Méthodes géométriques et numériques en contrôle optimal et problèmes de Zermelo sur les surfaces et révolution : applications

Boris Wembe

▶ **To cite this version:**

Boris Wembe. Méthodes géométriques et numériques en contrôle optimal et problèmes de Zermelo sur les surfaces et révolution : applications. Variables complexes [math.CV]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2021. Français. NNT : 2021TOU30126 . tel-03601394v2

HAL Id: tel-03601394

https://theses.hal.science/tel-03601394v2

Submitted on 8 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *09/11/2021* **par :**

Boris WEMBE

Méthodes Géométriques et Numériques en Contrôle Optimal et Problèmes de Zermelo sur les Surfaces de Révolution - Applications

---

JURY

Juliette Leblond	DR INRIA APICS, Sophia Antipolis	Présidente du jury
Piernicola Bettiol	Pr. Université Bretagne occidentale	Rapporteur
Emmanuel Trélat	Pr. Université Paris VI & CNRS	Rapporteur
Bernard Bonnard	Pr. INRIA, McTAO, Sophia Antipolis	Examinateur
Jean-Pierre Raymond	Pr. Université Paul Sabatier, Toulouse	Examinateur
Joseph Gergaud	Pr. INP-ENSEEIHT Toulouse	Directeur de thèse
Olivier Cots	MCF INP-ENSEEIHT Toulouse	Co-Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :
MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées
Unité de Recherche :
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (UMR 5505)
Directeur(s) de Thèse :
Olivier COTS et *Joseph GERGAUD*
Rapporteurs :
Piernicola BETTIOL, Monique CHYBA et *Emmanuel TRÉLAT*

Pour la Gloire de DIEU !!!
Et à mes deux mères :
B. V Marie et J. Sinze

Remerciements

Ce travail n'aurait pas été possible sans le secours et la grâce de DIEU à qui je veux avant tout rendre grâce et gloire. J'aimerai également témoigner ma reconnaissance à toutes ces personnes qui ont contribué à sa réalisation.

Je souhaite commencer par adresser mes remerciements les plus chaleureux à mes directeurs de thèse, Olivier Cots et Joseph Gergaud qui m'ont fait l'honneur de me faire confiance au moment de se lancer dans cette grande aventure. Soyez assuré de ma reconnaissance totale pour votre patience, votre disponibilité et votre enthousiasme permanent. Vous avez grandement contribué à développer mon envie de poursuivre dans cette voie, par votre générosité dans le suivi, dans l'encadrement et par les conseils que vous n'avez cessés de me prodiguer et pour plein d'autres raisons encore. J'aimerais également remercier Bernard Bonnard pour son humanité, son dynamisme et sa grande expérience dont j'ai pu profiter durant toutes ces années. Je te suis très reconnaissant Bernard, pour tes critiques avisées et ton extrême dynamisme qui pousse à l'effort. Je souhaite dire aussi un grand merci Brigitte. Merci pour l'accueil que Joseph et toi m'avez fait dès mon arrivée en France, pour toute votre amabilité et sympathie et pour tant de belles journées passées chez vous !

Je souhaite remercier Mr. Piernicola Béttiol, Mme. Monique Chyba et Mr. Emmanuel Trélat pour avoir accepté de rapporter ce travail en tant que spécialistes du contrôle optimal. Je leur sais gré de l'attention qu'ils ont portée à la lecture de ce manuscrit ainsi que des commentaires qu'ils ont formulés à ce propos. Je remercie de même Mme. Juliette Leblond ainsi que Mr. Jean-Pierre Raymond, pour avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Merci à tous les membres de l'équipe APO qui m'ont accueilli au sein de l'IRIT. Un grand merci à vous tous pour votre amabilité et pour tous vos conseils, pour les galettes, les cookies, les gâteaux de "L'APO cooking competition". Je veux en particulier remercier mes chères collègues de bureau pour les débats toujours contradictoires ! pour leurs emmerdements du quotidien ! pour les mille et une fois que j'ai dû dire non à vos propositions de déjeuner ! pour toutes les fois où vous m'avez débloqué d'une situation, pour votre sympathie et constante bonne humeur. Un grand merci à vous Bastien, Antoine, Antoine, Valentin, Sadok, Théo et sans oublier "Victor" c'était super de partager la F321 avec vous.

Je ne peux oublier les chères secrétaires de l'IRIT, Annabelle, Sylvie et toutes les autres pour leur extrême gentillesse et leur constante bonne humeur. Merci aux doctorants et stagiaires des troisième et quatrième étages pour les bons moments passés en votre compagnie et pour le fameux "séminaire des doctorants IRIT-N7" qui aura provoqué à chaque fois le confinement ! Merci également à toute l'équipe de foot du mardi.

Un grand merci à Alain Tchana qui m'a permis de découvrir le laboratoire IRIT ainsi que l'équipe APO. Merci Alain pour ton dynamisme et tes conseils. Merci à tous les baos du Camer, pour toutes les aventures, "l'anniversaire surprise de la miss", "le lazer game", "le carting car", "l'omelette de Patrick Lavazier" ! tous les calcios" et bien d'autres choses encore. Merci à vous Kevin, Djob, Patrick, Peterson, Stella, Firmin, Armel, Josiane et tous ceux du groupe "Raod to docta" c'était super ! J'aimerais aussi adresser mes remerciements à ces aînés qui n'ont pas manqué de me soutenir, merci à vous Boris, Brice, Claude et toute l'équipe "Bonass FC".

Mes remerciements s'adressent aussi à mes professeurs du département de mathématique de l'université de Yaoundé I, eux qui m'ont initié au monde des mathématiques. Un merci particulier à Gilbert Mbianda, Célestin Nkuimi, Hermann Douanla, Marcel Dossa. Je n'oublie pas tous mes camarades de promotion depuis la L1 à l'amphie 1001, jusqu'en M2 en salle S110. Merci à vous les baos !

Ne dit-on pas en Afrique, "La famille d'abord". Ma plus grande reconnaissance est pour ma famille, ma famille biologique ainsi que tous mes frères et sœurs dans la Foi. Mouma ma mère tu es la meilleure ! Et vous tous mes frères et sœurs que j'aime autant les uns que les autres. Je rends grâce à DIEU de vous avoir, vous êtes les meilleurs ! ! ! Aussi tous mes frères et toutes mes sœurs dans la Foi en JÉSUS-CHRIST du Cameroun, de France, du Portugal comme d'ailleurs, je n'oublie aucune des peines, aucun des sacrifices et des soucis que vous vous êtes fait pour moi, merci à chacun de vous. Mon dernier mot est à l'adresse de Kelly Vanessa. Merci pour ton soutient, ton sourire et pour tous les soucis que tu t'es fait et te fait pour moi.

Résumé : Ce travail étudie les problèmes de Zermelo sur les surfaces de révolution du point de vue du contrôle optimal dans le cadre hamiltonien en combinant des méthodes dites géométriques et numériques. Il est motivé par plusieurs cas d'études notamment *l'exemple historique de Carathéodory-Zermelo* qui est l'un des problèmes fondateurs du calcul des variations et une *forme normale* intéressante pour l'analyse microlocale du problème dans le cas général, ainsi que *le problème dit "du vortex"* qui est une application récente provenant de l'hydrodynamique et qui décrit l'évolution d'une particule passive autour d'un point vortex. Le problème de Zermelo ainsi considéré est déterminé par un triplet (M, g, F_0) où M est une variété de dimension 2 avec des coordonnées normales $q = (r, \theta)$, g une métrique riemannienne sur M et F_0 un champ de vecteur définissant le *courant* (ou le vent). Du point de vue du contrôle optimal, ce problème correspond à un problème de transfert en temps minimal entre deux points q_0 et q_1 pour un système de contrôle affine de la forme : $\dot{q} = F_0(q) + u_1\, F_1(q) + u_2\, F_2(q)$, $\|u\| \leq 1$ où $q(t) \in M$, $u = (u_1, u_2)$ est le contrôle et où les champs F_1, F_2 forment un repère orthonormé associé à la métrique g. Ce type de problème apparaît déjà en *géométrie riemannienne* avec $F_0(q) \equiv 0$ et en *géométrie finslérienne* dans *le cas dit faible* où la norme du courant (associé à la métrique g) est < 1. L'objectif principal de cette étude est de construire une *synthèse optimale dans un voisinage adapté* R qui est un rectangle contenant le point initial q_0. Cette objectif se résume dans l'étude de la régularité et la description des lignes de (sous)-niveaux, correspondant aux *boules dites zerméliennes*, de la *fonction temps minimale* $V_{q_0}(q_1) \coloneqq \inf\{t_f \mid q(t_f, q_0) = q_1,$ où (q, u) est solution du problème$\}$. La principale difficulté de cette analyse réside dans l'existence de *directions anormales* dans le cas d'un courant fort (c'est-à-dire le cas où la norme du courant est > 1), celles-ci étant associées aux situations nouvelles telles que : la perte de contrôlabilité locale en q_0, la discontinuité de la fonction temps minimale, la déformation des petites *sphères et boules*, l'apparition de nouvelles branches dans le *lieu de coupure* (lieu où les trajectoires perdent leur optimalité), etc. Notre analyse est principalement basée sur deux points de vue. Le premier point de vue est le *point de vue de Carathéodory*, équivalent à la transformée de Goh en contrôle. Il permet de réécrire le problème comme un système de contrôle affine et scalaire en dimension 3 et d'utiliser des outils géométriques de ce cadre pour calculer les *lieux conjugué et de coupure* en lien avec l'optimalité locale et globale des solutions. Le second point de vue est *le point de vue système mécanique* qui permet d'écrire le problème à l'aide d'un *potentiel généralisé* et d'utiliser la *relation de Clairaut* pour intégrer le flot et classifier les trajectoires suivant une méthode de classification appelée GMR (generalized Morse-Reeb) qui généralise la classification de Morse-Reeb en système dynamique. Dans ce contexte, nous introduisons les concepts de feuilletage de Reeb, composante de Reeb, géodésique séparatrice qui sépare en différente classe le flot géodésique. Un accent particulier est ensuite mis sur l'étude du problème vortex qui peut être vue comme un modèle réduit du problème de Kepler, mais avec un courant orthoradial. Dans ce cas, on établit un résultat *d'existence de solution optimale* et on construit la synthèse du problème.

Mots clés : Contrôle optimal géométrique, problèmes de navigation de Zermelo sur les surfaces de révolution, géométrie riemannienne et finslérienne, courant faible/fort, géodésiques anormales, synthèse optimale, lieux conjugués et de coupure, classification de Morse-Reeb, problème un vortex, méthodes numériques en contrôle optimal.

Abstract : This work studies Zermelo problems on revolutions surfaces from the point of view of optimal control in the Hamiltonian framework by combining so-called geometrical and numerical methods. It is motivated by several case studies, in particular the *historical example of Carathéodory-Zermelo* which is one of the founding problems of the calculus of variations and an interesting *normal form* for the microlocal analysis of the global problem, as well as the so-called *"vortex problem"* which is a recent application from hydrodynamics and which describes the evolution of a passive particle around a vortex point. The considered Zermelo problem is determined by a triplet (M, g, F_0) where M is a 2D manifold with normal coordinates $q = (r, \theta)$, g is a Riemannian metric on M and F_0 is a vector field defining the *current* (or the wind). From the optimal control view point, this problem corresponds to a minimum time transfer problem between two points q_0 and q_1 for an affine control system of the form : $\dot{q}(t) = F_0(q) + u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q)$, $\|u\| \leq 1$ where $q(t) \in M$, $u = (u_1, u_2)$ is the control and where the fields F_1, F_2 form an orthonormal reference frame associated to the metric g. This kind of problem already appears in Riemannian geometry with $F_0(q) \equiv 0$ and in Finslerian geometry in the so-called weak case where the norm of the current (associated to the metric g) is < 1. The main goal of this study is to construct an *optimal synthesis in a suitable neighborhood* R which is a rectangle containing the initial point q_0. This objective is summarized in the study of the regularity and the description of the (sub)-level lines, corresponding to the so-called Zermelian balls, of the *minimal time value function* $V_{q_0}(q_1) := \inf \{t_f \mid q(t_f, q_0) = q_1,$ where (q, u) is solution of the problem$\}$. The main difficulty of this analysis lies in the existence of *abnormal directions* in the strong current case (i.e. the case where the norm of the current is > 1), which are associated to new situations such as : the loss of local controllability in q_0, the discontinuity of the minimal time value function, the deformation of *small spheres and balls*, the apparition of new branches in the *cut locus* (set of points where trajectories lose their optimality), etc. Our analysis is essentially based on two points of view. The first point of view is the Caratheodory viewpoint, equivalent to the Goh transform in control. It allows us to rewrite the problem as an affine and scalar control system in dimension 3 and to use geometric tools of this framework in order to compute the *conjugate and cut loci* in relation with the local and global optimality of the solutions. The second point of view is the mechanical system viewpoint which allows to write the problem using a generalized potential and to use the Clairaut relation to integrate the flow and to classify the trajectories according to a classification method called GMR (generalized Morse-Reeb) which generalizes the Morse-Reeb classification in dynamical system. In this context, we introduce the concepts of Reeb foliation, Reeb component, separatrix geodesic which separated the geodesic flow into different classes. A special attention is given to the study of the vortex problem which can be seen as a toy model of the Kepler problem, but with an orthoradial current. In this case, we provide a result for the existence of an optimal solution and we construct the synthesis of the problem.

Keys words : Geometric optimal control, 2D-Zermelo navigation problems, Riemannian and Finnerian geometry, weak/strong current, abnormal geodesics, optimal synthesis, conjugate and cut loci, Morse-Reeb classification, single vortex problem, numerical methods in optimal control.

Table des matières

Table des matières **vi**

Introduction générale **1**

I Synthèse des résultats principaux **6**

1 Paramétrisation et classification des extrémales des problèmes de Zermelo de révolution **7**
1.1 Introduction aux problèmes de Zermelo de révolution 7
1.1.1 Définition du problème 7
1.1.2 Liste de quelques cas d'application motivant l'étude 8
1.1.3 Quelques rappels et définitions 9
1.2 Principe du Maximum de Pontryagin et paramétrisation des extrémales 10
1.2.1 Principe du maximum de Pontryagin 10
1.2.2 Paramétrisation du flot extrémal dans les cas faible et fort 12
1.3 Point de vue Carathéodory-Zermelo-Goh 14
1.3.1 Transformée de Goh en contrôle optimal 14
1.3.2 Cas de la dimension 3 appliqué au problème de Zermelo 15
1.4 Point de vue système mécanique dans le cas de révolution 16
1.4.1 Potentiel généralisé et système réduit 16
1.4.2 Classification de Morse-Reeb généralisée 17
1.5 Conclusion 19

2 Rôle des anormales dans la synthèse optimale, points cusp et de séparation non isochrone **21**
2.1 Rappel du cadre 21
2.2 Paramétrisation du lieu conjugué 22
2.3 Caractérisation du lieu de coupure 24
2.3.1 Caractérisation dans les cas riemannien et finslérien 24
2.3.2 Point cusp et point de séparation non isochrone 25
2.3.3 Régularité de la fonction valeur et lieu de coupure dans le cas fort 27
2.3.4 Éléments de la théorie des singularités et points cusps le long des anormales 28
2.4 Synthèse optimale en temps petits et longs 30
2.4.1 Forme éventail des sphères et boules en temps petits 30
2.4.2 Fronts d'ondes versus sphères et boules en temps quelconque 32
2.5 Conclusion 33

3 Application à l'exemple historique et au cas Kepler moyenné **35**
3.1 Exemple historique de Carathéodory-Zermelo [21] . . . 35
3.1.1 Paramétrisation des extrémales et intégration du flot . . . 35
3.1.2 Synthèse optimale et régularité de la fonction valeur . . . 36
3.1.3 Fronts d'ondes versus sphères et boules . . . 38
3.2 Cas Kepler moyenné . . . 39
3.2.1 Cas riemannien [15] . . . 39
3.2.2 Passage au cas Zermelo avec un courant constant . . . 41
3.3 Conclusion . . . 44

4 Application au problème du vortex **47**
4.1 Modèle et résultat d'existence . . . 47
4.1.1 Description du modèle . . . 47
4.1.2 Résultat d'existence de solutions dans le cas du vortex généralisé . . . 48
4.2 Classification des extrémales . . . 50
4.2.1 Cas du vortex simple [22] . . . 50
4.2.2 Cas du vortex généralisé [23] . . . 51
4.3 Synthèse optimale du problème vortex [22] . . . 55
4.3.1 Boules et sphères dans le cas faible . . . 55
4.3.2 Boules et sphères dans le cas fort . . . 57
4.4 Ouverture au cas plusieurs vortex . . . 58
4.5 Conclusion . . . 59

5 Méthodes numériques, logiciel HamPath et autres applications **61**
5.1 Généralités . . . 61
5.2 Intégration numérique . . . 62
5.3 Equations variationnelles . . . 64
5.4 Méthodes de tir simple . . . 65
5.5 Méthodes homotopiques . . . 67
5.6 Conclusion . . . 68

Conclusion et perspectives **69**

II Contributions **72**

6 A Zermelo navigation problem with a vortex singularity **73**
6.1 Introduction . . . 74
6.2 Existence results and Pontryagin Maximum Principle . . . 76
6.2.1 Existence of time minimal solutions . . . 76
6.2.2 Classification of the extremal curves . . . 78
6.2.3 C^1-second order necessary conditions in the regular case . . . 81
6.2.4 The Zermelo-Carathéodory-Goh point of view . . . 82
6.2.5 Influence of the circulation . . . 84
6.2.6 Numerical results . . . 85
6.3 Micro-local analysis and properties of the value function . . . 88
6.3.1 Poincaré compactification on S^3 of the extremal dynamics and integrability results . . . 88
6.3.2 Micro-local analysis of the extremal solutions . . . 89
6.3.3 Reeb foliations . . . 94
6.3.4 Symmetries of the extremal curves . . . 98
6.3.5 Properties of the value function and its level sets in the weak case . . . 99
6.4 Conclusion . . . 104

7 Abnormal Geodesics in 2D-Zermelo Navigation Problems in the Case of Revolution and the Fan Shape of the Small Time Balls 106
7.1 Introduction . . . 107
7.2 Maximum Principle and evaluation of the accessibility set in the regular geodesic case . . . 109
7.2.1 Maximum Principle . . . 109
7.2.2 Carathéodory-Zermelo-Goh transformation and accessibility set . . . 110
7.2.3 Small time balls and spheres in the strong current case . . . 112
7.3 The cusp singularity in the abnormal direction and regularity of the time minimal value function . . . 113
7.3.1 The geometric frame and integrability properties . . . 114
7.3.2 Computations in the historical example . . . 115
7.4 Conclusion . . . 117

8 Zermelo Navigation Problems on Surfaces of Revolution and Geometric Optimal Control 119
8.1 Introduction . . . 120
8.2 Preliminaries and list of motivating case studies . . . 124
8.2.1 Definitions and notations . . . 124
8.2.2 Case studies . . . 124
8.2.3 Generalities and the Maximum Principle . . . 125
8.3 Carathéodory-Zermelo-Goh transformation and local optimality . . . 127
8.3.1 Carathéodory-Zermelo-Goh transformation . . . 127
8.3.2 Extremity mapping and conjugate point in the regular case . . . 127
8.3.3 Geometric frame and integrability property . . . 130
8.3.4 Conclusion : models of conjugate points . . . 132
8.4 Mechanical system and generalized Morse-Reeb classification . . . 134
8.5 Case studies . . . 137
8.5.1 The Carathéodory-Zermelo historical example . . . 137
8.5.2 The Averaged Kepler case . . . 138
8.5.3 Complexity of the Hamiltonian Dynamics in the generalized vortex case . 144
8.5.4 Algorithm in the general case and the gluing process . . . 150
8.6 Conclusion . . . 151

9 Minimum energy control of passive tracers advection in point vortices flow 154
9.1 Introduction . . . 154
9.2 Vortex Dynamics and Statement of the Problem . . . 155
9.3 Case of one vortex . . . 156
9.3.1 Pontryagin maximum principle and shooting function . . . 156
9.3.2 Integration of the extremal solutions . . . 158
9.3.3 Numerical methods and results . . . 158
9.4 Cases of 2, 3 and 4 vortices . . . 159
9.4.1 Pontryagin maximum principle and shooting function . . . 159
9.4.2 Numerical results . . . 160
9.5 Conclusion . . . 160

10 Homotopic approach for turnpike and singularly perturbed optimal control problems 163
10.1 Introduction . . . 163
10.2 Turnpike and singularly perturbed control problems . . . 164
10.2.1 Turnpike optimal control problem . . . 164
10.2.2 Links between turnpike and singularly perturbed optimal control problem 165
10.2.3 Numerical methods for turnpike control problems . . . 166
10.2.4 Example of turnpike control problem and numerical results . . . 167

10.3 Generalization to singularly perturbed optimal control problems 168
10.3.1 Numerical method 168
10.3.2 Example and results 171
10.3.3 Conclusion and perspectives 171

Bibliographie **173**

Introduction générale

Contexte d'étude. Ce travail étudie les problèmes de Zermelo sur les surfaces de révolution du point de vue du contrôle optimal dans le cadre hamiltonien et combine les méthodes dites géométriques et numériques. Le problème de Zermelo a été introduit par Zermelo et Carathéodory [110, 36] et est l'un des problèmes fondateurs du calcul des variations. Dès son origine, le traitement a été fait dans un cadre très géométrique et novateur, ceci dû à Carathéodory. Notre étude suit cette approche, en complétant par des méthodes de la dynamique des systèmes hamiltoniens et des méthodes numériques du contrôle optimal dites indirectes. Ces méthodes numériques permettent notamment une assistance rapide pour analyser et représenter les solutions optimales (en calculant les points conjugués et de coupure en rapport avec l'optimalité locale/globale des solutions) pour ce type de problèmes, dont la dynamique est non linéaire, mais en dimension 2. Un autre outil important est la technique des singularités qui permet d'analyser les problèmes dans un cadre générique en utilisant le concept de forme normale et de traiter le problème des points conjugués et de coupure dans un cadre lagrangien et legendrien.

Le problème historique connu sous le nom de "problème de navigation de Zermelo" et posé par Zermelo peut se formuler comme suit (cf. [36]) : "Dans un plan sans limite où la distribution du vent est donnée par un champ vectoriel en fonction de la position et du temps, un navire se déplace à vitesse constante par rapport à la masse d'air environnante. Comment le navire doit-il être dirigé pour passer d'un point de départ à un objectif donné dans le temps le plus court ?" Dans ce problème, la surface de la mer est modélisée par le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et la distribution du vent (courant ou dérive) par un champ vectoriel noté $F_0(q) \in \mathbb{R}^2$ qu'on suppose, pour simplifier, autonome. De plus, on suppose que le navire peut être orienté dans toutes les directions du plan et que sa vitesse ne peut pas dépasser une constante $u_{\max}$ (qu'on fixe à $u_{\max} = 1$). La dynamique du problème s'écrit :

$$\dot{q}(t) = F_0(q(t)) + \sum_{i=1}^{2} u_i(t) F_i(q(t)) \tag{1}$$

où $q = (x, y)$ désigne la position du navire, $F_0(q)$ est la dérive représentant le courant et $F(q(t))u(t) = \sum_{i=1}^{2} u_i(t) F_i(q(t))$ représente l'action du contrôle. Ici F_1, F_2 sont les deux champs de vecteurs $F_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ et le contrôle est borné en norme par 1, c'est-à-dire $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1$. Dans le problème d'origine, le courant ne dépend que de la distance entre les deux rives. Il s'écrit sous la forme $F_0(q) = \mu(y)\frac{\partial}{\partial x}$, où $\mu(\cdot)$ est une fonction linéaire et orientée parallèlement à ces rives. Ce problème peut se formuler dans le cadre de la géométrie dite de Zermelo, qui se présente comme une généralisation de la géométrie riemannienne [10]. Dans ce contexte le problème est donc défini sur une variété riemannienne (M, g) où g est la métrique associée aux champs F_i, $i = 1, 2$ et le courant est un champ de vecteurs F_0 quelconque. On fixe localement un référentiel orthonormé $\{F_1, F_2\}$ pour la métrique g avec $\|u\| \leq 1$, les directions de contrôle étant données par $F(q)u = \sum_{i=1}^{2} u_i F_i(q)$ et donc $\|F(q)u\|_g \leq 1$. Le problème est alors

défini comme un problème de temps minimal en contrôle optimal donné par :

$$
\begin{aligned}
& t_f \mapsto \min \\
& \dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i\, F_i(q), \quad q(t) \in M, \quad u = (u_1, u_2), \quad \|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1 \\
& q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f.
\end{aligned}
$$

Cette formulation conduit à considérer sur la variété M deux cas différents. Le cas où le domaine est à *courant faible*, i.e $\|F_0(q)\|_g < 1$, et qui peut donc être compensé par le contrôle. Ce cadre est celui de la géométrie dite de Finsler (ou géométrie finslérienne), étudiée dans le cadre de la géométrie différentielle. Le second cas est celui d'un *courant fort* où $\|F_0(q)\|_g > 1$. C'est celui que Zermelo et Carathéodory considèrent dans le problème initial. Le cas intermédiaire de transition étant le cas dit *modéré* où $\|F_0(q)\|_g = 1$. Le cadre général étant le cas où en pratique le navire rencontre les différents domaines au cours de la traversée qu'on appelle géométrie de Zermelo (ou géométrie zermélienne). On introduit également, pour la suite, les terminologies :

- **cas Zermelo faible** : si le courant est faible au point initial, i.e $\|F_0(q_0)\|_g < 1$;
- **cas Zermelo fort** : si le courant est fort au point initial, i.e $\|F_0(q_0)\|_g > 1$;
- **cas Zermelo modéré** : dans le cas de transition $\|F_0(q_0)\|_g = 1$.

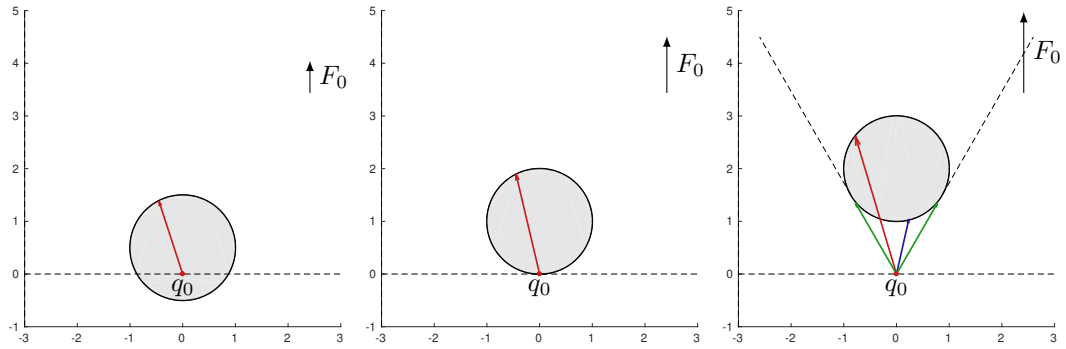


FIGURE 1 – Illustration de l'ensemble $\mathcal{F}(q) = \left\{ F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i\, F_i(q) \;\middle|\; \|u\| \leq 1 \right\}$ des directions initiales possibles (disque gris avec son bord en noir) dans les cas Zermelo faible (gauche), Zermelo modéré (milieu) et Zermelo fort (droite), avec F_0 supposé vertical en q_0. Les directions initiales possibles, dans le cas Zermelo fort, sont contenues dans un cône.

L'objectif principal de ce travail est de construire une synthèse optimale du problème initial dans un voisinage dit *adapté*, qu'on définira par la suite. Cette objectif se résume dans l'étude de la régularité et la description des lignes de niveaux de la fonction valeur définie dans ce cas par :

$$
V_{q_0}(q_f) = \inf \{ t_f \mid q(0) = q_0,\ q(t_f) = q_f, \text{ où } q \text{ et le contrôle associé } u \text{ sont solutions de (1)} \}. \tag{2}
$$

D'autre part, l'existence de directions limites dans le cas Zermelo fort, sur le bord du cône illustré sur la figure 1, constitue la différence fondamentale entre le cas Zermelo faible et le cas Zermelo fort. Ces directions représentent en effet des directions anormales. Une contribution majeure de notre travail est de discuter du rôle de ces directions anormales dans l'analyse du problème et des phénomènes nouveaux qu'elles engendrent. En effet celles-ci entraîneront la perte de contrôlabilité locale en q_0, la perte de régularité de la fonction temps minimale (fonction valeur), la déformation des petites boules [1], l'apparition de nouvelles branches dans le lieu de coupure, etc. La notion d'anormale est liée à l'hamiltonien associé au système. Afin de donner plus de détails sur les challenges associés à ce travail, on introduit le cadre hamiltonien dans le

1. La boule (ouverte) en un temps t_f donné est l'ensemble des sous-niveaux $t < t_f$ de la fonction temps minimal.

cas des problèmes de Zermelo. D'après le principe du maximum de Pontryagin [90], le problème est associé à l'hamiltonien

$$\mathbf{H}(z) = H_0(z) + \sqrt{H_1^2(z) + H_2^2(z)} = -\varepsilon$$

où $H_i = p \cdot F_i(q), i = 0, 1, 2$ est le relèvement hamiltonien associé au champ F_i, p désignant le vecteur adjoint associé à q et ε est tel que $\varepsilon \neq 0$ correspond au cas normal et $\varepsilon = 0$ correspond au cas anormal. Les cas hyperbolique et elliptique correspondent respectivement à $\varepsilon < 0$ et $\varepsilon > 0$. Deux premières contributions de notre travail sont d'introduire, grâce au principe du maximum appliqué dans ce cadre, deux points de vue différents qui nous permettent l'un et l'autre de faire une classification du flot géodésique et de construire la synthèse du problème. Le premier point de vue est le point de vue système mécanique. En effet, dans le cas de révolution, c'est-à-dire pour une métrique de révolution g et un courant F_0 évoluant le long des parallèles, le système hamiltonien dans les coordonnées $q = (r, \theta)$ peut s'écrire comme un système mécanique décrit par un *potentiel généralisé* sous la forme :

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V_\varepsilon(r, p_\theta) = 1,$$

p_θ étant l'adjoint associé à la variable θ et avec le potentiel généralisé V_ε donné par

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{m^2(r)(\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2},$$

où $\varepsilon < 0,\ = 0,\ > 0$ correspondent respectivement aux cas hyperbolique, anormal et elliptique. Grâce à ce potentiel et à la *relation de Clairaut* $p_\theta = cte$ on peut alors faire une classification des trajectoires qu'on appelle *classification de Morse-Reeb généralisée (GMR)*. Cette nouvelle approche de classification étend la classification de Morse en système dynamique. Le second point de vue est celui de Carathéodory-Zermelo, qui est équivalent à la transformée de Goh en contrôle optimal. L'équivalence de ces points de vue, mit en évidence dans ce travail, permet de faire une étude géométrique en utilisant les crochets de Lie et la constante de Clairaut pour calculer le contrôle optimal. Le système peut alors être écrit comme un système de contrôle affine et de contrôle scalaire en dimension trois. Les outils géométriques existant dans ce cadre permettent ainsi de discuter du statut d'optimalité des trajectoires suivant la nature hyperbolique, elliptique et anormale en lien avec le calcul des points conjugués.

Organisation du document. Ce manuscrit est divisé en deux grandes parties. La première organisée en cinq chapitres, présente de manière brève tous les résultats obtenus durant cette thèse et détaillés dans les différents articles présentés dans la deuxième partie. Dans le chapitre 1, on définit le cadre général d'étude et on rappelle le principe du maximum de Pontryagin appliqué dans ce cadre. À partir du principe du maximum, on présente deux points de vue permettant de paramétrer et d'intégrer le flot géodésique et d'analyser le statut d'optimalité des trajectoires. Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'optimalité des trajectoires, on présente ici les résultats principaux de notre travail en lien avec la synthèse optimale du problème notamment dans le cas d'un courant fort. Les chapitres 3 et 4 sont destinés aux cas d'études. On fait dans le chapitre 3 l'analyse de deux cas d'applications, à savoir l'exemple historique de Carathéodory-Zermelo et du cas Kepler moyenné. On présente dans ces deux cas la classification du flot ainsi que la synthèse optimale dans le cas fort. Le chapitre 4 est dédié à l'étude du problème du vortex, sur lequel nous nous sommes particulièrement attardé pendant cette thèse. Une autre contribution majeure de ce travail est le résultat d'existence de solution optimale que nous établissons dans ce chapitre, résultat que l'on généralise en-suite à une classe plus large de problèmes. On présente également la classification du flot géodésique et la synthèse optimale dans les cas faible et fort. Un problème intermédiaire est considéré dans ce chapitre afin de mettre en évidence sur un exemple un peu plus complexe, les propriétés du flot quand on fait la classification de Morse-Reeb et de présenter une situation où l'on a plusieurs équateurs et plusieurs séparatrices. Le chapitre 5 est lui consacré

à la présentation des méthodes numériques que nous avons utilisées dans ce travail. On présente ici les démarches de calcul pour la construction des sphères et boules zerméliennes et comment les algorithmes utilisés sont implémentés dans le code HamPath, qui nous a servi durant toute la thèse pour toutes les études numériques que nous avons faites. Dans la deuxième partie du manuscrit, nous présentons sous forme de chapitre les différentes contributions qui ont fait l'objet de ce travail. La première contribution, reproduite dans le chapitre 6, porte principalement sur la résolution du problème du vortex. La seconde contribution, reproduite dans le chapitre 7, porte sur le rôle des anormales dans la synthèse optimale des problèmes de Zermelo de révolution. La troisième contribution de ce travail, reproduite au chapitre 8, décrit la méthode de classification de Morse-Reeb (GMR) et traite aussi de conditions d'optimalité du second ordre. C'est également ici que l'analyse des différents cas d'étude est présentée. Les deux derniers chapitres, 9 et 10 sont des travaux que nous avons réalisés en parallèle de l'étude des problèmes de Zermelo et concernent respectivement la résolution du problème vortex pour un critère énergie minimale et la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal avec perturbations singulières.

Contributions. J'ai contribué durant cette thèse à la réalisation de trois articles parus ou destinés à des journaux internationaux, deux proceedings et cinq présentations dans des conférences nationales et internationales. On donne ici les références des cinq articles.

— A Zermelo Navigation Problem with a Vortex Singularity. Control, Optimisation and Calculus of Variations (ESAIM : COCV), **27** (2021) no 10, pp : 1-37. (avec B. Bonnard ; O. Cots)

— Minimum energy control of passive tracers advection in point vortices flow. In : Gonçalves J.A., Braz-César M., Coelho J.P. (eds) CONTROLO 2020. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 695. Springer, Cham (avec C. Balsa ; O. Cots ; J. Gergaud).

— Homotopic approach for turnpike and singularly perturbed optimal control problems. 19th French-German-Swiss conference on Optimization (FGS 2019), ESAIM : Proceedings and Surveys, (2021), 1-10. (avec O. Cots ; J. Gergaud).

— Abnormal Geodesics in 2D-Zermelo Navigation Problems in the Case of Revolution and the Fan Shape of the Small Time Balls. Preprint HAL Id : hal-02437507 (2020) (avec B. Bonnard ; O. Cots ; J. Gergaud).

— Zermelo Navigation Problems on Surfaces of Revolution and Geometric Optimal Control. Preprint HAL Id : hal-03209491 (2021) (avec B. Bonnard ; O. Cots).

Première partie

Synthèse des résultats principaux

Chapitre 1

Paramétrisation et classification des extrémales des problèmes de Zermelo de révolution

Ce chapitre reprend principalement les résultats des références [21, 23] reproduits aux chapitres 8 et 9 de ce manuscrit. L'objectif du chapitre est de mettre en place le cadre géométrique d'un point de vue contrôle optimal pour l'étude des problèmes de Zermelo sur les surfaces de révolution. On commence par définir de manière générale le problème qui nous intéresse et une liste de cas d'application motivant cette étude. Aussi, on rappelle le principe du maximum de Pontryagin appliqué au problème et on discutera de la paramétrisation des extrémales selon deux points de vue différents, mais tout aussi intéressants, pour l'analyse globale du problème. Le premier est le point de vue Carathéodory-Zermelo équivalent à la transformée de Goh en contrôle optimal. Il permet de réécrire le problème comme un système de contrôle affine et de contrôle scalaire en dimension 3 et d'utiliser des outils géométriques de ce cadre, notamment les travaux de [25], pour paramétrer le flot géodésique et calculer les *lieux conjugués et de coupure* en lien avec l'optimalité locale et globale des solutions. Le second point de vue est le point de vue système mécanique dans le cas de révolution, où l'existence d'un potentiel généralisé permettra d'intégrer le flot hamiltonien et de classifier les extrémales selon une classification que nous appelons "*la classification de Morse-Reeb généralisée (GMR)*" qui étend celle de Morse-Reeb en système dynamique.

1.1 Introduction aux problèmes de Zermelo de révolution

1.1.1 Définition du problème

Sauf mention contraire, tous les objets sont dans une catégorie lisse (C^∞ ou C^ω). On considère le triplet (M, g, F_0) où M est une variété de dimension 2 avec des coordonnées normales $q = (r, \theta)$, g une métrique riemannienne sous la forme :

$$g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2, \quad m(r) > 0. \tag{1.1}$$

et où $F_0(q)$ est un champ de vecteurs définissant le courant (ou le vent) donné par :

$$F_0 = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{1.2}$$

On définit à partir de ce triplet et de conditions aux limites le problème de temps minimal :

$$\begin{aligned} &t_f \mapsto \min \\ &\dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i\, F_i(q), \quad q(t) \in M, \quad u = (u_1, u_2), \quad \|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1 \\ &q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f. \end{aligned} \tag{1.3}$$

où les champs de vecteurs F_i, $i = 1, 2$ sont associés à la métrique g et définis par :

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{1}{m(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

L'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$ est l'ensemble des applications mesurables essentiellement bornées, définies sur $[0, +\infty[$ et à valeur dans le domaine $\mathbf{U} = \{u \mid \|u\| \leq 1\}$.

Définition 1.1.1. *Le courant F_0 tel que défini par* (1.2) *est appelé un courant parallèle et la métrique g donnée par* (1.1) *est une métrique de révolution. Le problème de contrôle optimal défini en* (1.3) *est appelé problème de Zermelo de révolution. Il est dit* Zermelo faible *si le courant est faible au point initial* (i.e $\|F_0(q_0)\|_g < 1$), Zermelo fort *si le courant est fort au point initial* (i.e $\|F_0(q_0)\|_g > 1$) *et* Zermelo modéré *dans le cas de transition où $\|F_0(q_0)\|_g = 1$.*

Remarque 1. *Le problème de Zermelo ainsi défini revient à rechercher les courbes qui minimisent la longueur (comprise au sens du temps minimal de parcours) dans la variété, dite* zermélienne*, (M, g, F_0). On restreint le cadre d'étude aux problèmes de Zermelo de révolution afin de simplifier la présentation. Cependant, plusieurs résultats établis dans ce travail peuvent s'étendre à un cadre plus général.*

1.1.2 Liste de quelques cas d'application motivant l'étude

Plusieurs cas d'application ont motivé cette étude notamment le problème du vortex qui a été à la base de ce travail, puisque nous avons dans ce cas un problème typique de Zermelo dans le plan qui ne peut être réduit au cadre finslérien. Ci-dessous nous donnons une liste non exhaustive de cas d'application qui présentent pour chacun un intérêt particulier selon l'analyse que nous nous proposons de faire.

Exemple historique de Carathéodory-Zermelo [36, 110]

Un des problèmes fondateur du *calcul des variations* classique est le problème dit du "plus rapide chemin nautique" introduit par Carathéodory et Zermelo d'un navire naviguant sur une rivière visant à atteindre la rive opposée en un temps minimal. Par conséquent, M est l'espace euclidien en dimension 2 avec la métrique $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ dans les coordonnées $q = (x, y)$, y étant la distance à la rive. Pour faire une analyse complète, Carathéodory et Zermelo ont considéré un courant *linéaire* de la forme $F_0 = y\frac{\partial}{\partial x}$. En utilisant notre notation, on doit fixer $x = \theta$, $y = r$ (bien qu'on reste en coordonnées cartésiennes), de sorte que la variété ambiante soit l'espace euclidien avec la métrique $g = \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\theta^2$ et $F_0 = r\frac{\partial}{\partial \theta}$. Cette exemple fourni une forme normale intéressante pour analyser les situations stables qui s'étendent à des modèles plus généraux. Le traitement de ce cas est présenté dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

Problème vortex [22, 21]

Dans le cas du vortex, on considère l'espace euclidien perforé où le *vortex* est placé à l'origine et le navire est une *particule passive* en hydrodynamique dont le mouvement est décrit par

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{ky(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + u_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = +\frac{kx(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + u_2(t),$$

où $k > 0$ est le paramètre de circulation et on a $F_1 = \frac{\partial}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ et $\|u\| \leq 1$. Le problème s'écrit en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ de sorte que la métrique euclidienne prend la forme $g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2$ et le courant se transforme en $F_0 = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$. La variété ambiante est définie par $r \neq 0$, F_0 ayant un pôle à l'origine identifié à $r = 0$. Ce problème récent introduit dans [91] est celui qui a principalement motivé ce travail et celui sur lequel nous nous sommes le plus attardé dans les applications. Le chapitre 4 lui est donc entièrement consacré. Ce modèle peut-être considéré comme un modèle réduit du problème aux 2 corps où le vortex joue le rôle de la planète et la particule celui du corps qui gravite. Cependant, grâce au fait que la dérive ici évolue le long de θ, on montre l'existence de solutions optimales.

Métriques riemanniennes harmoniques $m(r) = \sin^2 r/(1 - \lambda\sin^2 r)$ **[15]**

L'espace ambiant M est la *2-sphère de révolution*, on considère la famille de métriques définie par $g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$ avec $m^2(r) = \frac{\sin^2 r}{1-\lambda\sin^2 r}$ où λ est un paramètre homotopique qui déforme la *sphère usuelle* pour $\lambda = 0$ à la métrique singulière appelée *métrique de Grushin* pour $\lambda = 1$; $\lambda = 4/5$ correspondant au *cas Kepler moyenné, où* $e = \sin r$ *est l'excentricité.*

Ellipsoïde de révolution [61]

L'ellipsoïde est généré par la courbe $y = \sin\varphi$, $z = \varepsilon\cos\varphi$ où $0 < \varepsilon < 1$ correspond au cas *oblat* (aplati) tandis que $\varepsilon > 1$ correspond au cas *prolat* (allongé). La métrique prend la forme $g = F_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi^2 + F_2(\varphi)\,\mathrm{d}\theta^2$, avec $F_1(\varphi) = \cos^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi$, $F_2 = \sin^2\varphi$. La métrique peut être écrite sous la forme normale en fixant $\mathrm{d}r = \sqrt{F_1(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$. Ceci définit la métrique sur la 2-sphère de révolution.

Métrique de Serret-Andoyer [19]

La métrique de Serret-Andoyer sous forme normale est donnée par $g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$ avec $m^2(r) = (A\,\mathrm{cn}^2(\alpha r, k) + B\,\mathrm{sn}^2(\alpha r, k))^{-1}$, où cn et sn sont des fonctions elliptiques de Jacobi de sorte que $m(r)$ est périodique et de plus $m(r) = m(-r)$. On a $k^2 = \frac{B-A}{C-A}$, $\alpha = \sqrt{C-A}$, où $0 < A < B < C$ sont des paramètres. Cela correspond à une représentation du pendule mécanique.

Pour les trois derniers cas on considère un courant constant de la forme $F_0(q) = v\frac{\partial}{\partial\theta}$ où $v \in \mathbb{R}$ est une constante positive dont la variation permet de traiter les cas faible et fort. Cela définit des problèmes de navigation de Zermelo associés à un courant constant et linéaire, sur l'espace de recouvrement. Dans le cas de l'ellipsoïde, le cas oblat est différent du cas prolat, en relation avec la permutation des méridiens et des parallèles et notre étude ne portera que sur le cas oblat. Notons également que sur une 2-sphère, un courant constant correspond à une rotation linéaire d'axe $0z$.

1.1.3 Quelques rappels et définitions

On rappelle ici quelques définitions et notations classiques en contrôle optimal et utiles pour la suite.

Définition 1.1.2. *Notons* $\mathbf{U} = \overline{\mathrm{B}}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ *la boule unité fermée euclidienne, l'ensemble des* contrôles admissibles *est l'espace* $\mathcal{U} = \{u\colon [0\,,+\infty[\to \mathbf{U} \mid u \text{ mesurable}\}$ *, Pour tout* $u \in \mathcal{U}$ *et* $q_0 \in M$*, on désigne par* $q_u(\cdot, q_0)$ *(qu'on pourra noter également* $q(\cdot)$ *si aucune confusion n'est à craindre) l'unique solution de* (1.3) *associée au contrôle* u*, telle que* $q_u(0, q_0) = q_0$ *et définie sur un intervalle maximal* J*. Nous introduisons pour un temps* $T > 0$ *et une condition initiale* $q_0 \in M$*, l'ensemble* $\mathcal{U}_{T,q_0} \subset \mathcal{U}$ *de lois de commande* $u \in \mathcal{U}$ *telles que la trajectoire associée*

$q_u(\cdot, q_0)$ *est bien définie sur* $[0\,, T]$*, et on désigne par* $\mathcal{A}_{q_0,T} = \operatorname{Im} E_{T,q_0}$ l'ensemble atteignable (ou ensemble accessible) *depuis* q_0 *en temps* T*, où l'on a introduit* l'application entrée/sortie

$$E_{T,q_0}: \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{T,q_0} & \longrightarrow & M \\ u & \longmapsto & q_u(T, q_0) \end{array}.$$

Alors, on désigne par $\mathcal{A}_{q_0} = \bigcup_{T\geq 0} \mathcal{A}_{q_0,T}$ *l'ensemble atteignable depuis* q_0*. Le système de commande est dit* contrôlable à partir de q_0 *si* $\mathcal{A}_{q_0} = M$ *et* contrôlable *si* $\mathcal{A}_{q_0} = M$ *pour tout* $q_0 \in M$*.*

Aussi, pour une paire $(q_0, q_f) \in M^2$ *donnée, on définit le problème de transférer* (1.3) *en temps minimal de la condition initiale* q_0 *à la cible* q_f *:*

$$(P) \qquad V_{q_0}(q_f) = \inf\left\{t_f \mid (t_f, u) \in \mathcal{D}_{q_0} \text{ et } q_u(t_f, q_0) = q_f\right\},$$

où $\mathcal{D}_{q_0} = \left\{(t_f, u) \in [0\,, +\infty[\times \mathcal{U} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}_{t_f,q_0}\right\}$*. La* sphère (zermélienne) $\mathbb{S}(q_0, t_f)$ *de rayon* t_f *est l'ensemble des points* q_f *que l'on peut atteindre depuis* q_0 *en un temps minimal* t_f*, tandis que la* boule (zermélienne) *de rayon* t_f *est l'ensemble* $\mathbb{B}(q_0, t_f) = \bigcup_{t\leq t_f} \mathbb{S}(q_0, t)$*. Le sphère de rayon* t_f *correspond alors à la ligne de niveau* t_f *de la fonction temps minimale (ou fonction valeur)* $V_{q_0}(\cdot)$*, tandis que la boule de rayon* t_f *correspond à l'ensemble des lignes de sous-niveaux à* t_f *de* $V_{q_0}(\cdot)$*.*

Définition 1.1.3. *On dit que le problème* (P) *est bien défini si pour tout* (q_0, q_f) *donné, s'il existe* $(t_f, u) \in \mathcal{D}_{q_0}$ *tel que* $V_{q_0}(q_f) = t_f$*.*

Définition 1.1.4. *Soit* $q_0 = (r_0, \theta_0)$*, un* voisinage adapté *de* q_0 *est un rectangle* $R := \{r_1 < r < r_2,\, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ *contenant* q_0*.*

Remarque 2. *Pour faire la synthèse optimale du problème initial, on se placera dans un voisinage adapté dont le choix dépendra des paramètres du problème considéré.*

L'objectif de construire une synthèse optimale dans un voisinage adapté R se résume dans l'étude de la régularité et la description des lignes de niveaux de la fonction valeur $V_{q_0}(\cdot)$. D'autre part, l'existence de directions limites dans le cas Zermelo fort, comme l'illustre la figure 1.1, constitue la différence fondamentale entre le cas Zermelo faible et le cas Zermelo fort. Ces directions représentent en effet des directions anormales et la prise en compte de celles-ci dans l'analyse du problème et des phénomènes nouveaux qu'elles engendrent constitue l'un des défis principaux de ce travail. En effet, l'existence de celles-ci a pour conséquence la perte de contrôlabilité locale en q_0, la perte de régularité de la fonction temps minimale, la déformation des petites boules, l'apparition de nouvelles branches dans le lieu de coupure (lieu où les trajectoires perdent leur optimalité), etc. Le traitement classique, par les géomètres, du cas général est le cadre lagrangien des systèmes mécaniques. Cependant, on adopte ici l'approche du contrôle optimal où le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) conduit à utiliser le cadre hamiltonien [90].

1.2 Principe du Maximum de Pontryagin et paramétrisation des extrémales

1.2.1 Principe du maximum de Pontryagin

Soit $q_0 \in M$ et $(t_f, u) \in \mathcal{D}_{q_0}$ une solution optimale du problème (P) avec $q(\cdot) = q_u(\cdot, q_0)$ la trajectoire optimale associée. D'après le principe du maximum de Pontryagin [90], il existe une fonction absolument continue $p\colon [0\,, t_f] \to \mathbb{R}^2$ satisfaisant l'équation adjointe presque partout sur $[0\,, t_f]$:

$$\dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), u(t)), \tag{1.4}$$

où $H(q,p,u) = p \cdot (F_0(q) + u_1\, F_1(q) + u_2\, F_2(q))$ [1] est le pseudo-hamiltonien associé au problème (1.3). De plus, il existe $p^0 \leq 0$ tel que :

$$\text{la paire } (p(\cdot), p^0) \text{ ne s'annule jamais} \tag{1.5}$$

et est telle que le contrôle optimal satisfait la condition de maximisation presque partout sur $[0\,, t_f]$:

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{w \in \mathbf{U}} H(x(t), p(t), w) = -p^0. \tag{1.6}$$

Définition 1.2.1. *Une* extrémale *est un 4-uplet* $(q(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ *(ou encore un 2-uplet* $(q(\cdot), p(\cdot))$ *lorsqu'on peut écrire* $u = u(q,p)$*) satisfaisant* (1.3) *et* (1.4)–(1.6)*. Elle est dite* anormale *lorsque* $p^0 = 0$ *et* normale *lorsque* $p^0 \neq 0$*. Elle est dite* stricte *si* $p(\cdot)$ *est unique à un facteur près. Une extrémale normale est dite* hyperbolique *(resp.* elliptique*) si* $p^0 < 0$ *(resp.* $p^0 > 0$*). Une extrémale* $(q(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ *est appelée une* BC-extrémale *pour une cible* q_f *donnée, si* $q(0) = q_0$ *et s'il existe un temps* $t_f \geq 0$ *telle que* $q(t_f) = q_f$*. La projection d'une extrémale sur l'espace des états s'appelle une géodésique. Par analogie avec les terminologies en géométrie riemannienne, les* méridiens *(appelées encore lignes verticales) correspondent à* $p_\theta = 0$ *et les* parallèles *correspondent à* $p_r = 0$*. Les parallèles géodésiques sont appelées* équateurs*.*

Proposition 1.2.2. *Le principe du maximum nous dit que si* $q(\cdot)$ *est une trajectoire minimisante alors elle est la projection d'une solution extrémale* $z(\cdot) = (q(\cdot), p(\cdot))$*, solution presque partout du système*

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{H}(z,u)$$

où le vecteur hamiltonien $\overrightarrow{H}$ *est donné par* $\overrightarrow{H}(z,u) = (\nabla_p H(z,u), -\nabla_q H(z,u))$ *et où le contrôle optimal vérifiant la condition de maximisation* (1.6) *est continu et donné par*

$$u_i(z) = \frac{H_i(z)}{\sqrt{H_1^2(z) + H_2^2(z)}}, \quad i = 1, 2. \tag{1.7}$$

Dans notre cas, les extrémales sont donc solutions du système hamiltonien

$$\begin{aligned} &\dot r = \frac{p_r}{\|p\|_g}, && \dot p_r = -p_\theta \mu'(r) + \frac{p_\theta^2\, m'(r)}{m^3(r)\|p\|_g}, \\ &\dot\theta = \mu(r) + \frac{p_\theta}{m^2(r)\|p\|_g}, && \dot p_\theta = 0 \quad \textit{i.e} \quad p_\theta = \textit{cte (relation de Clairaut)}, \end{aligned}$$

qui peut être de manière équivalente défini par l'hamiltonien maximisé

$$\mathbf{H}(z) = H_0(z) + \sqrt{H_1^2(z) + H_2^2(z)} = H_0(z) + \|p\|_g$$

qui est constant et égal à $-p^0$*, avec* [2] $\|p\|_g = \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)^{1/2}$.

Démonstration. De la condition de maximisation, on déduit l'expression du contrôle optimal donné en (1.7) car les extrémales dans ce cas sont toutes d'ordre zéro i.e. le couple (H_1, H_2) ne s'annule jamais. En effet puisque F_1 et F_2 sont linéairement indépendant, alors si (H_1, H_2) s'annule en un point, on aura le vecteur adjoint $p = 0$ en ce point et donc la paire (p, p^0) s'annulera, ce qui contredit le principe du maximum. □

Remarque 3. *Si le problème* (P) *est bien défini au sens de la définition 1.1.3, alors on dira que le problème est géodésiquement complet.*

1. Le produit scalaire standard s'écrit $a \cdot b$ ou $\langle a, b \rangle$.
2. On garde la même notation pour la norme sur l'espace tangent et l'espace cotangent.

Le principe du maximum donne des conditions nécessaires d'optimalité et permet de réduire l'ensemble des solutions au flot géodésique. Ainsi, pour atteindre l'objectif de construire une synthèse optimale du problème initial, il faudra encore évaluer pour chaque géodésique donnée son statut d'optimalité i.e. déterminer jusqu'où elle est optimale. Cela revient à déterminer pour chaque géodésique le point où elle perd son optimalité appelée *point de coupure* et ainsi à construire le lieu de coupure (ensemble de tous les points de coupure). La détermination de ce lieu est en général très complexe, mais il existe en géométrie riemannienne et finslérienne des résultats qui permettent de le caractériser. On y reviendra dans le prochain chapitre, pour l'instant, nous présentons l'influence du courant sur le flot extrémal et quelques différences fondamentales entre les cas riemannien, finslérien et zermelien (entendu ici cas Zermelo fort).

1.2.2 Paramétrisation du flot extrémal dans les cas faible et fort

Par homogénéité de l'hamiltonien, il est assez classique de normaliser p^0 à $\varepsilon = 0, -1, +1$ et de paramétrer les extrémales par la constante de Clairaut p_θ, où $\varepsilon = 0$ est le cas anormal, $\varepsilon = -1$ est le cas hyperbolique et $\varepsilon = +1$ est le cas elliptique, même si cette normalisation n'est pas unique. En effet, on peut aussi normaliser $\|(p_{r_0}, p_\theta)\|_g = 1$ et poser $(p_{r_0}, p_\theta) = (\cos\alpha_0, m(r_0)\sin\alpha_0)$ afin de paramétrer chaque extrémale par son angle de cap initial. Cette dernière normalisation est plus appropriée pour la construction de la synthèse optimale, car elle permet de traiter simultanément les cas hyperbolique, elliptique et anormal. Par contre, pour la classification des géodésiques, sur laquelle nous nous attarderons également, la première normalisation semble plus appropriée. Ainsi, si on fixe $\|(p_{r_0}, p_\theta)\|_g = 1$ et on pose $(p_{r_0}, p_\theta) = (\cos\alpha_0, m(r_0)\sin\alpha_0)$, chaque extrémale sera déterminée de manière unique par son angle de cap initial α_0.

Dans le cas anormal (i.e $p^0 = 0$), on a pour $z_0 = (q_0, p_0)$ et $p_0 = (p_{r_0}, p_\theta)$,

$$\mathbf{H}(z_0) = H_0 + \cos\alpha_0\, H_1 + \sin\alpha_0\, H_2 = 0 \Leftrightarrow H_1\cos\alpha_0 + H_2\sin\alpha_0 = -H_0, \tag{1.8}$$

et suivant la nature de la dérive, cette équation admettra zéro, une ou deux solutions. La proposition ci-dessous résume alors les différents cas de figure.

Proposition 1.2.3. *Suivant la nature du courant à l'instant initial on a :*

- ***cas Zermelo faible** : l'équation* (1.8) *n'a pas de solution. Il n'y a pas d'extrémale anormale.* $\mathbf{H}(z_0) > 0$ *pour tout* α_0 *et on a uniquement des géodésiques hyperboliques.*
- ***cas Zermelo modéré** : il existe une unique extrémale anormale paramétrée par :* $\alpha_0^a = \arctan\left(-\frac{H_1}{H_2}\right)$*, avec* $H_2 \neq 0$*. Toutes les extrémales normales demeurent hyperboliques.*
- ***cas Zermelo fort** : l'équation* $\mathbf{H}(z_0) = 0$ *admet deux solutions distinctes* $\alpha_1^a < \alpha_2^a$ *dans* $[0\,, 2\pi[$*. Les hyperboliques solutions du PMP sont paramétrées par l'ensemble* $\{\alpha_0 \in [0\,, 2\pi[\ |\ \mathbf{H}(z_0) > 0\} = [0\,, \alpha_1^a[\cup]\alpha_2^a\,, 2\pi[$ *tandis que pour* $\alpha_0 \in\,]\alpha_1^a\,, \alpha_2^a[$ *on a* $\mathbf{H}(z_0) < 0$ *ce qui correspond aux extrémales elliptiques.*

Démonstration. Puisque $\{F_1, F_2\}$ est un repère orthonormée, dans le cas faible (i.e $\|F_0(q_0)\|_g < 1$) on a $|H_0(z_0)| < \left(H_1^2(z_0) + H_2^2(z_0)\right)^{1/2}$ et donc $\mathbf{H}(z_0) > 0$; l'équation (1.8) n'admet donc pas de solution. Les deux autres cas découlent simplement de la résolution de l'équation. □

La figure 1.1 illustre ces différents cas, notamment le graphe de droite où l'on peut voir, dans le cas Zermelo fort, les deux directions anormales avec une direction hyperbolique et une elliptique (c'est-à-dire respectivement associée à une géodésique hyperbolique et elliptique). Les deux directions anormales définissent la limite du cône des directions admissibles et révèlent un manque d'accessibilité locale autour de q_0.

Remarque 4. *Les anormales minimisantes existent uniquement dans le cas Zermelo fort et restent contenues dans les régions de courant fort ou modéré. Le cas Zermelo modéré est un cas limite qui se traite de manière similaire au cas Zermelo faible puisque, l'anormale n'étant jamais minimisante, le flot géodésique demeure hyperbolique dans ce cas (cf. par exemple [68] pour plus de détails).*

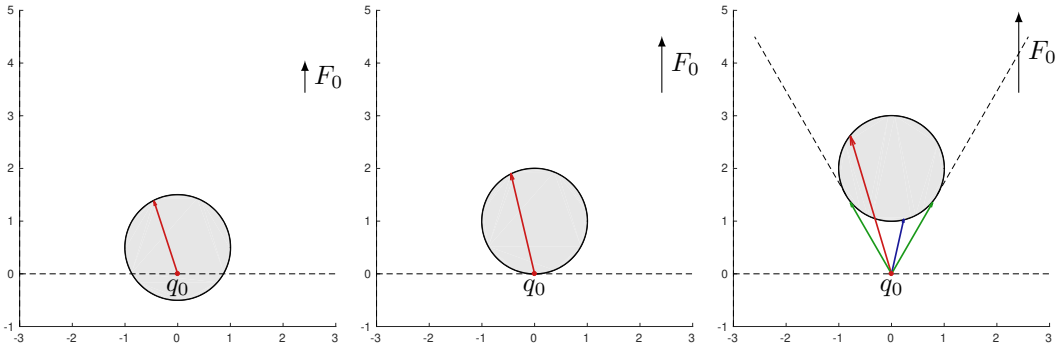


FIGURE 1.1 – Illustration des directions initiales possibles dans les trois cas pour un courant supposé vertical. (Gauche), cas Zermelo faible ; (Milieu) cas Zermelo modéré ; (Droite) cas Zermelo fort. En vert sont représentés les directions anormales, en rouge les hyperboliques et en bleu les elliptiques. Le points rouge correspondent au point initial.

L'importance du courant tient de ce que, suivant qu'elle est nulle, faible ou forte la géométrie du problème est différente. Ainsi on distinguera :

Le cas ($F_0 \equiv 0$) : la métrique associée à l'hamiltonien est riemannienne (on est ramené au cas dit *riemannien*). En effet, si on considère la métrique g sous la forme normale $g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$, alors les champs de vecteurs $F_i, i = 1, 2$ associés à g sont donnés par

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

et l'hamiltonien correspondant s'écrit

$$H = \left(H_1^2 + H_2^2\right)^{1/2} = \|p\|_g.$$

Il y a équivalence entre les solutions du problème en temps minimal avec contrainte sur le contrôle et en énergie minimale i.e. pour le coût $\min \int_0^{t_f} \|u\|^2 \ \mathrm{d}t$, avec t_f fixé convenablement. Le problème est de plus symétrique au sens où la géodésique qui transfert q_0 à q_f est également celle qui transfert q_f à q_0. La construction de la synthèse peut se faire tout aussi bien en fixant le point initial que le point final. De plus, les deux normalisations des extrémales, décrites précédemment, sont équivalentes dans ce cas, car l'hamiltonien est réduit à $\mathbf{H}(z) = \|p\|_g = -p^0$. Toutes les extrémales sont normales hyperboliques dans ce cas, sinon on aurait $(p, p^0) \equiv 0$ ce qui serait absurde d'après le principe du maximum.

Le cas ($\|F_0(q)\|_g < 1$) : la métrique associée à l'hamiltonien est dite de *Randers* (cas particulier des métriques de Finsler [10]). En effet, si on considère le problème défini par le triplet (M, g, F_0), alors l'hamiltonien associé est donné par :

$$\mathbf{H} = H_0 + \left(H_1^2 + H_2^2\right)^{1/2} = H_0 + \|p\|_g = -p^0.$$

avec $H_i = p \cdot F_i(q)$, $i = 0, 1, 2$ et $p^0 \leq 0$. De plus $p^0 < 0$ car $\{F_1, F_2\}$ étant orthonormée, on a $|H_0| < \left(H_1^2 + H_2^2\right)^{1/2}$ et donc $\mathbf{H} > 0$. Le problème de contrôle optimal ainsi défini est équivalent au problème de recherche de plus court chemin dans la variété finslérienne (M, h) où h est la métrique de Finsler de type Randers associé à l'hamiltonien $\mathbf{H}$ et définie par :

$$h(q,p) = \alpha(q,p) + \beta(q,p) = \frac{\sqrt{\lambda\,\|p\|_g^2 + H_0^2}}{\lambda} - \frac{H_0}{\lambda} \tag{1.9}$$

avec $\lambda = 1 - \|F_0\|_g^2$. La métrique riemannienne $\alpha(q,p) = \sqrt{\alpha_{ij}(q)p^i p^j}$ et la 1-forme $\beta = b_i(q)p^i$ correspondante étant définis par :

$$a_{ij} = \frac{\lambda\, g_{ij} + F_{0i}F_{0j}}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad b_i = -\frac{F_{0i}}{\lambda}, \quad \text{avec} \quad F_{0i} = g_{ij}F_0^j.$$

Il n'y a plus, dans ce cas, équivalence entre le problème initial et celui où on considère un coût énergie minimale. De plus le problème n'est plus symétrique. Cependant, les résultats de régularité (continuité et différentiabilité) de la fonction valeur et de caractérisation du lieu de coupure, valide dans le cas riemannien, demeure valide dans ce cas (cf. par exemple [10, 57]) ; le flot géodésique est composé, comme en riemannien, uniquement de normales hyperboliques.

Remarque 5. *Ce parallèle entre le point de vue contrôle et la formulation géométrique du problème offre plus d'outils, empruntés aux deux domaines, pour analyser le problème. Cependant, dans la littérature il existe très peu de références qui abordent le problème des deux points de vue. Aussi dans le cas Zermelo fort, λ n'est plus nécessairement positif, on ne peut donc plus définir une (pseudo)-métrique associée à l'hamiltonien. C'est donc d'un point de vue purement contrôle que nous aborderont le cas Zermelo fort afin d'étudier la régularité de la fonction valeur et d'étendre le résultat de caractérisation du lieu de coupure.*

1.3 Point de vue Carathéodory-Zermelo-Goh

D'après le principe du maximum on a $\|u\| = 1$ le long des extrémales, on peut alors poser $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, l'angle de cap α devenant alors le nouveau contrôle. Du point de vue historique dans le problème de navigation de Zermelo, Carathéodory et Zermelo utilisent comme contrôle (dit accessoire) la dérivée de l'angle de cap au lieu de l'angle lui-même [31]. Cela correspond précisément à la *transformée de Goh* en contrôle optimal (voir par exemple [18]) et nous amène à considérer la paramétrisation par l'angle initial α_0 plutôt que p_θ. Nous présentons dans cette section ce point de vue appliqué à notre problème.

1.3.1 Transformée de Goh en contrôle optimal

Définition 1.3.1. *Considérons le système de contrôle* (1.3) *avec $q = (r, \theta)$ et $\|u\| = 1$. On pose $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\tilde{q} = (q, \alpha)$, $X(\tilde{q}) = F_0(q) + \cos\alpha\, F_1(q) + \sin\alpha\, F_2(q)$ et $Y(\tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial\alpha}$. Ceci permet d'étendre le système* (1.3) *en un* système affine mono-entré

$$\dot{\tilde{q}} = X(\tilde{q}) + v\, Y(\tilde{q}) \tag{1.10}$$

et la dérivée de l'angle de cap $\dot{\alpha} = v$ est considérée comme le contrôle accessoire.

Le pseudo-hamiltonien associé s'écrit :

$$\tilde{H}(\tilde{z}, v) = \tilde{p} \cdot (X(\tilde{q}) + v\, Y(\tilde{q})). \tag{1.11}$$

et relâchant la contrainte sur le nouveau contrôle, la condition de maximisation implique $p \cdot Y = 0$ le long de toute extrémale. Ces extrémales sont appelées *singulières* et le contrôle associé est également appelé singulier. On rappelle ici brièvement comment sont calculées les extrémales singulières. Pour cela, On introduit les concepts de crochet de Lie et de Poisson.

Le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs C^ω, X, Y sur un ouvert $V \in \mathbb{R}^n$ se calcule avec la convention suivante :

$$[X, Y](\tilde{q}) = \frac{\partial X}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q})\, Y(\tilde{q}) - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q})\, X(\tilde{q}),$$

et si on note H_X, H_Y les relèvements hamiltonien c'est-à-dire $H_X(z) = \tilde{p} \cdot X(\tilde{q})$, $H_Y(\tilde{z}) = \tilde{p} \cdot Y(\tilde{q})$, avec $\tilde{z} = (\tilde{q}, \tilde{p}) \in V \times \mathbb{R}^n$, alors le *crochet de Poisson* s'écrit :

$$\{H_X, H_Y\} = H_X' \cdot \vec{H}_Y = \tilde{p} \cdot [X, Y](\tilde{q}),$$

où

$$\vec{H}_X = \frac{\partial H_X}{\partial \tilde{p}} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} - \frac{\partial H_X}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial}{\partial \tilde{p}}.$$

Differenciant deux fois la relation $\tilde{p}(\cdot) \cdot Y(\tilde{q}(\cdot))$ par rapport au temps on a :

Lemme 1.3.2. *Les extrémales singulières $(\tilde{q}(\cdot), v(\cdot))$ sont solutions des equations :*

$$\begin{aligned} H_Y(\tilde{z}(t)) = \{H_Y, H_X\}(\tilde{z}(t)) = 0, \\ \{\{H_Y, H_X\}, H_X\}(\tilde{z}(t)) + v(t)\,\{\{H_Y, H_X\}, H_Y\}(\tilde{z}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Si $\{\{H_Y, H_X\}, H_Y\} \neq 0$ le long de l'extrémale, alors le contrôle singulier est dit d'ordre minimal *et est donné par la relation :*

$$v(\tilde{z}(t)) = -\frac{\{\{H_Y, H_X\}, H_X\}(\tilde{z}(t))}{\{\{H_Y, H_X\}, H_Y\}(\tilde{z}(t))}.$$

En plongeant le nouveau contrôle v dans le pseudo-hamiltonien, on définit le hamiltonien vrai noté $\mathbf{H}_s(\tilde{z}) = H(\tilde{z}, v(\tilde{z}))$, et on a :

Lemme 1.3.3. *Les extrémales singulières d'ordre minimal sont les solutions de $\dot{z}(t) = \vec{\mathbf{H}}_s(z(t))$, avec la contrainte $H_Y(z(t)) = \{H_Y, H_X\}(z(t)) = 0$.*

1.3.2 Cas de la dimension 3 appliqué au problème de Zermelo

Considérons le système de contrôle affine suivant : $\dot{\tilde{q}} = X(\tilde{q}) + u\,Y(\tilde{q})$, avec $u \in \mathbb{R}$ et $\tilde{q} \in \mathbb{R}^3$, où X, Y, sont des champs de vecteurs C^ω. Soit $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{q}(\cdot), \tilde{p}(\cdot))$ une extrémale singulière de référence sur $[0\,, t_f]$. On suppose que :

(A1) la géodésique de référence $t \mapsto \tilde{q}(t)$ est une immersion sur $[0, t_f]$.

(A2) X, Y sont linéairement indépendants le long de $\tilde{q}(\cdot)$.

(A3) Y, $[Y, X]$, $[[Y, X], Y]$ sont linéairement indépendants le long de $\tilde{q}(\cdot)$.

De (A3), p est unique à un facteur près et la géodésique est stricte et de plus v peut être calculé en boucle fermée par la relation :

$$v(\tilde{z}) = -\frac{D'(\tilde{q})}{D(\tilde{q})}, \tag{1.12}$$

avec :

$$\begin{aligned} D(\tilde{q}) &= \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y]), \\ D'(\tilde{q}) &= \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X]). \end{aligned} \tag{1.13}$$

De plus, si on introduit

$$D''(\tilde{q}) = \det(Y, [Y, X], X), \tag{1.14}$$

on a la proposition suivante :

Proposition 1.3.4. *On a :*

- *Les géodésiques hyperboliques sont contenues dans $DD'' > 0$.*
- *Les géodésiques elliptiques sont contenues dans $DD'' < 0$.*
- *les géodésiques anormales (ou exceptionnelles) sont situées sur $D'' = 0$.*

Si on se place dans le cas Zermelo de révolution c'est-à-dire si on considère g et F_0 sous la forme

$$g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2 \quad \text{et} \quad F_0(q) = \mu(r)\frac{\partial}{\partial \theta},$$

l'extension de Carathéodory-Zermelo-Goh, avec $\tilde{q} = (r, \theta, \alpha)$, ($\alpha$ étant l'angle de cap) nous donne :

$$X = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial r} + \left(\mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Un calcul simple des crochets de Lie nous donne :

$$\begin{aligned}
[Y,X](\tilde{q}) &= \sin\alpha\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\alpha}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta},\\
[[Y,X],Y](\tilde{q}) &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta},\\
[[Y,X],X](\tilde{q}) &= \left(-\mu'(r)\sin\alpha + \frac{m'(r)}{m^2(r)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\tilde{q}) &= \frac{1}{m(r)},\\
\mathrm{D}'(\tilde{q}) &= -\mu'(r)\sin^2\alpha + \frac{m'(r)\sin\alpha}{m^2(r)},\\
\mathrm{D}''(\tilde{q}) &= \mu(r)\sin\alpha + \frac{1}{m(r)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les hypothèses $(A2)$ et $(A3)$ sont toujours satisfaites, en particulier toute géodésique est stricte. Mais l'hypothèse $(A1)$ peut être violée dans le cas où :

$$\cos\alpha = \mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)} = 0.$$

La dynamique en dimension 3 s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\alpha,\\
\dot{\theta} &= \mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)},\\
\dot{\alpha} &= \mu'(r)m(r)\sin^2\alpha - \frac{m'(r)\sin\alpha}{m(r)}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

et on a la proposition suivante, qui assure l'intégrabilité du système.

Proposition 1.3.5. *La dynamique* (1.15) *peut être intégrée par quadrature.*

Une des application importante de cette transformation, outre l'intégration par quadrature des solutions, est d'utiliser les résultats de [25] pour évaluer dans notre problème l'application entrée-sortie au voisinage d'une courbe géodésique de référence, en utilisant *les formes semi-normales* (pour plus de détails voir [21] correspondant au chapitre 7). Cela donne une évaluation des ensembles accessibles et de leurs frontières, remplies par les courbes géodésiques. Pour les détails, nous nous référons à la référence précédente dans un contexte en dimension plus grande. Un autre point de vue, permet de caractériser le problème par un potentiel généralisé et de faire une étude qualitative intéressante du flot extrémale.

1.4 Point de vue système mécanique dans le cas de révolution

1.4.1 Potentiel généralisé et système réduit

Pour un problème de Zermelo de révolution (cf. définition 1.1.1) l'hamiltonien peut s'écrire comme un système mécanique décrit par un *potentiel généralisé* qui nous fournit un outil pour paramétrer et classifier les extrémales, au moyen de la constante de Clairaut p_θ.

Théorème 1.4.1. *Considérant un problème de navigation de Zermelo sur une surface de révolution, avec un courant parallèle. Si l'on note* $\|p\|_g = \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)^{1/2}$*, l'évolution du système projeté dans l'espace* (r, p_r) *est décrite par la dynamique hamiltonienne* restreinte

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{p_r}{\|p\|_g}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} = -p_\theta \mu'(r) + \frac{p_\theta^2 m'(r)}{m^3(r)\|p\|_g}. \tag{1.16}$$

La dynamique précédente peut être intégrée en utilisant le système mécanique

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V_\varepsilon(r, p_\theta) = 1,$$

où le potentiel généralisé V_ε *est donné par*

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{m^2(r)(\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2},$$

et où $\varepsilon < 0, = 0, > 0$ *correspondent respectivement aux cas hyperbolique, anormal et elliptique. De plus, l'hamiltonien étant constant, en normalisant* $\varepsilon = -1, 0, 1$ *respectivement dans les cas hyperbolique, anormal et elliptique, on a :*

$$p_r^2 = (\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2(r)} \tag{1.17}$$

avec

$$(p_{r_0}, p_\theta) \in J_\varepsilon(r_0) = \left\{ (p_{r_0}, p_\theta) \;\middle|\; \left(p_{r_0}^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r_0)}\right) = (\varepsilon + p_\theta \mu(r_0))^2 \right\}. \tag{1.18}$$

Ce résultat est un résultat central dans notre étude, pour la preuve voir le chapitre 8. En effet, contrairement au cas riemannien où le potentiel est réduit à $V(r, p_\theta) = p_\theta^2/m^2(r)$, le potentiel dans le cas Zermelo dépend de ε et p_θ.

1.4.2 Classification de Morse-Reeb généralisée

Définition 1.4.2. *La classification des trajectoires de la dynamique hamiltonienne restreinte (c'est-à-dire dans le plan* (r, p_r)*) paramétrée par* p_θ*, est appelée la* classification de Morse-Reeb généralisée (GMR) *définie par* le potentiel généralisé V_ε*.*

Définition 1.4.3. *Supposons le cas hyperbolique* $\varepsilon = -1$*. Un équateur* $r = r_1$*, auquel est associé un* p_θ *donné par* (1.18)*, est un point d'équilibre* $(r_1, 0)$ *de la dynamique restreinte. Il est appelé* L-elliptique *si la dynamique linéarisée est de spectre* $\{\pm i\alpha, \alpha \neq 0\}$*,* L-hyperbolique *si le spectre est de la forme* $\{\lambda, -\lambda, \lambda \neq 0\}$ *et* L-parabolique *si le spectre est nul. Les cas elliptique et hyperbolique correspondant respectivement à un cas stable associé à un minimum du potentiel et à un cas instable associé à un maximum. Un équateur correspond à une rotation stationnaire, on l'appelle une* rotation positive *(resp.* négatif*) si* θ *tourne avec une* fréquence positive (resp. négative)*. Une* géodésique séparatrice *est une géodésique* $e(t) = (r(t), *)$ *différente de l'équateur et telle que* $r(t) \to r_1$ *lorsque* $t \to \infty$*. Elle est contenue dans le même niveau de* p_θ [3] *que l'équateur et ce niveau est appelé un* niveau singulier*.*

Définition 1.4.4. *Une* composante de Reeb généralisée *est une géodésique séparatrice* $e(t) = (r(t), *)$ *telle que* $r(t)$ *converge respectivement lorsque* $t \to \pm\infty$ *vers deux équateurs différents et avec des orientations différentes.*

3. Ici c'est la constante de Clairaut p_θ, et non pas le niveau de l'hamiltonien, qui joue le rôle de niveau de la fonction de Morse.

