_{\sigma}, x_3) |\text{grad } \phi(x_{\sigma})|^2 dx_{\sigma}. \quad (3.78)$$

Les trois premiers termes de (3.77) représentent une équation d'ondes amortie classique. Ici le terme d'amortissement G dépend de la conductivité et donc de x_3 à travers la définition (3.78) qui fait intervenir la fonction ϕ . A noter que si σ est homogène en x_{σ} alors $R(x_3) = \sigma(x_3)$. Le dernier terme de (3.77) est un terme de couplage entre les composantes propagatives et non-propagatives (voir Figure 3.8 pour une illustration de son importance). Comme expliqué Section 3.2.3, ce terme peut être remplacé en utilisant l'équation (3.76). On obtient alors une équation non locale en temps, exactement celle obtenue dans [SI8]. Pour finir, on peut remarquer que si σ est homogène alors l'avant-dernier terme de (3.77) s'annule (on obtient ce résultat par l'utilisation de la formule de Green) et les composantes propagatives et non-propagatives se découpent.

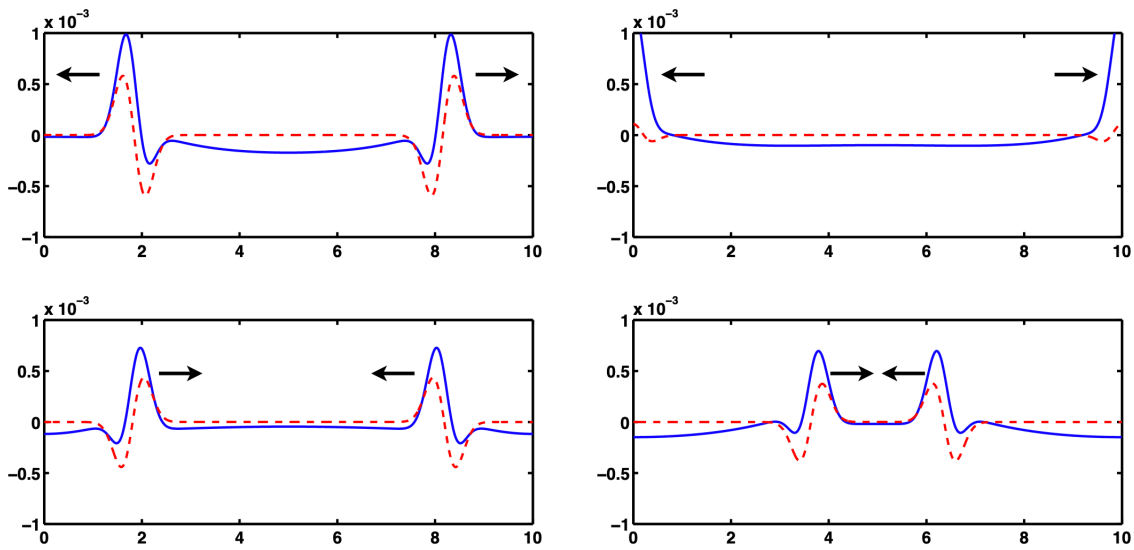


FIGURE 3.8 – Figure extraite de [SI8]. Instantanés de la propagation du potentiel électrique limite dans un câble coaxial. La section du câble est considérée circulaire, la conductivité est nulle dans une couronne en contact de la frontière intérieure et vaut 0.5 dans une couronne au contact de la frontière extérieure. En pointillés, est représentée la solution où le terme de couplage avec les termes d'effets à mémoire (3.76) est négligé. On peut ainsi observer l'importance de ce couplage qui génère de la dissipation et de la dispersion.

3.3.5 Approximation quasi-statique en piézoélectricité

Une application industrielle : la modélisation de capteurs piézoélectriques. J'ai abordé la question de l'approximation quasi-statique en piézoélectricité dans le cadre de la modélisation de capteurs piézoélectriques. Les capteurs piézoélectriques sont constitués d'un assemblage de barreaux piézoélectriques, entourés latéralement de résine et plaqués d'électrodes permettant leur activation électrique (voir Figure 3.9 et Figure 3.10).

Dans [SI10] nous nous sommes intéressés à la modélisation d'un barreau isolé, mais dans une étude antérieure [SI2], nous avons abordé l'étude complète des équations régissant le comportement global du capteur. En particulier, nous nous sommes posés la question de la justification des équations piézoélectriques telles que fréquemment rencontrées dans la

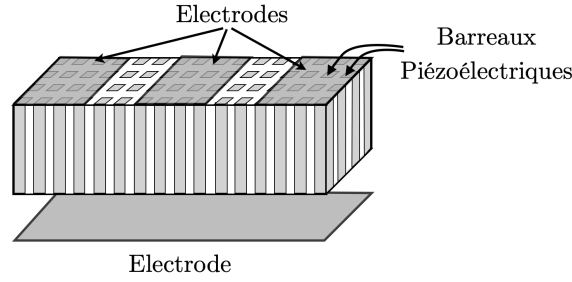


FIGURE 3.9 – Schéma d'un capteur piézoélectrique multi-éléments. Chaque électrode supérieure peut exciter électriquement un paquet de barreaux piézoélectrique. Par un jeu de retard temporel sur les excitations, il est possible de générer des ondes qui focalisent comme représenté Figure 3.10.

littérature et qui correspondent, en fait, à un régime quasi-statique. Comme déjà mentionné en introduction de la section 3.3, les matériaux piézoélectriques convertissent les variations de champs électriques en variations mécaniques et réciproquement. Du point de vue des équations aux dérivées partielles, il existe un couplage entre équations de Maxwell et équations de l'élastodynamique (3.29). Un objectif préliminaire a été de justifier dans ce cadre là le régime quasi-statique généralement considéré. Je montre dans cette section que ce problème est bien un problème double-échelles et que son analyse rentre dans le cadre abstrait présenté Section 3.2.

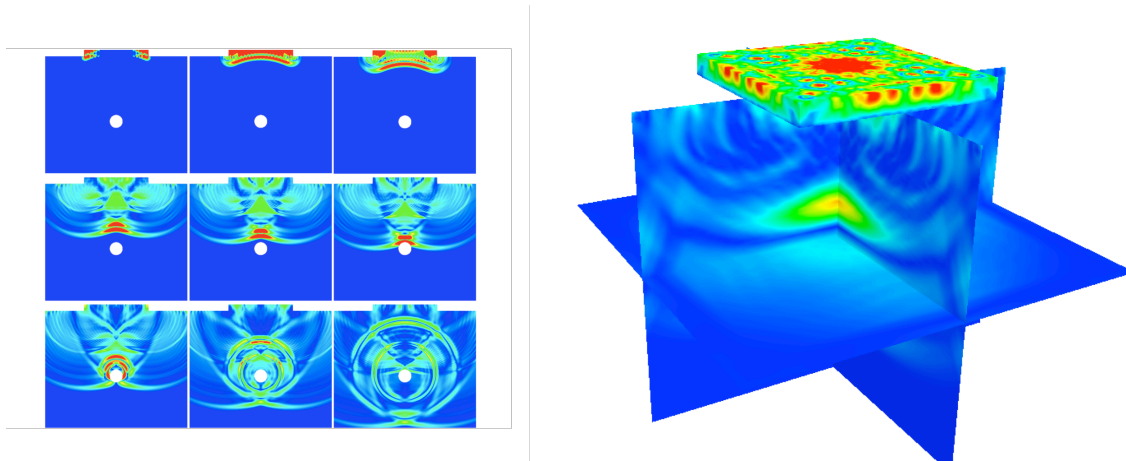


FIGURE 3.10 – Simulation de capteurs piézoélectriques réalisée en éléments finis de hauts degrés. Dans le cas 2D et 3D, le capteur génère une onde qui focalise dans le milieu de propagation (dans la simulation de gauche, le milieu est entouré de couches parfaitement adaptées, voir Section 5.3).

Problèmes double-échelles. La première étape est, en partant des équations de la piézoélectricité sous la forme (3.29), d'obtenir un système d'ordre 2 en temps. En éliminant le champ magnétique des équations, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t^2 \mathbf{E} + \operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E} + \mathbf{d}^* \varepsilon (\partial_t \mathbf{v}) = \partial_t \mathbf{j}, & \Omega_E \times [0, T], \\ \rho \partial_t^2 \mathbf{v} - \operatorname{Div} \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}) + \operatorname{Div} \mathbf{d} \partial_t \mathbf{E} = \partial_t \mathbf{f}, & \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.79)$$

Nous renvoyons le lecteur vers [SI2] pour le processus d'adimensionnalisation de ces équations et donnons ici directement le résultat. En supposant le rapport des vitesses des ondes élastiques très petit devant les ondes électromagnétiques (hypothèse assurément raison-

nable!) nous obtenons, après adimensionnalisation, la famille de problèmes suivante

$$\begin{cases} \partial_t^2 \mathbf{E}_\delta + \sigma \partial_t \mathbf{E}_\delta + \delta^{-2} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{E}_\delta + \mathbf{d}^* \varepsilon(\partial_t \mathbf{v}_\delta) = \partial_t \mathbf{j}, & \text{dans } \Omega_E \times [0, \mathbf{T}], \\ \partial_t^2 \mathbf{v}_\delta - \mathbf{Div} \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}_\delta) + \mathbf{Div} \mathbf{d} \partial_t \mathbf{E}_\delta = \partial_t \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \times [0, \mathbf{T}]. \end{cases} \quad (3.80)$$

où, pour simplifier, on a supposé la densité, la permittivité et la perméabilité relatives du milieu constantes et égales à 1 (après adimensionnalisation). En prenant en compte les conditions aux bords (3.31) avec $\Gamma_N = \Gamma$ et (3.32), la formulation variationnelle du problème s'écrit : trouver $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{v}_\delta) \in H_0(\mathbf{curl}; \Omega_E) \times H^1(\Omega)^3$, tel que pour tout $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in H_0(\mathbf{curl}; \Omega_E) \times H^1(\Omega)^3$,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{E}_\delta, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3} + \frac{d}{dt} (\sigma \mathbf{E}_\delta, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3} + \delta^{-2} (\mathbf{curl} \mathbf{E}_\delta, \mathbf{curl} \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3} \\ \quad + \frac{d}{dt} (\varepsilon(\mathbf{v}_\delta), \mathbf{d} \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega)^3} = (\partial_t \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{v}_\delta, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2(\Omega)^3} + (\mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}_\delta), \varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}))_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \\ \quad - \frac{d}{dt} (\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), \mathbf{d} \mathbf{E}_\delta)_{L^2(\Omega)^3} = (\partial_t \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2(\Omega)^3}. \end{cases} \quad (3.81)$$

En posant $\mathcal{H} = L^2(\Omega_E)^3 \times L^2(\Omega)^3$ et $\mathcal{G} = L^2(\Omega_E)^3 \times L^2_{\text{sym}}(\Omega)^{3 \times 3}$ équipé du produit scalaire L^2 usuel et en définissant l'opérateur fermé

$$G_\delta \Phi = G_\delta \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{curl} \mathbf{E} \\ \delta \varepsilon(\mathbf{v}) \end{pmatrix}, \quad D(G_\delta) = \left\{ \Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in H_0(\mathbf{curl}; \Omega_E) \times H^1(\Omega)^3 \right\},$$

le problème (3.81) peut s'écrire sous la forme d'un problème double-échelles : trouver $\Phi_\delta(t) \in D(G_\delta)$ tel que, pour tout $\tilde{\Phi} \in D(G_\delta)$,

$$\frac{d^2}{dt^2} (\Phi_\delta, \tilde{\Phi})_{\mathcal{H}} + \delta^{-2} (G_\delta \Phi_\delta, G_\delta \tilde{\Phi})_{\mathcal{G}} + \frac{d}{dt} b_0(\Phi_\delta, \tilde{\Phi}) = 0, \quad (3.82)$$

avec, en posant $\mathcal{B} = L^2(\Omega_E)^3 \times H^1(\Omega)^3$, pour tout $\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$ et $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$,

$$b_0(\Phi, \tilde{\Phi}) = (\sigma \mathbf{E}, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3} + (\varepsilon(\mathbf{v}), \mathbf{d} \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega)^3} - (\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), \mathbf{d} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)^3}.$$

Pour montrer que le problème (3.82) est rigoureusement un problème double-échelles comme défini, il faut montrer que G_δ est une suite d'opérateurs double-échelles. On introduit

$$G_0 \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{curl} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_1 \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \varepsilon(\mathbf{v}) \end{pmatrix},$$

où les domaines G_0 et G_1 sont définis par

$$\begin{cases} D(G_0) = H_0(\mathbf{curl}; \Omega) \times L^2(\Omega)^3, \\ D(G_1) = L^2(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)^3. \end{cases}$$

On observe que les opérateurs G_0 et G_1 sont bien définis de manières denses et fermés. Par ailleurs $D(G_0) \cap D(G_1) = D(G_\delta)$ et donc on déduit que $G_\delta = G_0 + \delta G_1 = \overline{G_0 + \delta G_1}$ et donc que G_δ est bien une séquence d'opérateurs double-échelles.

Séparation d'échelles stricte et problème limite. On vérifie aisément que la séparation d'échelles stricte (3.13) est vérifiée. En effet, les opérateurs G_0 et G_1 sont complètement découplés, G_0 n'agit que sur le champ électrique et G_1 que sur le champ de vitesse. Le couplage vient de la forme bilinéaire b_0 qui est ici définie sur un espace intermédiaire entre $\mathcal{V}_\delta = D(G_\delta)$ et \mathcal{H} . Comme la séparation d'échelles est stricte, il n'y a aucune propriété de densité supplémentaire à vérifier et on a $\mathcal{V}_0^0 = \text{Ker } G_0 \cap D(G_1)$ et $\mathcal{H}_0 = \text{Ker } G_0$. Le problème limite s'écrit : trouver $(\mathbf{E}_0(t), \mathbf{v}_0(t)) \in \mathcal{V}_0^0$, tel que, pour tout $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathcal{V}_0^0$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{E}_0, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3} + \frac{d}{dt}(\sigma \mathbf{E}_0, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3} + \frac{d}{dt}(\varepsilon(\mathbf{v}_0), \mathbf{d} \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega)^3} = (\partial_t \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{E}})_{L^2(\Omega_E)^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{v}_0, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2(\Omega)^3} + (\mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}_0), \varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}))_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} - \frac{d}{dt}(\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), \mathbf{d} \mathbf{E}_0)_{L^2(\Omega)^3} = (\partial_t \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2(\Omega)^3}. \end{cases}$$

Le problème limite, sous cette forme, n'est pas forcément très utile, tant du point de vue de la compréhension des équations, du calcul que de la comparaison avec la littérature. Cela vient du fait que l'espace \mathcal{V}_0^0 doit être explicité. En utilisant le théorème 2.7 et le corollaire 2.9 du chapitre 1 de [35], on déduit que

$$\text{Ker } G_0 = \{\nabla \varphi \mid \varphi \in H_\gamma^1(\Omega_E)\}$$

avec

$$H_\gamma^1(\Omega_E) = \{\varphi \in H^1(\Omega_E)/\mathbb{R} \mid \nabla \varphi \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_E\}.$$

Il est donc possible d'écrire le problème limite sous la forme plus explicite suivante : trouver $\varphi_0(t) \in H_\gamma^1(\Omega_E)$ et $\mathbf{v}_0(t) \in H^1(\Omega)^3$, tel que, pour tout $\tilde{\varphi} \in H_\gamma^1(\Omega_E)$ et $\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega)^3$,

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(\nabla \varphi_0, \nabla \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega_E)^3} + \frac{d}{dt}(\sigma \nabla \varphi_0, \nabla \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega_E)^3} \\ \quad + \frac{d}{dt}(\varepsilon(\mathbf{v}_0), \mathbf{d} \nabla \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega)^3} = (\partial_t \mathbf{j}, \nabla \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega_E)^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{v}_0, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2(\Omega)^3} + (\mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{v}_0), \varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}))_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} \\ \quad - \frac{d}{dt}(\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), \mathbf{d} \nabla \varphi_0)_{L^2(\Omega)^3} = (\partial_t \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2(\Omega)^3}. \end{cases} \quad (3.83)$$

Dans le cas où la conductivité électrique est nulle, c'est à dire,

$$\sigma = 0,$$

le système (3.83) peut se simplifier. En supposant, pour simplifier l'exposé, les conditions initiales nulles et les termes sources nuls autour de $t = 0$ et en ré-introduisant le déplacement élastique donné par

$$\mathbf{u}_0 = \int_0^t \mathbf{v}_0(s) \, ds,$$

on obtient alors les équations de la piézoélectricité (en régime quasi-statique) comme fréquemment rencontrées dans la littérature (voir [48, 51] : trouver $(\varphi_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \in H_\gamma^1(\Omega_E) \times H^1(\Omega)^3$, tel que, pour tout $(\tilde{\varphi}, \tilde{\mathbf{u}}) \in H_\gamma^1(\Omega_E) \times H^1(\Omega)^3$,

$$\begin{cases} (\nabla \varphi_0, \nabla \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega_E)^3} + (\varepsilon(\mathbf{u}_0), \mathbf{d} \nabla \tilde{\varphi})_{L^2(\Omega)^3} = \left(\int_0^t \mathbf{j}(s) \, ds, \nabla \tilde{\varphi} \right)_{L^2(\Omega_E)^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u}_0, \tilde{\mathbf{u}})_{L^2(\Omega)^3} + (\mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}_0), \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}))_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}} - (\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{d} \nabla \varphi_0)_{L^2(\Omega)^3} = (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})_{L^2(\Omega)^3}. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème quasi-statique, où, à chaque instant t , le champ électrique est donné par $\nabla\varphi_0(t)$, le potentiel $\varphi_0(t)$ étant solution d'un problème de Laplace avec termes sources provenant, sur Ω_E , de la densité de charges \mathbf{j} et sur Ω , du tenseur des déformations associé au champ de déplacement \mathbf{u}_0 .

3.4 Discussions et perspectives

3.4.1 Homogénéisation périodique

J'ai choisi de parler dans cette section du cas des problèmes d'homogénéisation périodique, car d'une part ma contribution sur ce sujet dans le cadre des problèmes d'ondes est légère (voir tout de même mes travaux de thèses [SI1], ainsi que [SI18], [SI23] et Section 2.3 pour des études dans le cadre de problèmes de réaction-diffusions) et d'autre part je vais donner une présentation incomplète d'un cas académique en une dimension d'espace. L'homogénéisation est par ailleurs déjà très bien traitée dans la littérature pour de nombreux cas différents et par de nombreuses approches différentes et il est difficile de citer de façon exhaustive l'ensemble des contributions sur ce sujet. S'il ne faut en retenir que trois, mes préférences vont vers [12], [3] et [23].

La formulation variationnelle du problème que je considère est donnée par : trouver $\mathbf{u}_\delta(t) \in H^1(0, 1)$ tel que, pour tout $v \in H^1(0, 1)$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u}_\delta, v)_{L^2(0,1)} + (\mu_\delta \partial_x \mathbf{u}_\delta, \partial_x v)_{L^2(0,1)} = (f, v)_{L^2(0,1)}. \quad (3.84)$$

Le problème est complété par des données initiales pour \mathbf{u}_δ et sa dérivée en temps. La fonction μ_δ est bornée inférieurement par une valeur strictement positive et est donnée par

$$\mu_\delta(x) = \mu_0\left(x, \frac{x}{\delta} - \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor\right)$$

où $\mu_0(x, y)$ est définie presque partout sur $(0, 1)^2$. L'idée consiste à plonger la formulation (3.84) dans le domaine $(0, 1)^2$. Pour cela, on introduit tout d'abord l'espace des fonctions continues de deux variables périodiques dans la deuxième variable,

$$C_{0,\#} = \{u \in C^0([0, 1]^2) \mid u(x, 1) = u(x, 0), \ x \in [0, 1]\}$$

ainsi que l'espace des fonctions de $\mathcal{H} = L^2((0, 1)^2)$ dont la dérivée oblique seulement est dans \mathcal{H} , plus précisément,

$$\mathcal{H} = L^2((0, 1)^2), \quad H^{1,\delta} = \{u \in \mathcal{H} \mid (\partial_x + \delta^{-1}\partial_y)u \in \mathcal{H}\}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert pour une norme et un produit scalaire qui se déduisent aisément. Finalement, l'espace de travail \mathcal{V}_δ est construit comme un sous-espace de $H^{1,\delta}$ et est donné par

$$\mathcal{V}_\delta = \overline{C_{0,\#}}^{\|\cdot\|_{H^{1,\delta}}}.$$

On peut maintenant introduire la formulation variationnelle suivante : trouver $u_\delta(t) \in \mathcal{V}_\delta$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{V}_\delta$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_\delta, v)_{L^2((0,1)^2)} + (\mu_0 (\partial_x + \delta^{-1}\partial_y) u_\delta, (\partial_x + \delta^{-1}\partial_y) v)_{L^2((0,1)^2)} = (f, v)_{L^2((0,1)^2)}. \quad (3.85)$$

Comme précédemment, le problème est complété par des données initiales pour u_δ et sa dérivée en temps. Il n'est pas aisé d'établir rigoureusement le lien entre (3.85) et (3.84) même si, formellement, on s'attend à avoir

$$\mathbf{u}_\delta(x) = u_\delta\left(x, \frac{x}{\delta} - \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor\right).$$

Cette question reste une perspective (dont l'importance de l'enjeu reste à déterminer). Cependant, il est intéressant de constater que (3.85) est une formulation d'un problème double-échelles (3.8) avec, $\mathcal{G} = \mathcal{H} = L^2((0, 1)^2)$ muni du produit scalaire à poids μ_0 et

$$G_\delta = \overline{G_0 + \delta G_1}, \quad D(G_\delta) = \mathcal{V}_\delta,$$

un opérateur fermé où formellement $G_0 u = \partial_y u$ et $G_1 u = \partial_x u$. Il est raisonnable de conjecturer que ces opérateurs sont rigoureusement définis par

$$\begin{cases} G_0 u = \partial_y u, \\ G_1 u = \partial_x u, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D(G_0) = \{u \in \mathcal{H} \mid \partial_y u \in \mathcal{H}, u(x, 0) = u(x, 1) \text{ dans } (0, 1)\} \\ D(G_1) = \{u \in \mathcal{H} \mid \partial_x u \in \mathcal{H}\}. \end{cases}$$

L'opérateur adjoint de G_0 est donné par

$$G_0^* u = -\partial_y(\mu_0 u)$$

avec

$$D(G_0^*) = \{u \in \mathcal{H} \mid \partial_y(\mu_0 u) \in \mathcal{H}, u(x, 0) = u(x, 1) \text{ dans } (0, 1)\}.$$

L'opérateur de projection orthogonale Q_0 (pour la norme dans \mathcal{G}) dans $\text{Ker } G_0^*$ est alors donné par

$$Q_0 : \mathcal{G} \mapsto \text{Ker } G_0^*, \quad Q_0 u = \frac{1}{\mu_0(x, y)} \left(\int_0^1 \frac{1}{\mu_0(x, y)} dy \right)^{-1} \left(\int_0^1 u(x, y) dy \right).$$

Pour faire court, on va supposer que la séparation d'échelles faible est vérifiée et, en observant que $\text{Ker } G_0$ correspond aux fonctions indépendantes de y , définir directement

$$\mathcal{V}_0^0 = D(\overline{Q_0 G_1}) \cap \text{Ker } G_0 = \{u \in \mathcal{H}, \partial_x u \in \mathcal{H}, \partial_y u = 0 \text{ dans } \mathcal{H}\},$$

et pour tout $u \in \mathcal{V}_0^0$,

$$\overline{Q_0 G_1} u = \frac{1}{\mu_0} \left(\int_0^1 \frac{1}{\mu_0(x, y)} dy \right)^{-1} \partial_x u.$$

On observe alors que le problème limite s'écrit : trouver $u_0(t) \in \mathcal{V}_0^0$ tel que pour tout $v \in \mathcal{V}_0^0$, on ait

$$\frac{d^2}{dt^2} (u_0, v)_{L^2(0,1)} + (\overline{Q_0 G_1} u_0, \overline{Q_0 G_1} v)_{\mathcal{G}} = (f, v)_{L^2(0,1)},$$

où

$$(\overline{Q_0 G_1} u_0, \overline{Q_0 G_1} v)_{\mathcal{G}} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{\mu_0(x, y)} dy \right)^{-1} u_0(x) v(x) dx.$$

Le problème limite est donc un problème de propagation d'ondes avec pour vitesse la racine carrée de la moyenne géométrique de μ_0 (l'inverse de la moyenne des inverses). C'est exactement le résultat bien connu auquel on s'attendait. Il faut noter cependant que ce résultat s'obtient sans passer par la définition d'un problème cellule qui est en fait caché dans la définition de l'opérateur de projection Q_0 . Je conclus avec deux points :

- l'analyse abstraite présentée Section 3.2 nous donne *gratuitement* la convergence faible de u_δ vers u_0 (le lien avec \mathbf{u}_δ est toujours à établir);
- la réécriture du problème d'homogénéisation comme un problème double-échelles est un moyen d'étudier les différentes extensions que je mentionne dans le reste de la section et de comparer, à un niveau abstrait, ce type de problèmes double-échelles aux autres présentés en Section 3.3.