Définition 1.4.5. *Soit R un voisinage adapté de q_0. Les géodésiques à l'instant initial se décomposent en branche ascendante de départ (c'est-à-dire $\dot{r}_0 > 0$ ou encore $p_{r_0} > 0$), branche descendante de départ (c'est-à-dire $\dot{r}_0 < 0$ ou encore $p_{r_0} < 0$) ou tangente à la parallèle pour laquelle on doit considérer le cas avec une accélération positive ou négative $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}(0)$. Le* premier retour à l'équateur *(resp.* au méridien*) associé à une géodésique est le premier point tel que la géodésique recoupe l'équateur (resp. le méridien).*

Proposition 1.4.6. *Soit R un voisinage adapté de $q_0 = (r_0, \theta_0)$.*

- *Les ensembles de niveaux dans la classification GMR se divisent en niveaux compacts correspondant aux géodésiques r-périodiques et en ensembles de niveaux non compacts correspondant aux géodésiques r-apériodiques restreintes au voisinage R.*
- *Soit q_0 une condition initiale fixée, alors en utilisant la classification GMR pour chaque voisinage adapté de q_0 on peut stratifier, grâce au paramètre p_θ, l'ensemble des géodésiques émanant de q_0 en secteurs micro-locaux (coniques) correspondant à des géodésiques compactes et non compactes.*

La classification du flot géodésique dans le cas Zermelo dépend du point initial q_0. L'existence de séparatrice dépend alors du domaine dans lequel on considère q_0. Cependant dans un voisinage convenable de tout équateur L-hyperbolique, on a toujours une séparatrice associée à ce dernier. La paramétrisation de celle-ci se fait selon la proposition suivante.

Proposition 1.4.7. *Considérons le cas hyperbolique, c'est-à-dire $\varepsilon = -1$.*

1. *Les couples (r, p_θ) formés par les équateurs r et les paramètres p_θ associés sont des solutions du système :*
$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = 1 \quad et \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}(r, p_\theta) = 0, \quad avec \quad p_\theta \neq 0. \tag{1.19}$$
2. *Les équateurs L-hyperboliques (resp. L-elliptiques) satisfont la condition supplémentaire :*
$$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2}(r, p_\theta) > 0 \quad (resp. \quad \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2}(r, p_\theta) < 0).$$
3. *Une séparatrice associée à un r-équateur est sur le même niveau p_θ donné par :*
$$p_\theta = \frac{m(r)}{\mu(r)m(r) + \delta} \quad avec \quad \delta = \mathrm{sign}(p_\theta).$$

Pour la preuve de ce résultat, voir la proposition. 8.4.9.

Exemple 1 (Cas de l'ellipsoïde de révolution (oblat) [16])**.** *Puisque chaque géodésique coupe l'équateur, on peut restreindre la condition initiale à $r(0) = 0$, où l'équateur est identifié à $(r(0), \theta(0)) = 0$. On a trois types de trajectoires :*

- *L'équateur donné par $r(t) = 0$ et cela correspond à un point singulier de la dynamique* (1.16) *avec $p_\theta = m(r)$.*
- *La ligne méridienne $\theta = cst$, correspondant à $p_\theta = 0$.*
- *Les géodésiques telles que r oscille périodiquement entre $[r_{\min}, r_{\max}]$ avec une période notée $T(p_\theta)$, $p_\theta \in]0, m(r_0)[$.*

Le système est symétrique par rapport à l'équateur, de sorte que les deux branches, ascendante et descendante, associées à p_θ formeront deux courbes symétriques, se fermant l'une l'autre. En utilisant la symétrie au méridien, on peut se restreindre à $p_\theta > 0$. Notons également que dans ce cas, l'analyse peut être poussée plus loin pour classifier les ensembles limites. En effet, si $p_\theta(0) \in]0, m(r)[$ et puisque θ est monotone, on introduit $R(p_\theta)$ comme la période de θ. Nous avons donc deux cas : $T(p_\theta)/R(p_\theta)$ rationnel pour les géodésiques périodiques et $T(p_\theta)/R(p_\theta)$ irrationnel de sorte que la géodésique associée est dense dans le tore de dimension deux. Ceci est résumé dans la figure suivante

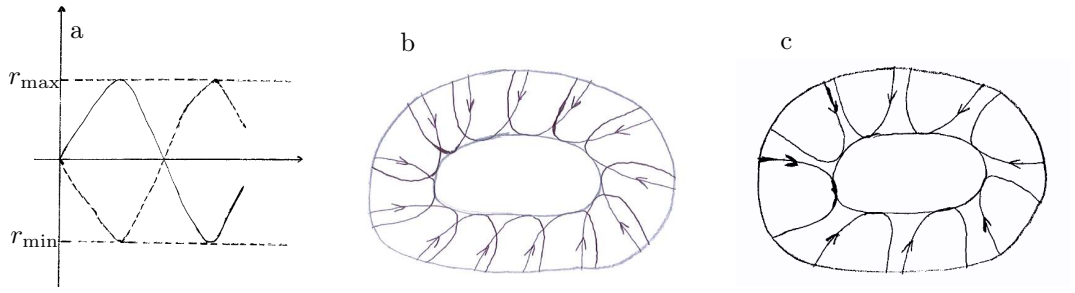


FIGURE 1.2 – Types de trajectoires dans le cas oblat de l'ellipsoïde de révolution. sur le sous-graphe (a) on donne une illustration des courbes méridiennes avec $\dot{r} > 0$. Sur le sous-graphe (b) sont représentés les géodésiques denses sur le tore délimitées par l'équateur. Sur le sous-graphe (c) sont représentés les géodésiques périodiques différentes de l'équateur et des méridiens.

Exemple 2. *Dans le cas de Serret-Andoyer [19], en partant de l'équateur identifié à zéro et correspondant à la position stable du pendule, nous avons deux secteurs associés respectivement aux solutions tournantes et oscillantes du pendule, séparées par les séparatrices. Les solutions tournantes correspondent à des orbites non compactes sur le plan mais périodiques si on les interprète sur le cylindre. Sur cette surface les trajectoires oscillantes sont homotopes à un point mais pas les trajectoires tournantes.*

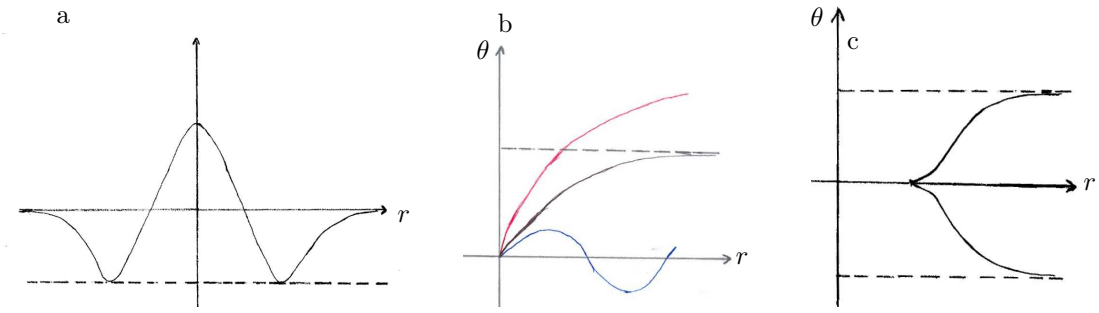


FIGURE 1.3 – Cas Serret-Andoyer : Sur le sous-graphe (a) est représenté le potentiel en fonction de r. Sur le sous-graphe (b) sont représentées les différents types de trajectoires, en noir on a la séparatrice, en bleu les trajectoires qui oscillent et en rouge celles qui font des rotations complètes. Sur le sous-graphe (c) est représenté le lieu conjugué lorsqu'on démarre de l'équateur.

1.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de présenter quelques généralités sur les problèmes de Zermelo de révolution et de poser le cadre contrôle optimal géométrique pour l'analyse du problème. Ainsi, nous avons défini le problème général qui nous intéresse dans ce chapitre et introduit les différentes notions utiles pour la compréhension de celui-ci. De plus, nous avons rappelé le principe du maximum de Pontryagin qui permet de réduire l'ensemble des solutions au flot géodésique en donnant des conditions nécessaires d'optimalités (dit du premier ordre). Grâce au PMP, nous avons discuté de la paramétrisation des extrémales et présenté deux points de vue différents pour analyser le problème. Le premier est le point de vue Carathéodory-Zermelo-Goh qui permet de paramétrer les extrémales par l'angle de cap α et ainsi de transformer le problème en un système affine en contrôle en dimension 3, ceci dans le but d'utiliser les outils développés par [25] pour étudier le statut d'optimalité des trajectoires. Le second, le point de vue système mécanique,

s'avère plus adapté pour l'étude qualitative des extrémales. Le potentiel généralisé obtenu dans le cas de révolution permettant alors de généraliser la classification de Morse-Reeb. Dans le chapitre suivant, nous discuterons plus en profondeur des conditions suffisantes d'optimalité des géodésiques dans le dessein de construire une synthèse optimale du problème.

Chapitre 2

Rôle des anormales dans la synthèse optimale, points cusp et de séparation non isochrone

Les résultats de ce chapitre sont contenus principalement dans les références [21, 23] reproduits aux chapitres 7 et 8 de ce manuscrit. L'objectif est de présenter d'une part la paramétrisation des lieux conjugués et de coupure dans le cas faible où on a uniquement des géodésiques normales (comme en cas en riemannien et en finslérien). D'autre part on discute des nouveaux phénomènes stables qui se produisent dans le cas Zermelo fort en lien avec la perte d'optimalité des trajectoires. Ici le flot géodésique est paramétré par l'angle de cap initial ce qui revient, suivant la discussion faite au chapitre précédent, à normaliser la norme du vecteur adjoint initial à 1. L'exemple historique de Carathéodory-Zermelo est utilisé comme forme normale pour illustrer les différentes situations. L'objectif à terme est d'étendre le résultat de caractérisation du lieu de coupure du cas finslérien au cas zermélien. Aussi on discutera de la conséquence de l'existence de géodésiques anormales sur la régularité de la fonction valeur, la division des branches du lieu de coupure ainsi que sur la nouvelle forme des boules en temps petits.

2.1 Rappel du cadre

Le cadre reste le même que celui défini au chapitre précédent. On considère le problème de Zermelo donné par le triplet (M, g, F_0) avec

$$g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2 \quad \text{et} \quad F_0 = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad m(r) > 0.$$

Pour $F_1 = \frac{\partial}{\partial r}$ et $F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}$, la dynamique associée au problème s'écrit :

$$\dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i\, F_i(q), \quad q = (r, \theta). \tag{2.1}$$

Le point de vue Carathéodory-Zermelo-Goh introduit au chapitre précédent permet de paramétrer le contrôle par *l'angle de cap* α en posant $u_1 = \cos\alpha$, $u_2 = \sin\alpha$. Cela revient à travailler sur l'espace d'état augmenté $\tilde{q} = (q, \alpha)$ et d'étendre le vecteur adjoint à $\tilde{p} = (p, p_\alpha)$, les géodésiques étant donc solutions du système affine et mono-entrée :

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}(t)}{\mathrm{d}t} = X(\tilde{q}(t)) + vY(\tilde{q}(t)), \quad \text{où} \quad X = F_0(q) + \cos\alpha F_1(q) + \sin\alpha F_2(q) \quad \text{et} \quad Y = \frac{\partial}{\partial\alpha},$$

où le contrôle accessoire v correspond à la dérivée de l'angle de cap et appartient à $\mathbb{R}$ tout entier. Dans cette extension, les géodésiques sont les *trajectoires dites singulières* [18]. Sous les mêmes hypothèses que dans la section 1.3 et pour

$$D = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y]), \quad D' = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X]) \text{ et } D'' = \det(Y, [Y, X], X),$$

le contrôle optimal singulier est donné par :

$$v_s(\tilde{q}) = -\frac{D'(\tilde{q})}{D(\tilde{q})}$$

et les géodésiques sont solutions de

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}(t)}{\mathrm{d}t} = X_s(\tilde{q}(t)), \quad \text{où} \quad X_s = X + v_s Y.$$

Elles sont anormales si $D'' = 0$, hyperboliques si $D \cdot D'' > 0$ et elliptiques si $D \cdot D'' < 0$. Le vecteur adjoint est défini par les conditions $\tilde{p} \cdot Y(\tilde{q}) = \tilde{p} \cdot [Y, X](\tilde{q}) = 0$.

2.2 Paramétrisation du lieu conjugué

Définition 2.2.1. *On appelle* application exponentielle *l'application* $\exp_{q_0} : \mathbb{R} \times S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$\exp_{q_0}(t, p_0) = \Pi \circ e^{t\vec{\mathbf{H}}}(q_0, p_0), \tag{2.2}$$

où Π *est la q-projection* $(q, p) \mapsto q$ *et* $e^{t\vec{\mathbf{H}}}(q_0, p_0)$ *la solution au temps* t *du système* $\dot{z}(s) = \vec{\mathbf{H}}(z(s))$, $z(0) = (q_0, p_0)$, *la condition initiale* q_0 *étant fixée et* $\|p_0\|_g = 1$.

- *Dans le cas normal, un* temps conjugué *est un temps où l'application exponentielle n'est pas une immersion et on note* t_{1c} *le premier temps conjugué. En considérant toutes les géodésiques hyperboliques issues de* q_0 *l'ensemble des points conjugués images des temps conjugués forment le* lieu conjugué $C(q_0)$.
- *Un temps cusp le long d'une géodésique* $q(\cdot)$ *donnée est un temps* t_{cusp} *tel que* $\dot{q}(t_{\text{cusp}}) = 0$, *le point* $q(t_{\text{cusp}})$ *associé est appelé point cusp.*
- *Soit* $q(\cdot)$ *une géodésique donnée,* le point de coupure *est le premier point où elle cesse d'être (globalement) optimale, l'ensemble des points de coupure forme le* lieu de coupure $\Sigma(q_0)$.
- *Un point de séparation est un point où deux géodésiques minimisantes s'intersectent. L'ensemble des points de séparation forment le* lieu de séparation *noté* $L(q_0)$.
- *Le lieu de séparation se divise en deux parties à savoir : le* lieu de séparation isochrone, *noté* $L_I(q_0)$, *constitué des points de séparation isochrones qui sont tels que les deux géodésiques s'intersectant, s'intersectent avec le même temps ; et le* lieu de séparation non isochrone, *noté* $L_N(q_0)$, *constitué des points de séparation non isochrones qui sont tels que les géodésiques qui s'intersectent, s'intersectent avec des temps différents.*

Remarque 6. *En géométrie riemannienne ou finslérienne, tous les points de séparation sont isochrones, dans ce cas on parle simplement de point de séparation, car aucune confusion n'est à craindre [37, 10]. De manière générale, l'existence de points de séparation non isochrones révèle une discontinuité de la fonction temps minimal et dans le cas des problèmes de Zermelo, l'existence de ceux-ci est liée à l'existence de géodésiques anormales. Une discussion plus complète en rapport avec ces points est faite en [23] correspondant au chapitre 8 de ce manuscrit : on y reviendra aussi dans la section suivante.*

En utilisant la paramétrisation des géodésiques qui s'appuie sur la transformée de Carathéodory-Zermelo-Goh on dispose d'un algorithme pour calculer numériquement les points conjugués et ce calcul est analytique dans le cas intégrable. Il peut être présenté comme suit.

Proposition 2.2.2. *Soit $q(t)$ une géodésique de référence,*

1. *On suppose que $q(\cdot)$ est une immersion injective et peut s'identifier à $t \to (t, 0, 0)$. Dans le cas d'une géodésique normale $q(t)$, le premier temps conjugué t_{1c} est le premier temps tel que l'équation de Jacobi*
$$\frac{\mathrm{d}\delta\tilde{q}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial X_s(\tilde{q}(t))}{\partial \tilde{q}}\delta\tilde{q}(t)$$
admet une solution $J(t)$ et tel que J est semi-verticale à $t = 0$ et $t = t_{1c}$, i.e. $J(t)$ colinéaire à $Y(\tilde{q}(t))$. Dans le cas normal hyperbolique et elliptique, les trajectoires géodésiques sont temps minimal et maximal respectivement dans un voisinage conique[1] de la géodésique de référence jusqu'au premier point conjugué. Dans le cas anormal, la géodésique de référence est à la fois temps minimal et maximal dans un voisinage conique.
2. *Si la géodésique de référence est anormale, alors elle peut admettre des points cusps en rencontrant le lieu de colinéarité de X et Y (c'est-à-dire où $\dot{q}(t) = 0$), celui-ci étant défini par le lieu des points où le courant est modéré, formant la transition du domaine courant fort à faible. En ces points la trajectoire anormale de référence cesse d'être optimale et cela correspond à un point conjugué le long de la géodésique anormale.*

Une idée de preuve de ce résultat, adapté au cas des problèmes de Zermelo en 2D, se trouve dans le chapitre 8 (théorème 8.3.2). Cependant le résultat original, établit dans un cadre général en dimension plus grande se trouve dans [25].

Remarque 7. *Pour un problème de Zermelo, les points cusps existent uniquement dans le cas anormal. En effet si $\dot{q}(t)$ s'annule en un point, alors l'hamiltonien s'annulera également en ce point et on aura donc $p^0 = 0$. Ce qui correspond au cas anormal. Ainsi la notion de point cusp dans le cadre des problèmes de Zermelo est liée à l'existence de directions anormales.*

Algorithme pratique de calcul [18]. Dans le cas normal, les points conjugués sont donnés en utilisant la proposition 2.2.2 par la condition
$$\det(J(t_{1c}), Y(\tilde{q}(t_{1c})), X(\tilde{q}(t_{1c}))) = 0$$
où $J(t)$ désigne le champ de Jacobi qui est semi-vertical à $t = 0$, c'est-à-dire $J(0) = Y(\tilde{q}(0))$. En effet, utilisant la *ad-formule*, on a :
$$J(t) = e^{t\ \mathrm{ad}\, X_s}(Y(\tilde{q}(t)) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{ad}^n\, X_s(Y(\tilde{q}(t))$$
où $\mathrm{ad}\, X_s(Y) = [X_s, Y]$ désigne l'opérateur adjoint et $\mathrm{ad}^n\, X_s(Y) = \mathrm{ad}^{n-1}\, X_s(\mathrm{ad}\, X_s(Y))$. Puisque $\tilde{q}(t)$ est une courbe géodésique, on a (cf. [18, lemma 21] :
$$J(t) \in \mathrm{Span}\{Y(\tilde{q}(t)), [Y, X_s](\tilde{q}(t))\}$$
et il peut alors s'écrire sous la forme
$$J(t) = \lambda_1(t)Y(\tilde{q}(t)) + \lambda_2(t)[Y, X_s](\tilde{q}(t)).$$
Ainsi, les temps conjugués t_c (en particulier le premier temps conjugué t_{1c}) sont donnés par $\lambda_2(t_c) = 0$ c'est-à-dire $J(t)$ colinéaire à $Y(\tilde{q}(t))$. On a donc :

Proposition 2.2.3. *Dans le problème de la navigation de révolution de Zermelo, le lieu conjugué est défini par le champ de Jacobi $J(t)$ qui peut être intégré grâce à la propriété d'intégrabilité de la dynamique et nous avons : $J(t)$ appartient au noyau de la forme de* Cartan-Hilbert *ω définie par :*
$$\omega(X_s) = 1, \quad \omega(Y) = \omega([Y, X_s]) = 0,$$
et au temps conjugué t_c, $J(t_c)$ est semi-vertical c'est-à-dire colinéaire à $Y(\tilde{q}(t_c))$.

1. Trajectoires qui partent de q_0 avec un angle de cap initial dans un voisinage de celui de la géodésique de référence.

Ceci définit le lieu conjugué dans le cas normal. Dans le cas anormal, le long d'une géodésique anormale donnée, les points conjugués (notamment le premier point conjugué) peuvent être calculés comme des points cusps (notamment le premier point cusp) le long de celle-ci. Nous obtenons la figure 2.1 suivante qui résume les deux cas à partir des comportements géodésiques uniquement.

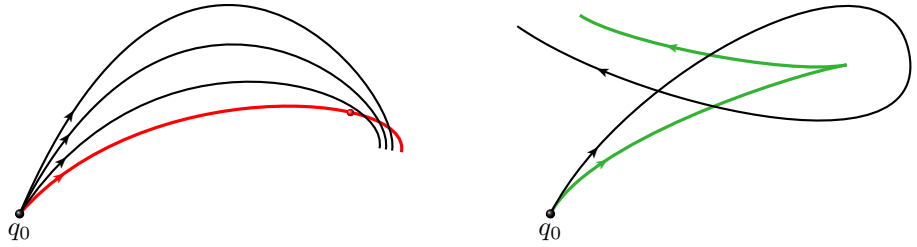


FIGURE 2.1 – Illustration de points conjugués dans le cas normal (à gauche) et anormal (à droite).

Notons que la notion de point conjugué est en lien avec l'optimalité locale des trajectoires. En effet, comme mentionné dans la proposition 2.2.2, pour une géodésique de référence donnée, jusqu'au premier point conjugué celle-ci est localement optimale et si elle ne possède pas de points conjugués, alors elle demeure localement optimale sur tout l'intervalle $[0, T]$ où elle est définie [17, 28, 32]. En lien avec l'optimalité globale des trajectoires, il peut se produire d'autres situations qui entraîne la perte d'optimalité de la géodésique de référence. La détermination du lieu de coupure passe aussi par la connaissance du lieu de séparation.

2.3 Caractérisation du lieu de coupure

2.3.1 Caractérisation dans les cas riemannien et finslérien

La détermination des *lieux conjugué et de coupure* pour *les sphères convexes* remonte aux premiers travaux de Poincaré et Myers [78, 79, 88], dans le cas analytique. L'extension au cas $\mathbb{C}^\infty$ présente des situations très compliquées [49, 50]. Ce n'est que très récemment que l'objectif de calculer les lieux conjugués et de coupure pour les ellipsoïdes oblat et prolat de révolutions a été finalisé, en résolvant la conjecture de Jacobi de forme astroïdale sur le lieu conjugué, puis étendu aux ellipsoïdes généraux [61]. Cependant, il existe en géométrie riemannienne un résultat de caractérisation du lieu de coupure à partir du lieu conjugué et du lieu de séparation. Ce résultat de caractérisation reste valide dans le cadre finslérien et permet avec une bonne utilisation des méthodes numériques de reconstruire le lieu de coupure. En effet, si on considère le cadre riemannien ou finslérien on a (cf. [37, proposition 2.2, chapitre 13] dans le cas riemannien, [10, chapitre 8] dans le cas finslérien) :

Théorème 2.3.1 (Caractérisation du lieu de coupure)**.** *Soit $z = (q, p)$ une extrémale de référence, si $q(t_c)$ est un point de coupure le long de $q(\cdot)$ alors*

a) *ou bien $q(t_c)$ est un point conjugué le long de $q(\cdot)$,*

b) *ou bien $q(t_c)$ est un point de séparation isochrone le long de $q(\cdot)$ c'est-à-dire qu'il existe $z' = (q', p') \neq (q, p)$ tel que $q(t_c) = q'(t_c)$.*

Réciproquement si a) ou b) est vrai, alors il existe un temps $t_1 \leq t_c$ tel que $q(t_1)$ est un point de coupure le long de $q(\cdot)$.

Remarque 8. *Ce résultat demeure valable dans le cas Zermelo faible, nous l'avons notamment utilisé dans le cas du problème vortex pour le calcul des boules dans le cas d'un courant faible voir le chapitre 4 pour plus de précisions (voir aussi chapitre 6).*

La preuve du théorème 2.3.1 s'appuie principalement sur la continuité de la fonction temps minimal sur la variété M par rapport à la topologie définie par la métrique g. En effet, dans le

cas riemannien la fonction temps minimal est associée à la fonction distance qui est par définition continue pour la topologie définie par la métrique g [37]. Dans le cas finslérien, la fonction temps minimal est associée à la (pseudo)-métrique finslérienne h définie en (1.9) (cf. chapitre 1) et on montre que la distance définie par la métrique finslérienne est continue par rapport à la topologie définie par la métrique g [10, section 6.2]. Dans le cas Zermelo fort, la fonction temps minimal n'est plus associée à une (pseudo)-métrique et l'existence de directions anormales entraîne alors de nouvelles situations que nous décrivons ci-dessous en lien avec la perte de continuité de la fonction temps minimale.

2.3.2 Point cusp et point de séparation non isochrone

Point cusp le long d'une anormale. Pour des problèmes de types Zermelo (même en dimension supérieure) les points cusps se forment uniquement le long des géodésiques anormales. Ils correspondent alors à des *points conjugués généralisés* le long d'une trajectoire non régulière et toute anormale possédant un point cusp est optimale au plus jusqu'à ce point. Une autre propriété intéressante de ces points est qu'ils apparaissent, le long d'une anormale de référence donnée, comme limite de self-intersections de géodésiques hyperboliques partant d'un voisinage conique de l'anormale. Dans l'exemple historique nous avons bien illustré cette propriété (cf. chapitre 7), celle-ci peut être formulée comme suit (cf. Fig. 2.2 pour illustration) :

Proposition 2.3.2. *Si on considère une anormale de référence $q_\alpha(\cdot)$, un point cusp q_{cusp} tel que $q_{\text{cusp}} = q_\alpha(t_{\text{cusp}})$, correspond à une limite de self-intersection de géodésiques normales hyperboliques partant d'un voisinage conique de $q_\alpha(\cdot)$, c'est-à-dire qu'il existe une suite (α_i) telle que la géodésique $q_{\alpha_i}(\cdot)$ paramétrée par α_i soit hyperbolique et deux suites $t_i < t_{\text{cusp}} < t_i'$ telles que $q_{\alpha_i}(t_i) = q_{\alpha_i}(t_i')$ et :*

$$\lim_{i\to+\infty} t_i = \lim_{i\to+\infty} t_i' = t_{\text{cusp}} \quad \text{et} \quad \lim_{i\to+\infty} \alpha_i = \alpha$$

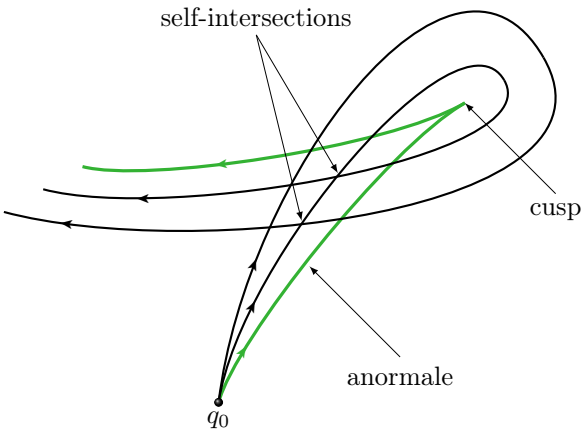


FIGURE 2.2 – Illustration d'une géodésique anormale avec un point cusp apparaissant comme limite de géodésiques hyperboliques qui se recoupent.

Corollaire 2.3.3. *Les géodésiques anormales perdent leur optimalité aux premiers points cusp lorsque ceux-ci existent. Cependant la fonction temps minimal est continue en ces points.*

Remarque 9. *Ce corollaire découle de la proposition 2.3.2 dans ce sens où la suite des self-intersections des géodésiques normales autour du point cusp, assurent d'une part la perte d'optimalité de la géodésique anormale car les normales qui se recoupent coupent l'anormale pour la première fois avec un temps plus petit. D'autre part, la continuité de la fonction temps minimal au point cusp vient de ce que le temps de self-intersection converge vers le temps cusp.*

Point de séparation non isochrone. En géométrie riemannienne et finslérienne, la continuité de la fonction temps minimal garantie l'absence de point de séparation non isochrone, ceux-ci sont en effet liés à la discontinuité de la fonction temps minimal. Pour les problèmes de Zermelo que nous considérons, si on suppose en plus ceux-ci géodésiquement complet, il existera alors pour chaque anormale donnée des points de séparation non isochrones lié à l'absence de contrôlabilité locale autour du point initial. En effet, puisque les anormales sont temps minimisant et maximisant (au moins pour des temps courts), le bord extérieur, au sens du cône des directions admissible, des anormales est rejoint en temps strictement plus grand que le bord intérieur (cf. Fig. 2.3 et 2.4 pour illustration).

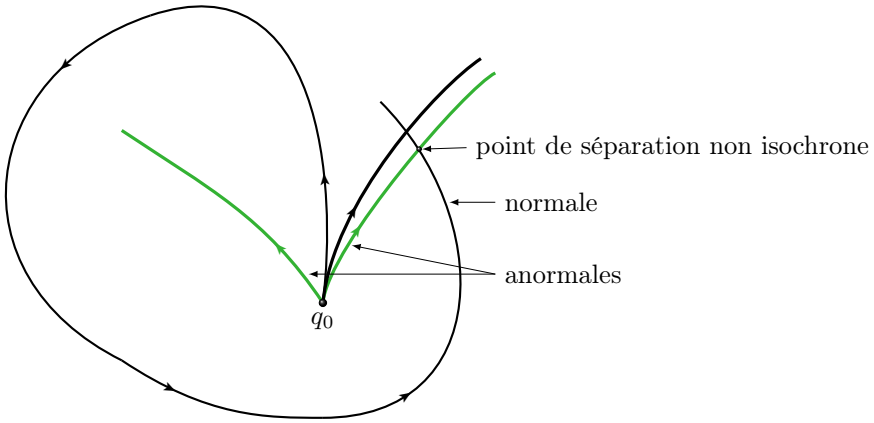


FIGURE 2.3 – Illustration d'un point de séparation non isochrone. La géodésique hyperbolique venant de l'extérieur intersecte la géodésique anormale avec un temps strictement plus grand.

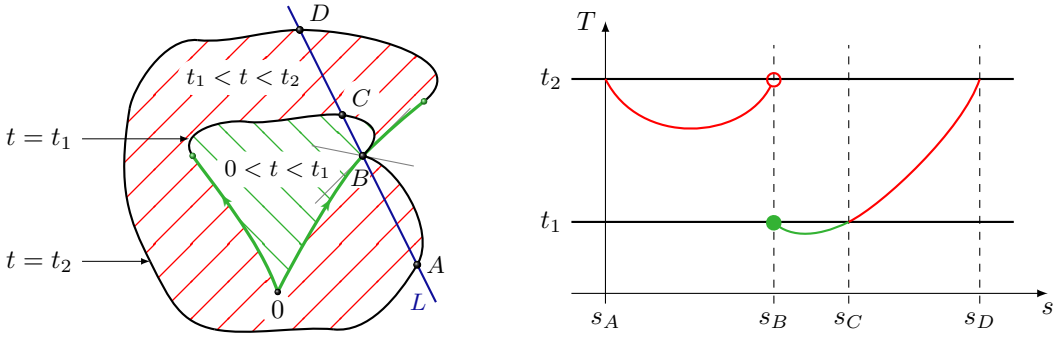


FIGURE 2.4 – Discontinuité de la fonction temps minimal $V_{q_0}(\cdot)$ en un point de séparation non isochrone. Considérons deux temps $0 < t_1 < t_2$, avec t_1 petit et t_2 assez grand. (Gauche) Boules de rayons t_1 et t_2 avec les sphères correspondantes. La fonction temps minimal $V_{q_0}(\cdot)$ est discontinue en B, à l'intersection de l'anormale de droite de longueur t_1 et d'une géodésique hyperbolique de longueur t_2. (A droite) La fonction temps minimal $V_{q_0}(\cdot)$ le long de la droite L paramétrée par s et telle que les coordonnées s_A, s_B, s_C et s_D correspondent respectivement aux points A, B, C et D. On peut voir la discontinuité de $V_{q_0}(\cdot)$ en s_B.

Remarque 10. *Au point de séparation non isochrone, l'anormale intersectée ne perd pas son optimalité, seul la géodésique normale qui intersecte l'anormale avec un temps plus grand perd son optimalité.*

Remarque 11. *Il existe des problèmes de Zermelo pour lesquelles on n'a pas de point de séparation non isochrone. En considérant par exemple dans le plan euclidien, $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, le*

problème de Zermelo défini par la dynamique : $\dot{q} = 1 + q$, $q = (x, y)$; les solutions sont des droites et les anormales ne sont jamais recoupées, le lieu de séparation est vide et la fonction temps minimal est continue sur son domaine de définition. Cependant, le problème ainsi défini n'est pas contrôlable, car partant de l'origine on ne sort jamais du cône délimité par les anormales (droites paramétrées par $\alpha_a^1 = \pi/6$, $\alpha_a^2 = \pi/3$). Ainsi, pour un problème de Zermelo dans le cas fort, ou bien le problème est géodésiquement complet et la fonction temps minimal est discontinue, ou bien la fonction temps minimal est continue et le problème n'est pas géodésiquement complet, ni même (globalement) contrôlable.

2.3.3 Régularité de la fonction valeur et lieu de coupure dans le cas fort

En résumé, la différence fondamentale entre les cas Zermelo faible et fort vient de l'existence de géodésiques anormales dans le cas fort. Celles-ci sont responsables des nouvelles situations pour lesquelles on peut perdre l'optimalité le long des trajectoires à savoir : les points cusps et les points de séparation non isochrones ; Les points de séparation non isochrones étant en lien avec la discontinuité de la fonction valeur. En dehors de ces points, la fonction temps minimale demeure, comme dans les cas riemannien et finslérien, continue. Cela est donné par le résultat suivant :

Théorème 2.3.4. *Considérons un problème de Zermelo géodésiquement complet donné par le triplet (M, g, F_0). Soit $q_0 \in M$, la fonction temps minimale $V_{q_0}(\cdot)$ est continue partout en dehors du domaine atteint par les géodésiques anormales strictement minimisantes.*

Démonstration. Soit $q_0 \in M$, on suppose sans nuire à la généralité que q_0 est dans un domaine de courant fort (en effet les autres cas se traitent plus aisément). Soit $q_1 \in M$ et soit $q(\cdot, \alpha)$ une géodésique qui transfert q_0 à q_1 en temps minimal (celle-ci existe car le problème est supposé géodésiquement complet) c'est-à-dire qu'il existe $t > 0$ telle que

$$q(t, \alpha) = q_1 \quad \text{et} \quad V_{q_0}(q_1) = t.$$

– Si q_1 est dans une région de courant faible, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $q_1 \in \mathbb{B}(q_1, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&i.e\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_1}(q) < \varepsilon \\
&i.e\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_0}(q_1) + V_{q_1}(q) < t + \varepsilon \\
&i.e\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_0}(q) < t + \varepsilon, \quad \text{car} \quad V_{q_0}(q) \leq V_{q_0}(q_1) + V_{q_1}(q).
\end{aligned}$$

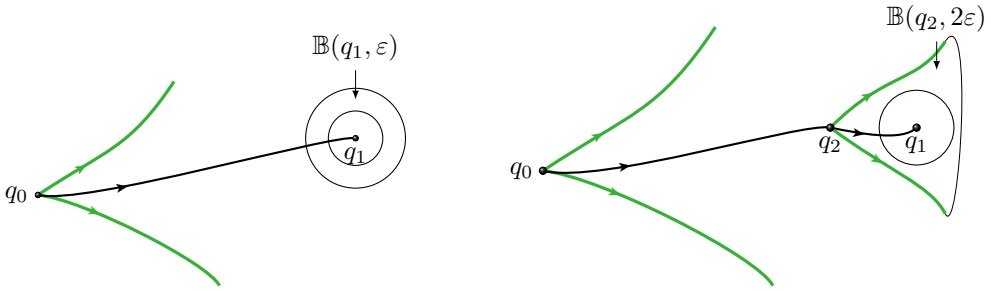
Ainsi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_0}(q) - t < \varepsilon$.

– Si q_1 est dans une région de courant fort, par hypothèse que q_1 n'appartient à aucune géodésique anormale strictement minimisante, on peut alors supposer que la géodésique $q(\cdot, \alpha)$ est une géodésique normale minimisante. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on pose $q_2 = q(t - \varepsilon, \alpha)$. Puisque $q(\cdot, \alpha)$ est une géodésique normale, elle demeure admissible et contenue dans le cône de direction qui démarre de q_2 (voir Fig. 2.5 pour illustration). On a alors $q_1 \in \mathbb{B}(q_2, 2\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&i.e\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_2}(q) < 2\varepsilon \\
&i.e\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_0}(q_2) + V_{q_2}(q) < t - \varepsilon + 2\varepsilon \\
&i.e\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_0}(q) < t + \varepsilon, \quad \text{car} \quad V_{q_0}(q) \leq V_{q_0}(q_2) + V_{q_2}(q).
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, q \in B(q_1, \eta),\ V_{q_0}(q) - t < \varepsilon$. Le problème étant considéré géodésiquement complet par hypothèse, on a la semi-continuité inférieur de la fonction valeur. Par conséquence, la fonction valeur est continue en q_1.

□



Cas courant faible. Cas courant fort.

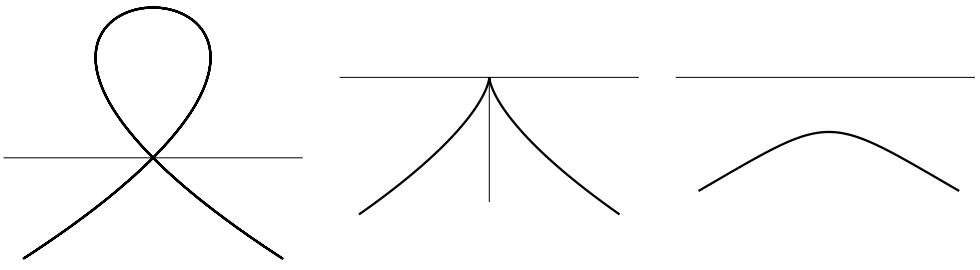
FIGURE 2.5 – Illustration de la construction d'un voisinage de q_1 contenu dans la boule zermelienne dans les cas faible et fort. En vert sont représentés les anormales et en noir la normale de référence considéré.

Remarque 12. *Le corollaire 2.3.3, le théorème 2.3.4 et la discussion fait sur les points de séparation non isochrone, donne un résultat global de la régularité de la fonction temps minimal sur tout le domaine.*

Pour caractériser le lieu de coupure dans le cas Zermelo fort, il faut donc rajouter à la caractérisation classique donnée au théorème 2.3.1, les deux nouvelles situations décrient ci-dessus. En effet en dehors des anormales, les points de coupure sont, comme dans les cas finslérien et riemannien, soit des points conjugués (normaux), soit des points de séparation isochrone. Afin de couvrir le cas fort, il faudra en plus tenir compte dans le cas anormale, des points cusp et des points de séparations non isochrone.

2.3.4 Éléments de la théorie des singularités et points cusps le long des anormales

Soit $\gamma : t \to (x(t), y(t))$ une courbe lisse dans le plan [2]. Un point est un point singulier semi-cubique à $t = t_{\text{cusp}}$ si $\gamma'(t_{\text{cusp}}) = 0$ et si $\gamma^{(2)}(t_{\text{cusp}})$ et $\gamma^{(3)}(t_{\text{cusp}})$ sont indépendants. En utilisant des coordonnées appropriées, l'image peut être identifiée à l'équation $x^2 - y^3 = 0$. Ceci conduit à un modèle algébrique de la singularité sur $\mathbb{R}[x, y]$ comme une transition entre une solution de type $\mathbb{R}$-nœud de l'équation $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ avec deux tangentes distinctes en 0 : $x \pm y = 0$ et une solution de type $\mathbb{C}$-nœud de $x^3 + x^2 + y^2 = 0$ avec deux tangentes complexes en 0 données par $x \pm iy = 0$ et en gardant la branche réelle située près de 0 (mais ne contenant pas 0). Voir pour illustration la figure 2.6.



$\mathbb{R}$-nœud Cusp $\mathbb{C}$-nœud

FIGURE 2.6 – Point cusp vu comme une transition entre un $\mathbb{R}$-nœud et un $\mathbb{C}$-nœud.

2. Cette section fait partie d'un travail en collaboration avec B. Bonnard et J. Rouot.

En utilisant la théorie élémentaire des singularités, on peut construire un déploiement de cette singularité du cusp dépendant d'un paramètre. Un calcul simple montre que les géodésiques anormales et elliptiques n'apparaissent que dans le domaine de courant fort. Un modèle de la singularité des géodésiques anormales lorsqu'elles rencontrent la limite des domaines fort et faible peut être analysé en utilisant l'exemple historique de Carathéodory et Zermelo. Les équations des géodésiques sont données par :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + \cos\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sin\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\cos^2\alpha. \tag{2.3}$$

Dans cet exemple, la frontière entre les deux domaines peut être identifiée à l'ensemble $y = -1$. En effectuant la translation $Y = y + 1$ et en développant en $\alpha = 0$ jusqu'à l'ordre 2 on obtient le système

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Y - \alpha^2/2, \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \alpha, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -1 + \alpha^2.$$

Ainsi, au point $\tilde{q}_1 = (0, 0, *)$ à la frontière des deux domaines, on peut observer que α est d'ordre t, y d'ordre t^2 et x d'ordre t^3 de sorte que les poids respectifs des variables (x, y, α) sont $(3, 2, 1)$. En intégrant les géodésiques au voisinage de 0, on obtient un déploiement universel de la singularité du cusp dépendant de trois paramètres x_0, y_0, α_0 correspondant aux conditions initiales des courbes géodésiques au voisinage de 0. En particulier on représente sur la figure 2.7 le déploiement associé à $x_0 = \alpha_0 = 0$. Dans cette représentation la singularité du cusp correspond à la direction anormale lors de la rencontre de la frontière de deux domaines, les courbes qui se recoupent correspondent aux trajectoires hyperboliques traversant la frontière tandis que le troisième type correspond aux géodésiques elliptiques.

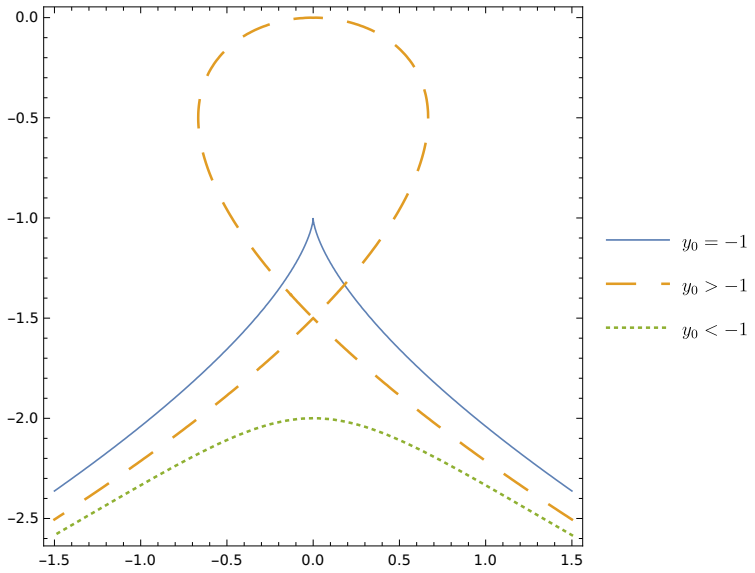
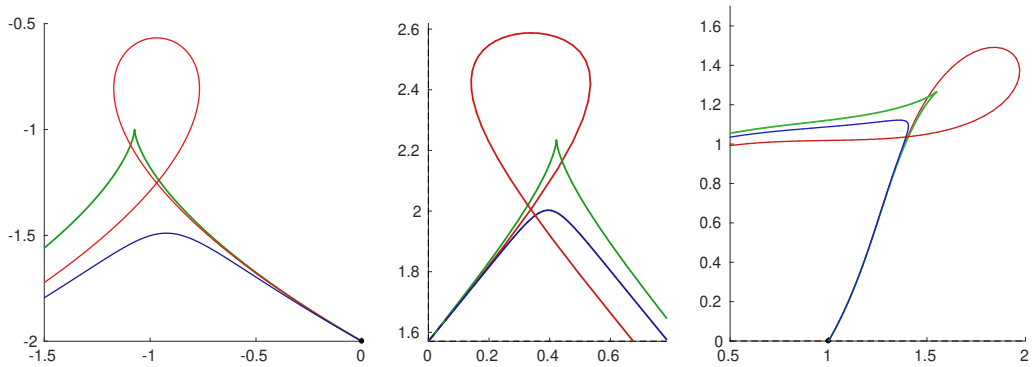


FIGURE 2.7 – Exemple historique de Carathéodory-Zermelo, "Plus rapide chemin nautique", comme un déploiement de la singularité générique du cusp le long de géodésiques anormales.

Remarque 13. *Dans le cas général où on considère une métrique et un courant quelconque, on peut grâce à la construction de formes semi-normales, montrer sous certaines hypothèses, que le déploiement de la singularité du cusp reste le même que l'illustration faite dans le cas de l'exemple historique.*

On présente dans la figure 2.8 le déploiement de la singularité du cusp dans les différents cas d'étude évoqué au chapitre 1 et traités en détails dans les chapitres 3 et 4.



Exemple historique | Cas Kepler moyenné | problème vortex

FIGURE 2.8 – Déploiement de la singularité du cusp dans les différents cas d'étude.

2.4 Synthèse optimale en temps petits et longs

Le but de cette section est d'utiliser la caractérisation du lieu de coupure donnée précédemment pour décrire la forme des boules et des sphères. Pour des temps suffisamment petits, celle-ci découle directement de la forme de l'ensemble des directions initiales possibles. Avant de donner plus de détails, il est nécessaire de rappeler la définition du *front d'ondes*.

Définition 2.4.1. *Soit $t > 0$, on appelle front d'ondes issu de q_0 au temps t l'ensemble défini par*

$$\mathbb{W}(q_0, t) = \left\{ \exp_{q_0}(t, p_0(\alpha)) \;\middle|\; \alpha \in [0\,, 2\pi[\right\},$$

où l'application exponentielle est donnée par (2.2) *et où α représente l'angle de cap qui paramètre l'extrémale. En d'autres termes, le front d'ondes au temps t est l'ensemble des points qui sont rejoints en temps t par les géodésiques.*

Remarque 14. *Pour un temps t donné, on a toujours $\mathbb{S}(q_0, t) \subset \mathbb{W}(q_0, t) \subset \mathcal{A}_{q_0,t}$. Ainsi déterminer le front d'ondes revient à considérer parmi les trajectoires admissibles uniquement les géodésiques et déterminer la sphère revient à considérer parmi les géodésiques uniquement celles qui sont encore minimisantes jusqu'au temps t considéré.*

2.4.1 Forme éventail des sphères et boules en temps petits

Pour décrire la forme des sphères et des boules en temps petits, il est important de rappeler la proposition suivante sur la régularité de l'application exponentielle.

Proposition 2.4.2. *Dans le cas faible comme dans le cas fort, pour des temps suffisamment petit, l'application exponentielle est un difféomorphisme du cercle unité sur son image. Dans le cas faible, cette image est la sphère (extrémité des géodésiques hyperboliques) et dans le cas fort elle est formée d'une part par les extrémités des géodésiques hyperboliques, l'autre partie étant les extrémités des géodésiques elliptiques, les deux parties étant séparées par les deux points correspondant aux géodésiques anormales.*

Cette proposition nous assure, pour des temps petits, de l'absence de point de coupure et donc de l'égalité entre le front d'ondes et la sphère. En effet pour un temps t suffisamment petit on a $\mathbb{S}(q_0, t) = \mathbb{W}(q_0, t)$. La forme des sphères et des boules dépend alors essentiellement de la boule de direction à q_0 définie par

$$F(q_0) = \{F_0(q_0) + u_1\, F_1(q_0) + u_2\, F_2(q_0) \mid \|u\| \leq 1\}\,. \tag{2.4}$$

Ainsi pour décrire les sphères et les boules dans ce cas on peut supposer, sans nuire à la généralité, que g est la métrique euclidienne et que le courant F_0 est horizontal au point initial q_0 et orienté dans le sens positif. On a alors :

Cas Zermelo faible. Dans ce cas, toutes les directions sont hyperboliques. La boule de directions ainsi que la sphère et la boule correspondante sont représentées dans la figure 2.9. cette situation correspond à un problème de Randers dans le plan, dans le cadre de la géométrie de Finsler, voir aussi [10].

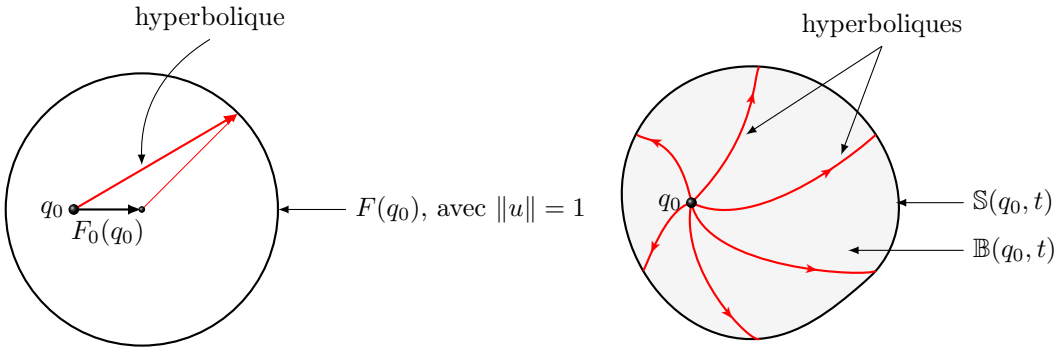


FIGURE 2.9 – (Gauche) Boule de directions dans le cas Zermelo faible. (Droite) Sphère et boule dans le cas Zermelo faible avec F_0 considéré horizontal et orienté dans le sens positif.

Cas Zermelo fort. Dans ce cas, le cône de directions est une translation de la sphère unité et nous avons deux *directions anormales* définies par $\{-\alpha_1, \alpha_1\}$ correspondant aux tangentes au cercle. Ces angles de cap divisent le cercle unitaire en deux, la partie droite (en considérant $F_0(q_0)$ orienté dans le sens positif) correspondant aux directions hyperboliques et la partie gauche aux directions elliptiques. La sphère et la boule correspondantes sont représentées sur la figure 2.10 et cela donne notamment la forme *éventail* des boules en temps petits dans le cas Zermelo fort.

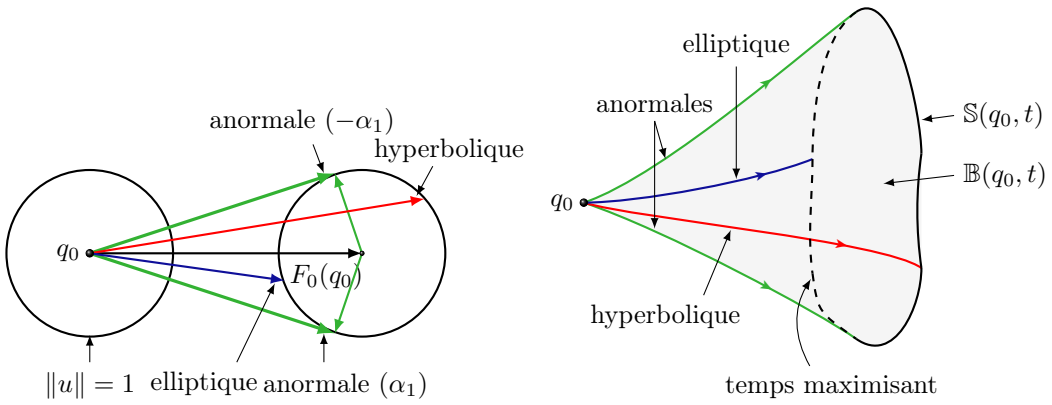


FIGURE 2.10 – (Gauche) boule de directions. (Droite) Sphère et boule en temps petit dans le cas Zermelo fort avec F_0 considéré horizontal et orienté dans le sens positif.

Remarque 15. *Les boules dans les cas faible ou modéré s'obtiennent par déformation continue des boules riemanniennes, elles représentent donc dans ce cas la surface délimitée par la sphère. En d'autres termes, la frontière de la boule coïncide avec la sphère de même rayon. Cependant, dans le cas fort, la forme éventail des boules révèle un souci de contrôlabilité locale. Elles ne peuvent plus être obtenues par déformation continue des boules riemanniennes et de plus la frontière de la boule de rayon t ne coïncide plus avec la sphère de même rayon, mais est une réunion de la sphère et des anormales prise jusqu'au temps t. Lorsque le temps devient grand, il peut y avoir apparition de points conjugués et/ou de coupure qui entraînent des situations plus complexes pour la description des boules.*

2.4.2 Fronts d'ondes versus sphères et boules en temps quelconque

Pour des temps suffisamment petits, la proposition 2.2.2 nous assure l'optimalité des géodésiques et donc l'absence de points de coupure. Cependant, lorsque le temps devient grand, les points de coupure peuvent apparaître et entraîner une perte de régularité de l'application exponentielle ce qui aura pour conséquence que la sphère et le front d'ondes ne seront plus confondus. La difficulté sera alors de savoir quelle portion du front d'ondes retenir pour former la sphère. De plus, dans le cas fort, il faudra faire attention à comment le front d'ondes recoupe les anormales. Sans rentrer dans les détails numériques, qui sont présentés au chapitre 5, on présente ci-dessous les algorithmes de construction des sphères et des boules dans les cas Zermelo faible et fort pour des problèmes supposés géodésiquement complets.

Algorithme de calcul de la sphère dans le cas Zermelo faible. Tous les points de séparation dans ce cas sont isochrones. À la différence des temps petits, on peut avoir des points conjugués et aussi des points de séparation, qui correspondent aux self-intersections du front d'ondes. Pour construire la sphère en un temps t_f donné, on procède comme suit.

- On calcule en premier le front d'ondes au temps t_f. Celui-ci se calcule aisément en considérant la paramétrisation des géodésiques données par l'angle de cap. Cela revient à calculer $\left\{\exp_{q_0}(t_f, p_0(\alpha)) \;\middle|\; \alpha \in [0, 2\pi[\right\}$.
- On calcule, grâce à l'algorithme décrit dans la section 2.2, le lieu conjugué et on ôte du front d'ondes toutes les géodésiques ayant leur premier temps conjugué en un temps plus petit que t_f.
- Ensuite, il faut ôter les géodésiques dont le premier point de séparation arrive avant t_f. Pour cela on détermine toutes les self-intersections du front d'ondes qui sont en effet les points de séparation qui se produisent au temps t_f. À chaque self-intersection du front d'ondes correspond deux géodésiques qu'on suppose paramétrées par α_1 et α_2. On ôte alors du front d'ondes toutes les géodésiques paramétrées par $\alpha \in]\alpha_1, \alpha_2[$.
- Ce retranchement fait pour tous les points de self-intersections du front d'ondes, on obtient ainsi la sphère au temps t_f. La boule se déduit alors comme étant la surface délimitée par la sphère. Cette construction est illustrée par la figure 2.11.

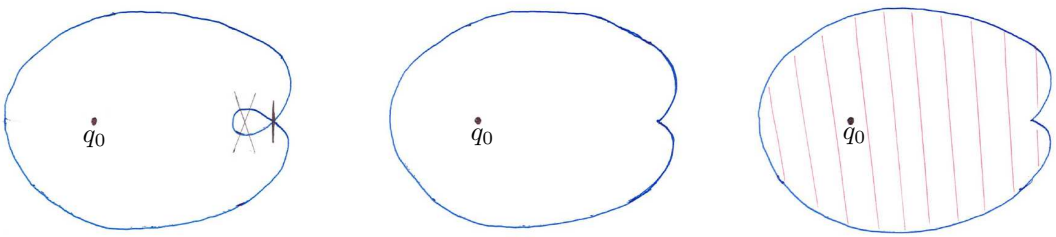


FIGURE 2.11 – Illustration du front d'ondes, de la sphère et de la boule dans le cas faible, représenté respectivement de la gauche vers la droite.

Algorithme de calcul de la sphère dans le cas Zermelo fort. En plus des self-intersections du front d'ondes, qui peuvent déjà se produire dans le cas faible, on peut également avoir dans le cas fort des points d'intersections entre le front d'ondes et les anormales (ils correspondent aux points de séparation non isochrones). Le front d'ondes dans ce cas se décomposent en deux morceaux séparés par les anormales. Un premier morceaux formé par les hyperboliques (ce morceaux contient la sphère temps minimal ou tout simplement *la sphère*). Le deuxième morceau est formé par les elliptiques, il contient la *sphère temps maximal*. La construction de la sphère et de la boule pour un temps t_f donné se fait donc en deux étapes :

— La première étape reprend les étapes du cas faible. On calcule la sphère temps minimal comme dans le cas faible. On considère ensemble les géodésiques hyperboliques et elliptiques pour calculer le front d'ondes et on ne garde ensuite que les hyperboliques pour former la sphère.

— La deuxième étape consiste à déterminer, s'ils existent, les points d'intersections du front d'ondes hyperbolique avec les anormales (points de séparation non isochrones). La boule est alors la surface délimitée par la sphère temps minimal et des anormales prisent jusqu'aux points de séparation non isochrones respectif.

— On obtient ainsi la sphère et la boule au temps t_f. Cette construction est illustrée par les figures 2.12-2.13.

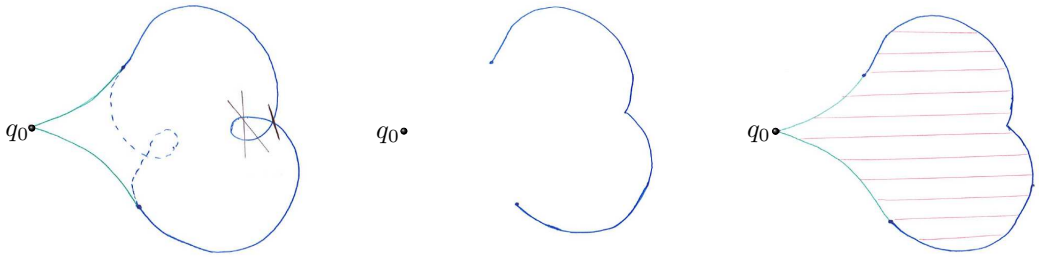


FIGURE 2.12 – Illustration du front d'ondes, de la sphère et de la boule dans le cas fort sans point d'intersection entre le front d'ondes et les anormales. (Gauche) Front d'onde hyperbolique (bleu) et elliptique (bleu interrompu) + géodésiques anormales. (Milieu) Sphère temps minimal. (Droite) Boule délimitée par la sphère et les anormales.

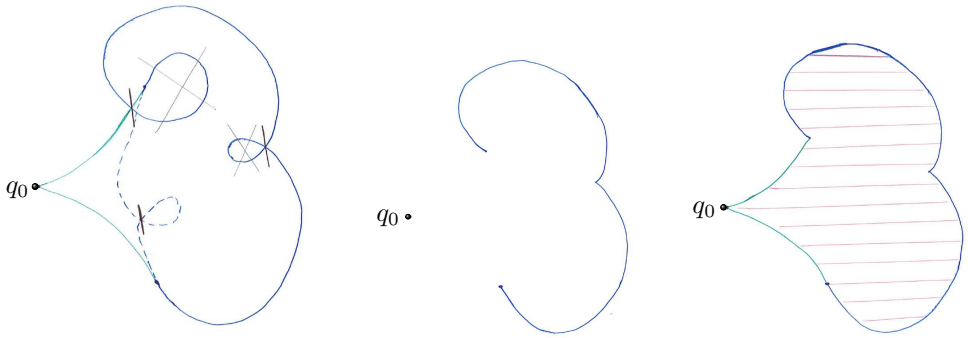


FIGURE 2.13 – Illustration du front d'ondes, de la sphère et de la boule dans le cas fort avec un point d'intersection entre le front d'ondes et une anormale. (Gauche) Front d'onde hyperbolique (bleu) et elliptique (bleu interrompu) + géodésiques anormales. (Milieu) Sphère temps minimal. (Droite) Boule délimitée par la sphère et les anormales.

2.5 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, discuté de l'optimalité des trajectoires. Dans la première partie consacrée à la paramétrisation du lieu conjugué en lien avec l'optimalité locale des trajectoires, nous avons présenté un algorithme classique pour la détermination de ce lieu avec ici la possibilité de prendre en compte le cas anormal. Dans la deuxième partie nous nous sommes intéressés à la synthèse globale du problème qui passe notamment par la régularité de la fonction valeur et la caractérisation du lieu de coupure. Nous avons alors analysé de nouvelles situations stables qui

peuvent se produisent dans le cas Zermelo fort en lien avec la perte d'optimalité des trajectoires dans le but d'étendre le résultat de caractérisation du lieu de coupure du cas finslérien. Ainsi nous avons vu que outre les points conjugués classiques (points conjugués le long de trajectoires normales) et les points de séparation isochrones, qui suffisent pour caractériser le lieu de coupure en finslérien, il peut exister dans le cas Zermelo fort des points cusps et des points de séparation non isochrones le long des géodésiques anormales. Les points cusps étendant dans le cas anormal la notion de point conjugué et les points de séparation non isochrones étant des cas particuliers de points de séparation où des géodésiques normales rencontrent des géodésiques anormales avec un temps strictement plus grand entraînant une perte de continuité de la fonction valeur. La dernière partie à été consacrée à la description des sphères et des boules. Notons que d'autres phénomènes, liés au modèle, peuvent introduire des difficultés supplémentaires dans la construction des sphères et des boules. C'est le cas par exemple du problème vortex qui possède une singularité au vortex responsable de l'existence de boules non simplement connexes lorsqu'on se restreint sur le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ces situations sont difficilement analysables de manière générale, cependant le cas du vortex, est présenté au chapitre 4.

Chapitre 3

Application à l'exemple historique et au cas Kepler moyenné

Ce chapitre reprend principalement l'étude faite dans la référence [23] reproduite au chapitre 8 de ce manuscrit. L'objectif est d'appliquer à deux exemples la théorie développée précédemment. Nous reprenons en premier l'exemple *historique* étudié par Carathéodory [36] afin d'apporter quelques précisions supplémentaires sur l'analyse déjà faite par ce dernier et de faire une synthèse globale du problème dans un voisinage adapté. L'absence de point conjugué dans le cas de l'exemple historique ne permet pas de couvrir toutes les situations précédemment décrites. Ainsi, il sera intéressant pour nous de considérer le problème défini par la famille de métriques de révolutions paramétrée par $\lambda \in [0,1]$ et définie par $m(r) = \sin^2 r/(1-\lambda \sin^2 r)$ dont le cas $\lambda = 0$ correspond a la métrique usuelle sur la sphère et à la limite pour $\lambda = 1$ on a la métrique singulière dite de Grushin. Elle apparaît également, pour $\lambda = 4/5$, dans le problème de Kepler ; c'est ce qui justifie l'appellation "cas Kepler moyenné" (cf. [15] pour une présentation plus détaillée du problème). En considérant dans un premier temps un courant constant évoluant le long des parallèles, la synthèse optimale présente une situation plus complète où on a plusieurs branches dans le lieu de coupure.

3.1 Exemple historique de Carathéodory-Zermelo [21]

Dans cette section, on s'intéresse à l'exemple historique introduit dans le chapitre 1. On considère les coordonnées suivantes $\tilde{q} = (x, y, \gamma) = (\theta, r, \pi/2 - \alpha)$, où r, θ et α sont entendus au sens de la section 1.3 (cf. chapitre 1). Ici, les fonctions $\mu(\cdot)$ et $m(\cdot)$ sont données par $\mu(y) = y$ et $m(y) = 1$ et dans cette représentation la dynamique prend la forme :

$$\dot{x} = y + \cos\gamma, \quad \dot{y} = \sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = -\cos^2\gamma. \tag{3.1}$$

3.1.1 Paramétrisation des extrémales et intégration du flot

Un calcul direct à partir des résultats de la section 1.3 (cf chapitre 1) conduit à

$$D(\tilde{q}) = 1, \quad D'(\tilde{q}) = \cos^2\gamma \quad \text{et} \quad D''(\tilde{q}) = y\cos\gamma + 1,$$

Et suivant l'analyse faite au chapitre 1, les géodésiques normales et anormales sont données par :

— **Cas anormal.** Les géodésiques anormales sont contenues dans $D'' = y\cos\gamma + 1 = 0$. Ainsi, étant donné une condition initiale (x_0, y_0, γ_0) telle que $|y_0| \geq 1$, la géodésique associée est anormale si $\gamma_0 \in \{\gamma_a^1, \gamma_a^2\}$ avec

$$\gamma_a^1 = \arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right) \quad \text{et} \quad \gamma_a^2 = -\arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right).$$

Dans le cas fort, c'est-à-dire si $|y_0| > 1$, $\gamma_a^1 \neq \gamma_a^2$ et on a deux géodésiques anormales. Sinon, si $|y_0| = 1$ il n'y a qu'une seule géodésique anormale, et si $|y_0| < 1$ (cela correspond au cas faible) il n'y a aucune anormale.

— **Cas normal.** Les géodésiques hyperboliques (resp. elliptiques) sont contenues dans $DD'' = D'' > 0$ (resp. $DD'' = D'' < 0$). Ainsi, étant donné une condition initiale (x_0, y_0, γ_0) :

• Si $|y_0| < 1$, alors $y_0 \cos\gamma_0 + 1 > 0$ et la géodésique correspondante est hyperbolique.

• Pour $|y_0| = 1$, si la géodésique est normale, alors elle est hyperbolique.

• Pour $|y_0| > 1$, si la géodésique est normale, alors elle est soit hyperbolique soit elliptique selon le signe de $y_0 \cos\gamma_0 + 1$. Notez que les géodésiques hyperboliques et elliptiques sont séparées par les anormales, comme illustré dans la figure 2.10.

Pour compléter la discussion sur l'exemple historique, nous donnons l'intégration du système. On obtient la classification suivante des géodésiques.

Proposition 3.1.1. *Soit (x_0, y_0, γ_0) la condition initiale, la géodésique $\tilde{q}(t) = (x(t), y(t), \gamma(t))$ est donnée par les formules suivantes :*

— *Pour $\gamma_0 = \pm\pi/2$ on a :*

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad y(t) = \pm t + y_0 \quad \textit{et} \quad x(t) = \pm\frac{t^2}{2} + y_0 t + x_0.$$

— *Pour $\gamma_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a :*

$$\gamma(t) = \operatorname{atan}(\tan\gamma_0 - t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0} - \frac{1}{\cos\gamma(t)},$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma}\right|\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\gamma}{\cos\gamma}\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \left(y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0}\right)t + x_0.$$

— *Pour $\gamma_0 \in]-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$, on a :*

$$\gamma(t) = \pi + \operatorname{atan}(\tan\gamma_0 - t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0} - \frac{1}{\cos\gamma(t)},$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma}\right|\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\gamma}{\cos\gamma}\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \left(y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0}\right)t + x_0.$$

Une illustration du flot géodésique dans les cas hyperbolique et elliptique est donnée dans la figure 3.1 où on peut voir le comportement des hyperboliques et des elliptiques autour de l'anormale avec un point cusp.

3.1.2 Synthèse optimale et régularité de la fonction valeur

L'intégration du système nous permet de calculer les points cusps dans les directions anormales. Un point cusp noté $(x_{\text{cusp}}, y_{\text{cusp}}, \gamma_{\text{cusp}})$ se produit le long d'une géodésique anormale au temps t_{cusp} lorsque $\dot{x}(t_{\text{cusp}}) = \dot{y}(t_{\text{cusp}}) = 0$. Cela donne

$$t_{\text{cusp}} = \tan\gamma_0, \quad \gamma_{\text{cusp}} = 0\ [\pi] \ \text{ et } \ y_{\text{cusp}} = \operatorname{sign}(y_0).$$

En suite x_{cusp} se déduit des expressions analytiques données ci-dessus.

Remarque 16. *Pour un point initial q_0 fixé, il existe au plus un point cusp. Celui-ci se produit le long de l'anormale qui rencontre le domaine modéré, donné par les droites $y = \pm 1$.*

Le point important pour décrire la synthèse temps minimale est de fixer un voisinage adapté R du point initial q_0 contenant entièrement la boucle formée de la géodésique retournant en q_0 (cf. figure 3.3). Le lieu de coupure, en se restreignant au voisinage, est formé par la branche de la géodésique anormale ayant un point cusp, jusqu'à ce point (point conjugué dans le cas anormal).

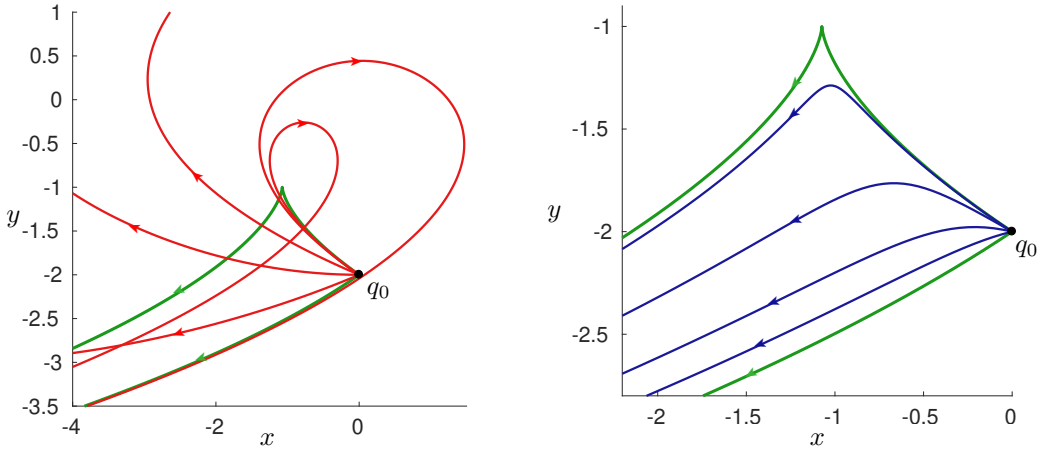


FIGURE 3.1 – Flot géodésique dans les cas hyperbolique (gauche) et elliptique (droite) dans le voisinage conique délimité par les deux géodésiques anormales (vert). Les géodésiques hyperboliques sont représentées en rouge et les elliptiques en bleu. Le point initial est pris à $q_0 = (0, -2)$.

Le lieu de séparation, composé uniquement de point de séparation non isochrone, est formé par l'intersection des géodésiques hyperboliques qui ont une boucle avec la géodésique anormale. La géodésique anormale ayant un point cusp est optimale jusqu'à ce point, la fonction temps minimale est alors discontinue le long de cette branche de l'anormale. Une illustration de cette discontinuité est donnée dans la figure 3.2.

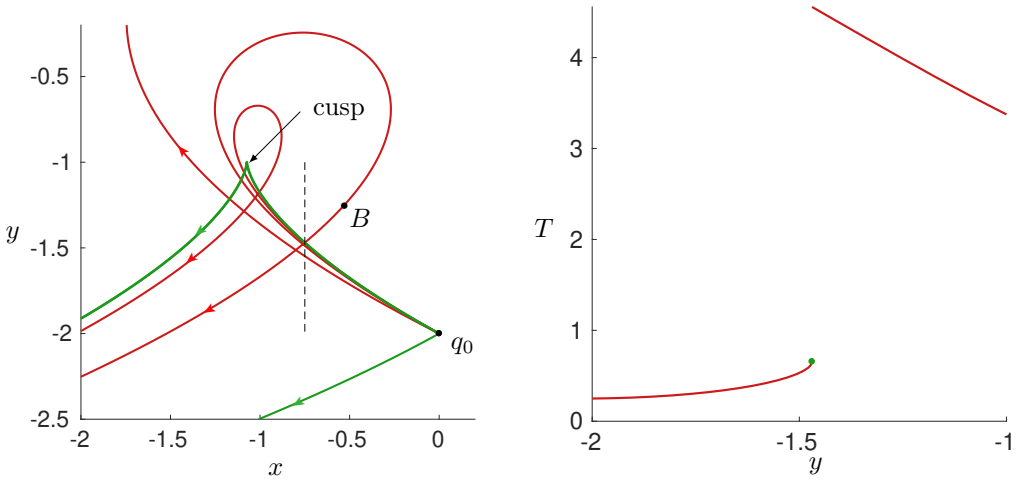


FIGURE 3.2 – Illustration de la discontinuité de la fonction temps minimale en un point de séparation non isochrone. (Gauche) Le point initial est $q_0 = (0, -2)$. Les géodésiques anormales sont représentées en vert tandis que les autres géodésiques en rouge sont hyperboliques. On voit que le point cusp est limite de "self-intersections" de géodésiques hyperboliques. De plus, pour atteindre le point B à partir de q_0, on doit utiliser une géodésique hyperbolique qui a une boucle. Lorsque cette géodésique hyperbolique intersecte l'anormal, le temps est plus grand le long de l'hyperbolique que de l'anormale. À cette intersection, la géodésique hyperbolique cesse d'être optimale. (Droite) Fonction temps minimale le long du segment pointillé du sous-graphe de gauche. La discontinuité se produit à l'intersection entre les géodésiques hyperbolique et anormale. Elle est représentée par le point vert, qui est le temps le long de la géodésique anormale.

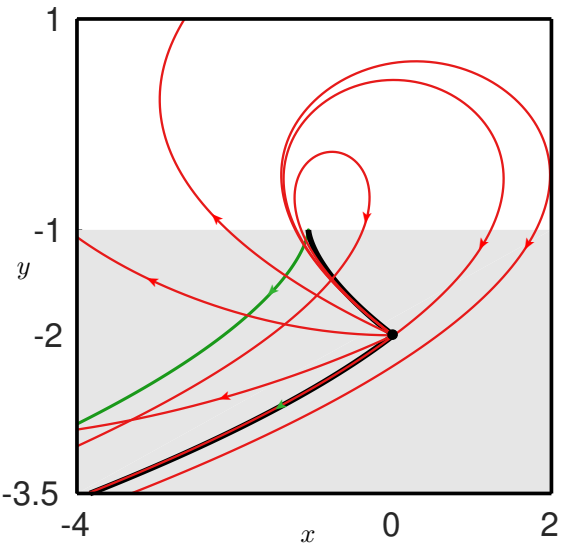


FIGURE 3.3 – Synthèse optimale en temps minimal dans un voisinage adapté contenant la boucle limite (géodésique qui repasse par q_0). Le point initial est $q_0 = (0, -2)$. Les géodésiques anormales sont représentées en vert et en rouge sont représentées les géodésiques hyperboliques. Le lieu de coupure coïncide avec l'anormale qui a un point cusp, jusqu'à ce point cusp, et est représenté en noir.

3.1.3 Fronts d'ondes versus sphères et boules

On donne ici quelques représentations de fronts d'ondes, de sphères et de boules dans les cas faible et fort afin de mettre en évidence sur un modèle classique l'impact du courant sur la synthèse.

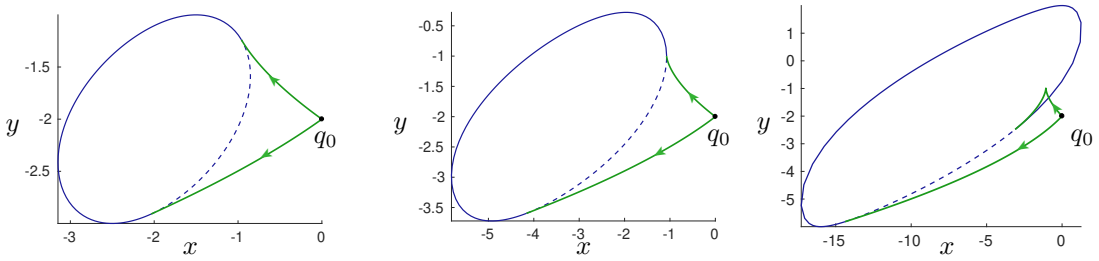


FIGURE 3.4 – Fronts d'ondes (hyperbolique en traits plein et elliptique en tirets) et anormales aux temps respectifs $t_f = 1.0$, $t_f = t_{\text{cusp}}$, $t_f = 4.0$.

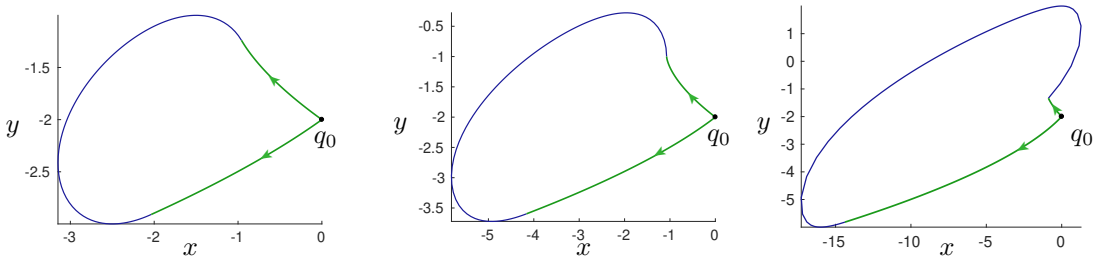


FIGURE 3.5 – Sphères et boules aux temps respectifs $t_f = 1.0$, $t_f = t_{\text{cusp}}$, $t_f = 4.0$.

Observations 3.1.1. *Sur les figures 3.4 et 3.5, le graphe du milieu montre le front d'ondes*

au temps t_{cusp} qui coïncide avec la sphère. En effet le front d'ondes ne recoupe pas l'anormale avant le temps cusp. Aussi on a dans ce cas ni point conjugué ni point de séparation isochrone. L'anormale avec un point cusp est alors optimale jusqu'à ce point.

3.2 Cas Kepler moyenné

On présente brièvement les résultats de l'article [23] produit dans le chapitre 8 de cette thèse qui contient tous les détails. La métrique est définie par $m^2_\lambda(\varphi) = \frac{\sin^2\varphi}{1-\lambda\sin^2\varphi}$ où $\lambda \in [0,1]$ et le courant $F_0(q) = v\frac{\partial}{\partial\theta}$, $v \in \mathbb{R}$ est constant dans les coordonnées $q = (\varphi, \theta)$. Les pôles de la 2-sphère sont identifiés à $\varphi = 0$, π et l'équateur est $\varphi = \pi/2$. Notons que ce type de métrique est définie par homotopie dépendant d'un paramètre $\lambda \in [0,1]$ avec $\lambda = 0$ correspondant à la métrique usuelle sur la sphère $\lambda = 1$ à la métrique singulière dite de Grushin. Elle apparaît également, pour $\lambda = 4/5$, dans le problème de Kepler moyenné (cf. [15] pour une présentation plus détaillée du problème).

3.2.1 Cas riemannien [15]

On a dans ce cas

$$m^2_\lambda(\varphi) = \frac{\sin^2\varphi}{(1-\lambda\sin^2\varphi)} \quad \text{et} \quad v = 0$$

où $\lambda \in [0,1]$ est un paramètre homotopique, $\lambda = 0$ étant la sphère ronde, $\lambda = 1$ est le cas de Grushin, avec une singularité à l'équateur tandis que $\lambda = 4/5$ est associé au transfert orbitale de Kepler. L'équateur qui est le seul parallèle solution est donné par $\varphi = \pi/2$ et on pose $r = \pi/2 - \varphi$ pour le normaliser à zéro. La métrique $g = \mathrm{d}r^2 + m^2_\lambda(r)\,\mathrm{d}\theta^2$ est symétrique par rapport à l'équateur, c'est-à-dire $m(r) = m(-r)$, ce qui est crucial pour la détermination explicite du lieu conjugué et du lieu de coupure. En utilisant le formalisme hamiltonien, on associe à la métrique le hamiltonien suivant

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right). \tag{3.2}$$

Remarque 17. *L'application du PMP au problème temps minimal associé à la métrique g conduirait à l'hamiltonien $\mathbf{H} = \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)^{1/2}$. Mais puisqu'il y a dans ce cas équivalence entre les problèmes temps minimal et énergie minimal, on peut considérer sans soucis l'hamiltonien défini en* (3.2).

Paramétrer par la longueur d'arc revient à fixer $\mathbf{H} = 1/2$. Pour intégrer les géodésiques, l'équation caractéristique est réduit à :

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(r, p_\theta) = 1 \quad \text{avec} \quad V(r,p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}.$$

Une géodésique est soit un méridien, soit l'équateur, soit toute autre solution telle que r est périodique et oscille entre $-r_+$ et r_+, r_+ étant la racine positive de l'équation $V = 1$. Elle est entièrement déterminée par une branche de l'équation caractéristique évaluée sur le quart de période $T/4$ où $r(t)$ appartient à $[0, r_+]$. La période étant donnée par l'intégrale

$$\frac{T}{4} = \int_0^{r_+} \frac{\mathrm{d}r}{(1 - V(r,p_\theta))^{1/2}},$$

qui dépend de p_θ. Par symétrie par rapport au méridien, elle peut être supposée non négative et appartenant à $]0, m(r_0)[$. Pour effectuer l'analyse, nous introduisons l'application appelée *application période* : $p_\theta \mapsto T(p_\theta)$.

Le flot géodésique est intégrable au sens de Liouville et la transcendance est caractérisée fondamentalement par la transcendance de l'application période. Plus précisément, pour intégrer on introduit $X = \sin^2 r$, $r \in]0, \pi/2[$ et on obtient

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}} = \int \frac{\mathrm{d}X}{((1 - X^2)(1 - \lambda p_\theta^2) - p_\theta^2)^{1/2}}.$$

Pour intégrer, on peut supposer que $r(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ puisque toute trajectoire oscillante est telle que r coupe l'équateur et on utilise

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - V(r, p_\theta)}, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{V(r, p_\theta)}{p_\theta}.$$

On obtient alors

$$\theta(t) = (2n - 1)\Delta\theta + \int_{r(t)}^{0} \frac{V(r, p_\theta)\,\mathrm{d}r}{p_\theta(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}},$$

où $n \in \mathbb{N}$ compte le nombre d'intersections avec l'équateur et par symétrie nous pouvons supposer que le nombre d'intersections est impair. La fonction $\Delta\theta$ pour $p_\theta \in]0, m(r_0)[$ est la fonction dite *application premier retour à l'équateur*. Ce qui suit est crucial dans l'analyse de l'optimalité. Nous pouvons nous restreindre à un point initial sur l'équateur c'est-à-dire $q_0 = (0, 0)$.

Proposition 3.2.1. *Supposons que l'application premier retour à l'équateur soit monotone non croissante, alors le premier temps conjugué est donné par l'équation suivante*

$$\frac{\partial \theta}{\partial p_\theta}(r, p_\theta) = 0,$$

où θ est paramétré par r selon

$$\theta(r, p_\theta) = \Delta\theta(p_\theta) - \int_{r^+}^{r} \frac{V(r, p_\theta)\,\mathrm{d}r}{p_\theta(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}},$$

le premier temps conjugué étant compris entre $T/2$ et $T/2 + T/4$.

Intégration des solutions.

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\cos^2 r - p_\theta^2(1 - \lambda \cos^2 r)}{\cos^2 r}.$$

On désigne par Z_+ et Z_- les racines de

$$1 + p_\theta^2(\lambda - 1) = Z^2(1 + \lambda p_\theta^2),$$

où $Z = \sin r$, la période est donnée par

$$\frac{T}{4} = \int_0^{Z_+} \frac{\mathrm{d}Z}{(1 + p_\theta^2(\lambda - 1) - Z^2(1 + \lambda p_\theta^2))^{1/2}}.$$

Normalisant l'amplitude de l'oscillation par $Z = Z_+ Y$ on a

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}Y}{\left((1 + \lambda p_\theta^2)(1 - Y^2)\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda p_\theta^2)^{1/2}} [\arcsin Y]_0^1. \end{aligned}$$

Proposition 3.2.2. *La période est donnée par*

$$T(p_\theta) = \frac{2\pi}{(1+\lambda p_\theta^2)^{1/2}}.$$

De plus on a :

$$\arcsin Y(t) = (1+\lambda p_\theta^2)^{1/2} t.$$

On définit ainsi le temps re-normalisé $s = (1+\lambda p_\theta)^{1/2} t$ et la variable θ est intégrée en utilisant

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = p_\theta \frac{1-\lambda(1-\sin^2 r)}{1-\lambda \sin^2 r}.$$

On obtient alors

$$\theta(t) = \int \frac{p_\theta \,\mathrm{d}t}{\cos^2 r} - \lambda p_\theta t$$

et on a :

$$\theta(t) = \frac{p_\theta}{(1+\lambda p_\theta^2)^{1/2}(1-Z_+^2)^{1/2}} \operatorname{atan}\Big(\big(1-Z_+^2\big)^{1/2} \tan\big((1+\lambda p_\theta^2)t\big)\Big) - \lambda p_\theta t.$$

Ceci conduit à une paramétrisation complète des courbes géodésiques et du lieu conjugué. Notez qu'un calcul simple et standard consiste à paramétrer l'angle θ par r au lieu de t. De plus, on peut calculer les courbes périodiques. En effet, on peut obtenir l'application premier retour $\Delta\theta(p_\theta)$ en fixant dans la formule ci-dessus $t = T/2$ et les applications périodiques sont telles que $\Delta\theta/2\pi$ est un nombre rationnel. En particulier, des géodésiques périodiques simples peuvent être obtenues et classées par rapport à leur longueur, par analogie avec le cas de l'ellipsoïde prolat, la plus courte étant le méridien. Dans le cas Kepler moyenné, elles sont décrites en [14]. Pour analyser l'optimalité dans ce cas, on détermine le lieu conjugué et le lieu de coupure de la manière suivante.

Détermination des lieux conjugués et de coupure. On rappelle que le problème est dit *"tame"* si l'application premier retour à l'équateur est monotone non croissante.

Proposition 3.2.3. *Si le problème est "tame", le lieu de coupure d'un point sur l'équateur est un sous-arc de l'équateur et le rayon d'injectivité est formé par une des extrémités du lieu conjugué sur l'équateur.*

Plus généralement, le lieu conjugué et le lieu de coupure de chaque point peuvent être facilement déterminés en utilisant une condition supplémentaire calculable que nous décrivons ci-après.

Proposition 3.2.4. *Supposons que nous nous trouvions dans le cas classique. De plus, supposons que l'application premier retour $\Delta\theta$ est tel que $\Delta\theta' < 0 < \Delta\theta''$, où $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, sur $]0, m(r_0)[$, alors :*

1. *Le lieu de coupure d'un point qui n'est pas un pôle est un segment du parallèle antipodal ;*
2. *Le lieu conjugué a exactement quatre extrémités (quatre points cusps).*

Ceci peut être appliqué à notre cas pour $\lambda \in]0,1[$. Notez que le lieu conjugué de l'équateur est un astéroïde standard avec quatre extrémités. Le cas limite de Grushin peut être analysé de manière similaire, sauf que l'équateur n'est pas une géodésique et que le rayon d'injectivité est nul. On obtient ainsi une analyse complète du cas riemannien.

3.2.2 Passage au cas Zermelo avec un courant constant

Rappelons que le cas du courant constant est donné sur l'espace entier par

$$F_0 = v\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2,$$

où v est une constante non nulle. Soit $q_0 = (r_0, \theta_0)$ la condition initiale, nous sommes dans le :

— cas Zermelo faible si $\sin^2 r_0 < \frac{1}{v^2+\lambda}$;
— cas Zermelo fort si $\sin^2 r_0 > \frac{1}{v^2+\lambda}$;
— cas Zermelo modéré si $\sin^2 r_0 = \frac{1}{v^2+\lambda}$.

Hypothèse 3.2.1. *Dans le cas où la constante v est telle que $v^2 + \lambda < 1$, le courant est faible sur tout le domaine. Ainsi pour être dans le cas fort, on doit faire l'hypothèse supplémentaire suivante :*

(B1) *: $v^2 + \lambda > 1$.*

Ce qui suit est une propriété géométrique assez importante.

Lemme 3.2.5. *Sur la sphère de révolution, le champ de vecteurs F_0 défini un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbb{R}^3$ tangent à la sphère et il correspond à une rotation uniforme dont l'axe est l'axe de révolution. Pour la métrique, la solution de l'équateur est aussi une rotation stationnaire puisque $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ est constant le long de l'équateur de sorte que l'effet du courant constant peut être superposé à cette rotation.*

Pour faire l'analyse nous procédons comme précédemment, la paramétrisation des géodésiques étant similaire mais l'effet du courant entraîne une analyse micro-locale plus complexe que nous décrivons ensuite. Ici, l'hamiltonien est donné par :

$$\mathbf{H} = p_\theta v + \|p\|_g = -\varepsilon, \quad \|p\|_g = \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)^{1/2}, \tag{3.3}$$

avec $\varepsilon < 0$ (resp. $\varepsilon > 0$) correspondant au cas hyperbolique (resp. elliptique) et $\varepsilon = 0$ au cas anormal. Puisque la dérive est constante, à partir de l'hamiltonien on a $\|p\|_g = -(\varepsilon + p_\theta v)$ constant. Donc fixer $\|p\|_g = 1$ ou fixer $\varepsilon = 0, -1, 1$ est équivalent. De plus $G = p_\theta$ est l'intégrale première (linéaire) supplémentaire et cela assure l'intégrabilité au sens de Liouville du système. On obtient alors ce qui suit :

Lemme 3.2.6. *On peut intégrer la dynamique en r en utilisant l'équation caractéristique*

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V_\varepsilon(r, p_\theta) = 1$$

où $\varepsilon = p^0 < 0, = 0, > 0$ correspondent respectivement aux cas hyperbolique, anormal et elliptique.

Démonstration. Dans le cas d'un courant constant, en partant de l'équateur et en utilisant la branche ascendante on obtient l'équation

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{p_\theta^2(1 - \lambda \sin^2 r)}{\sin^2 r(\varepsilon + p_\theta v)^2}\right)^{1/2},$$

et puisque nous avons posé $\|p\|_g = 1$, c'est-à-dire $(\varepsilon + p_\theta v) = -1$, alors on a

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{p_\theta^2(1 - \lambda \sin^2 r)}{\sin^2 r}\right)^{1/2},$$

qui est la même expression que dans le cas riemannien, le calcul se fait alors de la même manière. □

Pour intégrer θ on utilise la dynamique

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}.$$

Notons encore une fois que θ peut être calculée facilement, en paramétrant par r au lieu de t et on obtient la proposition suivante (en particulier pour déterminer l'application premier retour à l'équateur).

Proposition 3.2.7. *La variable θ est donnée par :*

$$\theta(t) = (2n-1)\Delta\theta + \int_{r(t)}^{0} \frac{V_\varepsilon(r, p_\theta)\,\mathrm{d}r}{p_\theta(1 - V_\varepsilon(r, p_\theta))^{1/2}},$$

où $n \in \mathbb{N}$ compte le nombre d'intersections avec l'équateur et par symétrie nous pouvons supposer que le nombre d'intersections est impair. La fonction $\Delta\theta$ pour $p_\theta \in]0, m(r_0)[$ est l'application premier retour à l'équateur.

Ceci conduit à la classification suivante de l'ensemble des géodésiques, en utilisant une classification par la variable p_θ au lieu de l'angle de cap comme dans l'exemple historique. En effet, dans ce cas, les courbes géodésiques sont symétriques par réflexion et par rapport à l'équateur, le cône de directions étant symétrique par rapport à l'équateur.

Proposition 3.2.8. *Supposons que l'hypothèse (B1) soit vérifiée. En partant de l'équateur, les géodésiques de* **H** *se divisent en :*

- *Géodésiques anormales : on a deux géodésiques anormales distinctes paramétrées par $p_\theta^a = -1/v$ et $p_{r_0} > 0$ pour la montante et $p_{r_0} < 0$ pour la descendante.*
- *Géodésiques hyperboliques : qui correspondent aux solutions temps minimale et paramétrées par $p_\theta \in]p_\theta^a, m(r_0)[$.*
- *Géodésiques elliptiques : qui correspondent aux solutions temps maximales et paramétrées par $p_\theta \in]-m(r_0), p_\theta^a[$.*

De plus, dans le cas hyperbolique, l'ensemble des géodésiques peut être classifiées en quatre classes, à savoir (cf. figure 3.6) :

- *L'équateur qui correspond au point singulier : $r = \pi/2$, $p_r = 0$ et $p_\theta = m(r)$.*
- *Les deux pseudo-méridiens (ascendant et descendant) qui correspondent au cas non compact $\dot{r} > 0$. Elles sont données par $p_\theta = 0$ et $p_r = \pm 1$.*
- *Les orbites périodiques génériques qui se divisent en deux familles différentes : les orbites sans boucle paramétrées par $p_\theta \in]0, m(r_0)[$ et les orbites avec boucles, paramétrées par $p_\theta \in]p_\theta^a, 0[$ et contenant par symétrie les orbites associées à $\pm p_r(0)$.*

Déformation du lieu conjugué par homotopie sur le courant constant v dans le cas faible. L'algorithme classique présenté dans la section 2.2 est utilisé ici pour calculer le lieu conjugué. Afin de voir la déformation du lieu conjugué par l'introduction d'un courant constant, on commence par fixer $v = 0$ (ce qui correspond au problème original considéré dans [15]), puis en utilisant une homotopie pour augmenter la valeur de v jusqu'à $\sqrt{1-\lambda}$ afin de rester dans le cas faible, on peut observer la déformation du flot géodésique et du lieu conjugué (cf. figure 3.7).

Synthèse optimale dans un voisinage adapté. On présente sur la figure 3.8 la synthèse optimale dans un voisinage adapté symétrique par rapport à l'équateur. Le lieu de coupure est formé de deux branches distinctes. La première est similaire à l'étude du cas historique et correspond aux deux géodésiques anormales prit jusqu'au point cusp. La seconde est un segment sur l'équateur et provient du secteur micro-local elliptique associé à l'équateur. On a donc une situation avec deux secteurs micro-locaux séparés par le pseudo-méridien où la constante de Clairaut p_θ est nulle.

Remarque 18. *Pour la synthèse optimale donnée dans la figure 3.8, le voisinage à été choisit de sorte que la géodésique qui boucle en q_0 (la plus grande des géodésique en rouge) passe par l'extrémité de celui-ci. Si on considère toute la sphère, on aura un autre bout du lieu de coupure donné par les géodésiques qui bouclent après q_0.*

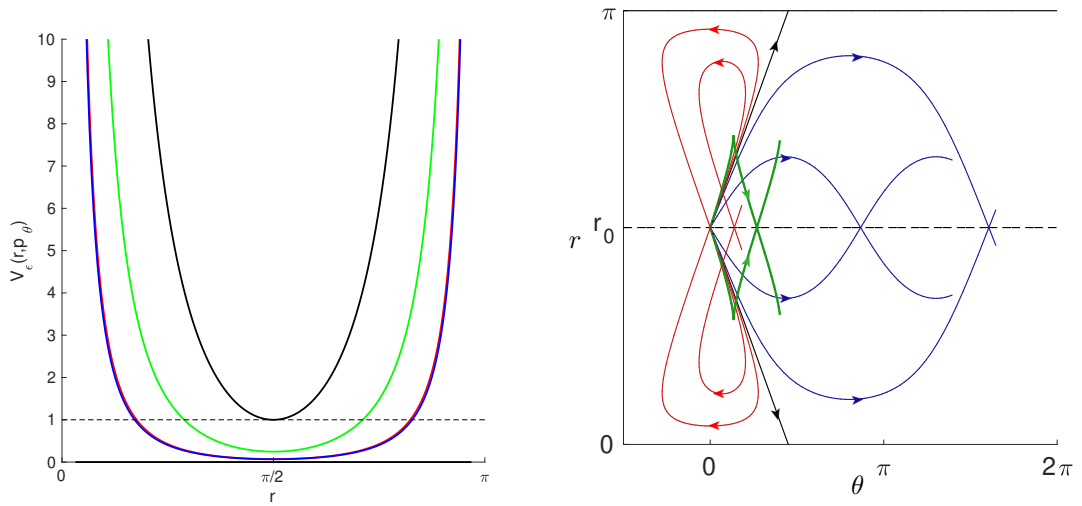


FIGURE 3.6 – (Gauche) Potentiel généralisé pour les différentes types de géodésiques afin de mettre en évidence la périodicité des solutions. (Droite) Illustration des différents types de géodésiques hyperboliques dans le cas fort. Les méridiens et l'équateur sont représentés en noir tandis que les géodésiques hyperboliques à gauche (resp. à droite) de la séparatrice sont représentées en rouge (resp. en bleu). Les géodésiques anormales sont représentées en vert. Dans cette représentation, on prend $\lambda = 4/5$ et $v = 0.9$. Toutes les trajectoires sont intégrées jusqu'au temps $t_f = \pi$.

3.3 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de présenter l'analyse faite au chapitre précédent sur deux modèles classiques présentant toutes les situations évoquées au chapitre précédent. L'exemple historique de Carathéodory-Zermelo [36] sur lequel les propriétés des points cusps ont été bien mises en évidence, illustre en effet une situation générique. Dans l'exemple de Kepler moyenné que nous avons en suite considéré, l'idée était de mettre en évidence l'impact du courant sur la synthèse du problème, synthèse faite dans le cas riemannien en [15]. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons au problème du vortex, problème récent provenant de l'hydrodynamique, qui est le cas d'application central de ce travail.

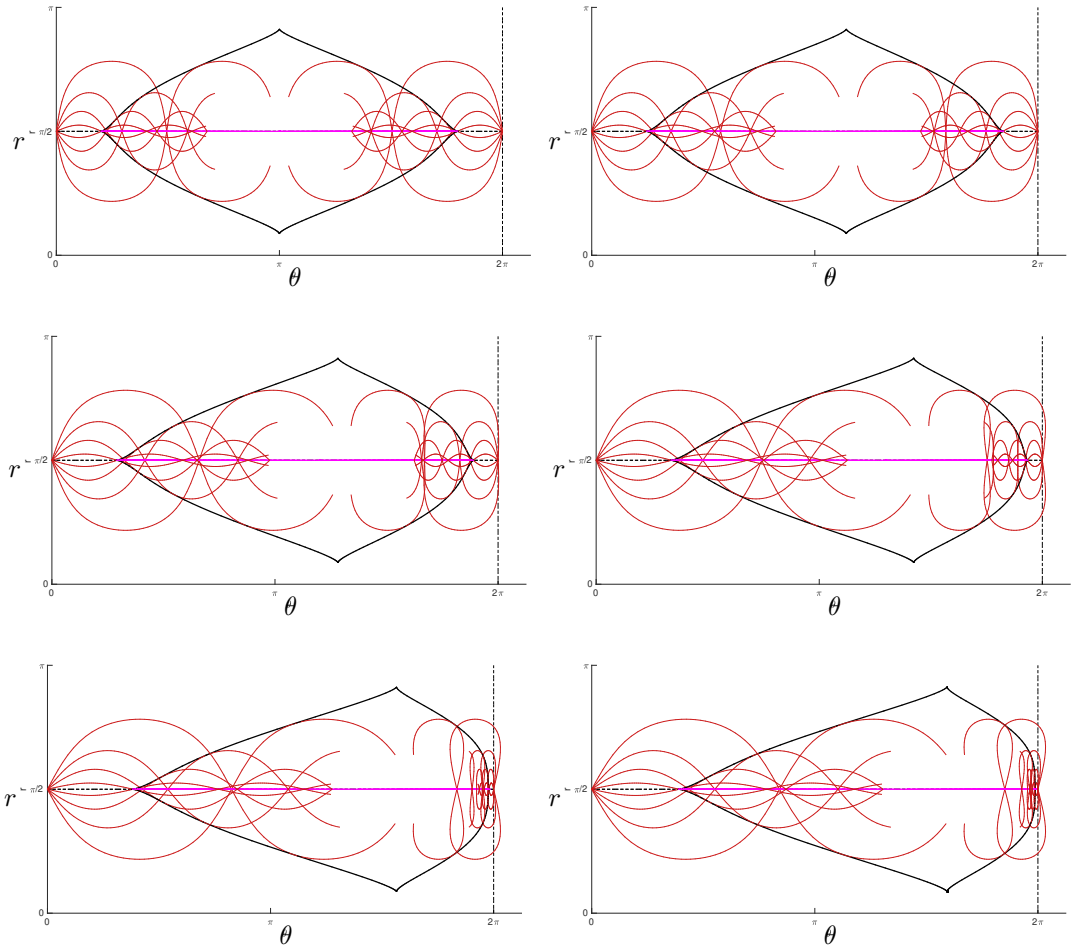


FIGURE 3.7 – Illustration de la déformation du flot géodésique et du lieu conjugué dans le cas faible. En prenant $\lambda = 4/5$ et $v = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.42$ respectivement de haut à gauche en bas à droite. Les géodésiques hyperboliques sont représentées en rouge, le lieu conjugué et le lieu de coupure sont respectivement représentés en noir et en magenta.

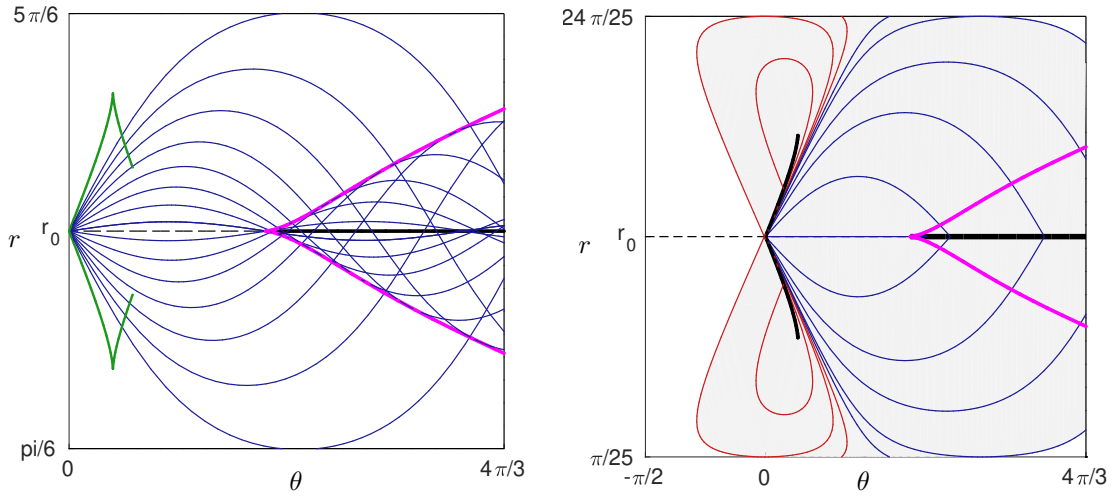


FIGURE 3.8 – (Gauche) Flot hyperbolique et lieux conjugués et de coupure. (Droite) Synthèse optimale en temps minimal dans un voisinage adapté $R = \{\pi/25 \leq r \leq 24\pi/25\,; -\pi/2 \leq \theta \leq 4\pi/3\}$. Les pseudo-méridiens (séparatrices) sont représentés en noir tandis que les géodésiques hyperboliques à gauche (resp. à droite) des séparatrices sont représentées en rouge (resp. en bleu). Les géodésiques anormales sont représentées en vert. le lieu conjugué et le lieu de coupure sont représentés resp. en magenta et en noir. le secteur hachuré en gris représente, dans le voisinage adapté considéré, le domaine atteignable. le domaine en blanc n'est pas atteignable dans le voisinage adapté. On prend $\lambda = 4/5$ et $v = 0.9$.

Chapitre 4

Application au problème du vortex

Ce travail est analysé en détail dans la référence [22] reproduit dans cette thèse au chapitre 6. Le vortex est décrit par la métrique euclidienne sur le plan en coordonnées polaires $g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2$ et le courant est donné par $F_0 = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$ où $k > 0$ est le paramètre de circulation et présente donc un pôle en zéro. L'intérêt de cet exemple est de faire apparaître un flot géodésique complexe et notamment l'existence de composantes de Reeb associées à l'interaction entre un équateur solution et le vortex localisé à l'origine. On représente la complexité de la dynamique sur les figures 4.2 et 4.3. La première montre la composante de Reeb limite des courbes géodésiques formant un diaphragme et la seconde le comportement des géodésiques autour de la séparatrice. Dans le cas du vortex, les géodésiques sont apériodiques et sortent de tout compact, cependant grâce à la séparatrice on peut les classifier en deux familles à savoir celles qui convergent vers la singularité (le vortex) en temps fini et celles qui vont à l'infini en temps infini. Le vortex se généralise en considérant une métrique générale et un courant défini par une fonction méromorphe quelconque présentant un pôle en zéro. Une contribution technique était de montrer que la fonction temps minimale est bien définie sur le plan privé de l'origine (cf. théorème 4.1.1). Nous présentons également la synthèse optimale du problème dans le cas faible et fort et en lien avec la classification des géodésiques, nous introduisons un problème intermédiaire dit *problème un vortex généralisé* afin d'illustrer dans un cas plus complexe le comportement des géodésiques séparatrices et l'existence d'équateur L-elliptique.

4.1 Modèle et résultat d'existence

4.1.1 Description du modèle

Les détails sur la modélisation mathématique de la dynamique des vortex peuvent être trouvés dans [21, 60, 64, 82]. Ici, on décrit brièvement le modèle, pour une présentation plus détaillée voir par exemple les articles [22, 21] attachés à cette thèse et qui constituent les chapitres 6 et 9 de ce manuscrit. Dans le cas d'un fluide en dimension 2, les équations d'Euler incompressibles sont données par :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + (\nu \cdot \nabla)\,\nu = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \nu = 0, \tag{4.1}$$

où ν vaut $\nu(X,t) := (\nu_1(X,t), \nu_2(X,t))$ et représente le champ de vitesse et où p est la pression du fluide. Puisque $\nabla \cdot \nu = 0$ (l'équation d'incompressibilité) de (4.1), on peut écrire $\nu = (\nu_1, \nu_2) =: (\partial_y\Psi, -\partial_x\Psi)$ où Ψ est appelée la fonction de flux. En outre, si on désigne par $\mathbf{w}$ le vecteur viscosité et si on introduit $\tilde{\nu} := (\nu, 0)$, alors $\mathbf{w}$ est donné par la relation $\mathbf{w} = \nabla \wedge \tilde{\nu} = (0, 0, \partial_x\nu_2 - \partial_y\nu_1) =: (0, 0, \omega)$, et avec les deux formules précédentes, on peut déduire l'équation de Poisson satisfaite par Ψ, c'est-à-dire

$$\nabla^2\Psi = -\omega.$$

La résolution de l'équation de Poisson couplée à l'hypothèse d'un nombre fini N de vortex nous permet d'écrire la dynamique des vortex sous la forme (cf. [82]) :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2},$$

où (x_i, y_i) et k_i sont respectivement les coordonnées spatiales et la circulation du vortex i, et où $r_{ij}^2 := (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ est la distance au carré entre les vortex i et j.

Le but du problème est le déplacement de particules en utilisant au mieux la circulation créée par les vortex. L'idée est donc de considérer une particule passive comme un vortex ponctuel à circulation nulle et d'appliquer un contrôle de faible amplitude agissant uniquement sur elle. Ce problème est formulé pour la première fois dans [91]. Le système de contrôle prend alors la forme : $\dot{q} = F_0(q) + u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q)$ où $q = (x, y, x_1, y_1, \cdots, x_N, y_N) \in \mathbb{R}^{2(1+N)}$ est le vecteur des positions de la particule et des vortex, où les champs de contrôle sont $F_1(q) = \frac{\partial}{\partial x}$ et $F_2(q) = \frac{\partial}{\partial y}$, et où la dérive F_0 est donnée par

$$\begin{aligned} F_0(q) = &-\sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{y - y_j}{r_j^2}\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{x - x_j}{r_j^2}\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2}\frac{\partial}{\partial y_i} \right), \end{aligned}$$

avec $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$, $i = 1, \cdots, N$. Le problème du vortex se définit alors comme suit : minimiser le temps de transfert pour amener une particule passive d'un point initial $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ à un point cible $(x_f, y_f) \in \mathbb{R}^2$, les deux étant donnés *a priori*. Les positions initiales des vortex étant également données. Nous nous attardons principalement sur le problème un vortex et par un petit abus de langage nous l'appelons aussi "problème du vortex". Dans ce cas, le système évolue dans le plan épointé $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, le courant étant donné par

$$F_0(q) = \frac{k}{(x^2 + y^2)}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

où $k > 0$ est le *paramètre de circulation* et les champs de contrôle étant donnés par $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. En utilisant les coordonnées polaires $q = (r, \theta)$ on a

$$F_0(q) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

et la métrique euclidienne prend la forme

$$g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Ce modèle est aussi un modèle réduit pour le problème des N-corps, dans le cadre de la dynamique hamiltonienne [77].

4.1.2 Résultat d'existence de solutions dans le cas du vortex généralisé

On se propose d'établir un résultat d'existence dans le cas dit du vortex généralisé. Les champs $F_i, i = 0, 1, 2$ sont sous la forme

$$F_0 = \mu(r)\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad F_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Dans le cas d'un vortex simple, on a $\mu(r) = \frac{k}{r^2}$. Dans le cas général, nous supposons que $\mu(r)$ a un pôle d'ordre $\beta \in]1, +\infty]$ en zéro, de sorte que l'on peut prendre l'approximation $\mu(r) \sim \frac{1}{r^\beta}$

près du pôle. De plus nous supposons que $\mu(r) \to 0$ quand $r \to +\infty$. Tout d'abord, nous devons généraliser l'argument de [110] pour prouver l'existence d'une solution. La preuve est liée à [110, 31] sur l'existence de solutions minimisantes évitant les collisions dans le problème aux N-corps et la régularisation de Levi-Civita des doubles collisions dans le problème à 3-corps [36], voir aussi [10] comme référence générale dans le contexte de l'existence de solutions optimales en contrôle et en dynamique hamiltonienne. On a alors.

Théorème 4.1.1. *Considérons q_0, q_f dans le plan épointé $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors il existe une trajectoire minimisant le temps pour transférer la particule de q_0 à q_f. De plus, partant de q_0 il est possible de rejoindre l'origine en un temps minimal $t_{\min} = r_0$. On peut donc étendre le flot géodésique en utilisant une régularisation de type Levi-Civita au-delà de la collision avec le pôle en inversant le paramétrage du temps géodésique lors de la traversée du vortex.*

Idées de la preuve. La dynamique des géodésiques en coordonnées polaires s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{p_r}{\|p\|_g}, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mu(r) + \frac{p_\theta}{m^2(r)\|p\|_g}.$$

Pour prouver l'existence de courbes minimisantes, il suffit de prouver que les trajectoires minimisantes évitent la collision. En utilisant l'expansion au voisinage du pôle et en comparant le temps pour effectuer une rotation complète autour du pôle sur un cercle de rayon r noté $T_\theta(r)$ et le temps pour atteindre un cercle de rayon ε partant d'un cercle de rayon r noté $T_r(\varepsilon)$ un calcul direct donne

$$T_\theta(r) = \frac{2\pi r^\beta m(r)}{r + m(r)} \quad \text{et} \quad T_r(\varepsilon) = r - \varepsilon.$$

Par conséquent, l'argument de [110] pour remplacer une trajectoire atteignant un cercle de petit rayon ε par une trajectoire effectuant une rotation autour du pôle est toujours valide et les résultats d'existence s'ensuivent (cf. Fig. 4.1 pour illustration). Il ressort clairement des équations que le temps pour atteindre la forme du pôle q_0 est obtenu pour $p_\theta = 0$ et est donné par r_0. Suivant la régularisation de Levi-Civita, nous inversons les orientations des géodésiques lors de la traversée du vortex. Cela revient à remplacer $\mu(r)$ par $-\mu(r)$ et p_θ par $-p_\theta$ dans les équations de la géodésique. □

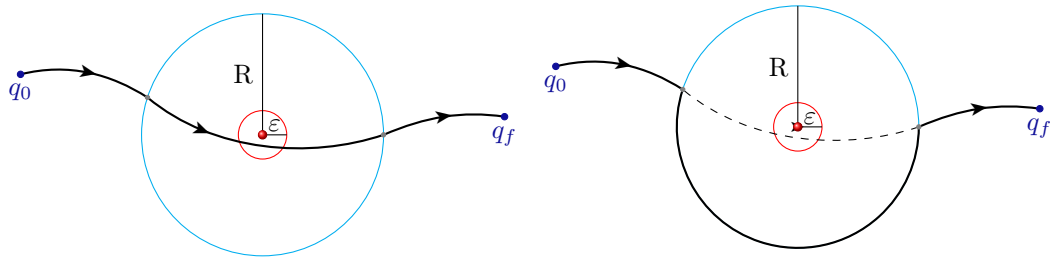


FIGURE 4.1 – Illustration de la construction d'une trajectoire admissible strictement meilleure. Le vortex est représenté par une boule rouge, tandis que les trajectoires sont les lignes noires pleines. On peut voir à gauche, une trajectoire traversant la boule de rayon ε. Cette trajectoire est remplacée sur le graphe de droite par une trajectoire admissible strictement meilleure.

Remarque 19. *Dans le cas du vortex, le cône des directions admissibles tend vers zéro au niveau du vortex et le système se trouve dans le domaine des courants forts. Dans ce cas, nous pouvons rencontrer des géodésiques tournant autour du vortex pour atteindre un point final et utiliser le vortex pour atteindre les points [90].*

Remarque 20. *On doit avoir $\beta > 1$, donc c'est similaire à l'hypothèse de Poincaré d'éviter les collisions pour les minimiseurs en modifiant le potentiel képlérien et la borne $\beta \geq 2$ dans l'interaction potentielle (appelée* potentiel fort *par Poincaré). Dans notre cas, la limite est donnée par $T_\theta(r) < T_r(r)$ ce qui donne $\varepsilon < r\left(1 - \frac{2\pi r^{\beta-1} m(r)}{r^\beta + m(r)}\right)$ pour un couple $0 < \varepsilon < r$ et le terme entre parenthèses doit être positif.*

4.2 Classification des extrémales

4.2.1 Cas du vortex simple [22]

Cette étude est faite en détail dans l'article [22] reproduit dans le chapitre 6 de ce manuscrit. On rappelle que dans ce cas la métrique et le courant sont donnés par :

$$g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 \quad \text{et} \quad F_0 = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Le potentiel généralisé s'écrit alors :

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2 r^4}{(\varepsilon r^2 + p_\theta k)^2}.$$

Les courbes géodésiques peuvent être classifiées en utilisant ce potentiel et les propriétés particulières du flot sont décrites ci-après (cf. Figs. 4.2 et 4.3 pour l'illustration).

Théorème 4.2.1. *En considérant le problème un vortex, on obtient ce qui suit :*

- *Le domaine de courant fort est proche du vortex et limité par le cercle de rayon $r = k$ où le courant est modéré. Il existe une unique séparatrice formant une composante de Reeb*[1] *avec singularité à l'intérieur du disque délimité par l'équateur (correspondant au cercle $r^* = 2k$ et appelé aussi, dans ce cas,* cercle de Reeb*) émanant du vortex comme point singulier et convergeant vers l'équateur où $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ sur le cercle de rayon $2k/\sqrt{3}$.*
- *À l'extérieur du cercle de rayon r^* il existe une séparatrice unique émanant de l'équateur et convergeant vers l'infini.*
- *Il existe deux pseudo-méridiens où $p_\theta = 0$, convergeant avec une vitesse radiale maximale soit vers le vortex soit vers l'infini.*
- *La séparatrice divise en deux classes distinctes le flot géodésique à savoir les trajectoires qui convergent vers le vortex et celles qui vont à l'infini.*

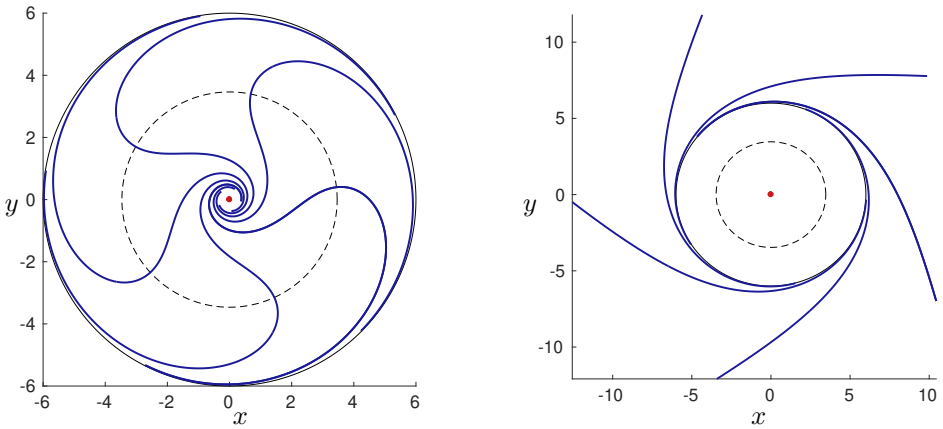


FIGURE 4.2 – (Gauche) Séparatrices formant une composante de Reeb par rotation sur l'angle θ_0 avec singularité à l'intérieur du disque délimité par l'équateur ($r^* = 2k$). (Droite) Séparatrices émanant de l'équateur et convergeant vers l'infini pour des rayon plus grand que r^*. Sur les deux graphes, les cercles en noir et en pointillé correspondent respectivement au cercle équateur et au cercle de rayon k délimitant le domaine de courant fort. Le vortex est représenté par le point rouge.

1. Le vortex est considéré ici comme un équateur trivial.

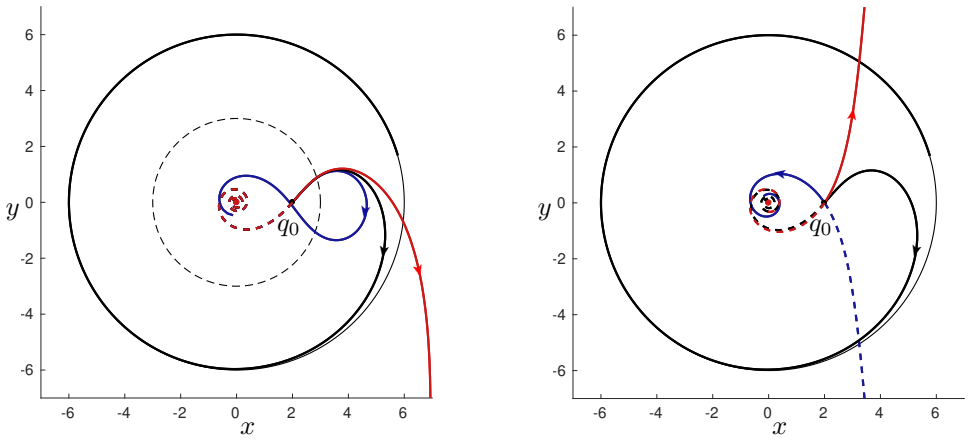


FIGURE 4.3 – (Gauche) Comportement des trajectoires autour de la séparatrice (noir). Les géodésiques en dessous de la séparatrice (bleu), c'est-à-dire paramétrées par $p_\theta < p_\theta^*$ (p_θ^* paramétrant la séparatrice), convergent vers le vortex et celles au-dessus de la séparatrice (rouge) vont à l'infini. Cependant, au voisinage de la séparatrice les géodésiques proviennent toutes du vortex. (Droite) Illustration des deux pseudo-méridiens représentés en rouge et bleu. Les orbites de celles-ci ne coïncident pas à cause de la dérive. En pointillé les trajectoires sont parcourues en temps négatif.

4.2.2 Cas du vortex généralisé [23]

Afin de présenter une situation complète où on a plusieurs séparatrices et plusieurs équateurs notamment un équateur L-elliptique, on reste dans le cadre d'un problème de Zermelo avec une singularité de type vortex, mais on considère une dérive générale sous la forme :

$$F_0(q) = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \text{avec} \quad \mu(r) = \frac{\lambda\, r + \beta}{r^3}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

Le potentiel généralisé dans ce cas est donné par :

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2 r^6}{(\varepsilon r^3 + p_\theta(\lambda r + \beta))^2}.$$

Si on suppose $\lambda^2 > 3\beta$ et $\beta < 0$, les équateurs et les séparatrices sont déterminés grâce à la proposition suivante :

Proposition 4.2.2. *En supposant $\lambda^2 > 3\beta$ et $\beta < 0$, on a trois équateurs associés au système :*

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 3\beta}, \quad r_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 3\beta} \quad \text{et} \quad r_3 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 3\beta},$$

tels que les équateurs r_1 et r_3 sont L-hyperboliques et l'équateur r_2 est L-elliptique. De plus, les trajectoires associées aux équateurs r_1, r_2 et r_3 sont respectivement paramétrées par :

$$p_\theta^1 = \frac{m(r_1)}{1 + \mu(r_1)m(r_1)}, \quad p_\theta^2 = -\frac{m(r_2)}{1 - \mu(r_2)m(r_2)}, \quad \text{et} \quad p_\theta^3 = -\frac{m(r_3)}{1 - \mu(r_3)m(r_3)}.$$

Remarque 21. *Les trajectoires paramétrées par p_θ^1 et p_θ^3 sont des géodésiques séparatrices puisqu'elles sont associées à des équateurs L-hyperboliques. Celle paramétrée par p_θ^2 ne l'est pas et n'existe pas forcément. En effet, pour $r_0 \neq r_2$ dans un voisinage de r_2, le potentiel généralisé est au dessus de 1, la trajectoire n'est donc pas définie.*

Classification du flot géodésique. La classification des géodésiques peut se faire à partir de l'analyse du potentiel généralisé. Suivant la valeur du paramètre p_θ, la potentiel sera majoré ou non. On décrit ci-dessous la classification du flot suivant les différentes situations.

1. **Cas où le potentiel est majoré.** Ce cas se subdivise en trois sous-cas à savoir :
   (a) **Cas où le maximum est strictement inférieur à 1.** Dans ce cas, on a un seul type de trajectoires, celles-ci sont non compactes, elles proviennent toutes du vortex et vont toutes à l'infini (cf. Fig. 4.4 pour illustration).
   (b) **Cas où le maximum est strictement supérieur à 1.** Dans ce cas on a deux classes distinctes de trajectoires. Celles qui convergent en temps positif et négatif vers le vortex, obtenues lorsque l'on part d'un point initial proche du vortex ; et celles qui vont en temps positif et négatif à l'infini, obtenues lorsque l'on démarre avec un r_0 assez grand. Ces deux situations sont illustrées dans la figure 4.5.
   (c) **Cas limite où le maximum du potentiel vaut 1.** Ce cas correspond à l'équateur donné par r_1, dont la séparatrice associée forme, comme dans le cas du problème vortex simple, une composante de Reeb avec une singularité au vortex (cf. Fig 4.8 pour illustration).
2. **Cas où le potentiel explose.** Lorsque le potentiel explose, il possède toujours un minimum local et un maximum local. Trois situations se présentent de nouveau à savoir :
   (a) **Cas où les minimum et maximum sont strictement supérieur à 1 ou alors où les minimum et maximum sont strictement inférieur à 1.** Dans ce cas, les géodésiques sont du même type que dans le cas décrit en 1-(b) à la seule différence que dans le cas où le minimum et le maximum sont < 1, les trajectoires qui vont à l'infini oscillent. Une illustration est donnée dans la figure 4.6.
   (b) **Cas où le minimum est strictement inférieur à 1 et le maximum est strictement supérieur à 1.** On a trois types de trajectoires dans ce cas. Les deux premiers types correspondent à ceux décrits précédemment et sont obtenus respectivement pour r_0 proche du vortex et pour r_0 assez grand. Le troisième type de trajectoires correspond aux trajectoires compactes (ici contenues dans une couronne compacte). Elles sont obtenues lorsque l'on démarre entre le minimum et le maximum. Une illustration de ces différents types est donnée dans la figure 4.7.
   (c) **Cas limites**. Le cas où le minimum local vaut 1 correspond à l'équateur L-elliptique donné par r_2 (cf. Fig. 4.9) et celui où le maximum local vaut 1 correspond à l'équateur L-hyperbolique donné par r_3. La séparatrice associée à l'équateur L-hyperbolique demeure compacte et converge en temps positif et négatif vers l'équateur. Elle définie alors une trajectoire *homocline* (cf. Fig. 4.10).

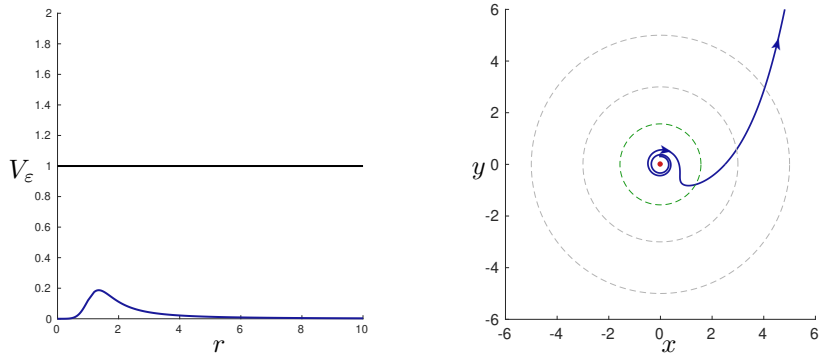


FIGURE 4.4 – Cas 1-(a). On peut déduire du potentiel représenté sur le graphe de gauche que les trajectoires proviennent nécessairement du vortex et vont à l'infini, l'orientation des trajectoires étant prise suivant le sens positif d'intégration que l'on a choisi.

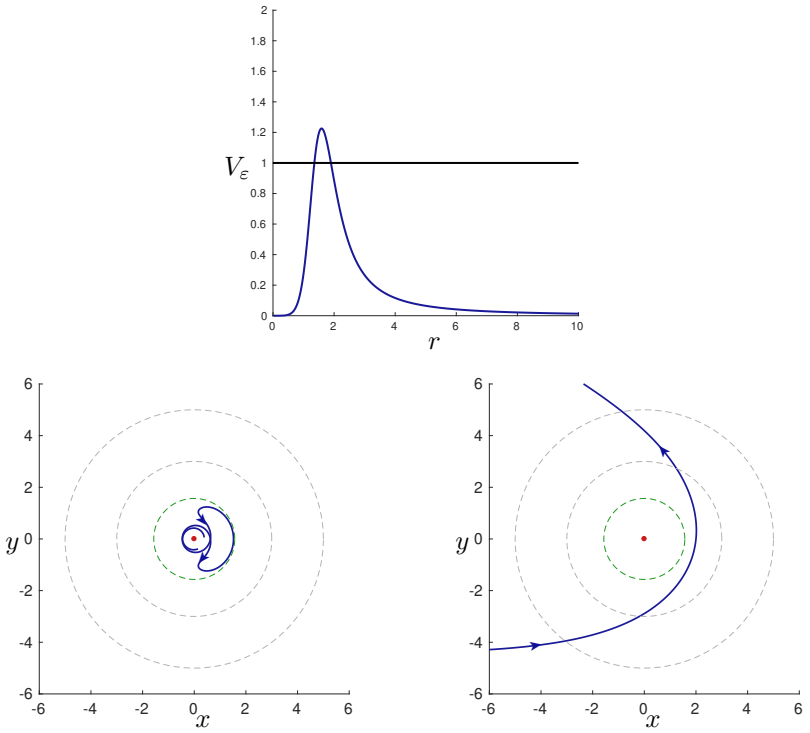


FIGURE 4.5 – Cas 1-(b). On déduit du potentiel (en haut) que les trajectoires qui proviennent du vortex retournent vers celui et que celles qui démarre à un r_0 assez grand vont à l'infini.

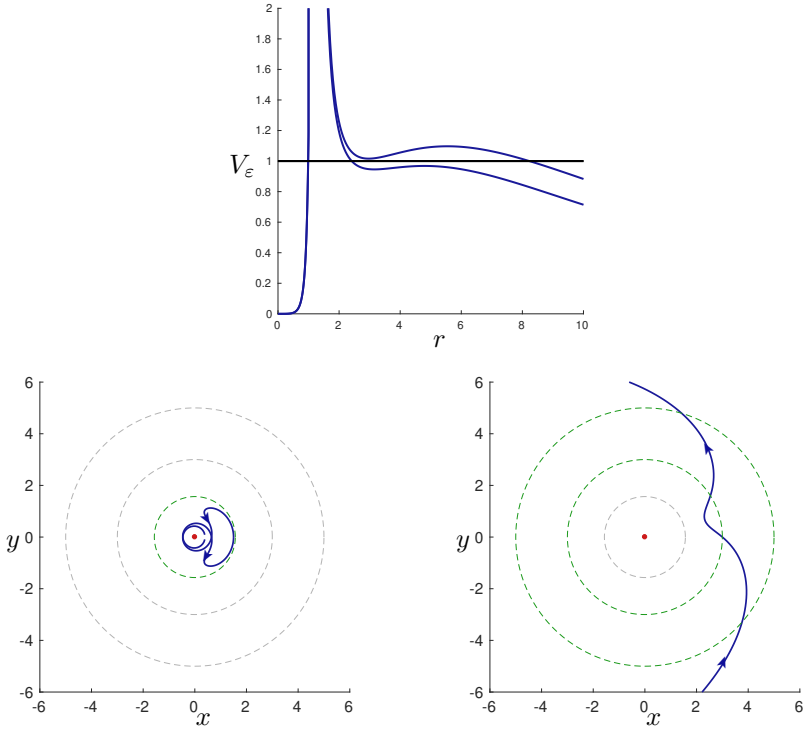


FIGURE 4.6 – Cas 2-(a). On déduit du potentiel (en haut) que les trajectoires qui proviennent du vortex retournent vers celui-ci et que celles qui démarrent d'un r_0 assez grand vont à l'infini.

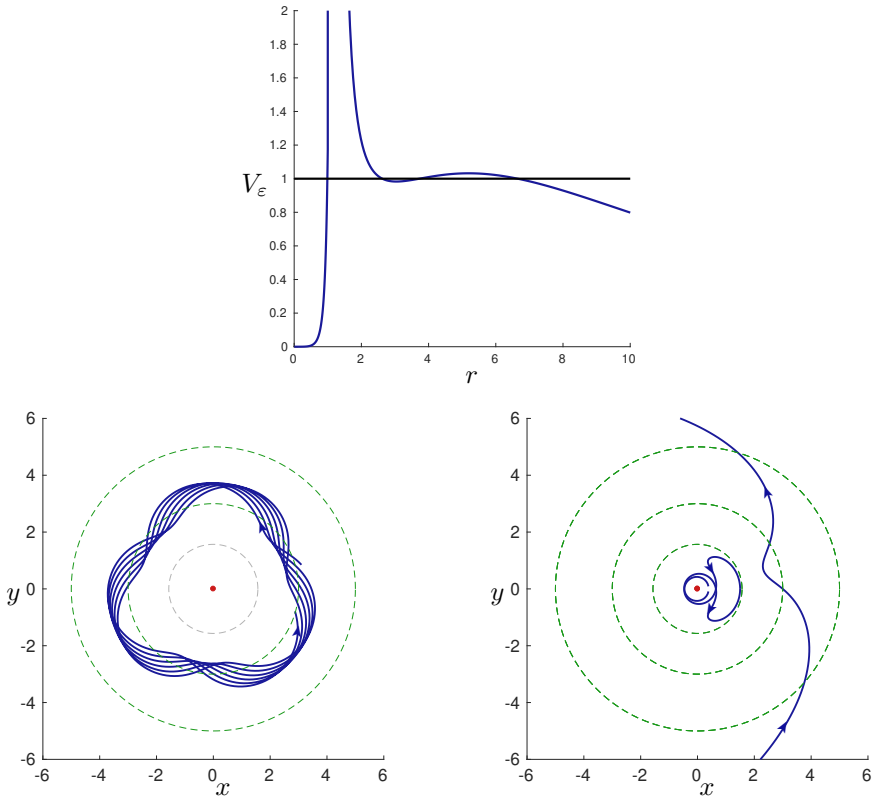


FIGURE 4.7 – Cas 2-(b). On déduit des potentiels (en haut) que les trajectoires qui démarrent entre le minimum et le maximum demeurent contenues dans une couronne, que celles qui proviennent du vortex retournent vers celui-ci et que celles qui démarrent d'un r_0 assez grand vont à l'infini. Dans le graphe en bas à gauche on représente une trajectoire compacte et dans celui de droite on affiche les deux autres situations. Sur le graphe de droite est représentée une trajectoire pour laquelle le potentiel associé a son maximum local inférieur strictement à 1 : on peut la voir osciller autour de l'équateur r_2 L-elliptique.

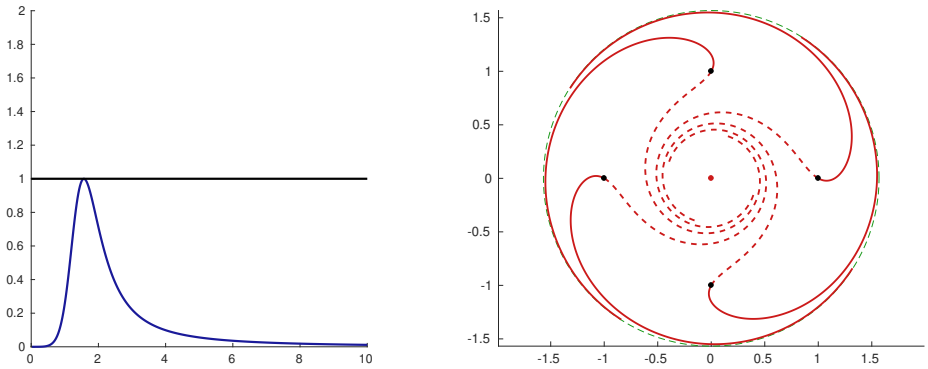


FIGURE 4.8 – Feuilletage de Reeb formé par la séparatrice paramétrée par p^1_θ. En trait continu les trajectoires sont parcourues en temps positif et en pointillés elles sont parcourues en temps négatif. Le vortex est représenté par le point rouge et les différents points initiaux par les points noirs. Le cercle en vert représente l'équateur associé à r_1.

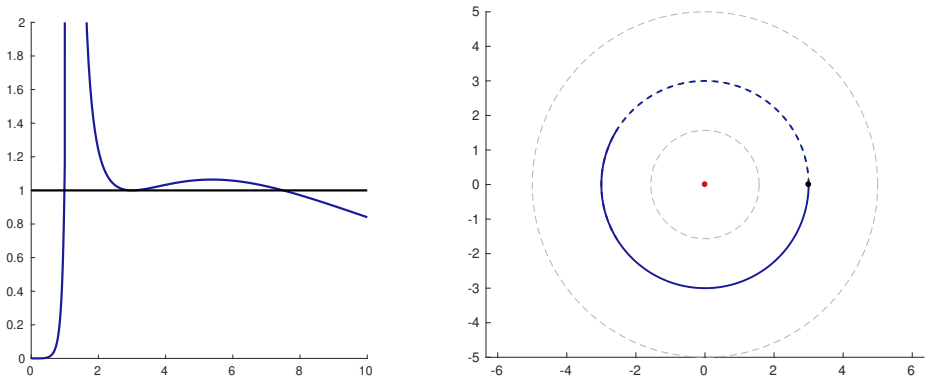


FIGURE 4.9 – Équateur L-elliptique associé à r_2. En trait continu les trajectoires sont parcourues en temps positif et en pointillés elles sont parcourues en temps négatif. Le vortex est représenté par le point rouge et les différents points initiaux par les points noirs. Les cercles en gris représentent les équateurs associés à r_1 et r_3.

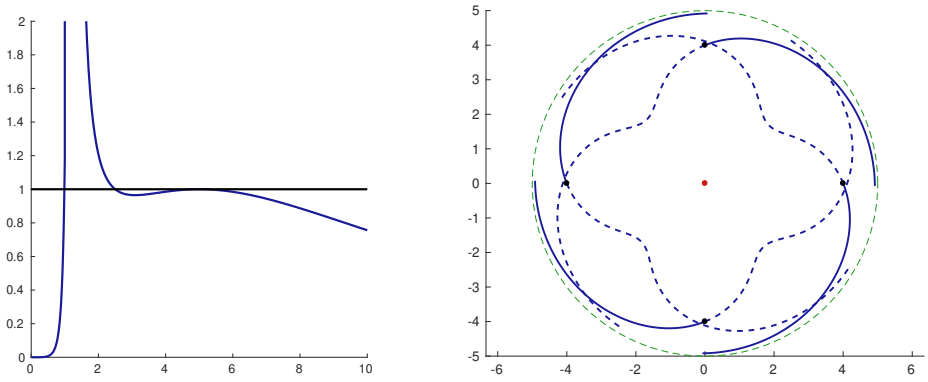


FIGURE 4.10 – Séparatrice homocline paramétrée par p_θ^3. En trait continu les trajectoires sont parcourues en temps positif et en pointillés elles sont parcourues en temps négatif. Le vortex est représenté par le point rouge et les différents points initiaux par les points noirs. Le cercle en vert représente l'équateur associé à r_3.

4.3 Synthèse optimale du problème vortex [22]

On présente dans cette section la synthèse optimale du problème un vortex dans le cas faible et fort. Dans le cas faible, cette synthèse est faite de manière détaillée dans [22] reproduit dans le chapitre 6 de ce manuscrit. On rappelle que pour ce problème, on a pas de point conjugué, le lieu conjugué est donc vide et toutes les géodésiques demeurent localement optimales sur l'intervalle où elles sont définies (cf. section 6.2.6). Nous présentons ici les types de boules que nous avons obtenu dans les deux cas. Les détails des méthodes numériques utilisées pour la construction de ces dernières seront présentés dans le chapitre suivant.

4.3.1 Boules et sphères dans le cas faible

Dans les cas Zermelo faible et fort, les boules peuvent être classées en trois types à savoir :

— **Type A.** Les boules simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$ avec une frontière lisse.

— **Type B.** Les boules non simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$.

— **Type C.** Les boules simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$ avec une singularité sur la frontière.

Remarque 22. *Les boules non simplement connexes proviennent du fait que le front d'ondes intersecte une anormale avant le temps minimal pour rejoindre le vortex, temps qui vaut $t = r_0$ (cf. théorème 4.1.1).*

En considérant q_0 dans un domaine de courant faible, une illustration de ces différents cas est donnée dans la figure 4.11 et dans la figure 4.12 où un zoom est fait autour du vortex. La synthèse construite dans le cas faible est présentée dans la figure 4.13.

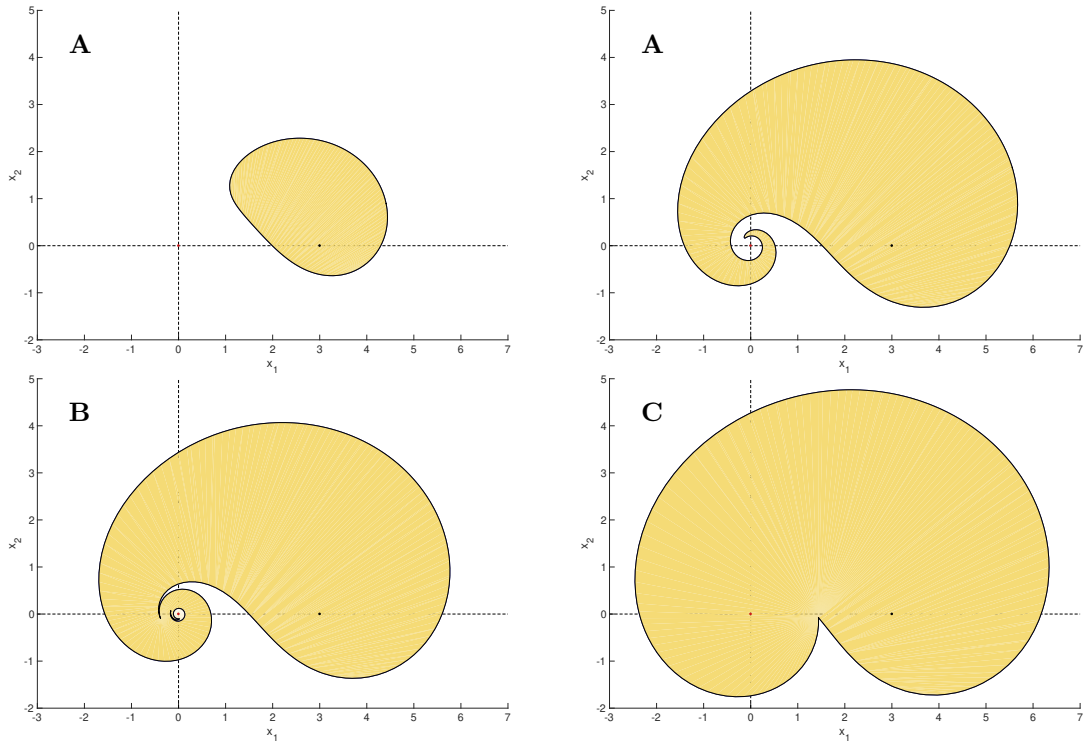


FIGURE 4.11 – Quatre boules dans le plan (x, y) aux instants $t \in \{1.5, 2.8, 2.9, 3.5\}$ avec la condition initiale q_0 représentée par un point noir et le vortex par un point rouge. Les boules $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 1.5)$ et $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 2.8)$ (en haut à gauche et au centre) sont de type A. La boule $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 2.9)$ (en haut à droite) est de type B tandis que $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 3.5)$ (en bas à droite) est de type C.

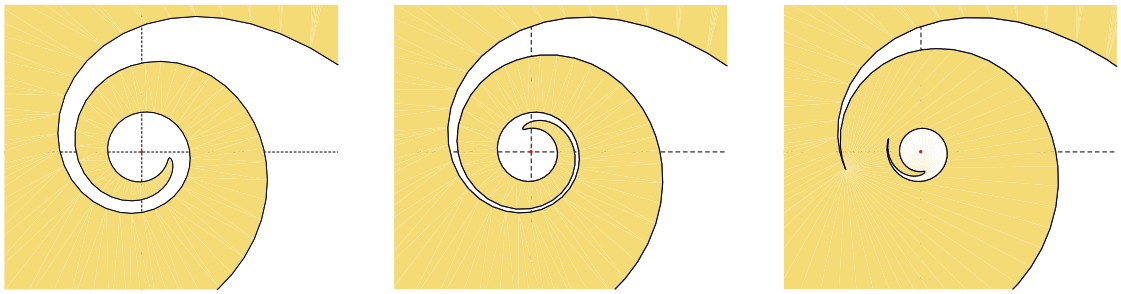


FIGURE 4.12 – Trois boules avec un zoom autour du vortex (point rouge) aux temps $t \in \{2.86, 2.88, 2.9\}$. Comparez avec la Figure 4.11. Pour $t = 2,9$ la boule $\overline{\mathbb{B}}(x_0, t)$ est de type B et possède un petit trou en forme de fœtus.

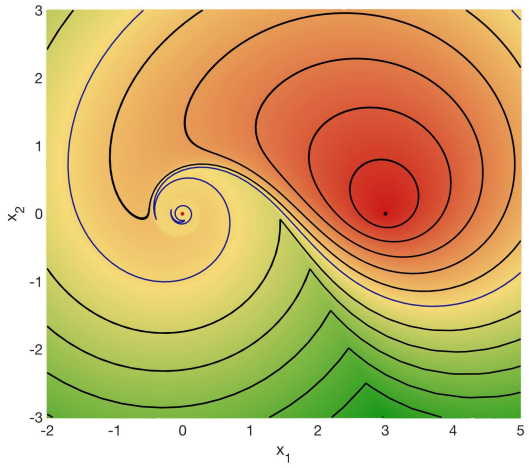


FIGURE 4.13 – Synthèse optimale dans le cas d'un courant faible. Les courbes noires représentent les sphères de types A et C. Les deux courbes bleues sont une sphère unique de type B. Puisque les boules de type B ne sont pas simplement connexes et ont un trou, les sphères correspondantes ont deux composantes connexes.

4.3.2 Boules et sphères dans le cas fort

Dans le cas fort, on retrouve la forme éventail des boules en temps petits, qui se déforment progressivement du fait de la circulation créée par le vortex. Les différents types de boules sont alors présentés dans la figure 4.14 et la synthèse dans ce cas est donnée par la figure 4.16.

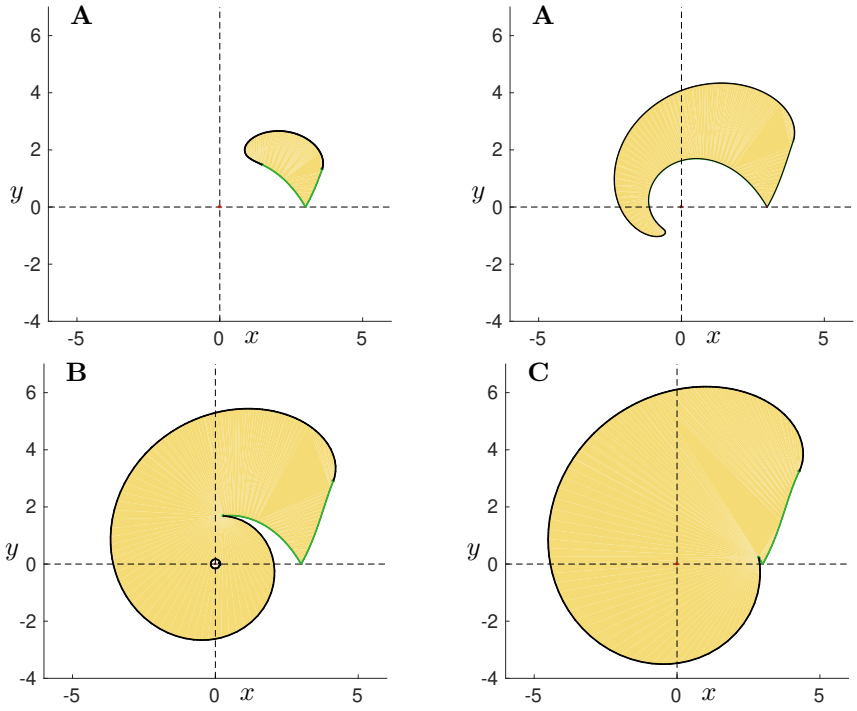


FIGURE 4.14 – Quatre boules dans le plan (x, y) aux instants $t \in \{1.0, 2.0, 2.85, 6.0\}$ avec la condition initiale q_0 représentée par un point noir et le vortex par un point rouge. Les boules $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 1.0)$ et $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 2.0)$ en haut sont de type A. La boule $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 2.85)$ (en bas à gauche) est de type B tandis que $\overline{\mathbb{B}}(q_0, 6.0)$ (en bas à droite) est de type C. En vert on a les géodésiques anormales.

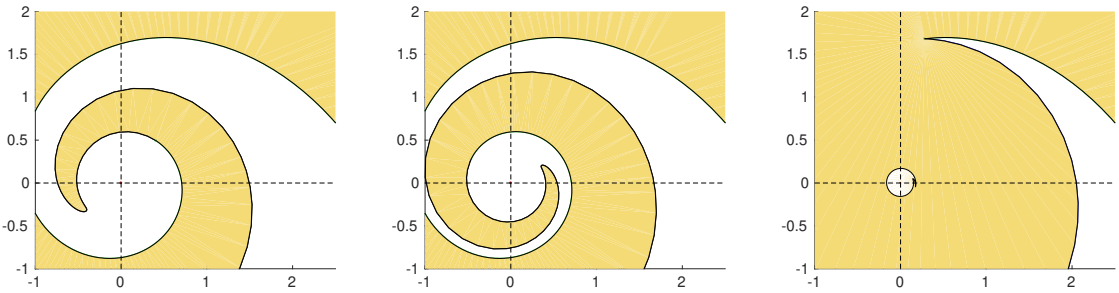


FIGURE 4.15 – Trois boules avec un zoom autour du vortex (point rouge) aux temps $t \in \{2.5, 2.6, 2.85\}$. Comparez avec la Figure 4.14, Pour $t = 2,85$ la boule $\overline{\mathbb{B}}(q_0, t)$ est de type B et possède un petit trou en forme de fœtus.

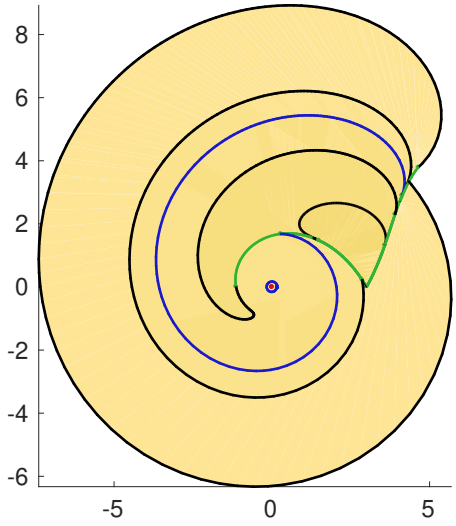


FIGURE 4.16 – Synthèse optimale dans le cas d'un courant fort. Les courbes noires représentent les sphères de types A et C. Les deux courbes bleues sont une sphère unique de type B. Puisque les boules de type B (en bleu) ne sont pas simplement connexes et ont un trou, les sphères correspondantes ont deux composantes connexes.

4.4 Ouverture au cas plusieurs vortex

Jusqu'ici nous avons présenté l'analyse du problème dans le cas d'un seul vortex autour de la particule, cas pour lequel il a été plus ou moins aisé de faire une analyse fine en décrivant la nature des solutions et en proposant une synthèse dans les cas faible et fort. Si l'on considère maintenant le cas où l'on a plusieurs vortex autour de la particule, c'est-à-dire le cas où on a $N > 1$, ces derniers ne sont plus statiques et doivent être considérés dans la dynamique. Le système de contrôle garde la forme $\dot{q} = F_0(q) + u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q)$, mais avec la dérive F_0 donnée par

$$F_0(q) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{2\pi} \frac{y - y_j}{r_j^2} \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{2\pi} \frac{x - x_j}{r_j^2} \frac{\partial}{\partial y}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi} \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2} \frac{\partial}{\partial y_i} \right),$$

où $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$, $i = 1, \cdots, N$ et où l'état $q = (x, y, x_1, y_1, \cdots, x_N, y_N) \in \mathbb{R}^{2(1+N)}$ contient la position de la particule ainsi que les positions des N vortex. Les champs de contrôle demeurent égales à $F_1(q) = \frac{\partial}{\partial x}$ et $F_2(q) = \frac{\partial}{\partial y}$. Dans cette formulation le problème sort du cadre Zermelo (puisque l'état et le contrôle ne sont plus de même dimension) à moins qu'on soit capable d'intégrer en premier la dynamique des vortex qui ne dépend ni de l'état, ni du contrôle et ainsi de se réduire à un système non autonome en dimension deux. Cependant, la résolution analytique de la dynamique des vortex est déjà un problème complexe en hydrodynamique, de plus au delà de quatre vortex le système devient chaotique [9, 40, 33, 60, 82, 93]. L'étude analytique de ce cas présente alors des difficultés supplémentaires qu'on a pas prise en compte dans ce travail. Numériquement il est possible t'intégrer le système afin de déterminer des BC-extrémales pour des cibles données, bien qu'il faille utiliser une astuce homotopique pour contourner la difficulté d'initialisation de la méthode de tir. Le principe du maximum s'applique comme dans le cas d'un vortex et le contrôle optimal se calcul de la même manière. Pour la résolution on fixe la position initiale des vortex et on considère libre leur position finale, la fonction de tir s'écrit alors :

$$\begin{array}{rccl} S\colon & \mathbb{R} \times \mathrm{S}^{2(1+N)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2(1+N)} \\ & (t_f, p_0) & \longmapsto & S(t_f, p_0) = \big(q(T, q_0, p_0) - q_f, \quad p_{x_1}(T, q_0, p_0), \ \cdots, \ p_{y_N}(T, q_0, p_0)\big) \end{array}$$

Afin de contourner la difficulté d'initialisation, on utilise l'algorithme suivant :

— Pour deux vortex, on résout d'abord le sous-problème où on met une des circulations à zéro, c'est-à-dire qu'on résout un problème à un vortex ;

— Ensuite, on utilise une méthode de suivi de chemin (ou méthode homotopique) [32] implémentée dans le code HamPath (qui est présenté au chapitre suivant) où le paramètre homotopique est la valeur de la circulation qui augmente (ou décroît) de 0 à la valeur désirée ;

— On répète cette procédure pour obtenir des solutions dans le cas $N = 3$ puis $N = 4$ vortex.

Cet algorithme à été implémenté dans le cas du critère énergie minimale qui se traite d'une manière assez similaire et est présenté au chapitre 9 de ce manuscrit où des exemples de BC-extrémales sont données.