3.4.2 Généralisations

Les résultats de convergence vers le problème limite présentés Section 3.2 se généralisent directement au cas où l'on considère des perturbations régulières de la famille de problèmes (3.8) (par perturbations régulières, je sous-entends que les espaces fonctionnels impliqués restent inchangés). Pour être plus précis, la famille de problèmes ci-dessous entre dans le cadre de la théorie développée :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} m_\delta(u_\delta, v) + a_\delta(u_\delta, v) + \frac{d}{dt} b_\delta(u_\delta, v) = (f_\delta, v)_{\mathcal{H}}, & \mathcal{D}'(0, T), \\ u_\delta(0) = u_\delta^0, \\ \dot{u}_\delta(0) = u_\delta^1, \end{cases} \quad (3.86)$$

où, pour tout $(u, v) \in \mathcal{V}_\delta \times \mathcal{V}_\delta$,

$$a_\delta(u, v) = \delta^{-2} ((I + \gamma_a(\delta) S_\delta) G_\delta u, G_\delta v)_{\mathcal{G}},$$

avec S_δ un opérateur borné (uniformément par rapport à δ) auto-adjoint dans \mathcal{G} et $\gamma_a(\delta)$ une fonction scalaire continue qui décroît de façon monotone lorsque δ décroît. De même, pour tout $(u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$m_\delta = ((I + \gamma_m(\delta) M_\delta) u_\delta, v)_{\mathcal{H}},$$

avec M_δ un opérateur borné (uniformément par rapport à δ) auto-adjoint dans \mathcal{H} et $\gamma_m(\delta)$ une fonction scalaire continue qui décroît de façon monotone lorsque δ décroît. Finalement

$$\forall (u, v) \in \mathcal{V}_\delta \times \mathcal{V}_\delta, \quad b_\delta(u, v) = b_0(u, v) + \gamma_b(\delta) b_{1,\delta}(u, v)$$

où $\gamma_b(\delta)$ est une autre fonction scalaire continue qui décroît de façon monotone lorsque δ décroît et $b_{1,\delta}$ une forme bilinéaire continue (uniformément par rapport à δ) de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans \mathbb{R} tel que

$$\forall (u, v) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \quad 0 \leq b_\delta(u, u), \quad |b_\delta(u, v)| \leq \|u\|_{\mathcal{B}} \|v\|_{\mathcal{B}}.$$

Avec ces hypothèses, on peut garantir que les solutions de la famille de problèmes (3.86) sont bien uniquement définies et satisfont la régularité (3.7) pour δ suffisamment petit. Les solutions u_δ de (3.86) vont converger vers la solution u_0 du problème limite (3.17) sous les mêmes conditions que celles évoquées Section 3.2.5.

3.4.3 Correcteurs, couches limites et modèles effectifs

Je décris dans cette section des observations très formelles que j'ai pu faire et qui mériteraient, selon moi, d'être étudiées en détail.

Le correcteur d'ordre 1. Une question intimement liée à l'obtention d'estimations d'erreur, et bien abordée dans la littérature lorsqu'il s'agit d'étudier des problèmes d'homogénéisation [1], est la construction de correcteurs. Dans la forme la plus simple, le premier correcteur est un terme u_1 indépendant de δ tel que

$$u_0 + \delta u_1$$

est une meilleure approximation de u_δ que u_0 . La détermination du correcteur u_1 est généralement nécessaire pour démontrer une estimation de l'erreur $u_\delta - u_0$ dans les cas où la séparation d'échelles forte n'est pas vérifiée.

Il est possible de montrer, au moins formellement, que la partie propagative du premier correcteur satisfait la même équation que le terme limite au terme source près. Par ailleurs dans certaines situations, ce terme est source ne dépend pas du terme limite u_0 et donc le calcul du correcteur u_1 se fait de la même façon que le calcul du terme limite. C'est notamment le cas lorsque (pour rappel P_0 est le projecteur orthogonal sur $\text{Ker } G_0$)

$$(I - Q_0) G_1 P_0 = 0 \quad \text{ou} \quad Q_0 G_1 (I - P_0) = 0. \quad (3.87)$$

Notons que lorsque la séparation d'échelles forte est vérifiée nous avons $(I - Q_0) G_1 = 0$ et donc en particulier $(I - Q_0) G_1 P_0 = 0$. Cependant, il peut arriver que (3.87) soit vrai bien que la séparation d'échelles forte ne soit pas vérifiée (typiquement en homogénéisation, $Q_0 G_1 (I - P_0) = 0$) ce qui fait de (3.87) un critère pouvant hiérarchiser les problèmes double-échelles dans la cas ou seul la séparation d'échelles faible est satisfaite.

Finalement, de manière générale, le premier correcteur possède une composante dans $(\text{Ker } G_0)^\perp \cap D(G_0)$, cette composante se calcule, en supposant que $u_0(t) \in D(G_1)$, en résolvant,

$$\forall v \in D(G_0), \quad (G_0 u_1(t), G_0 v) = -(G_1 u_0(t), G_0 v).$$

Le problème ci-dessus correspond au problème cellule dans le contexte de l'homogénéisation.

Couches limites. Les approximations corrigées du type $u_0 + \delta u_1$ ne corrigent pas d'effet singulier tels que des couches limites [2, 29] qui existent dans la plupart des problèmes double-échelles que j'ai présentés dès que l'on considère des géométries ou des paramètres complexes (coins, discontinuités). Ces termes de couches limites doivent pouvoir être définis de façon abstraite en utilisant le formalisme présenté dans ce manuscrit. Il serait intéressant de comprendre si une structure commune se dégage dans la définition de ces termes dans les différentes applications rencontrées ici.

Modèles effectifs. Une question importante que je n'ai pas encore mentionnée est la construction de modèle effectif. En effet, l'approximation de u_δ en utilisant deux correcteurs, c'est-à-dire par $u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2$ présente deux désavantages.

- Premièrement, en pratique, trois calculs sont nécessaires, le premier pour calculer u_0 , le deuxième pour u_1 et le dernier pour u_2 . À chaque étape, les termes sources de l'équation à résoudre sont obtenus aux étapes précédentes et dépendent donc de u_0 pour le deuxième calcul puis de (u_0, u_1) pour le dernier.
- Deuxièmement, comme expliqué récemment dans [4] des phénomènes de croissance en temps non-désirés se produisent. En effet, comme u_0 est une approximation de u_δ , qui a priori peut croître linéairement en temps longs (même si le terme source est à support compact en temps) alors, u_1 , qui dépend linéairement de u_0 peut croître

quadratiquement en temps long et ainsi de suite pour u_2 .

Pour remédier à ces deux problèmes, il est classique d'introduire la notion de modèle effectif. On va construire une approximation $u_{2,\delta}$, plus simple à calculer que u_δ et telle que la solution u_δ du problème initiale satisfait, formellement,

$$u_{2,\delta} = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + O(\delta^2).$$

Ainsi, en un unique calcul on obtient une approximation de u_δ en principe aussi précise que l'utilisation de deux correcteurs. Comme cette solution est par construction la solution d'une unique équation, on s'attend à ce que le phénomène de croissance en temps, dite séculaire, ne se produise pas. Ces observations ont été faites dans le cadre de l'homogénéisation, [4] mais s'adaptent sans aucun doute au cadre abstrait double-échelles.

3.4.4 Problème multi-échelles

Une autre thématique avec de fortes retombées applicatives est la prise en compte de plusieurs échelles (plus que deux) dans la formulation. En théorie, les situations que l'on peut rencontrer sont trop nombreuses pour être listées, mais en pratique j'en ai rencontré deux que je décris ci-dessous.

Forte dissipation. Dans [SI27] nous avons étudié la prise en compte de l'effet de peau pour la propagation d'ondes électromagnétiques dans des câbles coaxiaux. Cet effet correspond à la dissipation du champ électromagnétique proche des matériaux à très forte conductivité qui entourent le câble. D'un point de vue abstrait, l'équation d'ondes sous-jacente à la forme suivante

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_{\delta,\eta}, v)_{\mathcal{H}} + \delta^{-2}(G_\delta u_{\delta,\eta}, G_\delta v)_{\mathcal{G}} + \eta^{-1} \frac{d}{dt} b_0(u_{\delta,\eta}, v) = 0, \quad (3.88)$$

où b_0 est une forme bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B} = \mathcal{H}$), non-négative et symétrique. Le paramètre η est un autre petit paramètre, lié, dans le cas de l'application mentionnée à l'inverse de la conductivité des milieux à forte conductivité.

Echelles mélangées. Une autre application qui entre dans le cadre des problèmes multi-échelles est l'étude de la déformation de la paroi des artères sanguines due au passage du flux sanguin. Les parois artérielles sont assez fines et sont quasi-incompressibles (comme beaucoup de tissus humains). Si l'on considère une artère droite *infinie*, les équations élastodynamiques linéarisées en coordonnées polaires et en oubliant l'effet de courbure le problème, on obtient un problème de propagation d'ondes dans des plaques isotropes (voir Section 3.3.3) où le premier paramètre de Lamé, λ , est supérieur, de plusieurs ordres de grandeur, au deuxième paramètre de Lamé μ . D'un point de vue abstrait, ce type de problème peut s'écrire

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_{\delta,\eta}, v)_{\mathcal{H}} + \delta^{-2} \eta^{-2}(G_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta}, G_{\delta,\eta} v)_{\mathcal{G}} = 0 \quad (3.89)$$

avec, formellement,

$$G_{\delta,\eta} = G_{0,0} + \eta G_{0,1} + \delta G_{1,0} + \delta \eta G_{1,1},$$

où par exemple δ est lié à l'épaisseur de la plaque et η le rapport μ/λ .

Discussions. L'étude abstraite de (3.88) et de (3.89) soulève, outre la définition d'un cadre

abstrait adapté, plusieurs questions propre à la thématique des problèmes multi-échelles : faut-il construire un problème limite en passant à la limite sur η puis sur δ ? Ou l'inverse? Les limites commutent-elles? Faut-il poser $\eta = \beta_0 \delta^p$ avec $p > 0$ et β_0 proche de 1, puis passer à la limite? Comment construire les correcteurs? L'ensemble de ces questions sont des perspectives très intéressantes avec des retombées applicatives immédiates.

CHAPITRE 4

Discretisation en temps de problèmes double-échelles semi-discrets

4.1 Objectifs et remarques préliminaires

Introduction. Dans ce chapitre, je présente différentes stratégies de discrétisation en temps de problèmes double-échelles (3.1). Je mentionne brièvement quelques aspects de la discrétisation en espace, mais la majeure partie de ce passage nécessaire sera occultée pour présenter directement mes contributions. L'objectif de chapitre est donc de présenter des schémas en temps pour approcher u_δ solution de (3.1) de façon robuste par rapport à δ . Par robuste, je sous-entends que les propriétés du schéma (stabilité, complexité algorithmique, consistance) ne dépendent pas, ou peu, de δ .

Pour tout h appartenant à un ensemble s'accumulant autour de 0, nous supposons donné un espace \mathbb{V}_h de dimension fini équipé d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$. Le système à discretiser est le suivant : pour tout $t \in [0, T]$, on cherche $u_{\delta,h} \in C^2([0, T]; \mathbb{V}_h)$ satisfaisant,

$$\ddot{u}_{\delta,h}(t) + A_{\delta,h} u_{\delta,h}(t) + B_h \dot{u}_{\delta,h}(t) = f_h(t), \quad (4.1)$$

avec pour données initiales

$$u_{\delta,h}(0) = u_h^0, \quad \dot{u}_{\delta,h}(0) = u_h^1. \quad (4.2)$$

Dans (4.1), l'opérateur $A_{\delta,h}$ est un opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{V}_h)$ auto-adjoint positif, et $B_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_h)$ est un opérateur positif. Il est classique de montrer que si $f_h \in C^k([0, T]; \mathbb{V}_h)$, $k \in \mathbb{N}$, alors il existe une unique solution à (4.1, 4.2) et elle satisfait

$$u_{\delta,h} \in C^{k+2}([0, T]; \mathbb{V}_h).$$

Comme nous nous plaçons dans le cadre de problèmes double-échelles, nous supposons que

$$A_{\delta,h} = \delta^{-2} A_{0,h} + \delta^{-1} A_{1,h} + A_{2,h}. \quad (4.3)$$

où les opérateurs de cette décomposition sont linéaires, bornés et auto-adjoints. Pour les discrétisations en temps de (4.1, 4.2) que je vais présenter, je ne mentionne que les propriétés de stabilité. Les propriétés d'approximation et les résultats de convergence ne seront pas évoqués dans cette partie. Pour ce type d'analyses je renvoie le lecteur vers [SI17] ou [TH4]. À noter que si l'on ne cherche pas à expliciter la dépendance du petit paramètre δ dans les résultats, alors l'analyse de convergence se déduit classiquement des propriétés de stabilité et de consistance. Par contre, si on cherche à estimer cette dépendance,

alors l'analyse de convergence est difficile, car elle se couple avec l'analyse asymptotique (voir [TH4] où nous avons proposé une étude de convergence pour la construction de schémas implicites-explicites décrits Section 4.2.3 appliqués à la propagation d'ondes dans des plaques, Section 3.3.3). Pour ces cas là, une analyse abstraite reste à faire et est une perspective intéressante. Cependant, dans certaines situations (par exemple, lorsque la séparation d'échelles forte est satisfaite) ce type d'analyses se rapproche fortement d'analyses de convergence de discrétisation en temps de problèmes de Stokes (voir [38]).

Éléments méthodologiques. Tous les schémas présentés s'appuieront sur une discrétisation fixe de l'intervalle temporel $[0, T]$. Plus précisément, on suppose un pas de temps $\Delta t > 0$ donné (qui satisfera éventuellement une condition de stabilité dite condition CFL), tel que si on définit $t^n = n\Delta t \in [0, T]$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $T = t^N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et $N > 1$. On cherchera alors à construire des approximations $u_{\delta,h}^n$ des solutions aux instants t^n , c'est-à-dire $u_{\delta,h}(t^n)$. Ces approximations seront consistantes à l'ordre 2 en temps Section 4.2 puis d'ordre 4 Section 4.3.

L'analyse de stabilité de schémas qui sera proposée se fera systématiquement avec la même stratégie. Cette stratégie consiste à vérifier qu'une énergie discrète en espace et en temps, notée $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$, qui approche l'énergie du problème semi-discret $\mathcal{E}_h(t^n + \Delta t/2)$, satisfait un équivalent discret de la relation d'énergie associée à (4.1), c'est-à-dire,

$$\mathcal{E}_h(t) + \mathcal{D}_h(t) = \mathcal{E}_h(0) + \int_0^t (f_h(\tau), \dot{u}_{\delta,h})_h(\tau) \, d\tau, \quad (4.4)$$

où

$$\mathcal{E}_h(t) = \frac{1}{2} \|\dot{u}_{\delta,h}\|_h^2 + \frac{1}{2} (A_{\delta,h} u_{\delta,h}, u_{\delta,h})_h \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_h(t) = \int_0^t (B_h \dot{u}_{\delta,h}(\tau), \dot{u}_{\delta,h}(\tau))_h \, d\tau. \quad (4.5)$$

Par inspection de (4.5), on voit que l'énergie est une forme quadratique positive par rapport à la solution. Ce caractère positif pourra être perdu par l'approximation $\mathcal{E}_h(t^n + \Delta t/2)$ si le pas de temps est choisi trop grand. Dans les cas que je vais présenter, la condition de stabilité du schéma s'obtient comme une condition sur le pas de temps (condition CFL) pour que l'énergie $\mathcal{E}_h(t^n + \Delta t/2)$ soit positive indépendamment de la solution.

La condition de positivité de l'énergie se démontre en utilisant le rayon spectral de l'opérateur $A_{\delta,h}$ (qui n'a que des valeurs propres réelles positives) que l'on note $\rho_{\delta,h}$. On aura besoin, épisodiquement, d'utiliser une propriété qui est généralement satisfaite lorsque l'on discrétise des problèmes double-échelles

$$\forall \eta > 0 \quad \pm A_{1,h} \leq \eta^{-1} \delta^{-2} A_{0,h} + \eta A_{2,h}, \quad (4.6)$$

où l'inégalité a lieu au sens des opérateurs auto-adjoints et se démontre, sur des cas pratiques, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et de Young. Pour finir, on définit $\rho_{i,h}$ les rayons spectraux de $A_{i,h}$. Les conditions de stabilité CFL que nous obtiendrons seront de type hyperbolique, c'est-à-dire, que si h représente un pas de discrétisation éléments finis, et si $\rho_{i,h}^{-1} = O(1/h^2)$ (ce qui est le cas pour la discrétisation d'opérateur d'ordre 2) alors nous avons $\Delta t \leq O(1/h)$ (ici la dépendance en δ dans la condition de stabilité est volontairement passée sous silence). Finalement si l'on note $\tilde{\rho}_{\delta,h}$ le rayon spectral de $\delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}$, nous supposons que dans certaines situations bien particulières de séparation d'échelles nous avons la propriété

$$\tilde{\rho}_{\delta,h} \leq \max(\delta^{-2} \rho_{0,h}; \rho_{2,h}). \quad (4.7)$$

Organisation du chapitre. Dans les sous-sections de la section 4.2 qui suivent (Section 4.2.1 à Section 4.2.5), je présente différentes variantes de schémas saute-moutons qui permettent de discrétiser le système (4.1) à l'ordre 2. Ces sections s'appuient sur les travaux présentés dans [SI3, SI4, SI17, SI32], [TH4] et [16, 36]. J'insisterais à chaque fois sur l'intérêt des schémas proposés (en ce sens la Section 4.2.1 fait uniquement figure de rappel) ainsi que sur les résultats de stabilité qu'il a été possible de prouver. Section 4.3, je présente des schémas qui s'appuient sur la technique de l'équation modifiée pour construire des discrétisations en temps à l'ordre 4 de (4.1). La stabilité des schémas proposés sera systématiquement analysée. Nous nous intéresserons d'abord à des problèmes non dissipatifs et sans terme de couplage (c'est-à-dire $B_h = 0$) puis aborderons le cas plus difficile où B_h n'est pas nul (mais auto-adjoint).

Remarque sur la discrétisation spatiale. Pour finir cette introduction, je mentionne quelques éléments à propos de mon expérience sur la discrétisation spatiale. Pour la discrétisation en espace des problèmes mentionnés Chapitre 3, j'ai utilisé des éléments finis spectraux d'ordres élevés avec condensation de masse. Ces schémas ont été introduits dans [56] pour Stokes et se révèlent très efficaces pour les ondes, voir [24, 53], car ils permettent d'obtenir, au niveau algébrique, une matrice de masse diagonale sans (ou presque, voir [32]) perte de consistance. Ce dernier point est important pour l'efficacité des schémas explicites que je présente. De plus, pour la discrétisation des problèmes de transmission (voir Section 5.2) des stratégies de types éléments mortiers (introduits dans [55]) ont été utilisées. C'est sur ces stratégies que j'ai développé à partir de 2010 le code *Ondomatic* qui a été ensuite utilisé comme base pour le développement, par Alexandre Imperiale, d'une partie du noyau de calcul du logiciel *CIVA*¹.

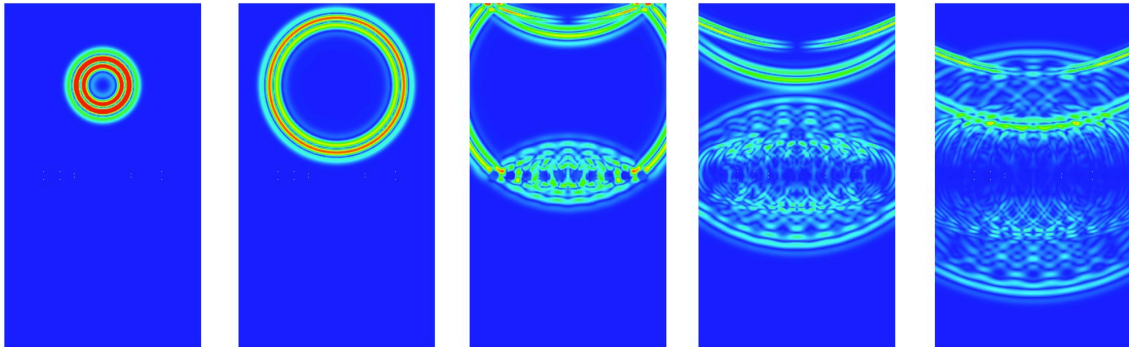


FIGURE 4.1 – Illustration d'une simulation éléments finis en élastodynamique (onde ultrasonore dans un pneu) réalisée avec le code de calcul *Ondomatic*. Le milieu est homogène à part dans la partie centrale où sont présents des inclusions rigides. Des éléments finis spectraux d'ordres élevés sont utilisés ainsi que des couches parfaitement adaptées sur les côtés latéraux. Finalement, une stratégie de pas de temps locaux est utilisée pour traiter les inclusions.

1. <https://www.extende.com/fr/civa-en-quelques-mots>

4.2 Le schéma saute-mouton et ses variantes

Schémas de démarrage. Tous les schémas présentés dans cette section sont des schémas à deux pas de temps. Les inconnues aux instants n et $n - 1$ sont nécessaires pour calculer l'inconnue à l'instant $n + 1$. Ainsi, l'approximation des deux premiers itérés $u_{\delta,h}^0$ et $u_{\delta,h}^1$ est nécessaire pour calcul la suite d'approximations. Ces deux premiers itérés se calculent en utilisant les conditions initiales ainsi qu'un développement de Taylor, plus précisément, on pose

$$u_{\delta,h}^0 = u_{\delta,h}(0) \quad \text{et} \quad u_{\delta,h}^1 = u_{\delta,h}(0) + \Delta t \dot{u}_{\delta,h}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} (f_h(0) - A_{\delta,h} u_{\delta,h}^0 - B_{0,h} \dot{u}_{\delta,h}(0)),$$

on peut vérifier que $u_{\delta,h}^1$ est une approximation d'ordre 3 en temps de $u_{\delta,h}(\Delta t)$ ce qui garantit que des méthodes consistantes à l'ordre 2 en temps pourront être construites.

4.2.1 Schémas saute-moutons classiques : les θ -schémas

Pour discrétiser en temps l'équation (4.1) l'approche la plus simple est l'utilisation du schéma saute-mouton ou θ -schéma qui s'écrit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_\theta + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n). \quad (4.8)$$

où il a été introduit la notation suivante, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\{v_h^n\}_\theta = \theta v_h^{n+1} + (1 - 2\theta) v_h^n + \theta v_h^{n-1}. \quad (4.9)$$

Le schéma (4.8) est implicite pour toutes les valeurs de θ sauf pour $\theta = 0$ où il est explicite pour des choix judicieux de discrétisations et pour certaines propriétés spécifiques de B_h (par explicite, il est entendu que du point de vue algébrique seulement des systèmes linéaires triviaux sont inversés). L'analyse de stabilité de ce schéma se fait en utilisant l'égalité

$$\{v_h^n\}_\theta = \{v_h^n\}_{\frac{1}{4}} + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right) \frac{v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}}{\Delta t^2}$$

pour le réécrire sous la forme équivalente suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left(I_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right) A_{\delta,h}\right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{4}} \\ + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Énergie. Au schéma (4.10) on peut associer une énergie discrète, consistante formellement avec l'énergie semi-discrète (4.5). Cette énergie discrète est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(I_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right) A_{\delta,h}\right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \Big)_h \\ + \left(A_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}\right)_h. \end{aligned}$$

Cette énergie satisfait une relation consistante avec la relation d'énergie semi-discrète (4.4)

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n \left(f_h(t^k), \frac{u_{\delta,h}^{k+1} - u_{\delta,h}^{k-1}}{2\Delta t}\right)_h \quad (4.11)$$

où le terme $\mathcal{D}_h^{n+\frac{1}{2}}$ prend en compte les éventuelles pertes du système et est donné par

$$\mathcal{D}_h^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^n \left(B_h \frac{u_{\delta,h}^{k+1} - u_{\delta,h}^{k-1}}{2 \Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{k+1} - u_{\delta,h}^{k-1}}{2 \Delta t} \right)_h.$$

Condition de stabilité. Il est bien connu [49] qu'une condition de stabilité nécessaire et suffisante est la positivité de l'énergie, c'est-à-dire,

$$I_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4} \right) A_{\delta,h} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left(I_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{4} \right) A_{\delta,h} \right) v_h, v_h \right)_h \geq 0, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h. \quad (4.12)$$

La condition ci-dessus est appelée condition CFL. On peut observer que pour Δt suffisamment petit (4.12) est nécessairement satisfait, car $A_{\delta,h}$ est borné. Lorsque $\theta \geq 1/4$, la condition de stabilité (4.12) est satisfaite, le schéma est inconditionnellement stable. Lorsque $\theta < 1/4$, la condition de stabilité est équivalente à la condition

$$\Delta t^2 \leq \frac{4}{(1 - 4\theta)\rho_{h,\delta}} = O(\delta^{-2}h^{-2}).$$

On observe que les deux paramètres h et δ peuvent faire que le pas de temps autorisé dégénère et le schéma devient trop coûteux. On va construire Section 4.2.3 à Section 4.2.4 des schémas qui prennent en compte cet aspect particulier lié à la présence d'un petit paramètre dans le système.

4.2.2 Les schémas saute-moutons généralisés

Nous continuons l'exploration des discrétisations d'ordre 2 à deux pas de temps pour le système (4.1) en s'intéressant aux familles de schémas introduites dans [SI17]. En nous inspirant de la forme (4.10) du schéma saute-mouton standard, nous avons considéré les schémas suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(\Delta t^2 A_{\delta,h}) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{\delta,h}) A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{4}} \\ + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2 \Delta t} = f_h(t^n), \end{aligned} \quad (4.13)$$

où $\mathcal{P}_k(x)$ et $\mathcal{P}_p(x)$ sont des polynômes dont les propriétés sont discutées ci-dessous. Intéressons-nous tout d'abord à la consistance des schémas (4.13). Par inspection, on déduit que si les polynômes $\mathcal{P}_k(x)$ et $\mathcal{P}_p(x)$ satisfont

$$\mathcal{P}_k(0) = \mathcal{P}_p(0) = 1. \quad (4.14)$$

alors le schéma (4.13) peut être vu formellement, comme une perturbation à l'ordre 2 en temps du θ -schéma (4.8) avec $\theta = 1/4$. L'équation (4.14) est donc bien la condition de consistance. À chaque itération du schéma (4.13), l'opérateur

$$\mathcal{P}_k(\Delta t^2 A_{\delta,h}) + \frac{1}{4} \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{\delta,h}) \Delta t^2 A_{\delta,h} + \frac{\Delta t}{2} B_h \quad (4.15)$$

doit être inversé. De manière générale, c'est-à-dire sans hypothèse sur B_h autre que sa positivité, une condition suffisante pour que l'opérateur donné par (4.15) soit inversible est

$$\mathcal{P}_k(x) + \frac{1}{4} \mathcal{P}_p(x)x > 0, \quad \forall x \in [0, \Delta t^2 \rho_{\delta,h}]. \quad (4.16)$$

Une telle condition est nécessairement satisfaite à h et δ fixé pour Δt suffisamment petit grâce aux conditions de consistance (4.14).

Énergie. L'énergie associée aux solutions de (4.13) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = & \left(\mathcal{P}_k(\Delta t^2 A_{\delta,h}) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h \\ & + \left(\mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{\delta,h}) A_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h, \end{aligned} \quad (4.17)$$

et, avec cette définition, la relation (4.11) est satisfaite pour le schéma (4.13). Une condition nécessaire de stabilité est la positivité de l'énergie. Pour mieux caractériser cette condition à partir des polynômes \mathcal{P}_k et \mathcal{P}_p on définit un paramètre α comme suit

$$\alpha = \sup \{ \beta \geq 0 \mid \forall x \in [0, \beta], \mathcal{P}_k(x) \geq 0 \text{ et } \mathcal{P}_p(x) \geq 0 \}. \quad (4.18)$$

Comme $\mathcal{P}_p(0) = \mathcal{P}_k(0) = 1$, on déduit que $\alpha > 0$ et peut éventuellement être infini. La condition

$$\Delta t^2 \leq \frac{\alpha}{\rho_{\delta,h}}, \quad (4.19)$$

garantit la positivité de l'énergie $\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$ comme définie par (4.17).

Stabilité uniforme. La positivité de l'énergie ne montre pas directement que le schéma est stable (c'est-à-dire que sa norme dans \mathbb{V}_h reste bornée). De plus, il n'est pas clair que lorsque Δt se rapproche de sa valeur limite la stabilité du schéma ne se dégrade pas. Nous avons montré dans [SI17] qu'il était possible de déduire des relations de stabilité uniformes (dans le sens que je viens de décrire) lorsque les conditions suivantes étaient vérifiées : l'inégalité (4.19) est satisfaite et il existe deux intervalles disjoints I_k et I_p de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que,

$$I_k \cup I_p = [0, \alpha]$$

et deux scalaires C_k et C_p de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$0 < C_k \leq \mathcal{P}_k(x), \quad \forall x \in I_k \quad \text{et} \quad 0 < C_p \leq x \mathcal{P}_p(x), \quad \forall x \in I_p. \quad (4.20)$$

Avec cette condition, (4.16) est nécessairement vraie et nous avons montré la propriété de stabilité

$$\left\| \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_h \leq \gamma \sqrt{2} (\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{n-\frac{1}{2}}}) \quad (4.21)$$

et

$$\sqrt{\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{\mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{2} \gamma \Delta t \sum_{\ell=1}^n \|f_h(t^\ell)\|_h \quad (4.22)$$

où

$$\gamma = C_k^{-\frac{1}{2}}/2 + C_p^{-\frac{1}{2}}.$$

Les estimations (4.21) et (4.22) sont importantes et ne semblent pas avoir été proposées sur des systèmes abstraits avant nos travaux dans [SI3] et [SI17]. Je vais donc me paraphraser légèrement : les estimations (4.21) et (4.22) sont bien uniformes dans le sens où elles ne font pas intervenir la condition de stabilité directement, c'est-à-dire que lorsque Δt approche sa valeur maximale autorisée donnée par (4.12), la majoration ne dégénère pas !

Je présente maintenant plusieurs cas d'applications de ces schémas : les θ -schémas, les schémas explicites et les schémas saute-moutons de Chebychev ainsi que leur variante stabilisée.

Les θ -schémas. Les θ -schémas, présentés Section 4.2.1, s'écrivent sous la forme (4.13) avec

$$\mathcal{P}_k(x) = 1 + x\left(\theta - \frac{1}{4}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_p(x) = 1.$$

On peut tout de suite observer que la condition de consistance (4.14) est satisfaite. Pour l'étude de stabilité, il faut distinguer deux choix :

- Lorsque $\theta \geq 1/4$, les deux polynômes sont positifs donc $\alpha = +\infty$ dans la définition (4.18) et on peut choisir $I_k = [0, +\infty]$. On peut ainsi choisir $C_k = 1$ et $C_p = +\infty$ dans (4.20) et obtenir $\gamma = 1/2$.
- Lorsque $0 \leq \theta < 1/4$, on peut calculer, en prenant la définition (4.18) que

$$\alpha = \alpha(\theta) = \frac{4}{4 - \theta}.$$

Nous montrons dans [SI17] qu'il existe un $a(\theta) \in [0, \alpha(\theta)]$ tel que si

$$I_k = [0, a(\theta)), \quad I_p = [a(\theta), \alpha(\theta)],$$

alors C_p et C_k sont tels que $\gamma \leq \sqrt{2}$.

La famille des schémas explicites. En choisissant

$$\mathcal{P}_k(x) = 1 - \frac{x}{4}\mathcal{P}_p(x) \tag{4.23}$$

on observe, grâce à (4.15), que l'opérateur à inverser à chaque itération est

$$I_h + \frac{\Delta t}{2}B_h$$

et donc que le schéma est explicite en supposant que cet opérateur est trivial à inverser. On observe également que la condition (4.16) nécessaire au calcul des itérés est trivialement satisfaite. Le schéma (4.13) se réécrit

$$\frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{\delta,h}) A_{\delta,h} u_{\delta,h}^n + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n), \tag{4.24}$$

Avec le choix (4.23), la propriété de consistance $\mathcal{P}_k(0) = 1$ est satisfaite nécessairement, la seule propriété à vérifier pour la consistance est donc

$$\mathcal{P}_p(0) = 1.$$

De plus, la stabilité de la méthode est garantie si la condition (4.19), c'est à dire $\Delta t^2 \leq \alpha/\rho_{\delta,h}$, est satisfaite avec α le plus grand réel strictement positif tel que

$$\forall x \in [0, \alpha], \quad \mathcal{P}_p(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x}{4}\mathcal{P}_p(x) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [0, \alpha], \quad 0 \leq x\mathcal{P}_p(x) \leq 4.$$

Avec le choix (4.23) on peut déduire l'existence d'intervalles I_k et I_p tels que la propriété (4.20) soit satisfaite avec C_p et C_k obtenus explicitement. En effet, en observant que

$$\mathcal{P}_k(x) = 1 - \frac{x}{4}\mathcal{P}_p(x) \leq \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x\mathcal{P}_p(x) \geq \frac{4}{5}$$

nous pouvons en déduire, par continuité de $\mathcal{P}_k(x)$ et $\mathcal{P}_p(x)$ qu'il existe I_k et I_p tel que la condition (4.20) soit satisfaite avec $C_k = C_p = 4/5$. Pour ces schémas les relations de stabilité (4.21) et (4.22) sont satisfaites avec

$$\gamma = 3\sqrt{5}/4.$$

Ce résultat n'est pas optimal (voir le cas de θ -schéma avec $\theta = 0$ où l'on avait $\gamma = \sqrt{2}$), mais ce qui est important ici est l'obtention, dans un cadre général, des bornes (4.21) et (4.22) avec une valeur de γ indépendante de Δt , de h et de δ .

Les schémas saute-moutons de Chebychev. Pour définir ces schémas, qui sont des schémas explicites (donc consistant et uniformément stables), le polynôme \mathcal{P}_p est obtenu par transformation des polynômes de Chebychev. En effet ces derniers présentent des propriétés optimales d'équi-répartition de leurs racines dans l'intervalle $[-1, 1]$. L'utilisation des polynômes de Chebychev, de cette façon-là, a d'abord été introduite pour des systèmes d'équations d'ondes dans [34, 50].

Pour définir les schémas, \mathcal{P}_k sera choisi en utilisant (4.23) (car les schémas sont explicites) et le polynôme $\mathcal{P}_p(x)$ sera choisi pour un paramètre $\ell \geq 1$ fixé, par

$$\mathcal{P}_p(x) = \mathcal{P}_{p,\ell}(x) = \frac{2}{x} \left[1 - \mathcal{T}_{\ell+1} \left(1 - \frac{2x}{4(\ell+1)^2} \right) \right]$$

où \mathcal{T}_ℓ est le ℓ -ième polynôme de Chebychev. On peut vérifier que $\mathcal{P}_p(x)$ est bien un polynôme en utilisant le fait que $\mathcal{T}_{\ell+1}(1) = 1$. Les premiers polynômes sont donnés par (voir aussi Figure 4.2)

$$\mathcal{P}_{p,1}(x) = 1 - \frac{x}{24}, \quad \mathcal{P}_{p,2}(x) = 1 - \frac{6}{34}x + \frac{1}{36}x^2,$$

et

$$\mathcal{P}_{p,3}(x) = 1 - \frac{20}{44}x + \frac{8}{46}x^2 - \frac{1}{48}x^3, \quad \mathcal{P}_{p,4}(x) = 1 - \frac{50}{54}x + \frac{35}{56}x^2 - \frac{10}{58}x^3 + \frac{1}{510}x^4.$$

On observe que $\mathcal{P}_{p,\ell}(0) = 1$, la propriété de consistance est donc satisfaite. Par ailleurs, il est montré dans [34] que

$$\forall x \in [0, 4(\ell+1)^2], \quad 0 \leq x\mathcal{P}_{p,\ell}(x) \leq 4, \quad (4.25)$$

et donc $\alpha = \alpha_\ell = 4(\ell+1)^2$ dans (4.20). On observe ainsi que la condition de stabilité de ces schémas, déduite de (4.19) est donnée par

$$\Delta t^2 \leq \frac{4(\ell+1)^2}{\rho_{\delta,h}}. \quad (4.26)$$

Autrement dit, le pas de temps maximal autorisé augmente linéairement avec ℓ ce qui peut paraître très favorable. En particulier on va pouvoir trouver ℓ suffisamment grand tel que, pour toute valeur de Δt et de $\rho_{\delta,h}$, la condition de stabilité (4.26) est satisfaite. Cependant les coûts des schémas (4.24) augmentent également linéairement avec ℓ car en pratique, l'opérateur $A_{\delta,h}$ doit être appliqué $\ell + 1$ fois. L'intérêt de ces schémas n'est donc pas clair

si on les utilise tels quels ! En fait, on a montré dans [SI32] que la solution obtenue avec les schémas (4.24) où $\mathcal{P}_p(x) = \mathcal{P}_{p,\ell}(x)$ coïncide (pour un certain choix de donnée initiale et sans terme source) avec la solution obtenue par le schéma saute-mouton standard calculé avec un pas de temps $\Delta t/(\ell + 1)$.

Les schémas saute-mouton de Chebychev stabilisés. Je présente ici une forme légèrement modifiée, dite stabilisée, des schémas présentés section précédente. Les schémas qui sont construits ici sont des outils de base pour la construction de discrétisation en temps locales (voir Section 5.2 ou [36]) ou stabilisées (voir Section 4.2.4 ou [16]). Pour motiver la construction de ces schémas, il faut repartir de la forme de l'énergie associée aux schémas généralisés explicites

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(M_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h + \left(\mathbf{A}_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h.$$

où

$$\begin{cases} M_{\delta,h} = \mathcal{P}_k(\Delta t^2 A_{\delta,h}) = I_h - \frac{\Delta t^2}{4} \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{\delta,h}) A_{\delta,h}, \\ \mathbf{A}_{\delta,h} = \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{\delta,h}) A_{\delta,h}, \end{cases}$$

sont des opérateurs de masse et de rigidité modifiés dont la positivité est nécessaire pour la stabilité de la méthode. On peut vouloir, pour des raisons plutôt intuitives, que si l'opérateur $A_{\delta,h}$ est strictement positif alors l'opérateur $\mathbf{A}_{\delta,h}$ le soit également pour tout Δt satisfaisant la condition de stabilité. Or, pour les choix $\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_{p,\ell}$, on voit que l'opérateur $\mathbf{A}_{\delta,h}$ peut avoir plusieurs valeurs propres nulles car $\mathcal{P}_{p,\ell}(x)$ a des racines sur l'intervalle $[0, \alpha_\ell]$ (voir encore Figure 4.2). De même, avec ce choix l'opérateur $M_{\delta,h}$ peut posséder des valeurs propres nulles ce qui peut paraître contre intuitif. Pour remédier à ce défaut, il faut choisir les polynômes \mathcal{P}_p de telle sorte que

$$\sup_{x \in [0, \alpha]} |x \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)| < 4 \quad \text{et} \quad \forall \beta \leq \alpha, \quad \inf_{x \in [\beta, \alpha]} x \mathcal{P}_p(x) > 0. \quad (4.27)$$

Avec les propriétés (4.27), on montre que $M_{\delta,h}$ est strictement positif et que toute valeur propre nulle de $\mathbf{A}_{\delta,h}$ est valeur propre nulle de $A_{\delta,h}$ et réciproquement.

J'ai présenté cette approche pour les problèmes de discrétisation locale pour les équations d'ondes (voir Section 5.2 ou [SI32]) à la conférence ENUMATH 2017, puis elle a été reprise par [16] et [36] dans des cadres très proches. Plus précisément, nous avons proposé une modification légèrement différente des polynômes $\mathcal{P}_{p,\ell}$ dans [SI32] comparé à ce qui est proposé dans [16] et [36]. Je trouve que l'approche développée dans ces travaux est plus adaptée au discours que je tiens ici et plus complète d'un point de vue de l'analyse (je donne notamment des estimations obtenues dans [16] et [36]). Soit ν un petit paramètre positif, on introduit la famille de polynômes (voir Figure 4.2)

$$\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x) = \frac{2}{x} \left[1 - \frac{\mathcal{T}_{\ell+1}\left(\delta_\ell^\nu - \frac{x}{\omega_\ell^\nu}\right)}{\mathcal{T}_{\ell+1}(\delta_\ell^\nu)} \right], \quad (4.28)$$

où δ_ℓ^ν et ω_ℓ^ν sont des paramètres positifs de décalage et de dilatation à définir. Ils dépendent continûment de ν et satisfont, pour $\nu = 0$, $\delta_\ell^0 = 1$ et $\omega_\ell^0 = 2(\ell + 1)^2$. On retrouve ainsi que $\mathcal{P}_{p,\ell}^0(x) = \mathcal{P}_{p,\ell}(x)$. Notons que $\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)$ est bien un polynôme par construction, car $x \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)$ s'annule en $x = 0$. Le choix

$$\delta_\ell^\nu = 1 + \frac{\nu}{(\ell + 1)^2} \quad \text{et} \quad \omega_\ell^\nu = 2 \frac{\mathcal{T}'_{\ell+1}(\delta_\ell^\nu)}{\mathcal{T}_{\ell+1}(\delta_\ell^\nu)}$$

permet, d'une part de garantir les propriétés de consistance (4.14). En effet, avec ce choix, on trouve que

$$2 \left[1 - \frac{\mathcal{T}_{\ell+1} \left(\delta_\ell^\nu - \frac{x}{\omega_\ell^\nu} \right)}{\mathcal{T}_{\ell+1}(\delta_\ell^\nu)} \right] = x + O(x^2);$$

et d'autre part, d'obtenir les estimations suivantes : pour $\nu \in [0, 1]$,

$$\sup_{x \in [0, \alpha_\nu^\ell]} |x \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)| \leq 4 - \frac{2\nu}{1+\nu} \quad \text{où} \quad \alpha_\nu^\ell = \left(2 + \frac{\nu}{(\ell+1)^2} \right) \omega_\ell^\nu$$

et, pour tout $\beta \leq \alpha$

$$\inf_{x \in [\beta, \alpha]} x \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x) \geq \min \left(\frac{\beta}{1+\nu}, \frac{2\nu}{1+\nu} \right).$$

Dans [36] un encadrement de ω_ℓ^ν est donné, à savoir,

$$2(\ell+1)^2 e^{-\nu} \leq \omega_\ell^\nu \leq 2(\ell+1)^2.$$

Cet encadrement nous permet de déduire que le paramètre de stabilité α satisfait

$$4(\ell+1)^2 e^{-\nu} + 2\nu e^{-\nu} \leq \alpha_\nu^\ell \leq 4(\ell+1)^2 + 2\nu \quad (4.29)$$

et est bien proche de $4(\ell+1)^2$ quand ν est petit. La condition de stabilité est donc bien très proche de (4.26) et s'écrit

$$\Delta t^2 \leq \frac{\alpha_\nu^\ell}{\rho_{\delta,h}}.$$

Pour résumer, au prix d'une légère modification des polynômes $\mathcal{P}_{p,\ell}$, on peut obtenir des schémas dont la condition de stabilité est très proche de, (4.26) mais pour lesquels les opérateurs $M_{\delta,h}$ et $\mathbf{A}_{\delta,h}$ impliqués dans la définition de l'énergie ont de bonnes propriétés de positivités.

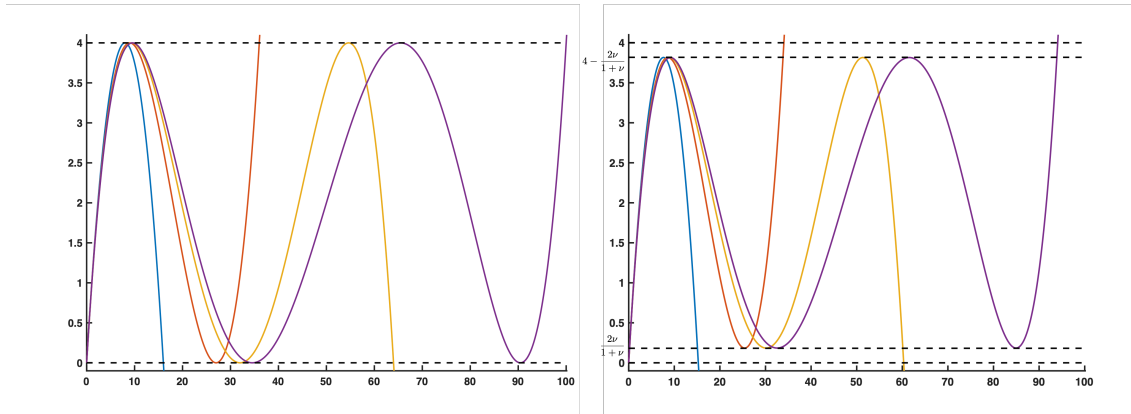


FIGURE 4.2 – À gauche, illustration de la famille de polynômes $x\mathcal{P}_{p,\ell}(x)$ pour ℓ allant de 1 à 4. À droite, illustration de la famille de polynômes $x\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)$ pour les mêmes valeurs de ℓ et pour $\nu = 0.1$.

4.2.3 Schémas implicites-explicites

Nous allons, dans cette section, et celles qui suivent, utiliser la décomposition (4.3) de $A_{\delta,h}$. En effet, la condition de stabilité (4.19) ne fait intervenir que $\rho_{\delta,h}$ le rayon spectral de $A_{\delta,h}$, et n'utilise pas le fait que $A_{\delta,h}$ s'écrit comme une somme d'opérateurs pour lesquels on pourrait apporter un traitement différent lors de la discrétisation en temps. Rappelons que l'équation à discrétiser s'écrit de manière générale sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} u_{h,\delta}(t) + (\delta^{-2} A_{0,h} + \delta^{-1} A_{h,1} + A_{2,h}) u_{h,\delta}(t) + \frac{d}{dt} B_h u_{h,\delta}(t) = f_h(t). \quad (4.30)$$

Dans le cadre des schémas implicites-explicites nous pouvons distinguer deux situations :

- soit le terme $\delta^{-2} A_{0,h}$ est pénalisant pour la condition de stabilité et peut-être discrétisé implicitement sans trop pénaliser la méthode d'un point de vue coût de calcul ;
- soit le terme $\delta^{-2} A_{0,h}$ n'est pas très pénalisant pour la condition de stabilité, par exemple parce que la discrétisation spatiale est adaptée, voir Section 3.3.2, mais on souhaiterait une condition de stabilité qui *découple* $A_{0,h}$ et $A_{2,h}$. Pour obtenir cela, on va supposer d'une part que (4.7) est satisfait et, d'autre part, que cela ne nuise pas à l'efficacité de la méthode, de discrétiser implicitement le terme $\delta^{-1} A_{h,1}$.

En pratique, j'ai rencontré ces deux cas de figure : dans l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les câbles coaxiaux [TH5] ou de l'élastodynamique dans les plaques pour le premier point ; dans la construction de schémas pour la propagation d'ondes élastiques dans un milieu homogène isotrope mou [SI4], [SI21] ou [TH3] pour le second.

Discrétisation implicite du terme en δ^{-2} . Dans [TH4] et [TH5], nous avons introduit la discrétisation temporelle suivante du système (4.30)

$$\begin{aligned} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \delta^{-2} A_{0,h} \{u_{\delta,h}^n\}_\theta \\ + \delta^{-1} A_{1,h} u_{\delta,h}^n + A_{h,2} u_{\delta,h}^n + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n), \end{aligned} \quad (4.31)$$

où $\theta > 1/4$. Formellement, ce schéma est d'ordre 2 en temps. À chaque itération, l'opérateur

$$I_h + \Delta t^2 \delta^{-2} \theta A_{0,h} + \frac{\Delta t}{2} B_h \quad (4.32)$$

doit être inversé. Cet opérateur est toujours inversible pour $\theta > 1/4$ grâce à la positivité de $A_{0,h}$ et de B_h . Dans certaines configurations bien précises, telles que la propagation d'ondes dans des plaques ou des câbles, $A_{0,h}$ sont liées à la discrétisation d'opérateurs différentielles dans la ou les directions qui correspondent seulement à la ou les petites dimensions du problème. Grâce à cette propriété, l'inversion de l'opérateur, donné par (4.32), peut se faire très efficacement car on peut se ramener à l'inversion, en parallèle, d'opérateur locaux.

En réécrivant le schéma (4.31) sous la forme

$$M_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{h,\delta} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{4}} + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n) \quad (4.33)$$

avec

$$M_{\delta,h} = I_h - \frac{\Delta t^2}{4} ((1 - 4\theta)\delta^{-2}A_{0,h} + \delta^{-1}A_{1,h} + A_{2,h}).$$

En partant de (4.33), on montre que la relation d'énergie (4.11) est satisfaite avec $\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$ donné par

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(M_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h + \left(A_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h. \quad (4.34)$$

La positivité de l'énergie s'obtient en imposant la positivité de $M_{\delta,h}$. Or, en utilisant (4.6), on trouve, pour $\eta > 0$,

$$M_{\delta,h} \geq I_h - \frac{\Delta t^2}{4} ((1 - 4\theta + \eta^{-1})\delta^{-2}A_{0,h} + (1 + \eta)A_{2,h}).$$

Comme $\theta > 1/4$ il est possible de choisir $\eta > 0$ tel que

$$1 - 4\theta + \eta^{-1} = 0,$$

on peut alors observer qu'avec ce choix la condition de stabilité ne dépend pas de δ et s'écrit

$$\Delta t^2 \leq \frac{4}{(1 + \eta)\rho_{2,h}} = \frac{4\theta - 1}{\theta} \frac{1}{\rho_{2,h}}. \quad (4.35)$$

Formellement on peut montrer que pour des raisons de consistance, θ doit être choisi le plus proche possible de $1/4$. Cependant, si θ est proche de $1/4$ la condition de stabilité (4.35) dégénère. En pratique, dans la simulation de la Figure 4.3, nous faisons le choix $\theta = 1/3$ (et donc $\eta = 3$ et $\Delta t^2 \leq 1/\rho_{2,h}$).

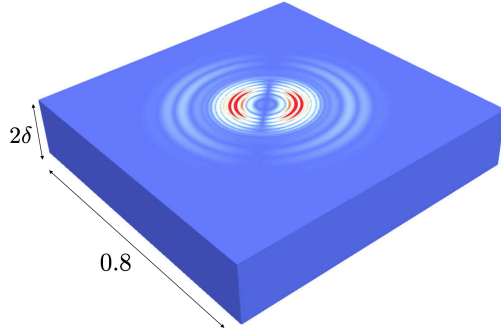


FIGURE 4.3 – Instantané de la simulation de la propagation d'une onde dans une plaque isotrope mince d'épaisseur 2δ (voir Section 3.3.3).