L'intérêt de considérer le cas plusieurs vortex vient de ce qu'il semble logique qu'avec plus de vortex autour de la particule il sera possible de réduire d'avantage le coût du transfert. Cependant, cette intuition n'est pas nécessairement vraie dans tous les cas. En effet, une question qui reste ouverte est par exemple celle de savoir s'il vaudrait mieux considérer un vortex de circulation k plutôt que deux vortex de circulation $k/2$ pour le transfert. La réponse à cette question dépend de la position initiale du vortex, c'est pourquoi nous pensons utile d'investiguer avant tout sur le problème du placement optimal des vortex (c'est-à-dire de rajouter la position initiale des vortex dans les paramètres d'optimisation du problème) afin de pouvoir proposer une politique optimale globale au problème. À terme la synthèse optimale globale sera d'être capable de dire pour un point initial et un point final donnés, combien de vortex il faut considérer pour le transfert, où les placer et quels sont alors dans cette configuration les temps, contrôle et trajectoire optimaux du transfert.

4.5 Conclusion

Il faut dire que le problème du vortex étudié dans ce chapitre est celui qui à principalement motivé l'étude générale que nous avons fait sur les problèmes de Zermelo de révolution. En effet, dans la littérature traitant des problèmes de type Zermelo, le cas fort est souvent très peu abordé. Ainsi d'avoir un cas d'application pour lequel on ne pouvait se résoudre à une dérive faible sur tout le domaine nous a grandement motivé à considérer avec attention le cas Zermelo fort et à définir un cadre géométrique plus large dans lequel on pouvait discuter des phénomènes et des situations stables que nous avions dans ce cas particulier. L'étude du cas vortex a été faite de manière assez complète jusqu'à la construction d'une synthèse dans le cas fort. Cependant, il reste encore beaucoup à faire pour compléter l'étude analytique du cas plusieurs vortex afin

de proposer une synthèse globale du problème c'est-à-dire une synthèse qui fournie en plus une politique optimale sur le nombre de vortex à considérer et leurs positions initiales en fonction de la cible à atteindre.

Chapitre 5

Méthodes numériques, logiciel HamPath et autres applications

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes méthodes numériques que nous avons utilisées dans le cadre de ce travail notamment pour le calcul du lieu de coupure et la construction des sphères et des boules zermélienne. On présente à travers des exemples comment on a utilisé ces méthodes numériques, selon l'objectif que nous nous fixions. Toutes ces méthodes sont implémentées à l'aide du code HamPath (**www.hampath.org**) [1] qui nous a servi pour toutes les simulations numériques présentées dans ce manuscrit. Au-delà du cadre Zermelo, nous avons aussi utilisé ces méthodes dans deux autres applications parallèles en lien avec le problème vortex pour un critère énergie minimale et dans le cadre de la résolution des problèmes de contrôle optimal avec perturbations singulières. Ces deux autres applications ont donné lieux à deux articles de conférence [21, 48] reproduits dans les chapitres 9 et 10 de ce manuscrit.

5.1 Généralités

Suivant le but que nous nous proposions dans tel ou tel cas d'étude, nous avons utilisé différentes méthodes implémentées dans le code HamPath. Ici, nous présentons assez brièvement chacune de ces méthodes, comment elles sont implémentées dans le code HamPath et mettons un accent sur comment nous les avons utilisées. Pour une présentation complète des méthodes indirectes voir par exemple [17, 32, 102] et pour plus de détails sur le code HamPath voir [46, 47] ou consulter le site internet www.hampath.org. Le cadre mathématique reste celui défini précédemment. Considérant le problème de Zermelo donné par le triplet (M, g, F_0) et défini par :

$$\begin{aligned} & t_f \mapsto \min \\ & \dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i\, F_i(q), \quad q \in M, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \|u(t)\| \leq 1 \\ & q(0) = q_0, \quad q(t_f) = q_1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

où les champs F_i, $i = 0, 1, 2$ sont donnés par : $F_0 = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}$, $F_1 = \frac{\partial}{\partial r}$, et $F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}$.

Le fil conducteur de ce travail était à terme la construction d'une synthèse optimale du problème dans un voisinage adapté. Les étapes de résolutions étant : la paramétrisation du flot

1. Depuis plusieurs années, l'équipe APO de l'IRIT-CIMI développe, en collaboration avec l'Institut Mathématiques de Bourgogne et des équipes de Inria (projet ADT en cours), le logiciel open-source *nutopy* (`https://ct.gitlabpages.inria.fr/nutopy/`) pour la résolution de problèmes de contrôle optimal via des méthodes de tir et d'homotopie différentielle. Ce logiciel fait suite au code *hampath* (`https://www.hampath.org/`) réalisé par l'équipe APO et ses collaborateurs, couplant homotopie différentielle et différentiation automatique pour le contrôle optimal. Une galerie d'exemples est disponible à l'adresse suivante : `https://ct.gitlabpages.inria.fr/gallery/`.

extrémal via le principe du maximum et l'intégration numérique du système hamiltonien pour déterminer le flot géodésique partant d'un point q_0 donné, la résolution des équations de tir permettant de déterminer les BC-extrémales solutions du problème pour un point initial q_0 fixé et une cible donnée, le calcul des points conjugués et de coupure le long des géodésiques en rapport avec l'optimalité locale et globale des trajectoires. L'utilisation des méthodes de suivi de chemin différentiel (ou méthodes homotopiques) nous a permis de déterminer de manière générique les lieux conjugués, de séparation et de coupure et ainsi de tracer les boules zermélienne, lignes de niveaux de la fonction temps minimale ou fonction valeur définie par :

$$(P) \qquad V_{q_0}(q_f) = \inf\left\{t_f \mid (t_f,u) \in \mathcal{D}_{q_0} \text{ et } q_u(t_f,q_0) = q_f\right\},$$

où $\mathcal{D}_{q_0} = \left\{(t_f,u) \in [0\,,+\infty[\times \mathcal{U} \;\middle|\; u \in \mathcal{U}_{t_f,q_0}\right\}$. Afin de donner plus de détails sur chacun de ces points, on commence par rappeler quelques définitions.

Définition 5.1.1. *La fonction exponentielle est définie par :*

$$\exp_{q_0}(t,p_0) = \Pi_q \circ e^{t\vec{\mathbf{H}}}(q_0,p_0), \tag{5.2}$$

où $\Pi_q(q,p) = q$ est la projection canonique et où $e^{t\vec{\mathbf{H}}}(q_0,p_0)$ est la solution à l'instant t du système hamiltonien

$$\dot{z}(s) = \vec{\mathbf{H}}(z(s)), \quad z(0) = (q_0,p_0). \tag{5.3}$$

Avec la fonction exponentielle, on définit la fonction de tir

$$S(t_f,p_0) = \left(\mathbf{H}(q_0,p_0) + p^0, \exp_{q_0}(t_f,p_0) - q_f\right),$$

où $(t_f,p_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ et où q_0 et p^0 sont donnés.

Le but étant de résoudre $S = 0$, on peut choisir la formulation équivalente

$$\begin{array}{rccl} S_P\colon & \mathbb{R}\times P & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t_f,p_0) & \longmapsto & S_P(t_f,p_0) = \exp_{x_0}(t_f,p_0) - x_f. \end{array}$$

où $P = \left\{p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \mathbf{H}(q_0,p) + p^0 = 0\right\}$. Cette paramétrisation est assez classique. Cependant, Puisque $\|p(t)\|_g \neq 0$, on peut aussi fixer $\|p(0)\|_g = 1$. En suivant cette paramétrisation, on peut restreindre p_0 à la sphère S^1 et définir la fonction de tir :

$$\begin{array}{rccl} S_S\colon & \mathbb{R}\times \mathrm{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t_f,p_0) & \longmapsto & S_S(t_f,p_0) = \exp_{q_0}(t_f,p_0) - q_f. \end{array}$$

Si $(t_f,p_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}^1$ satisfait $S_S(t_f,p_0) = 0$, alors cette paire est associée à une BC-extrémale. Celle-ci est hyperbolique (resp. elliptique) si $\mathbf{H}(q_0,p_0) > 0$, (resp. $\mathbf{H}(q_0,p_0) < 0$) et anormale lorsque $\mathbf{H}(q_0,p_0) = 0$. Cette dernière formulation est équivalente à paramétrer les extrémales par l'angle de cap initial α (cf. section 1.3) et a l'avantage de ne pas imposer la valeur de p^0, on peut donc trouver les extrémales anormales et normales avec la même formulation, bien qu'on doit *a posteriori* vérifier le signe de $\mathbf{H}(q_0,p_0)$. Cela revient à poser $p_0 = (\cos\alpha, m(r_0)\sin\alpha)$ et considérer α dans $[0,2\pi[$. La fonction de tir est alors définie pour

$$(t_f,\alpha) \in \left\{(t_f,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\;\middle|\; t_f < t_\alpha\right\}$$

où $t_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ est le temps maximal tel que $\exp_{q_0}(\cdot,p_0(\alpha))$ est bien défini sur $[0\,,t_\alpha[$.

5.2 Intégration numérique

Pour chaque α donné, on peut intégrer le système sur $[0,t]$, $0 < t < t_\alpha]$, et obtenir la géodésique paramétrée par α. En considérant une discrétisation assez fine de l'intervalle $[0,2\pi[$ de la forme $0 = \alpha_1 < \cdots < \alpha_N < 2\pi$, avec N suffisamment grand, on peut alors représenter le flot géodésique. Dans le code HamPath le système est intégré grâce à la fonction **exphvfun**, qui utilise des schémas de type Runge Kutta et à laquelle il suffit de fournir l'hamiltonien maximisé **H** sous forme d'une sous-routine Fortran appelée **hfun**.

Exemple 3. *Dans les trois cas d'étude considérés et analysés aux chapitres 3 et 4, la représentation du flot géodésique (hyperbolique et elliptique) pour q_0 appartenant à un domaine de courant fort (cf. Figs 5.1, 5.2 et 5.3), nous donne déjà un aperçu sur les propriétés de ce flot et la forme éventail des boules en petit temps.*

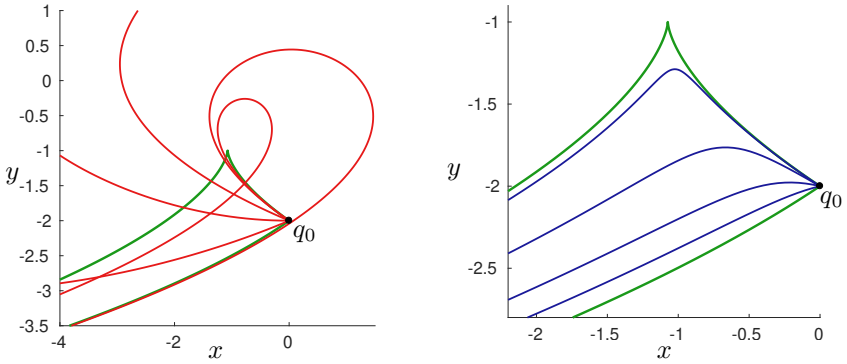


FIGURE 5.1 – Illustration du flot géodésique dans l'exemple historique dans le plan (x, y) avec $q_0 = (0, -2)$.

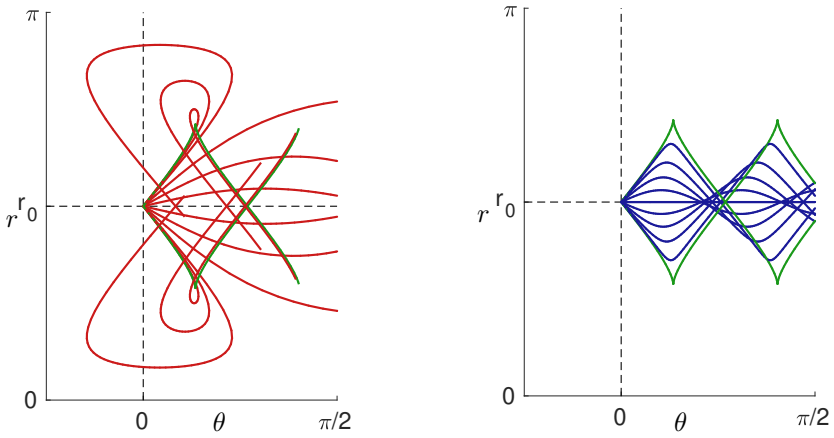


FIGURE 5.2 – Illustration du flot géodésique dans le cas du Kepler moyenné dans le plan (θ, r) avec $q_0 = (0, \pi/2)$.

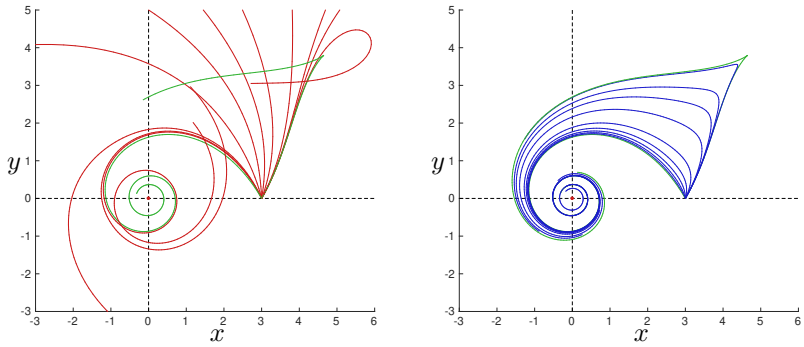


FIGURE 5.3 – Illustration du flot géodésique dans le cas du problème vortex dans le plan (x, y) avec $q_0 = (3, 0)$

Pour la classification des trajectoires, savoir intégrer le système hamiltonien est suffisante. Cependant, on ne peut encore rien conclure quant au statut d'optimalité des trajectoires. Ainsi, pour calculer les points conjugués le long des géodésiques, en lien avec l'optimalité locale, il faut résoudre les équations variationnelles associées au système.

5.3 Equations variationnelles

Définition 5.3.1. *Soit $z(\cdot)$ une courbe extrémale de référence solution du système hamiltonien donné par* (5.3)*. L'équation variationnelle*

$$\dot{\widehat{\delta z}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{H}}'(z(t)) \cdot \delta z(t), \tag{5.4}$$

est appelée équation de Jacobi*. Un* champ de Jacobi *est une solution non triviale J de* (5.4)*. On rappelle qu'il est* vertical *au temps t si $\delta q(t) = \Pi'(z(t)) \cdot J(t) = 0$, où $\Pi \colon (q,p) \mapsto q$ est la projection standard.*

On rappelle ci-dessous l'algorithme de calcul des temps conjugués le long d'une trajectoire de référence.

Algorithme de calcul des temps conjugués. On considère une extrémale de référence $(q(\cdot,p_0),p(\cdot,p_0))$ et un champ de Jacobi $J(\cdot) = (\delta q(\cdot),\delta p(\cdot))$ le long de cette extrémale, qui est verticale à l'instant initial (*i.e.* $\delta q(0) = 0$) et avec p_0 orthogonal à $\delta p(0)$ (puisque p_0 est restreint à la S^1), alors t_c est un temps conjugué si et seulement si t_c est une solution de l'équation suivante :

$$F(t) = 0 \quad \text{où} \quad F(t) = \det(\delta q(t), \dot{q}(t)).$$

Remarque 23. *Cet algorithme est équivalent à celui présenté en section 2.2. Pour des raisons numériques, il est souvent préférable de calculer la plus petite valeur singulière plutôt que le déterminant* $\det(\delta q(t), \dot{q}(t))$*. Lorsque cette plus petite valeur singulière est nulle, le temps t est alors un temps conjugué.*

Cet algorithme est implémenté dans le code HamPath à qui il suffit de fournir en plus de l'hamiltonien maximisé $\mathbf{H}$, codé dans la sous-routine Fortran **hfun**, la fonction F. En effet, en fournissant $\mathbf{H}$ et F à HamPath, le code génère automatiquement la jacobienne de la fonction F. Pour faciliter l'implémentation de F, HamPath fournit de plus la fonction exponentielle. Une différenciation automatique est utilisée pour produire $\overrightarrow{\mathbf{H}}$ et est combinée avec des intégrateurs Runge-Kutta pour assembler la fonction exponentielle et les équations variationnelles (5.4) utilisées pour calculer les temps conjugués.

Remarque 24. *Le calcul du lieu conjugué peut se faire en discrétisant l'espace des paramètres (la sphère dans le cas où on considère la troisième paramétrisation) et en déterminant pour chaque géodésique donnée le premier temps conjugué et ainsi assembler le lieu conjugué. Cependant, il est plus intéressant d'utiliser une homotopie (on y apportera plus de détail dans les sections suivantes) pour reconstruire de manière générique, à partir d'un premier temps conjugué, ce lieu conjugué.*

Exemple 4. *Dans le cas du problème du vortex, cette démarche nous a permis de montrer que le lieu conjugué est vide. Une illustration est donnée dans la figure 5.4 dans le cas faible, bien que le résultat est le même dans le cas fort. En effet, si on considère la discrétisation uniforme $0 = \alpha_1 < \cdots < \alpha_N < 2\pi$, avec $N = 1000$, on peut calculer le long de chaque trajectoire donnée par α_i la plus petite valeur singulière de la matrice $(\delta q(t), \dot{q}(t))$. On peut voir sur la figure que celle-ci ne s'annule jamais. Les deux sous-graphes correspondent d'une part aux trajectoires qui convergent vers le vortex et d'autre part à celles qui vont à l'infini (cf. section 6.2.6 pour plus de détails).*

Lorsqu'on se donne désormais une cible finale, le calcul d'une BC-extrémale pour la rejoindre passe par une méthode de tir.

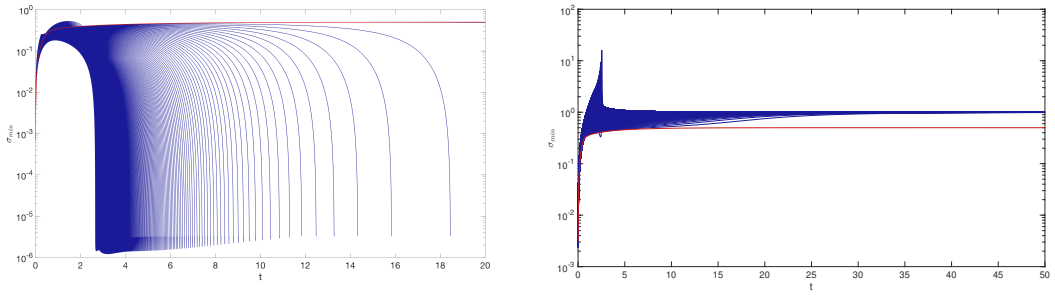


FIGURE 5.4 – Plus petite valeur singulière par rapport au temps. Paramètres : $\theta_0 = 0$, $k = 2.0$, $r_0 = 4k/3$ (cas faible de Zermelo). L'ensemble des paramètres $[0\,, 2\pi[$ est uniformément discrétisé en $N = 1000$ sous-intervalles et nous définissons $0 =: \alpha_1 < \cdots < \alpha_N < 2\pi$ les paramètres associés. Chaque courbe bleue est le graphe de la plus petite valeur singulière $\sigma_{\min}(t)$ le long de la géodésique donnée par $\alpha \in \cup_{i=1}^{N}\{\alpha_i\}$ et pour $t \in [0\,, 50]$. À gauche, sont représentées les trajectoires qui convergent vers le vortex et à droite, celles qui vont à l'infini. Sur le sous-graphe de gauche on arrête l'intégration numérique lorsque $r(t) \leq 10^{-3}$ ce qui explique pourquoi la valeur minimale de $\sigma_{\min}$ est comprise entre 10^{-5} et 10^{-6}. La courbe rouge sur chaque graphique correspond à la séparatrice.

5.4 Méthodes de tir simple

Il existe plusieurs méthodes de tir notamment le tir simple, le tir simple avec détection de commutation, le tir multiple. Dans le cadre de ce travail, nous avons utilisé principalement la méthode de tir simple et c'est elle que nous présenterons ici. La méthode de tir simple consiste à chercher un zéro de la fonction de tir S_S définie précédemment. Dans HamPath, lorsqu'on fournit l'hamiltonien et la fonction de tir **hfun** et **sfun**, le code compile les fichiers et fourni en plus du hamiltonien, de la fonction exponentielle et de leur jacobienne respective, les fonctions *Matlab* : **ssolve**, **sfun** et **sjac** qui code la méthode de tir simple, fournit le calcul de la fonction de tir et la jacobienne de la fonction de tir. Un algorithme de type Newton est utilisé pour résoudre l'équation de tir. Les jacobiennes calculées par différentiation automatique (DA), peuvent par la suite être utilisées pour le calcul des points conjugués.

Exemple 5 (BC-extrémales dans le cas du problème vortex)**.** *Classiquement, la méthode de tir simple est utilisée pour le calcul de BC-extrémale, on représente dans la figure 5.5 pour le problème vortex dans le cas fort, les solutions temps minimal pour rejoindre deux cibles données.*

Dans ce travail, la méthode de tir nous a servi au-delà du calcul de BC-extrémales. En effet, l'objectif de calculer le lieu de coupure nécessite d'utiliser du tir soit pour calculer les self-intersections du front d'ondes, soit pour calculer les intersections du front avec les anormales. Dans ce cas, la fonction de tir est codée différemment. Pour calculer les self-intersections du front d'ondes au temps t_f (point de séparation isochrone), la fonction de tir s'écrit :

$$S_{t_f}(\alpha_1, \alpha_2) = q(t_f, \alpha_1) - q(t_f, \alpha_2) \tag{5.5}$$

où α_1 et α_2 paramètrent les deux géodésiques qui s'intersectent au temps t_f. Pour l'initialisation du tir, délicate à cause de la sensibilité des méthodes de Newton utilisées dans le code, une astuce est de représenter le front d'ondes en 3D avec comme troisième dimension les angles de cap paramétrant les géodésiques. Ainsi, à partir du graphe du front d'ondes, on a une idée de la valeur des paramètres α_1 et α_2 pour leur initialisation. Pour le calcul des points d'intersection entre le front d'ondes au temps t_f et une anormale (point de séparation non isochrone), la fonction de tir est donnée par :

$$S_{t_f,\alpha_a}(t_1, \alpha) = q(t_1, \alpha_{\mathrm{a}}) - q(t_f, \alpha)$$

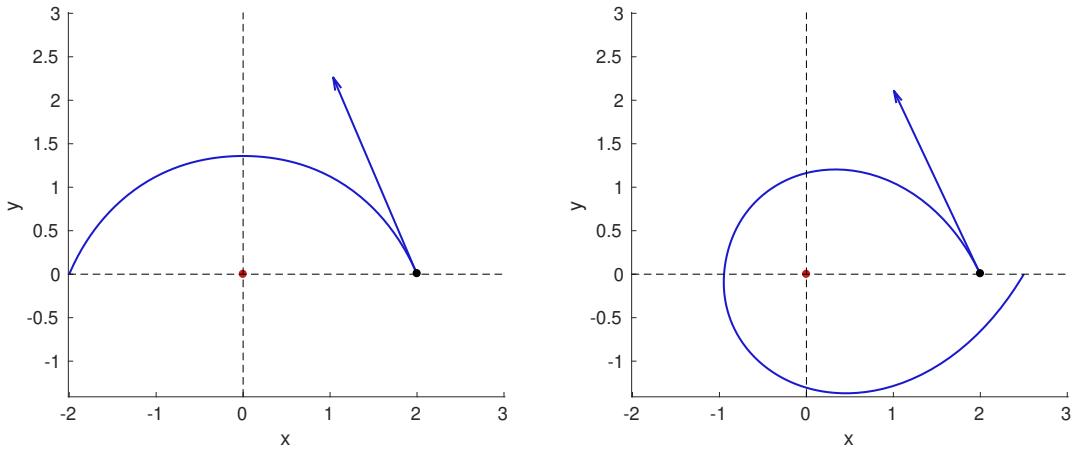


FIGURE 5.5 – Géodésique solution dans le cas d'un courant fort en q_0 : $\mu = 2\,\|q_0\|$. (Gauche) $q_0 = (2, 0)$, $q_f = (-2, 0)$ et le temps final vaut $t_f \approx 1.641$. (Droite) $q_0 = (2, 0)$, $q_f = (2.5, 0)$ et le temps final vaut $t_f \approx 2.821$.

où t_f est fixé, t_1 est le temps de l'anormale qui se fait recouper et α l'angle de cap de la géodésique normale qui intersecte l'anormale avec un temps t_f. Pour initialiser la fonction de tir dans ce cas, on peut également représenter le front d'ondes et les anormales en dimension trois, la troisième dimension des anormales étant le temps. De la représentation du front d'ondes et des anormales, on peut alors récupérer un point assez proche du (ou des) point(s) d'intersection(s) recherché(s) pour servir de point d'initialisation à la méthode de tir.

Exemple 6. ***front d'ondes et sphère dans le cas du problème vortex.***

1. ***Cas d'un courant faible.*** *On considère, pour être dans le cas faible, $k = 0.6r_0$. La figure 5.6 donne une illustration du passage du front d'ondes à la sphère pour le problème vortex dans le cas faible. En effet, pour $t_f = 2.9$, le front d'ondes se recoupent pour la première fois proche du point $q = (-0.48, 0.42)$ qui nous sert de point d'initialisation pour résoudre la fonction de tir et déterminer le point d'intersection exact donné par $q = (-0.4811432, 0.4221541)$. Ainsi, en retranchant dans le front, à partir de ce point, la partie de trop on obtient la sphère et la boule données dans le graphe de droite de la figure.*

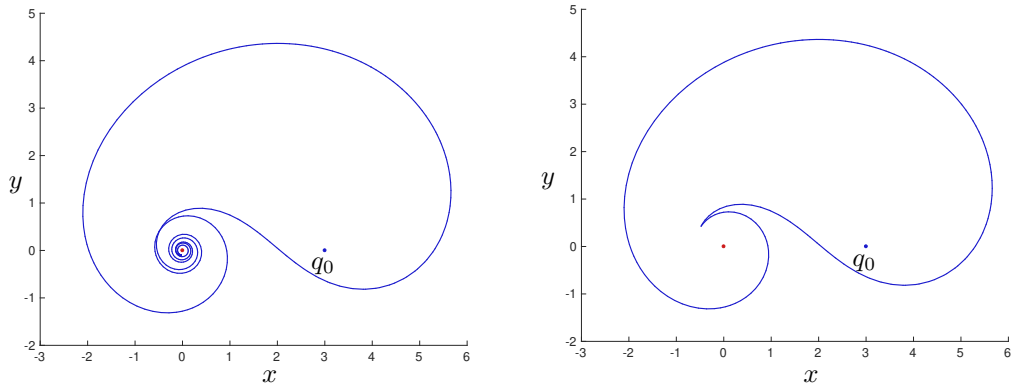


FIGURE 5.6 – front d'ondes, sphère et boule dans le plan (x, y) au temps $t_f = 2.9$ dans le cas du problème vortex pour un courant faible, où on a considéré $r_0 = 3.0$ et $k = 0.6r_0$.

2. ***Cas d'un courant fort.*** *On considère, pour être dans le cas fort, $k = 2r_0$. La figure 5.7 donne une illustration du passage du front d'ondes à la sphère pour le problème vortex dans le cas fort. En effet, pour $t_f = 2.9$, Le front d'ondes intersecte l'anormale avant de se*

recouper proche du point $q = (0.58, 1.69)$ *et l'anormale est recoupée avec un temps proche de* $t = 1.34$ *qui nous sert de point d'initialisation pour résoudre la fonction de tir et déterminer le point d'intersection obtenu après le tir est donné par* $q = (0.6762892, 1.6918114)$ *et le temps de l'anormale par* $t = 1.2903867$. *Ainsi, en retranchant dans le front, à partir de ce point, la partie de trop on obtient la sphère et la boule données dans le graphe de droite de la figure.*

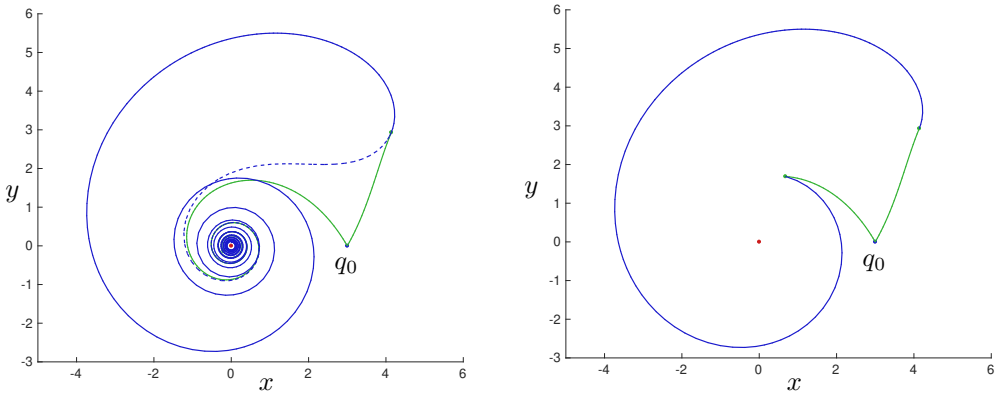


FIGURE 5.7 – front d'ondes (hyperbolique et elliptique) + anormales, sphère et boule dans le plan (x, y) au temps $t_f = 2.9$ dans le cas du problème vortex pour un courant fort, où on a considéré $r_0 = 3.0$ et $k = 2r_0$.

Dans l'exemple ci-dessus, le calcul du front d'ondes est fait de manière générique par une méthode de suivie différentielle (ou méthode homotopique), celle-ci nous a été indispensable pour les calculs que nous avons eu à faire dans les différents cas d'étude, nous la présentons dans la section suivante.

5.5 Méthodes homotopiques

Considérons une homotopie

$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (y,\lambda) & \longmapsto & h(y,\lambda) \end{array} .$$

Sous les hypothèses de rang maximal $\operatorname{rang}(h'(y,\lambda)) = n$ en tout point de $h^{-1}(\{0\})$, un chemin de zéros paramétrés par l'abscisse curviligne peut être calculé en intégrant une équation différentielle ordinaire (EDO). HamPath implémente ce suivi de chemin par une méthode de prédiction (par les schémas de type Runge Kutta) - correction et le calcul des dérivées nécessaires est effectué via la différentiation automatique [47]. Les méthodes homotopiques possèdent de multiples intérêts. Ci-dessous, nous présentons une liste non exhaustive de situations pour lesquelles celles-ci nous ont été utiles.

1. Une première utilisation possible, complémentaire avec les méthodes de tir, est la détermination d'un lieu particulier à partir d'un point appartenant à celui-ci, par exemple le lieu conjugué ou le lieu de séparation, le front d'ondes ou la sphère à un instant donné, etc. En effet pour le calcul du lieu de séparation, on peut considérer la fonction homotopique $S_\lambda(y_0)$, avec $y_0 = (\alpha_1, \alpha_2)$ l'inconnue, $\lambda = t_f$ le paramètre homotopique et S_{t_f} définie en (5.5). Voir la figure 5.8 ci-dessous pour une illustration dans le cas du problème à un vortex.
2. Une deuxième utilisation vient en complément des méthodes de tir. En effet, les méthodes de tir sont connues pour être extrêmement sensibles par rapport au point initial qui leur est donné. Ceci vient de l'algorithme de type Newton sous-jacent. Pour contourner cette difficulté, il peut être nécessaire de déformer le problème de départ en un problème plus simple à résoudre, en jouant sur un ou plusieurs paramètres du problème. Nous l'avons

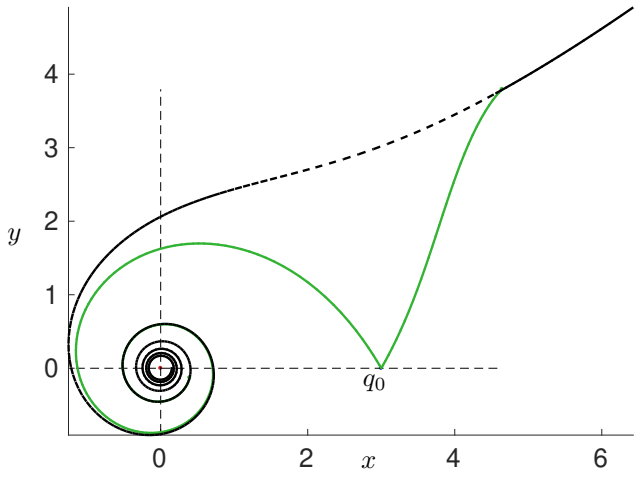


FIGURE 5.8 – Représentation du lieu de séparation isochrone (courbe noir) pour le problème à un vortex calculé par homotopie grâce au code HamPath. Il peut être décomposé en trois morceau dont les deux morceaux représentés en trait continus sont formés de géodésiques hyperboliques et le morceau représenté par des tirets est formé de géodésiques elliptiques. En vert sont représentées les géodésiques anormales. Pour le représentation on a considéré $r_0 = 3.0$ et $k = 2r_0$.

particulièrement utilisé dans l'étude du problème plusieurs vortex, traité dans [20] reproduit au chapitre 9 pour un critère énergie minimale. En effet, pour passer de la solution du problème pour un vortex à celle pour deux vortex, il suffit de faire une homotopie sur la circulation du deuxième vortex. Itérant ce processus, on a pu ainsi initialiser avec facilité la fonction de tir pour résoudre le problème jusqu'à $N = 4$ vortex. Voir le chapitre 9 pour les détails.

3. Une troisième utilisation possible consiste à déformer un problème complexe en un problème plus simple qu'on sait résoudre en introduisant un paramètre homotopique scalaire $\lambda \in [0, 1]$ tels que $\lambda = 0$ correspond au problème simple et $\lambda = 1$ au problème initial. Cette utilisation des méthodes homotopiques, couplées à la propriété turnpike [103], nous à permis de proposer un algorithme de résolution des problèmes de contrôle optimal avec perturbation singulière. Voir le chapitre 10 pour les détails du cadre et le principe de résolution.

5.6 Conclusion

L'utilisation que nous avons fait des méthodes numériques tout au long de ce travail, en complément des méthodes géométriques, nous a permis de contourner plusieurs difficultés notamment pour le calcul pratique des lieux conjugués et de coupure dans les études de cas que nous avons considérées. En effet, dans le cas riemannien déjà, le calcul analytique de ces lieux est un problème qui demeure très complexe. Cependant, la démarche numérique que nous avons décrite dans ce chapitre, qui s'appuie sur des outils implémentés dans le code HamPath et sur le résultat de caractérisation du lieu de coupure présenté au chapitre 2, permet de calculer de manière générique ces différents lieux pour une classe assez large de problèmes. Néanmoins, le résultat de caractérisation du lieu de coupure reste encore à prouver dans le cas général. D'autre part, certaines simulations numériques faites en amont des calculs théoriques ont servi à aiguiser notre intuition à de nombreuses reprises. Ces différentes études ont donc permis de mettre d'avantage en évidence la complémentarité qui existe entre méthodes analytiques et numériques pour l'analyse de situations complexes.

Conclusion et perspectives

Bilan des contributions. Ce travail étudie les problèmes de Zermelo sur les surfaces de révolution d'un point de vue du contrôle optimal dans le cadre hamiltonien et combine les méthodes géométriques et numériques. Le problème de Zermelo a été introduit par Zermelo et Carathéodory [110], [36] et est l'un des problèmes fondateurs du calcul des variations. Le traitement de ce problème met en évidence l'équivalence entre le point de vue Carathéodory-Zermelo et la transformée de Goh en contrôle, point de vue qui permet de passer du système initial à un système de contrôle scalaire en dimension trois et ainsi d'utiliser des outils géométriques classiques [25, 18] pour paramétrer le flot géodésique ainsi que le lieu conjugué et de coupure en lien avec l'optimalité locale/globale des trajectoires [17, 32]. Un deuxième point de vue à également été présenté dans ce travail, c'est le point de vue système mécanique, qui permet de décrire le système par un potentiel généralisé dans le cas de révolution et de paramétrer les trajectoires par la constante de Clairaut p_θ. Cela nous a permis de proposer une méthode de classification du flot géodésique appelée la classification de Morse-Reeb généralisée (GMR) qui étend la classification classique de Morse en système dynamique. Dans ce cadre nous avons introduit les notions de géodésique équateur, de pseudo-méridien, géodésique séparatrice, de composante de Reeb, de géodésique homocline, etc en discutant dans la classification de quelques propriétés particulières de ces trajectoires. La contribution centrale de cette étude aura été d'analyser le rôle des géodésiques anormales dans la synthèse optimale des problèmes de Zermelo. En effet, lorsqu'on considère un problème de Zermelo, on peut être soit dans le cas faible (lorsque le contrôle est encore capable de contrer la dérive), soit dans le cas fort (lorsque le contrôle n'est plus capable de contrer la dérive), le cas limite entre les deux étant le cas dit modéré (où il existe un contrôle pour lequel on démarre avec une vitesse nulle). La différence fondamentale entre le cas faible et le cas fort est l'existence de directions anormales dans le cas fort (appelé aussi directions limites par Carathéodory). Celles-ci sont responsables d'un certain nombre de phénomènes nouveaux qui se produisent dans ce cas, entraînant des difficultés nouvelles dans l'analyse du problème. La première situation stable que nous avons discutée est l'existence de points de séparation non isochrone, cas particulier de points de coupure, qui n'existent pas dans le cas faible et qui, dans le cas fort, ne peuvent se produire que le long des géodésiques anormales. Nous avons montré qu'en ces points, la fonction temps minimal n'est pas continue, ce qui constitue une rupture fondamentale entre le cadre zermélien et le cadre finslérien où la fonction valeur est régulière sur tout le domaine. La deuxième situation stable est l'existence de points cusps le long des géodésiques anormales, qui correspondent en effet, à des points conjugués généralisés le long d'une trajectoire non régulière et où l'optimalité est automatiquement perdue. Le long d'une anormale de référence donnée, les points cusp apparaissent comme limite de self-intersections de géodésiques normales partant d'un voisinage conique de l'anormale considérée. Cette étude nous a permis d'étendre le résultat de caractérisation du lieu de coupure, résultat classique en géométrie finslérienne et très utile pour le calcul pratique du lieu de coupure et la construction des sphères et des boules, bien qu'il nous faudra encore étendre le résultat à tous les cas. À partir de ces différentes études, nous avons donné la forme générique des boules zerméliennes en temps petit, forme *éventail* dans le cas fort, et proposé pour des temps quelconques, une démarche numérique pour le calcul générique des sphères et des boules pour des problèmes de Zermelo quelconques en dimension deux.

D'un point de vue applicatif, nous avons utilisé cette approche pour analyser trois problèmes typiques de Zermelo de révolution. Le premier que nous avons présenté est l'exemple historique de Carathéodory-Zermelo qui est l'un des problèmes fondateurs du calcul des variations et une forme normale intéressante pour l'analyse micro-locale du problème dans le cas général. Nous avons donné dans ce cas l'expression analytique des géodésiques déterminées à partir de la transformée de Crathéodory-Zermelo-Goh et mis en évidence les deux nouvelles situations décrites précédemment. Dans cet exemple, le lieu conjugué classique est vide et on a dans le cas fort un seul point cusp se produisant le long de l'anormale qui rencontre le domaine de courant modéré. Le lieu de coupure est alors formé de la branche de cette anormale jusqu'à son point cusp. Nous avons considéré un second exemple, celui dit du "cas Kepler moyenné". Dans cet exemple on considère une famille de métriques de révolutions paramétrée par $\lambda \in [0, 1]$ et définie par $m(r) = \sin^2 r/(1 - \lambda \sin^2 r)$ dont le cas $\lambda = 0$ correspond à la métrique usuelle sur la sphère et à la limite pour $\lambda = 1$ on a la métrique singulière dite de Grushin. Elle apparaît, pour $\lambda = 4/5$, dans le problème de Kepler ce qui justifie l'appellation "cas Kepler moyenné". Nous avons rajouté au problème original, défini dans le cadre riemannien (c'est-à-dire sans courant), un courant constant évoluant le long des parallèles afin de mettre en évidence la déformation du flot géodésique et du lieu conjugué pour ce type de métrique. Nous avons alors construit dans le cas faible et fort une synthèse pour un point initial pris sur l'équateur. Le lieu de coupure se divisant en deux branches dans le cas fort, une branche formée par les anormales jusqu'à leur premier point cusp et une autre branche formée d'un segment de l'équateur. La troisième application que nous avons présentée dans ce travail est celle du *"problème du vortex"* qui est une application récente provenant de l'hydrodynamique et qui décrit l'évolution d'une particule passive autour d'un point vortex. C'est ce problème qui a inspiré toute cette étude : c'est un cas typique de problème de Zermelo 2D qui ne peut se limiter au cas faible. Nous nous sommes alors particulièrement intéressé au cas où l'on a un seul vortex autour de la particule. Dans ce cas, celui-ci est fixé comme origine de l'espace, il crée en ce point une singularité de *type vortex*. Un résultat central que nous avons établi dans ce cas est celui de l'existence de solutions optimales pour rejoindre n'importe quel point du plan [22]. Ce résultat a ensuite été généralisé à une classe plus large de problèmes possédant une singularité du même type c'est-à-dire de type vortex [23]. Pour mettre en évidence l'intérêt de la méthode de classification GMR, nous avons considéré un exemple académique appelé "problème du vortex généralisé" où nous avons présenté la classification du flot lorsque l'on a plusieurs équateurs et plusieurs séparatrices. Enfin nous avons construit une synthèse optimale dans les cas faible et fort en présentant dans chacun de ces cas les différents types de boules que l'on pouvait avoir. Au delà de la résolution des problèmes de types Zermelo, les méthodes numériques présentées dans cette thèse nous ont servi dans deux autres applications. La première étant la résolution du problème du vortex pour un critère énergie minimale en considérant jusqu'à $N = 4$ vortex. Grâce aux méthodes homotopiques, couplées à la méthode de tir, nous avons proposé un algorithme efficace pour déterminer des BC-extrémales dans le cas de plusieurs vortex. La deuxième application, qui est un travail fait en parallèle de ce que nous avons eu à présenter, concerne la résolution des problèmes de contrôle avec perturbations singulières. Nous avons proposé dans ce cas un algorithme efficace, s'appuyant sur la propriété turnpike [103] et sur les méthodes homotopiques, pour résoudre ce type de problème [48].

Perspectives. De nombreux points restent ouverts et méritent d'être mentionnés. Tout d'abord en ce qui concerne la caractérisation du lieu de coupure dans le cas Zermelo fort. Après avoir établit le résultat dans le cas général, nous implémenterons, une démarche générique pour le calcul des synthèses optimales pour des problèmes de Zermelo quelconque en dimension deux qui pourra venir en complément aux algorithme classique existant en riemannien et en finslérien. Il sera aussi intéressant de pouvoir généraliser les résultats obtenus pour une dérive quelconque (plus seulement évoluant le long des parallèles), et pour des problèmes de Zermelo en dimension supérieure. L'utilisant des formes semi-normales évoquées déjà dans ce travail, nous permettra de traiter des cas génériques à partir de modèles simplifiés.

D'un point de vue applicatif, plusieurs études intéressantes restent encore à faire dans le cas du

problème vortex, notamment l'étude analytique du cas plusieurs vortex. En effet, si l'on considère plusieurs vortex autour de la particule, ceux-ci agiront les uns sur les autres et seront désormais mobiles. Le problème reviendrait alors à un problème de Zermelo en dimension deux mais non autonome. Établir un résultat d'existence dans ce cas présente des difficultés supplémentaires. Aussi le cadre géométrique sera à définir pour pouvoir étudier le flot et construire une synthèse dans ce cas. L'objectif à terme sera alors de proposer une synthèse globale du problème c'est-à-dire une synthèse qui fournie également une politique optimale sur le nombre de vortex à considérer et leur position initiale en fonction de la cible à atteindre. D'autre part, il sera intéressant également de considéré des problèmes d'application où l'on pourra recoller plusieurs exemples et montrer dans des situations complexes, l'intérêt de l'étude numérique développée dans travail pour le calcul de la synthèse.

Pour finir un objectif qui nous tient également à cœur est celui de poursuivre l'étude que nous avons initiée dans le cadre de la résolution des problèmes de contrôle avec perturbations singulières. En effet, la démarche numérique que nous avons proposée semble très intéressante pour la résolution des problèmes de ce type. Malheureusement faute de temps nous n'avons pu approfondir cette démarche. Si nous poursuivons l'étude, il sera question dans un premier temps de comparer notre algorithme à des méthodes existantes sur un nombre suffisant de problèmes adaptés au cadre. Ensuite nous avons pour objectif d'étendre le théorème central de [103] au cadre plus large des problèmes de contrôle optimal avec perturbations singulières, où on pourra avoir cette fois des variables lentes en plus des variables rapides. Nous espérons ensuite pouvoir montrer que sous de bonnes hypothèse, il existe un chemin homotopique qui permet d'obtenir, partant de la solution du problème statique, une solution du problème initial.

Deuxième partie

Contributions

Chapitre 6

A Zermelo navigation problem with a vortex singularity

B. Bonnard, O. Cots and B. Wembe, *A Zermelo Navigation Problem with a Vortex Singularity*, ESAIM : COCV, **27** (2021) no 10, pp : 1-37, https ://doi.org/10.1051/cocv/2020058

abstract. Helhmoltz-Kirchhoff equations of motions of vortices of an incompressible fluid in the plane define a dynamics with singularities and this leads to a Zermelo navigation problem describing the ship travel in such a field where the control is the heading angle. Considering one vortex, we define a time minimization problem which can be analyzed with the technics of geometric optimal control combined with numerical simulations, the geometric frame being the extension of Randers metrics in the punctured plane, with rotational symmetry. Candidates as minimizers are parameterized thanks to the Pontryagin Maximum Principle as extremal solutions of a Hamiltonian vector field. We analyze the time minimal solution to transfer the ship between two points where during the transfer the ship can be either in a strong current region in the vicinity of the vortex or in a weak current region. The analysis is based on a micro-local classification of the extremals using mainly the integrability properties of the dynamics due to the rotational symmetry. The discussion is complex and related to the existence of an isolated extremal (Reeb) circle due to the vortex singularity. The explicit computation of cut points where the extremal curves cease to be optimal is given and the spheres are described in the case where at the initial point the current is weak.

Résumé. Les équations d'Helhmoltz-Kirchhoff pour le mouvement tourbillonaire d'un fluide incompressible dans le plan définissent une dynamique hamiltonienne à singularités localisées aux tourbillons. Cela conduit à définir un problème de Zermelo décrivant le mouvement d'un navire où le contrôle est l'angle de cap et le critère à minimiser est le temps de transfert entre deux points du plan. Dans cet article, on se limite au cas d'un seul tourbillon localisé en zéro et le problème est analysé avec les techniques du contrôle optimal géométrique combinées à des simulations numériques, le contexte géométrique étant l'extension des métriques de Randers dans le plan possédant une symétrie de révolution. On doit en effet considérer le cas d'un courant faible, mais aussi d'un courant fort localisé au voisinage du tourbillon. Les trajectoires candidates à minimiser le temps sont paramétrées en utilisant le Principe du Maximum de Pontryaguine comme des extrémales solutions d'un système hamiltonien dont les projections sur l'espace d'état sont les géodésiques. L'analyse du problème optimal repose sur la classification micro-locale des solutions extrémales utilisant l'intégrabilité de la dynamique. La discussion est complexe et repose sur l'existence d'un cercle géodésique dit de Reeb, conséquence de la singularité tourbillonaire. La discussion est complétée par l'évaluation des points de coupure, les points où les extrémales cessent d'être optimales. Les sphères sont décrites dans le cas d'un état initial à courant faible.

Key words : Helhmoltz-Kirchhoff N vortices model, Zermelo navigation problem, Geometric optimal control, Conjugate and cut loci, Clairaut-Randers metric with polar singularity.

6.1 Introduction

Helhmoltz and Kirchhoff originated the model of the displacement of particles in a two dimensional fluid, see [60, 64] for the original articles and [82, 7, 93] for a modern presentation of Hamiltonian dynamics. In this model, the vorticity of the fluid is concentrated at points $z_i := (x_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$, with *circulation* parameters k_i and the configuration space is $\mathbb{R}^{2N}$ with coordinates $(x_1, y_1, \cdots, x_N, y_N)$ endowed with the symplectic form $\omega := \sum_{i=1}^{N} k_i \, \mathrm{d}y_i \wedge \mathrm{d}x_i$. The dynamics is given by the Hamiltonian canonical equations

$$k_i \, \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad k_i \, \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{6.1}$$

$1 \leq i \leq N$, where the Hamiltonian function H is

$$H := -\frac{1}{\pi} \sum_{i<j} k_i \, k_j \, \ln\|z_i - z_j\|, \tag{6.2}$$

where $\|z_i - z_j\|$ is the Euclidean distance. In this article, we consider a motionless single vortex given by eq. (6.1), that we fix at the origin of the reference frame. This corresponds to set $z_1 = (x_1, y_1)$ at $(0, 0)$. We consider a particle as a (point) vortex with zero circulation, setting $k_2 = 0$ with $N = 2$, under the influence of the *current* generated by the vortex and given by the vector field with a singularity at the origin. The current is defined by (6.1) and denoted, omitting indices, $F_0(x, y) := X_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + X_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, with $z := (x, y)$. These classical notations being not adapted for later considerations, we will denote by $x := (x_1, x_2)$ the position of the particle (instead of $z = (x, y)$) and by k the circulation parameter of the vortex. In the following we will consider a (Zermelo) time minimization problem.

To define a Zermelo navigation problem, following [36, 110] and see [31] for the optimal control frame related to Zermelo's problems, we consider the particle as the *ship* of the navigation problem and the control is defined by α the heading angle of the ship axis. Hence the control field is given by $u := u_{\max}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ where $u_{\max}$ is the maximal amplitude and this leads to a control system written as :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F_0(x) + u_1 \, F_1(x) + u_2 \, F_2(x), \tag{6.3}$$

with $F_1 := \partial/\partial x_1$, $F_2 := \partial/\partial x_2$, $x = (x_1, x_2)$ and $u := (u_1, u_2)$ bounded by $\|u\| \leq u_{\max}$. We then consider the associated time minimal control problem to transfer the ship from an initial configuration x_0 to a target x_f, where x_0 and x_f are two points of the punctured plane $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. By a rescaling we can assume $u_{\max} = 1$ and denoting by g the Euclidean metric on the plane, $\|u\| \leq 1$ bounds the control amplitude by 1 and we have two cases : the case $\|F_0\|_g < 1$ of *weak current* versus the case $\|F_0\|_g > 1$ of *strong current*. In the weak case, the time minimal problem defines a Randers metric in the plane, which is a specific Finsler metric, see [11] for this geometric frame. In the neighborhood of the vortex we have $\|F_0\|_g > 1$, hence, due to the singularity we have a non trivial extension of the classical case.

A neat treatment of the historical Zermelo navigation was made by [36, 110] and their study is an important inspiration for our work. Optimal control, with the Hamiltonian formulation coming from the Pontryagin Maximum Principle [90], forms the frame that we shall use in our analysis, combined with recent development concerning Hamiltonian dynamics to deal with N vortices or N bodies dynamics, see [76]. An intense research activity was lead by H. Poincaré on the dynamics of such systems [88] to compute periodic trajectories avoiding collisions and such techniques lead to the concept of choregraphy developed by [42] for the N-body problem and [33] for the N-vortex system, showing the relations between both dynamics in the Hamiltonian frame [76]. From the control point of view, there is a lot of development related to space navigation for

the N-body problem, see [24], valuable in our study for ship navigation in the N-vortex problem. Optimal control problem in this area was developed for this purpose in relation with Finsler geometry, see [27] or [95] for a general setting in the planar case. More general results about vortex control may be found in [91, 104] for instance.

From the time minimal point of view, using the Maximum Principle, we lift the control dynamics (6.3) by defining the pseudo-Hamiltonian

$$H(x,p,u) \coloneqq H_0(x,p) + \sum_{i=1}^{2} u_i\, H_i(x,p)$$

where $H_i(x,p) \coloneqq p{\cdot}F_i(x)$, $i=1,2,3$, are the Hamiltonian lifts of F_0, F_1 and F_2 and the Maximum Principle leads to analyze the extremal curves solution of the Hamiltonian vector field

$$\vec{\mathbf{H}} \coloneqq \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p},$$

defined by the maximized Hamiltonian $\mathbf{H}(x,p) \coloneqq \max_{\|u\|\leq 1} H(x,p,u)$. In the context of geometric optimal control, see [1, 63] for a general reference, time minimal solutions are obtained by a *micro-local* analysis of $\vec{\mathbf{H}}$ combined with the computation of the *cut point* along extremal curves, that is the first point where an extremal curve ceases to be globally optimal. Fixing the initial point $x(0)=x_0$ of the navigation problem, the set of such points is called the *cut locus*. Even in the Riemannian geometry, the determination of the cut locus is a very complicated problem and there are only a few results. A major recent contribution concerns the case of ellipsoids solving the Jacobi conjecture [61]. Parallel development were obtained in the frame of space navigation where geometric analysis is combined with numerical methods, see again [27] for a general reference for such contributions. In the frame of Zermelo navigation problem with a small current, called Randers metrics, some results were obtained recently for sphere of revolutions [57].

Our aim is to extend those results for the navigation problem, with a single vortex, which combines different new phenomena in particular the existence of a singularity localized at the vortex position which leads to the strong current case and the need of extending the Finsler case [10, 11]. The ultimate goal is to analyze the regularity of the value function : $x_f \mapsto V(x_0,x_f,\mu)$ where $V(x_0,x_f,\mu)$ is the minimum time from x_0 to reach the point x_f of the punctured plane, in presence of a vortex with a circulation $k \coloneqq 2\pi\mu$. The parameter μ is introduced later for practical convenience. The regularity of $x_f \mapsto V(x_0,x_f,\mu)$ is analyzed, in particular, in relation with Legendrian and Lagrangian singularities [53] associated to the Hamiltonian dynamics $\vec{\mathbf{H}}$. Regularity of the value function in relation with the Hamilton-Jacobi-Bellman equation leads to sufficient global optimality conditions, see the seminal reference [13].

The organization of this article is the following. In Section 6.2, we present the existence theorem to transfer in minimum time any two points of the punctured plane. We state the Maximum Principle to parameterize the minimizers as extremal curves of a smooth Hamiltonian vector field. This leads to define a *shooting method* used to compute candidates as minimizers. Extremal curves are classified using generic assumptions into *hyperbolic* and *abnormal* curves, candidate as time minimizing curves and *elliptic* curves candidate as time maximizers. *Conjugate points* where an extremal curve ceases to be optimal for the C^1-topology are calculated numerically and leads to the conclusion of the absence of such points, hence, the optimality problem boils down to compute cut points in the case of an empty *conjugate locus*. The final Section 6.3 is the main contribution of this article with the existence result. Thanks to the integrability of the extremal flow due to the rotational symmetry, the micro-local classification of extremals is presented. The two important phenomena is the existence of abnormal minimizers and of a single extremal circle trajectory called a *Reeb circle*. Using this classification, the cut points can be computed along any extremal to determine the time minimal value function, combining geometric analysis and numerical simulations using the HamPath code. We present in details the case where at the initial point the current is weak. This gives a nontrivial extension of the Finsler situation.

6.2 Existence results and Pontryagin Maximum Principle

6.2.1 Existence of time minimal solutions

We consider a single vortex centered in the reference frame and thus the control system of our Zermelo navigation problem is given by

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{k}{2\pi}\frac{x_2(t)}{r(t)^2} + u_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = \frac{k}{2\pi}\frac{x_1(t)}{r(t)^2} + u_2(t),$$

with $r(t)^2 \coloneqq x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ the square distance of the ship, that is the particle, to the origin and where k is the circulation of the vortex. This control system may be written in the following form :

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{2} u_i(t) F_i(x(t)), \tag{6.4}$$

with F_0, F_1 and F_2 three real analytic (*i.e.* C^ω) vector fields, where the current (or *drift*) is given by

$$F_0(x) \coloneqq \frac{\mu}{x_1^2 + x_2^2}\left(-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{6.5}$$

with $\mu \coloneqq k/2\pi$, and where the control fields are $F_1 \coloneqq \partial/\partial x_1$ and $F_2 \coloneqq \partial/\partial x_2$. Considering the polar coordinates $(x_1, x_2) =: (r\cos\theta, r\sin\theta)$ and an adapted rotating frame for the control, $v \coloneqq u\, e^{-i\theta}$, the control system (6.4) becomes

$$\dot{r}(t) = v_1(t), \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\mu}{r(t)^2} + \frac{v_2(t)}{r(t)}. \tag{6.6}$$

We give hereinafter some classical definitions and refer to [18] for more details. We consider *admissible control laws* in the set $\mathcal{U} \coloneqq \{u\colon [0\,, +\infty[\to \mathbf{U} \mid u \text{ measurable}\}$, where the control domain $\mathbf{U} \coloneqq \overline{\mathrm{B}}(0, u_{\max}) \subset \mathbb{R}^2$ denotes the Euclidean closed ball of radius $u_{\max} > 0$ centered at the origin. Since the drift introduces a singularity at the origin, we define by $M \coloneqq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ the state space, and for any $u \in \mathcal{U}$ and $x_0 \in M$, we denote by $x_u(\cdot, x_0)$ the unique solution of (6.4) associated to the control u such that $x_u(0, x_0) = x_0$. We introduce for a time $T > 0$ and an initial condition $x_0 \in M$, the set $\mathcal{U}_{T,x_0} \subset \mathcal{U}$ of control laws $u \in \mathcal{U}$ such that the associated trajectory $x_u(\cdot, x_0)$ is well defined over $[0\,, T]$, and we denote by $\mathcal{A}_{T,x_0} \coloneqq \operatorname{Im} E_{T,x_0}$ the *atteignable set* (or *reachable set*) from x_0 in time T, where we have introduced the *endpoint mapping*

$$\begin{array}{rccc} E_{T,x_0}\colon & \mathcal{U}_{T,x_0} & \longrightarrow & M \\ & u & \longmapsto & x_u(T, x_0). \end{array}$$

Then, we denote by $\mathcal{A}_{x_0} \coloneqq \cup_{T\geq 0}\mathcal{A}_{T,x_0}$ the atteignable set from x_0. We recall that the control system is said to be *controllable from* x_0 if $\mathcal{A}_{x_0} = M$ and *controllable* if $\mathcal{A}_{x_0} = M$ for any $x_0 \in M$.

Now, for a given pair $(x_0, x_f) \in M^2$ and some parameters $u_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$ and $\mu \in \mathbb{R}$, we define the problem of steering (6.4) in minimum time from the initial condition x_0 to the target x_f :

$$(P) \qquad V(x_0, x_f, \mu, u_{\max}) \coloneqq \inf\{T \mid (T, u) \in \mathcal{D}_{x_0} \text{ and } x_u(T, x_0) = x_f\}\,,$$

where $\mathcal{D}_{x_0} \coloneqq \{(T, u) \in [0\,, +\infty[\times \mathcal{U} \mid u \in \mathcal{U}_{T,x_0}\}$. We emphasize the fact that the *value function* V depends on the initial condition x_0, the target x_f and the parameters $u_{\max}$ and μ. The first main result is the following :

Theorem 6.2.1. *For any $(x_0, x_f, \mu, u_{\max}) \in M^2 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$, the problem (P) admits a solution.*

Remark 1. *Note that when $\mu = 0$, the result is clearly true in $\mathbb{R}^2$ but false in $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Up to a time reparameterization $\tau \coloneqq t\,u_{\max}$ and a rescaling of μ, one can fix $u_{\max} = 1$ and we have the relation $V(x_0, x_f, \mu, u_{\max}) = V(x_0, x_f, \mu/u_{\max}, 1)/u_{\max}$. We thus fix from now $u_{\max} = 1$ and write the value function (with a slight abuse of notation)

$$V(x_0, x_f, \mu) \coloneqq V(x_0, x_f, \mu, 1). \tag{6.7}$$

We first prove that there exists an admissible trajectory connecting any pair of points in M.

Lemma 6.2.2. *The system* (6.4) *is controllable.*

Proof. Let consider a pair $(x_0, x_f) \in M^2$. We introduce $r_0 \coloneqq \|x_0\|$ and $r_f \coloneqq \|x_f\|$. From x_0, we can apply a constant control $v(t) = (\pm 1, 0)$ (depending on whether r_f is smaller or greater than r_0) until the distance r_f is reached and then apply a constant control $v(t) = (0, \mathrm{sign}(\mu))$ until the target x_f is reached. □

Remark 2. *The controllability gives us that the value function is finite while the existence of solutions implies that the value function is lower semi-continuous.*

The existence of time-optimal solutions relies on the classical Filippov's theorem [45, Theorem 9.2.i] and the main idea is to prove that the problem (P) is equivalent to the same problem with the restriction that the trajectories remain in a compact set. To prove this, we need a couple of lemmas. Let us introduce some notations for the first lemma : for a trajectory-control pair (x, u), we associate the pair (q, v) with $q \coloneqq (r, \theta)$ the polar coordinates and $v = u\,e^{-i\theta}$. We denote by $q_v(\cdot, q_0)$ the solution of (6.6) with control v such that $q_v(0, q_0) = q_0$. We define for $(\varepsilon, R, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ and $\theta_0 \in \mathbb{R}$, two optimization problems :

(a) The minimum time to make a complete round at a distance R to the vortex :

$$T_\theta(R, \theta_0, \mu) \coloneqq \inf\left\{T \mid (T, u) \in \mathcal{D}_{x_0} \text{ and } q_v(T, (R, \theta_0)) = (R, \theta_0 + s\,2\pi)\right\},$$

where $s \coloneqq \mathrm{sign}(\mu)$, $x_0 \coloneqq (R\cos\theta_0, R\sin\theta_0)$ and where the control u is related to v by $u = ve^{i\theta}$.

(b) The minimum time to reach the circle of radius ε from a distance R to the vortex :

$$T_r(\varepsilon, R, \theta_0, \mu) \coloneqq \inf\left\{T \mid (T, u) \in \mathcal{D}_{x_0} \text{ and } r_v(T, (R, \theta_0)) = \varepsilon\right\}.$$

Since it is clear, due to the rotational symmetry of the problem, that $T_\theta(R, \cdot, \mu)$ and $T_r(\varepsilon, R, \cdot, \mu)$ are invariant with respect to θ_0, one can fix $\theta_0 = 0$ and set $T_\theta(R, \mu) \coloneqq T_\theta(R, 0, \mu)$ and $T_r(\varepsilon, R, \mu) \coloneqq T_r(\varepsilon, R, 0, \mu)$. Besides, from the proof of lemma 6.2.3, one can notice that T_r does not depend on μ, hence, one can define $T_r(\varepsilon, R) \coloneqq T_r(\varepsilon, R, 0)$. Under these considerations, we have the following comparison between T_θ and T_r :

Lemma 6.2.3. *For any (ε, R, μ) s.t. $\mu \neq 0$, $0 < R < R_\mu$ and $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{\mu,R}$, with*

$$R_\mu \coloneqq \frac{|\mu|}{2\pi - 1} \quad \text{and} \quad \varepsilon_{\mu,R} \coloneqq R\left(1 - \frac{2\pi R}{|\mu| + R}\right),$$

we have $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{\mu,R} < R < R_\mu$ and $T_\theta(R, \mu) < T_r(\varepsilon, R)$, that is the minimum time to make a complete round at a distance R to the vortex is strictly smaller than the minimum time to reach the circle of radius $\varepsilon < R$.

Proof. It is clear from (6.6) that $T_\theta(R, \mu)$ is given by the control $v(t) = (0, \mathrm{sign}(\mu))$. This gives by a simple calculation $T_\theta(R, \mu) = 2\pi R^2/(|\mu| + R)$. It is also clear that $T_r(\varepsilon, R, \mu)$ is given by $v(t) = (-1, 0)$, whence $T_r(\varepsilon, R, \mu) = R - \varepsilon = T_r(\varepsilon, R)$ and indeed T_r does not depend on μ. Fixing $\varepsilon = 0$, we have $T_\theta(R, \mu) = T_r(0, R) \Leftrightarrow R = |\mu|/(2\pi - 1) =: R_\mu$. Besides, we have

$$T_\theta(R, \mu) < T_r(\varepsilon, R) \Leftrightarrow \varepsilon < R\left(1 - \frac{2\pi R}{|\mu| + R}\right) =: \varepsilon_{\mu,R}$$

but also we have $0 < \varepsilon_{\mu,R} \Leftrightarrow R < R_\mu$, whence the conclusion. □

Next an admissible trajectory x associated to a pair $(T,u) \in \mathcal{D}_{x_0}$ is such that $x(T) = x_u(T,x_0) = x_f$. Let us fix $(x_0,x_f,\mu) \in M^2 \times \mathbb{R}^*$ and introduce $r_0 := \|x_0\|$ and $r_f := \|x_f\|$. Then :

Lemma 6.2.4. *There exists $\varepsilon > 0$ such that any optimal trajectory is contained in $M \setminus \overline{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$.*

Proof. Let consider (ε, R) s.t. $0 < R < \min\{R_\mu, r_0, r_f\}$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\mu,R}$. Let us recall that $\varepsilon < \varepsilon_{\mu,R} < R$ since $R < R_\mu$ and consider an admissible trajectory x intersecting $\overline{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$ and associated to a pair denoted (T,u). Then, there exists two times $0 < t_1 \leq t_2 < T$ s.t. $x([t_1\,,t_2]) \subset \overline{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$. Since $0 < \varepsilon < R < \min\{r_0,r_f\}$, there exists also $0 < t_{\text{in}} < t_1 \leq t_2 < t_{\text{out}} < T$ s.t. $x([t_{\text{in}}\,,t_{\text{out}}]) \subset \overline{\mathrm{B}}(0,R)$ and s.t. $x(t_{\text{in}})$ and $x(t_{\text{out}})$ belong to $\partial\overline{\mathrm{B}}(0,R) = \mathrm{S}(0,R)$, the sphere of radius R centered at the origin. In all generality, one can assume that $\forall\, t \in [0\,,t_{\text{in}}[\cup [t_{\text{out}}\,,T]$, $x(t) \notin \overline{\mathrm{B}}(0,R)$. Let consider the circular arc from $x(t_{\text{in}})$ to $x(t_{\text{out}})$ obtained with a control $v = (0,\mathrm{sign}(\mu))$, realized in a time denoted $\tau > 0$. It is clear that $\tau \leq T_\theta(R,\mu)$ since $T_\theta(R,\mu)$ is the time to make a circular arc of angle 2π. It is also clear from lemma 6.2.3 and from the definition of T_r that $\tau \leq T_\theta(R,\mu) < T_r(\varepsilon,R) \leq t_{\text{out}} - t_{\text{in}}$. Let us replace the part $x([t_{\text{in}}\,,t_{\text{out}}])$ by the circular arc. Then, the new trajectory associated to the pair denoted (T',u') is still admissible and is strictly better than x since $T' = T - (t_{\text{out}} - t_{\text{in}}) + \tau < T$. Moreover, this new trajectory is by construction contained in $M \setminus \overline{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$. Whence the conclusion. □

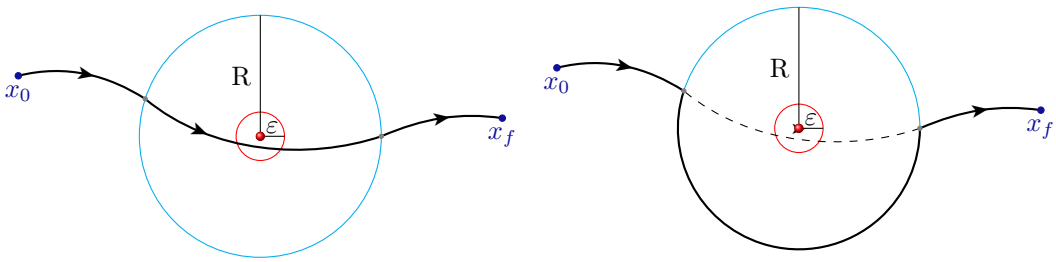


FIGURE 6.1 – Illustration of the construction of a strictly better admissible trajectory. The vortex is represented by a red ball, while the trajectories are the solid black lines. One can see on the left, a trajectory crossing the ball of radius ε. This trajectory is replaced on the right subgraph by a strictly better admissible trajectory.

We are now in position to prove Theorem 6.2.1.

Proof of Theorem 6.2.1. By lemma 6.2.2, there exists an admissible trajectory x. Let T^* denote the first time s.t. $x(T^*) = x_f$. Let us introduce $R_1 := \varepsilon$ from lemma 6.2.4 and $R_2 := r_0 + T^*$, with $r_0 := \|x_0\|$. By lemma 6.2.4, the problem (P) is equivalent to the same problem with the additional constraint $R_1 \leq r(t)$. Since $\dot{r}(t) = v_1(t)$ and $v_1(t) \leq 1$, then for any $t \in [0\,,T^*]$ we have $r(t) \leq r_0 + T^*$. The problem (P) is thus equivalent to the same problem with the additional constraints : $R_1 \leq r(t) \leq R_2$. The trajectories of the equivalent problem are contained in the compact set $\overline{\mathrm{B}}(0,R_2) \setminus \mathrm{B}(0,R_1)$. The result follows from the Filippov's existence theorem. □

6.2.2 Classification of the extremal curves

In this section, we recall concepts and results from [27]. Let $x_0 \in M$ and $(T,u) \in \mathcal{D}_{x_0}$ be an optimal solution of problem (P) with $x := x_u(\cdot,x_0)$ the associated optimal trajectory. According to the Pontryagin Maximum Principle [90], there exists an absolutely continuous function $p\colon [0\,,T] \to \mathbb{R}^2$ satisfying the adjoint equation almost everywhere over $[0\,,T]$:

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t),p(t),u(t)), \tag{6.8}$$

where [1] $H(x,p,u) \coloneqq p \cdot (F_0(x) + u_1\, F_1(x) + u_2\, F_2(x))$ is the pseudo-Hamiltonian associated to the problem (P). Besides, there exists $p^0 \leq 0$ such that :

$$\text{the pair } (p(\cdot), p^0) \text{ never vanishes} \tag{6.9}$$

and such that the optimal control satisfies the maximization condition almost everywhere over $[0\,,T]$:

$$H(x(t),p(t),u(t)) = \max_{w \in \mathbf{U}} H(x(t),p(t),w) = -p^0. \tag{6.10}$$

Definition 6.2.5. *An* extremal *is a* 4*-uplet* $(x(\cdot),p(\cdot),p^0,u(\cdot))$ *satisfying* (6.4) *and* (6.8)–(6.10). *It is said* abnormal *whenever* $p^0 = 0$ *and* normal *whenever* $p^0 \neq 0$. *It is called* strict *if* $p(\cdot)$ *is unique up to a factor. An extremal* $(x(\cdot),p(\cdot),p^0,u(\cdot))$ *is called a* BC-extremal *if* $x(0) = x_0$ *and if there is a time* $T \geq 0$ *s.t.* $x(T) = x_f$.

Let us introduce the Hamiltonian lifts $H_i(x,p) \coloneqq p \cdot F_i(x)$, $i = 0,1,2$, the function $\Phi \coloneqq (H_1, H_2)$ and the *switching function* φ defined for $t \in [0\,,T]$ by $\varphi(t) \coloneqq \Phi(z(t)) = p(t)$, $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot),p(\cdot))$. The maximization condition (6.10) implies for a.e. $t \in [0\,,T]$:

$$u(t) = \frac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|} = \frac{p(t)}{\|p(t)\|},$$

whenever $\varphi(t) \neq 0$. Introducing the *switching surface* $\Sigma \coloneqq \big\{ z \in M \times \mathbb{R}^2 \;\big|\; \Phi(z) = 0 \big\} = M \times \{0\}$ and denoting $z \coloneqq (x,p) \in M \times \mathbb{R}^2$, one can define outside Σ the Hamiltonian :

$$\mathbf{H}(z) \coloneqq H(z, \Phi(z)/\|\Phi(z)\|) = H_0(z) + \|\Phi(z)\| = H_0(z) + \|p\|. \tag{6.11}$$

Definition 6.2.6. *An extremal* $(x(\cdot),p(\cdot),p^0,u(\cdot))$ *contained outside the switching surface* Σ *is called of* order zero.

Let us recall that a *switching time* $0 < t < T$ is a time s.t. $\varphi(t) = 0$ and s.t. for any $\varepsilon > 0$ (small enough) there exists a time $\tau \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset [0\,,T]$ s.t. $\varphi(\tau) \neq 0$. We can show that the extremals are only of order zero, and thus are smooth :

Proposition 6.2.7. *All the extremals are of order zero, that is there are no switching times.*

Proof. Let $(x(\cdot),p(\cdot),p^0,u(\cdot))$ be an extremal. If there exists a time t s.t. $\varphi(t) = 0$, then $p(t) = 0$ and we have $H(x(t),p(t),u(t)) = 0 = -p^0$ which is impossible by (6.9). □

We have the standard following result :

Proposition 6.2.8. *The extremals of order zero are smooth responses to smooth controls on the boundary of* $\|u\| \leq 1$. *They are singularities of the endpoint mapping* E_{T,x_0} *for the* L^∞*-topology when* u *is restricted to the unit sphere* S^1.

For any Hamiltonian $\mathbf{H}(z)$, resp. pseudo-Hamiltonian $H(z,u)$, we denote by $\overrightarrow{\mathbf{H}}(z) \coloneqq (\nabla_p \mathbf{H}(z), -\nabla_x \mathbf{H}(z))$, resp. $\overrightarrow{H}(z,u) \coloneqq (\nabla_p H(z,u), -\nabla_x H(z,u))$, its associated *Hamiltonian vector field*, resp. *pseudo-Hamiltonian vector field*. With these notations, we have the following classical but still remarkable fact :

Proposition 6.2.9. *Let* $(x(\cdot),p(\cdot),p^0,u(\cdot))$ *be an extremal. Denoting* $z \coloneqq (x,p)$, *then, we have over* $[0\,,T]$ *:*

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}(z(t),u(t)) = \overrightarrow{\mathbf{H}}(z(t)) = \overrightarrow{H_0}(z(t)) + \Big(\frac{p(t)}{\|p(t)\|}, 0 \Big), \tag{6.12}$$

that is the extremals are given by the flow of the Hamiltonian vector field associated to the maximized Hamiltonian $\mathbf{H}$.

1. The standard inner product is written $a \cdot b$ or $\langle a, b \rangle$.

Proof. Since the extremal is of order zero, the control $t \mapsto u(t)$ is smooth and the adjoint equation (6.8) is satisfied all over $[0\,,T]$. Besides, denoting (with a slight abuse of notation) $u(z) \coloneqq \Phi(z)/\|\Phi(z)\|$, we have :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}'(z) &= \frac{\partial H}{\partial z}(z,u(z)) + \frac{\partial H}{\partial u}(z,u(z))\cdot u'(z)\\ &= \frac{\partial H}{\partial z}(z,u(z)) + \underbrace{\Phi(z)^T\left(\frac{I_2}{\|\Phi(z)\|} - \frac{\Phi(z)\Phi(z)^T}{\|\Phi(z)\|^3}\right)}_{=0}\cdot\Phi'(z) = \frac{\partial H}{\partial z}(z,u(z)) = H_0'(z) + \left(0,\frac{p}{\|p\|}\right).\end{aligned}$$

□

This proposition shows the importance of the true Hamiltonian $\mathbf{H}$ which encodes all the information we need and gives a more geometrical point of view : we will thus refer to trajectories as *geodesics*. Besides, from the maximum principle, optimal extremals are contained in the level set $\{\mathbf{H} \geq 0\}$. Let $z(\cdot,x_0,p_0) \coloneqq (x(\cdot,x_0,p_0),p(\cdot,x_0,p_0))$ be a reference extremal curve solution of $\dot{z} = \overrightarrow{\mathbf{H}}(z)$ with initial condition $z(0,x_0,p_0) = (x_0,p_0)$ and defined over the time interval $[0\,,T]$.

Lemma 6.2.10. *One has $x(t,x_0,\lambda p_0) = x(t,x_0,p_0)$ and $p(t,x_0,\lambda p_0) = \lambda p(t,x_0,p_0)$.*

Thanks to this lemma, and since p never vanishes, we can fix by homogeneity $\|p_0\| = 1$. We thus introduce the following definition that gives us a way to parameterize the extremals of order zero.

Definition 6.2.11. *We define the* exponential mapping *by*

$$\exp_{x_0}(t,p_0) \coloneqq \Pi \circ e^{t\overrightarrow{\mathbf{H}}}(x_0,p_0), \tag{6.13}$$

where $e^{t\overrightarrow{\mathbf{H}}}(x_0,p_0)$ is the solution at time t of $\dot{z}(s) = \overrightarrow{\mathbf{H}}(z(s))$, $z(0) = (x_0,p_0)$. It is defined for small enough nonnegative time t and we can assume that p_0 belongs to S^1.