δ	Explicite		Impl.-Expl.	
	$10^5 \Delta t$	cost (s)	$10^5 \Delta t$	cost (s)
$2 \cdot 10^{-3}$	2.16	120	25.5	11
10^{-3}	1.08	242	25.5	11
$5 \cdot 10^{-4}$	0.54	486	25.5	11

TABLE 4.1 – Comparaison des temps de calcul mesurés pour la simulation de la Figure 4.3 pour différentes valeurs d'épaisseur de plaque. Colonne de gauche, schéma explicite (4.8) avec $\theta = 0$. Colonne de droite, schéma (4.31).

Nous avons démontré dans [TH4], dans le cadre de la propagation d'ondes dans des plaques, une convergence espace-temps uniforme en δ , mais à l'ordre 1 en temps uniquement! La preuve nécessite notamment une analyse asymptotique du problème continu. Etant donné les performances du schéma observé il n'est pas clair que ce résultat soit optimal, cependant, il a tout de même été observé une détérioration de la convergence en temps du schéma lorsque δ tends vers 0. La compréhension de ces phénomènes n'est toujours pas acquise et demeure une perspective que nous essaierons de traiter dans [TH5].

Discrétisation implicite du terme en δ^{-1} . Nous nous intéressons maintenant au second cas mentionné en introduction de cette section. Ce cas correspond à une situation où h est adapté à δ et il est possible de garantir que $\delta^{-2}\rho_{0,h}$ n'est pas grand par rapport à $\rho_{2,h}$. Le schéma proposé est formellement d'ordre 2 et s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \delta^{-2} A_{0,h} u_{\delta,h}^n \\ + \delta^{-1} A_{1,h} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{4}} + A_{2,h} u_{\delta,h}^n + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n). \end{aligned} \quad (4.36)$$

À chaque itération l'opérateur

$$M_{\delta,h} = I_h + \frac{\Delta t^2}{4} \delta^{-1} A_{1,h} + \frac{\Delta t}{2} B_h \quad (4.37)$$

doit être inversé. En observant que

$$M_{\delta,h} = I_h - \frac{\Delta t^2}{4} (\delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}) + \frac{\Delta t^2}{4} A_{\delta,h} + \frac{\Delta t}{2} B_h,$$

on peut garantir l'inversibilité de cet opérateur grâce à la condition suffisante suivante

$$\Delta t^2 < \frac{4}{\delta^{-1} \hat{\rho}_{\delta,h}}. \quad (4.38)$$

Si la propriété (4.7) est vérifiée, on en déduit une autre condition suffisante

$$\Delta t^2 < \frac{4}{\max(\delta^{-2}\rho_{0,h}; \rho_{2,h})}. \quad (4.39)$$

De plus, pour étudier la stabilité du schéma (4.36) nous le réécrivons sous la forme

$$M_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{h,\delta} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{4}} + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n) \quad (4.40)$$

où

$$M_{\delta,h} = I_h - \frac{\Delta t^2}{4} (\delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}).$$

La relation d'énergie (4.11) est satisfaite avec l'énergie définie par (4.34). La positivité de l'énergie est donc acquise si $M_{\delta,h}$ est positif. Ceci est garanti sous la condition

$$\Delta t^2 \leq \frac{4}{\max(\delta^{-2}\rho_{0,h}; \rho_{2,h})} = \min\left(\frac{4}{\delta^{-2}\rho_{0,h}}, \frac{4}{\rho_{2,h}}\right). \quad (4.41)$$

On observe que si la condition d'inversibilité (4.39) est satisfaite alors l'énergie est bien positive. On observe ici que la condition de stabilité est bien *découplé* au prix du traitement implicite du terme de couplage $A_{1,h}$.

On peut calculer le gain par rapport au schéma saute-mouton explicite, c'est-à-dire, (4.8) avec $\theta = 0$. Dans le cas purement explicite la condition de positivité de l'énergie est $I_h - \Delta t^2 A_{\delta,h}/4 \geq 0$ et, en utilisant (4.6) avec $\eta = 1$, on peut montrer qu'une condition suffisante de positivité est

$$I_h - \frac{\Delta t^2}{2} (\delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}) \geq 0$$

En utilisant maintenant la propriété (4.7), on obtient une estimation du type (4.41) à un facteur $2/\sqrt{2} \simeq 1.41$ près (c'est-à-dire que le pas de temps peut être choisi 1.41 fois plus grand pour le schéma implicite-explicite (4.40)). Ce gain n'étant pas exceptionnel, le schéma implicite ne doit être utilisé que si le coût d'inversion de l'opérateur (4.37) pour $\theta = 1/4$ est faible devant le coût d'application des opérateurs $A_{0,h}$ et $A_{2,h}$. Il se trouve que cette situation a été rencontrée dans [SI4] (voir aussi Section 3.3.2) où l'opérateur $A_{1,h}$ se trouve être un opérateur n'agissant que sur la frontière tandis que $A_{0,h}$ et $A_{2,h}$ sont des opérateurs linéaires associés à des opérateurs différentiels volumiques.

4.2.4 Schémas explicites stabilisés

Les schémas présentés ici ont des similitudes de philosophie avec le schéma (4.36) étudié section précédente. L'idée est de pouvoir *découpler* la condition de stabilité, c'est-à-dire obtenir une condition de stabilité du type (4.41). On suppose ici que l'opérateur $A_{1,h}$ est nul (par exemple, parce qu'au niveau continu la séparation d'échelles forte est vérifiée) et proposons deux variantes de schémas explicites. Les schémas mentionnés plus bas ont été utilisés dans [16] dans le cas où $A_{2,h}$ est un opérateur difficile à évaluer. Dans ce cas, le fait que le pas de temps soit pénalisé par δ devient problématique! Par ailleurs, dans [30, 36] est développée une stratégie de pas de temps local, qui, après ré-interprétation, est dans le même esprit que le schéma (4.45) donné plus bas. Dans ce qui vient, je vais précisément illustrer cet aspect.

Première variante. En partant du schéma saute-mouton (4.8) explicite (i.e. $\theta = 0$), on vient remplacer le terme en $\delta^{-2} A_{0,h}$ de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{P}_p(\Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h}) \delta^{-2} A_{0,h} u_{\delta,h}^n \\ + A_{2,h} u_{\delta,h}^n + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2 \Delta t} = f_h(t^n). \end{aligned} \quad (4.42)$$

On observe que, dans le schéma (4.42) le terme non pénalisant impliquant $A_{2,h}$ est discretisé de façon explicite simple tandis que, pour discretiser le terme pénalisant dépendant de δ est introduit un polynôme $\mathcal{P}_p(x)$ dont le choix sera crucial pour l'efficacité de la méthode. L'énergie associée à la solution de (4.42) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(\left(I_h - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{A}_{\delta,h} \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h \\ + \left(\mathbf{A}_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h. \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{A}_{\delta,h} = \mathcal{P}_p(\Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h}) \delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}$$

et satisfait la relation d'énergie (4.11). Pour obtenir la positivité de l'énergie, il faut garantir, que $\mathbf{A}_{\delta,h}$ et $I_h - \Delta t^2 \mathbf{A}_{\delta,h}/4$ sont des opérateurs positifs.

L'idée est maintenant d'utiliser les polynômes de Chebyshev stabilisés pour définir \mathcal{P}_p . On pose

$$\mathcal{P}_p(x) = \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x),$$

où $\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)$ est défini par (4.28). En utilisant le fait que, pour tout $\nu \in (0, 1]$

$$\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x) > 0 \quad \text{et} \quad x\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x) \leq 4 - \frac{2\nu}{1+\nu}, \quad \forall x \in [0, \alpha_\nu^\ell],$$

on montre que, la positivité de l'énergie est garantie sous la condition,

$$\Delta t^2 \leq \min\left(\frac{\alpha_\nu^\ell}{\delta^{-2}\rho_{0,h}}, \frac{2\nu}{\rho_{2,h}(1+\nu)}\right). \quad (4.43)$$

On obtient ainsi une condition de stabilité avec des propriétés intéressantes. En effet, si

$$\Delta t^2 \leq \frac{2\nu}{\rho_{2,h}(1+\nu)}, \quad (4.44)$$

alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$, il existe ℓ suffisamment grand, tel que la condition de stabilité (4.43) soit satisfaite. Cependant, l'estimation de stabilité (4.43) (ou (4.44)) dégénère lorsque ν tend vers 0. En pratique, cette difficulté n'est pas observée (voir les expériences numériques ci-dessous), et la question d'obtenir une condition de stabilité optimale reste ouverte. A noter qu'il sera présenté en Section 5.2, dans le cadre de problèmes de transmission d'ondes, une condition de stabilité semblable à (4.43) mais sans ce problème.

On considère une équation d'onde scalaire homogène posée dans un domaine Ω qui se décompose en deux domaines disjoints Ω_0 et Ω_2 . Très formellement, on suppose que l'opérateur $A_{0,h}$ approche l'opérateur de Laplace restreint à Ω_0 , de même pour $A_{2,h}$ sur Ω_2 , c'est-à-dire,

$$A_{0,h} \sim \nabla \cdot \mathbf{1}_{\Omega_0} \nabla \quad \text{et} \quad A_{2,h} \sim \nabla \cdot \mathbf{1}_{\Omega_2} \nabla$$

On suppose que la contrainte vient ici du fait que Ω_0 est maillé très finement par rapport à Ω_2 (voir Figure 4.4) et posons $\delta = 1$ (en ce sens, le problème n'est pas à proprement parler, un problème double-échelles). Dans le cas représenté Figure 4.4, on trouve $\rho_{0,h} \gg \rho_{2,h}$. Pour compenser cet écart, on choisit $\mathcal{P}_p(x) = \mathcal{P}_{p,3}^0(x)$ (c'est à dire que $\nu = 0!$), et, dans la configuration de la figure 4.4 on choisit un pas de temps 3.44 fois plus grand que dans le cas $\mathcal{P}_p(x) = 1$ (schéma saute-mouton standard), il en résulte que le gain en termes de coût de calcul est d'environ 3, car le coût de l'évaluation de l'opérateur $A_{0,h}$ est faible par rapport à l'évaluation de $A_{1,h}$.

L'erreur correspondant à l'utilisation de ce polynôme et l'introduction d'une zone très raffinée est clairement visible Figure 4.5. On observe qu'elle n'est pas prédominante devant la dispersion numérique classique.

Seconde variante. Cette variante correspond à des schémas introduits dans [30, 36]. En partant du schéma saute-mouton (4.8) explicite (i.e. $\theta = 0$), on vient modifier l'approximation de la dérivée d'ordre deux en temps de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p(\Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h})^{-1} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \delta^{-2} A_{0,h} u_{\delta,h}^n \\ + A_{2,h} u_{\delta,h}^n + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n). \end{aligned} \quad (4.45)$$

On a introduit dans (4.45) l'inverse de l'opérateur $\mathcal{P}_p(\Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h})$. On suppose évidemment que cette inverse existe (cela sera toujours vrai pour un choix judicieux de polynôme

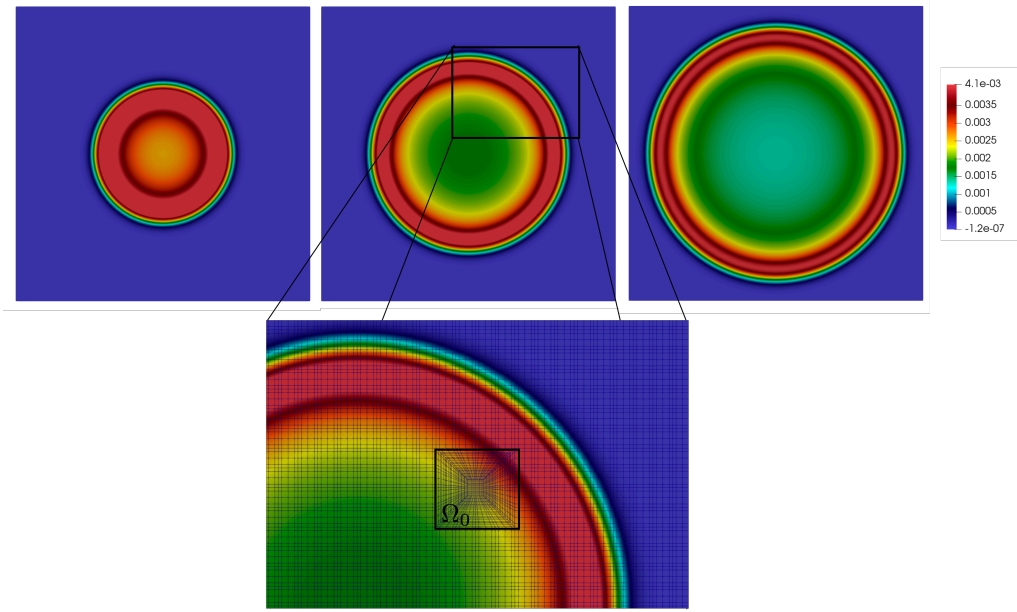


FIGURE 4.4 – Propagation d’une onde acoustique dans un milieu homogène maillé localement très finement. Une stratégie de stabilisation est introduite pour utiliser une méthode explicite avec un pas de temps augmenté.

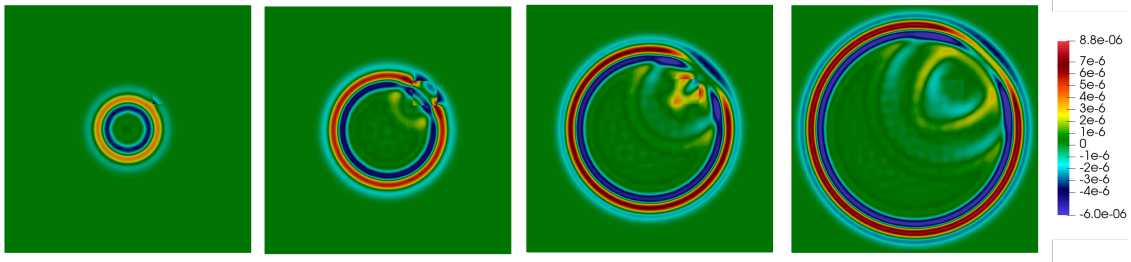


FIGURE 4.5 – Différence entre la solution exacte et la solution numérique. La dispersion numérique est clairement visible ainsi qu’une réflexion provenant de la zone fine. Cette réflexion est comparable à la dispersion numérique.

$\mathcal{P}_p(x)$ et le choix d’un pas de temps suffisamment petit). Par ailleurs, on peut noter que ce schéma est explicite quand $B_h = 0$ (il suffit de re-multiplier l’équation par $\mathcal{P}_p(\Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h})$ pour s’en apercevoir). L’énergie associée au schéma est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = & \left(\mathbf{M}_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h \\ & + \left((\delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h. \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{M}_{\delta,h} = \mathcal{P}_p(\Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h})^{-1} - \frac{\Delta t^2}{4} (\delta^{-2} A_{0,h} + A_{2,h}).$$

La stabilité du schéma est garantie en s’assurant que $\mathbf{M}_{\delta,h}$ est un opérateur positif. On va faire pour cela le même choix que précédemment, c’est à dire

$$\mathcal{P}_p(x) = \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x),$$

qui est bien un polynôme inversible pour $\nu \in (0, 1]$. Il est possible d'obtenir la même condition de stabilité que pour la variante présentée précédemment, c'est à dire (4.43). Cette condition de stabilité se trouve être sous-optimale en pratique pour des cas non pathologiques (comme d'ailleurs la condition (4.43) obtenue pour la variante présentée précédemment). Néanmoins, comme déjà mentionné, cette condition suffisante de stabilité montre déjà les avantages de la méthode.

Pour montrer que la condition (4.43) implique la stabilité du schéma, il faut d'abord observer que montrer la positivité de $\mathbf{M}_{\delta,h}$ revient à montrer que

$$\forall x \in [0, \alpha_\nu^\ell], \quad \forall y \in [0, \frac{2\nu}{(1+\nu)}], \quad \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)^{-1} - \frac{x}{4} - \frac{y}{4} \geq 0, \quad (4.46)$$

et que la condition de stabilité (4.43) implique que

$$\forall x \in [0, \alpha_\nu^\ell], \quad \forall y \in [0, \frac{2\nu}{(1+\nu)}], \quad 1 - \frac{x\mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)}{4} - \frac{y}{4} \geq 0. \quad (4.47)$$

Le fait que (4.47) implique (4.46) résulte des propriétés suivantes,

$$\forall x \in [0, \alpha_\nu^\ell], \quad \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x) > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu(x)^{-1} \geq 1.$$

4.2.5 Schéma implicite stabilisé

Dans cette section, je reprends une idée que nous avons développée dans [SI3]. Dans ce travail, nous cherchions à construire un schéma précis pour la simulation de la propagation d'ondes de flexion et d'ondes de cisaillement dans une corde de piano sous tension. Dans cette application, l'onde de cisaillement se propage environ une quinzaine de fois plus vite que l'onde de flexion. Le problème sous-jacent est donc un problème double-échelles. Il se trouve que pour cette application la séparation d'échelles forte (voir Section 3.1.2) est satisfaite, et donc, nous pouvons supposer que $A_{1,h}$ est nul. Le schéma proposé est le suivant

$$\frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \delta^{-2} A_{0,h} \{u_{\delta,h}^n\}_\varphi + A_{2,h} \{u_{\delta,h}^n\}_\psi + B_h \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n). \quad (4.48)$$

À chaque itération l'opérateur

$$I_h + \varphi \Delta t^2 \delta^{-2} A_{0,h} + \psi \Delta t^2 A_{2,h} + \frac{\Delta t}{2} B_h$$

doit être inversé. Cet opérateur est inversible dès que ψ et φ sont positifs. Dans l'application mentionnée, l'opérateur $A_{2,h}$ contribue aux ondes de flexion tandis que $A_{0,h}$ contribue aux ondes de cisaillements. Les termes utilisés sont volontairement vagues, car l'analyse de consistance du schéma (4.48) proposé dans [SI3] est une analyse de dispersion très précise et également très dépendante de l'application considérée et ne peut pas être généralisée, sans hypothèse supplémentaire, à des systèmes abstraits. Je peux néanmoins expliquer la philosophie de l'approche.

On a vu que le choix $\varphi = \psi = 1/4$ dans (4.48) correspond au θ -schéma standard avec $\theta = 1/4$ et fournit donc un schéma inconditionnellement stable. La condition de stabilité n'est donc pas pénalisée par la différence de vitesse des deux ondes. Cependant, le schéma n'est que d'ordre 2. Comme on le re-mentionnera ultérieurement, le θ -schéma avec

$\theta = 1/12$ donne un schéma d'ordre 4 en temps (il s'agit d'un résultat bien connu) qui est malheureusement conditionnellement stable. L'idée est donc de choisir

$$\varphi = 1/4 \quad \text{et} \quad \psi = 1/12,$$

ainsi le terme $\delta^{-2} A_{0,h}$ ne pénalisera pas la condition de stabilité trop fortement, tandis que le choix $\psi = 1/12$ permet d'obtenir une bonne approximation des phénomènes principalement régis par $A_{2,h}$. Pour préciser les propriétés de stabilité du schéma, on peut calculer que l'énergie associée à la solution de (4.48) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = & \left(\left(I_h - \frac{\Delta t^2}{6} A_{2,h} \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h \\ & + \left(A_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h. \end{aligned}$$

et satisfait la relation d'énergie (4.11). L'énergie est positive sous la condition

$$\Delta t^2 \leq \frac{6}{\rho_{2,h}},$$

qui est bien une condition de stabilité indépendante de δ .

Pour conclure, ce type de schéma est un schéma hybride entre un schéma d'ordre 4 et un schéma d'ordre 2. Bien que formellement d'ordre 2, il propose des propriétés d'approximation supérieures aux θ -schémas classiques avec $\theta = 1/4$ (voir Figure 4.6). Il présente, par ailleurs, l'intérêt de faire une transition régulière avec la section suivante où l'on étudiera des schémas qui sont d'ordre 4 et qui offrent de bonnes propriétés de stabilité.

4.3 L'équation modifiée et ses variantes

Introduction. Les techniques de discrétisation en temps présentées précédemment sont des techniques d'ordre 2 en temps (au moins formellement). En pratique, ces techniques sont mises en oeuvre conjointement avec des techniques d'ordre élevé en espace, dans l'objectif, soit d'atteindre des niveaux de précision élevés, soit d'augmenter l'efficacité de la méthode. Pour le premier, mais aussi pour le deuxième objectif, le fait que la discrétisation en temps soit d'ordre 2 peut représenter une perte de précision qui verrouille l'approximation en espace, c'est-à-dire, que la précision globale du schéma n'augmente pas, ou peu, même en utilisant une discrétisation plus fine en espace. Dans ces situations, il est évidemment naturel de chercher à construire des discrétisations d'ordre élevé en temps. Ce type de méthodes est développé depuis de nombreuses années (voir par exemple dans des cas très généraux [41]). Parmi ces méthodes, les méthodes de Runge-Kutta sont les plus utilisées et la méthode explicite dite Runge-Kutta 4 ou les méthodes implicites appelées Runge-Kutta Gauss (voir [41] Chapitre 2 ou [15]) sont très performantes en général. Concernant l'équation des ondes, une famille de méthodes explicites d'ordre élevé, plus efficaces que les méthodes explicites de type Runge-Kutta (voir Figure 4.7), a été introduite il y a une trentaine d'années dans [60] puis étendue plus récemment dans [34] et [50]. Ces méthodes sont de type équations modifiées (voir encore [41] Chapitre 9), c'est-à-dire que la précision d'ordre élevé est obtenue en ré-interprétant les termes intervenant dans l'erreur de troncature par des termes faisant intervenir des opérateurs d'ordre bas (en l'occurrence d'ordre 2) en utilisant l'équation à résoudre, (4.1) ici. Un schéma est obtenu en modifiant le schéma original par l'ajout de ces termes. Les méthodes d'ordre élevé présentées

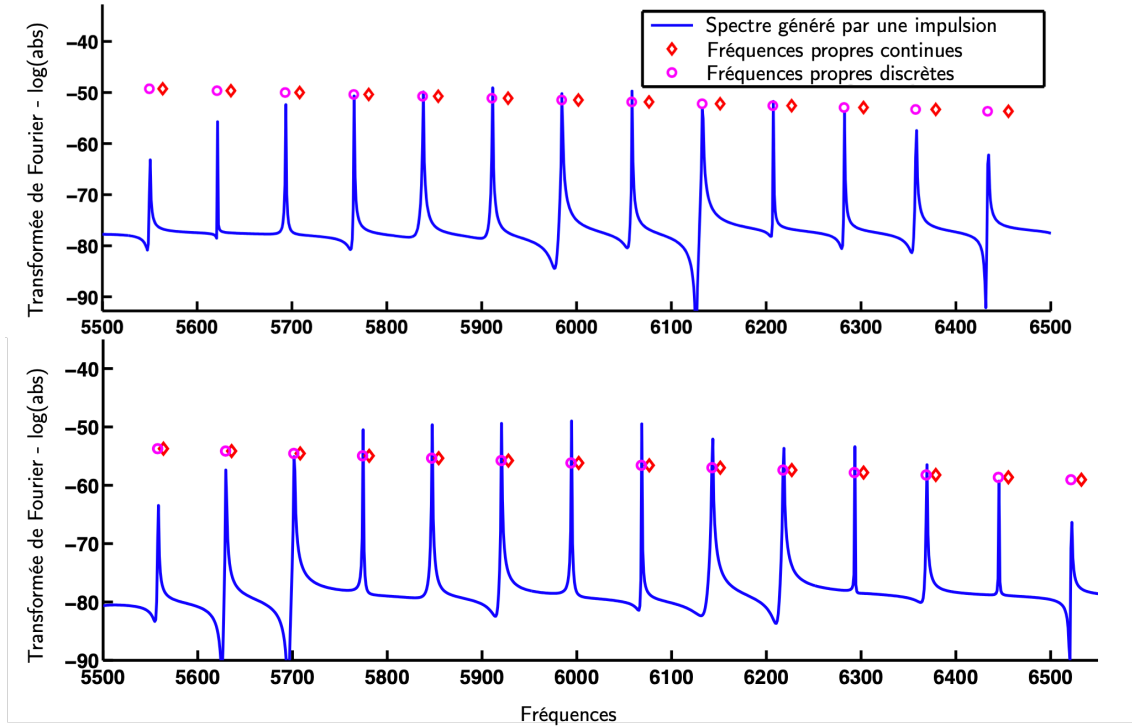


FIGURE 4.6 – *Figure extraite de [SI3] et simulation réalisée par J. Chabassier.* Comparaison des fréquences de vibration discrètes par rapport aux fréquences de vibration continues. En haut, les fréquences sont calculées avec le θ -schémas avec $\theta = 1/4$. En bas, les fréquences sont calculées avec le schéma (4.48) avec le même pas de temps. On peut observer que les fréquences de vibrations sont mieux approchées par le schéma (4.48).

ici suivront cette stratégie et on s'intéressera d'abord au cas où B_h est nul puis, dans un deuxième temps, on considérera le cas, plus compliqué où B_h est auto-adjoint positif.

Schéma de démarrage. Le démarrage des schémas présentés plus bas se fait en construisant une approximation à l'ordre 5 en temps de $u_{\delta,h}(\Delta t)$. Plus précisément,

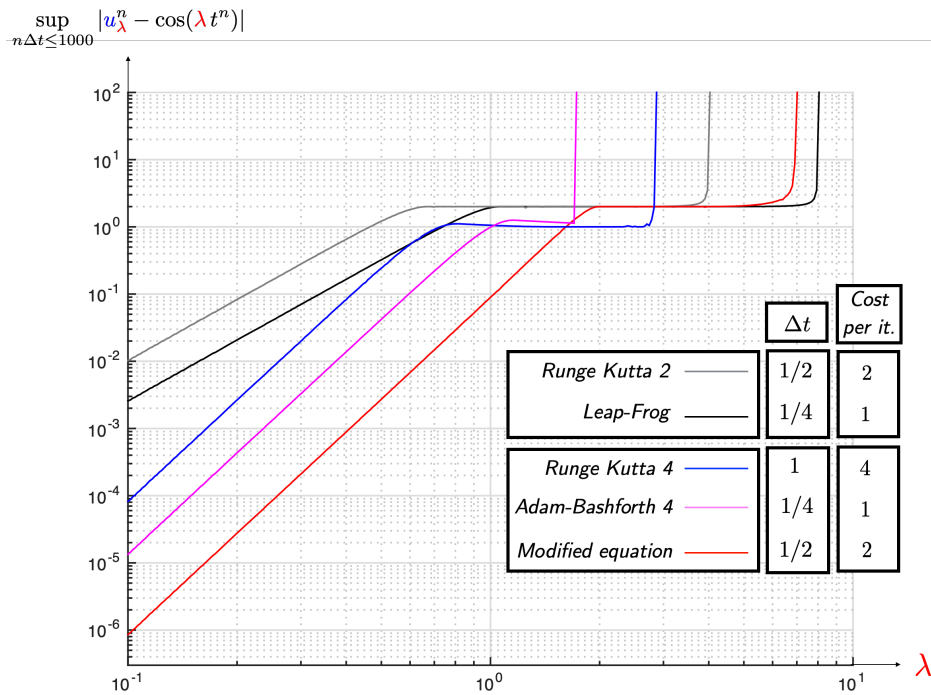
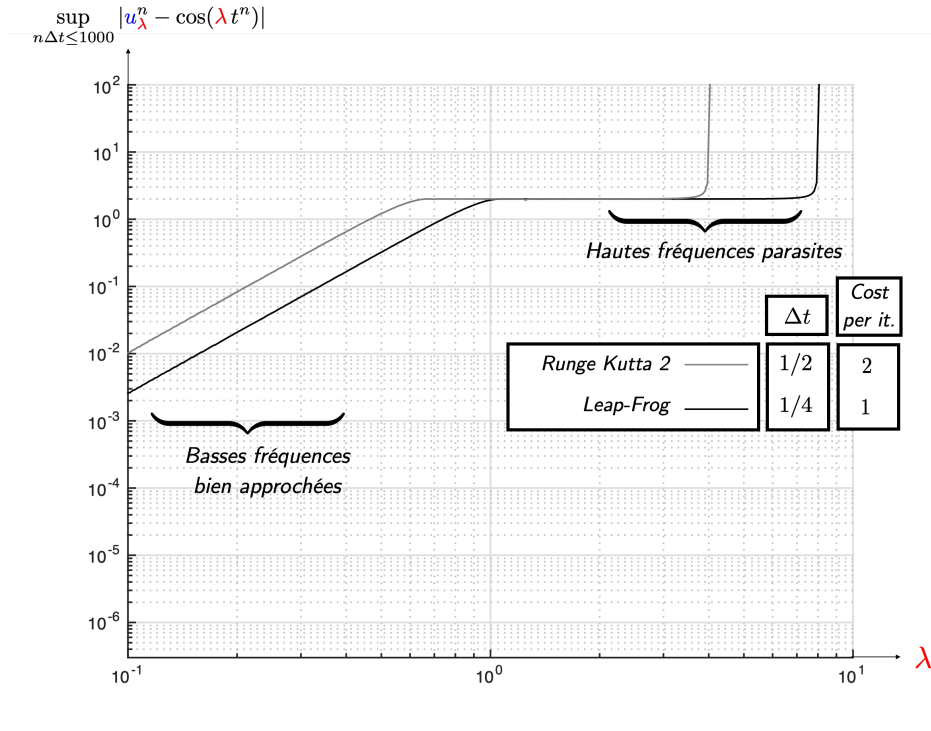
$$u_{\delta,h}^0 = u_{\delta,h}(0)$$

et, en utilisant un développement de Taylor,

$$u_{\delta,h}^1 = u_{\delta,h}(0) + \Delta t \dot{u}_{\delta,h}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{\delta,h}(0) + \frac{\Delta t^3}{6} u_{\delta,h}^{(3)}(0) + \frac{\Delta t^4}{24} u_{\delta,h}^{(4)}(0),$$

où les expressions des termes $\ddot{u}_{\delta,h}(0)$, $u_{\delta,h}^{(3)}(0)$ et $u_{\delta,h}^{(4)}(0)$ ne sont pas explicitées ici, mais se déduisent simplement de l'équation (4.1).

Observation sur la performance de l'équation modifiée. Je présente Figure 4.7 plusieurs courbes qui illustrent la performance de l'équation modifiée explicite pour les ondes (schéma (4.53) plus précisément) comparée à des schémas plus standard sur un cas très simple à 1 degré de liberté. À coût de calcul équivalent, l'équation modifiée offre une précision 100 fois supérieure au schéma de Runge-Kutta 4 et de meilleures propriétés de stabilité ! C'est cette observation qui justifie que l'on s'intéresse pleinement à ces méthodes pour que leurs utilisations deviennent la norme.



$$\{ \ddot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 u_\lambda(t) = 0 \quad u_\lambda(0) = 1 \quad \dot{u}_\lambda(0) = 0 \} \Rightarrow u_\lambda(t) = \cos(\lambda t)$$

FIGURE 4.7 – Dans ces deux figures est représentée l’erreur d’approximation d’une équation d’onde, à un degré de liberté, en utilisant différentes méthodes d’approximations (après diagonalisation d’un système d’équations d’ondes on obtient un ensemble de problèmes de ce type à résoudre). Les méthodes sont comparés à coût de calcul équivalent : le coût de calcul correspond au nombre de multiplications par λ par itération. On observe deux types de comportement : le comportement basses fréquences qui permet de mesurer la vitesse de convergence de la méthode ; le comportement haute fréquence qui permet de mesurer les propriétés de stabilité des méthodes. Parmi toutes les méthodes comparées, pour le problème en question, l’équation modifiée est, de loin, la meilleure.

4.3.1 Les (θ, φ) –schémas

Dans [SI9] nous avons étendu l'approche de l'équation modifiée aux schémas implicites en modifiant la famille de θ –schémas présentée Section 4.8. L'objectif ici est, d'une part, de redonner brièvement des résultats connus (l'équation modifiée notamment), d'autre part, de construire une famille de schémas aussi efficaces que les schémas de Runge-Kutta Gauss, mais compatibles avec la relation d'énergie, c'est-à-dire qu'une relation d'énergie garantit la stabilité du schéma. Ce dernier point se révèle fondamental lorsque l'on s'intéressera au couplages de schéma d'ordre élevé voir [SI14] et Section 5.2.2. À noter que ces schémas sont construits, et c'est également une limitation de l'équation modifiée de [60, 34], pour des équations d'ondes sans terme dissipatif ou de couplage (c'est-à-dire que l'on supposera dans la suite que $B_h = 0$.)

Ainsi, dans [SI9] nous avons introduit la famille de schémas d'ordre élevé suivante

$$\frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_\theta + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{12} \right) A_{\delta,h}^2 \{u_{\delta,h}^n\}_\varphi = g_h(t^n) \quad (4.49)$$

où $g_h(t^n)$ est un terme source décrit plus bas et où θ et φ sont des paramètres réels à déterminer. Ces schémas qui sont au moins formellement d'ordre 4, sont appelés des (θ, φ) –schémas. Comme mentionné ces schémas sont obtenus en ré-injectant dans le θ –schéma les termes de consistance d'ordre 4 où l'on a remplacé les dérivées secondes en temps apparaissant par la multiplication par $-A_{\delta,h}$. Pour certaines valeur de (θ, φ) les schémas (4.49) sont d'ordre 6 voir 8. Cependant, ces valeurs correspondent à des valeurs où le schéma est stable conditionnellement et implicite (on retrouve ici le même phénomène, décrit plus bas, qui se produit lorsque l'on utilise le θ –schéma (4.8) avec $\theta = 1/12$). À noter que le terme source $g_h(t^n)$ qui vient naturellement dans le processus de construction des (θ, φ) schémas est donné par

$$g_h(t^n) = f_h(t^n) + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\ddot{f}_h(t^n) + (12\theta - 1) A_{\delta,h} f_h(t^n) \right), \quad (4.50)$$

cependant il est plus commode d'utiliser l'approximation d'ordre 4 suivante

$$g_h(t^n) = \left(I_h + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{12} \right) A_{\delta,h} \right) \{f_h(t^n)\}_{\frac{1}{12}} + O(\Delta t^4).$$

Les (θ, φ) –schémas peuvent être vus comme faisant partie de la famille des schémas saute-moutons généralisés (4.13) (sans le terme B_h et avec un terme source modifié). C'est-à-dire que les (θ, φ) –schémas se réécrivent.

$$\mathcal{P}_{k,\theta,\varphi}(\Delta t^2 A_h) \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{P}_{p,\theta}(\Delta t^2 A_h) A_h \{u_h^n\}_{\frac{1}{4}} = g_h(t^n) \quad (4.51)$$

avec

$$\mathcal{P}_{k,\theta,\varphi}(x) = 1 + \left(\theta - \frac{1}{4} \right) x + \left(\varphi - \frac{1}{4} \right) \left(\theta - \frac{1}{12} \right) x^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{p,\theta}(x) = 1 + \left(\theta - \frac{1}{12} \right) x.$$

Ainsi la famille des (θ, φ) –schémas préserve l'énergie suivante (voir également Section 4.2.2),

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathcal{P}_{k,\theta,\varphi}(\Delta t^2 A_h) \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_h + \left(\mathcal{P}_{p,\theta}(\Delta t^2 A_h) A_h \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right)_h \quad (4.52)$$

La positivité de cette énergie est garantie sous une condition relativement compliquée par rapport aux deux paramètres θ et φ de la forme

$$\rho_{\delta,h} \Delta t^2 \leq r(\theta, \varphi)$$

où $r(\theta, \varphi)$ est une fonction positive de θ et de φ (voir [SI9] pour plus de détails sur la caractérisation de $r(\theta, \varphi)$). Je me restreins ici à présenter trois choix de valeurs remarquables pour θ et φ et qui présentent un intérêt pratique.

L'équation modifiée. On obtient l'équation modifiée avec le choix $(\theta, \varphi) = (0, 0)$, le schéma s'écrit

$$\frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(A_{\delta,h} - \frac{\Delta t^2}{12} A_{\delta,h}^2 \right) u_{\delta,h}^n = \left(I_h - \frac{\Delta t^2}{12} A_{\delta,h} \right) \{f_h(t^n)\}_{\frac{1}{12}}. \quad (4.53)$$

Il s'agit de l'équation modifiée introduite dans [60] et largement étudiée dans [34, 50]. Comme le schéma saute-mouton classique, c'est un schéma explicite, mais qui offre l'avantage d'être d'ordre 4 et d'avoir une condition de stabilité plus favorable par rapport au schéma saute-mouton. Cette condition est

$$\Delta t^2 \leq \frac{12}{\rho_{\delta,h}}. \quad (4.54)$$

Cette condition montre que le pas de temps du schéma peut être choisi environ 1.73 fois plus grand que pour le schéma saute-mouton explicite. Ceci compense le fait que le schéma est deux fois plus cher par itération (car on applique 2 fois l'opérateur $A_{\delta,h}$). En quelque sorte, par rapport au schéma saute-mouton, on obtient une méthode d'ordre 4 pour un coût très proche. Cette remarque est confirmée Figure 4.7 où l'on voit, qu'à coût de calcul équivalent, le schéma (4.53) est plusieurs ordres de grandeur plus précis que le schéma saute-mouton explicite.

Le θ -schéma d'ordre 4. Ce schéma s'obtient avec le choix $(\theta, \varphi) = (1/12, \varphi)$. On a

$$\frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{12}} = \{f_h(t^n)\}_{\frac{1}{12}}.$$

Le choix $\theta = 1/12$ élimine la dépendance en φ dans (4.49), la valeur de ce dernier paramètre est donc sans importance. Ce schéma est similaire au θ -schéma (4.8) avec $\theta = 1/12$ lorsque le terme source est nul. Ceci montre le résultat bien connu que le θ -schéma pour $\theta = 1/12$ est d'ordre 4. Ce schéma est très peu utilisé, car il est implicite, mais conditionnellement stable. La condition CFL est donnée par

$$\Delta t^2 \leq \frac{6}{\rho_{\delta,h}}.$$

Une famille optimale de schémas implicites inconditionnellement stables. Parmi la famille des schémas inconditionnellement stables, on peut en chercher un qui minimise l'erreur de consistance obtenue formellement. Pour construire ce schéma, nous commençons par faire le choix suivant

$$(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{12} + \varepsilon, \frac{1}{4} + \frac{1}{144\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4} \right).$$

Il est montré dans [SI9] que ces schémas sont inconditionnellement stables et bien posés pour tout $\varepsilon > 0$. En remarquant que

$$\{v_h\}_\varphi = \{v_h\}_\theta + \Delta t^2 (\varphi - \theta) \frac{v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}}{\Delta t^2},$$

le schéma que l'on obtient s'écrit

$$\begin{aligned} \left(I_h + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) A_{\delta,h}^2 \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + (A_{\delta,h} + \Delta t^2 \varepsilon A_{\delta,h}^2) \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{12} + \varepsilon} \\ = (I_h + \varepsilon \Delta t^2 A_{\delta,h}) \{f_h(t^n)\}_{\frac{1}{12}}. \end{aligned}$$

Une analyse de consistance montre que ε doit être le plus petit possible pour minimiser la constante intervenant dans le terme d'ordre 6 en temps dans l'erreur de consistance. À la limite ε tend vers 0, nous obtenons le schéma inconditionnellement stable suivant

$$\left(I_h + \frac{\Delta t^4}{144} A_{\delta,h}^2 \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{12}} = \{f_h(t^n)\}_{\frac{1}{12}}. \quad (4.55)$$

On montre que la positivité de l'énergie n'est pas perdue lors du passage à la limite sur ε . En effet l'énergie pour ce schéma est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(\left(I_h - \frac{\Delta t^2}{6} A_{h,\delta} + \frac{\Delta t^4}{144} A_{h,\delta}^2 \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h \\ + \left(A_{h,\delta} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h \end{aligned} \quad (4.56)$$

et est bien positive indépendamment de Δt et de la solution. À noter que le schéma (4.55) peut être obtenu plus directement que par le processus limite présenté. En effet, il peut être vu comme une version modifiée du θ -schéma d'ordre 4 ($\theta = 1/12$) obtenu par l'ajout du terme de stabilisation, $\Delta t^4 A_{\delta,h}^2$, à la partie cinétique du schéma.

On peut observer que l'opérateur

$$I_h - \frac{\Delta t^2}{6} A_{\delta,h} + \frac{\Delta t^4}{144} A_{\delta,h}^2 \quad (4.57)$$

peut posséder une valeur propre nulle même si $A_{\delta,h}$ n'en possède pas. Il est possible d'éviter ce phénomène, qui peut entraîner une amplification d'ondes parasites haute-fréquence (voir [16] et Figure 4.8), en utilisant le schéma stabilisé/corrigé suivant : pour $\nu > 0$,

$$\left(I_h + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \nu \right) A_{\delta,h}^2 \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \{u_{\delta,h}^n\}_{\frac{1}{12}} = \{f_h(t^n)\}_{\frac{1}{12}}. \quad (4.58)$$

Ce schéma ne présente pas le désavantage mentionné, mais l'erreur de consistance est plus élevée.

L'utilisation des schémas (4.55) et (4.58) nécessite, à chaque itération, l'inversion de l'opérateur,

$$I_h + \frac{\Delta t^2}{12} A_{\delta,h}^2 + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \nu \right) A_{\delta,h}^2.$$

Pour cette opération délicate, plusieurs stratégies existent (factorisation de l'opérateur dans le domaine complexe par exemple ou écriture d'un système étendu). En fait, le coût de calcul de la famille de schémas (4.58) est équivalent à celui de méthode de Runge-Kutta Gauss à l'ordre 4. Mais, comparés à ce dernier, les schémas (4.58) préservent une énergie discrète sur le système d'ordre 2 de l'équation des ondes. Ainsi, leur utilisation a pu être étendue au problème de transmission présenté Section 5.2.2.

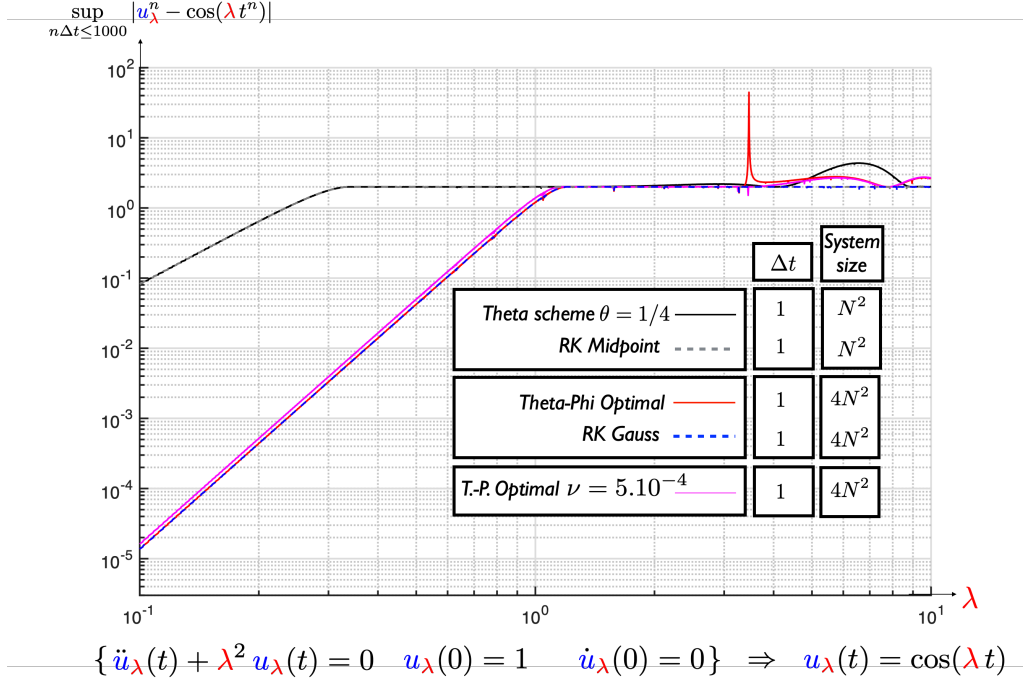


FIGURE 4.8 – Comparaison de différents schémas implicite. Les schémas, RK-Gauss, (4.58) et (4.58) sont d'ordre 4 et présentent des propriétés d'approximation comparables. Le caractère haute fréquence est cependant différent. Lorsque λ est autour de $2\sqrt{3}$, valeur pour laquelle λ^2 est racine de $1 - x/6 + x^2/144$, voir (4.57), le schéma (4.55) présente une croissance en temps. Le schéma stabilisé résout ce problème.

4.3.2 Problèmes dissipatifs

Comme mentionné la dissipation a été négligée dans la section précédente, on suppose donc maintenant que B_h n'est pas nul mais symétrique et positif. Un schéma d'équation modifiée à l'ordre 4 s'obtient de la même manière que l'on obtient l'équation modifiée (4.53) (c'est-à-dire en remplaçant, dans l'erreur de consistance, les termes de dérivées en temps en utilisant l'équation continue puis en ré-injectant ces termes dans le schéma). Tous calculs faits, le schéma s'écrit

$$\begin{aligned}
 \left(I_h + \frac{\Delta t^2}{12} B_h^2 \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{\delta,h} \left(I_h - \frac{\Delta t^2}{12} A_{\delta,h} \right) u_{\delta,h}^n \\
 + \left(B_h + \frac{\Delta t^2}{12} C_{\delta,h} \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = g_h(t^n) \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

avec $C_{\delta,h} = B_h A_{\delta,h} - A_{\delta,h} B_h$ et

$$g_h(t^n) = f_h(t^n) + \frac{\Delta t^2}{12} \left(\ddot{f}_h(t^n) + B_h \dot{f}_h(t^n) - A_{\delta,h} f_h(t^n) \right).$$

On peut remarquer que l'on retrouve (4.53) (si on fait le choix (4.50)) lorsque $B_h = 0$. Comme l'opérateur $C_{\delta,h}$ est anti-adjoint, on peut montrer que l'énergie discrète

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left(\left(I_h + \frac{\Delta t^2}{12} B_h^2 - \frac{\Delta t^2}{4} A_{\delta,h} \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h \\
 + \left(A_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h,
 \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{A}_{\delta,h} = A_{\delta,h} \left(I_h - \frac{\Delta t^2}{12} A_{\delta,h} \right),$$

satisfait la relation d'énergie (4.11) et est positive sous la condition (4.54), c'est-à-dire

$$\Delta t^2 \leq \frac{12}{\rho_{\delta,h}}. \quad (4.60)$$

À chaque itération du schéma, (4.59) l'opérateur à inverser est

$$\mathbf{M}_h + \frac{\Delta t^3}{24} C_{\delta,h} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_h = I_h + \frac{\Delta t}{2} B_h + \frac{\Delta t^2}{12} B_h^2 \quad (4.61)$$

De manière générale, l'opérateur $C_{\delta,h}$ n'est pas simple à inverser même si B_h l'est. Le schéma, qui est un schéma explicite lorsque $B_h = 0$, devient donc un schéma implicite lorsque $B_h \neq 0$ et son efficacité diminue. Pour palier à ce problème, nous avons proposé dans [SI29] plusieurs variantes explicites de (4.59) qui sont construites en utilisant l'hypothèse que

$$\frac{\Delta t^3}{24} \|\mathbf{M}_h^{-1} C_{\delta,h}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}_h)} < 1. \quad (4.62)$$

Cette hypothèse est en fait toujours vérifiée pour Δt suffisamment petit. De plus, en pratique, pour des opérateurs B_h de norme majorée indépendamment de h , elle est moins contraignante que la condition de stabilité (4.60). Les différentes variations de (4.59) sont obtenues, tout d'abord, en écrivant le schéma (4.59) sous la forme

$$u_{\delta,h}^{n+1} = u_{\delta,h}^{n-1} + \left(\mathbf{M}_h + \frac{\Delta t^3}{24} C_{\delta,h} \right)^{-1} \left[\Delta t^2 g_h(t^n) - \mathbf{A}_{\delta,h} u_{\delta,h}^n + 2 \left(I_h + \frac{\Delta t^2}{12} B_h^2 \right) (u_{\delta,h}^n - u_{\delta,h}^{n-1}) \right],$$

puis, en remplaçant l'inverse de l'opérateur (4.61) par une série de Neumann tronquée (cette série converge grâce à l'hypothèse (4.62)). Étant donné un entier M , les schémas s'écrivent donc

$$u_{\delta,h}^{n+1} = u_{\delta,h}^{n-1} + \sum_{k=0}^M \left(-\frac{\Delta t^3}{24} \mathbf{M}_h^{-1} C_{\delta,h} \right)^k \mathbf{M}_h^{-1} \times \\ \left[\Delta t^2 g_h(t^n) - \mathbf{A}_{\delta,h} u_{\delta,h}^n + 2 \left(I_h + \frac{\Delta t^2}{12} B_h^2 \right) (u_{\delta,h}^n - u_{\delta,h}^{n-1}) \right]. \quad (4.63)$$

L'analyse des schémas (4.63) se fait en les ré-interprétant sous une forme proche de (4.59). Il est montré dans [SI29] que les schémas (4.63) se réécrivent, sous la forme suivante

$$\left(I_h + \frac{\Delta t^2}{12} B_h^2 \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - 2u_{\delta,h}^n + u_{\delta,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_{\delta,h} u_{\delta,h}^n \\ + \left(B_{h,M} + \frac{\Delta t^2}{12} C_{h,M} \right) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^{n-1}}{2\Delta t} = g_h(t^n) \quad (4.64)$$

où, dans le cas $M = 1$ et $M = 3$ (les autres cas étant moins intéressants), on a

$$B_{h,1} = B_h + \frac{\Delta t^2}{12} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\Delta t^3}{24} \right)^{2k+1} (C_{\delta,h} \mathbf{M}_h)^{2k+1} C_{\delta,h}, \quad C_{h,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\Delta t^3}{24} \right)^{2k} (C_{\delta,h} \mathbf{M}_h)^{2k} C_{\delta,h}$$

et

$$B_{h,3} = B_h + \frac{\Delta t^2}{12} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\Delta t^3}{24} \right)^{4k+3} (C_{\delta,h} \mathbf{M}_h)^{2k+1} C_{\delta,h}, \quad C_{h,3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\Delta t^3}{24} \right)^{4k} (C_{\delta,h} \mathbf{M}_h)^{4k} C_{\delta,h}.$$

On constate que $B_{h,1}$ et $B_{h,3}$ sont des perturbations d'ordre 5 et 11 en temps de B_h . De façon similaire $C_{h,1}$ et $C_{h,3}$ sont des perturbations d'ordre 3 et 9 en temps de C_h . On observe ainsi que, au moins formellement, les schémas (4.63) pour $M = 1$ et $M = 3$ sont des schémas consistants à l'ordre 4 en temps avec l'équation (4.1). On montre dans [SI29], que sous la condition de stabilité (4.60),

- pour $M = 1$, le schéma autorise une croissance exponentielle de l'énergie en temps de la forme $\exp(CT\Delta t)$ où C est une constante indépendante de Δt , ce qui, en pratique, ne détruit pas les propriétés d'approximation sur des temps raisonnablement longs.
- pour $M = 3$ le schéma est évidemment plus cher, mais ne présente pas de croissance exponentielle de l'énergie.