Definition 6.2.12. *Let $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot),p(\cdot))$ be a reference extremal of order zero, defined on $[0\,,T]$. Let $\mathbf{H}$ be the Hamiltonian defined by* (6.11)*. The associated geodesic $x(\cdot)$ is called* exceptional *if $\mathbf{H} = 0$,* hyperbolic *if $\mathbf{H} > 0$ and* elliptic *if $\mathbf{H} < 0$, along the reference extremal $z(\cdot)$.*

Remark 3. *The previous definition is related to the more classical definition 6.2.18. Even if the elliptic geodesics are not optimal according to the PMP, they still play a role in the analysis of the optimal synthesis, in particular in the computation of the cut locus when the current (or drift) is strong, see Section 6.3.*

In cartesian coordinates, the Hamiltonian writes

$$\mathbf{H}(x_1,x_2,p_1,p_2) = \frac{\mu}{x_1^2+x_2^2}\left(-p_1\,x_2 + p_2\,x_1\right) + \sqrt{p_1^2+p_2^2},$$

and the extremals are solution of the following Hamiltonian system :

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = -\mu\frac{x_2}{r^2} + \frac{p_1}{\|p\|}, \quad \dot{x}_2 = \mu\frac{x_1}{r^2} + \frac{p_2}{\|p\|},\\ &\dot{p}_1 = -\frac{\mu}{r^4}\left(2\,x_1\,x_2\,p_1 - (x_1^2-x_2^2)\,p_2\right), \quad \dot{p}_2 = \frac{\mu}{r^4}\left((x_1^2-x_2^2)\,p_1 - 2\,x_1\,x_2\,p_2\right).\end{aligned}$$

Introducing the *Mathieu transformation*

$$\begin{pmatrix}p_r\\ p_\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} \tag{6.14}$$

then, in polar coordinates, the Hamiltonian is given by (we still denote by p the covector in polar coordinates)

$$\mathbf{H}(r,\theta,p_r,p_\theta) = p_\theta\frac{\mu}{r^2} + \|p\|_r,$$

where $\|p\|_r \coloneqq \sqrt{p_r^2 + p_\theta^2/r^2}$. It is clear from $\mathbf{H}$ that θ is a *cyclic variable* and thus the problem has a symmetry of revolution and by Noether theorem, the adjoint variable p_θ is a *first integral*. This relation $p_\theta =$ constant corresponds to the *Clairaut* relation on surfaces of revolution. Hence, we can fix $\theta(0) = 0$ and consider p_θ has a parameter of the associated Hamiltonian system in polar coordinates :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\|p\|_r}, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}\left(\mu + \frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right), \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta}{r^3}\left(2\mu + \frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right), \quad \dot{p}_\theta = 0. \tag{6.15}$$

6.2.3 C^1-second order necessary conditions in the regular case

Since the extremals are of order zero, one can restrict $u(t)$ to the 1-sphere S^1. Writing $u(t) =: (\cos\alpha(t), \sin\alpha(t))$, we have with some abuse of notations $H = H_0 + u_1 H_1 + u_2 H_2 = H_0 + \cos\alpha\, H_1 + \sin\alpha\, H_2$, with α the new control. Differentiating twice with respect to α, we have

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\sin\alpha\, H_1 + \cos\alpha\, H_2, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = -(\cos\alpha\, H_1 + \sin\alpha\, H_2),$$

and since $u = (\cos\alpha, \sin\alpha) = \Phi/\|\Phi\|$ and $\Phi = (H_1, H_2)$ never vanishes along any extremal, we have

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = -\sqrt{H_1^2 + H_2^2} < 0$$

along any extremal. Hence, the *strict Legendre-Clebsch* condition is satisfied and we are in the *regular* case [17], but with a *free* final time T.

Definition 6.2.13. *Let $z(\cdot)$ be a reference extremal curve solution of $\dot{z} = \vec{\mathbf{H}}(z)$ given by* (6.12). *The variational equation*

$$\dot{\delta z}(t) = \vec{\mathbf{H}}'(z(t)) \cdot \delta z(t), \tag{6.16}$$

is called a Jacobi equation. *A* Jacobi field *is a non trivial solution J of* (6.16). *It is said to be* vertical *at time t if $\delta x(t) \coloneqq \Pi'(z(t)) \cdot J(t) = 0$, where $\Pi\colon (x,p) \mapsto x$ is the standard projection.*

Let $z(\cdot, x_0, p_0) \coloneqq (x(\cdot, x_0, p_0), p(\cdot, x_0, p_0))$ with $p_0 \in \mathrm{S}^1$, be a reference extremal curve solution of $\dot{z} = \vec{\mathbf{H}}(z)$ with initial condition $z(0, x_0, p_0) = (x_0, p_0)$ and defined over the time interval $[0\,, T]$. Following [17], we make the following generic assumptions on the reference extremal in order to derive second order optimality conditions :

(A1) The trajectory $x(\cdot, x_0, p_0)$ is a one-to-one immersion on $[0\,, T]$.

(A2) The reference extremal is normal and strict.

Definition 6.2.14. *Let $z = (x, p)$ be the reference extremal defined hereinabove. Under assumptions (A1) and (A2), the time $0 < t_c \leq T$ is called* conjugate *if the exponential mapping is not an immersion at (t_c, p_0). The associated point $\exp_{x_0}(t_c, p_0) = x(t_c, x_0, p_0)$ is said to be* conjugate to x_0. *We denote by t_{1c} the first conjugate time.*

The following result is fundamental, see [25].

Theorem 6.2.15. *Under assumptions (A1) and (A2), the extremities being fixed, the reference geodesic $x(\cdot)$ is locally time minimizing (resp. maximizing) for the L^∞-topology on the set of controls up to the first conjugate time in the hyperbolic (resp. elliptic) case.*

Algorithm to compute conjugate times Writing the reference trajectory $x(t) \coloneqq x(t, x_0, p_0)$ and considering a Jacobi field $J(\cdot) \coloneqq (\delta x(\cdot), \delta p(\cdot))$ along the reference extremal, which is vertical at the initial time (*i.e.* $\delta x(0) = 0$) and normalized by $p_0 \cdot \delta p(0) = 0$ (since p_0 is restricted to S^1), then t_c is a conjugate time if and only if t_c is a solution of the following equation :

$$t \mapsto \det(\delta x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{6.17}$$

See [17, 46] for more details about algorithms to compute conjugate times in a more general setting and [32] for details about the numerical implementation of these algorithms into the HamPath software.

6.2.4 The Zermelo-Carathéodory-Goh point of view

From the historical point of view in the Zermelo navigation problem, Zermelo and Carathéodory use for the parameterization of the geodesics the derivative of the heading angle α instead of the angle α itself, see [31]. This corresponds precisely to the so-called *Goh transformation* for the analysis of singular trajectories in optimal control, see for instance the reference [18]. This is presented next, in relation with the problem, to derive sufficient C^0-optimality conditions under generic assumptions, see [25].

Goh transformation

Retricting to extremals of order zero, the *Goh transformation* amounts to set (we use the same notation u for the new control but no confusion is possible) :

$$\dot{\alpha} = u,$$

that is to take $\dot{\alpha}$ as the control of the ship. Note that such a transformation transforms L^∞-optimality conditions on the set of controls into C^0-optimality conditions on the set of trajectories. For the geodesics computations, this amounts only to a reparameterization of extremal curves of order zero. Considering the vortex problem in cartesian coordinates (x_1, x_2), we introduce $x \coloneqq (x_1, x_2, x_3)$, $x_3 \coloneqq \alpha$, and the control system becomes

$$\dot{x} = F(x) + u\, G(x),$$

with

$$F(x) \coloneqq \begin{pmatrix} F_0(x_1, x_2) + \cos x_3\, F_1(x_1, x_2) + \sin x_3\, F_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad G = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

The associated pseudo-Hamiltonian reads

$$H(x, p, u) \coloneqq p \cdot (F(x) + u\, G(x)), \quad p \coloneqq (p_1, p_2, p_3),$$

and relaxing the bound on the new control, the maximization condition implies $p \cdot G = 0$ along any extremal. These extremals are called *singular* and the associated control is also called singular. Let us recall how we compute the singular extremals. First we need to introduce the concepts of Lie and Poisson brackets. The *Lie bracket* of two C^ω vector fields X, Y on an open subset $V \subset \mathbb{R}^n$ is computed with the convention :

$$[X, Y](x) \coloneqq \frac{\partial X}{\partial x}(x)\, Y(x) - \frac{\partial Y}{\partial x}(x)\, X(x),$$

and denoting H_X, H_Y the Hamiltonian lifts : $H_X(z) \coloneqq p \cdot X(x)$, $H_Y(z) \coloneqq p \cdot Y(x)$, with $z \coloneqq (x, p) \in V \times \mathbb{R}^n$, the *Poisson bracket* reads :

$$\{H_X, H_Y\} \coloneqq H_X' \cdot \vec{H}_Y = p \cdot [X, Y](x),$$

where

$$\vec{H}_X = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}.$$

Differentiating twice $p(\cdot) \cdot G(x(\cdot))$ with respect to the time t, one gets :

Lemma 6.2.16. *Singular extremals $(z(\cdot), u(\cdot))$ are solution of the following equations :*

$$H_G(z(t)) = \{H_G, H_F\}(z(t)) = 0,$$
$$\{\{H_G, H_F\}, H_F\}(z(t)) + u(t)\, \{\{H_G, H_F\}, H_G\}(z(t)) = 0.$$

If $\{\{H_G, H_F\}, H_G\} \neq 0$ along the extremal, then the singular control is called of minimal order *and it is given by the dynamic feedback :*

$$u_s(z(t)) \coloneqq -\frac{\{\{H_G, H_F\}, H_F\}(z(t))}{\{\{H_G, H_F\}, H_G\}(z(t))}.$$

Plugging the control u_s in feedback form into the pseudo-Hamiltonian leads to define a true Hamiltonian denoted $\mathbf{H}_s(z) \coloneqq H(z, u_s(z))$, and one has :

Lemma 6.2.17. *Singular extremals of minimal order are the solutions of* $\dot{z}(t) = \vec{\mathbf{H}}_s(z(t))$, *with the constraints* $H_G(z(t)) = \{H_G, H_F\}(z(t)) = 0$.

The case of dimension 3 applied to the Zermelo problem

Consider the following affine control system : $\dot{x} = F(x) + u\,G(x)$, with $u \in \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}^3$, where F, G, are C^ω vector fields. Let $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot), p(\cdot))$ be a reference singular extremal curve on $[0\,, T]$. We assume the following :

(B1) The reference geodesic $t \mapsto x(t)$ is a one-to-one immersion on $[0\,, T]$.

(B2) F and G are linearly independent along $x(\cdot)$.

(B3) G, $[G, F]$, $[[G, F], G]$ are linearly independent along $x(\cdot)$.

From (B3), p is unique up to a factor and the geodesic is strict and moreover u_s can be computed as a true feedback :

$$u_s(x) = -\frac{D'(x)}{D(x)},$$

where we denote :

$$D \coloneqq \det(G, [G, F], [[G, F], G]),$$
$$D' \coloneqq \det(G, [G, F], [[G, F], F]).$$

Moreover, let us introduce $D'' \coloneqq \det(G, [G, F], F)$. In the vortex problem, one has :

$$\dot{\alpha} = -\frac{D'(x)}{D(x)}.$$

In our problem with the Goh extension, one orients $p(\cdot)$ using the convention of the maximum principle : $p(t) \cdot F(x(t)) \geq 0$ on $[0\,, T]$ and we introduce the following definition consistent with definition 6.2.12 :

Definition 6.2.18. *Under assumptions (B1), (B2) and (B3), a geodesic is called :*

— hyperbolic *if* $DD'' > 0$,

— elliptic *if* $DD'' < 0$,

— abnormal *(or* exceptional*) if* $D'' = 0$.

Note that the condition $DD'' \geq 0$ amounts to the *generalized Legendre-Clebsch* condition

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial H}{\partial u}(z(t)) \geq 0$$

and according to the *higher-order maximum principle* [69], this condition is a necessary (small) time minimization condition. See [25] for the general frame relating the optimal control problems using the Goh transformation and applicable to our study and for the following result.

Theorem 6.2.19. *Under assumptions (B1), (B2) and (B3), a reference hyperbolic (resp. elliptic) geodesic* $x(\cdot)$ *defined on* $[0\,, T]$ *is time minimizing (resp. maximizing) on* $[0\,, T]$ *with respect to all trajectories contained in a* C^0*-neighborhood of* $x(\cdot)$ *if* $T < t_{1c}$ *where* t_{1c} *is the first conjugate time along* $x(\cdot)$ *as defined by 6.2.14 for the projection of* $x(\cdot)$ *on the* (x_1, x_2) *plane. In the exceptional case, the reference geodesic is* C^0*-time minimizing and maximizing.*

6.2.5 Influence of the circulation

Influence of the circulation on the drift

Denoting the drift (6.5) $F_0(x,\mu)$ to emphasize the role of μ, one introduces for $(x,\mu) \in M \times \mathbb{R}^*$ the set

$$\mathcal{F}(x,\mu) \coloneqq \left\{ F_0(x,\mu) + \sum_{i=1}^{2} u_i\, F_i(x) \;\middle|\; u \coloneqq (u_1,u_2) \in \mathbf{U} \right\}. \tag{6.18}$$

Then, we have (noticing that if $u \in \mathbf{U}$, then $-u \in \mathbf{U}$) :

$$\begin{aligned} 0 \in \mathcal{F}(x,\mu) &\Leftrightarrow \exists\, u \coloneqq (u_1,u_2) \in \mathbf{U} \text{ s.t. } F_0(x,\mu) = \sum_{i=1}^{2} u_i\, F_i(x) \\ &\Leftrightarrow \|F_0(x,\mu)\|_g = \|F_0(x,\mu)\| \leq 1 \Leftrightarrow |\mu| \leq \|x\| = r. \end{aligned}$$

This leads to introduce the following definition.

Definition 6.2.20. *The drift $F_0(x,\mu)$ is said to be* weak at the point x *if* $\|F_0(x,\mu)\| < 1$, strong at x *if* $\|F_0(x,\mu)\| > 1$ *and* moderate at x *if* $\|F_0(x,\mu)\| = 1$.

Remark 4. *Note that if the drift could have been weak at any point $x \in M$, then we would have been in the Finslerian case [10] with a metric of Randers type. However, this is not possible for $\mu \neq 0$ (the case $\mu = 0$ is trivially Euclidean on $\mathbb{R}^2$), since in this case, we have for any $x \in M \cap \overline{\mathrm{B}}(0,|\mu|) \neq \emptyset$ that the drift $F_0(x,\mu)$ is not weak.*

Remark 5. *One can also notice that at the initial time, the strength of the drift depends on the ratio $|\mu|/r_0$. See Figure 6.2 for an illustration of the different possible strengths of the drift.*

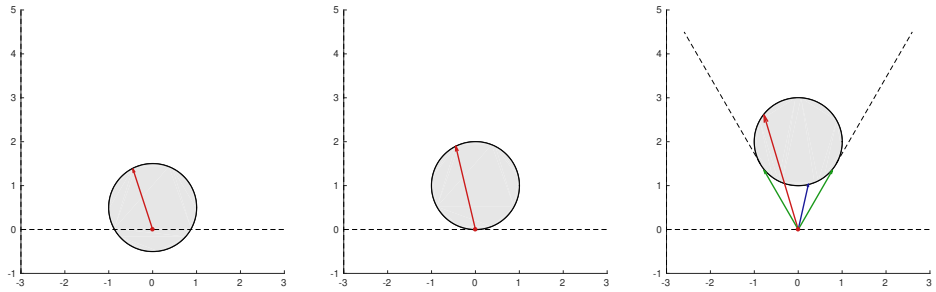


FIGURE 6.2 – The vortex is placed at the origin and marked by a black dot, as the initial point $x_0 \coloneqq (2,0)$ in cartesian coordinates. The black circle corresponds to the set of initial directions $x_0 + \mathcal{F}(x_0,\mu)$ and the thick blue vector is the initial direction associated to the initial control $u(0) \coloneqq (\cos\alpha, \sin\alpha)$, with $\alpha = 7\pi/8$. It is decomposed as the sum of the drift (oriented vertically) and the control field. On the left, we have a weak drift ($\mu = 0.5\, r_0$) at x_0, in the middle we have a moderate drift ($\mu = r_0$) and on the right a strong drift ($\mu = 2\, r_0$).

Influence of the circulation on the abnormal extremals

Proposition 6.2.21. *Let $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ be an abnormal extremal, that is $p^0 = 0$. Then, the drift is strong or moderate all along the geodesic.*

Proof. Since the abnormal extremal is of order 0, then all along the extremal we have $\mathbf{H}(x(t),p(t)) = p(t)\cdot F_0(x(t),\mu) + \|p(t)\| = 0$. So, the Cauchy-Schwarz inequality gives $\|p(t)\| = |p(t)\cdot F_0(x(t),\mu)| \leq \|p(t)\|\|F_0(x,\mu)\|$ and since $\|p(t)\| \neq 0$, the result follows. □

Remark 6. *According to the previous proposition, the abnormal geodesics (that is the projection of the abnormal extremals on the state manifold) are contained in the ball $\overline{\mathrm{B}}(0,|\mu|)$.*

According to the PMP, $p^0 = 0$ for the abnormal extremals while $p^0 < 0$ for the normal extremals. In the normal case, by homogeneity, one can fix $p^0 = -1$ and the initial adjoint vector $p_0 \coloneqq p(0)$ of normal extremals lives in the one dimensional space $\left\{p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \mathbf{H}(x_0, p) = 1\right\}$. This parameterization is very classical. Another possibility is to set $\|(p_0, p^0)\| = 1$ since by the PMP, the pair $(p(\cdot), p^0)$ does not vanish. Finally, in our case, since all the extremals are of order zero, that is since p does not vanish, we can also fix $\|p_0\| = 1$. We consider this third possibility but in polar coordinates, that is, denoting $p_0 \coloneqq (p_r(0), p_\theta)$ (recalling that p_θ is constant) we parameterize the initial adjoint vector by :

$$p_0 \in \left\{p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|p\|_{r_0} = 1\right\}.$$

We thus introduce $\alpha \in [0\,, 2\pi[$ such that $p_r(0) = \cos\alpha$, $p_\theta = r_0 \sin\alpha$, which gives the initial control $v(0) = (p_r(0), p_\theta/r_0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. According to the Mathieu transformation (6.14), one has in cartesian coordinates that $p_x(0) = \cos\theta_0 \cos\alpha - \sin\theta_0 \sin\alpha$ and $p_y(0) = \sin\theta_0 \cos\alpha + \cos\theta_0 \sin\alpha$, so in the particular case $\theta_0 = 0$, we have $u(0) = (p_x(0), p_y(0)) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. This parameterization has the advantage to cover the normal and the abnormal extremals. According to the PMP, we have at the initial time :

$$\mathbf{H}(q_0, p_0) = p_\theta \frac{\mu}{r_0^2} + \|p_0\|_{r_0} = p_\theta \frac{\mu}{r_0^2} + 1 = -p^0 \geq 0,$$

with $q_0 = (r_0, \theta_0)$. Introducing (with a slight abuse of notation) $\mathbf{H}(\alpha) \coloneqq \mu \sin\alpha / r_0 + 1$, then, the abnormal extremals are characterized by $\mathbf{H}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -r_0/\mu$. We have three cases :

— If the drift is weak at the initial point, then this equation has no solution which explains why there is no abnormal extremals. In this case, $\mathbf{H}(\alpha) > 0$ for any α and thus there are only hyperbolic geodesics.

— If the drift is moderate at the initial point, that is if $|\mu| = r_0$, then the single abnormal extremal is parameterized by $\alpha = \pi/2$ if $\mu < 0$ and by $\alpha = 3\pi/2$ if $\mu > 0$,

— In the last case when the drift is strong, then for a given μ, the equation $\mathbf{H}(\alpha) = 0$ has two distinct solutions $\alpha_1^a < \alpha_2^a$ in $[0\,, 2\pi[$. If $\mu < 0$, then α_1^a and α_2^a are contained in $]0\,, \pi[$ while if $\mu > 0$, then α_1^a and α_2^a are contained in $]\pi\,, 2\pi[$. We have in addition the following symmetry :

$$\alpha_2^a = \pi - \alpha_1^a \quad \text{if} \quad \mu < 0 \quad \text{and} \quad \alpha_2^a = 3\pi - \alpha_1^a \quad \text{if} \quad \mu > 0.$$

The normal extremals solution of the PMP are parameterized by the set $\{\alpha \in [0\,, 2\pi[\mid \mathbf{H}(\alpha) > 0\} = [0\,, \alpha_1^a[\cup]\alpha_2^a\,, 2\pi[$ while for $\alpha \in]\alpha_1^a\,, \alpha_2^a[$ we have $\mathbf{H}(\alpha) < 0$. One can see on Figure 6.3, the two abnormal directions with two hyperbolic and elliptic directions (that is resp. associated to hyperbolic and elliptic geodesics). The two abnormal directions define the boundary of the cone of admissible directions and reveal a lack of accessibility in the neighborhood of x_0.

6.2.6 Numerical results

Resolution of the shooting equation

We introduce the *shooting mapping*

$$S(T, p_0) \coloneqq \exp_{x_0}(T, p_0) - x_f, \tag{6.19}$$

where x_f is the target and exp is the exponential mapping defined by (6.13). The shooting mapping is defined for

$$(T, p_0) \in \left\{(T, p_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathrm{S}^1 \;\middle|\; T < t_{p_0}\right\}$$

where $t_{p_0} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ is the maximal time such that $\exp_{x_0}(\cdot, p_0)$ is well defined over $[0\,, t_{p_0}[$. Let (T, p_0) be a solution of $S = 0$ such that the associated extremal is normal. The shooting mapping is differentiable at (T, p_0) and if T is not a conjugate time, then its Jacobian is of full rank

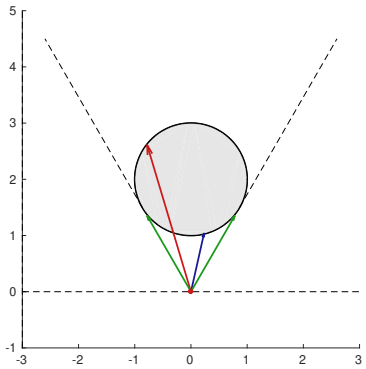


FIGURE 6.3 – The vortex is placed at the origin and marked by a black dot, as the initial point $x_0 := (2, 0)$ in cartesian coordinates. The drift is strong at the initial point since $\mu = 2\,r_0$. The black circle represents the set of initial directions $x_0 + \mathcal{F}(x_0, \mu)$ and the blue vector is the initial hyperbolic direction associated to the initial control $u(0) := (\cos\alpha, \sin\alpha)$, with $\alpha = 7\pi/8$. The direction in green is elliptic while the two red directions are the abnormal directions located at the boundary of the cone of admissible directions.

at (T, p_0), which is a necessary condition to compute numerically the BC-extremals by means of Newton-like algorithms. We present in the following some examples of hyperbolic geodesics fixing the initial condition to $x_0 := (2, 0)$ and solving the shooting equations $S = 0$ thanks to the HamPath code [32], for different final conditions and for different strengths of the drift.

HamPath code A Newton-like algorithm is used to solve the shooting equation $S(T, p_0) = 0$. Providing $\mathbf{H}$ and S to HamPath, the code generates automatically the Jacobian of the shooting function. To make the implementation of S easier, HamPath supplies the exponential mapping. Automatic Differentiation is used to produce $\vec{\mathbf{H}}$ and is combined with Runge-Kutta integrators to assemble the exponential mapping and the variational equations (6.16) used to compute conjugate times. See [32, 46] for more details about the code.

Example 1 For this first example we want to steer the particle from x_0 to $x_f := (-2, 0)$ with $\mu := 2\,\|x_0\|$ (strong drift). In this case, we obtain a final time $T \approx 1.641$ and the shooting equation $S = 0$, is solved with a very good accuracy of order $1e^{-12}$ (it is the same for the others examples but it won't be mentioned anymore). The associated hyperbolic geodesic is portrayed on Figure 6.4. The point vortex is represented by a black dot as the initial condition. The initial velocity $\dot{x}(0)$ is given with the boundary (the black circle) of $x_0 + \mathcal{F}(x_0, \mu)$, cf. eq. (6.18). One can see that the drift is strong since $x_0 \notin x_0 + \mathcal{F}(x_0, \mu)$.

Example 2 To emphazise the influence of the final condition, let us take again $\mu := 2\,\|x_0\|$ and set $x_f := (2.5, 0)$. We can note from Figure 6.4 that the solution turns around the point vortex and profits from the circulation. In this case we obtain a final time $T \approx 2.821$.

Examples 3-4 Here we want to observe what happens for a weak drift. We set $\mu := 0.5\|x_0\|$ and present two cases with $x_f := (-2, 0)$ (cf. left subgraph of Figure 6.5) and $x_f := (2.5, 0)$ (cf. right subgraph of Figure 6.5). When $x_f = (-2, 0)$, the final condition is the same as in the example 1 but since the drift is weaker, the final time is longer. This is because the particle takes advantage of the vortex circulation. On the other hand, for $x_f = (2.5, 0)$ (same final condition as example 2) and considering a weak drift, then the particle does not turn around the vortex.

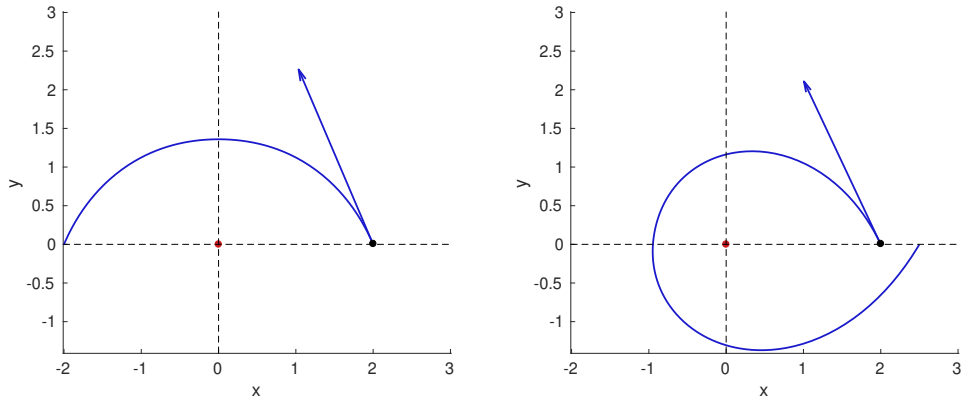


FIGURE 6.4 – **Example 1 and 2.** Geodesic with a strong drift at the initial point : $\mu = 2\,\|x_0\|$. (Left : example 1) $x_0 = (2, 0)$, $x_f = (-2, 0)$ and the final time is $T \approx 1.641$. (Right : example 2) $x_0 = (2, 0)$, $x_f = (2.5, 0)$ and the final time is $T \approx 2.821$.

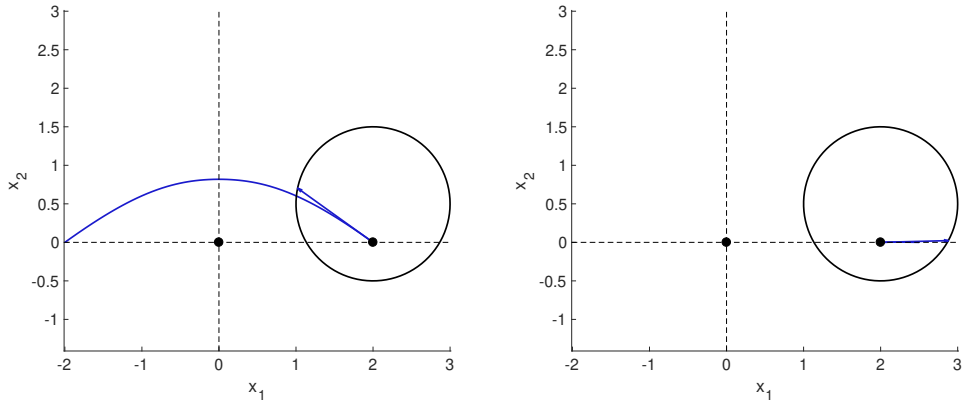


FIGURE 6.5 – **Example 3 and 4.** Geodesic with a weak drift at the initial point : $\mu = 0.5\,\|x_0\|$. (Left : example 3) $x_0 = (2, 0)$, $x_f = (-2, 0)$ and the final time is $T \approx 2.826$. (Right : example 4) $x_0 = (2, 0)$, $x_f = (2.5, 0)$ and the final time is $T \approx 0.56$. Compare this to Figure 6.4.

Numerical results on the absence of conjugate points

According to Section 6.3.2, there are two types of geodesics reaching the boundary of the domain : the bounded geodesics that reach the vortex and the unbounded geodesics. There exists also a unique geodesic separating these two cases, which is called the *separatrix*. Fixing $\theta_0 = 0$ and using the parameterization $u(0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0\,, 2\pi[$, from Section 6.2.5, we define for a pair $(r_0, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$, the set $\Lambda(r_0, \mu)$ of parameters α such that the associated geodesics converge to the vortex and $\Theta(r_0, \mu)$ the set of parameters such that the associated geodesics go to infinity (in norm). The sets $\Lambda(r_0, \mu)$ and $\Theta(r_0, \mu)$ depend on the strength of the drift and the sign of μ, and they are given in Section 6.3.2. One can find in Figure 6.6 the smallest singular value, denoted $\sigma_{\min}(\cdot)$, of $\det(\dot{x}(\cdot), \delta x(\cdot))$ over the time, see eq. (6.17). For a fixed $\alpha \in [0\,, 2\pi[$, we denote by $t_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ the maximal time such that the associated geodesic is well defined over $[0\,, t_\alpha[$. If there exists a time $t_c \in\,]0\,, t_\alpha[$ such that $\sigma_{\min}(t_c) = 0$, then the time t_c is a conjugate time. If not, the geodesic has no conjugate time. One can see from the left subgraph of Figure 6.6, that for any weak drift and for any $\alpha \in \Theta(r_0, \mu)$, that there are no conjugate times and $\sigma_{\min}(t) \to 1$ when $t \to t_\alpha = +\infty$.[2] From the right subgraph of Figure 6.6, it is clear that for any weak drift and for any $\alpha \in \Lambda(r_0, \mu)$, that there are no conjugate times and that $\sigma_{\min}(t) \to 0$ when $t \to t_\alpha$. On the two figures, the red curve corresponds to the separatrix. It is clear that for

2. It is clear that $t_\alpha = +\infty$ for any $\alpha \in \Theta(r_0, \mu)$, since $|\dot{r}| \leq 1$.

the separatrix $\sigma_{\min}(t) \to 0.5$ when $t \to t_\alpha = +\infty$. Since one has similar numerical results in the strong drift case, we make the following conjecture :

Conjecture 6.2.22. *For any $(x_0, \mu) \in M \times \mathbb{R}^*$, the conjugate locus is empty.*

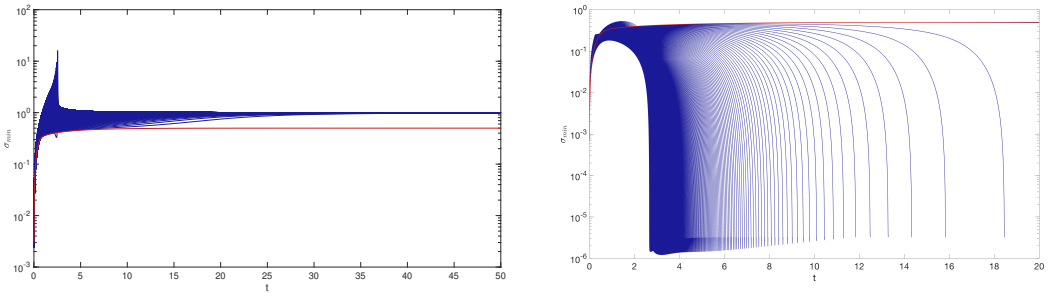


FIGURE 6.6 – Smallest singular value with respect to time. Setting : $\theta_0 = 0$, $\mu = 2.0$, $r_0 = 4\mu/3$ (weak drift at the initial point). The set of parameters $[0\,, 2\pi[$ is uniformly discretized in $N := 1000$ sub-intervals and we define $0 =: \alpha_1 < \cdots < \alpha_N < 2\pi$ the associated parameters. Each blue curve is the graph of the smallest singular value $\sigma_{\min}(t)$ for one $\alpha \in \Theta(r_0, \mu) \cap \cup_{i=1}^{N} \{\alpha_i\}$ and for $t \in [0\,, 50]$ on the left subgraph, and for one $\alpha \in \Lambda(r_0, \mu) \cap \cup_{i=1}^{N} \{\alpha_i\}$ on the right subgraph. In this case, we stop the numerical integration when $r(t) \leq 10^{-3}$ which explains why the minimal value of $\sigma_{\min}$ is between 10^{-5} and 10^{-6}. The red curve on each plot corresponds to the separatrix.

6.3 Micro-local analysis and properties of the value function

6.3.1 Poincaré compactification on S^3 of the extremal dynamics and integrability results

The objective of this section is to provide the geometric frame to analyze the extremals of order zero. Reparameterizing, the flow defines a polynomial vector field wich can be compactified using Poincaré method to analyze the behaviors of extremal curves converging either to the origin or to the infinity, see Section 6.2.2. Thanks to the rotational symmetry, this foliation can be integrated which is crucial to define in the next section the concept of Reeb circle.

Introducing $c := -p^0$, then from the condition $\mathbf{H} = p_\theta \mu / r^2 + \|p\|_r = -p^0$, one gets $r^2 \|p\|_r = cr^2 - \mu p_\theta$. Plugging this into (6.15), one obtains :

$$r^3(cr^2 - \mu\, p_\theta)\, \dot{r} = r^5 p_r, \quad r^3(cr^2 - \mu\, p_\theta)\, \dot{\theta} = \lambda_3 r^3 - \lambda_4 r, \quad r^3(cr^2 - \mu\, p_\theta)\, \dot{p}_r = \lambda_1 r^2 - \lambda_2,$$

where $\lambda_1 := (2\mu c + p_\theta) p_\theta$, $\lambda_2 := 2(\mu p_\theta)^2$, $\lambda_3 := \mu c + p_\theta$ and $\lambda_4 := \mu^2 p_\theta$. The aim is to get a polynomial system to integrate, so we use the time reparameterization :

$$\frac{\mathrm{d}t}{r^3(cr^2 - \mu p_\theta)} = \mathrm{d}s.$$

Denoting by $'$ the derivative with respect to s, the system is written :

$$r' = r^5 p_r, \quad \theta' = \lambda_3 r^3 - \lambda_4 r, \quad p_r' = \lambda_1 r^2 - \lambda_2.$$

We use Poincaré compactification where the sphere is identified to $x = 1$ and this leads to the following dynamics :

$$r' = r^5 p_r, \quad \theta' = \lambda_3 r^3 x^3 - \lambda_4 r x^5, \quad p_r' = \lambda_1 r^2 x^4 - \lambda_2 x^6, \quad x' = 0, \tag{6.20}$$

which can be projected onto the 3-sphere $r^2+\theta^2+p_\theta^2+x^2=1$, up to a time reparameterization. Integrating the system (6.20), one has $x=c_1$ and we get :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p_r}=\frac{r^5p_r}{\lambda_1 r^2x^4-\lambda_2x^6}$$

which can integrated by separating the variables :

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^5}\left(\lambda_1r^2x^4-\lambda_2x^6\right)=p_r\,\mathrm{d}p_r.$$

Hence, we obtain :

$$\frac{\lambda_2c_1^6}{4r^4}-\frac{\lambda_1c_1^4}{2r^2}=\frac{1}{2}p_r^2+K_1.$$

Using quadratures from (6.20), one can obtain $s=f(r)$, $\theta=g(r)$.

To illustrate the integrability properties, we only give the formula in the abnormal case for the r component :

Proposition 6.3.1. *For $\alpha\in\{\alpha_1^a,\alpha_2^a\}$ (see Section 6.2.5 for the definition of α_1^a and α_2^a), one has :*

$$r(t)=\left(s(t)^2-\frac{2\cos\alpha}{r_0}s(t)+\frac{1}{r_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \textit{where}\ s(t)\coloneqq\frac{\sin\alpha}{r_0}\tan\left(\frac{\sin\alpha}{r_0}t+\arctan\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right)+\frac{\cos\alpha}{r_0}.$$

6.3.2 Micro-local analysis of the extremal solutions

Since θ is a cyclic variable, and so p_θ is a parameter, then we can focus the analysis on the subsystem

$$\dot r=\frac{p_r}{\|p\|_r},\quad \dot p_r=\frac{p_\theta}{r^3}\left(2\mu+\frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right),\tag{6.21}$$

to determine the different types of extremals. First of all, it is clear that the unique equilibrium point satisfying $(p_r,p_\theta)\neq(0,0)$ and $r\geq0$ is given by

$$(r_e,p_{r,e})\coloneqq(2|\mu|,0),$$

and p_θ must satisfy $\operatorname{sign}(p_\theta)=-\operatorname{sign}(\mu)$. Now, introducing

$$a(p_\theta,\mu)\coloneqq\mu^2\,p_\theta^2\quad\text{and}\quad b(p_\theta,r_0,\mu)\coloneqq-p_\theta\left(p_\theta+2\,\mu+2\,p_\theta\,\frac{\mu^2}{r_0^2}\right),$$

one can define

$$\varphi(r,p_\theta,r_0,\mu)\coloneqq a(p_\theta,\mu)\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r_0^4}\right)+b(p_\theta,r_0,\mu)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right)+1-\frac{p_\theta^2}{r_0^2}$$

and one has the following result :

Lemma 6.3.2. *Along any extremal parameterized by $\|(p_r(0),p_\theta)\|_{r(0)}=1$ holds*

$$p_r(t)^2=\varphi(r(t),p_\theta,r(0),\mu).$$

Proof. From (6.21), one has along the extremal (omitting the time variable) :

$$p_r\dot p_r=\frac{p_\theta}{r^3}\left(p_\theta+2\mu\,\|p\|_r\right)\dot r.\tag{6.22}$$

Using the parameterization $\|p_0\|_{r_0}=1$ (with $p_0\coloneqq(p_r(0),p_\theta)$ and $r_0\coloneqq r(0)$), one has

$$\|p(t)\|_{r(t)}=-\left(p^0+p_\theta\frac{\mu}{r(t)^2}\right)=p_\theta\,\mu\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r(t)^2}\right)+1,\tag{6.23}$$

since along the extremal the Hamiltonian is constant and equal to $-p^0$. Putting (6.23) in (6.22), one has

$$p_r \dot{p}_r = -\left(\frac{2a}{r^5} + \frac{b}{r^3}\right)\dot{r}.$$

Integrating this equation, we have

$$\frac{1}{2}p_r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r^4} + \frac{b}{r^2} + c\right), \quad c \coloneqq p_r(0)^2 - \frac{a}{r_0^4} - \frac{b}{r_0^2},$$

and since $p_r(0)^2 = 1 - p_\theta^2/r_0^2$, we get the conclusion. □

Let us fix p_θ, r_0 and μ and introduce the polynomial function of degree two $P(X) \coloneqq aX^2 + bX + c$, with

$$\Delta \coloneqq b^2 - 4ac = p_\theta^3\left(p_\theta\left(1 + 4\frac{\mu^2}{r_0^2}\right) + 4\mu\right),$$

its discrimant. Then, we have $\varphi(r, p_\theta, r_0, \mu) = P(1/r^2)$ and the sign of the discrimant plays a crucial role in the analysis.

Remark 7. *If $p_\theta = 0$ then $P(X) = 1$ and if $\mu = 0$ then $P(X) = -p_\theta^2 X + c$. The polynomial P is of degree two if and only if $p_\theta \neq 0$ and $\mu \neq 0$. The case $\mu = 0$ is the simple Euclidean case that we do not develop. If $p_\theta = 0$ then $\dot{p}_r = 0$, $\dot{r} = \pm 1$ and this case is clear : these are the fastest geodesics converging either to the vortex ($\dot{r} = -1$) or going to infinity ($\dot{r} = +1$).*

Let us introduce now

$$p_\theta^* \coloneqq -\frac{4\,\mu}{1 + 4\frac{\mu^2}{r_0^2}},$$

such that, assuming $p_\theta \neq 0$, $\mu > 0$ and $r_0 > 0$, we have :

$$\Delta(p_\theta, r_0, \mu)\begin{cases} < 0 & \text{if } \ p_\theta \in \,]p_\theta^*\,, 0[, \\ = 0 & \text{if } \ p_\theta = p_\theta^*, \\ > 0 & \text{if } \ p_\theta \in \mathbb{R} \setminus [p_\theta^*\,, 0]. \end{cases}$$

Remark 8. *If $\mu < 0$, then $p_\theta^* > 0$ and we have $\Delta(p_\theta, r_0, \mu) < 0$ if $p_\theta \in \,]0\,, p_\theta^*[$, $\Delta(p_\theta^*, r_0, \mu) = 0$ and $\Delta(p_\theta, r_0, \mu) > 0$ if $p_\theta \in \mathbb{R} \setminus [0\,, p_\theta^*]$.*

Remark 9. *Note that with our parameterization, we are only interested in parameters p_θ satisfying $|p_\theta| \leq r_0$. We can check that for any $r_0 > 0$ and $\mu \neq 0$, we have $|p_\theta^*| \leq r_0$. The particular case $|p_\theta^*| = r_0$ is given by $r_0 = 2|\mu|$. Thus, setting $p_\theta = r_0 \sin\alpha$, we can find two parameters $0 < \alpha_1^* \leq \alpha_2^* < 2\pi$ such that $p_\theta^* =: r_0 \sin\alpha_1^* = r_0 \sin\alpha_2^*$. This gives us*

$$\sin\alpha_1^* = \sin\alpha_2^* = -\frac{4\,\lambda}{1 + 4\lambda^2}, \quad \lambda \coloneqq \frac{\mu}{r_0},$$

and we can see again that the ratio μ/r_0 is of particular interest. Note that $\alpha_1^* = \alpha_2^*$ if $r_0 = 2|\mu|$.

Let us analyze the three different cases depending on the sign of the discrimant, considering that $p_\theta \neq 0$ and fixing the parameters $\mu > 0$ and $r_0 > 0$.

— **Case $\Delta < 0$.** In this case, the polynomial P has no roots and so $p_r(t)^2 = P(1/r(t)^2)$ never vanishes. See Figure 6.7 for an illustrative example. Thus, p_r is of constant sign such as $\dot{r}$ and so r is monotone, even strictly monotone since p_r is nonzero. This case is given by $p_\theta \in \,]p_\theta^*\,, 0[$, thus, in this case $|p_\theta| \leq |p_\theta^*| \leq r_0$ and setting $(p_r(0), p_\theta) = (\cos\alpha, r_0 \sin\alpha)$, then $r(t) \to 0$ (*i.e.* to the vortex) when $t \to t_\alpha$ if $\cos\alpha < 0$ and $r(t) \to +\infty$ when $t \to t_\alpha$

if $\cos\alpha > 0$, where $t_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ is the maximal positive time such that the associated geodesic is defined over $[0\,, t_\alpha[$. Denoting

$$\alpha^* \coloneqq \arcsin\left(\frac{p_\theta^*}{r_0}\right) \in [-\frac{\pi}{2}\,, 0[$$

and introducing (cf. remark 9) $\alpha_1^* \coloneqq \pi - \alpha^*$ and $\alpha_2^* = 2\pi + \alpha^* = 3\pi - \alpha_1^*$, then, for $\alpha \in]\pi\,, \alpha_1^*[$, we have $r(t) \to 0$, while for $\alpha \in]\alpha_2^*\,, 2\pi[$, we have $r(t) \to +\infty$, when $t \to t_\alpha$.

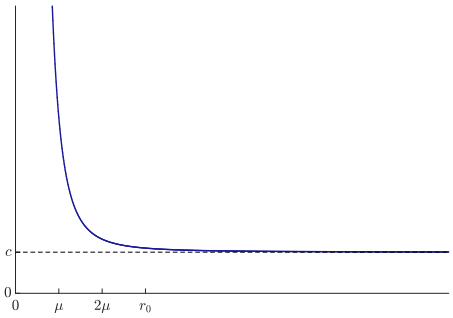


FIGURE 6.7 – **Case** $\Delta < 0$. Graph of $r \mapsto P(1/r^2)$. Setting : $\mu = 2$, $r_0 = 3\mu$, $p_\theta = p_\theta^*/2 \in]p_\theta^*\,, 0[$.

— **Case** $\Delta = 0$**.** Since we assume $p_\theta \neq 0$ then $\Delta(p_\theta, r_0, \mu) = 0$ if and only if $p_\theta = p_\theta^*$. In this case $P(1/r^2) = 0$ if and only if $r = r^* \coloneqq 2\mu = r_e$. See Figure 6.8 for an illustrative example. We have four possibilities :
  — If $r_0 > r^*$ and $p_r(0) > 0$, that is $p_r(0) = \cos\alpha_2^*$, then $r(t) \to +\infty$ when $t \to t_{\alpha_2^*}$.
  — If $r_0 < r^*$ and $p_r(0) < 0$, that is $p_r(0) = \cos\alpha_1^*$, then $r(t) \to 0$ when $t \to t_{\alpha_1^*}$.
  — If $r_0 > r^*$ and $p_r(0) = \cos\alpha_1^* < 0$, or if $r_0 < r^*$ and $p_r(0) = \cos\alpha_2^* > 0$, then $r(t) \to r^*$.
  — If $r_0 = r^*$ and $p_r(0) = \cos\alpha_1^* = \cos\alpha_2^* = 0$, then $r(t) = r^*$ for any time t and thus, in this case, the geodesic describes a circle.

Remark 10. *We can notice that* $(r_e, p_{r,e}) = (2\mu, 0)$ *is an unstable hyperbolic fixed point and its associated linearized system has* $\pm 1/2\mu$ *as eigenvalues with associated eigenvectors* $(\pm\mu(4\mu^2 + r_0^2)/r_0^2, 1)$.

Remark 11. *Let us consider the* θ *dynamics :*

$$\dot\theta = \frac{1}{r^2}\left(\mu + \frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right).$$

Fixing $p_\theta = -4\mu r^2/(r^2 + 4\mu^2)$ *and using the parameterization* $\|p\|_r = 1$ *(this amounts to consider* r *as the initial distance to the vortex), then we have* $\dot\theta = 0 \Leftrightarrow \mu + p_\theta = 0 \Leftrightarrow r = 2|\mu|/\sqrt{3}$. *See also eq.* (6.24).

— **Case** $\Delta > 0$**.** In this case, P has two roots $X_- < X_+$ given by :

$$X_\pm \coloneqq \frac{p_\theta^2\, r_0^2 + 2\,\mu^2 p_\theta^2 + 2\,\mu\, p_\theta\, r_0^2 \pm r_0\sqrt{p_\theta^3\,(4\,p_\theta\,\mu^2 + 4\,\mu\, r_0^2 + p_\theta\, r_0^2)}}{2\,\mu^2\, p_\theta^2\, r_0^2}.$$

By a tedious calculation, one can prove that $X_- \geq 0$ and $X_- = 0$ if and only if $p_\theta = -r_0^2/\mu < p_\theta^* < 0$. Let us introduce

$$r_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{X_+}} \quad \text{and} \quad r_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{X_-}},$$

with the convention $1/0 = +\infty$. Then, for any $r \in]r_1\,, r_2[$, we have $P(1/r^2) < 0$ and thus it clear that $r_0 \notin]r_1\,, r_2[$, since by definition $P(1/r_0^2) = p_r(0)^2 \geq 0$.

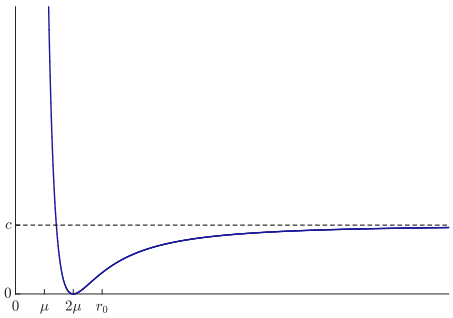


FIGURE 6.8 – **Case** $\Delta = 0$. Graph of $r \mapsto P(1/r^2)$. Setting : $\mu = 2$, $r_0 = 3\mu$, $p_\theta = p_\theta^*$.

1. **Subcase** $p_\theta > 0$**.** Since p_θ is positive we have $0 < X_- < X_+$ and thus $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. We can easily prove that $p_\theta > 0 \Rightarrow r_1 < r_0$ since :

$$r_1 < r_0 \Leftrightarrow 1 < r_0^2\, X_+ \Leftrightarrow 0 < p_\theta^2\, r_0^2 + 2\,\mu\, p_\theta\, r_0^2 + r_0 \sqrt{p_\theta^3\,(4\, p_\theta\, \mu^2 + 4\,\mu\, r_0^2 + p_\theta\, r_0^2)}.$$

This can be seen on Figure 6.9. Since $r_0 \notin]r_1\,, r_2[$, then $p_\theta > 0 \Rightarrow r_2 \leq r_0$ and thus $r(t)$ will go to $+\infty$ in any case. More precisely, setting $(p_r(0), p_\theta) = (\cos\alpha, r_0 \sin\alpha)$, then we have :

— If $\alpha \in]0\,, \pi/2[$, then $\dot r(0) > 0$ and thus $r_2 < r_0$. In this case we have $\dot r(t) > 0$ for any $t \geq 0$ and thus r is strictly increasing and $r(t) \to +\infty$ when $t \to t_\alpha$.

— If $\alpha = \pi/2$, then $\dot r(0) = 0$, that is $r_2 = r_0$, but $r(t)$ is stricty increasing for $t > 0$ and we still have $r(t) \to +\infty$ when $t \to t_\alpha$.

— If $\alpha \in]\pi/2\,, \pi[$, then $\dot r(0) < 0$ and again $r_2 < r_0$. In this case, $r(t)$ is decreasing over $[0\,, \bar t_\alpha]$, where $\bar t_\alpha > 0$ is the time such that $P(1/r(\bar t_\alpha)^2) = 0$, that is such that $r(\bar t_\alpha) = r_2$. Since $(r_2, 0)$ is not an equilibrium point (a necessary condition is $\mathrm{sign}(p_\theta) = -\mathrm{sign}(\mu)$), and since along the geodesic holds $p_r(t)^2 = P(1/r(t)^2)$, then necessarily, $r(t)$ is increasing over $[\bar t_\alpha\,, t_\alpha[$ (the sign of p_r changes at $t = \bar t_\alpha$ and no more changing may occur after), even strictly increasing for $t > \bar t_\alpha$ and we still have $r(t) \to +\infty$ when $t \to t_\alpha$.

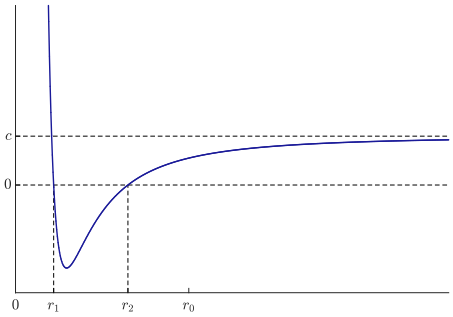


FIGURE 6.9 – **Case** $\Delta > 0$ **and** $p_\theta > 0$. Graph of $r \mapsto P(1/r^2)$. Setting : $\mu = 2$, $r_0 = 3\mu$, $p_\theta = r_0/2$.

2. **Subcase** $p_\theta < p_\theta^*$**.** Here we have $-r_0 \leq p_\theta < p_\theta^* < 0$. Setting $(p_r(0), p_\theta) = (\cos\alpha, r_0 \sin\alpha)$, this case corresponds to $\alpha \in]\alpha_1^*\,, \alpha_2^*[$. Let us recall that if $r_0 = r^* = 2\mu$, then $p_\theta^* = -r_0$ (*i.e.* $\alpha_1^* = \alpha_2^* = 3\pi/2$), and so if $r_0 = r^*$, then this last case is empty. We thus have

either $r_0 < r^*$ or $r_0 > r^*$. Let us prove now that $r_1 < r^*$. To do this, we need the first following result :

$$p_\theta < p_\theta^* \Leftrightarrow p_\theta\, r_0^2 + 4\,\mu^2\, p_\theta + 4\,\mu\, r_0^2 < 0.$$

Besides,

$$r_1 < r^* = 2\,\mu \Leftrightarrow 1 < 4\,\mu^2\, X_+ \Leftrightarrow 0 < p_\theta\left(p_\theta\, r_0^2 + 4\,\mu^2\, p_\theta + 4\,\mu\, r_0^2\right) + 2\sqrt{\Delta},$$

which is true since $p_\theta < 0$ and $p_\theta < p_\theta^*$. We are now in position to conclude :

— If $r_0 > r^*$ then necessarily $r_0 \geq r_2$ (see Figure 6.10) since $r_0 \notin]r_1\,, r_2[$ and thus $r(t) \to +\infty$ when $t \to t_\alpha$ for any $\alpha \in]\alpha_1^*\,, \alpha_2^*[$. More precisely, $r(t)$ is strictly increasing if $\alpha \in]3\pi/2\,, \alpha_2^*[$, it is increasing if $\alpha = 3\pi/2$ ($\dot{r}(0) = 0$) and has one oscillation if $\alpha \in]\alpha_1^*\,, 3\pi/2[$.

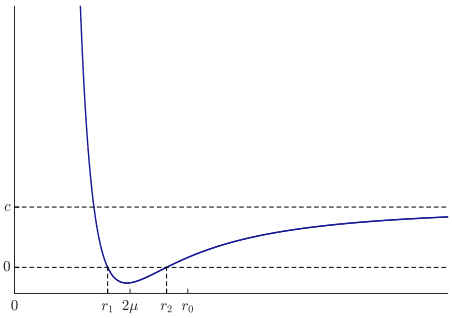


FIGURE 6.10 – **Case $\Delta > 0$ and $p_\theta < p_\theta^*$** : $r \mapsto P(1/r^2)$. Setting : $\mu = 2$, $r_0 = 3\mu$, $p_\theta = (p_\theta^* - r_0)/2$.

— If $r_0 < r^*$, using the fact that $|p_\theta| \leq r_0 < r^* = 2\mu$, then one can prove by a tedious calculation that $r_0 \leq r_1$ (see Figure 6.11). Then, we have $r(t) \to 0$ when $t \to t_\alpha$ for any $\alpha \in]\alpha_1^*\,, \alpha_2^*[$. More precisely, $r(t)$ is strictly decreasing if $\alpha \in]\alpha_1^*\,, 3\pi/2[$, it is decreasing if $\alpha = 3\pi/2$ ($\dot{r}(0) = 0$) and has one oscillation if $\alpha \in]3\pi/2\,, \alpha_2^*[$.

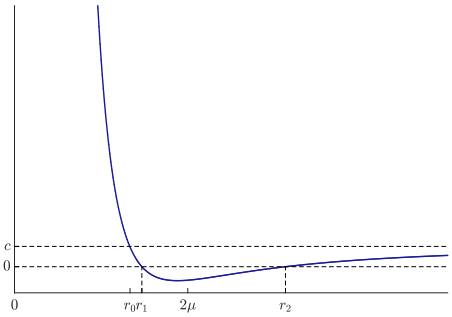


FIGURE 6.11 – **Case $\Delta > 0$ and $p_\theta < p_\theta^*$** : $r \mapsto P(1/r^2)$. Setting : $\mu = 2$, $r_0 = 4\mu/3$, $p_\theta = (p_\theta^* - r_0)/2$.

Remark 12. *According to Section 6.2.5, the abnormal extremals are given by $p_\theta^a := -r_0^2/\mu$, that is by $\alpha = \alpha_1^a$ and $\alpha = \alpha_2^a$ (defined in Section 6.2.5). Since (recalling that $\mu > 0$)*

$$p_\theta^a - p_\theta^* = -\frac{r_0^4}{\mu(r_0^2 + 4\mu^2)} < 0,$$

it is clear that $p_\theta^a < p_\theta^*$, which gives $\alpha_1^* < \alpha_1^a \leq \alpha_2^a < \alpha_2^*$, and thus the abnormal case is contained in this last case of $\Delta > 0$. Besides, the abnormal extremals exist

only if the drift is strong or moderate, that is if $r_0 \leq \mu < r^*$. To end this remark, let us mention that if the drift is strong, then for any $\alpha \in]\alpha_1^a\,,\alpha_2^a[\neq \emptyset$ the associated extremal is elliptic and from the previous analysis, one can say that all the elliptic geodesics converge to the vortex, that is $r(t) \to 0$ when $t \to t_\alpha$.

We want now to group together the geodesics converging to the vortex and separate them from the ones going to infinity. We thus introduce for $r_0 > 0$ and $\mu \neq 0$, the following sets contained in $[0\,,2\pi[$:

$$\Lambda(r_0,\mu) \coloneqq \begin{cases} [\pi\,,\alpha_1^*[\text{ if } r_0 \geq 2\mu \text{ and } \mu > 0 \\ [\pi\,,\alpha_2^*[\text{ if } r_0 < 2\mu \text{ and } \mu > 0 \\ [\alpha_2^*\,,\pi] \text{ if } r_0 \geq 2|\mu| \text{ and } \mu < 0 \\ [\alpha_1^*\,,\pi] \text{ if } r_0 < 2|\mu| \text{ and } \mu < 0 \end{cases}$$

$$\Theta(r_0,\mu) \coloneqq \begin{cases} [0\,,\pi[\cup]\alpha_1^*\,,2\pi[\text{ if } r_0 > 2\mu \text{ and } \mu > 0 \\ [0\,,\pi[\cup]\alpha_2^*\,,2\pi[\text{ if } r_0 \leq 2\mu \text{ and } \mu > 0 \\ [0\,,\alpha_2^*[\cup]\pi\,,2\pi[\text{ if } r_0 > 2|\mu| \text{ and } \mu < 0 \\ [0\,,\alpha_1^*[\cup]\pi\,,2\pi[\text{ if } r_0 \leq 2|\mu| \text{ and } \mu < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(r_0,\mu) \coloneqq \begin{cases} \{\alpha_1^*\} \text{ if } (r_0 > 2\mu \text{ and } \mu > 0) \text{ or if } (r_0 \leq 2|\mu| \text{ and } \mu < 0) \\ \{\alpha_2^*\} \text{ if } (r_0 \leq 2\mu \text{ and } \mu > 0) \text{ or if } (r_0 > 2|\mu| \text{ and } \mu < 0) \end{cases}$$

Definition 6.3.3. *The geodesics parameterized by $\alpha \in \Psi(r_0,\mu)$ are called* separating geodesics.

We can now summarize the analysis :

Theorem 6.3.4. *Let us fix $x_0 \in M$ and $\mu \neq 0$. Then, to any $\alpha \in [0\,,2\pi[$ is associated a unique zero order extremal $z(\cdot) \coloneqq (x(\cdot),p(\cdot))$ solution of the Hamiltonian system $\dot{z} = \overrightarrow{\mathbf{H}}(z)$ given by eq.* (6.12)*, satisfying $x(0) = x_0$, and parameterized in polar coordinates by $\|p(0)\|_{r_0} = 1$ (with $r_0 \coloneqq \|x_0\|$). Besides, we have :*

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha \in \Lambda(r_0,\mu) \;&:\; \lim_{t\to t_\alpha} r(t) = 0, \\ \forall\, \alpha \in \Theta(r_0,\mu) \;&:\; \lim_{t\to t_\alpha} r(t) = +\infty \quad \textit{with} \quad t_\alpha = +\infty, \\ \forall\, \alpha \in \Psi(r_0,\mu) \;&:\; \lim_{t\to t_\alpha} r(t) = r^* = 2|\mu| \quad \textit{with} \quad t_\alpha = +\infty. \end{aligned}$$

6.3.3 Reeb foliations

3-dimensional compact Reeb component

A concrete example of foliation of codimension 1 on the 3-sphere S^3 is given by the Reeb foliation [51]. To construct such a foliation, the idea is to glue together two 3-dimensional foliations on two solid tori along their boundary. Let us recall only the construction of such a foliation on the solid torus $\mathrm{D}^2 \times \mathrm{S}^1$, where $\mathrm{D}^2 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1\right\} = \overline{\mathrm{B}}(0,1)$, following the presentation of [59]. Let $f\colon \mathrm{D}^2 \to \mathbb{R}$ be a smooth mapping such that the following conditions are satisfied :

1. f is of the form : $f(x,y) =: \varphi(x^2+y^2)$, that is in polar coordinates, $f(r,\theta) = \varphi(r^2)$,
2. $f(\partial\mathrm{D}^2) = \{0\}$ and $f(x,y) > 0$ for $(x,y) \notin \partial\mathrm{D}^2 = \mathrm{S}^2$,
3. f has no critical points on $\partial\mathrm{D}^2$.

Let consider the smooth mapping $F\colon \mathrm{D}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $F(x,y,t) \coloneqq f(x,y)\,e^t$, where $(x,y) \in \mathrm{D}^2$ and $t \in \mathbb{R}$. F is a submersion from $\mathrm{D}^2 \times \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ and defines a foliation of $\mathrm{D}^2 \times \mathbb{R}$ whose leaves are the level sets of F : $F^{-1}(a)$, $a \geq 0$. This foliation is called the 3-*dimensional non*

compact Reeb component and it is denoted by $\mathcal{R}^3$ in [59]. Since $F(x,y,t+1) = e\,F(x,y,t)$, then, $\mathcal{R}^3$ defines a foliation on the quotient manifold $\mathrm{D}^2 \times \mathrm{S}^1 = \mathrm{D}^2 \times \mathbb{R} \,/\, (x,y,t) \sim (x,y,t+1)$. This foliation being called the 3-*dimensional compact Reeb component* and denoted $\mathcal{R}^3_c$. This foliation admits a unique compact leaf : the boundary of $\mathrm{D}^2 \times \mathbb{R}$ diffeomorphic to the torus $\mathbb{T}^2 = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$. All the others leaves are diffeomorphic to $\mathbb{R}^2$ and are also given by the quotient of the graphs of functions of the form (in polar coordinates) : $(r,\theta) \in \mathrm{B}(0,1) \mapsto -\ln(\varphi(r^2)) + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Remark 13. *A simple example which is detailed in [59] is given by the mapping* $f(r,\theta) = 1 - r^2$. *Note that it is possible to construct a Reeb component on the solid torus with a function* F *which is a submersion only on* $\mathrm{B}(0,1) \times \mathbb{R}$. *Such an example is given by the function* $f(r,\theta) = \exp(-\exp(1/(1-r^2)))$. *This possibility will be useful in the following section to construct a* 2*-dimensional Reeb component from the Vortex application.*

Let us exhibit now a function f in the Vortex application that can be used to construct a 3-dimensional compact Reeb component and thus a Reeb foliation on S^3. To this end, we focus on the separating geodesics, that is the geodesics associated to parameters $\alpha \in \Psi(r_0,\mu)$. These geodesics are parameterized by $p_\theta = p^*_\theta = -4\mu r_0^2/(r_0^2 + 4\mu^2)$ and $\|p(0)\|_{r_0} = 1$, where $p(0) = (p_r(0), p_\theta)$ is the initial covector. Let us fix the circulation $\mu > 0$ and the initial distance $r_0 > 0$. Let $\alpha \in \Psi(r_0,\mu)$ denotes the single element contained in this set. Let us denote by $(r(\cdot),\theta(\cdot))$ the associated separating geodesic and by γ its orbit, that is $\gamma \coloneqq \{(r(t),\theta(t)) \mid t \in]t^\alpha, t_\alpha[\}$, where $t^\alpha < 0$ is the minimal negative time such that the geodesic is well defined by backward integration. The time $t_\alpha > 0$ being the maximal positive time such that the geodesic is well defined by forward integration. Let us consider now an arbitrary point $(r_1,\theta_1) \in \gamma$ and define σ as the orbit associated to the unique separating geodesic when we consider (r_1,θ_1) as the new initial state. Then, it is clear that $\gamma = \sigma$ since again the set $\Psi(r_1,\mu)$ has only one element. Thus, considering that at any time t, $r(t)$ is the initial distance to the vortex, leads to reparameterize the separating geodesics by setting $p_\theta = -4\mu r(t)^2/(r(t)^2 + 4\mu^2)$ and $\|p(t)\|_{r(t)} = 1$, which gives

$$p_r(t)^2 = 1 - \frac{p_\theta^2}{r(t)^2} = \frac{(r(t)^2 - 4\mu^2)^2}{(r(t)^2 + 4\mu^2)^2}.$$

In the case $0 < r_0 < 2\mu$, the parameter $\alpha \in \Psi(r_0,\mu)$ is given by α_2^* and thus $p_r(t) > 0$ for any time t (see Section 6.3.2). In this case, the dynamics of the separating geodesics reduces to the 2-dimensional differential equations :

$$\dot r = \frac{p_r}{\|p\|_r} = p_r = \frac{4\mu^2 - r^2}{4\mu^2 + r^2}, \quad \dot\theta = \frac{1}{r^2}\left(\mu + \frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right) = \frac{1}{r^2}\,(\mu + p_\theta) = \frac{\mu}{r^2}\left(\frac{4\mu^2 - 3r^2}{4\mu^2 + r^2}\right). \tag{6.24}$$

Writing

$$\mathrm{d}t = \frac{4\mu^2 + r^2}{4\mu^2 - r^2}\,\mathrm{d}r,$$

then by integration we have

$$t(r) = 4\mu\,\mathrm{atanh}\left(\frac{r}{2\mu}\right) - r + c = 2\mu\ln\left(\frac{2\mu + r}{2\mu - r}\right) - r + c = \ln\left(\left(\frac{2\mu + r}{2\mu - r}\right)^{2\mu} e^{-r} K\right),$$

with a constant $c \coloneqq \ln K$. Introducing $2\mu\rho^2 \coloneqq r$, $\rho \in [0\,,1]$, then one can define the function

$$f(\rho,\theta) \coloneqq \varphi(\rho^2) \coloneqq \left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)^{2\mu} e^{2\mu\rho^2}$$

which satisfies the conditions (1)-(2)-(3) to construct a 3-dimensional compact Reeb component from $F(\rho,\theta,t) \coloneqq f(\rho,\theta)\,e^t$.

2-dimensional compact Reeb component

In the Vortex application, one can find a foliation in the 2-dimensional state space given by the separating geodesics. To present this foliation, we need to introduce a generalized 2-dimensional Reeb component following the presentation of [59]. We thus first recall what is a 2-dimensional Reeb component and then we introduce the generalization. Let $f\colon [-1\,,1] \to \mathbb{R}$ be a smooth mapping such that the following conditions are satisfied :

4. f is of the form : $f(x) =: \varphi(x^2)$,
5. $f(\{-1,1\}) = \{0\}$ and $f(]-1\,,1[) > 0$,
6. f has no critical points on $\{-1,1\}$.

Let consider the smooth mapping $F\colon [-1\,,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $F(x,t) \coloneqq f(x)\, e^t$, where $x \in [-1\,,1]$ and $t \in \mathbb{R}$. F is a submersion from $[-1\,,1]\times\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ and defines a foliation of $[-1\,,1]\times\mathbb{R}$ whose leaves are the level sets of F : $F^{-1}(a)$, $a \geq 0$. This foliation is called the 2-*dimensional non compact Reeb component* and it is denoted by $\mathcal{R}^2$ in [59]. Since $F(x,t+1) = e\, F(x,t)$, then, $\mathcal{R}^2$ defines a foliation on the annulus $[-1\,,1] \times \mathrm{S}^1 = [-1\,,1] \times \mathbb{R}\,/\,(x,t) \sim (x,t+1)$. This foliation being called the 2-*dimensional compact Reeb component* and denoted $\mathcal{R}^2_c$. This foliation admits two compact leaves : the two boundaries of the annulus, diffeomorphic to S^1. All the others leaves are diffeomorphic to $\mathbb{R}$ and each of their two extremities wind up around one of the two compact leaves. These non compact leaves are also given by the quotient of the graphs of functions of the form : $x \in]-1\,,1[\mapsto -\ln(\varphi(x^2)) + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Remark 14. *A simple example which is detailed in [59] is given by the function $f(x) = 1 - x^2$. The maximum of this function is given by solving $f'(x) = 2x = 0$, that is for $x = 0$. Note that it is possible to construct a Reeb component on the annulus with a function F which is a submersion only on $]-1\,,1[\times \mathbb{R}$ considering for instance $f(x) = \exp(-\exp(1/(1-x^2)))$.*

Remark 15. *Note that we can construct a 3-dimensional Reeb component from the 2-dimensional Reeb component if f satisfies the condition (4)-(5)-(6). See [59] for details.*

Let us slightly generalize the construction of a Reeb component on the annulus. To do so, we consider a function $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ smooth on $]a\,,b[$, $a < b$ in $\mathbb{R}$, and such that :

7. $f(\{a,b\}) = \{0\}$, $f(]a\,,b[) > 0$.

Then, $F(x,t) \coloneqq f(x)\, e^t$ is a submersion from $]a\,,b[\times \mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ and defines a foliation on $[a\,,b] \times \mathbb{R}$ which is called the *generalized* 2-*dimensional non compact Reeb component* and denoted $\mathcal{R}^{2,G}$. As in the two previous cases, $\mathcal{R}^{2,G}$ defines a foliation on the annulus $[a\,,b] \times \mathrm{S}^1$ which is called the *generalized* 2-*dimensional compact Reeb component* and denoted $\mathcal{R}^{2,G}_c$. This foliation, like $\mathcal{R}^2_c$, has two compact leaves diffeomorphic to S^1 and all the others leaves are diffeomorphic to $\mathbb{R}$ and given by the quotient of the graphs of functions of the form : $x \in]a\,,b[\mapsto -\ln(f(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Remark 16. *The most important difference with the classical case is that we do not impose that $f(x)$ is of the form $\varphi(x^2)$. Even in the case $a = -b$, if $f(x)$ is not of the form $\varphi(x^2)$, then we do not have necessarily $f(-x) = f(x)$ and if we do not have this symmetry, then it is not possible to construct a 3-dimensional Reeb component from a 2-dimensional one using the construction detailed in [59].*

Let us exhibit now a function f from the Vortex application that satisfies the condition (7). We fix $\mu > 0$. Coming back to eq. (6.24), one can write

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mu}{r^2}\left(\frac{4\mu^2 - 3r^2}{4\mu^2 - r^2}\right)\mathrm{d}r.$$

Integrating we have :

$$\theta(r) = \operatorname{atanh}\left(\frac{r}{2\mu}\right) + \frac{\mu}{r} + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mu + r}{2\mu - r}\right) + \frac{\mu}{r} + c = \ln\left(\left(\frac{2\mu + r}{2\mu - r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu}{r}} K\right),$$

with a constant $c \coloneqq \ln K$. Introducing for $r \in [0\,,2\mu]$:

$$f(r) \coloneqq \left(\frac{2\mu - r}{2\mu + r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu}{r}}, \tag{6.25}$$

with $f(0) = 0$, then the separating geodesics inside the punctured disk of radius 2μ are exactly given by the level sets of the function $F(r,\theta) \coloneqq f(r)\, e^{\theta}$. Besides, the function f satisfies the condition (7) and thus, it defines a generalized 2-dimensional compact Reeb component on the annulus $[0\,,2\mu] \times \mathrm{S}^1$, see Figure 6.12.

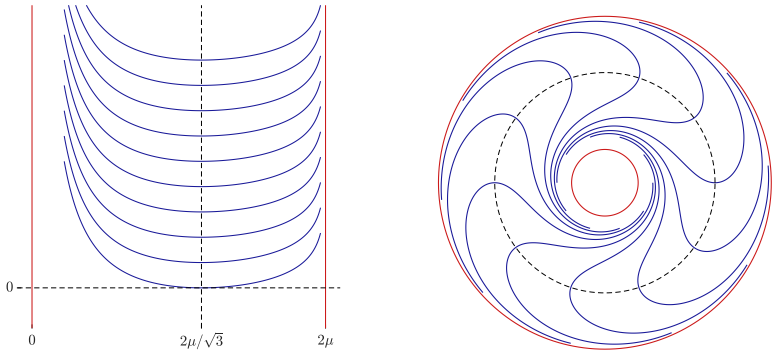


FIGURE 6.12 – (Left) Graphs of $r \in]0\,,2\mu[\mapsto -\ln(f(r)) + c$, $c \in \mathbb{R}$, with f defined by eq. (6.25). The minimum is attained at $r = 2\mu/\sqrt{3}$ where $f'(r) = 0$. (Right) Generalized 2-dimensional compact Reeb component of the annulus given by the function $F(r,\theta) = f(r)\, e^{\theta}$. The intermediate dashed circle of radius $2\mu/\sqrt{3}$ is orthogonal to all the non compact leaves in blue. The two compact leaves are the two red circles.

The separating geodesics inside the punctured disk of radius 2μ correspond to the non compact leaves of the foliation while the unique circle geodesic, that is the separating geodesic with $r_0 = 2\mu$, corresponds to one of the two compact leaves. The vortex corresponds to the second compact leaf. Figure 6.13 shows the foliation on the punctured disk of radius 2μ in the (x_1, x_2)-plane of the Vortex application.

Definition 6.3.5. *In the Vortex application, the circle of radius* $2|\mu|$ *(assuming* $\mu \neq 0$*) is called the* Reeb circle.

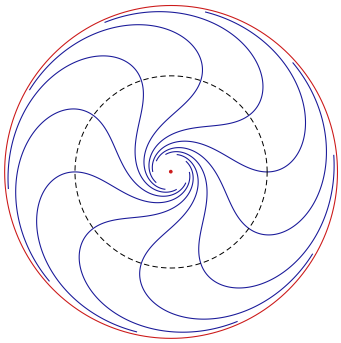


FIGURE 6.13 – Separating geodesics in the punctured disk of radius 2μ in the (x_1, x_2)-plane. The vortex is placed at the origin and represented by a red dot. The red circle is the Reeb circle of radius 2μ while the black and dashed circle is the circle of radius $2\mu/\sqrt{3}$ where $\dot{\theta} = 0$ along the separating geodesics.

6.3.4 Symmetries of the extremal curves

There exists three continuous symmetries and one discrete symmetry of main interest. The first continuous symmetry was considered at the beginning of the paper when we have fixed $u_{\max} = 1$. The second symmetry is the rotational symmetry that was mentioned at the end of Section 6.2.2. As a consequence of this symmetry of revolution, one can easily prove that :

$$\forall \Delta\theta \in \mathbb{R} \ : \ V(r_0, \theta_0, r_f, \theta_f, \mu) = V(r_0, \theta_0 + \Delta\theta, r_f, \theta_f + \Delta\theta, \mu),$$

where V is the value function (6.7) expressed in polar coordinates. Hence, one can fix for instance $\theta_0 = 0$ and reduce the set of variables of the value function. Note that the Reeb circle is the unique geodesic invariant by the rotational symmetry. The third continuous symmetry comes from the invariance of the set of geodesics by homothety combined with time/circulation dilatation. Let us detail this third symmetry. We start by introducing the change of variables $(\tilde{r}, \tilde{\theta}) \coloneqq (\lambda r, \theta)$ for a given $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. The associated Mathieu transformation leads to

$$\tilde{p} \coloneqq (p_{\tilde{r}}, p_{\tilde{\theta}}) = \left(\frac{p_r}{\lambda}, p_\theta\right)$$

and the Hamiltonian system (6.15) in polar coordinates becomes

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{r}} &= \lambda \dot{r} = \frac{\lambda\, p_r}{\|p\|_r} = \frac{\lambda\, p_r}{\lambda \|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}} = \lambda \frac{p_{\tilde{r}}}{\|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}}, \\
\dot{\tilde{\theta}} &= \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}\left(\mu + \frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right) = \frac{\lambda^2}{\tilde{r}^2}\left(\mu + \frac{p_{\tilde{\theta}}}{\lambda\|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}}\right) = \frac{\lambda}{\tilde{r}^2}\left(\lambda\mu + \frac{p_{\tilde{\theta}}}{\|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}}\right)
\end{aligned}$$

for the state and

$$\dot{p}_{\tilde{r}} = \frac{\dot{p}_r}{\lambda} = \frac{p_\theta}{\lambda r^3}\left(2\mu + \frac{p_\theta}{\|p\|_r}\right) = \frac{\lambda^2 p_{\tilde{\theta}}}{\tilde{r}^3}\left(2\mu + \frac{p_{\tilde{\theta}}}{\lambda\|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}}\right) = \frac{\lambda p_{\tilde{\theta}}}{\tilde{r}^3}\left(2\lambda\mu + \frac{p_{\tilde{\theta}}}{\|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}}\right), \quad \dot{p}_{\tilde{\theta}} = 0,$$

for the covector, since

$$\|\tilde{p}\|_{\tilde{r}}^2 = \left\|\left(\frac{p_r}{\lambda}, p_\theta\right)\right\|_{\tilde{r}}^2 = \frac{p_r^2}{\lambda^2} + \frac{p_\theta^2}{\lambda^2 r^2} = \frac{1}{\lambda^2}\|p\|_r^2.$$

Introducing now $\bar{\mu} \coloneqq \lambda\mu$, the time reparameterization $t = \psi(\tau) =: \tau/\lambda$, and the notation $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{p}_r, \bar{p}_\theta)(\tau) \coloneqq (\tilde{r}, \tilde{\theta}, p_{\tilde{r}}, p_{\tilde{\theta}})(\psi(\tau))$, then the system in the time τ writes

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{r}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{r}(\psi(\tau)) = \dot{\tilde{r}}(\psi(\tau))\psi'(\tau) = \frac{\dot{\tilde{r}}(t)}{\lambda} = \frac{\bar{p}_r(\tau)}{\|\bar{p}(\tau)\|_{\bar{r}(\tau)}}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{\theta} &= \frac{1}{\bar{r}^2}\left(\bar{\mu} + \frac{\bar{p}_\theta}{\|\bar{p}\|_{\bar{r}}}\right), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{p}_r &= \frac{\bar{p}_\theta}{\bar{r}^3}\left(2\bar{\mu} + \frac{\bar{p}_\theta}{\|\bar{p}\|_{\bar{r}}}\right), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{p}_\theta &= 0,
\end{aligned}$$

which is equivalent to the original system (6.15). As a conclusion, the set of solutions of the problem (P) is invariant by the dilatation $(r(\cdot), \theta(\cdot), t, \mu) \mapsto \sigma_\lambda(r(\cdot), \theta(\cdot), t, \mu) \coloneqq (\lambda r(\cdot), \theta(\cdot), \lambda t, \lambda\mu)$, for any $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, and we have

$$\frac{1}{\lambda} V(\lambda r_0, \theta_0, \lambda r_f, \theta_f, \lambda\mu) = V(r_0, \theta_0, r_f, \theta_f, \mu).$$

It is thus possible to fix for instance r_0 and again to reduce the set of variables of the value function.