La comparaison avec le schéma de Runge-Kutta 4 est présentée Figure 4.9(b) dans le cas de la propagation d'ondes dans un domaine mono-dimensionnel :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \chi(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

avec données initiales nulles. Le scalaire σ est strictement positif (égal à 100 dans ce qui suit) tandis que le profil $\chi(x)$ est positif et choisi de deux types différents : soit $\chi(x) = \chi_0(x)$ est une fonction rectangulaire, soit $\chi(x) = \chi_1(x)$ est une fonction chapeau (voir [SI29] pour tous les détails). La discrétisation en espace est faite en utilisant des éléments finis d'ordre élevés avec condensation de masse [24]. Figure 4.9(b), nous comparons la précision, par rapport à la complexité algorithmique, pour les schémas suivants :

- (LF). C'est le schéma saute-mouton standard (Leap-frog). Le pas de temps choisi est $2(1 - \nu)/\sqrt{\rho_{\delta,h}}$ avec $\nu = 0.01$. Par itération du schéma, une seule multiplication par $A_{\delta,h}$ est comptée.
- (EME-M). À chaque itération, $2+M$ multiplications sont comptées, 2 par $A_{\delta,h}$ et M par C_h . En pratique, si la dissipation est localisée en espace, la multiplication par C_h est moins coûteuse, mais nous ne sommes pas entrés dans ce niveau de détails. Le schéma correspondant au cas $M = 0$ est formellement d'ordre 2 et est construit en posant $B_{h,0} = B_h$ et $C_{h,0} = C_h$, c'est-à-dire en négligeant complètement le terme anti-adjoint C_h dans (4.59). Le pas de temps est choisi comme $2\sqrt{3}(1 - \nu)/\sqrt{\rho_{\delta,h}}$ avec $\nu = 0.01$.
- (RK-4). Par itération, à chacune des étapes de la méthode, une multiplication par $A_{\delta,h}$ est comptée pour un total de 4. Sans dissipation, le pas de temps maximal autorisé est $2\sqrt{2}/\sqrt{\rho_{\delta,h}}$. Avec le terme de dissipation, le pas de temps être choisi comme le pas de temps le plus grand de tel sorte que toutes les valeurs propres du problème soient dans la zone de stabilité de la méthode [15] (par un processus dichotomique par exemple).

On observe que, lorsque le profil $\chi(x)$ est régulier, alors la méthode (EME - 1) offre de très bonnes performances par rapport au schéma Runge-Kutta (à complexité égale les résultats sont dix fois plus précis). Cette observation ne se généralise pas au cas où $\chi(x)$ est discontinu (ceci est dû au fait que, dans ce cas, la norme de $\mathbf{M}_h^{-1} C_h$ est plus grande). En effet, dans ce cas, c'est le schéma (EME - 3) qui est légèrement meilleur que le schéma

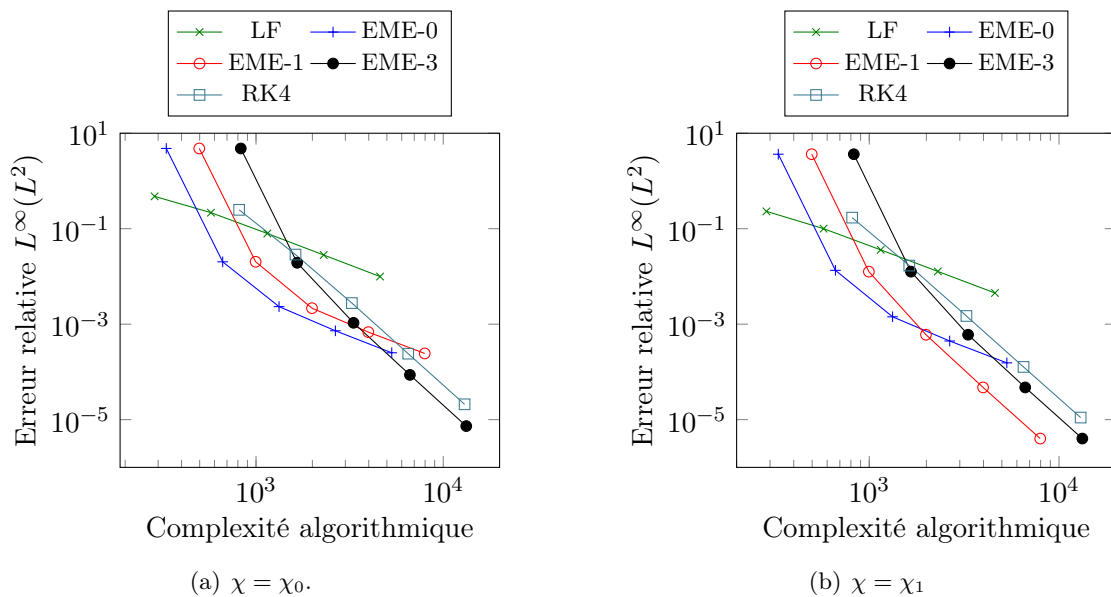


FIGURE 4.9 – Figure extraite de [SI29]. Erreur relative pour les différents schémas par rapport à leur coût algorithmique. Pour le calcul de la complexité algorithmique, une multiplication par $A_{\delta,h}$ ou C_h compte pour 1, le reste est négligé.

Runge-Kutta (environ 5 fois plus précis pour la même complexité algorithmique).

Bien que l'on ait réussi à construire des schémas plus performants que la méthode de Runge-Kutta 4, les performances numériques entre ce que nous avons proposé et RK4 se rapprochent si la dissipation est forte (ce qui est le cas de l'expérience réalisée pour produire 4.9(b)). Ce n'est pas surprenant ! En effet, le problème perd son caractère propagatif à cause de la dissipation et les méthodes efficaces sur les problèmes conservatifs ne sont pas forcément les bons points de départ pour construire des méthodes adaptées. Cependant, dans le contexte de la propagation d'ondes, l'approche que nous proposons sera d'autant plus efficace que la dissipation sera locale en espace ou faible.

CHAPITRE 5

Autres techniques de discrétisation en temps d'équations d'ondes

5.1 Discrétisation de problèmes sous contraintes

Dans l'objectif de simuler la propagation d'ondes dans des milieux incompressibles (typiquement des tissus humains ou des milieux mous, à la limite où le module d'incompressibilité est infini), nous avons développé dans [SI19] un schéma de discrétisation en temps adapté. L'équation traitant la contrainte d'incompressibilité est modifiée par l'ajout d'un terme stabilisant, ce qui permet que le multiplicateur de Lagrange (nouvelle inconnue nécessaire à la gestion de la contrainte d'incompressibilité) soit calculé, à chaque pas de temps, efficacement. Ce calcul se fait par l'inversion d'un opérateur de Laplace par FFT rapide adaptée à des éléments finis spectraux sur le cube unité [SI25]. Par la suite, ce multiplicateur de Lagrange est utilisé dans l'équation d'évolution pour calculer l'itéré suivant. La méthode ainsi construite se révèle originale et très efficace (bien que limitée à des géométries isomorphes à un cube). L'extension de cette stratégie à des géométries et des physiques plus complexes (typiquement milieux précontraints) est une perspective envisagée prochainement.

Le point de départ est le choix d'une stratégie de discrétisation en temps pour des systèmes sous contraintes de la forme

$$\begin{cases} \ddot{u}_h(t) + A_h u_h(t) + B_h \dot{u}_h(t) + G_h^* \lambda_h(t) = f_h(t), & \text{dans } \mathbb{V}_h, \\ G_h u_h(t) = 0, & \text{dans } \mathbb{L}_h, \end{cases} \quad (5.1)$$

complété par les conditions initiales

$$u_h(0) = u_h^0, \quad \dot{u}_h(0) = u_h^1.$$

Dans (5.1), l'espace \mathbb{V}_h , pour une suite de paramètre h s'accroissant en 0, est un espace de Hilbert de dimension finie équipée du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$ tandis que \mathbb{L}_h est un autre espace de Hilbert équipé du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{L}_h}$. L'opérateur $A_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_h)$ est auto-adjoint positif. L'opérateur G_h appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{V}_h, \mathbb{L}_h)$ et $B_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_h)$ est positif. L'inconnue λ_h est un multiplicateur de Lagrange contrebalançant la contrainte $G_h u_h(t) = 0$.

Le schéma proposé dans cette section est directement inspirés des schémas à pas fractionné avec projection développés pour traiter les conditions d'incompressibilité dans les

équations de Stokes (voir [38]). L'idée sous-jacente est qu'une discrétisation explicite centrée de (5.1) nécessitera, tout de même, l'inversion de l'opérateur $G_h G_h^*$ pour le calcul du multiplicateur de Lagrange. Pour que cet opérateur soit inversible, il est nécessaire d'avoir la condition *inf-sup* non-uniforme suivante

$$\inf_{\mu_h \in \mathbb{L}_h} \sup_{v_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(G_h v_h, \mu_h)_{\mathbb{L}_h}}{\|v_h\|_h \|\mu_h\|_{\mathbb{L}_h}} > 0. \quad (5.2)$$

Cette hypothèse implique notamment que G_h est surjectif et donc que G_h^* est injectif. Sans la condition *inf-sup*, les solutions de (5.1) sont définies à un élément du noyau de G_h^* près. De plus, la condition *inf-sup* uniforme (c'est-à-dire que la borne intérieure dans (5.2) est une constante indépendante de h) est nécessaire pour obtenir de bonnes propriétés de convergence du schéma. Indépendamment de ces considérations, l'opérateur $G_h G_h^*$ ne possède pas, en général, de bonnes propriétés (c'est le cas pour l'application mentionnée ci-dessous), on préférera donc remplacer cette inversion par l'inversion d'un opérateur proche, mais facile à inverser. On introduit, pour cela, le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h u_h^n + B_h \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} + G_h^* \lambda_h^n = f_h(t^n) \\ G_h u_h^n = \frac{\Delta t^2}{\eta} C_h C_h^* \lambda_h^n, \end{cases} \quad (5.3)$$

où $\eta > 0$ est un paramètre et si \mathbb{W}_h est un autre espace de Hilbert de dimension finie munie du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{W}_h}$, alors $C_h \in \mathcal{L}(\mathbb{W}_h, \mathbb{L}_h)$ est, en un certain sens que l'on précisera, un opérateur proche de G_h . Lorsque $C_h^* = 0$, on retombe sur la discrétisation classique de (5.1) déjà mentionnée plus haut. Lorsque C_h^* est différent de 0 et est injectif, le schéma nécessite à chaque itération l'inversion de l'opérateur $C_h C_h^*$ pour calculer λ_h^n en fonction de u_h^n . Ensuite, la première équation de (5.3) est utilisée pour calculer de façon explicite u_h^{n+1} .

On peut montrer que le schéma (5.3) préserve une énergie. Pour cela, il faut le réécrire en éliminant λ_h^n , on obtient,

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \left[A_h + \frac{\eta}{\Delta t^2} G_h^* (C_h C_h^*)^{-1} G_h \right] u_h^n + B_h \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} = f_h(t^n).$$

Ce schéma a maintenant une forme tout à fait standard. En définissant

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \left((I_h - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{A}_h) \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} - u_{\delta,h}^n}{\Delta t} \right)_h + \left(\mathbf{A}_{\delta,h} \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2}, \frac{u_{\delta,h}^{n+1} + u_{\delta,h}^n}{2} \right)_h$$

avec

$$\mathbf{A}_h = A_h + \frac{\eta}{\Delta t^2} G_h^* (C_h C_h^*)^{-1} G_h, \quad (5.4)$$

on montre que la relation d'énergie suivante est vérifiée

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_h^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n \left(f_h(t^k), \frac{u_h^{k+1} - u_h^{k-1}}{2\Delta t} \right)_h$$

où le terme $\mathcal{D}_h^{n+\frac{1}{2}}$ prend en compte les éventuelles pertes du système et est donné par

$$\mathcal{D}_h^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^n \left(B_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^{k-1}}{2\Delta t}, \frac{u_h^{k+1} - u_h^{k-1}}{2\Delta t} \right)_h.$$

Pour démontrer la stabilité du schéma, il faut montrer la positivité de l'énergie. Cette propriété s'obtient sous la condition

$$I_h - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{A}_h \geq 0. \quad (5.5)$$

A priori, par inspection de la définition (5.4) il n'est pas aisé de relier cette condition au rayon spectral de A_h que l'on va appeler ρ_h . C'est à ce stade que va intervenir l'hypothèse que C_h est lié à G_h . On suppose que $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{W}_h$ et qu'il existe une injection $i_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_h, \mathbb{W}_h)$ de norme 1, telle que $G_h = C_h i_h$. Avec ces hypothèses, l'opérateur \mathbf{A}_h s'écrit

$$\mathbf{A}_h = A_h + \frac{\eta}{\Delta t^2} i_h^* C_h^* (C_h C_h^*)^{-1} C_h i_h.$$

En suivant les observations faites dans [SI19], on trouve que $C_h^* (C_h C_h^*)^{-1} C_h$ est un opérateur de projection dans \mathbb{W}_h , donc de norme d'opérateur 1. On en déduit que

$$\|i_h^* C_h^* (C_h C_h^*)^{-1} C_h i_h\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}_h)} \leq 1.$$

Cette estimation nous permet d'écrire que

$$\|\mathbf{A}_h\|_{\mathcal{L}(\mathbb{V}_h)} \leq \rho_h + \frac{\eta}{\Delta t^2}$$

et la condition de stabilité (5.5) devient, en supposant que $\eta \in (0, 4)$,

$$1 - \frac{\Delta t^2}{4} \left(\rho_h + \frac{\eta}{\Delta t^2} \right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t^2 \leq \frac{4 - \eta}{\rho_h}.$$

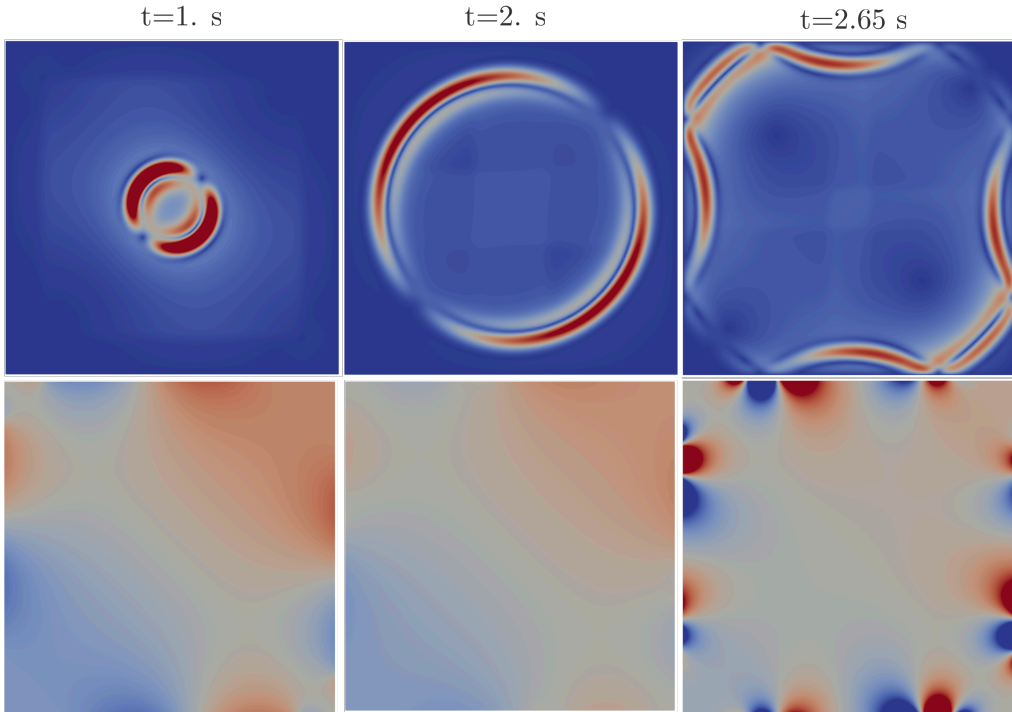


FIGURE 5.1 – Instantanés de la propagation d'une onde de cisaillement dans un milieu isotrope incompressible simulation (en haut) et de la pression correspondante (en bas).

C'est avec le schéma (5.3) que nous avons simulé, dans [SI19], la propagation d'ondes dans des milieux incompressibles, voir Figure 5.1 et problème (3.41). Dans ce travail,

l'espace \mathbb{V}_h est une approximation conforme de $H_0^1(\Omega)^3$, l'opérateur A_h représente la discrétisation de l'opérateur d'élasticité, tandis que l'opérateur G_h représente la discrétisation de l'opérateur de divergence. Finalement l'opérateur $C_h C_h^*$ représente la discrétisation de l'opérateur de Laplace. Pour inverser cet opérateur et calculer λ_h^n , qui correspond à la pression dans le milieu, nous avons développé dans [SI25] un solveur rapide basé sur des transformées de Fourier discrètes adaptées aux éléments finis d'ordres élevés. Avec cet outil, inverser $C_h C_h^*$ est aussi peu coûteux numériquement qu'appliquer l'opérateur A_h ! Le coût du schéma est alors globalement celui d'un schéma explicite.

5.2 Discrétisation de problèmes de transmission

Dans cette section, je reprends le contenu des travaux [SI14] et [SI29]. Dans ces travaux, nous nous sommes intéressés à la simulation d'équations d'ondes couplées. L'exemple auquel nous pensons est le cas d'équations d'ondes posées dans Ω qui est l'union de deux domaines disjoints Ω_c et Ω_f . Le problème peut s'écrire sur Ω_c et Ω_f en utilisant des conditions de transmission : on cherche $u_c(t) \in H^1(\Omega_c)$ et $u_f(t) \in H^1(\Omega_f)$, tels que pour tout $t \in [0, T]$ on ait,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_c - \nabla \cdot \mu_c \nabla u_c = f_c & \text{dans } \Omega_c, \\ \partial_t^2 u_f - \nabla \cdot \mu_f \nabla u_f = f_f & \text{dans } \Omega_f, \end{cases} \quad (5.6)$$

avec des données de Neumann homogènes sur le bord du domaine Ω

$$\nabla u_c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_c \cap \partial\Omega, \quad \nabla u_f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_f \cap \partial\Omega,$$

et des conditions de transmission sur le reste de la frontière $\Sigma = \partial\Omega_c \cap \partial\Omega_f$,

$$u_c = u_f, \quad \text{sur } \Sigma \quad \mu_c \nabla u_c \cdot \mathbf{n} = \mu_f \nabla u_f \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Un des intérêts de ce type de formulation est de pouvoir traiter, au niveau discret, différemment les inconnues u_c et le u_f . Typiquement, u_c sera discretisé par éléments finis sur un maillage grossier (le “c” est pour *coarse*) tandis que u_f sera discretisé par éléments finis sur un maillage fin (le “f” est pour *fine*) pour, par exemple, capter des variations géométriques compliquées du domaine. Les deux discrétisations sont ensuite raccordées par éléments finis mortier [65] (voir aussi [SI24] pour le traitement de raccordement avec recouvrement de domaines par la technique appelé *Arlequin*). Après ce type de semi-discrétisations en espace, nous obtenons le problème semi-discret suivant

$$\begin{cases} \ddot{u}_{c,h} + A_{c,h} u_{c,h} + R_{c,h} \lambda_h = f_{c,h}, \\ \ddot{u}_{f,h} + A_{f,h} u_{f,h} - R_{f,h} \lambda_h = f_{f,h}, \\ R_{c,h}^* u_{c,h} - R_{f,h}^* u_{f,h} = 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

où $\lambda_h \in \mathbb{L}_h$ est un multiplicateur de Lagrange. Dans le cas de l'exemple (5.6), il est associé à la contrainte d'égalité des traces des solutions à l'interface entre les domaines. Les inconnues $u_{c,h}(t)$ et $u_{f,h}(t)$ sont discrétisées dans les espaces $\mathbb{V}_{c,h}$ et $\mathbb{V}_{f,h}$ respectivement équipés des produits scalaires $(\cdot, \cdot)_{c,h}$ et $(\cdot, \cdot)_{f,h}$. Les opérateurs $R_{c,h}$ et $R_{f,h}$ sont des opérateurs de couplage avec le multiplicateur de Lagrange (typiquement des matrices de masse de bords dans le cas de l'exemple (5.6)). Finalement, si l'on note $\rho_{c,h}$ et $\rho_{f,h}$ les rayons spectraux des opérateurs auto-adjoints positifs $A_{c,h}$ et $A_{f,h}$, on suppose que $\rho_{f,h} \gg \rho_{c,h}$.

Les techniques, qui vont être présentées dans les deux sections qui suivent, correspondent à des discrétisations en temps où un traitement particulier est réalisé sur l'équation portant sur $u_{f,h}$ pour ne pas être trop pénalisé par le fait que $\rho_{f,h} \gg \rho_{c,h}$. L'objectif, dans les deux cas, est de relaxer la condition de stabilité : soit en utilisant les polynômes de Chebychev stabilisés, on obtient alors une technique d'ordre 2 en temps et assimilable à du pas de temps local ; soit en discretisant implicitement l'équation sur $u_{f,h}$, on obtient alors une technique implicite-explicite. Pour cette dernière stratégie, je présente directement l'approche à l'ordre 4 en temps, qui est la vraie originalité de [SI14] (voir cette même référence pour l'approche, plus simple, à l'ordre 2 en temps).

La méthodologie adoptée pour la construction et l'analyse de ces schémas est la même que celle qui a été mentionnée dans le chapitre 4. À savoir : on montre tout d'abord qu'une relation d'énergie est satisfaite ; puis on déduit les conditions de stabilité du schéma en cherchant les conditions de positivités de cette énergie. Par ailleurs, pour simplifier, le propos je suppose ici que les conditions initiales sont nulles et que les termes sources sont nuls au voisinage de 0. Ainsi, les 2 premiers itérés des schémas sont également choisis nuls.