Remark 17. *Setting $\lambda \coloneqq 1/r_0$ and considering also the invariance by rotation, we can write :*

$$V(r_0, \theta_0, r_f, \theta_f, \mu) = r_0 V(1, 0, \Delta r, \Delta\theta, \frac{\mu}{r_0}),$$

with $\Delta r \coloneqq r_f/r_0$ and $\Delta\theta \coloneqq \theta_f - \theta_0$. This shows that the value function depends in fact only on the three variables Δr, $\Delta\theta$ and μ/r_0.

We end this section presenting the discrete symmetry on the set of extremals. Let $(r(\cdot), \theta(\cdot), p_r(\cdot), p_\theta)$ be a reference extremal on $[0\,, T]$ and introduce $\theta_0 \coloneqq \theta(0)$. Let consider the following discrete symmetry : $\tilde{z}(\cdot) \coloneqq (\tilde{r}(\cdot), \tilde{\theta}(\cdot), p_{\tilde{r}}(\cdot), p_{\tilde{\theta}}) \coloneqq (r(\cdot), 2\theta_0 - \theta(\cdot), -p_r(\cdot), p_\theta)$. Then, $\tilde{z}(\cdot)$ is solution of

$$\dot{z} = -\vec{\mathbf{H}}(z), \quad z(0) = (r(0), \theta_0, -p_r(0), p_\theta).$$

This means that $\tilde{z}(\cdot)$ is obtained by backward integration from the same initial condition in the state space than $z(\cdot)$ but with the initial covector $(-p_r(0), p_\theta)$. Let us extend the reference extremal to obtain a maximal solution of $\dot{z} = \vec{\mathbf{H}}(z)$, $z(0) = (r(0), \theta_0, p_r(0), p_\theta)$. In this case, its orbit in the state space is given by $\gamma \coloneqq \mathrm{Im}(r(\cdot), \theta(\cdot))$ and $\tilde{z}$ is also a maximal solution of its associated differential equation, and we denote by $\tilde{\gamma} \coloneqq \mathrm{Im}(\tilde{r}(\cdot), \tilde{\theta}(\cdot))$ its orbit in the state space. Then, we have :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\theta_0 \end{pmatrix} = \tilde{\gamma},$$

that is $\tilde{\gamma}$ is obtained by an affine reflection of axis $\theta = \theta_0$. In cartesian coordinates, one has a linear reflection of axis $\mathbb{R}x_0$, see Figure 6.14.

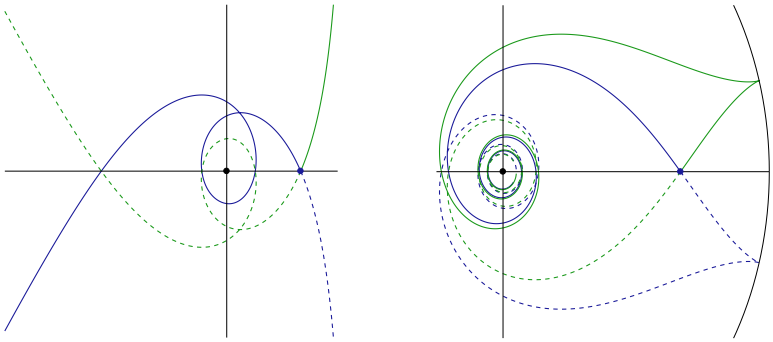


FIGURE 6.14 – **Geodesics in the state space in the (x_1, x_2)-plane.** The vortex is placed at the origin and represented by a black dot. The initial point, denoted x_0, is the black dot at an intersection of both geodesics. The geodesic in green is obtained by a reflection of axis $\mathbb{R}x_0$ from the blue geodesic and vice-versa. Assuming that the initial point is given at time $t = 0$, then the plain lines are obtained for times $t > 0$ while the dashed parts are for negative times. On the left subgraph is represented a normal geodesic with both extremities going to infinity while on the right subgraph is represented the two abnormals (in the case of a strong drift) with a cusp at $r = |\mu|$. Both extremities of the abnormal geodesics go the vortex.

6.3.5 Properties of the value function and its level sets in the weak case

Continuity of the value function and characterization of the cut points

Let us introduce the mapping $V_\mu(x_0, x_f) \coloneqq V(x_0, x_f, \mu)$, where V is the value function defined by (6.7). We are first interested in the continuity of $x_f \mapsto V_\mu(x_0, x_f)$ at points x_f where the drift is weak, that is for target x_f such that $\|x_f\| > |\mu|$. This situation is more general than the Finslerian case with Randers metric since the drift is not necessarily weak all along the geodesics. We have :

Proposition 6.3.6. *Let $\mu \neq 0$ be the vortex circulation and $x_0 \in M$ the initial condition. Then, $V_\mu(x_0, \cdot)$ is continuous at any point x_f such that $\|x_f\| > |\mu|$.*

Proof. Since we consider that the drift is weak at the target x_f then local controllability around x_f holds, that is we have the following :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall\, (x_1, x_2) \in \mathrm{B}(x_f, \eta_\varepsilon) \times \mathrm{B}(x_f, \eta_\varepsilon) : V_\mu(x_1, x_2) \leq \varepsilon. \tag{6.26}$$

Let us fix $\varepsilon > 0$ and consider $x \in \mathrm{B}(x_f, \eta_\varepsilon)$. By definition of the value function and by (6.26), we have

$$V_\mu(x_0, x) - V_\mu(x_0, x_f) \leq V_\mu(x_f, x) \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad V_\mu(x_0, x_f) - V_\mu(x_0, x) \leq V_\mu(x, x_f) \leq \varepsilon,$$

which prove the result. □

We are now interested in the construction of the optimal synthesis associated to problem (P) for given values of μ and x_0, that is we want to get for any $x_f \in M$ the value of $V_\mu(x_0, x_f)$ together with the optimal geodesic joining the points x_0 and x_f. To construct such an optimal synthesis, a classical approach is to compute the level sets of $V_\mu(x_0, \cdot)$, which corresponds in Riemmanian or Finslerian geometry to compute the spheres centered in x_0. To compute the spheres, one preliminary work is to compute the *cut locus*, that is the set of *cut points* where the geodesics cease to be optimal. Let us introduce some notations before characterizing the cut points. Following Section 6.2.5 and fixing $x_0 \in M$, we introduce the notation in polar coordinates $p_0(\alpha) \coloneqq (\cos\alpha, r_0 \sin\alpha)$, with $\alpha \in [0\,, 2\pi[$ and where $r_0 \coloneqq \|x_0\|$. Let $t \in \mathbb{R}_+$, we introduce the *wavefront* from x_0 at time t by

$$\mathbb{W}(x_0, t) \coloneqq \left\{ \exp_{x_0}(t, p_0(\alpha)) \;\middle|\; \alpha \in [0\,, 2\pi[\text{ s.t. } t < t_\alpha \right\},$$

where the exponential mapping is given by (6.13) and depends on the circulation μ supposed to be given, and where we recall that $t_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ is the maximal positive time such that the associated geodesic is defined over $[0\,, t_\alpha[$. Then, we define what corresponds to the balls and spheres in Riemannian or Finslerian geometry :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(x_0, t) &\coloneqq \{x \in M \mid V_\mu(x_0, x) < t\}, \\
\bar{\mathbb{B}}(x_0, t) &\coloneqq \{x \in M \mid V_\mu(x_0, x) \leq t\}, \\
\mathbb{S}(x_0, t) &\coloneqq \{x \in M \mid V_\mu(x_0, x) = t\}.
\end{aligned}$$

We use the terminology ball and sphere by analogy with Geometry. Note that the spheres $\mathbb{S}(x_0, \cdot)$ are the level sets of $V_\mu(x_0, \cdot)$. To construct the optimal synthesis, one of the main important loci to compute is the *cut locus*. We define first the *cut times* as :

$$t_{\mathrm{cut}}(x_0, \alpha) \coloneqq \sup \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; \exp_{x_0}(\cdot, p_0(\alpha)) \text{ is optimal over } [0\,, t] \right\}.$$

Then, the *cut locus* from x_0 is simply defined by :

$$\mathrm{Cut}(x_0) \coloneqq \left\{ x \in M \;\middle|\; \exists\, (t, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times [0\,, 2\pi[\text{ s.t. } x = \exp_{x_0}(t, p_0(\alpha)) \text{ and } t = t_{\mathrm{cut}}(x_0, \alpha) \right\}.$$

Any point of the cut locus is called a *cut point*. From the cut times, we define also the *injectivity radius* from x_0 as :

$$t_{\mathrm{inj}}(x_0) \coloneqq \inf_{\alpha \in [0, 2\pi[} t_{\mathrm{cut}}(x_0, \alpha).$$

Remark 18. *This time is of particular interest since if the drift is weak at the initial point x_0, then $\exp_{x_0}$ is a diffeomorphism from $]0\,, t_{\mathrm{inj}}(x_0)[\times \mathrm{S}^1$ to $\mathbb{B}(x_0, t_{\mathrm{inj}}(x_0)) \setminus \{x_0\}$. This is similar to the Riemannian and Finslerian cases and for times $0 \leq t \leq t_{\mathrm{inj}}(x_0)$, we have $\mathbb{S}(x_0, t) = \mathbb{W}(x_0, t)$.*

In Finslerian geometry [10] (as in Riemannian geometry [37, Proposition 2.2, Chapter 13]), the cut locus is a part of the union of the conjugate locus and the *splitting locus*, which is defined by :

$$\begin{aligned}\mathrm{Split}(x_0) \coloneqq \{x \in M \mid \exists (t,\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}_+^* \times [0\,,2\pi[^2 \\ \text{s.t. } \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ and } \exp_{x_0}(t,p_0(\alpha_1)) = \exp_{x_0}(t,p_0(\alpha_2)) = x\}.\end{aligned}$$

We have the following similar result :

Proposition 6.3.7. *Let $x(\cdot)$ be a geodesic. If $x_c \coloneqq x(t_c)$ is a cut point along $x(\cdot)$ such that $V_\mu(x_0,\cdot)$ is continuous at x_c, then :*

(a) either x_c is a conjugate point along $x(\cdot)$,

(b) or x_c is a splitting point along $x(\cdot)$.

Conversely if a) or b) holds, then there exists a time $0 \leq t_1 \leq t_c$ such that $x(t_1)$ is a cut point along $x(\cdot)$.

Remark 19. *The proposition above gives a characterization of the cut points where the mapping $V_\mu(x_0,\cdot)$ is continuous. In Riemannian and Finslerian geometry, the mapping $V_\mu(x_0,\cdot)$ is replaced by the distance function which is continuous with respect to its second argument and so all the cut points are either conjugate or splitting points. By Proposition 6.3.6, if the drift is weak at the cut points, then $V_\mu(x_0,\cdot)$ is continuous at this point and so the characterization holds. In the strong case, we can have abnormal minimizers and so we can have cut points which are neither conjugate nor splitting points. However, if the drift is weak at the initial point x_0, then there are no abnormals and we can expect that the mapping $V_\mu(x_0,\cdot)$ is continuous at any point, even where the drift is strong. This result would be useful to conclude in the following part since we are interested in the construction of the optimal synthesis for a given initial condition x_0 where the drift is weak. Note that the numerical experiments of the following section suggest that $V_\mu(x_0,\cdot)$ is continuous at any point of M.*

Level sets of the value function and optimal synthesis

In this section, we fix for the numerical experiments $x_0 \coloneqq (3,0)$ and $\mu \coloneqq 0.6\,\|x_0\|$. The drift is thus weak at the initial position x_0. We decompose the construction of the optimal synthesis in three steps. In the first step, we compute the splitting locus. In a second time we give the cut locus and we finish by the construction of the spheres and balls.

Step 1 : Computation of the splitting locus. Let us introduce the mapping

$$F_{\mathrm{split}}(t,\alpha_1,x,\alpha_2) \coloneqq (x - \exp_{x_0}(t,p_0(\alpha_1)), x - \exp_{x_0}(t,p_0(\alpha_2))) \in \mathbb{R}^4.$$

The splitting line is then given by solving $F_{\mathrm{split}} = 0$ since we have

$$\mathrm{Split}(x_0) = \{x \in M \mid \exists\,(t,\alpha_1,\alpha_2) \text{ s.t. } \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ and } F_{\mathrm{split}}(t,\alpha_1,x,\alpha_2) = 0\}\,.$$

Introducing $y \coloneqq (t,\alpha_1,x) \in \mathbb{R}^4$ and $\lambda \coloneqq \alpha_2 \in \mathbb{R}$, we have to solve $F_{\mathrm{split}}(y,\lambda) = 0 \in \mathbb{R}^4$. Numerically, we compute the splitting line with the differential path following method (or homotopy method) of the HamPath software. Under some regularity assumptions, the set $F_{\mathrm{split}}^{-1}(0)$ is a disjoint union of differential curves, each curve being called a *path of zeros*. To compute a path of zeros, we look for a first point on the curve by fixing the homotopic parameter λ to a certain value $\bar{\lambda}$ and calling a Newton method to solve $F_{\mathrm{split}}(\cdot,\bar{\lambda}) = 0$. Then, we use a Prediction-Correction (PC) method to compute the differential curve. The HamPath code implements a PC method with a high-order Runge-Kutta scheme with variable step-size for the prediction, hence the discretization grid of the homotopic parameter is computed by the numerical integrator. Besides, the Jacobian of F_{split} is computed by automatic differentiation combined with variational equations of the exponential mapping.

Remark 20. *If there exists several paths of zeros, then each path has to be found manually and compared.*

To compute a splitting curve (that is a path of zeros), we need to get a first point on the curve. This step is easy since the splitting points are self-intersections of the wavefronts. On the right subgraph of Figure 6.15, we can see that the wavefront [3] $\mathbb{W}(x_0, 3.5)$ has at least three self-intersections labelled 1, 2 and 3.

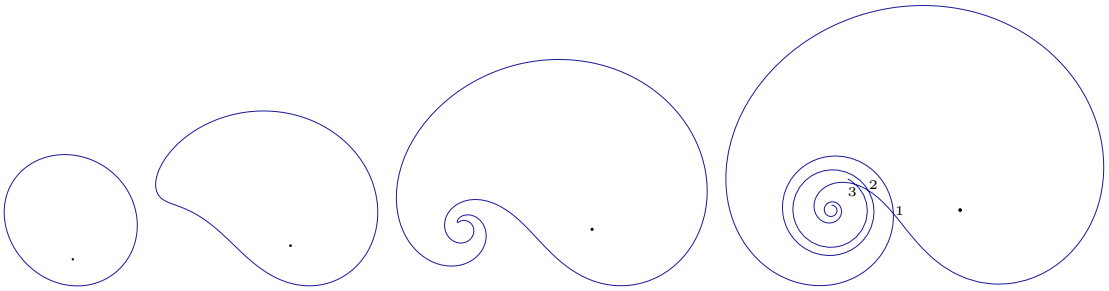


FIGURE 6.15 – Four wavefronts with different scaling at times $t \in \{0.5, 2, 2.8, 3.5\}$. The black dot is x_0. For $t = 3.5$, the wavefront has at least three self-intersections labelled 1, 2 and 3.

Each self-intersection of the wavefront $\mathbb{W}(x_0, 3.5)$ is a point of a splitting curve. We denote by Σ_1, Σ_2 and Σ_3 the three splitting curves associated respectively to the self-intersections 1, 2 and 3, and we have $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \subset \mathrm{Split}(x_0)$. On Figure 6.16 is represented the graph of the function $\alpha_2 \mapsto t(\alpha_2)$ along the three splitting curves for times $t \leq 3.2$, the homotopic parameter α_2 being strictly monotone along the splitting curves. Since Σ_1 is below Σ_2 and Σ_3 on the figure, [4] it is clear that only Σ_1 has a chance to be part of the cut locus, compared to Σ_2 and Σ_3. Note that there may exist others splitting curves but the numerical experiments suggest that Σ_1 is below any of them.

Remark 21. *Note that the extremities of a splitting curve are the vortex and infinity according to the numerical experiments. Hence, we cannot compute all the curve. Numerically, we use an option of the HamPath code to stop the homotopy if the curve goes out the annulus of smaller circle of radius* 0.005 *and of larger one of radius* 100.

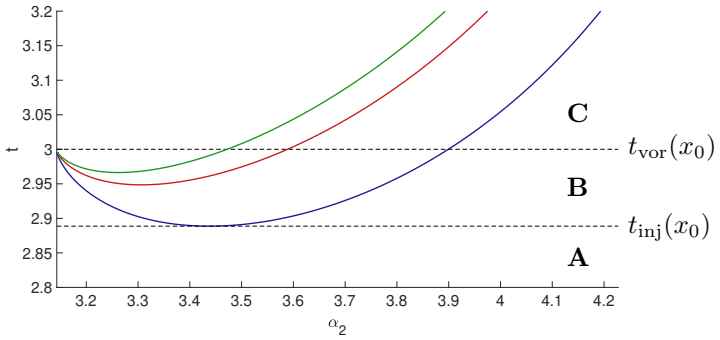


FIGURE 6.16 – Graph of the function $t(\alpha_2)$ along Σ_1 (blue), Σ_2 (red) and Σ_3 (green) for times $t \leq 3.2$. The balls are of three types : A, B and C. See the description detailed in the step 3.

Let us describe the evolution of the wavefronts according to Figure 6.16. For $t = 0$, the wavefront is reduced to the singleton $\{x_0\}$. For times $t \in]0, t_{\mathrm{inj}}(x_0)[$ with $t_{\mathrm{inj}}(x_0) = \inf t(\cdot)$

3. The wavefronts are computed by homotopy. We compute only rough approximations of the extremities of the wavefronts which are not closed curves, like $\mathbb{W}(x_0, 3.5)$. Hence, there may exists others self-intersections but which are not relevant for rest of the analysis.

4. We mean that the graph of $\alpha_2 \mapsto t(\alpha_2)$ associated to Σ_1 is below the ones associated to Σ_2 and Σ_3.

along Σ_1, the wavefronts have no self-intersections. For $t = t_{\text{inj}}(x_0)$, the wavefront has one self-intersection, while for $t \in]t_{\text{inj}}(x_0)\,, t_{\text{vor}}(x_0)[$, where $t_{\text{vor}}(x_0) \coloneqq \|x_0\|$ is the minimal time to reach the vortex, the wavefronts have two self-intersections contained in Σ_1, see Figure 6.17, and up to six self-intersections in $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. Finally, for times $t \geq t_{\text{vor}}(x_0)$, the wavefronts have one self-intersection in Σ_1 and three in $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, see the right subgraph of Figure 6.15.

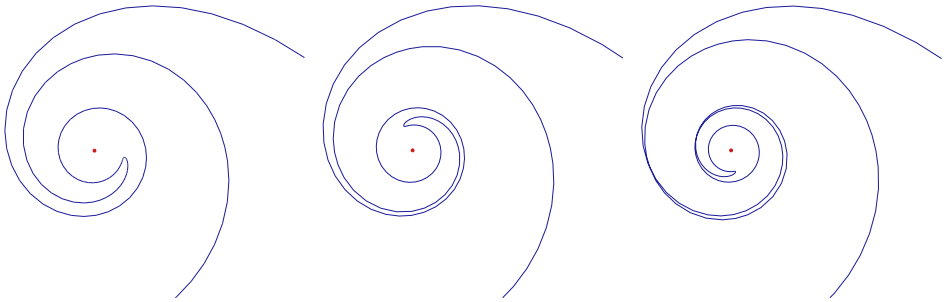


FIGURE 6.17 – Three wavefronts with the same scaling and a zoom around the vortex (red dot) for $t \in \{2.86, 2.88, 2.9\}$. For $t = 2.9 > t_{\text{inj}}(x_0) \approx 2.889$, the wavefront has two self-intersections.

Step 2 : Computation of the cut locus. According to Proposition 6.3.6, at a final point x_f where the drift is weak the mapping $V_\mu(x_0, \cdot)$ is continuous. In this case, from Proposition 6.3.7, if x_f is a cut point, then either it is a conjugate point or a splitting point. Since, there are no conjugate points from Conjecture 6.2.22, x_f is a splitting point. Finally, from step 1, we can conclude that if x_f is a cut point then it belongs to Σ_1. In this section, we consider moreover that the drift is weak at the initial condition x_0. In this case, we conjecture the following :

Conjecture 6.3.8. *If the drift is weak at x_0, then $V_\mu(x_0, \cdot)$ is continuous at any point of M.*

This conjecture means that the characterization of cut points from Proposition 6.3.7 holds in all the state space M. Hence, we have $\text{Cut}(x_0) \subset \Sigma_1$. Now, by the converse part of Proposition 6.3.7 and according to the previous conjecture, we can conclude that :

$$\text{Cut}(x_0) = \Sigma_1.$$

Step 3. Computations of the spheres and balls. Figure 6.18 represents four balls that we can group into three categories (see also Figure 6.16) :

— **Type A.** The ball is simply connected in $\mathbb{R}^2$ with a smooth boundary ;

— **Type B.** The ball is not simply connected in $\mathbb{R}^2$;

— **Type C.** The ball is simply connected in $\mathbb{R}^2$ with a singularity on its boundary.

For times $t \in [0\,, t_{\text{inj}}(x_0)]$, we have $\mathbb{W}(x_0, t) = \mathbb{S}(x_0, t)$ and the ball $\overline{\mathbb{B}}(x_0, t)$ is of type A. The two balls on the top of Figure 6.18 are of type A. For times $t \in]t_{\text{inj}}(x_0)\,, t_{\text{vor}}(x_0)[$, the balls have a hole around the vortex and so they are of type B. The ball at the bottom-left subgraph of Figure 6.18 is of type B. One can see on Figure 6.19, the evolution of the balls around the vortex for times close to $t_{\text{inj}}(x_0)$. The hole appears when the ball self-intersects, like a snake biting its tail. For times $t \geq t_{\text{vor}}(x_0)$, the balls are simply connected in $\mathbb{R}^2$ since the hole has vanished (the vortex is reached at $t = t_{\text{vor}}(x_0)$) and the spheres have a singularity at the cut point. In this case the balls have a shape of an apple and are of type C. The bottom-right subgraph of Figure 6.18 represents a ball of type C.

One can see on Figure 6.20 the evolution of the spheres $\mathbb{S}(x_0, t)$ at times $t \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5\}$ together with the cut locus Σ_1. One can notice that the singularity on $\mathbb{S}(x_0, 3.5)$ in contained in the cut locus. Putting all together, we have constructed the optimal synthesis which is given on Figure 6.21.

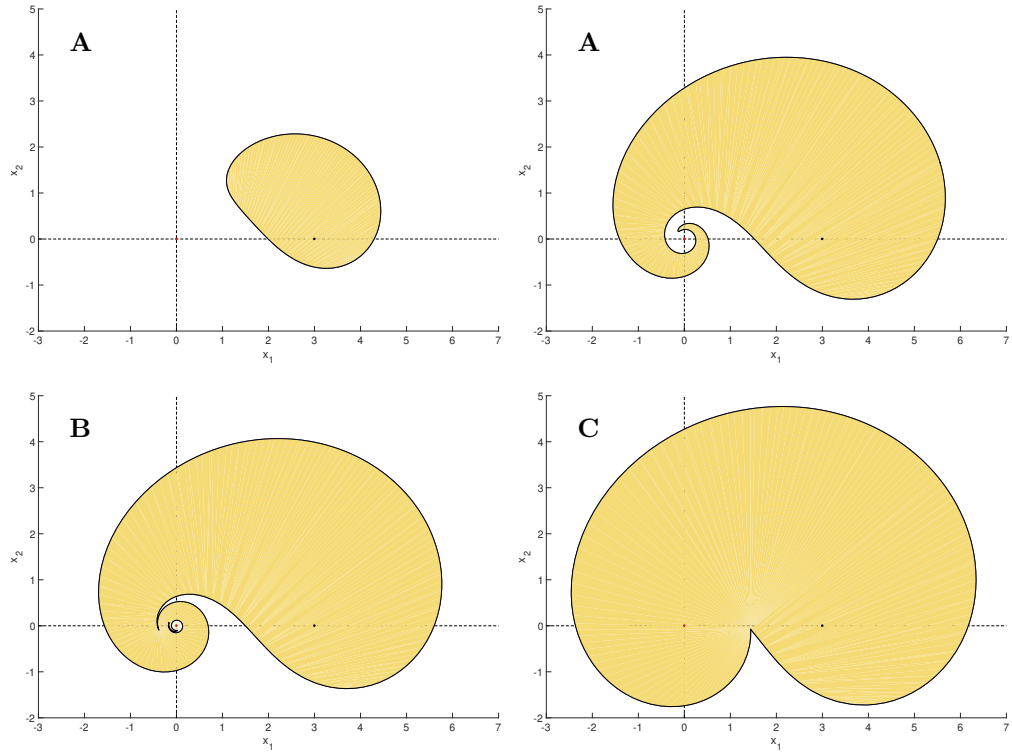


FIGURE 6.18 – Four balls in the (x_1, x_2)-plane at times $t \in \{1.5, 2.8, 2.9, 3.5\}$ with the initial condition x_0 represented by a black dot and the vortex by a red dot. The balls $\overline{\mathbb{B}}(x_0, 1.5)$ and $\overline{\mathbb{B}}(x_0, 2.8)$ on top are of type A. The ball $\overline{\mathbb{B}}(x_0, 2.9)$ (Bottom-Left) is of type B while $\overline{\mathbb{B}}(x_0, 3.5)$ (Bottom-Right) is of type C.

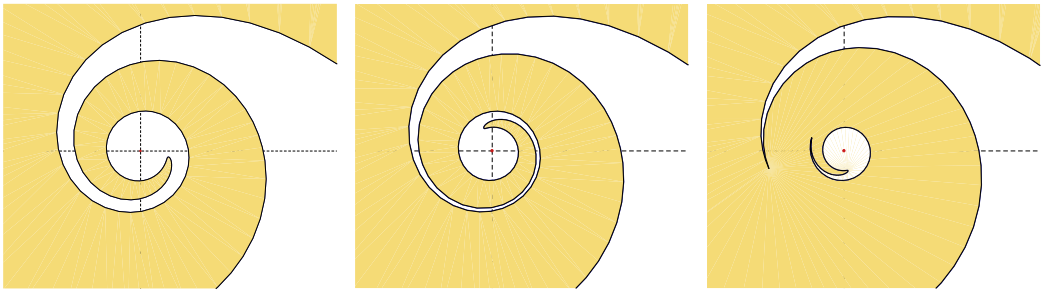


FIGURE 6.19 – Three balls with a zoom around the vortex (red dot) at times $t \in \{2.86, 2.88, 2.9\}$. Compare to Figure 6.17. For $t = 2.9$ the ball $\overline{\mathbb{B}}(x_0, t)$ is of type C and has a small hole with a fetus shape.

6.4 Conclusion

In this article, we have analyzed the Zermelo navigation problem with a vortex singularity. We have shown the existence of an optimal solution. Thanks to the integrability properties we made a micro-local classification of the extremal solutions, showing remarkably the existence of a Reeb foliation. The spheres and balls are described in the case where at the initial condition the current is weak. This gives us the optimal synthesis for any initial condition such that $\|x_0\| > |\mu|$.

Note that the current is not necessarily weak all along the geodesics and so the situation we have analyzed is more general than the Randers case from Finsler geometry. Still, this analysis has to be completed to the case of a strong current at the initial condition, in particular in

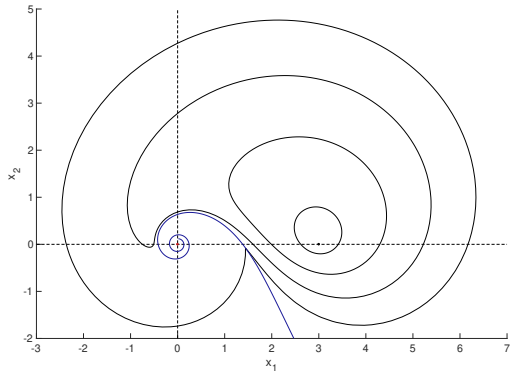


FIGURE 6.20 – Spheres $\mathbb{S}(x_0, t)$ at times $t \in \{0.5, 1.5, 2.5, 3.5\}$ in black together with the cut locus Σ_1 in blue. The cut locus should go to the vortex but to gain in clarity, it is represented up to a distance of 0.12 to the vortex. The vortex being represented by a red dot while the initial condition is represented by a black dot.

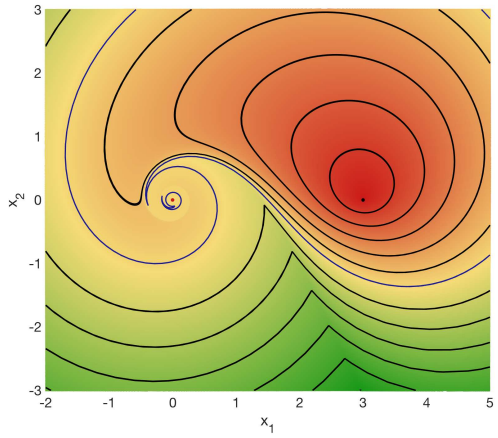


FIGURE 6.21 – Optimal synthesis. The black curves represent the spheres of types A and C. The two blue curves is a single sphere of type B. Since the balls of type B are not simply connected and have one hole, the corresponding spheres have two connected components.

relation with the abnormal extremals. Note that the historical work [36] is a case study of the strong current situation which can be applied to our study. A possible further extension concerns the case of several vortices by analogy with the N-body problem.

Finally in a forthcoming article, the 2D-Zermelo navigation problem will be generalized to the case of arbitrary current and metric, with the symmetry of revolution. It will cover the historical problem and the vortex case. The analysis will be based on tools from Hamiltonian dynamics from [12] and in particular the concept of Reeb graph.

Chapitre 7

Abnormal Geodesics in 2D-Zermelo Navigation Problems in the Case of Revolution and the Fan Shape of the Small Time Balls

B. Bonnard, O. Cots, J. Gergaud and B. Wembe, *Abnormal Geodesics in 2D-Zermelo Navigation Problems in the Case of Revolution and the Fan Shape of the Small Time Balls.* hal-02437507 (2020), in revision at System Control & Letters.

abstract In this article, based on two case studies, we discuss the role of abnormal geodesics in planar Zermelo navigation problems. Such curves are limit curves of the accessibility set, in the domain where the current is strong. The problem is set in the frame of geometric time optimal control, where the control is the heading angle of the ship and in this context, abnormal curves are shown to separate time minimal curves from time maximal curves and are both small time minimizing and maximizing. We describe the small time minimal balls. For bigger time, a cusp singularity can occur in the abnormal direction, which corresponds to a conjugate point along the nonsmooth image. It is interpreted in terms of regularity property of the time minimal value function.

Key words : Geometric optimal control, Zermelo navigation problems, Abnormal geodesics, Singularity of the value function in the abnormal direction.

Résumé. Dans cet article nous discutons, à partir de deux cas d'étude, du rôle des géodésiques anormales pour les problèmes de navigation de Zermelo dans le plan. De telles courbes sont des courbes limites de l'ensemble d'accessibilité, dans le domaine où le courant est fort. Le problème s'inscrit dans le cadre du contrôle optimal géométrique en temps minimal, où le contrôle est l'angle de cap du navire. Dans ce contexte, on montre que les courbes anormales séparent les courbes minimales en temps des courbes maximales en temps et qu'elles sont à la fois minimisantes et maximisantes en petit temps. Nous décrivons les boules minimales à petit temps. Pour un temps plus grand, on peut avoir des points cuspide dans la direction anormale, qui correspondent à des points conjugués le long d'une courbe non lisse. Ceci est interprété en termes de propriété de régularité de la fonction temps minimale.

Mots clés : Contrôle optimal géométrique, Problèmes de navigation de Zermelo, Géodésiques anormales, Singularité de la fonction valeur dans les directions anormales.

7.1 Introduction

A Zermelo navigation problem in the plane can be stated using [31] as a time minimal control problem described by the dynamics

$$\dot{q}(t) = F_0(q(t)) + \sum_{i=1}^{2} u_i(t) F_i(q(t)) \tag{7.1}$$

where $q = (x, y)$ are the coordinates, F_i being C^∞-vector fields and $u = (u_1, u_2)$ is the control, bounded by $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1$. The vector field F_0 is called the *current* (or drift) while the *control fields* F_1 and F_2 define a *Riemannian metric* g, taking $\{F_1, F_2\}$ as an orthonormal frame. If $\|u\| = 1$, one can set $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ and α is the *heading angle* of the ship.

This type of problems originated from a *historical example* in the frame of calculus of variations, due to Carathéodory and Zermelo and where a rather complete analysis was presented in Refs. [36, 110]. This historical example is one of the motivations of this article. In this example, the dynamics is described by

$$F_0(q) = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2,$$

where g is the *Euclidean metric*. Taking an arbitrary metric and considering the *weak current case* $\|F_0\|_g < 1$, with $\|\cdot\|_g$ the norm associated to the metric g, this problem leads to a Zermelo navigation problem in Finsler geometry [11].

More recently, in [22], a Zermelo navigation problem was analyzed in details, associated to the evolution of a *passive tracer*, where the current is related to a *vortex*, centered at the origin of the reference frame. This problem comes at the origin from hydrodynamics [7]. Moreover, it is a toy model for the N-body problem, in the frame of Hamiltonian dynamics [77]. In this case, the system evolves on the punctured plane $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, the current being given by

$$F_0(q) = \frac{k}{(x^2 + y^2)}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

where $k > 0$ is the *circulation parameter* and the control fields being given by $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. Using polar coordinates $q = (r, \theta)$ one has

$$F_0(q) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

and the Euclidean metric takes the form : $g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2$.

These two cases can be set in the same geometric frame by considering in a coordinate system $q = (r, \theta)$, a Zermelo navigation problem, where the current is in the form

$$F_0(q) = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{7.2}$$

and where the metric is given by

$$g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2, \quad m(r) > 0.$$

Such a metric was the object of many studies in the context of mechanics and Riemannian geometry and it is called a *metric of revolution* in *Darboux coordinates* (r, θ), where the lines $r = constant$ are the *parallels* and the lines $\theta = constant$ are the *meridians* [12]. Note that in (7.2), the current is along the parallels only, which is sufficient to cover the two founding examples. We refer to [57] for a case study in the differential geometric frame, in the case of a *weak current*, that is *Randers problems* in Finsler geometry [11], assuming $\|F_0\|_g < 1$. In this article, we focus on the case of a *strong current*, that is $\|F_0\|_g > 1$. It was already the case studied in details in the historical example. On the opposite, in the vortex problem [22], the analysis was

concentrated on the situation where at the initial point, the current is weak but the tracer can reach the vicinity of the vortex where the current is strong.

To present our contribution, we must introduce the following concepts from geometric optimal control. The set of admissible controls $\mathcal{U}$ is the set of measurable mappings u from $[0\,,+\infty[$ to the unit closed Euclidean ball : $\|u\| \leq 1$, endowed with the L^∞-norm topology. We denote by $q(\cdot, q_0, u)$ the response of the dynamics (7.1) associated to u, with $q(0) = q_0$. Let $t_f \geq 0$, the *accessibility set* from q_0 in time t_f is defined by $A(q_0, t_f) = \{q(t_f, q_0, u) \mid u \in \mathcal{U}\}$ (if $q(\cdot, q_0, u)$ is defined on the whole $[0\,, t_f]$) and this gives the *accessibility set* from q_0 defined by $A(q_0) = \cup_{t_f \geq 0} A(q_0, t_f)$. Thanks to existence theorems in optimal control, in many cases (and in particular in the two case studies), for each q_0, q_1 provided, (q_0, $q_1 \neq 0$ in the vortex case), there exists a time minimal solution to transfer q_0 to q_1, and from the *Maximum Principle* [90], candidates as minimizers are geodesic curves. If such a theorem holds, fixing q_0, the *time minimal value function* is given by :

$$T(q_1) = \inf \{t_f \mid q(t_f, q_0, u) = q_1 \ \text{ and } \ u \in \mathcal{U}\}$$

and the *sphere* $\mathbf{S}(q_0, r)$ of radius r is the set of points q_1 which can be reached from q_0 in minimum time r, while the *ball* of radius r is the set $\mathbf{B}(q_0, r) = \bigcup_{r' \leq r} S(q_0, r')$.

The aim of this article is double. First of all, and based on [25] we provide the geometric frame from optimal control theory to analyze such Zermelo navigation problems and we make a focus on the role of abnormal geodesics (the limit curves in Carathéodory terminology) in such problems. One ingredient is to introduce the *Carathéodory-Zermelo-Goh transformation* which amounts to parameterize the geodesics using as accessory control the derivative of the heading angle. This allows to evaluate the accessibility set and its boundary filled by the geodesics, in the abnormal directions, as the image of the extremity mapping, using *semi-normal forms*. In particular the *tangent model* can be easily described. The second step is to extend this analysis to larger times as shown by the two case studies. A singularity can occur along the abnormal geodesic corresponding to a *cusp point* and associated to a concept of *conjugate point* along nonsmooth image of the abnormal geodesic, extending the concept of conjugate point in the smooth case, introduced in [25]. This leads to describe the regularity of the time minimal value function (from generic point of view) in both normal and abnormal cases. See [34, 35] for the relation with singularities of semi-concave functions.

The organization of this article is as follows. In section 7.2, we introduce the geometric frame from optimal control to analyze in a general case the time minimal solutions, in the context of Hamiltonian dynamics, using the Maximum Principle [90]. This provides the parameterization of both *time minimal and time maximal* solutions, which is crucial to understand the role of abnormal geodesics. We introduce the Carathéodory-Zermelo-Goh transformation which amounts to extend our dynamics to a *single-input affine system*, and therefore to use the results from [25], in particular to construct the *tangent model* in order to clarify the role of abnormal geodesics. This from a geometric point of view, in relation with *Lie algebraic computations*. This allows to evaluate the extremity mapping in the abnormal directions, image of the exponential mapping, and its boundary using the concept of Jacobi field. In section 7.3, using the symmetry of revolution, the geodesics curves can be parameterized, thanks to integrability properties. This is the tool to compute the sphere and ball of general radius and to describe the time minimal value function. In particular, this allows to analyze in a more general context two important features observed in the historical example : the *existence of a cusp singularity for abnormal geodesics* (related to a phenomenon of self-intersections of neighboring geodesics) and the *non-continuity of the value function*. This property is shown to appear when the abnormal geodesics meet the boundary between the two domains defined by $\|F_0(q)\|_g = 1$. This causes a morphogenis of the accessibilty set [101]. In the conclusion we present a program of further studies related to this note. First, *models of singularities* of the value function are described, and this can be used in a more general context, since integrability is not a crucial issue in our study. Second, Zermelo navigation problems with symmetry of revolution are an important geometric object of study, in the frame of *integrable* Hamiltonian dynamics, in relation to mathematical physics.

7.2 Maximum Principle and evaluation of the accessibility set in the regular geodesic case

7.2.1 Maximum Principle

Consider the Zermelo navigation problem whose dynamics is described by (7.1). To formulate the Maximum Principle [90], we introduce the *pseudo-Hamiltonian* associated to the cost (extended) system :

$$H(z,u) = H_0(z) + u_1 H_1(z) + u_2 H_2(z) + p^0$$

where $z = (q,p)$, $p = (p_x, p_y)$ being the *adjoint vector*, $H_i(z) = p \cdot F_i(q)$ being, for $i = 0,1,2$, the Hamiltonian lift of the vector field F_i ($\cdot$ denotes the standard inner product) and p^0 is a constant. The *maximized* (or true) *Hamiltonian* is given by the maximization condition

$$\mathbf{H}(z) = \max_{\|u\| \leq 1} H(z,u),$$

and since F_1, F_2 form a frame, we have

Proposition 7.2.1. *1. The maximizing controls are given by*

$$u_i(z) = \frac{H_i}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}, \quad i = 1,2. \tag{7.3}$$

2. The maximized Hamiltonian is $\mathbf{H}(z) = H_0(z) + \sqrt{H_1^2 + H_2^2} + p^0 = 0$.

3. Candidates as time minimizers (resp. maximizers) are solutions of :

$$\dot{z}(t) = \vec{\mathbf{H}}(z(t)), \quad \textit{with} \quad \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}, \tag{7.4}$$

and $p^0 \leq 0$ (resp ≥ 0) in the time minimal (resp. maximal) case.

Definition 7.2.2. *An* extremal *is a solution $z(\cdot) = (q(\cdot), p(\cdot))$ of (7.4) and a projection of an extremal is called a* geodesic. *It is called* strict *if p is unique up to a factor,* normal *if $p^0 \neq 0$ and abnormal (or exceptional) if $p^0 = 0$. In the normal case it is called* hyperbolic *(resp.* elliptic*) if $p^0 < 0$ (resp. $p^0 > 0$).*

Next we relate geodesic curves to singularities of the extremity mapping, which is an important issue in our analysis, see [18, Chapter 3] for a general context and details.

Definition 7.2.3. *Restrict the control domain to the set $\|u\| = 1$. Let $q(\cdot, q_0, u)$ be the response of u, with $q(0) = q_0$. Fixing q_0, the* extremity mapping *is the map : $E^{q_0,\cdot} : u \mapsto q(\cdot, q_0, u)$ and the* fixed time extremity mapping *(at time T) is the map : $E^{q_0,T} : u \mapsto q(T, q_0, u)$.*

Proposition 7.2.4. *Take a reference extremal $z(\cdot) = (q(\cdot), p(\cdot))$ on $[0,T]$, where the corresponding control is given by (7.3). If we endow the set of controls (valued in $\|u\| = 1$) with the L^∞-norm topology we have :*

1. *In the normal case, u is a singularity of the fixed time extremity mapping, that is the image of the Fréchet derivative is not of maximal rank.*
2. *In the abnormal case, u is a singularity of the extremity mapping.*

Definition 7.2.5. *Let $t \mapsto q(t)$ be a response of (7.1). It is called* regular *if it is a one-to-one immersion. From the Maximum Principle, the geodesics are parameterized by the initial heading angle α_0 and fixing $q(0) = q_0$, the* exponential mapping *is* $\exp_{q_0,t} : \alpha_0 \mapsto \Pi(\exp(t\vec{\mathbf{H}})(q_0, \alpha_0))$ *where $\Pi : (q,p) \mapsto q$ is the q-projection. Take a strict normal geodesic $q(\cdot)$, a* conjugate point *along $q(\cdot)$ is a point where the exponential mapping is not an immersion and taking all such geodesics, the set of* first *conjugate points forms the* conjugate locus $C(q_0)$. *The* cut point *along a given geodesic is the point where the geodesic loses optimality and they form the* cut locus $\Sigma(q_0)$. *The* separating line $L(q_0)$ *is the set of points where two minimizing geodesics starting from q_0 are intersecting.*

7.2.2 Carathéodory-Zermelo-Goh transformation and accessibility set

In the historical example [36], Carathéodory integrated the dynamics of the heading angle α to parameterize the geodesics. This corresponds to the Goh transformation in optimal control and this will be crucial in our study to set Zermelo navigation problems in the Lie algebraic frame. The introduction of the so-called Goh extension in optimal control leads to set the problem in the context of geometric optimal control and permits to use intrinsic computations with Lie brackets, applying the results from [25], and this is the first contribution of the paper.

Definition 7.2.6. *Consider the control system* (7.1)*, with* $q = (x, y)$ *and* $\|u\| = 1$*. One can set* $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$*,* α *being the heading angle of the ship. Denote* $\tilde{q} = (q, \alpha)$*,* $X(\tilde{q}) = F_0(q) + \cos\alpha\, F_1(q) + \sin\alpha\, F_2(q)$ *and* $Y(\tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial\alpha}$*. This leads to prolongate* (7.1) *into the* single-input affine system *:*

$$\dot{\tilde{q}} = X(\tilde{q}) + v\, Y(\tilde{q}) \tag{7.5}$$

and the derivative of the heading angle $v = \dot{\alpha}$ *is the* accessory control*.*

We refer to [25] for a presentation of such a transformation in a general context. In this prolongation, the extremal curves $z = (q, p)$ extend to *singular extremal curves* associated to (7.5) with coordinates $\tilde{z} = (\tilde{q}, \tilde{p}) = (q, \alpha, p, p_\alpha)$. This leads to define the extended Hamiltonian :

$$\tilde{H}(\tilde{z}, v) = \tilde{p} \cdot (X(\tilde{q}) + v\, Y(\tilde{q})) + p^0.$$

From [18, Chapter 6], using the Maximum Principle we obtain the following parameterization of the geodesic curves. Let γ be a reference geodesic for the extended system defined on $[0, T]$. We assume the following :

(A0) The q-projection of γ is regular.

Computing the Lie bracket with the convention $[X, Y](\tilde{q}) = \frac{\partial X}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q})Y(\tilde{q}) - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q})X(\tilde{q})$, then forward computations give that under assumption (A0) the following holds along γ.

(A1) X, Y are linearly independent.

(A2) Y, $[X, Y]$ are linearly independent and the reference geodesic is strict.

(A3) The strict generalized Legendre-Clebsch condition ($\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial v} \neq 0$) is satisfied and so we have : $[[Y, X], Y] \notin \mathrm{Span}\{Y, [Y, X]\}$.

Remark 22. *In a Zermelo navigation problem, the collinearity set of* X *and* Y *is :* $\|F_0(q)\|_g = 1$*.*

Hence from [18, Chapter 6], the control v associated to γ can be computed as the feedback

$$v(\tilde{q}) = -\frac{D'(\tilde{q})}{D(\tilde{q})},$$

where we denote

$$D = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y]) \quad \text{and} \quad D' = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X]).$$

Moreover, introducing $D'' = \det(Y, [Y, X], X)$, we have the following.

Proposition 7.2.7. *The hyperbolic geodesics are contained in* $DD'' > 0$*, the elliptic geodesics are contained in* $DD'' < 0$ *and the abnormal (or exceptional) geodesics are located in* $D'' = 0$*.*

The important application is to use the fine computations of [25], [18, Chapter 6] to evaluate in our problem the extremity mapping in the neighborhood of a reference geodesic curve γ, using *semi-normal forms*, for the action of the feedback group. This gives evaluation of the accessibility sets and *their boundaries*, filled by geodesic curves. For the details we refer to the previous references in a more general dimensional setting.

Semi-normal forms

We proceed as follows. For a reference geodesic curve $t \mapsto \gamma(t)$ on $[0, T]$, under the action of the *feedback group*, one can identify γ to $t \mapsto (t, 0, 0)$ and it can be taken as the response of $v \equiv 0$. Normalization are then obtained in the jet spaces of (X,Y), in the neighborhood of γ. This is convenient to distinguish normal and abnormal cases.

Normal case We can choose coordinates $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3)$ such that :

$$X = \left(1 + \sum_{i,j=2}^{3} a_{i,j}(q_1) q_i q_j\right) \frac{\partial}{\partial q_1} + q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} + \varepsilon_1, \quad Y = \frac{\partial}{\partial q_3}, \tag{7.6}$$

with $a_{33} < 0$ (resp. $a_{33} > 0$) in the hyperbolic (resp. elliptic) case.

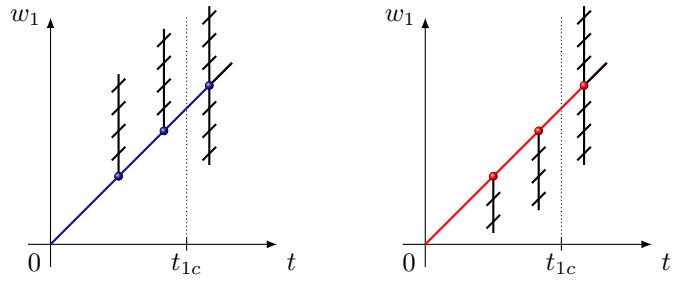
Abnormal case We can choose coordinates $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3)$ such that :

$$X = (1 + q_2) \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2} a(q_1) q_2^2 \frac{\partial}{\partial q_3} + \varepsilon_2, \quad Y = \frac{\partial}{\partial q_2}. \tag{7.7}$$

Again, see [25] for details of the computations and the descriptions of ε_1, ε_2. Taking $\varepsilon_i = 0$ and $q_1 = t$ in (7.6) and (7.7), one can evaluate the accessibility set and its boundary and compute conjugate points (in the regular case) to deduce the optimality status of the reference geodesic.

Optimality status : normal case

Using the normalization in (7.6) one sets : $q_1(t) = t + w_1(t)$ and projection of the accessibility set in w_1-direction is represented on Fig. 7.1. Note that hyperbolic and elliptic geodesics amount respectively to minimize and maximize the w_1-coordinate. If $t > t_{1c}$ (first conjugate time) the fixed extremity mapping becomes open.



elliptic case hyperbolic case

FIGURE 7.1 – Projection of the fixed time accessibility set on the w_1-coordinate.

Proposition 7.2.8. *Under the assumptions, in the hyperbolic (resp. elliptic) case, the reference geodesic γ is time minimizing (resp. maximizing) with respect to all trajectories of the system, contained in a conic neighborhood of the reference curve, if the final time is stricly less than the first conjugate time t_{1c}.*

Optimality status : abnormal case

In this case, one must estimate the *time evolution* of the accessibility set and its boundary. It is represented on Fig. 7.2. The reference geodesic is $\gamma \colon t \mapsto (t, 0, 0)$ and is associated to $v \equiv 0$. We fix t along the reference curve and let a time t_f in a neighborhood of t. Using the model, we compute geodesics such that :

$$q_1(t_f) = t, \quad q_2(t_f) = 0,$$

and the associated cost is given by $q_3(t_f) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} a(q_1)q_2^2 \, \mathrm{d}t$. Note that if we restrict to geodesics, this amounts to use the Jacobi (variational) equation, along the reference geodesic. One has :

$$q_3(t_f) = \alpha(t - t_f)^2 + o(t - t_f)^3, \tag{7.8}$$

α being a positive invariant, given by the Jacobi equation.

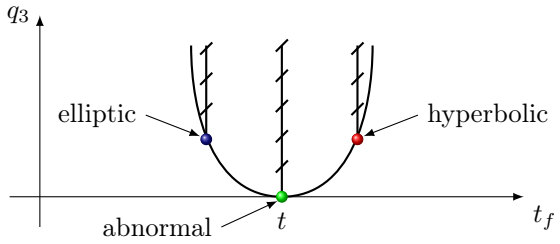


FIGURE 7.2 – Projection of the accessibility sets on the q_3-coordinate in the abnormal case.

Note that the model (7.7) shows clearly that the abnormal curve is a limit curve, as observed by Carathéodory. In the n-dimensional case, conjugate points along the abnormal curve can be computed and correspond to points where the extremity mapping becomes open. But clearly from (7.8) this cannot occur in the 3d-case. In particular one has :

Proposition 7.2.9. *Under our assumptions, in the abnormal (exceptional) case the reference geodesic is time minimizing and time maximizing, with respect to all trajectories contained in a conic neighborhood of the reference curve.*

7.2.3 Small time balls and spheres in the strong current case

One consequence of our previous analysis is to recover the fan shape of the small time balls in the strong current case, described in the historical example. This is the second contribution of this article and we proceed as follows.

The tangent model

For the illustration, we consider that $\|F_0(q_0)\|_g > 1$ with $F_0(q_0)$ taken horizontal and pointing in the right direction and the metric g given by $F_1(q_0) = \frac{\partial}{\partial x}$, $F_2(q_0) = \frac{\partial}{\partial y}$ with $q = (x, y)$. The ball of directions at q_0 is defined by :

$$F(q_0) = \{F_0(q_0) + u \mid \|u\| \leq 1\}.$$

It is represented on Fig. 3 and its boundary is a translation of the unit circle. The two abnormal directions are associated to the heading angles denoted $\{-\alpha^a, \alpha^a\}$ and correspond to the *tangents* of the translated unit circle from q_0. These heading angles split the translated unit circle in two, the right part corresponds to hyperbolic directions and the left part to elliptic directions.

Small spheres and balls

Using Section 7.2.2, one gets the following.

Proposition 7.2.10. *In the strong current case for a small time, the exponential mapping is a diffeomorphism from the unit circle onto its image, which is formed on one part by the extremities of the hyperbolic trajectories, the other part being the extremities of the elliptic trajectories, the two parts being separated by the two points corresponding to the abnormal trajectories. Hyperbolic and elliptic geodesics correspond respectively to time minimizing and time maximizing trajectories, while abnormal geodesics are time minimizing and time maximizing.*

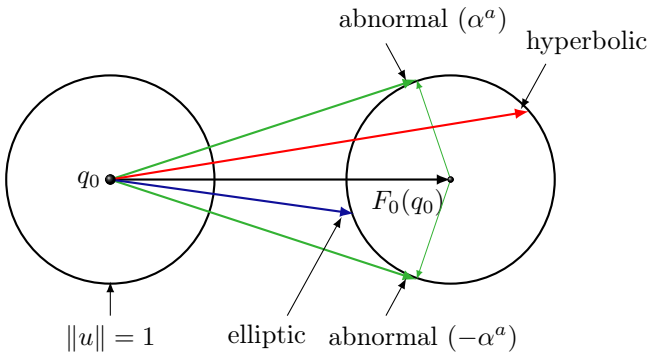


FIGURE 7.3 – Strong current case : ball of directions.

The sphere and the ball with small radius are represented on Fig. 7.4 and in particular this gives the fan shape of the corresponding balls. The contact of the hyperbolic sector with the abnormal curve can be obtained as in section 7.2.2 using the micro-local model where the abnormal geodesic is normalized to the horizontal line. A more precised representation can be obtained in the rotational case, since the geodesic flow is Liouville integrable, which leads to the exact computation of the exponential mapping. This point of view will be developped in the next section.

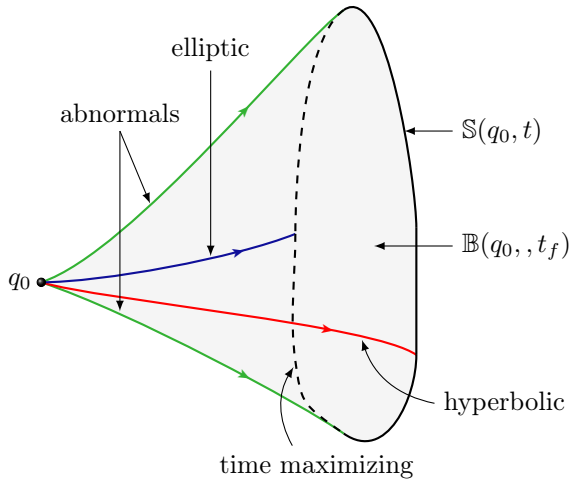


FIGURE 7.4 – Small sphere (plain black line) and ball (delimited by the abnormal geodesics and the sphere) for the strong current case. Note that the elliptic geodesics do not play a role in the construction of the time minimal sphere. But the part of the wavefront formed by the elliptic geodesics is represented (dashed line), together with an elliptic geodesic, to emphasize the difference with the weak case and represent the accessibility set in time t_f which is the interior of the wavefront.

7.3 The cusp singularity in the abnormal direction and regularity of the time minimal value function

The main contribution of this article is to analyze based on the historical example from Caratheodory and Zermelo, the deformation (morphogenesis) of the boundary of the accessibility set when meeting the transition between the domain of strong current and the domain of weak current. This causes a cusp singularity of the abnormal extremal which is in particular at such

point not an immersed curve [1]. We refer to [22, 36] for the occurence of the cusp singularity in both examples, which motivates the study of this *stable* singularity. This phenomenon is analyzed in this article in relation with non-continuity of the value function in the strong current Zermelo case and appearance of a new branch in the cut locus not present in the Finsler case. In the following, the problem is set in the family of problems with rotational symmetry, which covers the two case studies. Note that the historical example is taken as a semi-normal form in the case of revolution and we refer to [26] for the analysis in the general case.

7.3.1 The geometric frame and integrability properties

Recall that in Dardoux coordinates (r, θ), we consider a metric of the form $g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$ and a current $F_0(q) = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}$. With such a metric, $F_1 = \frac{\partial}{\partial r}$ and $F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}$ form an orthonormal frame. Using the Carathéodory-Zermelo-Goh extension one gets with $\tilde{q} = (r, \theta, \alpha)$ (α being the heading angle) :

$$X = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial r} + \left(\mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Straighforward computations give :

$$\begin{aligned}
[Y, X](\tilde{q}) &= \sin\alpha\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\alpha}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta},\\
[[Y, X], Y](\tilde{q}) &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta},\\
[[Y, X], X](\tilde{q}) &= \left(-\mu'(r)\sin\alpha + \frac{m'(r)}{m^2(r)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}.
\end{aligned}$$

Hence, we have :

$$D(\tilde{q}) = \frac{1}{m(r)}, \quad D'(\tilde{q}) = -\mu'(r)\sin^2\alpha + \frac{m'(r)\sin\alpha}{m^2(r)}, \quad D''(\tilde{q}) = \mu(r)\sin\alpha + \frac{1}{m(r)}.$$

So that conditions $(A2)$ and $(A3)$ are satisfied, in particular every geodesic is strict. But the collinearity condition $(A1)$ can be violated at points where

$$\cos\alpha = \mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)} = 0.$$

The dynamics is given by

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\alpha,\\
\dot{\theta} &= \mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)},\\
\dot{\alpha} &= \mu'(r)m(r)\sin^2\alpha - \frac{m'(r)\sin\alpha}{m(r)}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

The following is useful.

Proposition 7.3.1. *The dynamics* (7.9) *can be integrated by quadrature.*

Démonstration. The pseudo-Hamiltonian takes the form :

$$H = p_r\cos\alpha + p_\theta\left(\mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\right) + p^0. \tag{7.10}$$

Moreover, from the maximization condition one has $\frac{\partial H}{\partial\alpha} = 0$, which gives the *Clairaut relation* $p_r\sin\alpha = \frac{p_\theta}{m(r)}\cos\alpha$. So, $(p_r, p_\theta/m(r))$ and $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ are parallels and one has $(p_r, p_\theta/m(r)) =$

1. This is not covered by the article [25].

$\lambda(\cos\alpha, \sin\alpha)$ with $\lambda = (p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)})^{1/2}$. Plugging such p_r into (7.10) allows us to define the following implicit relation between α and r :

$$p_\theta \left(\mu(r) + \frac{1}{m(r)\sin\alpha} \right) + p^0 = 0. \tag{7.11}$$

for $\alpha \neq 0$ $[\pi]$. In the case where $\alpha_0 = 0$ $[\pi]$, one has :

$$\alpha(t) = \alpha_0, \quad r(t) = \pm t + r_0, \quad \text{and} \quad \theta(t) = \int_0^t \mu(r)\,\mathrm{d}t.$$

Otherwise, by homogeneity one can fix $\lambda(0) = 1$ and so $(p_{r_0}, p_\theta/m(r_0)) = (\cos\alpha_0, \sin\alpha_0)$. Then, one gets $p_\theta = m(r_0)\sin\alpha_0$ and from (7.11) one deduces $p^0 = -1 - p_\theta\mu(r_0)$. Equation (7.9) can now be solved by quadrature : from geometric control point of view, it amounts to compute first the control using the integration of the heading angle, r being given by equation (7.11). Then, θ can be obtained using a further quadrature. □

This result can be applied to our two case studies, to give a model of the cusp singularity. We shall present it in our frame, with the historical model.

7.3.2 Computations in the historical example

We consider now the historical example presented in the introduction. We consider the following coordinates $\tilde{q} = (x, y, \gamma) = (\theta, r, \pi/2 - \alpha)$, where r, θ and α are understood in the sense of the previous section. In this historical example the functions $\mu(\cdot)$ and $m(\cdot)$ are given by $\mu(y) = y$ and $m(y) = 1$. In this representation, the dynamics takes the following form :

$$\dot{x} = y + \cos\gamma, \quad \dot{y} = \sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = -\cos^2\gamma. \tag{7.12}$$

Straighforward computations using the previous section leads to

$$D(\tilde{q}) = 1, \quad D'(\tilde{q}) = \cos^2\gamma \quad \text{and} \quad D''(\tilde{q}) = y\cos\gamma + 1,$$

and thanks to Proposition 7.2.7 we can parameterize abnormal, hyperbolic and elliptic extremals.

— **Abnormal case.** The abnormal geodesics are contained in $D'' = y\cos\gamma + 1 = 0$. Hence, given an initial condition (x_0, y_0, γ_0) such that $|y_0| \geq 1$, the associated geodesic is abnormal if $\gamma_0 \in \{\gamma_a^1, \gamma_a^2\}$ with

$$\gamma_a^1 = \arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right) \quad \text{and} \quad \gamma_a^2 = -\arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right).$$

If the current is strong, that is if $|y_0| > 1$, then $\gamma_a^1 \neq \gamma_a^2$ and we have two abnormals. Else, if $|y_0| = 1$ there is only one abnormal, and if $|y_0| < 1$ (this correspond to a weak current) there is no abnormals.

— **Normal case.** The hyperbolic (resp. elliptic) geodesics are contained in $DD'' = D'' > 0$ (resp. $DD'' = D'' < 0$). Hence, given (x_0, y_0, γ_0) :

  — if $|y_0| < 1$, then $y_0\cos\gamma_0 + 1 > 0$ and thus the geodesic is hyperbolic.

  — for $|y_0| = 1$, if the geodesic is normal, then it is hyperbolic.

  — for $|y_0| > 1$, if the geodesic is normal, then it is either hyperbolic or elliptic depending on the sign of $y_0\cos\gamma_0 + 1$. Note that the hyperbolic and elliptic geodesics are separated by the abnormals as illustrated in Fig. 7.3.

To complete the discussion about the historical example, we give the integration of the system.

Proposition 7.3.2. *Let (x_0, y_0, γ_0) be the initial condition, the corresponding solution $(x(t), y(t), \gamma(t))$ is given as follows.*

— *For $\gamma_0 = \pm\pi/2$ one has :*

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad y(t) = \pm t + y_0 \quad \textit{and} \quad x(t) = \pm\frac{t^2}{2} + y_0 t + x_0.$$

— *For $\gamma_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, one has :*

$$\gamma(t) = \operatorname{atan}(\tan\gamma_0 - t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0} - \frac{1}{\cos\gamma(t)},$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma}\right|\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\gamma}{\cos\gamma}\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \left(y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0}\right)t + x_0.$$

— *For $\gamma_0 \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, one has :*

$$\gamma(t) = \pi + \operatorname{atan}(\tan\gamma_0 - t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0} - \frac{1}{\cos\gamma(t)},$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma}\right|\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\tan\gamma}{\cos\gamma}\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \left(y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0}\right)t + x_0.$$

Cusp singularity and regularity of the value function The integration of the system allows us to compute the cusp points in the abnormal directions. A cusp point denoted $(x_{\text{cusp}}, y_{\text{cusp}}, \gamma_{\text{cusp}})$ occurs along an abnormal geodesic at time t_{cusp} when $\dot{x}(t_{\text{cusp}}) = \dot{y}(t_{\text{cusp}}) = 0$. This gives

$$t_{\text{cusp}} = \tan\gamma_0, \quad \gamma_{\text{cusp}} = 0\ [\pi] \quad \text{and} \quad y_{\text{cusp}} = \operatorname{sign}(y_0)\,.$$

Finally, x_{cusp} is deduced from the analytical expressions given above. The geometric features of the model are the following.

— The abnormal with the cusp singularity is the limit curve of the micro-local sector, formed by self-intersecting hyperbolic geodesics, see Fig. 7.5.

— The abnormal is optimal up to the cusp point. Hence, it corresponds to a concept of conjugate point along the *nonsmooth* abnormal geodesic image.

— Carathéodory [36] already described the following phenomenon. Due to the loss of local accessibility associated to the limit geodesic, the time minimal value function is *not continuous*. This is clear from Fig. 7.6. To reach from the initial point q_0 a point B at right of the limit curve, one must use a self-intersecting normal geodesic so that at the intersection with the abnormal geodesic, the time is longer along the normal than along the abnormal geodesic. We also observe that in this sector, the normal geodesic is optimal up to the intersection point with the abnormal geodesic. See [26] for the proof of this result in the general case.

Time minimal synthesis We use the heading angle and the Clairaut relation to stratified the Lagrangian manifold $\mathcal{L}$ given by the image of $\exp(t\vec{\mathbf{H}})(q_0, \cdot)$, see [18, Chapter 10], where q_0 is in the strong current domain. One can also compute the time minimal synthesis (see Fig. 7.7). In the strong current case, q_0 is not strongly locally controllable, i.e $A(q_0, t)$ is not a neighborhood of q_0 for small time. The time $T(q_0)$ along the loop is the limit time such that $A(q_0, t)$ is a neighborhood of q_0. Denote by $\Sigma(q_0)$ the adherence of the cut locus for geodesics starting in q_0 and contained in the adapted neighborhood one has :

Proposition 7.3.3. *Let q_0 in a strong current domain, then :*

1. *For $t > T(q_0)$, $A(q_0, t)$ is a neighborhood of q_0.*
2. *$\Sigma(q_0)$ is the union of the two abnormal curves, the one with a cusp point (corresponding to a conjugate point along the abnormal curve) being taken up to this cusp.*

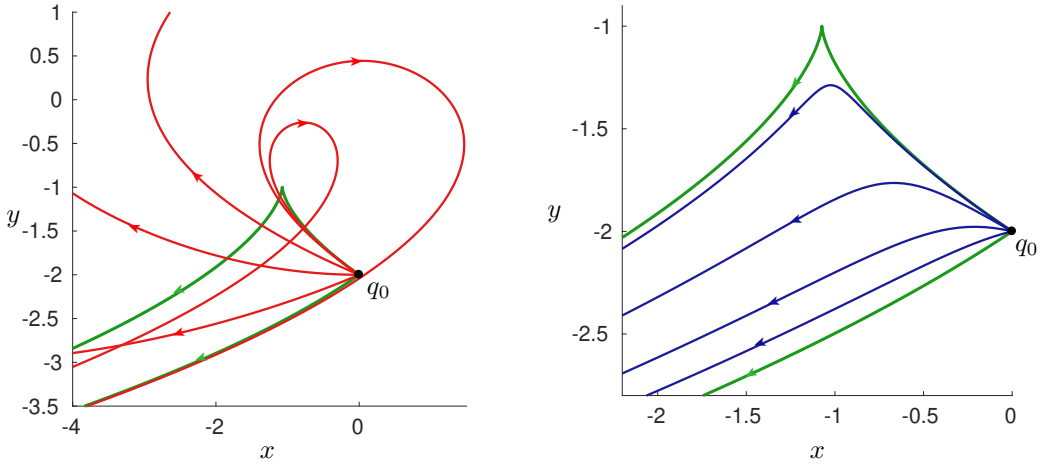


FIGURE 7.5 – (Left) Hyperbolic geodesics (in red) that started from the initial point $q_0 = (-2, 0)$ portrayed in black, in the whole conic neighborhood delimited by the two abnormals (in green). (Right) Elliptic geodesics (in blue) from the same initial point and with the same sector. The set $\|F_0(q)\|_g = 1$ is given by $y = \pm 1$.

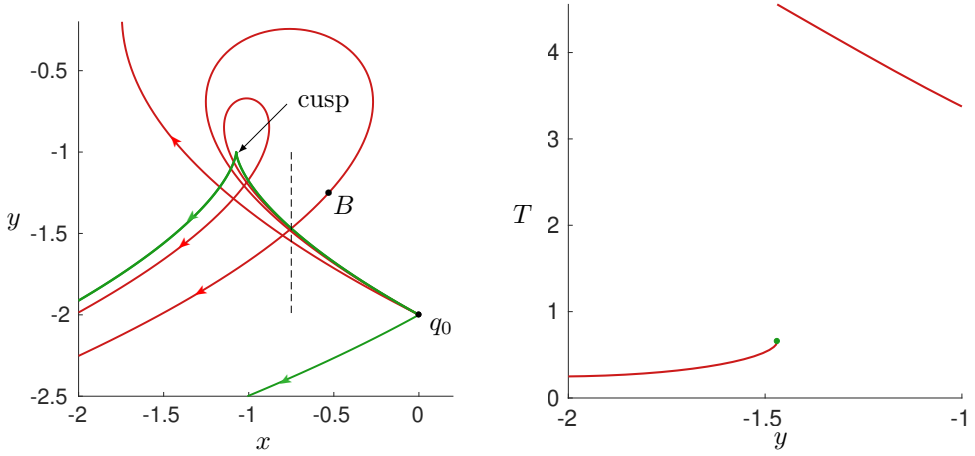


FIGURE 7.6 – (Left) The initial point is $q_0 = (-2, 0)$. The abnormal geodesic with the cusp singularity is in green while the others geodesics in red are hyperbolic. We can see that the cusp singularity is the limit of self-intersecting hyperbolic geodesics. Besides, to reach the point B from q_0, one has to use a hyperbolic self-intersecting geodesic. When this hyperbolic geodesic intersects the abnormal, the time is longer along the hyperbolic than the abnormal. At this intersection, the hyperbolic geodesic ceases to be optimal. (Right) The time minimal value function along the dashed segment from the left subgraph. The discontinuity occurs at the intersection between the hyperbolic and abnormal geodesics. It is represented by the green dot, which is the time along the abnormal geodesic (see [26] for its evaluation).

7.4 Conclusion

In this article, the results of [25] are applied to planar Zermelo navigation problems to give a neat analysis of the role of abnormal geodesics as limit curves of the accessibility set and to describe the fan shape of the balls with small radius. Generic singularities of the time minimal value function associated to normal directions are all well known due to earlier Withney classification [108], see also [110] for the Hamiltonian frame. But based on the two case studies, we describe and provide a mathematical model of a (stable) singularity in the abnormal direction. This corresponds to a cusp singularity of the abnormal geodesics, taken as a limit points of self-intersecting normal geodesics. Moreover, in this situation, the time minimal value function in not

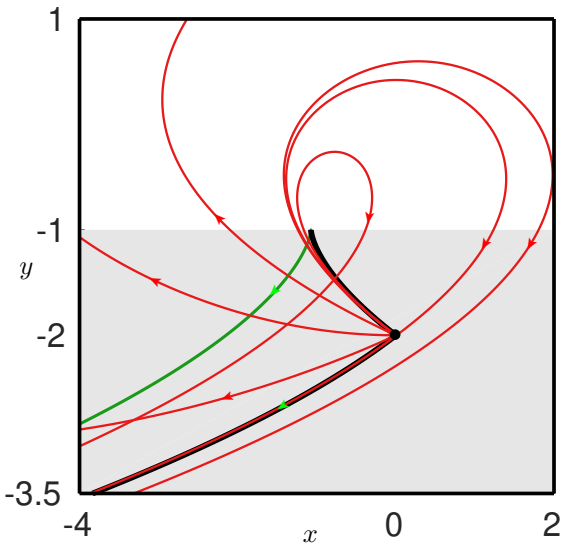


FIGURE 7.7 – Minimal time optimal synthesis in an adapted neighborhood containing the limit loop. The initial point is $q_0 = (-2, 0)$. The abnormal geodesics are in green, the cut locus is in thick black. Hyperbolic geodesics are in red and the domain of strong current is in gray.

continuous. Our study completes the contribution of [22] devoted to the calculation of spheres with general radius, in the vortex case, when at the initial point the current is weak. It is a further step to analyze general navigation problems in the plane, in the case with a symmetry of revolution, combining geometric methods with numerical simulations. Also it can serve as models to analyze singularities of the exponential mapping in the non integrable case. In particular in the normal case using (7.6) and in the abnormal case using (7.7) and (7.12). Besides, this gives the corresponding models of the singularities of the value function. See [26] for a construction of such a model in the general case.

Chapitre 8

Zermelo Navigation Problems on Surfaces of Revolution and Geometric Optimal Control

B. Bonnard, O. Cots and B. Wembé. *Zermelo Navigation Problems on Surfaces of Revolution and Geometric Optimal Control.* (2021). hal-03209491

abstract. In this article, using the historical example from Carathéodory-Zermelo and a recent work describing the evolution of a passive tracer in a vortex, we present the geometric frame to analyze Zermelo navigation problems on surfaces of revolution, assuming the current invariant by symmetry of revolution. In this context, normal (polar) coordinates distinguish parallels and meridians and one will consider the case where the current is oriented along the parallels. The problem is set in the frame of time optimal control and the Maximum Principle allows selecting minimizers among geodesics, solutions of a Hamiltonian dynamics. In the strong current domain, there exist both normal and abnormal geodesics, the latter representing limit curves of the cone of admissible directions. We present the concepts of conjugate points in the normal and abnormal directions, associated to the singularity analysis of the central field defined by the Lagrangian manifold formed by extremal curves with fixed initial conditions, in relation with Hamilton-Jacobi equation. This leads to a parameterization of the conjugate locus in the general case and conjugate points along abnormal directions are cusp points of the geodesics when crossing the limit of the weak current domain and are associated to non-continuity of the value function, due to bad accessibility properties in the weak current domain. The dynamics is Liouville integrable, but it is intricate due to non-compactness of the Liouville surfaces related to separatrices curves and interaction between parallel geodesics causing the existence of Reeb components. We present a generalized Morse-Reeb classification associated to an extended potential and this leads to a stratification of the set of geodesics. Another complementary point of view is described which goes back to the historical example, using the parameterization of the geodesics by the heading angle of the ship, corresponding to the so-called Goh transformation in optimal control. This leads to a different stratification of the set of geodesics using Lie brackets computations and integration with Clairaut relation, interpreted as computing the control given by the derivative of the heading angle. The abnormal geodesics being two branches of a determinantal variety. The final problem is to compute the cut locus, and we introduce the first return mappings to the equator and meridian to order the geodesics and to compute the separating locus formed by intersecting time minimizing geodesics. We apply our approach to analyze the historical example and a set of case studies related in particular to Zermelo navigation problems on spheres of revolution and the generalized vortex case where the different techniques are used to analyze the dynamics of the geodesics and in fine to compute the optimal synthesis in the geodesically

complete case.