5.2.1 Schémas d'ordre 2 avec stabilisation explicite

En s'appuyant sur la famille de schémas saute-mouton présenté Section 4.2.2 nous avons proposé dans [SI32] la famille de schémas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{c,h}^{n+1} - 2u_{c,h}^n + u_{c,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + A_{c,h} u_{c,h}^n + R_{c,h} \lambda_h^n = f_{c,h}(t^n) \\ \frac{u_{f,h}^{n+1} - 2u_{f,h}^n + u_{f,h}^{n-1}}{\Delta t^2} \\ \quad + \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{f,h}) (A_{f,h} u_{f,h}^n - R_{f,h} \lambda_{h,\delta}^n - f_{f,h}(t^n)) = 0 \\ R_{c,h}^* u_{c,h}^n - R_{f,h}^* u_{f,h}^n = 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

On peut observer qu'un schéma saute-mouton explicite a été utilisé pour discrétiser la première équation. La deuxième équation est discretisée en utilisant un schéma saute-mouton généralisé explicite où $\mathcal{P}_p(x)$ est un polynôme satisfaisant la propriété de consistance $\mathcal{P}_p(0) = 1..$ À chaque itération, pour calculer $(u_{c,h}^{n+1}, u_{f,h}^{n+1}, \lambda_h^n)$, le système suivant doit être inversé

$$\begin{pmatrix} I_{c,h} & 0 & R_{c,h} \\ 0 & I_{f,h} & -\mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{f,h}) R_{f,h} \\ R_{c,h}^* & -R_{f,h}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Par l'utilisation d'un complément de Schur, on se ramène à devoir inverser, à chaque itération,

$$R_{c,h}^* R_{c,h} + R_{f,h}^* \mathcal{P}_p(\Delta t^2 A_{f,h}) R_{f,h}. \quad (5.10)$$

Une condition suffisante d'inversibilité de (5.9) est donnée par

$$\text{Ker } R_{c,h} \cap \text{Ker } R_{f,h} = \{0\}. \quad (5.11)$$

Cette condition ne garantit pas que le conditionnement de l'opérateur (5.10) soit indépendant de h . Pour cela, il faut une condition *inf-sup* uniforme en h . L'obtention de cette condition dans le cadre des stratégies d'éléments mortiers pour discretiser \mathbb{L}_h a été beaucoup étudiée dans la littérature (voir par exemple [11, 65, 42]). Pour la famille de schémas,

(5.8) nous avons la relation d'énergie suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,h}^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{E}_{c,h}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathcal{E}_{f,h}^{\frac{1}{2}} + \mathcal{E}_{c,h}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{k=1}^n \left(f_{f,h}(t^k), \frac{u_{f,h}^{k+1} - u_{f,h}^{k-1}}{2\Delta t} \right)_{f,h} + \sum_{k=1}^n \left(f_{c,h}(t^k), \frac{u_{c,h}^{k+1} - u_{c,h}^{k-1}}{2\Delta t} \right)_{c,h} \end{aligned} \quad (5.12)$$

où les termes d'énergies $\mathcal{E}_{c,h}^{n+\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{E}_{f,h}^{n+\frac{1}{2}}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c,h}^{n+\frac{1}{2}} &= \left(\left(I_{c,h} - \frac{\Delta t^2}{4} A_{c,h} \right) \frac{u_{c,h}^{n+1} - u_{c,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{c,h}^{n+1} - u_{c,h}^n}{\Delta t} \right)_{c,h} \\ &+ \left(A_{c,h} \frac{u_{c,h}^{n+1} + u_{c,h}^n}{2}, \frac{u_{c,h}^{n+1} + u_{c,h}^n}{2} \right)_{c,h}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,h}^{n+\frac{1}{2}} &= \left(\left[\mathcal{P}_p^{-1}(\Delta t^2 A_{f,h}) - \frac{\Delta t^2}{4} A_{f,h} \right] \frac{u_{f,h}^{n+1} - u_{f,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{f,h}^{n+1} - u_{f,h}^n}{\Delta t} \right)_{f,h} \\ &+ \left(A_{f,h} \frac{u_{f,h}^{n+1} + u_{f,h}^n}{2}, \frac{u_{f,h}^{n+1} + u_{f,h}^n}{2} \right)_{f,h}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dans (5.14), il est sous-entendu que $\mathcal{P}_p^{-1}(\Delta t^2 A_{f,h})$ est un opérateur inversible. Grâce à la propriété de consistance, cette propriété est toujours vérifiée pour Δt suffisamment petit. Elle est aussi vérifiée pour Δt satisfaisant

$$\Delta t^2 \leq \frac{4(\ell+1)^2}{\rho_{f,h}} e^{-\frac{\nu}{2}}$$

avec le choix $\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_{p,\ell}^\nu$ comme défini Section 4.2.2. Ce choix permet également de garantir que l'énergie (5.14) est positive sous la même condition de stabilité (grâce à (4.27)). C'est donc ce choix de polynômes que l'on retient. La condition de positivité des énergies (5.13) et (5.14) est alors donnée par

$$\Delta t^2 \leq \min \left(\frac{4(\ell+1)^2}{\rho_{f,h}} e^{-\frac{\nu}{2}}, \frac{4}{\rho_{c,h}} \right). \quad (5.15)$$

Au facteur $e^{-\frac{\nu}{2}}$, près on obtient un schéma optimal d'un point de vue stabilité : c'est-à-dire que dans le cas idéal où $\rho_{f,h} = (\ell+1)^2 \rho_{c,h}$ (en éléments finis, pour des maillages structurés, cela correspond à supposer que le pas du maillage fin est $\ell+1$ fois plus petit), alors, à chaque itération, $\ell+1$ multiplications par $A_{f,h}$ et 1 par $A_{c,h}$ sont nécessaires pour calculer le second membre du système impliquant la matrice (5.9). L'inversion du système (5.9) (qui est essentiellement un système permettant de calculer le multiplicateur de Lagrange, (5.10)) représente un surcoût non négligeable ne détruisant tout de même pas l'intérêt de la méthode (voir [SI32] pour tous les détails).

5.2.2 Schémas d'ordre 4 implicites

Un des problèmes avec la stratégie présentée dans la section précédente est que, dans le contexte décrit, le système à inverser (5.10) à chaque itération à une largeur de bande qui augmente avec ℓ au point que, dans des cas extrêmes (très petite zone maillée finement),

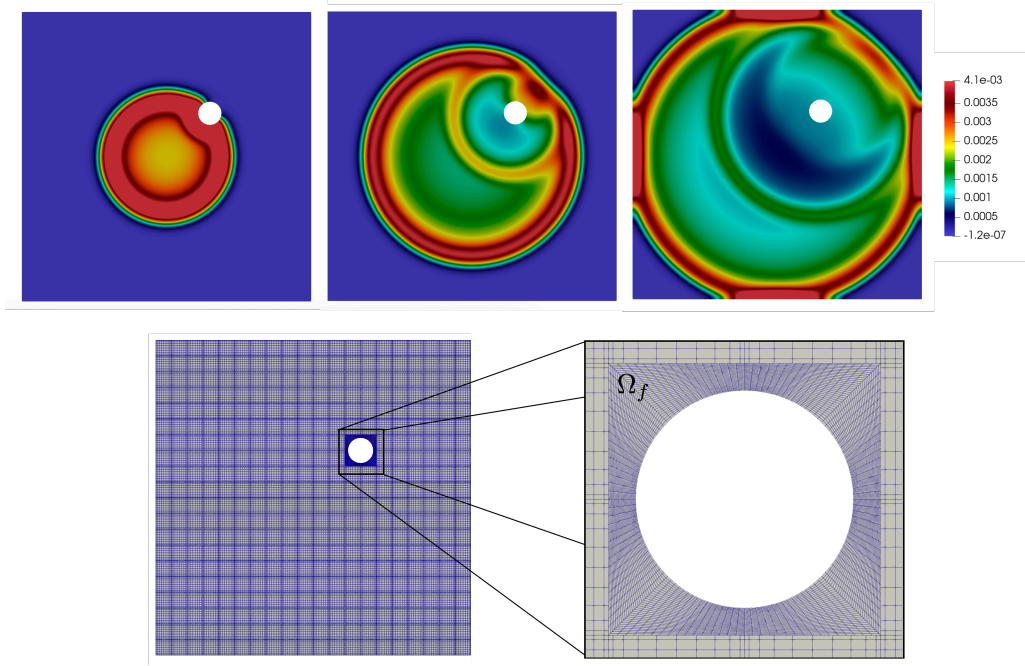


FIGURE 5.2 – Figure extraite de [SI32]. Simulation de la diffraction d’une onde en utilisant le schéma (5.8). Le domaine fin est constitué d’une cavité maillée (exagérément) finement de façon non conforme.

il peut être plein. Dans cette situation, et de manière générale si ℓ est trop grand, il est préférable de résoudre implicitement le problème dans Ω_f . Comme mentionné, je donne maintenant le schéma, proposé dans [SI14], que l’on obtient si l’on cherche à construire une telle méthode pour l’ordre 4,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{c,h}^{n+1} - 2u_{c,h}^n + u_{c,h}^{n-1}}{\Delta t^2} + (I_{c,h} - \frac{\Delta t^2}{12} A_{c,h}) (A_{c,h} u_{c,h}^n + R_{c,h} \lambda_h^n - \{f_{c,h}(t^n)\}_{\frac{1}{12}}) = 0, \\ \left(I_{f,h} + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \nu \right) A_{f,h}^2 \right) \frac{u_{f,h}^{n+1} - 2u_{f,h}^n + u_{f,h}^{n-1}}{\Delta t^2} \\ \quad + A_{f,h} \{u_{f,h}\}_{\frac{1}{12}}^n - R_{f,h} \lambda_{\delta,h}^n = \{f_{f,h}(t^n)\}_{\frac{1}{12}}, \\ R_{c,h}^* u_{c,h}^n - R_{f,h}^* u_{f,h}^n = 0, \end{array} \right.$$

avec $\nu > 0$ un petit paramètre de stabilisation. L’équation modifiée (4.53) a été utilisé pour discretiser la première équation de (5.7) et le (θ, φ) -schéma optimal (4.58) pour discretiser la seconde. À chaque itération, il est nécessaire d’inverser le système

$$\begin{pmatrix} I_{c,h} & 0 & -(I_{c,h} - \frac{\Delta t^2}{12} A_{c,h}) R_{c,h} \\ 0 & I_{f,h} + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \nu \right) A_{f,h}^2 & -R_{f,h} \\ R_{c,h}^* & -R_{f,h}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

qui peut se simplifier, par complément de Schur. On se ramène à l’inversion de

$$\begin{pmatrix} I_{f,h} + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \nu \right) A_{f,h}^2 & -R_{f,h} \\ -R_{f,h}^* & R_{c,h}^* \left(I_{c,h} - \frac{\Delta t^2}{12} A_{c,h} \right) R_{c,h} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Le système à inverser est donc de la taille du nombre de degrés de liberté de $\mathbb{V}_{f,h}$ et du nombre de degrés de liberté de \mathbb{L}_h . L'inversibilité du système est garantie sous la condition (5.11) et

$$\Delta t^2 < \frac{12}{\rho_{c,h}}. \quad (5.18)$$

Aux modifications du terme source près, la relation d'énergie (5.12) est satisfaite avec les définitions

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c,h}^{n+\frac{1}{2}} = & \left(\left((I_{c,h} - \frac{\Delta t^2}{12} A_{c,h})^{-1} - \frac{\Delta t^2}{4} A_{c,h} \right) \frac{u_{c,h}^{n+1} - u_{c,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{c,h}^{n+1} - u_{c,h}^n}{\Delta t} \right)_{c,h} \\ & + \left(A_{c,h} \frac{u_{c,h}^{n+1} + u_{c,h}^n}{2}, \frac{u_{c,h}^{n+1} + u_{c,h}^n}{2} \right)_{c,h}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,h}^{n+\frac{1}{2}} = & \left(\left(I_h - \frac{\Delta t^2}{6} A_{h,\delta} + \Delta t^4 \left(\frac{1}{144} + \nu \right) A_{h,\delta}^2 \right) \frac{u_{f,h}^{n+1} - u_{f,h}^n}{\Delta t}, \frac{u_{f,h}^{n+1} - u_{f,h}^n}{\Delta t} \right)_{f,h} \\ & + \left(A_{f,h} \frac{u_{f,h}^{n+1} + u_{f,h}^n}{2}, \frac{u_{f,h}^{n+1} + u_{f,h}^n}{2} \right)_{f,h}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

On observe que $\mathcal{E}_{f,h}^{n+\frac{1}{2}}$ est bien positive et donc que la seule condition de positivité à vérifier est celle de (5.19). Or, on peut montrer que

$$\forall x \in [0, 12), \quad \left(1 - \frac{x}{12}\right)^{-1} - \frac{x}{4} \geq 0,$$

et en déduire que la condition de stabilité du schéma est donnée par (5.18). Ainsi la condition de stabilité est quasiment optimale et ne dépend que de $\rho_{c,h}$. En comparant au schéma de l'équation modifiée (4.53) la seule différence, qui est due au couplage, est que l'inégalité dans (5.18) doit être stricte.

Une des problématiques que je n'ai pas abordée est le traitement de termes dissipatifs. Il est relativement aisé d'étendre l'approche proposée Section 5.2.1 à ce cas. Cependant, le traitement de la dissipation dans le cas de la discrétisation d'ordre élevé en temps localement implicite (en utilisant le schéma présenté Section 4.3.2 pour la partie explicite) est une perspective éventuellement intéressante.

5.3 Couches parfaitement adaptées

Les couches parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers – PML) permettent de borner le domaine de calcul d'équations d'ondes posées en domaine infini. Les PML sont des milieux non-physiques ajoutés pour absorber les ondes entrantes sans créer de réflexions parasites. J'ai mis en place ces techniques pour les équations d'ondes régissant la propagation de la houle [SI6] et les équations d'ondes acoustiques anisotropes [SI7], voir Figure 5.3. Dans chacun des cas, une attention particulière a été portée sur les questions de stabilité des équations obtenues. En effet, il est connu [9, 10] que dans certains cas les PML sont instables et donc inutilisables. Sur ces questions de stabilités nous avons récemment étudié la question de la stabilité par énergie de problèmes de propagation discrets en milieu PML acoustique [SI26]. Je résume ces travaux dans cette section.

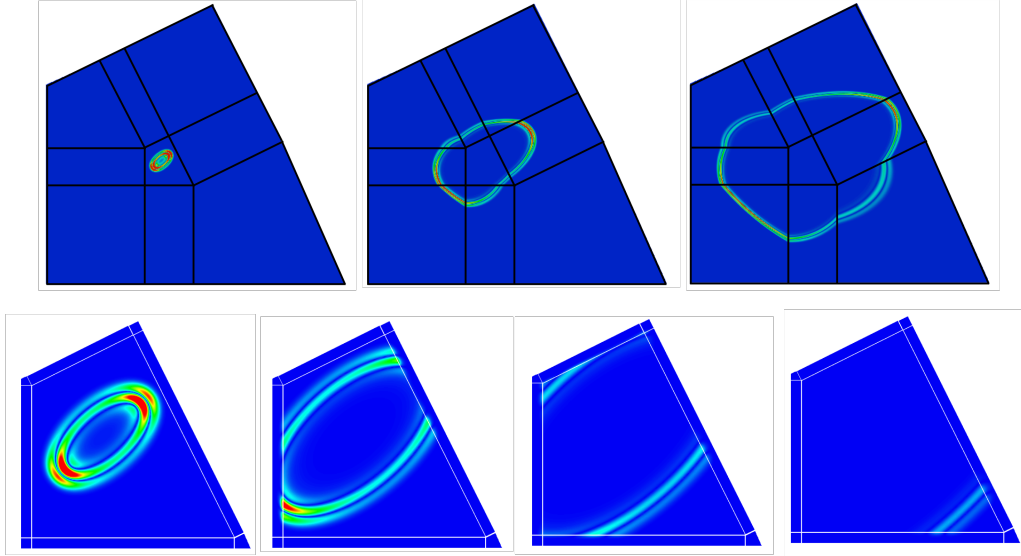


FIGURE 5.3 – Figure extraite de [SI6]. Dans [SI6], nous nous sommes inspirés de [31], pour construire des couches parfaitement adaptées stables pour des milieux anisotropes de la façon suivante : tout d’abord le milieu physique est entouré, de façon parfaitement adapté, par des milieux anisotropes spécifiques pour lesquels les PML sont stables (instantanés du haut). Ensuite, de l’absorption est ajoutée de façon parfaitement adaptée. On obtient les instantanés du bas.

Dans [SI26] nous nous sommes intéressés à l’étude de la formulation PML pour l’acoustique en 3 dimensions d’espaces développée dans [37] et donnée par,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (\text{tr } \Gamma_1) \partial_t u + (\text{tr } \Gamma_3) u + (\det \Gamma_1) \psi - \Delta u - \text{div } \Phi = 0 & \Omega \times [0, T], \\ \partial_t \psi = u & \Omega \times [0, T], \\ \partial_t \Phi + \Gamma_1 \Phi = \Gamma_2 \nabla u + \Gamma_3 \nabla \psi & \Omega \times [0, T], \end{cases} \quad (5.21)$$

où Ω est un domaine Lipschitz borné et les matrices Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont données par

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 + \xi_3 - \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 + \xi_3 - \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

et

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \xi_2 \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Dans (5.22) et (5.23) les fonctions ξ_i sont des fonctions positives qui régissent la dissipation dans les trois directions d’espaces. Le système (5.21) est complété par des données initiales sur $(u, \partial_t u, \psi, \Phi)$. Les inconnues ψ et Φ n’étant pas physique, on pourra toujours supposer que leur données initiales sont nulles. Par ailleurs le système est complété, par des données aux bords qui sont soit de type Dirichlet homogène

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5.24)$$

soit de type Neumann homogène

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} + \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (5.25)$$

$\xi_1 > 0$ $\xi_2 > 0$	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 > 0$	$\xi_1 > 0$ $\xi_2 > 0$
$\xi_1 > 0$ $\xi_2 = 0$	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 0$	$\xi_1 > 0$ $\xi_2 = 0$
Ω_0		
$\xi_1 > 0$ $\xi_2 > 0$	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 > 0$	$\xi_1 > 0$ $\xi_2 > 0$

FIGURE 5.4 – Représentation, en 2 dimensions d'espace, des zones où les fonctions ξ_1 et x_2 doivent s'annuler ou être strictement positive pour que le système (5.21) représente un système de PML pour le domaine physique Ω_0 . L'extension à 3 dimensions d'espace suit la même logique.

Pour que le système (5.21) définissent des PML il faut choisir les fonctions d'absorption de façon adéquate (voir Figure 5.4 pour une illustration en 2 dimensions d'espace). Bien qu'en pratique les coefficients d'absorption doivent varier (ils doivent au moins être nuls dans le milieu physique) il n'existent pas d'analyse mathématique de stabilité par technique d'énergie pour ce cas. Les analyses de stabilités sont réalisées à **coefficients d'absorptions constants**. C'est avec cette hypothèse que nous avons analysés dans [SI26] les propriétés de stabilité du système semi-discret associé à (5.21), à savoir,

$$\begin{cases} \ddot{u}_h + (\text{tr}\Gamma_1) \dot{u}_h + (\text{tr}\Gamma_3) u_h + (\det \Gamma_1) \psi_h + A_h u_h + G_h^* \Phi_h = 0, \\ \dot{\psi}_h = u_h, \\ \dot{\Phi}_h + \Gamma_1 \Phi_h = \Gamma_2 G_h u_h + \Gamma_3 G_h \psi_h, \end{cases} \quad (5.26)$$

où $u_h(t)$ et $\psi_h(t)$ appartiennent à un espace de Hilbert de dimension finie \mathbb{V}_h équipé du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$. L'inconnue $\Phi_h(t)$ appartient à l'espace de Hilbert de dimension finie \mathbb{G}_h équipé du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{G}_h}$. Finalement on suppose que l'opérateur $G_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_h, \mathbb{G}_h)$ et l'opérateur $A_h \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_h)$ satisfont

$$A_h = G_h^* G_h.$$

Cette dernière hypothèse étant importante pour obtenir les résultats qui suivent. La discrétisation en temps de (5.26) que nous avons proposé est construite comme un schéma saute-mouton où seuls les termes qui ne nuisent pas à l'efficacité de la méthode sont discrétisés de façon implicite

$$\begin{cases} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + (\text{tr}\Gamma_1) \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} + (\text{tr}\Gamma_3) \{u_h^n\}_{\frac{1}{4}} \\ \quad + (\det \Gamma_1) \{\psi_h^n\}_{\frac{1}{4}} + A_h u_h^n + G_h^* \Phi_h^n = 0, \\ \frac{\psi_h^{n+1} - \psi_h^n}{\Delta t} = \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}, \\ \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^n}{\Delta t} + \Gamma_1 \frac{\Phi_h^{n+1} + \Phi_h^n}{2} = \Gamma_2 G_h \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} + \Gamma_3 G_h \frac{\psi_h^{n+1} + \psi_h^n}{2}, \end{cases} \quad (5.27)$$

où la notation $\{\cdot\}_{1/4}$ est donné par (4.9). Le schéma est essentiellement explicite (si la technique de condensation de masse est utilisé) : les inconnues u_h^{n+1} et ψ_h^{n+1} se calcul

explicitement grâce aux deux premières équations de (5.27). Après quoi, Φ_h^{n+1} est calculé grâce à la troisième équation de (5.27). Nous avons montré la relation d'énergie suivante,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \left\| \Gamma_1^{\frac{1}{2}} \left(G_h \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right\|_{\mathbb{G}_h}^2 \\ + 2 \left\| \Gamma_1^{\frac{1}{2}} \left(G_h \{u_h^n\}_{\frac{1}{4}} + \{\Phi_h^n\}_{\frac{1}{4}} \right) \right\|_{\mathbb{G}_h}^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

où l'énergie $\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}}$ est définie par (désolé cher lecteur...)

$$\mathcal{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_{c,h}^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{E}_{p,h}^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{E}_{\text{pml},h}^{n+\frac{1}{2}}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{c,h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\left(I_h - \frac{\Delta t^2}{4} A_h \right) q_h^{n+\frac{1}{2}}, q_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_h \\ \mathcal{E}_{p,h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \| G_h u_h^{n+\frac{1}{2}} + \Phi_h^{n+\frac{1}{2}} \|_{\mathbb{G}_h}^2 + \frac{1}{2} \| \Gamma_1 (G_h \psi_h^{n+\frac{1}{2}} + \Phi_h^{n+\frac{1}{2}}) \|_{\mathbb{G}_h}^2 \\ \mathcal{E}_{\text{pml},h}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t^2}{8} \left(\| \Gamma_1 \frac{\Lambda_h^{n+1} - \Lambda_h^n}{\Delta t} \|_{\mathbb{G}_h}^2 + \| 2\Gamma_1 \frac{\Lambda_h^{n+1} - \Lambda_h^n}{\Delta t} + \Gamma_1^2 \Lambda_h^{n+\frac{1}{2}} \|_{\mathbb{G}_h}^2 \right), \end{cases}$$

où la notation $n + \frac{1}{2}$ pour les inconnues représente la demi-somme des itérés $n + 1$ et n , et où

$$\begin{cases} q_h^n = v_h^n + (\text{tr}\Gamma_1) u_h^n + (\text{tr}\Gamma_3) \psi_h^n + (\det \Gamma_1) \Psi_h^n, \\ \frac{\Psi_h^{n+1} - \Psi_h^n}{\Delta t} = \psi_h^{n+\frac{1}{2}} \\ v_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \\ \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^n}{\Delta t} = \Phi_h^{n+\frac{1}{2}}, \\ \Lambda_h^n = \nabla_h \psi_h^n + \Phi_h^n. \end{cases}$$

Malgré la complexité de l'expression de l'énergie on s'aperçoit que seule l'énergie partielle $\mathcal{E}_c^{n+\frac{1}{2}}$ est éventuellement négative si une condition de stabilité n'est pas respectée. On en déduit la condition de stabilité pour le système (5.27),

$$\Delta t^2 \leq \frac{4}{\rho_h},$$

où ρ_h est le rayon spectral de A_h . Cette condition est identique à la condition de stabilité pour le schéma saute-mouton explicite classique! Cette relation d'énergie à pu être confirmé numériquement dans les expériences numériques proposés dans [SI26]. Toujours dans ce même article nous avons également testé l'extension du schéma (5.27) au cas où les coefficients d'absorptions varient suivant la figure 5.4. Dans ce cas, qui correspond au cadre normal de l'utilisation des PML, voir Figure 5.5, la relation d'énergie (5.28) n'est plus valable comme l'atteste la figure 5.6. Cependant le schéma est stable en temps long.

L'extension de l'analyse de stabilité par énergie au cas où les coefficients d'absorptions varient est une perspective. Cependant, beaucoup d'effort ont déjà été entrepris dans cette direction, sans résultat! Le problème reste entièrement ouvert et nécessite sûrement un changement radical de technique pour être résolu.

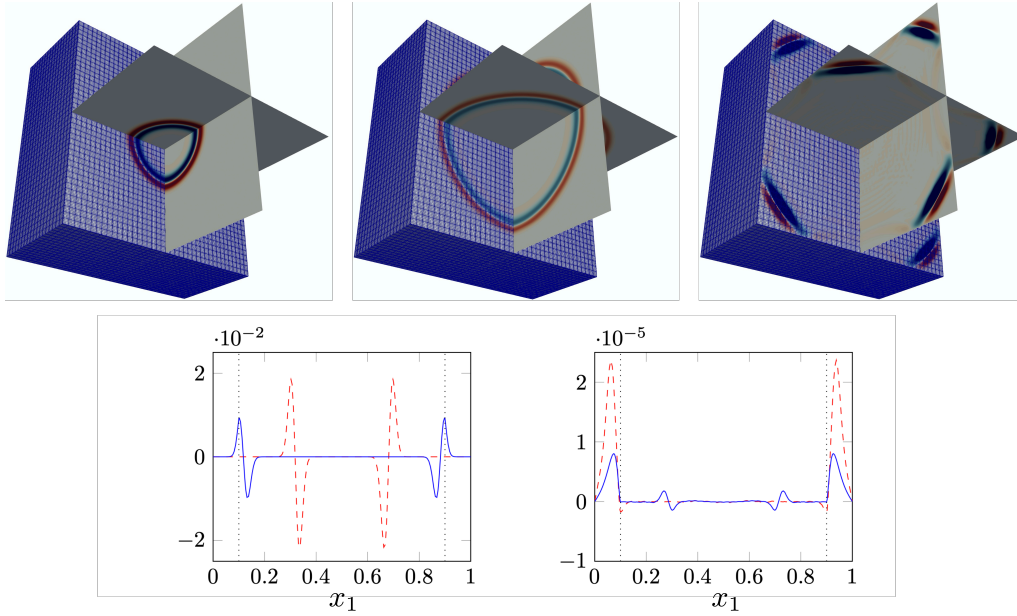


FIGURE 5.5 – Instantanés de la solution pour une simulation où des couches parfaitement adaptées entourent un cube de côté 0.8 et où des conditions de Dirichlet sont utilisées aux bords du domaine. Les schémas du bas représentent la solution le long de l'axe e_1 à différents instants ($t = 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8).