Résumé. Dans cet article, en utilisant l'exemple historique de Carathéodory-Zermelo et un travail récent décrivant l'évolution d'une particule passive se déplaçant autour d'un vortex, nous présentons le cadre géométrique permettant d'analyser les problèmes de navigation de Zermelo sur des surfaces de révolution, en supposant le courant invariant par symétrie de révolution. Dans ce contexte, les coordonnées normales (polaires) distinguent les parallèles et les méridiens et on considérera le cas où le courant est orienté le long des parallèles. Le problème s'inscrit dans le cadre du contrôle optimal en temps minimal et le principe du maximum permet de sélectionner les courbes minimisantes parmi les géodésiques, solutions d'une dynamique hamiltonienne. Dans le domaine du courant fort, il existe des géodésiques normales et anormales, ces dernières représentant les courbes limites du cône des directions admissibles. Nous présentons les concepts de points conjugués dans les directions normales et anormales, associés à l'analyse de singularité du champ central défini par la variété lagrangienne formé par les courbes géodésiques avec des conditions initiales fixes, en relation avec l'équation d'Hamilton-Jacobi. Ceci conduit à une paramétrisation du lieu conjugué dans le cas général et les points conjugués le long des directions anormales sont des points cuspide le long des géodésiques lorsqu'elles traversent la limite du domaine de courant faible et sont associés à la non-continuité de la fonction temps minimale, due à la non accessibilité dans le domaine de courant faible en temps petit. La dynamique est Liouville-intégrable mais cette dynamique est compliquée par la non-compacité des tores de Liouville liés aux courbes séparatrices et à l'interaction entre les géodésiques parallèles causant l'existence de composantes de Reeb. Nous présentons une classification de Morse-Reeb généralisée associée à un potentiel étendu et cela conduit à une stratification de l'ensemble des géodésiques. Un autre point de vue complémentaire est décrit et revient dans l'exemple historique, en utilisant la paramétrisation des géodésiques par l'angle de cap du navire, correspondant à la transformation dite de Goh en contrôle optimal. Cela conduit à une stratification différente de l'ensemble des géodésiques en utilisant les calculs des crochets de Lie et l'intégration avec la relation de Clairaut, interprétée comme le calcul du contrôle donné par la dérivée de l'angle de cap. Le problème final est de calculer le lieu de coupure et nous introduisons les applications *premier retour à l'équateur et au méridien* pour classifier les géodésiques et pour calculer le lieu de séparation formé par l'intersection des géodésiques minimisant le temps. Nous appliquons notre approche pour analyser l'exemple historique et un ensemble d'études de cas liés en particulier à la navigation de Zermelo sur des sphères de révolution et au cas du vortex généralisé où les différentes techniques sont utilisées pour analyser la dynamique des géodésiques et in fine pour calculer les synthèses optimales dans le cas des problèmes géodésiquement complet.

Key words : Zermelo navigation problems on surface of revolution, Abnormal geodesics, Integrable Hamiltonian dynamics and Morse-Reeb classification, Conjugate and cut loci, Hamilton-Jacobi equation and regularity of the value function.

8.1 Introduction

Our aim is to introduce the geometric frame from optimal control viewpoint to analyze *Zermelo navigation problems on surfaces of revolution* with application to numerous case studies motivated by applications. The first one being *the historical example* due to Carathéodory, Zermelo [36, 110] which is one founding study of the classical calculus of variations and which serves as a seminal motivation in our analysis. In this problem called "the quickest nautical path", the authors analyze the navigation of a ship on a river aiming to minimize the transfer time from a shore to the opposite one, navigating with constant speed with respect to the current, the control being *the heading angle of the ship*. Moreover, assuming that the current is linear with respect to the distance between the two shores, they give the optimal navigation rule. Selection of minimizing controls being obtained defining *geodesic* trajectories, solutions of an Hamiltonian

dynamics, which leads in a modern setting to use *a weak Maximum Principle* [90]. In particular, they observe the role of the so-called *limit curves* which corresponds to the concept of *abnormal geodesics*, in relation with bad accessibility properties in the domain with strong current. Hence, even this simple case study meets the difficulty to analyze abnormal problems in the classical calculus of variations. Nevertheless, the 2D-case will allow to make a neat analysis of the problem. Also, it can be related to the role of abnormal minimizers in geometric control in connection in particular with sub-Riemannian geometry (SR-geometry) [3, 4, 81]. In this analysis in the frame of SR-geometry, the relation with mechanical system's analysis is granted to I. Kupka [71]. Furthermore, in this context, the historical example revisited in this frame is already a very interesting model to give a normal form for a generic singularity, when the ship is crossing the limit between strong and weak current domain and related to a conjugate point in the abnormal case when the abnormal trajectory has a cusp point vs the regular case described in [4, 25] in higher dimension. The second case motivating this work concerns the displacement of a *passive tracer* in the neighborhood of a *vortex* [7] identified to the origin. This case is singular since the origin is a pole for the dynamics, and it has been recently studied in [21, 22], motivated by applications in hydrodynamics and in the frame of Hamiltonian dynamics. It is related to the N-body problem in celestial mechanics [76] or in space mechanics in orbital transfer [24]. In this context the vortex point corresponds to a collision between planets and a contribution of this article is to relate the existence of minimizing trajectories near the vortex to the existence of minimizers corresponding to periodic solutions using variational methods with *the strong potential* assumption introduced by Poincaré in the coplanar 3-body problem and rigorously proved in [52]. Moreover, in the context of the vortex it leads to use this singularity to reach points which are not locally accessible, following the process of ejection of planets [43]. Also, we can prolongate solutions beyond the vortex, using the construction by Levi-Civita [96]. A second interest of the vortex study is to get complicated dynamics in the relation between the interaction of an *equator solution* and the vortex, and the existence of *Reeb components* [22]. This has to be understood in relation with the classification of complex dynamical system, see for instance [54].

Besides these two case studies, an important motivation of our work is to extend the analysis of Riemannian metrics on surfaces of revolution. This is an important problem in Riemannian geometry and the determination of *the conjugate and cut loci* for *convex spheres* goes back to the earliest work by Poincaré and Myers [78, 79, 88, 89], in the analytic case. The extension to the $\mathcal{C}^\infty$-case exhibits very complicated situations [49, 50]. Only very recently the modest objective of computing the conjugate and cut loci for oblate and prolate ellipsoids of revolutions was finalized, solving the astroidal shape Jacobi conjecture about the conjugate locus, and later extended to general ellipsoids [61]. This leads to define a series of Zermelo navigation problems on two-spheres of revolution in the weak current case (where the current can be compensated by the control) associated to the so-called *Randers geometry* [57, 58]. In this case the conjugate and cut loci can be computed by small deformations (*homotopy methods*) starting from the Riemannian case. But our aim is to extend the analysis beyond the context of *Riemann-Finsler geometry* [11] by considering the strong current case (in which the current is with larger norm than the unit Riemannian norm). Moreover, we shall use the general frame of Hamiltonian dynamics coming from Maximum Principle [90].

Generalizing these two cases, we shall consider in this article the situation where the ambient manifold M is a surface of revolution endowed with the induced Euclidean metric. It can be written $g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$ in (polar) *normal coordinates* where $m(r) > 0$ is a given function [12]. The current is defined by a vector field $F_0 := \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}$ and we restrict to the case where it is oriented only along the parallels $r =$ constant. Hence, the geometry is defined by the *two covariants* $m(r)$ and $\mu(r)$. Introducing the orthonormal frame $F_1 = \frac{\partial}{\partial r}$ and $F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}$, from optimal control point of view [31] the Zermelo navigation problems amounts to minimize the transfer time between two points q_0, q_1 of the ambient space M for the control system

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = F_0(q(t)) + \sum_{i=1,2} u_i(t)F_i(q(t)),$$

$u = (u_1, u_2)$, $\|u\| \leq 1$ where $q = (r, \theta)$ serve as local coordinates. The domain splits into *rectangles*

with *weak current*, where $\|F_0\|_g < 1$ and *strong current* with $\|F_0\| > 1$, the transition $\|F_0\|_g = 1$ being the set with *moderate* current.

One first contribution of this article being, following Carathéodory-Zermelo point of view, to parameterize the control by the heading angle α of the ship, observing that the control can be restricted to $\|u\| = 1$ and setting $u_1 = \cos\alpha$, $u_2 = \sin\alpha$. Hence, in the extended state space with coordinates $\tilde{q} = (r, \theta, \alpha)$ the system can be written

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}(t)}{\mathrm{d}t} = X(\tilde{q}(t)) + v(t)Y(\tilde{q}(t)),$$

with $X := F_0(q) + \cos\alpha F_1(q) + \sin\alpha F_2(q)$ and $Y := \frac{\partial}{\partial\alpha}$, while $v = \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} \in \mathbb{R}$ is taken as an accessory control. This corresponds to *Goh transformation* in optimal control [18] and in our context it will be called the *Carathéodory-Zermelo-Goh transformation*. Using this transformation and Maximum Principle, the geodesics candidate as minimizers can be interpreted as *singular trajectories* of the associated single-input affine control system $(X(\tilde{q}), Y(\tilde{q})$, see [18] for the corresponding frame. Using this extension and in analogy with the SR-case, one can classify geodesics into *normal* and *abnormal* trajectories. More precisely they can be stratified into *normal geodesics* for which using [25] one can distinguish between *small-time minimizing or maximizing* trajectories, while they are separated by *abnormal geodesics*, that is the limit curves of Carathéodory-Zermelo. In this sense they are isolated geodesics following [71]. This gives a neat interpretation of the abnormal curves and a stratification of the set of geodesics in this context. The geodesics flow is *Liouville integrable* and in this frame we provide a neat interpretation of the standard *Clairaut relation* and the integration of the geodesic's dynamics by quadrature in analogy with the Riemannian case on surfaces of revolution [12]. The stratification of the set of geodesics in this context being related to *Lie brackets computations* only. In this general context Clairaut relation has a clear interpretation since as observed in the historical example, this amounts to compute the control parameterized by the heading angle and solving a *shooting equation* to transfer the system from q_0 to q_1. Also, it corresponds to the indirect approach in numeric optimal control, implemented in particular in the dedicated *HamPath software* (www.hampath.org) used in this article for numeric simulations.

The second contribution of this article is to use again the Maximum Principle to get a different stratification of the set of geodesics. Indeed, the system is Liouville integrable and adopting a generalization of the approach uses by I. Kupka in SR-geometry [71], one can introduce a *generalized potential* $V(r, p_\theta, \varepsilon)$ where the dual variable of the cyclic variable θ denoted p_θ is constant, according to Clairaut relation and ε is the dual variable of the cost discriminating between the abnormal case ($\varepsilon = 0$) and the normal case ($\varepsilon \neq 0$). So that he r-dynamics satisfied a *one dimensional mechanical system* with the extended potential given by

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - V_\varepsilon(r, p_\theta).$$

Fixing an adapted rectangular neighborhood $R : r_1 < r_0 < r_2$ of $q_0 = (r_0, \theta_0)$, geodesics when restricted to R, decompose into r-periodic curves and r-aperiodic curves. This leads to a generalization of *the Morse-Reeb classification* [12] and this gives to a different stratification of the set of geodesics in which the periodic case corresponds to the compact Liouville tori described in Liouville-Arnold theorem [12], while the aperiodic case corresponds to non-compact situations. Hence, this indicates the complexity of the classification even if the problem is localized to R by restricting the dynamics to this set. This leads to a complicated Hamiltonian system and in particular this gives a neat interpretation to the existence of Reeb component detected in the vortex case [19]. They are associated to separatrices geodesics as transition between compact and non-compact cases and are describing the interaction between equators solutions corresponding to parallel geodesics and the occurrence of *pseudo-meridians* associated to $p_\theta = 0$. This set the problem in a classification of an intricate dynamics in the Hamiltonian setting, related to modern study of dynamical systems [84, 85, 86].

The third contribution concerns the optimality problem. Indeed, besides the classification of the dynamics, a crucial problem is to determine the conjugate and cut loci and in fine to construct

the time minimal synthesis, restricting the system to an adapted rectangle and gluing together such rectangles to get a global optimality result in the spirit of geometric optimal control, see for instance [28, 99, 100]. The conjugate locus is defined as formed by the set of points where the geodesics emanating from a given point q_0 lose optimality in the $\mathbb{C}^1$-topology, while the cut locus corresponds to the set of points where optimality is lost from the global viewpoint. In Riemannian geometry, the situation is clear, and the problem amounts to determine the conjugate locus and the separating locus, where two minimizing geodesics with equal length are intersecting [37]. The situations are different in the SR-case case and this is related to the abnormal geodesics [3, 80, 81]. In our Zermelo navigation problem such abnormal geodesics occur in the strong current domain and a contribution of this article is to make a description of the cut-locus, again restricting to an adapted neighborhood, this in a generic frame related *to singularity theory* [108, 75]. In particular, we show that the cut locus splits in general into two distinct branches, the first one corresponding to the Riemannian case but the second one being related to a cusp singularity in the abnormal direction and non-continuity of the value function associated to bad accessibility properties and intersections between abnormal and normal minimizers but with different lengths. Hence, again it appears as a toy model even in the context of SR-geometry or more general optimal control problems. To make generalization it is interpreted in terms of *Lagrangian manifolds* [18] and Hamilton-Jacobi equation [73], showing in particular the relation with integrability properties of the geodesics equations and of the value function. The important point remaining efficient algorithms to *effective computations* of the conjugate loci in the case studies, combining in a modern setting mathematical analysis and numerical computations based on [25] and implemented in HamPath software [32].

The final contribution is to apply our different techniques to three case studies. The first one being the historical example in which the complete analysis relies on the stratification using the heading angle, and we recover the time minimal synthesis described in [36]. The second study concerns the deformation of a Riemannian case on a two-sphere of revolution, in which we use the stratification of the set of geodesics with the generalized Morse-Reeb classification. The final case being the extension of the vortex case to get complicated Hamiltonian dynamics with several equators solutions and Reeb components.

The article is organized as follows. In section 8.2, we introduce the general concepts and definitions and a large collection of case studies which are in fine the motivations of our work. We also recall the Maximum Principle which leads to two parameterization of geodesics curves (solutions of the Maximum Principle). The first parameterization, presented in section 8.3, is related to the extended Carathéodory-Zermelo-Goh transformation, and we construct *semi-normal forms* to parameterize the conjugate and cut loci in the normal and abnormal case. The *generalized Gauss curvature* is introduced using *Jacobi (variational) equation*, which is useful to estimate conjugate points for equator solutions. The second parameterization, presented in section 8.4 is described and leads to define the generalized potential. We introduce the concepts and results related to the generalized Morse-Reeb classification of the geodesics. In the final section 8.5, we present the applications of our techniques to analyze three case studies. The first case concerns the historical example for which we present a complete analysis in the frame of geometric control, describing in particular the cut loci related to existence of abnormal curves and associated to non-continuity of the value function and bad accessibility properties. The second case is a Zermelo navigation problem on a two-sphere of revolution associated to *Kepler orbital transfer* but also to the so-called *Grushin case*, where the metric is singular. We use the generalized Morse-Reeb classification, and we describe the conjugate and cut loci for an initial point located on the equator solution. It is a situation with periodic r-components, and we show in particular the stratification of the cut loci into *two distinct* components associated respectively the branch related to the abnormal solution (already detected in the historical example in relation with limit curves) and the branch occurring in the Riemannian case of revolution and associated to the general description of the d cut loci by Poincaré. The third case aims to describe complicated dynamics related to generalizations of the single vortex case. We present the existence theorems for minimizers in relation with the work of Poincaré and Gordon in celestial mechanics [52, 89]. Finally, a construction is presented to glue all the existing cases either along equators or meridians to get a general classification of

situations occurring on surfaces of revolution with a parallel current, opening the road extension to a general current with rotational symmetry. This will form one conclusion of this article and the final concluding section describes the extension of the present study.

8.2 Preliminaries and list of motivating case studies

8.2.1 Definitions and notations

Let M be a (smooth) *surface of revolution* and we denote by g the *induced Riemannian metric* $\|\cdot\|_g$ *and let* T^*M be the *cotangent bundle* endowed with *Liouville canonical form* $\alpha = p\,\mathrm{d}q$. A *Lagrangian manifold* is a 2-dimensional submanifold where $\mathrm{d}\alpha$ is zero. We denote by (r, θ) *normal* (*polar*) *coordinates* on the *covering* Riemannian manifold M^c where the metric takes the form

$$g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2,$$

$m(r) > 0$. This defines a canonical *orthonormal frame* $F_1 := \frac{\partial}{\partial r}$, $F_2 := \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial \theta}$. The lines $r =$ constant are called the *parallels* and the lines $\theta =$ constant are called the *meridians*. A *Zermelo navigation problem* is defined by the triplet (M, g, F_0) where we assume that F_0 is a vector field invariant by θ-rotation, representing the current and oriented along the parallels, so that in the covering space it can be written as $F_0 := \mu(r)\frac{\partial}{\partial \theta}$ [31]. If $\mu(r)$ is constant (resp. linear) this is called the *constant* (resp. *linear*) *current case*. Let $q_0 = (r_0, \theta_0)$, an *adapted neighborhood* of q_0 is a rectangle $R := \{r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. From *control point of view* [31], a Zermelo navigation problem can be written in q-coordinates as : minimize the transfer time between two points (q_0, q_1) for the system :

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = F_0(q(t)) + \sum_{i=1,2} u_i(t) F_i(q(t)),$$

where the control $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ is a measurable function defined on $[0, t_f]$, whose (Euclidean) norm is $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ and one may assume $\|u\| \leq 1$. The *heading angle* α of the ship in the canonical frame is defined by : $u_1 = \sin\alpha$, $u_2 = \cos\alpha$ where according to Clairaut interpretation, α is the angle with respect to the parallel. One can decompose the covering space with coordinates (r, θ) into rectangles $r_0 < r < r_1$ in which we have either *weak current* if $\|F_0\|_g < 1$ or *strong current* case if $\|F_0\|_g > 1$. Transition between the two cases being called the *moderate current* case given $\|F_0\|_g = 1$. The Zermelo navigation problem is called (*geodesically*) complete if for each pair (q_0, q_1) such that q_1 is *accessible* to q_0, there exists a minimizing trajectory of the control system joining q_0 to q_1. Fixing the initial point q_0, we denote by $q_1 \mapsto T(q_0, q_1)$ the *time minimal value function* representing the minimized transfer time from q_0 to q_1.

8.2.2 Case studies

Historical example of Carathéodory-Zermelo [36, 110]

One founding problem in classical *calculus of the variations* is the problem called the quickest nautical path introduced by Carathéodory and Zermelo of a ship navigating on a river aiming to reach the opposite shore in minimum time. Hence, M is the 2-dimensional Euclidean space with metric $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ in the coordinates $q = (x, y)$, y being the distance to the shore. To make a complete analysis, Carathéodory-Zermelo considered a *linear* current of the form $F_0 = y\frac{\partial}{\partial x}$. Using our notation to fix parallels and meridians, one must set $x = \theta$, $y = r$, so that the ambient manifold is the Euclidean space with metric $g = \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\theta^2$ and $F_0 = r\frac{\partial}{\partial \theta}$.

The vortex case [21, 22]

In the vortex case one consider the punctured Euclidean space where the *vortex* is localized at the origin and the ship is a *passive tracer* in hydrodynamics whose motion is described by

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{ky(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + u_1(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = +\frac{ky(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + u_2(t),$$

where $k > 0$ is the *circulation parameter* and one has $F_1 = \frac{\partial}{\partial x}, F_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ and $\|u\| \leq 1$. The problem is written in polar coordinates $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ so that the Euclidean metric takes the form $g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2$ and the current transforms into $F_0 = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$. The ambient manifold is defined by $r \neq 0$, F_0 having a pole at the origin identified to $r = 0$.

Averaged Kepler case [14, 15]

The ambient space M is the *two-sphere of revolution*, the metric being defined $m^2(r) = \frac{\sin^2 r}{1-\lambda\sin^2 r}$ where λ is an homotopy parameter deforming the *round sphere* if $\lambda = 0$ to the singular metric called *Grushin case* for $\lambda = 1$ and $\lambda = 4/5$ corresponds to the *averaged Kepler case,* where $e = \sin r$ is the eccentricity.

Ellipsoid of revolution [61]

The ellipsoid is generated by the curve : $y = \sin\varphi$, $z = \varepsilon\cos\varphi$ where $0 < \varepsilon < 1$ corresponds to the *oblate* (flattened) case while $\varepsilon > 1$ corresponds to the *prolate* (elongated) case. The metric takes the form $g = F_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi^2 + F_2(\varphi)\,\mathrm{d}\theta^2$, with $F_1(\varphi) = \cos^2\varphi + \varepsilon^2\sin^2\varphi$, $F_2 = \sin^2\varphi$. The metric can be written in the normal form by setting $\mathrm{d}r = \sqrt{F_1(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$. This defines the metric on the two-sphere of revolution.

The Serret-Andoyer case [19]

The Serret-Andoyer metric in the normal form is given by $m^2(r) = (A\,\mathrm{cn}^2(\alpha r, k) + B\,\mathrm{sn}^2(\alpha r, k))^{-1}$, where cn and sn are Jacobi elliptic function so that $m(r)$ is periodic and moreover $m(r) = m(-r)$. One has $k^2 = \frac{B-A}{C-A}$, $\alpha = \sqrt{C-A}$, where $0 < A < B < C$ are parameters. This corresponds to a representation of the mechanical pendulum.

Remark 23. *For the previous metrics, this defines Zermelo navigation problems associated to constant and linear current, on the covering space. In the ellipsoid case, the oblate case is different from the prolate case, in relation with permuting meridians and parallels and our study will cover only the oblate case. Note also that on a two-sphere a constant current corresponds to a linear rotation with the axis* $0z$.

8.2.3 Generalities and the Maximum Principle

If not mentioned, all the objects are in a smooth (C^∞ or C^ω) category. We consider a Zermelo navigation problem determined by a triplet (M, g, F_0) where M is a 2D-manifold with normal coordinates : $q = (r, \theta)$, $F_0(q)$ is a vector field defining the current (or wind) given by :

$$F_0 \coloneqq \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

and where g is a metric of revolution in the form : $g = \mathrm{d}r_2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$. Taking $F_1 = \frac{\partial}{\partial r}$, $F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}$, from optimal control point of view, the Zermelo navigation problem is a time minimal

transfer between two points (q_0, q_1) for the control system :

$$\dot{q} = F_0(q) + \sum_{i=1}^{2} u_i F_i(q), \quad u = (u_1, u_2), \quad \|u\| \leq 1, \tag{8.1}$$

and the set of admissible controls $\mathcal{U}$ is the set of bounded measurable mappings defined on $[0, +\infty[$ and valued in the domain $U := \{u \mid \|u\| \leq 1\}$. Fixing $q(0) = q_0$, we denote by $q(\cdot, q_0, u)$ the solution of (8.1) with $q(0) = q_0$, associated to $u(\cdot)$ and defined on a maximal interval J. We introduce the following :

Definition 8.2.1. *The fixed extremity mapping is the map $E^{q_0,t_f} : u(\cdot) \mapsto q(t_f, q_0, u(\cdot))$ and the extremity mapping is the map $E^{q_0} : u(\cdot) \mapsto q(\cdot, q_0, u(\cdot))$. The set of inputs being defined on a subdomain of L^∞. The time accessibility set $A(q_0, t_f)$ is the image of E^{q_0,t_f} and the accessibility set $A(q_0) = \bigcup_{t_f \geq 0} A(q_0, t_f)$ is the image of the extremity mapping.*

We recall the maximum principle from [90] to parameterize the minimizers.

Proposition 8.2.2. *Let $H_i = p \cdot F_i(q)$ be the Hamiltonian lift of $F_i(q)$ for $i = 0, 1, 2$ and $H(q, p, u) = H_0(q, p) + \sum_{i=1}^{2} u_i H_i(q, p)$ denote the Hamiltonian lift of the system called pseudo-Hamiltonian. If $q(\cdot, q_0, u)$ are candidates as minimizers, there exists an absolutely continuous function $p(\cdot)$ (with $p(t) \neq 0$) such that (q, p, u) is solution of :*

$$\begin{aligned} &\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ &H(q(t), p(t), u(t)) = \max_{\|v\| \leq 1} H(q(t), p(t), v). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Moreover, the cost extended Hamiltonian

$$\mathbf{M}(q, p, u) = H(q, p, u) + p^0,$$

is such that p^0 is constant and ≤ 0, while $p^0 \geq 0$ corresponds to time maximizing solutions. Solving (8.2) leads to the following formulation.

Proposition 8.2.3. *Denote by $\mathbf{H}(z)$, $z = (q, p)$, the maximized Hamiltonian $\mathbf{H}(z) = \max_{\|v\| \leq 1} H(z, v)$, one has :*

— *The maximizing controls are given by*

$$u_i = \frac{H_i}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}, \quad i = 1, 2. \tag{8.3}$$

— *The extended maximized Hamiltonian is given by*

$$\mathbf{M}(z) = \mathbf{H}(z) + p^0 = H_0(z) + \sqrt{H_1^2(z) + H_2^2(z)} + p^0 = 0 \tag{8.4}$$

where p^0 is a constant and $p^0 \leq 0$ in the time minimizing case and $p^0 \geq 0$ in the time maximizing case.

— *Candidates as time minimizers or maximizers are solutions of the Hamiltonian dynamics :*

$$\dot{z}(t) = \vec{\mathbf{H}}(z(t)), \tag{8.5}$$

with

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}.$$

Definition 8.2.4. *An* extremal *is a solution $z(\cdot) = (q(\cdot), p(\cdot))$ of (8.5) and a projection of an extremal curve is called a* geodesic. *A geodesic is called* regular *if $t \mapsto q(t)$ is a one-to-one immersion. It is called* strict *if p is unique up to a factor,* normal *if $p^0 \neq 0$ and* abnormal *(or exceptional) if $p^0 = 0$. In the normal case it is called* hyperbolic *(resp.* elliptic*) if $p^0 < 0$ (resp. $p^0 > 0$).*

One has the following (see [25]).

Proposition 8.2.5. *Let $z(\cdot) = (q(\cdot), p(\cdot))$ be a reference extremal defined on $[0, t_f]$ associated to u. If we endow the set of controls (valued in $\|u\| = 1$) with the L^∞-norm topology we have :*

1. *In the normal case, u is a singularity of the fixed time extremity mapping, that is the image of the Fréchet derivative is not of maximal rank.*
2. *In the abnormal case, u is a singularity of the extremity mapping.*

Definition 8.2.6. *Fixing $q(0) = q_0$, the* exponential mapping *is the map $(t, p(0)) \mapsto \Pi(\exp t\vec{\mathbf{H}}(z(t)))$ where $\Pi : (q, p) \mapsto q$ is the q-projection. Taking a regular normal geodesic $q(\cdot)$, a* conjugate point *along $q(\cdot)$ is a point where the exponential mapping is not an immersion and taking all such geodesics, the set of* first *conjugate points will form the* conjugate locus $C(q_0)$. *Given a geodesic, the* cut point *is the first point where it loses optimality, and they will form the* cut locus $\Sigma(q_0)$. *The* separating line $L(q_0)$ *is the set of points where two minimizing geodesics starting from q_0 are intersecting.*

Computation of minimizers can be carried out using the maximized or non maximized Hamiltonian. We introduce the following.

8.3 Carathéodory-Zermelo-Goh transformation and local optimality

8.3.1 Carathéodory-Zermelo-Goh transformation

In the historical example [36, 110], the authors integrated the dynamics of the heading angle α to parameterize the geodesics. This corresponds to the Goh transformation in optimal control and this will be crucial in our analysis.

Definition 8.3.1. *Consider the control system* (8.1)*, with $q = (r, \theta)$ and u restricted to the unit sphere i.e $\|u\| = 1$. One can set $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, α being the heading angle of the ship. Denote $\tilde{q} = (q, \alpha)$, $X(\tilde{q}) = F_0(q) + \cos\alpha\, F_1(q) + \sin\alpha\, F_2(q)$ and $Y(\tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial\alpha}$. This leads to prolongate* (8.3) *into the* single-input affine system *:*

$$\dot{\tilde{q}} = X(\tilde{q}) + v\, Y(\tilde{q}) \tag{8.6}$$

where the derivative of the heading angle $v = \dot{\alpha}$ is the accessory control *and such transformation is called Carathéodory-Zermelo-Goh (CZG) transformation.*

The first consequence is the important geometric point of view which is presented next.

8.3.2 Extremity mapping and conjugate point in the regular case

We shall make use of the results of [25] proved in an n-dimensional setting, for single-input systems, to calculate conjugate point in the normal and abnormal case for regular curves. It is based on the concept of normal forms, important also in our study. Consider system (8.6), with coordinates $\tilde{z} = (q, \alpha, p, p_\alpha)$, p the adjoint vector associated to q and p_α associated to α. This leads to introduce the extended Hamiltonian :

$$\tilde{H}(\tilde{z}, v) = \tilde{p} \cdot (X(\tilde{q}) + v\, Y(\tilde{q})), \quad \text{with} \quad v \in \mathbb{R}.$$

From [25], using the Maximum Principle in this setting we obtain the following parameterization of the geodesic curves. Let γ be a reference geodesic for the extended system defined on $[0, t_f]$. We assume the following :

(A1) The q-projection of γ is regular, and hence along γ, X and Y are independent.

(A2) The reference geodesic is strict and hence along γ, Y and $[X, Y]$ are linearly independent.

(A3) For the computation of (8.3), the strict generalized Legendre-Clebsch condition is satisfied along γ, i.e $[[Y,X],Y] \notin \mathrm{Span}\{Y,[Y,X]\}$.

Let us introduce the following determinants

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \det(Y,[Y,X],[[Y,X],Y]),\\ \mathrm{D}' &= \det(Y,[Y,X],[[Y,X],X]),\\ \mathrm{D}'' &= \det(Y,[Y,X],X), \end{aligned}$$

and the following vector field called the *CZG-geodesic* field :

$$X_s = X + v_s Y$$

where v_s is the feedback

$$v_s = -\frac{\mathrm{D}'(\tilde{q})}{\mathrm{D}(\tilde{q})},$$

and also the Jacobi (or variational equation)

$$\dot{\tilde{\delta q}}(t) = \frac{\partial X_s}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q}(t)) \cdot \delta\tilde{q}(t).$$

Then, we have.

Theorem 8.3.2. *The geodesics under the CZG transformation extend into solutions of X_s. Moreover,*

- *hyperbolic geodesics are in* $\mathrm{D}\,\mathrm{D}'' > 0$,
- *elliptic geodesics are in* $\mathrm{D}\,\mathrm{D}'' < 0$,
- *abnormal (or exceptional) geodesics are located in* $\mathrm{D}'' = 0$.

Given a normal (hyperbolic or elliptic) geodesic defined on $[0,t_f]$ and let t_{1c} be the first associated conjugate time on $]0,t_f[$ i.e. the first time for which the solution $J(t)$ of the Jacobi equation with $J(0) = Y(\tilde{q}(0))$ is such that $\det(J(t_{1c}), Y(\tilde{q}(t_{1c})), X(\tilde{q}(t_{1c}))) = 0$. Abnormal geodesics are C^1-time minimizing and maximizing up to the first conjugate time t_{1c}, hyperbolic (resp. elliptic) geodesics are C^1-time minimizing (resp. maximizing).

Remark 24. *Using the heading angle optimality is understood as a conic neighborhood associated to α.*

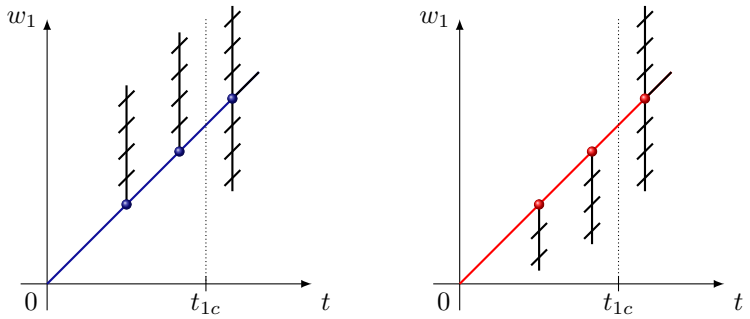
Sketch of the proof. This result is proved in [25], but we sketch the main step of the proof to understand the geometric construction in this context.

The main tool is to construct a semi-normal form for a reference geodesic satisfying our assumption for the feedback group. The reference geodesic denoted $\gamma(t)$ and defined on $[0,t_f]$ is identified to $t \mapsto (t,0,0)$ and the reference control can be taken as $v \equiv 0$, using a proper feedback. Normalization is obtained in the jet-space of $\{X,Y\}$ in the neighborhood of γ. We must distinguish normal and abnormal cases.

Optimality status in the normal case. In the normal case, we can choose coordinates $\tilde{q} = (q_1,q_2,q_3)$ such that the system takes the form :

$$\begin{aligned} X &= \left(1 + \sum_{i,j=2}^{3} a_{i,j}(q_1) q_i q_j\right) \frac{\partial}{\partial q_1} + q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} + \varepsilon_1,\\ Y &= \frac{\partial}{\partial q_3}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

with $a_{33} < 0$ (resp. $a_{33} > 0$) in the hyperbolic (resp. elliptic) case. Using the normalization in (8.7) one sets : $q_1(t) = t + w_1(t)$ and projection of the accessibility set in w_1-direction is represented on Fig. 8.1. Note that hyperbolic and elliptic geodesics amount respectively to minimize and maximize the w_1-coordinate. If $t > t_{1c}$ (first conjugate time) the fixed extremity mapping becomes open.



elliptic case hyperbolic case

FIGURE 8.1 – Projection of the fixed time accessibility set on the w_1-coordinate; t_{1c} being the first conjugate time.

Optimality status in the abnormal case. In the abnormal case, we can choose coordinates $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3)$ such that the system takes the form :

$$\begin{aligned} X &= (1+q_2)\,\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2}a(q_1)q_2^2\frac{\partial}{\partial q_3} + \varepsilon_2, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

See [25] for details of the computations and description of ε_1, ε_2. Taking $\varepsilon_i = 0$ and $q_1 = t$ in (8.7)-(8.8), one can evaluate the accessibility set and its boundary filled by geodesics, compute conjugate points and deduce the optimality status of the reference geodesic. In this case, one must evaluate the *time evolution* of the accessibility set and its boundary. It is represented on Fig. 8.2. The reference geodesic is $\gamma\colon t \mapsto (t, 0, 0)$ and is associated to $v \equiv 0$. We fix t along the reference curve and let a time t_f in a neighborhood of t. Using the model, we compute geodesics such that :

$$q_1(t_f) = t, \quad q_2(t_f) = 0,$$

and the associated cost is given by

$$q_3(t_f) = \int_0^{t_f} \frac{1}{2}a(q_1)q_2^2 \,\mathrm{d}t.$$

This gives the parameterization of the boundary of the accessibility set as :

$$q_3(t_f) = \alpha(t - t_f)^2 + o(t - t_f)^3$$

α being a positive invariant, given by the Jacobi equation. Note that the model (8.8) clearly shows that the abnormal curve is a so-called limit curve, as observed by Carathéodory [36]. It also shows that conjugate points cannot occur in the 3d-case, see again [25] for the occurrence of conjugate points along abnormal curves in the n-dimensional case for $n > 3$. In this analysis, the integrability of the geodesic flow is not required but in the model, the accessibility set can nevertheless be evaluated since in the models, the extremity mapping can be computed (making $\varepsilon_i = 0$).

□

Next, the CZG transformation is used to integrate by quadrature the geodesic flow in the rotational case. Moreover, a clear geometric integration is performed clarifying the integration process in the historical example.

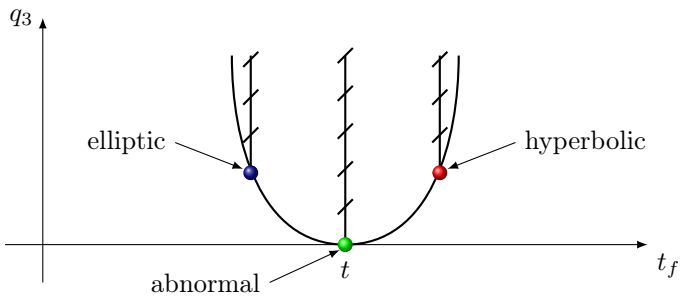


FIGURE 8.2 – Projection of the accessibility sets on the q_3-coordinate in the abnormal case.

8.3.3 Geometric frame and integrability property

Geometric frame. Using the CZG extension and $\tilde{q} = (r, \theta, \alpha)$ the coordinates, we have :

$$X = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial r} + \left(\mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\right) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

and Lie bracket computations gives :

$$\begin{aligned}
[Y, X](\tilde{q}) &= \sin\alpha \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\alpha}{m(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
[[Y, X], Y](\tilde{q}) &= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\alpha}{m(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
[[Y, X], X](\tilde{q}) &= \left(-\mu'(r)\sin\alpha + \frac{m'(r)}{m^2(r)}\right) \frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

Hence, we have :

$$\mathrm{D}(\tilde{q}) = \frac{1}{m(r)}, \quad \mathrm{D}'(\tilde{q}) = -\mu'(r)\sin^2\alpha + \frac{m'(r)\sin\alpha}{m^2(r)}, \quad \mathrm{D}''(\tilde{q}) = \mu(r)\sin\alpha + \frac{1}{m(r)}.$$

So that by construction, conditions $(A2)$ and $(A3)$ are satisfied, but the collinearity condition $(A1)$ can be not satisfied if $\|F_0(q)\| = 1$. We have.

Lemma 8.3.3. *The collinearity condition (A_1) can be violated only along the abnormal curves at points where :*

$$\cos\alpha = \mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)} = 0.$$

The dynamics is given by

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \cos\alpha, \\
\dot{\theta} &= \mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)}, \\
\dot{\alpha} &= \mu'(r)m(r)\sin^2\alpha - \frac{m'(r)\sin\alpha}{m(r)}
\end{aligned} \tag{8.9}$$

and we have the following.

Proposition 8.3.4. *The dynamics* (8.9) *can be integrated by quadrature.*

Démonstration. The pseudo-Hamiltonian takes the form :

$$H = p_r \cos\alpha + p_\theta \left(\mu(r) + \frac{\sin\alpha}{m(r)}\right) + p^0. \tag{8.10}$$

Moreover, from the maximization condition one has :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0,$$

which gives the *Clairaut relation* :

$$p_r \sin\alpha = \frac{p_\theta}{m(r)} \cos\alpha.$$

So, $(p_r, p_\theta/m(r))$ and $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ are collinear and thanks to this, one has $(p_r, p_\theta/m(r)) = \lambda(\cos\alpha, \sin\alpha)$, with $\lambda = \|p\|_g$. Plugging such p_r into (8.10) allows us to define the following implicit relation between α and r :

$$p_\theta \left(\mu(r) + \frac{1}{m(r)\sin\alpha}\right) + p^0 = 0. \tag{8.11}$$

for $\alpha \neq 0\ [\pi]$. By homogeneity one can fix $\lambda(0) = 1$ and we have $(p_{r_0}, p_\theta/m(r_0)) = (\cos\alpha_0, \sin\alpha_0)$. So that, one gets $p_\theta = m(r_0)\sin\alpha_0$ and from the maximized Hamiltonian one deduces $p^0 = -1 - p_\theta\mu(r_0)$.

Equation (8.9) can be solved by quadrature. From geometric control point of view, it amounts to compute first the control using the integration of the heading angle, r being given by equation (8.11). Then, θ can be obtained using a further quadrature. In the case where $\alpha_0 = 0\ [\pi]$, one has :

$$\alpha = \alpha_0, \quad r(t) = \pm t + r_0, \quad \text{and} \quad \theta(t) = \int_0^t \mu(r(t))\ \mathrm{d}t.$$

□

One further consequence being the parameterization of the conjugate locus.

Parameterization of the conjugate locus in the normal case

Conjugate points are given using theorem 8.3.2 by the condition

$$\det(J(t_{1c}), Y(\tilde{q}(t_{1c})), X(\tilde{q}(t_{1c}))) = 0$$

where $J(t)$ denotes the Jacobi field which is semi-vertical at $t = 0$, i.e $J(0) = Y(\tilde{q}(0))$. Using the *ad-formula*, one has :

$$J(t) = e^{t\ \mathrm{ad}\, X_s}(Y(\tilde{q}(t))) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\, \mathrm{ad}^n\, X_s(Y)(\tilde{q}(t))$$

where $\mathrm{ad}\, X_s \cdot Y = [X_s, Y]$ denotes the adjoint operator. Since $\tilde{q}(t)$ is a geodesic curve one has

$$J(t) \in \mathrm{Span}\{Y(\tilde{q}(t)), [Y, X_s](\tilde{q}(t))\}$$

and it can be written as

$$J(t) = \lambda_1(t)Y(\tilde{q}(t)) + \lambda_2(t)[Y, X_s](\tilde{q}(t)),$$

so conjugate times t_c (in particular the first conjugate time t_{1c}) are given by $\lambda_2(t_c) = 0$ i.e. $J(t)$ collinear to $Y(\tilde{q}(t))$. Thus, we have :

Proposition 8.3.5. *In the rotational Zermelo navigation problem, the conjugate locus is defined by the Jacobi field $J(t)$ which can be integrated thanks to the integrability property of the dynamics, and we have : $J(t)$ belongs to the kernel of the* Cartan-Hilbert *form ω defined by :*

$$\omega(X_s) = 1, \quad \omega(Y) = \omega([Y, X_s]) = 0,$$

and at the conjugate time t_c, $J(t_c)$ is semi-vertical i.e. collinear to $Y(\tilde{q}(t_c))$.

This defines the conjugate locus in the normal case. Moreover, note that the semi-normal form (8.7) defines a canonical form of Jacobi equation in the general frame of single-input affine systems, this gives the singularity of the time value mapping associated to conjugate points in the normal case.

Historical example as a model of the cusp singularity in the abnormal case

We can refer to [21] for a complete presentation. Recall first that for a Zermelo navigation problem the domain in the (r, θ) coordinates is split into band $r_0 < r < r_1$ where, if $q = (r, \theta)$ is such that $\|F_0\|_g < 1$ (resp. $\|F_0\|_g > 1$) the current is called weak (resp. strong). Transition between the two cases being a moderate current where $\|F_0\|_g = 1$. In the weak case, there is no abnormal geodesics. In the strong case there are two abnormal directions defined by two distinct heading angles denoted $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ and they form the tangents to the indicatrix defined by : $F_0(q) + \|u\|$ where u is given by $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. To keep coherence in notation, we consider the following coordinates $\tilde{q} = (x, y, \gamma) = (\theta, r, \pi/2 - \alpha)$, where r, θ and α are understood in the sense of section 8.3.3. It is interesting to use the historical example of Carathéodory-Zermelo as a model (normal form) to make the following analysis. We get the following, illustrated on Fig. 8.3 (see [36] for more details) : the two abnormal directions at the initial point are given by

$$\gamma_a^1 = \arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right) \quad \text{and} \quad \gamma_a^2 = -\arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right).$$

A cusp point denoted $(x_{\text{cusp}}, y_{\text{cusp}}, \gamma_{\text{cusp}})$ occurs along an abnormal geodesic at time t_{cusp} when $\dot{x}(t_{\text{cusp}}) = \dot{y}(t_{\text{cusp}}) = 0$. This gives

$$t_{\text{cusp}} = \tan\gamma_0, \quad \gamma_{\text{cusp}} = 0\ [\pi] \ \text{ and } \ y_{\text{cusp}} = \text{sign}\,(y_0)\,.$$

Finally, x_{cusp} is deduced from the analytical expressions given above. And we deduce :

— The abnormal geodesic with the cusp singularity is the limit curve of the micro-local sector, formed by self-intersecting hyperbolic geodesics.

— The abnormal geodesic is optimal up to the cusp point. Hence, it corresponds to a concept of conjugate point along the *non-smooth* abnormal geodesic, image where the abnormal is not an immersed curve.

— Moreover, due to the loss of local accessibility associated to the limit geodesics, the time minimal value function is *not continuous*. This is clear from Fig. 8.3. To reach, from the initial point q_0, a point B at the right of the limit curve, one must use a self-intersecting normal geodesic so that at the intersection with the abnormal geodesic, the time is longer along the normal than along the abnormal geodesic. We also observe that in this sector, the normal geodesic is optimal up to the intersection point with the abnormal geodesic.

8.3.4 Conclusion : models of conjugate points

Normal case. It is deduced using the CZG-representation by (8.7) where X_s can be set thanks to integrability as $X_s = \partial/\partial x$ and the accessory LQ problem from [25] can be set to $q = (x, y, z)$:

$$1 + L(t, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial z}$$

where the reference geodesic is normalized to $t \mapsto (t, 0, 0)$ and the quadratic form L is given by

$$L(t, y, z) = a(t)z^2 + 2b(t)yz + c(t)y^2,$$

and $a < 0$ (resp. $a > 0$) in the hyperbolic (resp. elliptic) case. While a, b, c can be computed using Lie brackets along the reference geodesic. The associated Jacobi equation takes the form of the second order differential operator :

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}a^{-1}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - c\right)a^{-1}\varphi = 0$$

If we set $A = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}a^{-1}$, $B = \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - c\right)a^{-1}$, $C = \exp\int_0^t -\frac{A(s)}{2}\,\mathrm{d}s$ and $K = \frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}t^2} + A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + BC$, this equation can be set in the canonical form

$$\frac{\mathrm{d}^2J}{\mathrm{d}t^2} + K(t)J = 0$$

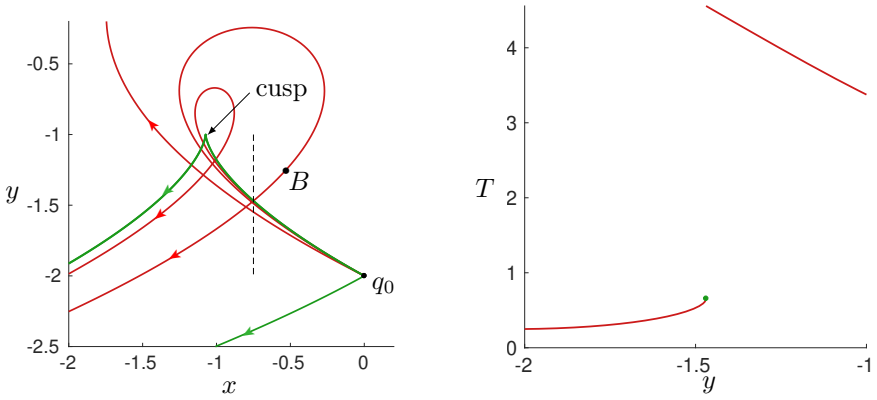


FIGURE 8.3 – (Left) The initial point is $q_0 = (0, -2)$. The abnormal geodesic with the cusp singularity is in green while the others geodesics in red are hyperbolic. We can see that the cusp singularity is the limit of self-intersecting hyperbolic geodesics. Besides, to reach the point B from q_0, one has to use a hyperbolic self-intersecting geodesic. When this hyperbolic geodesic intersects the abnormal, the time is longer along the hyperbolic than the abnormal. At this intersection, the hyperbolic geodesic ceases to be optimal. (Right) The time minimal value function along the dashed segment from the left sub-graph. The discontinuity occurs at the intersection between the hyperbolic and abnormal geodesics. It is represented by the green dot, which is the time along the abnormal geodesic.

and by analogy with the Riemannian case, $K(t)$ is called the *(sectional) curvature* of the Zermelo navigation problem, see [1] for an intrinsic definition.

Abnormal case. Conjugate point can be computed as a cusp singularity of the historical model described by (8.9) where $p^0 = 0$ (abnormal case) and using Lie brackets only with the relation $\mathrm{D}'' = 0$.

Remark 25. *Fig. 8.4 summarizes both normal and abnormal cases.*

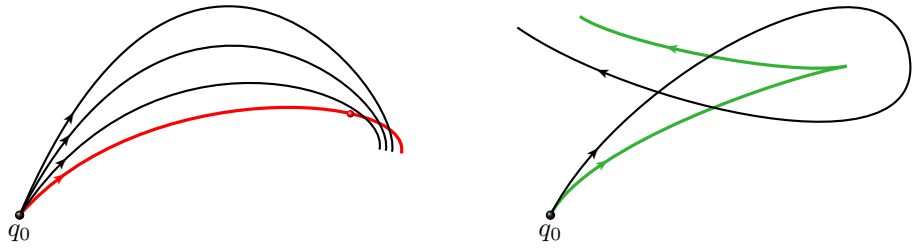


FIGURE 8.4 – Conjugate points in the 2D-space in normal (left) and abnormal (right) cases.

Sketch of the construction of a normal form in the abnormal case. The historical model from Carathéodory-Zermelo gives the geodesic equations

$$\dot{x} = y + \cos\alpha, \quad \dot{y} = \sin\alpha, \quad \dot{\alpha} = -\cos^2\alpha. \tag{8.12}$$

In this example, the boundary between the domain of strong current and weak current is identified to the set $y = \pm 1$. Making the translation $Y = y + 1$ an expanding at $\alpha = 0$ up to order 2, we get the system :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Y - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \alpha, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -1 + \alpha^2$$

Hence at the point $q = (0, 0, *)$ on the boundary of the two domains, one can observe that α is of order t, Y is of order t^2 and x is of order t^3.

One can expand for a small t the geodesics near 0, and parameterizing by α_0 only gets a miniversal unfolding of the cusp singularity. Hyperbolic geodesics are the sefl-intersecting geodesics in this unfolding. This can be used to describe the cusp singularity of right graph in figure 8.1, expanding and abnormal geodesics up to order 3. The expansion allow comparing times between the abnormal geodesics with a cusp and normal seft-intersecting geodesics, deducing optimality status.

8.4 Mechanical system and generalized Morse-Reeb classification

First, we recall the following version of the Liouville-Arnold theorem from [12].

Theorem 8.4.1. *Let $\overrightarrow{H}$ be an Hamiltonian vector field on T^*M (M being 2-dimensional) and with an additional first integral G so that $\{H, G\} = 0$. Assume that the corresponding vector fields are complete and moreover H and G are functionally independent. Then the Hamiltonian vector field is called* Liouville-integrable *and moreover if the set T_ξ defined by $H = c_1$, $G = c_2$, $\xi = (c_1, c_2)$, then we have :*

1. *T_ξ is a smooth manifold invariant by the flow of $\overrightarrow{H}$ and $\overrightarrow{G}$.*
2. *If T_ξ is connected and compact, then T_ξ is diffeomorphic to the 2-dimensional torus T^2 and it is called a* Liouville torus.
3. *The Liouville foliation is trivial, that is, there exists a neighborhood U of T_ξ so that U is a direct product of T^2 and the disk D^2.*
4. *In the neighborhood $U =$ there exists* action-angle variables *so that the dynamics can be written $\frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = \alpha_i(s_1, s_2)$, $i = 1, 2$.*

Application to the averaged Kepler case. In this case the ambient manifold M is the (compact) 2-dimensional sphere. If g is the metric in normal coordinates, the Hamiltonian vector field is defined by $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)$ and $\mathbf{G} = p_\theta$ is the additional (linear) first integral. Trajectories of $\overrightarrow{\mathbf{H}}$ splits into three cases : the meridians defined by θ constant, the equator which can be identified to $\pi/2$ with $r \in [0, \pi]$ in the normal coordinates on the sphere. All the other trajectories are formed by r-periodic oscillating solutions of the mechanical system defining the so-called *characteristic equation*

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - V(r, p_\theta) = R(r, p_\theta),$$

which can be integrated starting from the equator $r_0 = \pi/2$ and using by example the ascending branch, the term $V = \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}$ being the *potential*. One further integration is necessary in order to recover the θ-variable using the Hamiltonian dynamics. Parameterizing by r on each branch this dynamics takes the form

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\sqrt{R(r, p_\theta)}} \frac{\partial H}{\partial p_\theta}.$$

This allows to compute the variation denoted $\Delta\theta/2$ of the angle θ starting from the equator and on the ascending branch the total variation to return to the equator being $\Delta\theta$. Note that in the limit case of the equator the rotation is stationary since r is constant. This gives the complete description of the Liouville tori, with periodic trajectories if $\Delta\theta/2\pi$ *is rational* and dense orbits if $\Delta\theta/2\pi$ *is irrational.*

Theorem 8.4.2. *Given a Zermelo navigation problem on a surface of revolution, with parallel current.*

1. *Denoting* $\|p\|_g = \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)^{1/2}$, *the evolution of the system in the* (r, p_r) *space is described by the Hamiltonian dynamics*

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{p_r}{\|p\|_g}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}t} = -p_\theta \mu'(r) + \frac{p_\theta^2 m'(r)}{m^3(r)\|p\|_g}.$$

2. *It can be integrated using the mechanical system representation*

$$\dot{r}^2 = 1 - V_\varepsilon(r, p_\theta),$$

where the generalized potential *is given by*

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{m^2(r)(\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2},$$

and where $\varepsilon = -p^0 < 0, = 0, > 0$ *corresponds respectively to the hyperbolic, abnormal and elliptic cases.*

3. *Since the Hamiltonian is constant we normalize* $\varepsilon = -1, 0, 1$ *respectively in hyperbolic, abnormal and elliptic cases, then one has :*

$$p_r^2 = (\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}$$

with

$$(p_{r_0}, p_\theta) \in J_\varepsilon(r_0) = \left\{ (p_{r_0}, p_\theta) \;\middle|\; \left(p_{r_0}^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r_0)}\right) = (\varepsilon + p_\theta \mu(r_0))^2 \right\}.$$

Démonstration. The first point of the theorem is a consequence of the Maximum Principle, in particular it comes from equation (8.2). For the second and third points, we have on one side, from the Hamiltonian : $\|p\|_g = -\varepsilon - p_\theta \mu(r)$, so :

$$p_r^2 = \|p\|_g^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2(r)} = (\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}.$$

On the other side, from the restricted system in (r, p_r) one has :

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\|p\|_g}$$
$$\dot{p}_r = -p_\theta \mu'(r) + \frac{p_\theta^2\, m'(r)}{m^3(r)\|p\|_g}.$$

So that, $\dot{r}^2 = \frac{p_r^2}{\|p\|_g^2}$. Finally, using these two relations, we deduce :

$$\dot{r}^2 = \frac{p_r^2}{\|p\|_g^2} = \frac{(\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2 - \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}}{(\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2} = 1 - \frac{p_\theta^2}{m^2(r)\,(\varepsilon + p_\theta \mu(r))^2},$$

the conclusion then follows. □

Remark 26. *It is quite classical to normalize* p^0 *at* $\varepsilon = 0, -1, +1$, *where* $\varepsilon = 0$ *is the abnormal case,* $\varepsilon = -1$ *is the hyperbolic case and* $\varepsilon = +1$ *is the elliptic case, even if this parameterization is not unique. In fact, we can also fix* $\|(p_{r_0}, p_\theta)\|_r = 1$ *and pose* $(p_{r_0}, p_\theta) = (\cos\alpha, m(r_0)\sin\alpha)$ *in order to parameterize each extremal by its initial heading angle. This last parameterization is more appropriate for the construction of the optimal synthesis, because it allows to simultaneously deal with hyperbolic, elliptic and abnormal cases. However, for the classification of geodesics, that we are interested in, the first parameterization seems more appropriate. So taking* $p^0 = \varepsilon = 0, -1, +1$, *we recall that* p_θ *is a first integral. Hence, the corresponding dynamics is parameterized by* $(r(0), p_r(0)) = (r_0, p_{r_0})$ *and depends only on* p_θ *such that* (p_{r_0}, p_θ) *belongs in* $J_\varepsilon(r_0)$.

Definition 8.4.3. *The classification of trajectories of the restricted Hamiltonian dynamics, parameterized by p_θ is called the* Generalized-Morse-Reeb (GMR) classification *defined by* the generalized potential V_ε.

Definition 8.4.4. *Assume the hyperbolic case $\varepsilon = -1$. An* equator $r = r_1$ *is an equilibrium point $(r_1, 0)$ of the restricted dynamics. It is called* L-elliptic *if the linearized dynamics is with spectrum $\{\pm i\alpha, \alpha \neq 0\}$,* L-hyperbolic *if the spectrum is of the form $\{\lambda, -\lambda, \lambda \neq 0\}$ and* L-parabolic *if the spectrum is zero. The elliptic and hyperbolic cases corresponding respectively to a stable case associated to a minimum of the potential and to an unstable case associated to a maximum. An equator corresponds to a stationary rotation, it is called a* positive rotation *(resp.* negative*) if θ is rotating with a* positive (resp. negative) frequency. *A* separatrix geodesic *is a geodesic $e(t) = (r(t), *)$ such that $r(t) \to r_1$ as $t \to \infty$ and it is contained in the same level p_θ* [1] *and this is called a singular level.*

Definition 8.4.5. *A* generalized Reeb component *is a separatrix solution $e(t) = (r(t), *)$ so that $r(t)$ converges respectively when $t \to \pm\infty$ to two equator solutions and with different orientations.*

Definition 8.4.6. *Let U be an adapted neighborhood of q_0. Geodesics at the initial time decompose into starting ascending branch, starting descending branch or tangential to the parallel for which one must consider the case with positive or negative acceleration $\frac{d^2r}{dt^2}(0)$. Note that if we start from the equator both coincide. The* first return to the equator *(resp.* the meridian*) associated to a geodesic is the first point such that the geodesic intersect again the equator (resp. the meridian).*

Proposition 8.4.7. *Let U be and adapted neighborhood of $q_0 = (r_0, \theta_0)$. Level sets in the GMR-classification splits into compact levels corresponding to r-periodic geodesics and non-compact level sets corresponding to r-aperiodic geodesics restricted to the neighborhood U. If r_1 is an equator which is L-elliptic, then* locally *the Liouville foliation by Liouville tori is preserved.*

Proposition 8.4.8. *Let q_0 be a fixed initial condition, then using the GMR-classification for each adapted neighborhood of q_0 one can stratify the set of geodesics emanating from q_0 into micro-local (conic) sectors corresponding to compact and non-compact geodesics.*

Remark 27. *The decomposition depends upon the adapted neighborhood and can be obtained using the potential restricted to the domain. One can easily have situations with two compact sectors separated by a singular level with a separatrix geodesic and an equator for which when restricting the domain, the singular level separates compact and non-compact orbits.*

Proposition 8.4.9. *Considering the hyperbolic case, i.e $\varepsilon = -1$.*

1. *Couples (r, p_θ) forming by r-equators and parameterized p_θ are solutions of the system :*

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = 1 \quad \textit{and} \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}(r, p_\theta) = 0, \quad \textit{with} \quad p_\theta \neq 0. \tag{8.13}$$

2. *L-hyperbolic (resp. L-elliptic) equators have to satisfy the additional condition :*

$$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2}(r, p_\theta) > 0 \quad (\textit{resp.} \quad \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial r^2}(r, p_\theta) < 0).$$

3. *A separatrix associated to an r-equator is on the same level p_θ which is given by :*

$$p_\theta = \frac{m(r)}{\mu(r)m(r) + \delta} \quad \textit{with} \quad \delta = \operatorname{sign}(p_\theta).$$

Démonstration. Points one and two of the proposition come from the definition of an equator and from the construction of the generalized potential. For the third point of the proposition,

1. Here, it is Clairaut constant p_θ, and not the level of the Hamiltonian, which plays the role of the level of the Morse function.

the first equation of (8.13) is equivalent to $p_r = 0$ along of the equator, and resolving the second one leads us to :

$$p_\theta = \frac{m'(r)}{m(r)\mu'(r) + m'(r)\mu(r)}.$$

On other hand, $p_r = 0 \Rightarrow \dot{p}_r = 0$, which give us :

$$\mu'(r) = \delta \frac{m'(r)}{m^2(r)}, \quad \text{where,} \quad \delta = \text{sign}(p_\theta).$$

These two last equations then leads us to :

$$p_\theta = \frac{m(r)}{\mu(r)m(r) + \delta} \quad \text{with} \quad \delta = \text{sign}(p_\theta).$$

□

Example 1. *In the Serret-Andoyer case, starting from the equator identified to zero and corresponding to the stable position of the pendulum we have two sectors associated respectively to rotating and oscillating solutions of the pendulum, separated by the separatrices. The rotating solutions correspond to non-compact orbits on the plane, but periodic if they are interpreted on the cylinder. On this surface, oscillating trajectories are homotopic to a point but not the rotating trajectories.*

8.5 Case studies

8.5.1 The Carathéodory-Zermelo historical example

In this presentation, all the details of the computations are not given, for a complete study of this example, based on the Carathéodory-Zermelo-Goh point of view, see [21]. Recall that, considering the following coordinates $\tilde{q} = (x, y, \gamma) = (\theta, r, \pi/2 - \alpha)$, the dynamics takes the form :

$$\dot{x} = y + \cos\gamma, \quad \dot{y} = \sin\gamma, \quad \dot{\gamma} = -\cos^2\gamma.$$

Straightforward computations using the previous section leads to

$$\mathrm{D}(\tilde{q}) = 1, \quad \mathrm{D}'(\tilde{q}) = \cos^2\gamma \quad \text{and} \quad \mathrm{D}''(\tilde{q}) = y\cos\gamma + 1,$$

and thanks to Theorem 8.3.2 we can parameterize abnormal, hyperbolic and elliptic geodesics.

— **Abnormal case.** The abnormal geodesics are contained in $\mathrm{D}'' = y\cos\gamma + 1 = 0$. Hence, given an initial condition (x_0, y_0, γ_0) such that $|y_0| \geq 1$, the associated geodesic is abnormal if $\gamma_0 \in \{\gamma_a^1, \gamma_a^2\}$ with

$$\gamma_a^1 = \arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right) \quad \text{and} \quad \gamma_a^2 = -\arccos\left(-\frac{1}{y_0}\right).$$

If the current is strong, that is if $|y_0| > 1$, then $\gamma_a^1 \neq \gamma_a^2$ and we have two distinct abnormal geodesics. Else, if $|y_0| = 1$ the two abnormal geodesics degenerate into one, and if $|y_0| < 1$ (this corresponds to a weak current) there is no abnormal geodesics.

— **Normal case.** The hyperbolic (resp. elliptic) geodesics are contained in $\mathrm{D}\,\mathrm{D}'' = \mathrm{D}'' > 0$ (resp. $\mathrm{D}\,\mathrm{D}'' = \mathrm{D}'' < 0$). Hence, given an initial condition (x_0, y_0, γ_0) :

  — if $|y_0| < 1$, then $y_0\cos\gamma_0 + 1 > 0$ and thus the corresponding geodesic is hyperbolic.

  — for $|y_0| = 1$, if the geodesic is normal, then it is hyperbolic.

  — for $|y_0| > 1$, if the geodesic is normal, then it is either hyperbolic or elliptic depending on the sign of $y_0\cos\gamma_0 + 1$.

To complete the discussion about the historical example, we give the integration of the system.

Proposition 8.5.1. *Let (x_0, y_0, γ_0) be the initial condition, the corresponding solution $(x(t), y(t), \gamma(t))$ is given as follows.*

— *For $\gamma_0 = \pm\pi/2$ one has :*

$$\gamma(t) = \gamma_0, \quad y(t) = \pm t + y_0 \quad \textit{and} \quad x(t) = \pm\frac{t^2}{2} + y_0 t + x_0.$$

— *For $\gamma_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, one has :*

$$\gamma(t) = \operatorname{atan}(\tan\gamma_0 - t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0} - \frac{1}{\cos\gamma(t)},$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma}\right|\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \left(y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0}\right)t + x_0.$$

— *For $\gamma_0 \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, one has :*

$$\gamma(t) = \pi + \operatorname{atan}(\tan\gamma_0 - t), \qquad y(t) = y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0} - \frac{1}{\cos\gamma(t)},$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma}\right|\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\right]_{\gamma_0}^{\gamma(t)} + \left(y_0 + \frac{1}{\cos\gamma_0}\right)t + x_0.$$

Synthesis : Cusp singularity and regularity of the value function. We use the heading angle and the Clairaut relation to stratify the Lagrangian manifold $\mathcal{L} = \exp t\mathbf{H}(q_0)$, where q_0 is in the strong current domain (see Figs. 8.5 and 8.6). One can also compute the time minimal synthesis. In the strong current case, q_0 is not strongly locally controllable, i.e. $A(q_0, t)$ is not a neighborhood of q_0 for small-time. The time $T(q_0)$ along the loop is the limit time such that $A(q_0, t)$ is a neighborhood of q_0.

Denote by $\Sigma(q_0)$ the adherence of the cut locus for geodesics starting at q_0 and contained in the adapted neighborhood one has :

Proposition 8.5.2. *Let q_0 in a strong current domain, then :*

1. *For $t > T(q_0)$, $A(q_0, t)$ is a neighborhood of q_0.*
2. *$\Sigma(q_0)$ is the union of the two abnormal curves, the one with a cusp point (corresponding to a conjugate point along the abnormal curve) being taken up to this cusp.*

8.5.2 The Averaged Kepler case

Riemannian case [15]

One takes

$$m_\lambda^2(\varphi) = \frac{\sin^2\varphi}{(1 - \lambda\sin^2\varphi)}$$

where $\lambda \in [0, 1]$ is an homotopic parameter, $\lambda = 0$ being the round sphere, $\lambda = 1$ is the Grushin case, with a singularity at the equator while $\lambda = 4/5$ is associated to Kepler orbit transfers. The Gauss curvature is

$$K_\lambda = \frac{1}{(1 - \lambda\sin^2\varphi)^2}((1-\lambda) - 2\lambda\cos^2\varphi).$$

The equator is $\varphi = \pi/2$ and we introduce $r := \pi/2 - \varphi$ to normalize the equator to zero, and it is the only parallel solution. The metric is taken in the normal form $g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2$. One set $m_\lambda(r) = m_\lambda(\pi/2 - \varphi)$ and the metric is reflectionally symmetric with respect to the equator, that is $m(r) = m(-r)$, which is crucial for the explicit determination of the conjugate and cut loci. Using the Hamiltonian formalism, we associate to the metric the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)$$

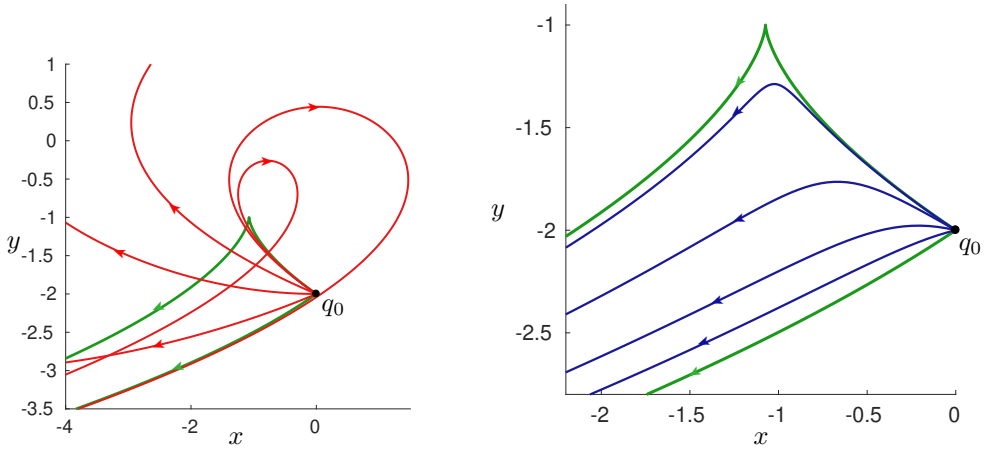


FIGURE 8.5 – Geodesic flow in hyperbolic case (Left) and elliptic case (Right) in the whole conic neighborhood delimited by the two abnormal geodesics. Hyperbolic geodesics are represented in red, elliptic geodesics are represented in blue and abnormal geodesics are represented in green. Initial point is taken at $q_0 = (0, -2)$.

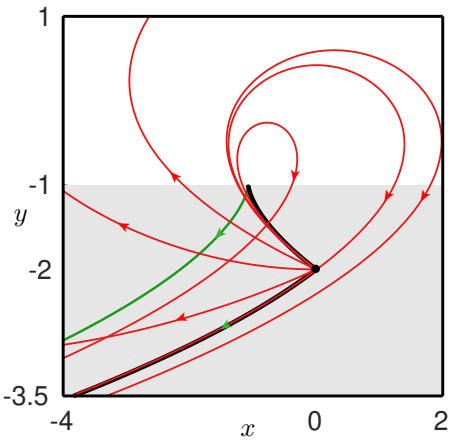


FIGURE 8.6 – Minimal time optimal synthesis in an adapted rectangle neighborhood containing the limit loop. The initial point is $q_0 = (0, -2)$. The abnormal geodesics are represented in green and in red are represented hyperbolic geodesics. The cut locus, formed by the abnormal geodesics, is represented in black.

and parameterizing by arc-length amounts to set $H = 1/2$. To integrate the geodesic, we introduce the characteristic equation

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(r, p_\theta) = 1, \quad \text{with} \quad V(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{m^2(r)}.$$

A geodesic is either a meridian, the equator or each other solution such that r is periodic and oscillates between $-r_+$ and r_+ and is entirely determined by a branch of the characteristic equation evaluated on the quarter of period $T/4$ where $r(t)$ belongs to $[0, r_+]$, r_+ being the positive root of the equation $V = 1$, the period being given by the integral

$$\frac{T}{4} = \int_0^{r_+} \frac{\mathrm{d}r}{(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}},$$

which depends upon p_θ. By symmetry with respect to the meridian it can be supposed non-negative and belonging to $(0, m(r_0))$. To make the analysis we introduce the application called the *period mapping* of first return to the equator : $p_\theta \mapsto T(p_\theta)$.

The geodesic flow is Liouville integrable and the transcendence is characterized basically by the transcendence of the period mapping. More precisely, to integrate one introduces $X = \sin^2 r$, $r \in (0, \pi/2)$ and one gets

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}} = \int \frac{\mathrm{d}X}{((1 - X^2)(1 - \lambda p_\theta^2) - p_\theta^2)^{1/2}}.$$

To integrate one can assume that $r(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ since every oscillating trajectory is such that r is intersecting the equator and we use

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - V(r, p_\theta)}, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{V(r, p_\theta)}{p_\theta}.$$

One gets that

$$\theta(t) = (2n - 1)\Delta\theta + \int_{r(t)}^{0} \frac{V(r, p_\theta)\,\mathrm{d}r}{p_\theta(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}},$$

where $n \in \mathbb{N}$ counts the number of intersections with the equator and by symmetry we can assume that the number of intersections is odd. The function $\Delta\theta$ for $p_\theta \in (0, m(r_0)$ is the so-called *first return mapping to the equator*. The following is crucial in our optimality analysis. We can restrict to an initial point at the equator $q_0 = (0, 0)$.

Proposition 8.5.3. *Assume that the first return mapping to the equator is monotone non-increasing, then the first conjugate time is given by the equation*

$$\frac{\partial \theta}{\partial p_\theta}(r, p_\theta) = 0,$$

where θ is parameterized by r according to

$$\theta(r, p_\theta) = \Delta\theta(p_\theta) - \int_{r^+}^{r} \frac{V(r, p_\theta)\,\mathrm{d}r}{p_\theta(1 - V(r, p_\theta))^{1/2}},$$

the first conjugate time being between $T/2$ and $T/2 + T/4$.

Integration of solutions.

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\cos^2 r - p_\theta^2(1 - \lambda \cos^2 r)}{\cos^2 r}.$$

We denote Z_+ and Z_- the roots of

$$1 + p_\theta^2(\lambda - 1) = Z^2(1 + \lambda p_\theta^2),$$

where $Z = \sin r$ and the period reads

$$\frac{T}{4} = \int_0^{Z_+} \frac{\mathrm{d}Z}{(1 + p_\theta^2(\lambda - 1) - Z^2(1 + \lambda p_\theta^2))^{1/2}}.$$

Normalizing the amplitude of the oscillation by $Z = Z_+ Y$ one has

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}Y}{\left((1 + \lambda p_\theta^2)(1 - Y^2)\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda p_\theta^2)^{1/2}} [\arcsin Y]_0^1. \end{aligned}$$

Proposition 8.5.4. *The period is given by*

$$T(p_\theta) = \frac{2\pi}{(1+\lambda p_\theta^2)^{1/2}},$$

moreover one has :

$$\arcsin Y(t) = (1+\lambda p_\theta^2)^{1/2} t.$$

This defines the renormalized time $s = (1+\lambda p_\theta)^{1/2} t$ and the θ-variable is integrated using

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = p_\theta \frac{1-\lambda(1-\sin^2 r)}{1-\lambda \sin^2 r}.$$

Hence, one gets

$$\theta(t) = \int \frac{p_\theta \,\mathrm{d}t}{\cos^2 r} - \lambda p_\theta t$$

and we obtained the following.

Proposition 8.5.5.

$$\theta(t) = \frac{p_\theta}{(1+\lambda p_\theta^2)^{1/2}(1-Z_+^2)^{1/2}} \operatorname{atan}\Big(\big(1-Z_+^2\big)^{1/2} \tan\big((1+\lambda p_\theta^2)t\big)\Big) - \lambda p_\theta t.$$

This leads to a complete parameterization of the geodesic curves and of the conjugate locus. Note that a simplified and standard computation is to parameterize the angle θ by r instead of t. Moreover, one can compute the periodic curves. Indeed, one can obtain the first return mapping $\Delta\theta(p_\theta)$ by setting in the above formula $t = T/2$ and periodic mappings are such that $\Delta\theta/2\pi$ is a rational number. In particular simple periodic geodesics can be obtained and classified by ordering with respect to their length, by analogy with the prolate ellipsoid case, the shortest being the meridian. In particular, in the averaged Kepler case they are described in [14], that is five *simple* curves. To analyze the optimality in this Riemannian case we proceed as follows.

Determination of the conjugate and cut loci. We recall that, the problem is called *tame* if the first return mapping to the equator is monotone non increasing.

Proposition 8.5.6. *In the tame case the cut locus of a point on the equator is a sub-arc of the equator and the injectivity radius is formed by the cusp extremity of the conjugate locus on the equator.*

More generally the conjugate and cut loci of each point can be easily determined using an additional computable condition that we describe next.

Proposition 8.5.7. *Assume that we are in the tame case. Moreover, suppose that the first return mapping $\Delta\theta$ is such that $\Delta\theta' < 0 < \Delta\theta''$ on $(0, m(r_0))$, then :*

1. *The cut locus of a point not a pole is a segment of the antipodal parallel ;*
2. *The conjugate locus has exactly four cusp points.*

This can be applied to our case for $\lambda \in (0,1)$. Note that the conjugate locus of the equator is a standard astroid with four cusps. The limit Grushin case can be analyzed similarly, except that the equator is not a geodesic and the injectivity radius is zero. This gives a complete analysis of the Riemannian case.

Transition from the Riemannian case to the Zermelo case with a constant current

Recall that the so-called constant current case is given on the covering space by

$$F_0 = v\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad g = \mathrm{d}r^2 + m^2(r)\,\mathrm{d}\theta^2,$$

where v is a non-zero constant. For $q_0 = (r_0, \theta_0)$, the current will be strong (resp. weak) if $\sin^2 r_0 > \frac{1}{v^2+\lambda}$ (resp. if $\sin^2 r_0 < \frac{1}{v^2+\lambda}$) and moderate in the limit case where $\sin^2 r_0 = \frac{1}{v^2+\lambda}$.

Assumption 8.5.1. *In the case where the constant v is such that $v^2+\lambda<1$, the current will be weak all over the domain. Thus, in order to be in the strong case, we shall make the additional assumption*

(B1) *: $v^2+\lambda>1$.*

The following is a crucial geometric property.

Proposition 8.5.8. *On the two-sphere of revolution the vector field F_0 defines a linear vector field on $\mathbb{R}^3$ tangent to the sphere, and it corresponds to an uniform rotation whose axis is the axis of revolution. For the metric the equator solution is also a stationary rotation since $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ is constant along of the equator so that the effect of the constant current can be superposed with this rotation.*

To make the analysis we proceed as previously, the parameterization of the geodesics being similar, but the effect of the current is to obtain a more complicated micro-local analysis that we describe next, related to vanishing or not of the derivative of θ-component. Here, the Hamiltonian vector field is given by :

$$\mathbf{H}=p_\theta v+\|p\|_g=-\varepsilon,\quad \|p\|_g=\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{m^2(r)}\right)^{1/2}, \tag{8.14}$$

with $\varepsilon<0$ (resp. $\varepsilon>0$) corresponds to the hyperbolic (resp. elliptic) case and $\varepsilon=0$ to the abnormal one. Since the drift is constant, from the Hamiltonian one has $\|p\|_g=-(\varepsilon+p_\theta v)$ is constant. So fixing $\|p\|_g=1$ or $\varepsilon=0,-1,1$ are equivalent. Moreover, $G=p_\theta$ is the additional (linear) first integral and this insured the Liouville integrability of the system. One then gets the following :

Proposition 8.5.9. *The r-dynamics can be integrated using the characteristic equation*

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+V_\varepsilon(r,p_\theta)=1$$

where $\varepsilon=-p^0<0,=0,>0$ correspond respectively to the hyperbolic, abnormal and elliptic cases.