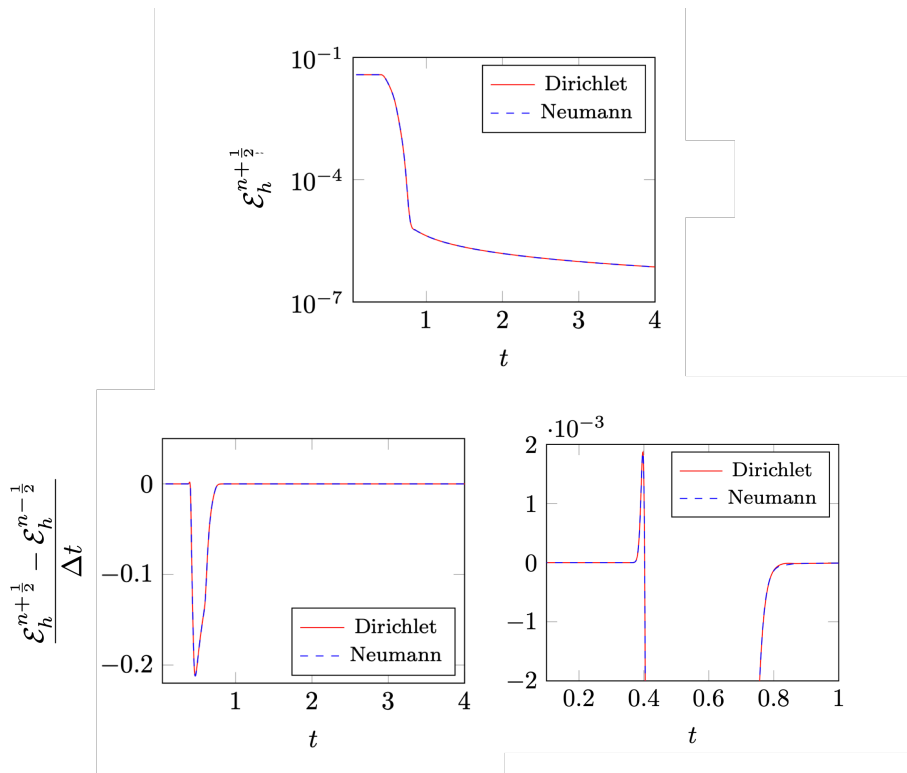


FIGURE 5.6 – En haut : énergie en fonction du temps pour la simulation représentée Figure 5.5 avec condition de Dirichlet ou de Neumann aux bords. En bas : les deux figures illustrent à des échelles différentes la variation de l'énergie. On observe que pour les deux types de conditions aux bords l'énergie est globalement décroissante, sauf à l'instant où l'onde traverse la frontière du domaine. A cet instant, on observe une très légère croissance de l'énergie!

CHAPITRE 6

Conclusion et Perspectives générales

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont essentiellement de deux natures : d'une part l'analyse asymptotique de problèmes d'équations d'ondes impliquant un petit paramètre d'autre part la question de la discrétisation en temps de ces mêmes problèmes. Pour chacun de ces thèmes (ce qui suit est en fait une remarque assez générale), des perspectives s'offrent soit en approfondissant le sujet soit en l'élargissant.

En particulier, en ce qui concerne l'analyse asymptotique je rappelle que les perspectives identifiées Section 3.4 sont, d'une part, un approfondissement du sujet sur les thèmes suivant :

- Étude de correcteurs d'ordre supérieur ;
- Construction de correcteurs d'effet de couche limite ;
- Construction de modèles effectifs abstraits.

D'autre part, toujours Section 3.4, différents axes d'ouverture sont proposés :

- Applications à l'homogénéisation périodique ;
- Problèmes avec forte dissipation, par exemple, pour capter des phénomènes de type effets de peau en électromagnétisme ;
- Problèmes multi-échelles (typiquement l'étude de la propagation d'ondes dans des plaques minces incompressibles).

S'agissant des possibles extensions du cadre abstrait, on peut également mentionner la prise en compte de nouveaux modèles de type parabolique-hyperbolique couplés comme rencontrés en poro-mécanique.

Concernant l'étude de discrétisation en temps des problèmes double-échelles, comme déjà mentionné, une perspective importante est l'analyse uniforme de convergence espace-temps des schémas proposés Chapitre 4.1. Les travaux préliminaires effectués dans la thèse [TH4] montrent que l'étude est considérablement plus compliqués que dans le cas où on ne s'intéresse pas à construire des résultats uniformes, notamment, il est raisonnable de penser que des résultats uniformes de convergence pourront être obtenus uniquement si la solution approchée est proche d'un régime asymptotique, ce qui doit se faire sous conditions assez strictes sur les données du problème. Concernant l'écriture de nouveaux schémas, je n'ai pas identifié, à ce jour, d'autre variante du schéma saute-mouton pour (les problèmes linéaires) que celle présentée qui pourraient avoir un intérêt fort. On pourrait tout de même noter l'utilisation des schémas saute-mouton stabilisés de la section 4.2.2 à l'ordre élevé (voir [50, 34] et [SI1]) pour les problèmes doubles-échelles.

Je conclus en rappelant que l'ensemble de mes travaux ne se résume pas aux deux grandes thématiques mentionnées. Notamment une part importante de mon activité de ces dernières années est consacrée à l'étude de problèmes directs et inverses pour l'élastographie transitoire. Ce sujet appliqué se trouve être à cheval sur plusieurs thématiques plus théoriques ou numériques. Pour le modèle direct, dans le cadre de la thèse [TH10] nous nous intéressons à la propagation d'onde de cisaillement dans la cornée, c'est à dire, à la propagation d'onde dans un milieu mince, quasi-incompressible et pré-contraint. Pour le problème inverse, dans la thèse [TH8] nous nous intéressons à la reconstruction de termes sources d'équation d'ondes lorsque la solution est mesurée sur une partie du domaine. Dans ces deux cas, les travaux ont été motivés par les différentes applications médicales. Donc, outre les perspectives académiques assez claires, d'autres perspectives plus appliquées (dans un contexte médical) sont déjà identifiées (je suis porteur du projet ANR ElastoHeart jusqu'en 2025) et je ne doute pas que d'autres seront identifiées dans les années à venir.

Bibliographie de l'auteur (publiées et soumises)

- [SI1] S. Imperiale. *Modélisation mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques*. PhD thesis, Ecole doctorale de Paris-Dauphine, 2012. Encadré par P. Joly et G. Cohen.
- [SI2] Sébastien Imperiale and Patrick Joly. Mathematical and numerical modelling of piezoelectric sensors. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pages 1–35, 2012. <https://hal.inria.fr/hal-00869631>.
- [SI3] Juliette Chabassier and Sébastien Imperiale. Stability and dispersion analysis of improved time discretization for simply supported prestressed Timoshenko systems. Application to the stiff piano string. *Wave Motion*, pages 1–25, 2012. <https://hal.inria.fr/hal-00757096>.
- [SI4] Aliénor Burel, Sébastien Imperiale, and Patrick Joly. Solving the Homogeneous Isotropic Linear Elastodynamics Equations Using Potentials and Finite Elements. The Case of the Rigid Boundary Condition. pages 1–8, 2012. <https://hal.inria.fr/hal-00717160>.
- [SI5] Sébastien Imperiale and Patrick Joly. Error estimates for 1D asymptotic models in coaxial cables with non-homogeneous cross-section. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, pages 1–18, 2012. <https://hal.inria.fr/hal-00875808v2>.
- [SI6] Gary Cohen and Sébastien Imperiale. Perfectly Matched Layer with Mixed Spectral Elements for the Propagation of Linearized Water Waves. *Communications in Computational Physics*, pages 1–18, 2012. <https://hal.inria.fr/hal-00869627>.
- [SI7] Edouard Demaldent and Sébastien Imperiale. Perfectly matched transmission problem with absorbing layers : application to anisotropic acoustics in convex polygonal domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 1–23, 2013. <https://hal.inria.fr/hal-00875814v2>.
- [SI8] Sébastien Imperiale and Patrick Joly. Mathematical modeling of electromagnetic wave propagation in heterogeneous lossy coaxial cables with variable cross section. *Applied Numerical Mathematics*, pages 1–20, 2013. <https://hal.inria.fr/hal-00875811>.
- [SI9] Juliette Chabassier and Sébastien Imperiale. Introduction and study of fourth order theta schemes for linear wave equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pages 1–19, 2013. <https://hal.inria.fr/hal-00873048>.
- [SI10] Cedric Bellis and Sébastien Imperiale. Dynamical 1D models of passive piezoelectric sensors. *Mathematics and Mechanics of Solids*, pages 1–26, 2013. <https://hal.inria.fr/hal-00875813>.
- [SI11] Cedric Bellis and Sébastien Imperiale. Reciprocity identities for quasi-static piezoelectric transducer models : Application to cavity identification using iterated excitations and a topological sensitivity approach. *Wave Motion*, pages 1–21, 2014. <https://hal.inria.fr/hal-00875812>.

- [SI12] Geoffrey Beck, Sebastien Imperiale, and Patrick Joly. Mathematical modelling of multi conductor cables. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, pages 1–26, 2014. <https://hal.inria.fr/hal-01090481>.
- [SI13] Guillaume Bal, Cédric Bellis, Sébastien Imperiale, and François Monard. Reconstruction of constitutive parameters in isotropic linear elasticity from noisy full-field measurements. *Inverse Problems*, pages 1–22, 2014. <https://hal.inria.fr/hal-01090474>.
- [SI14] Juliette Chabassier and Sébastien Imperiale. Fourth order energy-preserving locally implicit time discretization for linear wave equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 1–30, 2015. <https://hal.inria.fr/hal-01222072>.
- [SI15] Guillaume Bal and Sébastien Imperiale. Displacement Reconstructions in Ultrasound Elastography. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, pages 1–22, 2015. <https://hal.inria.fr/hal-01188761>.
- [SI16] Andreas Hüppe, Gary Cohen, Sebastien Imperiale, and Manfred Kaltenbacher. Construction and analysis of an adapted spectral finite element method to convective acoustic equations. *Communications in Computational Physics*, pages 1–22, 2016. <https://hal.inria.fr/hal-01363149>.
- [SI17] Juliette Chabassier and Sebastien Imperiale. Space/Time convergence analysis of a class of conservative schemes for linear wave equations. *Comptes Rendus Mathématique*, pages 1–8, 2017. <https://hal.inria.fr/hal-01421882>.
- [SI18] Annabelle Collin and Sébastien Imperiale. Mathematical analysis and 2-scale convergence of a heterogeneous microscopic bidomain model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pages 1–57, 2018. <https://hal.inria.fr/hal-01759914>.
- [SI19] Federica Caforio and Sébastien Imperiale. A conservative penalisation strategy for the semi-implicit time discretisation of incompressible elastodynamics equation. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, pages 1–27, 2018. <https://hal.inria.fr/hal-01907746v2>.
- [SI20] Jorge Albella Martínez, Sébastien Imperiale, Patrick Joly, and Jerónimo Rodríguez. Solving 2D linear isotropic elastodynamics by means of scalar potentials : a new challenge for finite elements. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–41, 2018. <https://hal.inria.fr/hal-01803536>.
- [SI21] Jorge Albella Martínez, Sébastien Imperiale, Patrick Joly, and Jerónimo Rodríguez. Numerical Analysis of a Method for Solving 2D Linear Isotropic Elastodynamics with Free Boundary Condition using Potentials and Finite Elements. *Mathematics of Computation*, pages 1–48, 2019. <https://hal.inria.fr/hal-02345808>.
- [SI22] Sébastien Imperiale, Philippe Moireau, and A Tonnoir. Analysis of an observer strategy for initial state reconstruction of wave-like systems in unbounded domains. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, pages 1–50, 2019. <https://hal.inria.fr/hal-01898440v3>.
- [SI23] Annabelle Collin, Sébastien Imperiale, Philippe Moireau, Jean-Frédéric Gerbeau, and Dominique Chapelle. Apprehending the effects of mechanical deformations in cardiac electrophysiology - An homogenization approach. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pages 1–41, 2019. <https://hal.inria.fr/hal-02267941>.
- [SI24] Jorge Albella Martínez, Hachmi Ben Dhia, Sébastien Imperiale, and Jerónimo Rodríguez. Mathematical and numerical study of transient wave scattering by obstacles with the Arlequin Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 1–33, 2019. <https://hal.inria.fr/hal-01898420>.

- [SI25] Federica Caforio and Sébastien Imperiale. High-order discrete fourier transform for the solution of the Poisson equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, pages 1–25, 2019. <https://hal.inria.fr/hal-01914257v2>.
- [SI26] Daniel H. Baffet, Marcus J. Grote, Sébastien Imperiale, and Maryna Kachanovska. Energy Decay and Stability of a Perfectly Matched Layer For the Wave Equation. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–34, 2019. <https://hal.inria.fr/hal-01865484v2>.
- [SI27] Geoffrey Beck, Sébastien Imperiale, and Patrick · Joly. Asymptotic modelling of Skin-effects in coaxial cables. *Springer Nature : Partial Differential Equations and Applications*, pages 1–34, 2020.
- [SI28] Federica Caforio and Sébastien Imperiale. Mathematical modelling of Acoustic Radiation Force in transient shear wave elastography in the heart. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pages 1–32, 2020. <https://hal.inria.fr/hal-01992069v3>.
- [SI29] Juliette Chabassier, Julien Diaz, and Sébastien Imperiale. Construction and analysis of fourth order, energy consistent, family of explicit time discretizations for dissipative linear wave equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pages 1–32, 2020. <https://hal.inria.fr/hal-01894238v2>.
- [SI30] F Caforio and Sébastien Imperiale. Mathematical analysis of a penalization strategy for incompressible elastodynamics. *Asymptotic Analysis*, pages 1–31, 2020. <https://hal.inria.fr/hal-02389286v2>.
- [SI31] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Marie-Odile Bristeau, Edwige Godlewski, Sébastien Imperiale, Anne Mangeney, and Jacques Sainte-Marie. Pseudo-compressibility, dispersive model and acoustic waves in shallow water flows. *Recent Advances in Numerical Methods for Hyperbolic PDE Systems*, pages 1–42, 2020. <https://hal.inria.fr/hal-02493518v3>.
- [SI32] Juliette Chabassier and Sébastien Imperiale. Construction and convergence analysis of conservative second order local time discretisation for linear wave equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, pages 1–43, 2021. <https://hal.inria.fr/hal-01894357v4>.
- [SI33] Jessica Manganotti, Federica Caforio, François Kimmig, Philippe Moireau, and Sébastien Imperiale. Coupling reduced-order blood flow and cardiac models through energy-consistent strategies : modeling and discretization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 8, September 2021.
- [SI34] Sébastien Imperiale. Asymptotic analysis of abstract two-scale wave propagation problems. *Preprint*, pages 1–36, 2021. <https://hal.inria.fr/hal-03306856>.
- [SI35] Akram Beni Hamad, Geoffrey Beck, Sébastien Imperiale, and Patrick Joly. An efficient numerical method for time domain electromagnetic wave propagation in co-axial cables. *Computational Methods in Applied Mathematics*, pages 1–29, 2022. <https://hal.inria.fr/hal-03408400v2>.

Thèses Co-encadrées (soutenues et en cours)

- [TH1] G. Beck. *Modélisation et étude mathématique de réseaux de câbles électriques*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, Ecole doctorale Jacques Hadamard, 2016. Co-encadré avec P. Joly. <http://www.theses.fr/2016SACLX006>.
- [TH2] F. Caforio. *Mathematical modelling and numerical simulation of elastic wave propagation in soft tissues with application to cardiac elastography*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, Ecole doctorale Jacques Hadamard, 2019. Co-encadré avec D. Chapelle. <https://www.theses.fr/2019SACLX001>.
- [TH3] J. Albella Martínez. *Advanced numerical methods for wave propagation problems : The Arlequin method Potential formulation for elastodynamics*. PhD thesis, Universidade de Santiago de Compostela, 2020. Co-encadré avec J. Rodríguez. <https://minerva.usc.es/xmlui/handle/10347/23280>.
- [TH4] H. Methenni. *Modélisation mathématique et méthode numérique pour la simulation du contrôle santé intégré par ultrasons de plaques composites stratifiées*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, Ecole doctorale Jacques Hadamard, 2021. Co-encadré avec S. Fliss et A. Imperiale. <http://www.theses.fr/2021IPPAE002>.
- [TH5] A. Beni Hamad. *Modélisation et simulation numérique de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les câbles coaxiaux*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, Ecole doctorale Jacques Hadamard, Started in 2019. Co-encadré avec P. Joly.
- [TH6] J. Manganotti. *Model de circulation cardiaque préservant l'énergie : formulation, reduction, couplage, inversion, et discrétisation*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, Started in 2019. Co-encadré avec P. Moireau.
- [TH7] A. Dalmora. *Modélisation et estimation par assimilation de données de la pré-contrainte dans le contrôle non-destructif*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, Started in 2020. Co-encadré avec P. Moireau et A. Imperiale.
- [TH8] T. Delaunay. *Observateurs adaptatifs pour les phénomènes propagatifs et discrétisations associées : formulation et analyse*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, Ecole doctorale Jacques Hadamard, Started in 2020. Co-encadré avec P. Moireau.
- [TH9] J. Dubois. *Water waves and acoustic waves in the oceans : from modelling to early warning systems*. PhD thesis, Ecole doctorale de Paris Centre, Started in 2020. Co-encadré avec J. Sainte-Marie.
- [TH10] G. Merlini. *Modélisation des mesures en élastographie transitoire dans la cornée*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, Started in 2021. Co-encadré avec J.-M. Allain.

Bibliographie

- [1] G Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*. Springer, January 2002.
- [2] G Allaire and M Amar. Boundary layer tails in periodic homogenization. *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations. European Series in Applied and Industrial Mathematics*, 4 :209–243 (electronic), 1999.
- [3] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [4] Grégoire Allaire, Agnes Lamacz-Keymling, and Jeffrey Rauch. Crime pays ; homogenized wave equations for long times. *Asymptotic Analysis*, page 1–42, May 2021.
- [5] Habib Ammari, Elie Bretin, Pierre Millien, and Laurent Seppecher. A direct linear inversion for discontinuous elastic parameters recovery from internal displacement information only. *Numerische Mathematik*, 147(1) :189–226, January 2021.
- [6] C. Amrouche and V. Girault. Decomposition of vector spaces and application to the stokes problem in arbitrary dimension. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 44(1) :109 – 140, 1994.
- [7] Guillaume Bal. Hybrid inverse problems and internal functionals. *Inverse problems and applications : inside out. II*, 60 :325–368, 2013.
- [8] Guillaume Bal. Hybrid inverse problems and redundant systems of partial differential equations. *Inverse problems and applications*, 619 :15–48, 2014.
- [9] E Bécache, S Fauqueux, and P Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188 :399–403, 2003.
- [10] Éliane Bécache, Sonia Fliss, Maryna Kachanovska, and Maria Kazakova. On a surprising instability result of Perfectly Matched Layers for Maxwell’s equations in 3D media with diagonal anisotropy. *Comptes Rendus. Mathématique*, 359(3) :249–256, 2021.
- [11] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, N. Chorfi, and Y. Maday. Inf-sup conditions for the mortar spectral element discretization of the stokes problem. *Numerische Mathematik*, 85(2) :257–281, April 2000.
- [12] A Bensoussan and JL Lions. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, 1978.
- [13] Daniele Boffi, Franco Brezzi, Michel Fortin, et al. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44. Springer, 2013.
- [14] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] J.C. Butcher. A history of runge-kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, 20(3) :247–260, 1996.

-
- [16] Constantin Carle, Marlis Hochbruck, and Andreas Sturm. On leapfrog-chebyshev schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(4) :2404–2433, January 2020.
- [17] Paul Cazeaux and Jan S. Hesthaven. Multiscale modelling of sound propagation through the lung parenchyma. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 48(1) :27–52, 2014.
- [18] D. Chapelle and Bathe K.-J. *The finite element analysis of shells - fundamentals*. Computational Fluid and Solid Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition, 2011.
- [19] Alexandre Joel Chorin. Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104) :745–762, 1968.
- [20] Alexandre Joel Chorin. On the convergence of discrete approximations to the Navier–Stokes equations. *Mathematics of computation*, 23(106) :341–353, 1969.
- [21] Philippe G. Ciarlet. *Plates and junctions in elastic multi-structures : an asymptotic analysis*. Recherches en mathématiques appliquées 14. Masson, Springer-Verlag, 1990.
- [22] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, Volume 2 : Theory of Plates*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier, Academic Press, 1997.
- [23] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. The periodic unfolding method in homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 40(4) :1585–1620, January 2008.
- [24] G Cohen. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Springer-Verlag, 2001.
- [25] H. Cohen. Wave propagation in elastic plates. *Journal of Elasticity*, 6, 07 1976.
- [26] P. Cohen, G. ; Grob. Mixed higher order spectral finite elements for reissner–mindlin equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29, 01 2007.
- [27] Monique Dauge, Ivica Djurdjevic, and Andreas Rössle. Full asymptotic expansions for thin elastic free plates. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 326(10) :1243–1248, 1998.
- [28] Monique Dauge, Erwan Faou, and Zohar Yosibash. *Plates and Shells : Asymptotic Expansions and Hierarchic Models*, chapter 8. American Cancer Society, 2004.
- [29] Monique Dauge and Isabelle Gruais. Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate, i. optimal error estimates. *Asymptotic Analysis*, 13(2) :167–197, 1996.
- [30] J Diaz and M Grote. Energy conserving explicit local time-stepping for second-order wave equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(3) :1985–2014, 2009.
- [31] J Diaz and P Joly. A time domain analysis of PML models in acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(29-32) :3820–3853, 2006.
- [32] M. Durufle, P. Grob, and P. Joly. Influence of Gauss and Gauss-Lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 25(3) :526–551, 2009.
- [33] Lions J.-L. Duvaut G. *Les inequations en mecanique et physique*. Dunod edition, 1972.
- [34] JC Gilbert and P Joly. Higher order time stepping for second order hyperbolic problems and optimal CFL conditions. *Partial Differential Equations*, 16 :67–93, 2008.
- [35] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. Finite element approximation of the Navier–Stokes equations. Technical report, Springer-Verlag, 1979.
- [36] Marcus J. Grote, Simon Michel, and Stefan A. Sauter. Stabilized leapfrog based local time-stepping method for the wave equation. *Mathematics of Computation*, June 2021.
-

- [37] Marcus J. Grote and Imbo Sim. Efficient pml for the wave equation, 2010.
- [38] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. On the approximation of the unsteady Navier–Stokes equations by finite element projection methods. *Numerische Mathematik*, 80(2) :207–238, Aug 1998.
- [39] Jean-Luc Guermond, Peter Mineev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(44-47) :6011–6045, 2006.
- [40] Jean-Luc Guermond and L Quartapelle. On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26(9) :1039–1053, 1998.
- [41] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Gerhard Wanner. *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations ; 2nd ed.* Springer, Dordrecht, 2006.
- [42] Patrice Hauret and Patrick Le Tallec. A discontinuous stabilized mortar method for general 3d elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49-52) :4881–4900, November 2007.
- [43] John G Heywood and Rolf Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. i. regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(2) :275–311, 1982.
- [44] John G Heywood and Rolf Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem, part ii : Stability of solutions and error estimates uniform in time. *SIAM journal on numerical analysis*, 23(4) :750–777, 1986.
- [45] John G Heywood and Rolf Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem iii. smoothing property and higher order error estimates for spatial discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(3) :489–512, 1988.
- [46] John G Heywood and Rolf Rannacher. Finite-element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. part iv : Error analysis for second-order time discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(2) :353–384, 1990.
- [47] A. Hurd, A. E. ; Robinson. On flexural wave propagation in non-homogeneous elastic plates. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16, 09 1968.
- [48] T Ikeda. Fundamentals of piezoelectricity. *Oxford science publications*, 1990.
- [49] P Joly. Variational Methods for Time Dependant Wave Propagation. In M Ainsworth, P Davies, D Duncan, P Martin, and B Rynne, editors, *Topics in computational wave propagation : Direct and Inverse Problems. Computational Methods in Wave Propagation*, pages 201–264. Springer Verlag, October 2003.
- [50] P Joly and J Rodríguez. Optimized higher order time discretization of second order hyperbolic problems : Construction and numerical study. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(6) :1953–1961, July 2010.
- [51] M Kaltenbacher. Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators. *Springer*, January 2004.
- [52] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [53] Dimitri Komatitsch and Jeroen Tromp. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139(3) :806–822, 12 1999.

-
- [54] S. Towfighi; T. Kundu. Elastic wave propagation in anisotropic spherical curved plates. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 2003.
- [55] Y Maday and C Mavriplis. Nonconforming mortar element methods : Application to spectral discretizations. *Domain Decomposition Methods*, 1989.
- [56] Y. Maday and A. Patera. Spectral element methods for the incompressible navier-stokes equations. 1989.
- [57] Philippe Moireau. *Observers for data assimilation - Applications to cardiac modeling*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Saclay ; Université Paris Sud - Paris XI, November 2016.
- [58] P Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford science publications, 2003.
- [59] Nitsche, J. A. On korn's second inequality. *RAIRO. Anal. numér.*, 15(3) :237–248, 1981.
- [60] GR Shubin and JB Bell. A modified equation approach to constructing fourth-order methods for acoustic wave propagation. *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal on Scientific and Statistical Computing*, 8(2) :135–151, 1987.
- [61] P.Constance Yang; Charles H. Norris; Yehuda Stavsky. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2, 1966.
- [62] Luc Tartar. Nonlocal effects induced by homogenization. 1989.
- [63] Roger Temam. Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 98(4) :115–152, 1968.
- [64] Roger Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc., 2001.
- [65] Barbara I. Wohlmuth. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Springer Berlin Heidelberg, 2001.



ECOLE
DOCTORALE
DE MATHÉMATIQUES
HADAMARD

Titre : Méthodes mathématiques et numériques pour des problèmes de propagation d'ondes double-échelles

Mots clés : Analyse asymptotique, discrétisations temporelles, problème double-échelles, équations d'ondes