Démonstration. In the constant current case, starting from the equator and using the ascending branch gives the equation

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_\theta^2(1-\lambda\sin^2 r)}{\sin^2 r(\varepsilon+p_\theta v)^2}\right)^{1/2},$$

and since we have posed $\|p\|_g=1$, that is $(\varepsilon+p_\theta v)=-1$, then one has

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_\theta^2(1-\lambda\sin^2 r)}{\sin^2 r}\right)^{1/2},$$

which is the same expression as in the Riemannian case, computation is then similar. □

To integrate θ we use the dynamics

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}.$$

Again note that θ can be computed easily, parameterizing by r instead of t and one gets the following proposition. (In particular to determine the first return mapping to the equator).

Proposition 8.5.10. *The θ-variable is given by :*

$$\theta(t) = (2n-1)\Delta\theta + \int_{r(t)}^{0} \frac{V_\varepsilon(r,p_\theta)\,\mathrm{d}r}{p_\theta(1-V_\varepsilon(r,p_\theta))^{1/2}},$$

where $n \in \mathbb{N}$ counts the number of intersections with the equator and by symmetry we can assume that the number of intersections is odd. The function $\Delta\theta$ for $p_\theta \in (0, m(r_0))$ is the first return mapping to the equator.

This leads to the following stratification of the set of geodesics, using a stratification by the variable p_θ instead of the heading angle in the historical case. Indeed, in this case the geodesics curves are reflectionally symmetric with respect to the equator solution, the cone of direction being symmetric with respect to the equator. One can consider only by symmetry the case of ascending branches at the initial condition.

Proposition 8.5.11. *Suppose that assumption (B1) holds. Starting from the equator, one has the following stratification of the set of geodesics. Geodesics split into :*

- *Abnormal geodesics : we have two distinct abnormal geodesics parameterized by $p_\theta^a = -1/v$ and $p_{r_0} > 0$ for the ascending one and $p_{r_0} < 0$ for the descending one.*
- *Hyperbolic geodesics : which correspond to the time minimal solutions and parameterized by $p_\theta \in (p_\theta^a, m(r_0))$.*
- *Elliptic geodesics : which correspond to the time maximal solutions and parameterized by $p_\theta \in (-m(r_0), p_\theta^a)$.*

Moreover, in the hyperbolic case, the set of geodesics can be stratified in four classes namely (see Fig. 8.7) :

- *The equator which corresponds to the singular point : $r = \pi/2$, $p_r = 0$ and $p_\theta = m(r)$.*
- *The two pseudo-meridians (ascending and descending one). They are given by $p_\theta = 0$ and $p_r = \pm 1$.*
- *Generic periodic orbits which split in two different families namely orbits without loop parametrized by $p_\theta \in (0, m(r_0))$ and orbits with loops, parameterized by $p_\theta \in (p_\theta^a, 0)$ and contains by symmetry the orbits associated to $\pm p_r(0)$.*

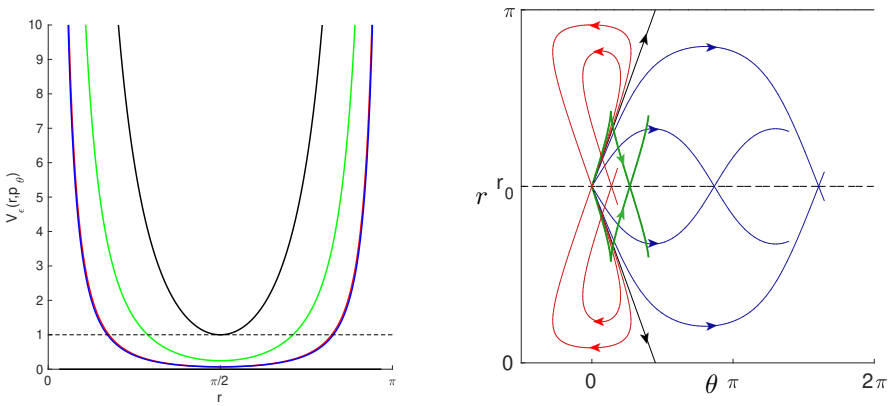


FIGURE 8.7 – (Left) We represent the potential for the different classes of geodesics in order to highlight the periodicity of the solutions. (Right) Illustration of different types of hyperbolic geodesics in the strong drift case. The meridians and the equator are represented in black while hyperbolic geodesics with a loop (resp. without loop) are represented in red (resp. in blue). Abnormal geodesics are represented in green. In this representation, we take $\lambda = 4/5$ and $v = 0.9$.

Determination of the two branches of the conjugate and cut loci. Next, we can determine the conjugate locus for a point at the equator. One needs to aggregate the two branches. The first branch points related to the abnormal direction as in the historical example and associated to self-intersections and cusp singularity. The second branch of the cut locus is associated to the tame behavior of the first return mapping to the equator and conjugate points computed for simple geodesics using Jacobi equations (observe that the generalized curvature can be easily computed along the equator since r is constant). Finally, observe that such points exists for non-self-intersecting geodesics but appear after the self-intersection. This leads to the following theorem.

Theorem 8.5.12. *Let us suppose that assumption* (B1) *holds i.e. we are in the strong current case along the equator. Then, the cut locus have two distinguished branches, the first branch being form by the abnormal geodesics up to their first cusp point and the second branch being a segment of the equator (see Fig. 8.8).*

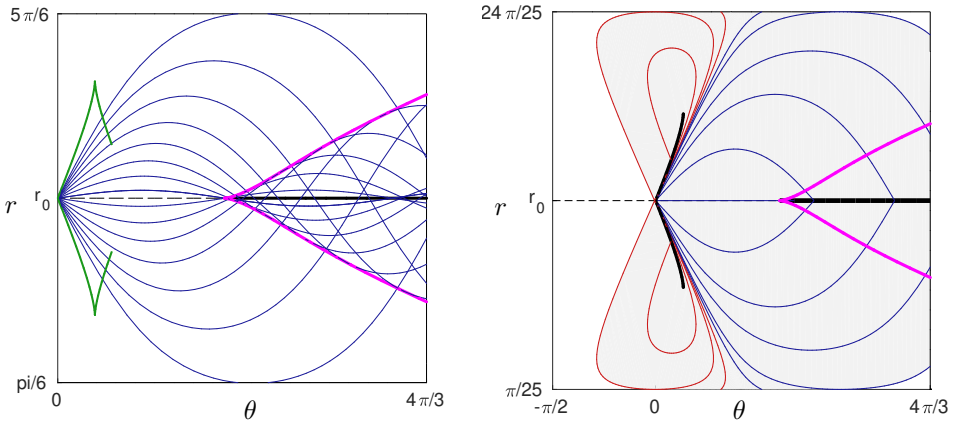


FIGURE 8.8 – (Left) Hyperbolic flow, conjugate and cut loci. (Right) Optimal synthesis in minimal time in an adapted neighborhood $R = \{\pi/25 \leq r \leq 24\pi/25\,; -\pi/2 \leq \theta \leq 4\pi/3\}$. The pseudo-meridians (separatrices) are portrayed in black while the hyperbolic geodesics to the left and right of the separatrices are in red and blue. The abnormal geodesics are in green. Conjugate and cut loci are in magenta and black. The gray sector represents, in the considered adapted neighborhood, the reachable domain. The white domain is not reachable in the neighborhood. We take $\lambda = 4/5$ and $v = 0.9$.

Deformation of the conjugate locus by homotopy on the constant current v in the weak case. Classical algorithm, presented in section 8.3 is used here to compute the conjugate locus. In order to see the deformation of the conjugate locus by the introduction of a constant current, we start by setting $v = 0$ (that corresponds to the original problem considered in [15]), then using an homotopy to increase the value of v until $\sqrt{1-\lambda}$ in order to remain in the weak case, one can observe the deformation of the geodesic flow and of the conjugate locus (see Fig. 8.9).

8.5.3 Complexity of the Hamiltonian Dynamics in the generalized vortex case

In the *vortex problem* (see [22] for a complete description of the problem), one has $F_0 = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$, with k being the circulation parameter, so the current becomes infinite at the vortex (in particular $\alpha_1 = \alpha_2$) but still the dynamics can be extended on the whole plane. We will first consider this case. Then, in order to present a more complete situation with many equators, compact and non-compact geodesics, we will consider the so-called general single-vortex case. But first, we

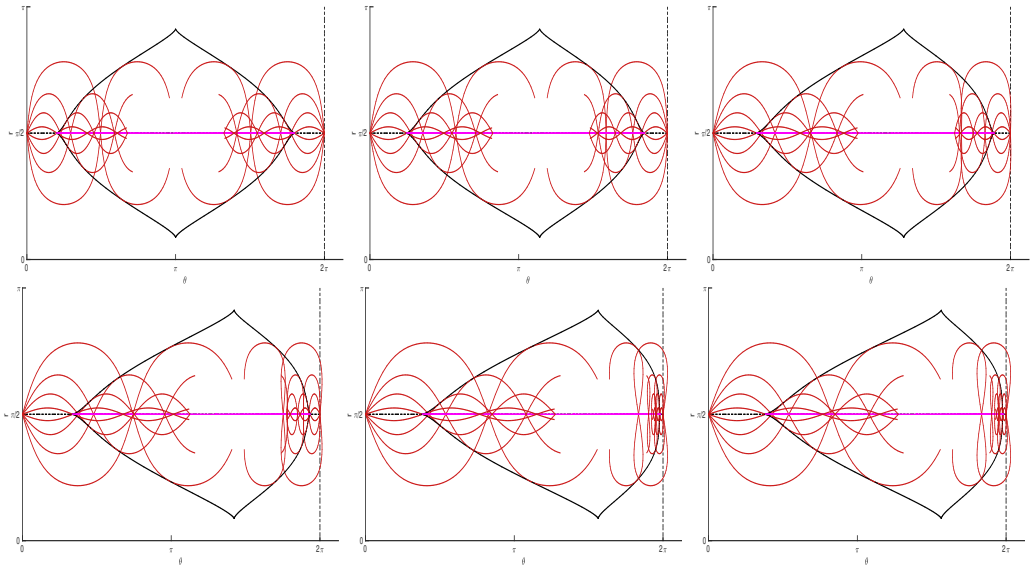


FIGURE 8.9 – Illustration of the deformation of the geodesic flow and conjugate locus in the weak current case. Taking $\lambda = 4/5$ and $v = 0.0$, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.42 respectively from above left to below right. Hyperbolic geodesics are represented in red, conjugate and cut loci are respectively represented in black and orange.

start by providing a generalization of the existence theorem from [22], see also the relation with [52] in celestial mechanics.

Existence of optimal solution

In this section we analyze the general vortex case. It takes the form

$$F_0 = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad F_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad F_2 = \frac{1}{m(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

In the simple vortex case one has $\mu(r) = \frac{k}{r^2}$. In the general case we assume that $\mu(r)$ has a pole of order $\beta \in]1, +\infty]$ at zero, so one can take the approximation $\mu(r) \sim \frac{1}{r^\beta}$ near the pole and moreover we assume $\mu(r) \to 0$ when $r \to +\infty$. First we need to generalize the argument of [89] to prove the existence of a solution. The proof is related to [52, 89], about the existence of minimizing solutions avoiding collision in the N-body problem and the Levi-Civita regularization of double collisions in the 3-body problem [96], see also [24] as a general reference in the context of existence of optimal solutions in control and Hamiltonian Dynamics. We have the following.

Theorem 8.5.13. *Take q_0, q_1 in the punctured plane $\mathbb{R}^2 \setminus\{0\}$, then there exists a time minimizing trajectory to transfer q_0 to q_1. Moreover, $q_0 = (r_0, \theta_0)$ can be transferred to the origin in minimum time $t_{min} = r_0$. Hence, one can extend the geodesic flow using a Levi-Civita type regularization beyond the collision with the pole by reversing the geodesic time parameterization when crossing the vortex.*

Sketch of the proof. The geodesic dynamics in polar coordinates reads

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{p_r}{\|p\|_g}, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mu(r) + \frac{p_\theta}{m^2(r)\|p\|_g}.$$

To prove the existence about minimizer curves it is sufficient to prove that the minimizing trajectories are avoiding the collision. Using the expansion near the pole and comparing the

time to make a rotation around the pole on a circle of radius r denoted $T_\theta(r)$ and the time to reach a circle of radius ε denoted $T_r(\varepsilon)$ a direct computation gives

$$T_\theta(r) = \frac{2\pi r^\beta m(r)}{r + m(r)}, \quad T_r(\varepsilon) = r - \varepsilon.$$

Hence the argument of [22] to replace a trajectory reaching a circle with small radius ε by the trajectory making a rotation around the pole is still valid and the existence result follows. Clearly from the equations the time to reach the pole from q_0 is obtained for $p_\theta = 0$ and is given by r_0. Following the Levi-Civita regularization we reverse the geodesics orientations when crossing the vortex. It amounts to replace $\mu(r)$ by $-\mu(r)$ and p_θ by $-p_\theta$ in the geodesics equations. □

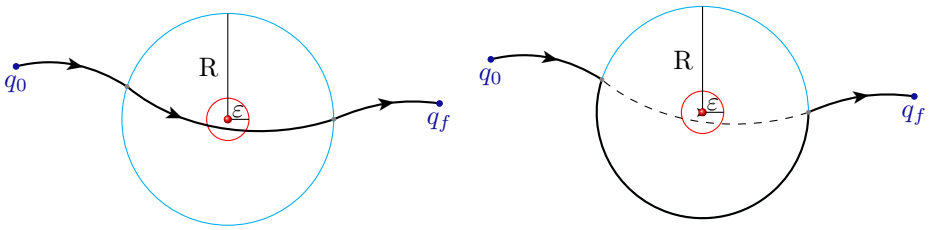


FIGURE 8.10 – Illustration of the construction of a strictly better admissible trajectory. The vortex is represented by a red ball, while the trajectories are the solid black lines. One can see on the left, a trajectory crossing the ball of radius ε. This trajectory is replaced on the right sub-graph by a strictly better admissible trajectory.

Remark 28. *In the vortex case the cone of admissible directions tends to zero at the vortex and the system is in the strong current domain. In this case we can encounter geodesics rotating around the vortex to reach a final point and make use of the vortex to reach points [20, 22] (as illustrated in Fig. 8.11).*

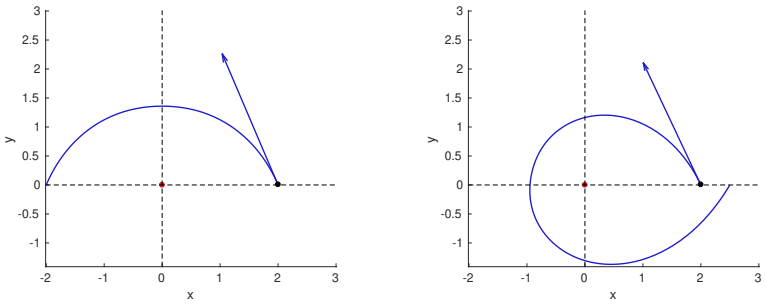


FIGURE 8.11 – Geodesic with a strong drift at the initial point : $\mu = 2\,\|q_0\|$. (Left) $q_0 = (2, 0)$, $q_f = (-2, 0)$ and the final time is $t_f \approx 1.641$. (Right) $q_0 = (2, 0)$, $q_f = (2.5, 0)$ and the final time is $t_f \approx 2.821$.

Remark 29. *One must have $\beta > 1$, so it is similar to the assumption of Poincaré to avoid collisions for minimizers by modifying the Keplerian potential and the bound $\beta \geq 2$ in the potential interaction (called "strong potential" by Poincaré). In our case the bound is given by $T_\theta(r) < T_r(\varepsilon)$ i.e. $\varepsilon < r\left(1 - \frac{2\pi r^{\beta-1} m(r)}{r^\beta + m(r)}\right)$ for a couple $0 < \varepsilon < r$ and the bracket term has to be > 0.*

Next, we describe the complexity of the dynamics in the vortex problem, in particular in relations with the interaction between equators and the vortex.

The single vortex case in hydrodynamics

On the punctured plane we consider the case of an Euclidean metric in polar coordinates with

$$g = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 \quad \text{and} \quad F_0 = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

The generalized potential is given by

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2 r^2}{(\varepsilon r^2 + p_\theta k)^2}.$$

The geodesic curves can be classified using the potential and the main features are described next see [22] for more details and Figs. 8.12 and 8.13 for illustration.

Theorem 8.5.14. *Considering the single vortex case, one has the following :*

- *The domain of strong current is near the vortex and limited by the circle of radius $r = k$ of moderate current. The only equator solution is in the domain of weak current and is defined by the circle with radius $r^* = 2k$. There exists an unique sepratrix forming a Reeb component of a foliation with singularity in the interior of the disk delimited by the equator emanating from the vortex as a singular point and converging to the equator where $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ on the circle with radius $2k/\sqrt{3}$.*
- *At the exterior of the circle with radius r^* there exists an unique separatrix emanating from the equator and converging to the infinity.*
- *There exist two pseudo-meridians where $p_\theta = 0$, converging with maximal radial speed either towards the vortex or to the infinity.*
- *The separatrix splits the geodesic flow into two distinct classes, namely the trajectories that converge towards the vortex and those that go to infinity.*

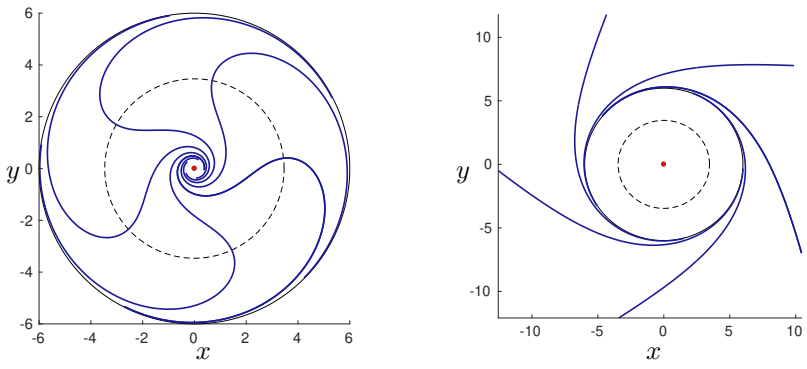


FIGURE 8.12 – (Left) Reeb's foliation formed by the separatrices in the perforated disk of radius $2k$ in the (x, y) plane. (Right) Foliation formed by the separatrices outside the disk of radius $2k$. The vortex is placed at the origin and represented by a red point. The circles in black correspond to circles of radius $2k/\sqrt{3}$ (where $\dot{\theta}$ vanishing along the separatrix) and of radius $2k$.

Single general vortex case

In the simple vortex problem presented above, there is an unique equator at $r^* = 2k$. In order to present a complete situation where we have several septatrices and several equators, in

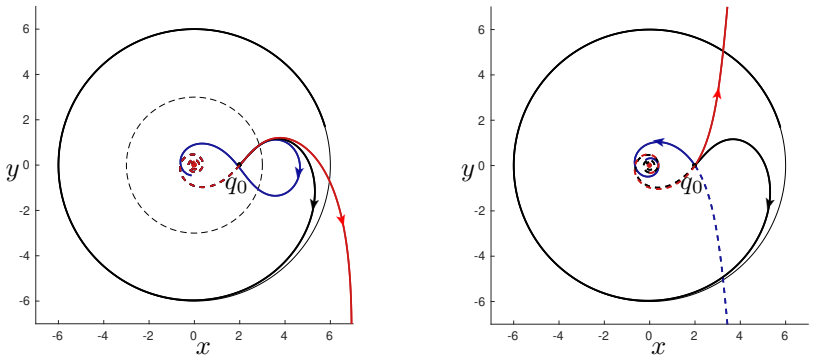


FIGURE 8.13 – (Left) Behavior of the trajectories around the separatrix (black). The geodesics below the separatrix (blue), i.e. parametrized by $p_\theta < p_\theta^*$ (p_θ^* parametrizing the separatrix), converge towards the vortex and those above the separatrix (red) go to infinity. However, in the neighborhood of the separatrix the geodesics all come from the vortex. (Right) Illustration of the two pseudo-meridians represented in red and blue. The orbits of these do not coincide because of the drift. In dotted line the trajectories are traversed in negative time.

particular an L-elliptic equator, we remain within the framework of a Zermelo problem with a vortex singularity, but we consider a general drift in the form :

$$F_0(q) = \mu(r)\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \text{with} \quad \mu(r) = \frac{\lambda\, r + \beta}{r^3}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

The generalized potential in this case is given by :

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = \frac{p_\theta^2 r^6}{(\varepsilon r^3 + p_\theta(\lambda r + \beta))^2}.$$

Assuming $\lambda^2 > 3\beta$ and $\beta < 0$, the equators and separatrices are determined thanks to the following proposition :

Proposition 8.5.15. *Supposing that $\lambda^2 > 3\beta$ and $\beta < 0$, then we have three different equators associated to the system and given by :*

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 3\beta}, \quad r_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 3\beta} \quad \textit{and} \quad r_3 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 3\beta}, \tag{8.15}$$

such that the equators r_1 and r_3 are L-hyperbolics and the equator r_2 is L-elliptic. Moreover, the trajectories associated to the equators r_1, r_2 and r_3 are respectively parameterized by :

$$p_\theta^1 = \frac{m(r_1)}{1 + \mu(r_1)m(r_1)}, \quad p_\theta^2 = -\frac{m(r_2)}{1 - \mu(r_2)m(r_2)}, \quad \textit{and} \quad p_\theta^3 = -\frac{m(r_3)}{1 - \mu(r_3)m(r_3)}.$$

Démonstration. This comes from the proposition 8.4.9. Indeed, system :

$$V_\varepsilon(r, p_\theta) = 1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}(r, p_\theta) = 0, \quad \text{with} \quad p_\theta \neq 0. \tag{8.16}$$

leads us to the second order equation :

$$\delta r_2 + 2\lambda r + 3\beta = 0, \quad \text{where} \quad \delta = sign(p_\theta), \tag{8.17}$$

and if we assume that $\beta < 0, \lambda^2 > 3\beta$, then we have :

— for $\delta = 1$ i.e $p_\theta > 0$, (8.17) has one unique positive root given by $r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 3\beta}$,

— for $\delta = -1$ i.e $p_\theta < 0$, (8.17) has two positive roots given by $r_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 3\beta}$ and $r_3 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 3\beta}$.

Plugging this in the first equation of (8.16) allows us to :

$$p_\theta^1 = \frac{\varepsilon m(r_1)}{1-\mu(r_1)m(r_1)}, \quad p_\theta^2 = \frac{-\varepsilon m(r_2)}{1+\mu(r_2)m(r_2)} \quad \text{and} \quad p_\theta^3 = \frac{\varepsilon m(r_3)}{1-\mu(r_3)m(r_3)}$$

Additional condition on the second order derivative of the potential associated to each of these p_θ allows us to conclude that p_θ^1 and p_θ^3 are (resp. of p_θ^2 is) L-hyperbolic (resp. L-elliptic). □

Remark 30. *To the equator r_2, L-elliptic, is associated the geodesic parametrized by $p_\theta^2 = \frac{-\varepsilon m(r_1)}{1+\mu(r_1)m(r_1)}$ which is not defined for a $r_0 \neq r_2$ taken in a neighborhood of r_2 as shown by the representation of the potential associated to this geodesic (see Fig. 8.19). On the other hand, the separatrix given by p_θ^3 is not defined for all r_0 as shown by the potential represented in Fig. 8.20. Thus, depending on the domain in which r_0 will be considered, classification of geodesics will be different.*

Classification of geodesics The classification of geodesics can be done from the analysis of the generalized potential. Depending on the value of the parameter p_θ, the potential will be bounded or not. We describe below the classification of the flow according to the different situations.

1. **Case where the potential is bounded.** This case is split into three subcases, namely :
   (a) **Case where the maximum is strictly less than 1.** In this case, there is only one type of trajectories, they are not compact, they all come from the vortex and all go to infinity (cf. Fig. 8.14 for illustration).
   (b) **Case where the maximum is strictly greater than 1.** In this case we have two distinct classes of trajectories. Those which converge in positive as well as negative time towards the vortex, obtained when starting from an initial point close to the vortex ; and those which go in positive as well as negative time to infinity, obtained when starting with a rather large r_0. These two situations are illustrated in figure 8.15.
   (c) **Limit case where the maximum of the potential equals 1.** This case corresponds to the equator given by r_1, whose associated separatrix forms, as in the case of the simple vortex problem, a Reeb component (varying the initial angle θ_0) with a singularity at the vortex (cf. Fig 8.18 for illustration).
2. **Case where the potential is not bounded.** In this case, the potential has a new local minimum and a new local maximum. Three situations occur again, namely :
   (a) **Case where the local minimum and maximum are both strictly greater than 1 or strictly less than 1.** In this case, the geodesics are of the same type as in the case described in 1-(b) with the only difference that in the case where the minimum and maximum are < 1, the trajectories going to infinity oscillate. An illustration is given in figure 8.16.
   (b) **Case where the local minimum is strictly less than 1 and the local maximum is strictly greater than 1.** We have three types of trajectories in this case. The first two types correspond to those described above and are obtained respectively for r_0 close to the vortex and for r_0 quite large. The third type of trajectories corresponds to compact trajectories (here contained in a compact annulus). They are obtained when we start between the minimum and the maximum. An illustration of these different types is given in the figure 8.17.
   (c) **limit cases**. The case where the local minimum equals 1 corresponds to the L-elliptic equator given by r_2 (cf. Fig. 8.19) and the case where the local maximum equals 1 corresponds to the L-hyperbolic equator given by r_3. The separatrix associated to the L-hyperbolic equator remains compact and converges in positive as well as negative time to the equator. It then defines a *homocline* trajectory (cf. Fig. 8.20).

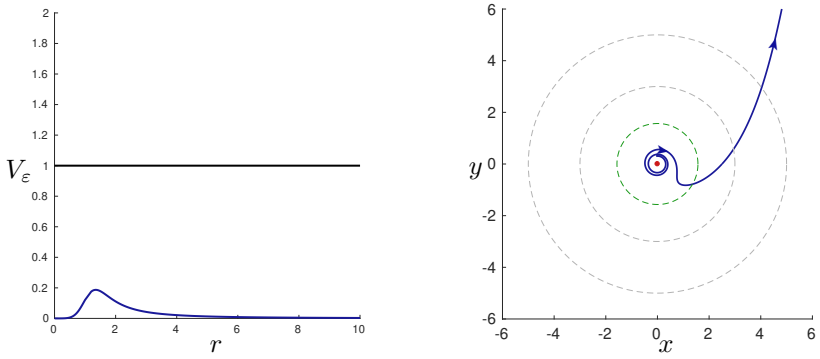


FIGURE 8.14 – Case 1-(a). We can deduce from the potential represented on the left graph that trajectories necessarily come from the vortex and go to infinity, the orientation of trajectories being taken according to the positive direction of integration that we have chosen.

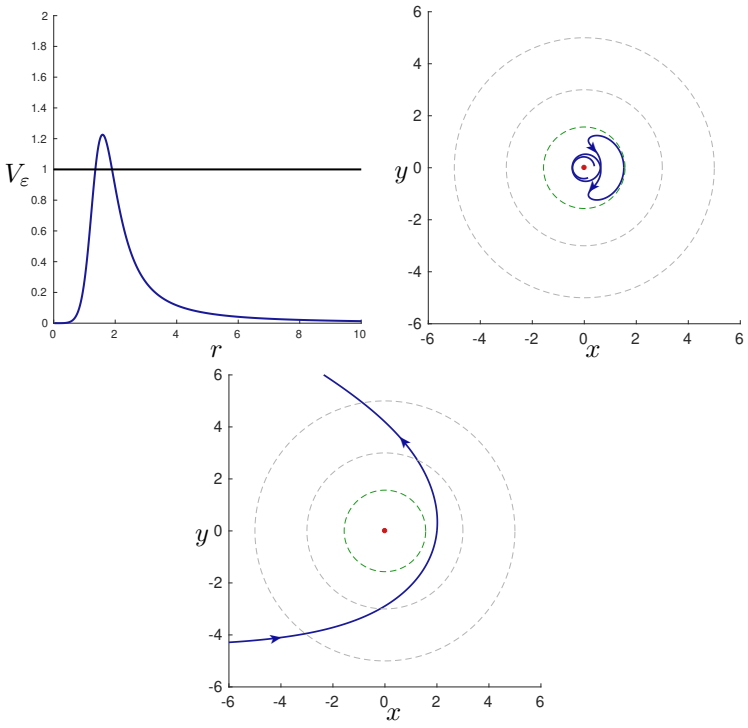


FIGURE 8.15 – Case 1-(b). We deduce from the potential (left) that the trajectories coming from the vortex go back to the vortex, and that the ones starting from a quite large r_0 go to infinity.

8.5.4 Algorithm in the general case and the gluing process

Algorithm

One can deduce from the previous studies the method of analysis to handle a general case, and we proceed as follows. In the normal coordinates (r, θ) on the covering manifold M^c one has $r \in (0, R)$. We can decompose the domains into disks $c_i < r < c_{i+1}$ with alternatively weak and strong currents. We compute the equators solutions listed as $0 < r_1 < r_2 < ... < r_p < R$ and they can be classified according to their optimality status into hyperbolic or elliptic equators. Taking a point q_0, one can parameterized the geodesics with the mechanical representation with the

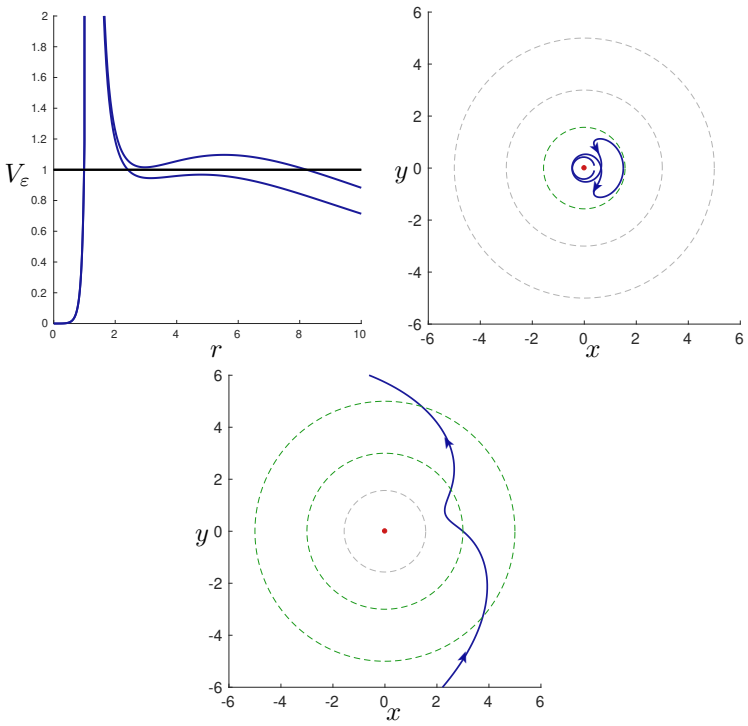


FIGURE 8.16 – Case 2-(a). We deduce from the potential (left) that the trajectories coming from the vortex return to it and that those starting from a quite large r_0 go to infinity.

extended potential using *improper integrals*. This allows to construct the time-minimal synthesis in *an adapted neighborhood* as in the case studies using the first return mappings to the equator and meridian, combining with conjugate point analysis. Note that in the strong current domain the size of the adapted neighborhood is defined by the limit loop of the self-intersecting geodesics related to the abnormal direction. This can be extended to a larger domain by gluing different adapted neighborhoods.

The gluing process

Note that complicated situations can be obtained by gluing case studies using the normal coordinates (r, θ), each case being defined by a pair $(\mu_i(r), m_i(r))$ parameterizing respectively the current and the metric. They can be glued together in the $\mathbb{C}^\infty$-category using bump functions. For instance the vortex case with Euclidean metric can be glued to the averaged Kepler case to represent the motion of a passive tracer swallowed by the vortex to enter into a Kepler domain to visit an equator solution, with non zero-curvature.

8.6 Conclusion

In this article we have analyzed Zermelo navigation problems on surfaces of revolution when the current has a symmetry of revolution and is oriented only along the parallel. The contribution has to be interpreted as a generalization of the Carathéodory-Zermelo quickest nautical path problem and covers the recent study of the evolution of a passive tracer near a single vortex. We have introduced the modern technics from geometric control suitable to make a complete analysis and in particular to analyze the role of abnormal geodesics corresponding to limit curves observed in the historical example. We have provided a neat interpretation of the cusp singularity along the abnormal geodesic in relation with conjugate point analysis and regularity of the value

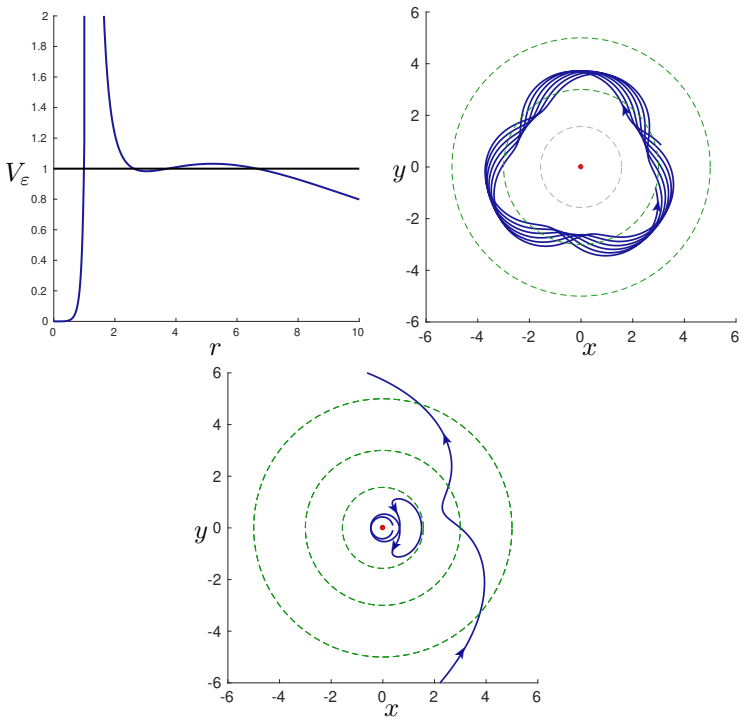


FIGURE 8.17 – Case 2-(b). We deduce from the potentials (left) that trajectories starting between the minimum and the maximum remain contained in an annulus, that those coming from the vortex return to it and that those starting from a large r_0 go to infinity. On the middle graph we represent a compact trajectory and in the right graph we represent the two other situations. On the right-hand graph is represented a trajectory for which the associated potential has its local maximum strictly less than 1 : we can see it oscillating around the r_2 L-elliptic equator.

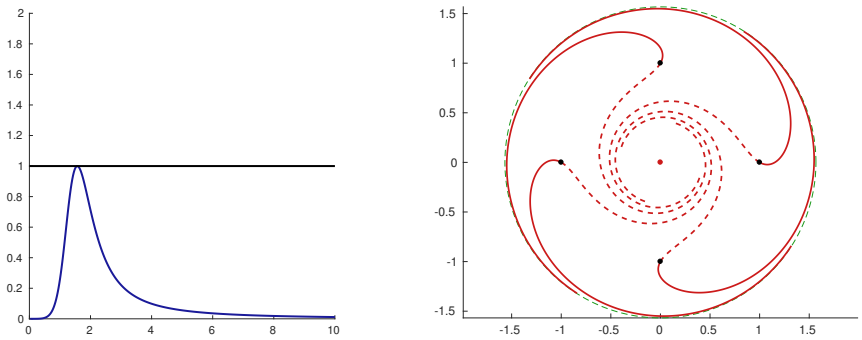


FIGURE 8.18 – Case 1-(c). Reeb's foliation formed by the separatrix parameterized by p^1_θ. In continuous line the trajectories are crossed in positive time and in dashed line they are crossed in negative time. The vortex is represented by the red dot and the different initial points by the black dots. The green circle represents the equator associated to r_1.

function. This result can serve as a toy model to a further understanding of abnormal geodesics in SR-geometry or in optimal control since from singularity point of view and classification of the singularities of the value function, the results go far beyond Zermelo navigation problems on surfaces of revolution.

We have introduced the geometric tools from dynamical systems to classify the geodesics behaviors using a generalized Morse-Reeb classification. In this context note that our study can be extended to a more general current since we can clearly relax the assumption about parallel

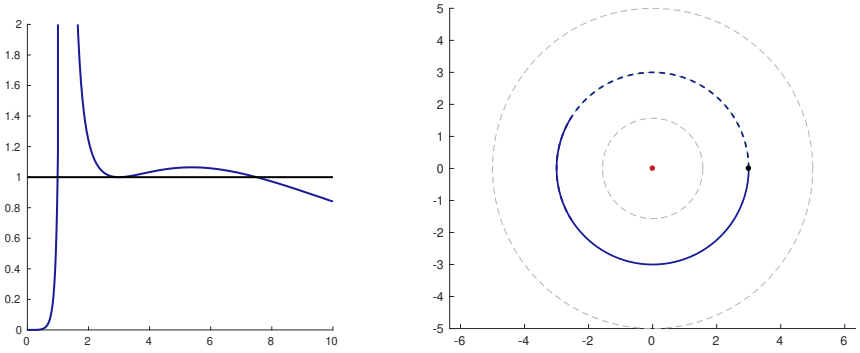


FIGURE 8.19 – Case 2-(c). L-elliptic equator associated to r_2. Green circles represent the equators associated to r_1 and r_3.

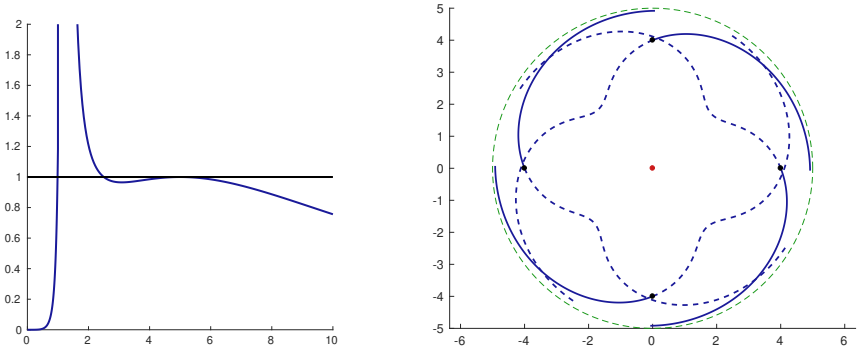


FIGURE 8.20 – Case 2-(c). Homocline separatrix parameterized by p_θ^3. The green circle represents the equator associated to r_3.

current. Indeed, in the general case to define the generalized potential we have only to consider the different branches of the p_r-variable using the constancy of the maximized Hamiltonian. But in relation with dynamics classification, the Liouville integrability related to symmetry of revolution is crucial. In this restricted context we have analyzed the complexity of the dynamics in relation with non compactness and separatrix geodesics and the existence of Reeb foliations. This is coherent with complexity analysis of such 3D-dynamics, taking p_θ as a parameter associated to standard topological classification of such foliations.

One interesting result of this article is to get for a whole class of optimal control problems a description in a generic context of the cut locus. Indeed, from our analysis, it is split into two distinct components. The first component is associated to Poincaré-Myers analysis of the cut locus on analytic Riemannian surface, in particular on 2D-sphere where it can be defined as a stratified tree, extremities of the branches being cusps points of the conjugate locus. This led in particular to the determination of cut loci on spheres of revolutions. It can be extended to the Liouville case where the additional integral is quadratic in p_θ. The second component is associated to the existence of cusp singularity when the abnormal geodesic reflects on the boundary of the strong current domain. Again, it can be interpreted using the generalized potential extended to the complex domain, since abnormal directions are real solutions of a determinantal set.

Chapitre 9

Minimum energy control of passive tracers advection in point vortices flow

C. Balsa, O. Cots, J. Gergaud, B. Wembe, *Minimum energy control of passive tracers advection in point vortices flow.* In : Gonçalves J.A., Braz-César M., Coelho J.P. (eds) CONTROLO 2020. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 695. Springer,

abstract. In this work we are interested in controlling the displacement of particles in interaction with N point vortices, in a two-dimensional fluid and neglecting the viscous diffusion. We want to drive a passive particle from an initial point to a final point, both given *a priori*, in a given finite time, the control being due to the possibility of impulsion in any direction of the plane. For the energy cost, the candidates as minimizers are given by the normal extremals of the Pontryagin Maximum Principle (PMP). The transcription of the PMP gives us a set of nonlinear equations to solve, the so-called shooting equations. We introduce these shooting equations and present numerical computations in the cases of $N = 1$, 2, 3 and 4 point vortices. In the integrable case $N = 1$, we give complete quadratures of the normal extremals.

Résumé. Dans ce travail, nous nous intéressons au contrôle du déplacement de particules en interaction avec N-vortex ponctuels, dans un fluide en dimension 2 et en négligeant la visqueusité du fluide. Nous voulons conduire une particule passive d'un point initial à un point final, tous deux donnés *a priori*, en un temps fini donné, le contrôle étant dû à la possibilité d'impulsion dans toute direction du plan. Pour le coût énergétique, les candidats minimisateurs sont donnés par les extrémales normales du principe du maximum de Pontryagin (PMP). La transcription du PMP nous donne un ensemble d'équations non linéaires à résoudre, appelées équations de tir. Nous introduisons ces équations de tir et présentons des calculs numériques dans les cas de tourbillons ponctuels $N = 1$, 2, 3 et 4. Dans le cas intégrable $N = 1$, nous donnons des quadratures complètes des extrémités normales.

Key words : Helhmoltz-Kirchhoff N vortices model, Energy minimization, Pontryagin Maximum Principle, Indirect shooting method.

9.1 Introduction

This work is concerned with the control of the displacement of particles in interaction with point vortices, in a two-dimensional fluid, where the viscous diffusion is neglected, which is

equivalent to using the Euler equation instead of the Navier-Stokes equation as the mathematical model of the fluid flow. We refer to Ref. [82] for details about vortex theory.

In most of the control problems, concerning realistic flows, the solution is achieved by means of simplified models such as point vortex [105]. There is a special interest in the use of control methods applied to vortex dynamics in the fields of geophysical fluid dynamics, aeronautic and hydrodynamic [91]. In the context of hydrodynamics, the fish-like locomotion and autonomous underwater vehicles are applications of point vortex that have received some attention in the last years due to the necessity of data sampling in the oceans water [87, 74, 44]. Moreover, from the dynamics of such systems there is an intense activity research initiated by Poincaré [89] to compute periodic trajectories avoiding collisions and such techniques lead to the concept of choregraphy developed by [42] for the N-body problem and [33] for the N-vortex system, showing the relations between both dynamics in the Hamiltonian frame [76]. From the control point of view, there is a lot of development related to space navigation for the N-body problem, see [24], valuable in our study for ship navigation in the N-vortex problem.

In this work we apply the Pontryagin Maximum Principle (PMP) to control the displacement of a passive particle (which is by definition a zero circulation vortex), influenced by vortex points located around it, in an optimal way (we consider the energy cost, see [22] for time minimization). This problem is a particular case of the challenging "Problem 2" included in [91]. A passive particle is small enough not to perturb the velocity field, but also large enough not to perform a Brownian motion. Particles of this type are the tracers used for flow visualization in fluid mechanics experiments [9]. We consider also that the passive particles have the same density of the fluid in which it is embedded. Explicitly we want to drive a passive particle from an initial starting point to a final terminal point, both given *a priori*, in a given finite time. Here, the vortex dynamics is governed by N point vortices and the control is due to the possibility of impulsion in any direction of the two dimensional plane (a sufficiently long time is considered so that the optimal control remains bounded and its amplitude is small enough).

The article is structured as follows : Section 9.2 is devoted to the statement of the control problem. The maximum principle is stated in Section 9.3, with some results in the one vortex case. The cases of 2, 3, 4 vortices are treated in Section 9.4.

9.2 Vortex Dynamics and Statement of the Problem

We give in this section a short description of the vortex dynamics and we refer to [82] for more details. This description is followed by the formulation of the control problem addressed in this work.

Let us consider the case of a two-dimensional fluid, for which the incompressible Euler equations are given by

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + (\nu \cdot \nabla)\,\nu = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \nu = 0, \tag{9.1}$$

where ν stands for $\nu(X,t) \coloneqq (\nu_1(X,t), \nu_2(X,t))$ and represents the velocity field and p is the pressure of the fluid. Due to $\nabla \cdot \nu = 0$ (the incompressibility equation) from (9.1), one can write $\nu = (\nu_1, \nu_2) =: (\partial_y \Psi, -\partial_x \Psi)$ where Ψ is called the stream-function. Besides, let $\mathbf{w}$ denote the viscosity vector and introduce $\tilde{\nu} \coloneqq (\nu, 0)$, then $\mathbf{w}$ is given by the relation $\mathbf{w} = \nabla \wedge \tilde{\nu} = (0, 0, \partial_x \nu_2 - \partial_y \nu_1) =: (0, 0, \omega)$, and with the two previous formulas, one can deduce the Poisson equation satisfied by Ψ, that is $\nabla^2 \Psi = -\omega$. The resolution of this equation leads to

$$\Psi(X,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(\|X - Y\|)\, \omega(Y,t)\ \mathrm{d}Y,$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm. On the other hand, considering a finite number N of point vortices, then the viscosity vector can be written in the form $\omega(X,t) = \sum_{i=1}^{N} k_i \delta(X - X_i(t))$, where δ is the Dirac mass and where k_i is the circulation of the ith-vortex. These two previous

relations allow us to write the vortex dynamics as follows :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2},$$

where (x_i, y_i) is the position of the ith-vortex and where $r_{ij}^2 \coloneqq (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ is the square distance between the vortices i and j.

As mentioned above, the aim of this paper is not to control the vortices but the displacement of particles. The idea is therefore to consider a particle (or passive tracer) as a point vortex with zero circulation and to apply a small amplitude control acting only on the passive tracer [91]. The control system is then written as follows : $\dot{q} = F_0(q) + u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q)$ where $q \coloneqq (x, y, x_1, y_1, \cdots, x_N, y_N) \in \mathbb{R}^{2(1+N)}$ is the vector of positions of the particle and the vortices, where the control fields are $F_1(q) = \frac{\partial}{\partial x}$ and $F_2(q) = \frac{\partial}{\partial y}$, and where the drift F_0 is given by

$$\begin{aligned} F_0(q) = &-\sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{y - y_j}{r_j^2}\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{x - x_j}{r_j^2}\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \left(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{k_j}{2\pi}\frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2}\frac{\partial}{\partial y_i} \right), \end{aligned}$$

with $r_i^2 \coloneqq (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$, $i = 1, \cdots, N$. The optimal control problem of interest is then defined as follows : minimize the transfer energy $J(u) \coloneqq \int_0^T \|u(t)\|^2 \,\mathrm{d}t$ to drive a passive particle from an initial point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ to a target point $(x_f, y_f) \in \mathbb{R}^2$, both given *a priori*, in a given finite time $T > 0$. The initial positions of the vortices being also given.

9.3 Case of one vortex

9.3.1 Pontryagin maximum principle and shooting function

In the single vortex case one has $(\dot{x}_1, \dot{y}_1) = (0, 0)$, that is the vortex is static and can be fixed to the origin of the reference frame. Hence, the control system may be reduced to

$$\dot{q}(t) = F_0(q(t)) + u_1(t)F_1(q(t)) + u_2(t)F_2(q(t)), \tag{9.2}$$

where $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (by a slight abuse of the notation since $(x_1, y_1) = (0, 0)$ is constant) is the position of the particle and where the drift and the control fields are given by

$$F_0(q) = \frac{\mu}{x^2 + y^2}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad F_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mu \coloneqq \frac{k}{2\pi}.$$

Explicitly the control problem in this case is written :

$$\dot{x}(t) = -\frac{\mu\, y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} + u_1(t), \quad \dot{y}(t) = \frac{\mu\, x(t)}{x^2(t) + y^2(t)} + u_2(t),$$

Lemma 9.3.1. *For any q_0, q_f there exists a control joining q_0 to q_f in time $T > 0$.*

Proof. Considering the polar coordinates $(r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y)$ and an adapted rotating frame for the control, $v = u\, e^{-i\theta}$, the control system (9.2) becomes $\dot{r}(t) = v_1(t)$, $\dot{\theta}(t) = \mu/r(t)^2 + v_2(t)/r(t)$. From q_0, we can apply a constant control $v(t) = (\alpha_1, 0)$ until the distance $\|q_f\|$ is reached and then apply a constant control $v(t) = (0, \alpha_2)$ until the target x_f is reached, where $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ are suitably chosen according to the time T. □

Let $q_0 \in \mathbb{R}^2$ denote the initial condition, $q_f \in \mathbb{R}^2$ the target and $T > 0$ the transfer time. Let $u \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^2)$ be an optimal solution (assuming its existence) and let q denote the associated optimal trajectory. According to the Pontryagin maximum principle [90], then there exists an absolutely continuous function $p\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$ satisfying the adjoint equation a.e. over $[0,T]$:

$$\dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), u(t)), \tag{9.3}$$

where $H(q,p,u) \coloneqq p \cdot (F_0(q) + u_1\, F_1(q) + u_2\, F_2(q)) + p^0 \|u\|^2$ is the pseudo-Hamiltonian. [1] Besides, we have :

$$p^0 \leq 0, \text{ the pair } (p, p^0) \text{ never vanishes} \tag{9.4}$$

and the optimal control satisfies the maximization condition a.e. over $[0,T]$:

$$H(q(t), p(t), u(t)) = \max_{w \in \mathbb{R}^2} H(q(t), p(t), w). \tag{9.5}$$

Any quadruplet (q, p, p^0, u) solution of (9.2) and (9.3)–(9.5) is called an extremal and is said to be abnormal if $p^0 = 0$ otherwise it is said to be normal. In the normal case, when $p^0 \neq 0$, we can fix by homogeneity $p^0 = -1/2$.

Definition 9.3.2. *An extremal is a called* BC-extremal *if $q(0) = q_0$ and $q(T) = q_f$.*

Proposition 9.3.3. *Let (q, p, p^0, u) be an extremal, then, the extremal is normal (that is there are no abnormal extremals) and the control u is smooth.*

Proof. Let us introduce the Hamiltonian lifts $H_i(z) \coloneqq p \cdot F_i(q)$ with $z \coloneqq (q,p)$. If $p^0 = 0$, then the maximization condition leads to $H_1 = H_2 = 0$, that is $p_1 = p_2 = 0$, which contradicts the PMP. Hence $p^0 < 0$ and we can fix $p^0 = -1/2$. With this normalization, the control may be written in the feedback form $u(t) = \Phi(z(t))$ with $\Phi(z) \coloneqq (H_1(z), H_2(z))$ smooth. It is clear and well-known that in this case, the control law $t \mapsto u(t)$ is smooth. □

Since we have only normal extremals we fix $p^0 = -1/2$ and define the following true Hamiltonian (plugging u in feedback form into the pseudo-Hamiltonian) :

$$\mathbf{H}(z) \coloneqq H(z, \Phi(z)) = H_0(z) + \frac{1}{2}(H_1^2(z) + H_2^2(z)) = H_0(z) + \frac{1}{2}\|p\|^2.$$

Let's introduce the *Hamiltonian system* $\overrightarrow{\mathbf{H}}(z) \coloneqq (\nabla_p \mathbf{H}(z), -\nabla_q \mathbf{H}(z))$ and the pseudo-Hamiltonian system $\overrightarrow{H}(z,u) \coloneqq (\nabla_p H(z,u), -\nabla_q H(z,u))$. Then, we have :

Proposition 9.3.4. *Let (z,u) be an extremal ($p^0 = -1/2$ is implicit). Then :*

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{H}(z(t), u(t)) = \overrightarrow{\mathbf{H}}(z(t)) = \overrightarrow{H_0}(z(t)) + (p(t), 0)\,.$$

According to this proposition, we can define the *exponential mapping* :

$$\exp_{t,q_0}(p_0) \coloneqq \pi \circ \exp(t\overrightarrow{\mathbf{H}})(q_0, p_0),$$

where $\pi(q,p) \coloneqq q$ is the canonical projection on the state space and $\exp(t\overrightarrow{\mathbf{H}})(z_0)$ is the solution at time t of $\dot{z} = \overrightarrow{H}(z)$ with the initial condition z_0. Finally, let us introduce the *shooting function* :

$$\begin{array}{rccc} S\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & p_0 & \longmapsto & S(p_0) \coloneqq \exp_{T,q_0}(p_0) - q_f. \end{array}$$

Then, we have the classical following relation between BC-extremals and zeros of the shooting function.

Proposition 9.3.5. *Let (q,p,u) be a BC-extremal ($p^0 = -1/2$ is implicit), then, $S(p(0)) = 0$. Conversely, let $p_0 \in \mathbb{R}^2$ s.t. $S(p_0) = 0$. Then, defining $z(t) \coloneqq \exp(t\overrightarrow{\mathbf{H}})(q_0, p_0)$ over $[0,T]$ and $u(t) \coloneqq \Phi(z(t))$, the pair (z,u) is a BC-extremal.*

1. The standard inner product is written $a \cdot b$, for a, b in $\mathbb{R}^2$.

9.3.2 Integration of the extremal solutions

Writing the system in polar coordinates, the Hamiltonian becomes :

$$\mathbf{H}(r,\theta,p_r,p_\theta) = p_\theta \frac{\mu}{r^2} + \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}).$$

Proposition 9.3.6. *The system is Liouville integrable and, in polar coordinates, the extremals are given by : if* $c \coloneqq p_\theta(2\mu + p_\theta) \geq 0$*, then*

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{\frac{(c_4 t + c_5)^2 + c_3}{c_4}}, \qquad p_r(t) = \frac{(c_4 t + c_5)}{r(t)}, \\ \theta(t) &= \frac{c_6}{c_4\sqrt{c_3}} \left(\arctan \frac{c_4 t + c_5}{\sqrt{c_3}} - \arctan \frac{c_5}{\sqrt{c_3}} \right), \end{aligned}$$

and if $c < 0$*, then*

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{\frac{(c_4 t + c_5)^2 + c_3}{c_4}}, \qquad p_r(t) = \frac{(c_4 t + c_5)}{r(t)}, \\ \theta(t) &= \frac{c_6}{c_4\sqrt{-c_3}} \left(\log \left| \frac{c_4 t + c_5) - \sqrt{-c_3}}{c_4 t + c_5) + \sqrt{-c_3}} \right| - \log \left| \frac{c_5 - \sqrt{-c_3}}{c_5 + \sqrt{-c_3}} \right| \right), \end{aligned}$$

with $c_1 = p_r(0)$*,* $c_2 = p_\theta$*,* $c_3 = c$*,* $c_4 = c_1^2 + \frac{c_3}{r_0^2}$*,* $c_5 = r_0|c_1|$*,* $c_6 = c_4(\mu + c_2)$*.*

Proof. The θ coordinate is cyclic, so p_θ defines a second first integral with $\mathbf{H}$. This guarantees the Liouville integrability of the system. For the integration of the extremals, one has to solve the following system :

$$\dot{r}(t) = p_r(t), \quad \dot{p}_r(t) = \frac{2\mu p_\theta}{r^3(t)} + \frac{p_\theta^2}{r^3(t)}, \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\mu}{r^2(t)} + \frac{p_\theta}{r^2(t)}, \quad \dot{p_\theta}(t) = 0,$$

with $(r(0),\theta(0),p_r(0),p_\theta(0)) =: (r_0,\theta_0,c_1,c_2)$. Since $p_\theta = c_2$ is constant, we have from the two first equations that $\ddot{r}(t) = c_3/r^3(t)$, whence $\ddot{r}(t)\dot{r}(t) = c_3\dot{r}(t)/r^3(t)$, with $c_3 \coloneqq c_2(\mu + c_2)$. Solving this last equation we obtain $r(t) = \sqrt{((c_4 t + c_5)^2 + c_3)/c_4}$ with $c_4 \coloneqq c_1^2 + c_3/r_0^2$ and $c_5 = r_0|c_1|$. One deduces $p_r(t)$ by differentiating this relation. The integration of θ depends on the sign of c_3. Indeed one has $\dot{\theta}(t) = c_6/((c_4 t + c_5)^2 + c_3)$, with $c_6 \coloneqq c_4(\mu + c_2)$, thus, if $c_3 \geq 0$ one has the first case, otherwise one has the second. □

9.3.3 Numerical methods and results

The HamPath [2] code [32, 46] is used to compute the BC-extremals. A Newton-like algorithm is used to solve the shooting equation $S(p_0) = 0$. Providing $\mathbf{H}$ and S to HamPath, the code generates automatically the Jacobian of the shooting function. To make the implementation of S easier, HamPath supplies the exponential mapping. Automatic Differentiation is used to produce $\vec{\mathbf{H}}$ and is combined with Runge-Kutta integrators to assemble the exponential mapping.

We present here, in the one vortex case, two examples. For the examples, we fix the initial condition to $q_0 = (2,0)$, the transfer time to $T = 10$ and we consider two targets : $q_f = (-2,0)$ and $q_f = (3,-3)$, to emphasize the influence of the vortex circulation (the strength of the drift being dependent to the distance between the particle and the vortex). The circulation is fixed to $k = 2\pi\mu$, with $\mu = 2\|q_0\|$. The two results are detailed in the caption of Figure 9.1, where we represent the projection of the two BC-extremals in the state space, that is the trajectories, together with the control laws.

2. www.hampath.org

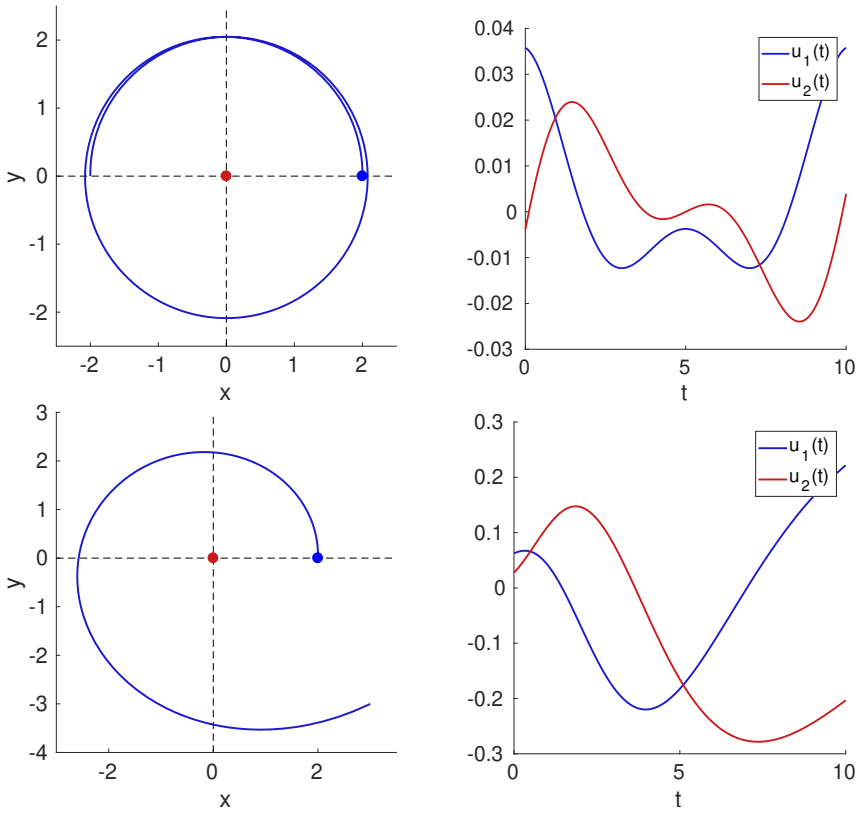


FIGURE 9.1 – **One vortex.** (Top) $q_f = (-2, 0)$ and the cost is $J \approx 4.2675\text{e-}3$. (Bottom) $q_f = (3, -3)$ and the cost is $J \approx 5.5177\text{e-}1$. In both cases, the shooting equation $S = 0$ is solved with a good accuracy of order 1e-12. On the left, we have the trajectory (in blue), the point vortex is represented by a red dot, the initial condition by a blue dot. The two control components are given on the right.

9.4 Cases of 2, 3 and 4 vortices

9.4.1 Pontryagin maximum principle and shooting function

In the case of $N > 1$ vortices, the vortices are not static and have to be considered in the dynamics. Let us recall that the control system has the form $\dot{q} = F_0(q) + u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q)$, where F_0, F_1, and F_2 are given in Section 9.2, and that the state q contains the position of the particle together with the positions of the N vortices. In the control problem, see Section 9.2, the initial positions of the particle and the vortices are fixed. Let us denote by $q_0 \in \mathbb{R}^{2(1+N)}$ the vector of these positions. On the other hand, the final position of the particle is fixed while the final positions of the N vortices are free. Let us denote by $(x_f, y_f) \in \mathbb{R}^2$ the target for the particle. The transfer time is also fixed and denoted $T > 0$. In order to apply the maximum principle, we define the pseudo-Hamiltonian :

$$H(q, p, u) := p \cdot F_0(q) + u_1\, p \cdot F_1(q) + u_2\, p \cdot F_2(q) + p^0(u_1^2 + u_2^2),$$

where p^0 will be fixed to $-1/2$ according to :

Proposition 9.4.1. *Let (q, p, p^0, u) be a BC-extremal. Then, the extremal is normal and the control u is smooth.*

Proof. If $p^0 = 0$, then the maximization condition leads to $H_1 = H_2 = 0$, that is $p_x = p_y = 0$ all along the extremal. Decomposing the adjoint vector as $p := (p_x, p_y, p_{x_1}, p_{y_1}, \cdots, p_{x_N}, p_{y_N})$,

then, the transversality conditions implies that at the final time, $p_{x_1}(T)$, $p_{y_1}(T)$, $\ldots$, $p_{x_N}(T)$, $p_{y_N}(T)$ are zero, which contradicts the PMP. Hence $p^0 < 0$ and we can fix $p^0 = -1/2$. With this normalization, the control may be written in the feedback form $u(t) = \Phi(z(t))$ with $\Phi(z) \coloneqq (H_1(z), H_2(z))$ smooth. Here again, the control law $t \mapsto u(t)$ is smooth. □

In the same spirit as in the one vortex case, one can define the following shooting function (with adapted and clear notation) to compute the BC-extremals :

$$\begin{array}{rccl} S\colon & \mathbb{R}^{2(1+N)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2(1+N)} \\ & p_0 & \longmapsto & S(p_0) \coloneqq \big(x(T,q_0,p_0) - x_f,\ y(T,q_0,p_0) - y_f, \\ & & & \qquad p_{x_1}(T,q_0,p_0),\ \cdots,\ p_{y_N}(T,q_0,p_0)\big) \end{array}$$

9.4.2 Numerical results

In the following examples, we fix the initial particle position to $(x_0, y_0) = (2, 0)$ and the target to $(x_f, y_f) = (3, -3)$. To make a comparison with respect to the number of vortices we impose the condition $\Sigma_{i=1}^{N} |k_i| = k$, where k is the circulation in the one vortex case, that is $k = 2\pi\mu$ with $\mu = 2\|q_0\|$. The initial positions of the vortices are taken arbitrarily.

In general, the main difficulty to solve the shooting equations is the initialization of the adjoint vector due to the sensitivity of the underlying Newton method. In order to overcome this difficulty, we use the following algorithm :

— For two vortices, we first solve the subproblem where we set one of the circulation to zero, that is we solve a one vortex problem ;

— Then, we use a path following algorithm [32] implemented in the HamPath software where the homotopic parameter is the value of the circulation which increase from 0 to the desired value ;

— We repeat this procedure to obtain solutions for problems with more vortices.

We summarize in Table 9.1 the results in the one vortex case together with the new results for $N = 2$, 3 and 4. The trajectories and the controls are given in Figures 9.2, 9.3 and 9.4, respectively for $N = 2$, 3 and 4.

Vortices	Circulations	Initial positions (q_0)	Target	Cost	Figure
$N = 1$	$k = 8\pi$	$(2, 0)$	$(-2, 0)$	0.004	9.1
$N = 1$	$k = 8\pi$	$(2, 0)$	$(3, -3)$	0.552	9.1
$N = 2$	$k_1 = k_2 = 4\pi$	$(2, 0, 0, 1, 0, -1)$	$(3, -3)$	1.947	9.2
$N = 3$	$k_1 = k_2 = k_3 = 8\pi/3$	$(2, 0, 0, 1, 1, -1, -1, -1)$	$(3, -3)$	0.406	9.3
$N = 4$	$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2\pi$	$(2, 0, 1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, -1)$	$(3, -3)$	0.335	9.4

TABLE 9.1 – In the two first columns are given the number of vortices with their circulations. In the third is given the initial positions of the particle and the vortices, the target for the particle being given in the fourth. The fifth column gives the cost associated to the computed BC-extremal, whose trajectory and control are plotted in the figure given by the last column.

9.5 Conclusion

In this article, we have solved the control problem in the cases N=1,2,3 and 4 vortices. In the case of a single vortex, where it is trivial to show the integrability of the resulting Hamiltonian system, we have provided analytic expressions of extremals. In the other cases, we have limited

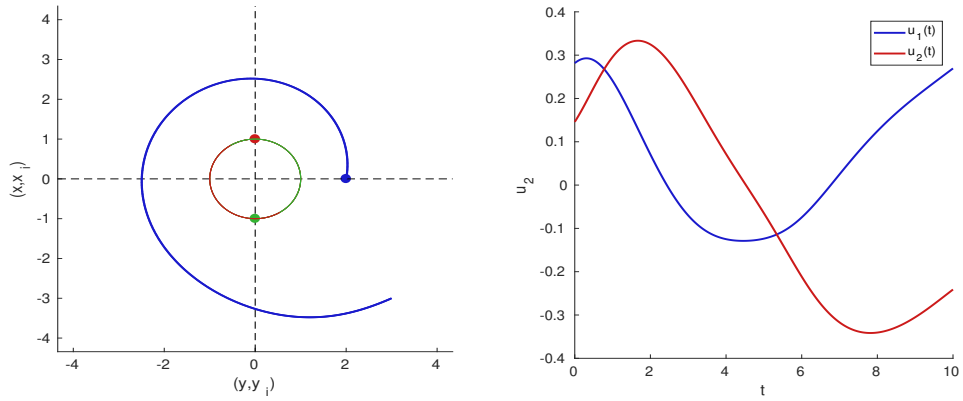


FIGURE 9.2 – **Two vortices.** Trajectory and control in the two vortices case. The initial adjoint vector being $p_0 = (0.28, 0.15, 0.097, -0.47, -0.11, 0.088)$ (see Table 9.1 for details).

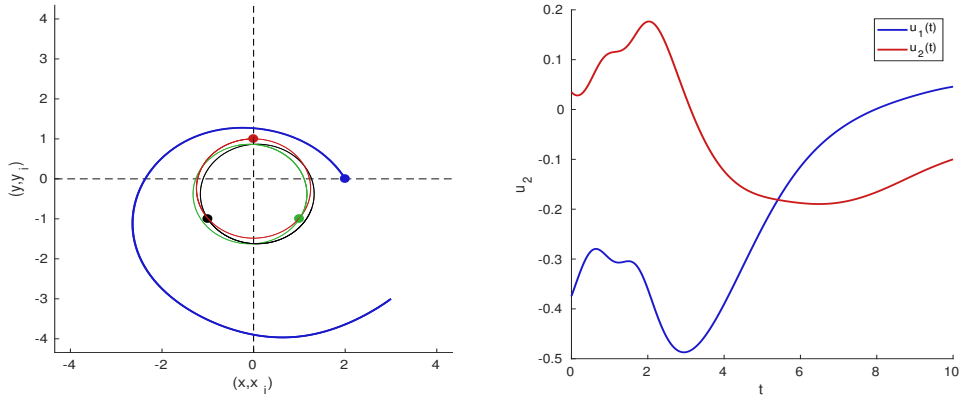


FIGURE 9.3 – **Three vortices.** Trajectory and control in the three vortices case. The initial adjoint vector being $p_0 = (-0.37, -0.037, 0.088, 0.34, 0.69, -0.48, -0.36, -0.026)$ (see Table 9.1 for details).

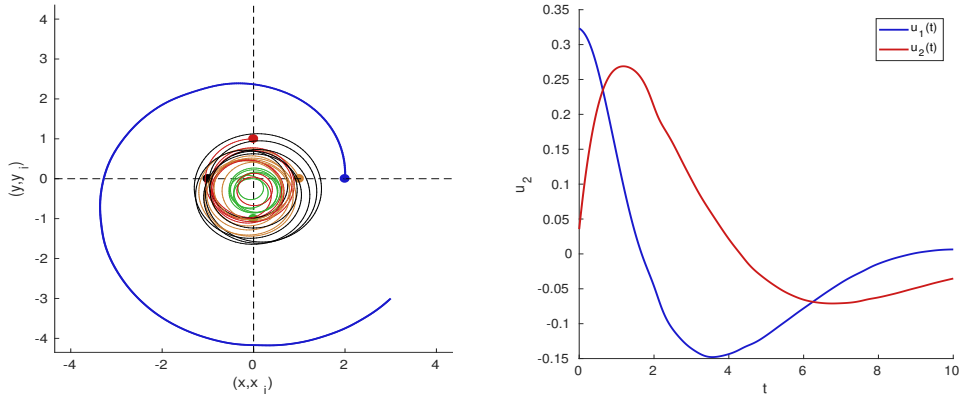


FIGURE 9.4 – **Four vortices.** Trajectory and control in the four vortices case. The initial adjoint vector is $p_0 = (0.17, -0.0015, 0.041, -0.18, -0.025, -0.26, 0.11, 0.11, -0.18, 0.22)$ (see Table 9.1 for details).

ourselves to a numerical study of the problem by presenting some solutions obtained thanks to the HamPath software. Beyond 4 vortices, it is well known in the literature that the vortex system is chaotic (see for instance [40, 91]), so controlling the particle in an environment containing more than 4 vortices no longer guarantees a solution to the problem. On the other hand, we have arbitrarily considered the initial positions of the vortices and we propose in future experiments to optimize this initial configuration in order to improve the results we have obtained.

Chapitre 10

Homotopic approach for turnpike and singularly perturbed optimal control problems

Olivier Cots, Joseph Gergaud, Boris Wembe, *Homotopic approach for turnpike and singularly perturbed optimal control problems*, FGS 2020, ESAIM : proceeding and surveys, 2021, 1-10

Abstract. The first aim of this article is to present the link between the turnpike property and the singular perturbations theory : the first one being a particular case of the second one. Then, thanks to this link, we set up a new framework based on continuation methods for the resolution of singularly perturbed optimal control problems. We consider first the turnpike case, then, we generalize the approach to general control problems with singular perturbations (that is with fast but also slow variables). We illustrate each step with an example.

Résumé. Dans cet article nous présentons le lien entre les points de vue turnpike et perturbations singulières en contrôle optimal en montrant notamment que le premier est un cas particulier du second. Ce lien important nous permet de mettre sur pieds une nouvelle approche de résolution numerique, basée sur les methodes homotopiques, des problèmes de contrôle optimal perturbés singulièrement. Tout d'abord on s'intéresse aux cas *turnpike*, puis on generalise l'approche au cas perturbations singulières (marqué par la presence de variables dites lentes), chaque partie etant illustrée par un exemple.

10.1 Introduction

Recently, new investigations have been carried out on optimal control problems with turnpike properties [103] : the optimal solution remains for a long time close to the optimal steady-state solution associated to the static optimal control problem and at the beginning and at the end we have a transcient-short time arc. On the other hand in the 1960's lots of works have been done on optimal control problems with singular perturbations [6, 38, 39, 41, 65, 67, 83, 107]. The first result we present here establishes that an optimal control problem with the turnpike property is a singularly perturbed optimal control problem with only fast variables.

Then we are interested in the numerical resolution of such problems by indirect methods. First, we treat the turnpike case : we present the appropriate shooting function, see [103], in which the unknowns are the state and the costate at the middle of the time interval and for which we have a very good initial guess from the static optimal solution. We propose here to improve this procedure with two homotopies : the first one is an homotopy on the two-point

condition which connects the static optimal solution, *i.e.* the zero-order outer solution of the problem (seen as a singularly perturbed control problem), to the original problem for a final time not too long and the second one is on the final time. At the end, it is possible to extend this method to solve singularly perturbed optimal control problems. For this we have to adapt the first homotopy on the two-point condition to take into account the state equation on the fast variables. Several exemples from the literature show the efficiency of our approach.

10.2 Turnpike and singularly perturbed control problems

10.2.1 Turnpike optimal control problem

We consider the following formulation, excerpt from [103], of a turnpike optimal control problem :

$$(OCP^T) \qquad \begin{cases} \min \displaystyle\int_0^T f^0(y(t),u(t))\ \mathrm{d}t, \quad T>0 \text{ large enough} \\ \dot{y}(t) = f(y(t),u(t)), \quad y(t)\in\mathbb{R}^m, \quad u(t)\in\mathbb{R}^k, \\ y(0)=y_0,\ y(T)=y_f, \end{cases}$$

where y_0 and y_f are given values in $\mathbb{R}^n$ and where $f^0 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ are supposed to be regular (at least C^2). Note that to simplify the presentation we consider the case where $y(0)$ and $y(T)$ are fixed to given values, but the results can be generalized for boundary conditions of the form $R(y(0), y(T)) = 0$. The associated static optimal problem is then defined as

$$(SOCP^T) \qquad \min_{(y,u)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k} f^0(y,u) \quad \text{s.t.} \quad f(y,u)=0.$$

We assume that we are in the normal case for both the original and the static optimal problems and that the static optimal problem has a unique solution denoted $(\bar{y},\bar{u},\bar{q})$, where $\bar{q}$ is the associated Lagrange multiplier. We say that we have the turnpike property if there exists an extremal solution of (OCP^T) denoted $(y_T(\cdot),u_T(\cdot),q_T(\cdot))$ which remains most of the time close to the static solution $(\bar{y},\bar{u},\bar{q})$. More precisely, it is expected that if T is large enough then the extremal is approximately made of three pieces :

— the first is a short-time arc defined on $[0,\tau]$ for a $\tau>0$ along which the extremal gets closer to $(\bar{y},\bar{u},\bar{q})$;

— the second is quasi static and remains close to the steady-state $(\bar{y},\bar{u},\bar{q})$ over a long-time interval $[\tau, T-\tau]$;

— the third piece is a short-time arc defined on $[T-\tau,T]$ which joins the final condition.

In [103], the authors prove that under suitable assumptions there exists constants $C_1>0$ and $C_2>0$ and a time $T_0>0$ such that for every $T>T_0$, the optimal control problem (OCP^T) has at least one solution having a normal extremal lift $(y_T(\cdot),u_T(\cdot),q_T(\cdot))$ satisfying

$$\|y_T(t)-\bar{y}\| + \|q_T(t)-\bar{q}\| + \|u_T(t)-\bar{u}\| \leq C_1(e^{-C_2 t} + e^{-C_2(T-t)}), \tag{10.1}$$

for every $t\in[0,T]$.

10.2.2 Links between turnpike and singularly perturbed optimal control problem

Let us reparameterize the time setting $s = \varepsilon t$ (with $\varepsilon = 1/T$ small since T is supposed to be large). The problem (OCP^T) is then equivalent to the following problem :

$$(OCP_\varepsilon^T) \qquad \begin{cases} \min \displaystyle\int_0^1 f^0(y(s), u(s))\ \mathrm{d}s, \\ \varepsilon\, \dot{y}(s) = f(y(s), u(s)), \\ y(0) = y_0,\ y(1) = y_f, \end{cases}$$

which has the form of a singularly perturbed optimal control problem with only fast variables [67]. The Pontryagin's Maximum Principle [90] gives us some necessary conditions of optimality in the cotangent bundle. We suppose here that the maximisation of the pseudo-Hamiltonian furnishes us the control as a smooth function of the state and costate $u(y, q)$. This is in particular the case if we suppose the strict Legendre condition. Then the PMP implies the singularly perturbed boundary value problem of the form :

$$(BVP_\varepsilon^T) \qquad \begin{cases} \varepsilon \dot{y}(s) = g(y(s), u(y(s), q(s))), \\ \varepsilon \dot{q}(s) = -\nabla_y H(y(s), u(y(s), q(s)), q(s)), \\ y(0) = y_0,\ y(1) = y_f, \end{cases}$$

where the pseudo-Hamiltonian H is $H(y, q, u) = q \cdot g(y, u) - f^0(y, u)$. We define the following reduced problem :

$$(BVP_0^T) \qquad \begin{cases} 0 = g(y(s), u(y(s), q(s))), \\ 0 = -\nabla_y H(y(s), u(y(s), q(s)), q(s))). \end{cases}$$

whose solution, denoted $(\bar{y}, \bar{q})$, is the so-called *zero order outer solution* of (BVP_ε^T). In this setting, denoting $\bar{u} \coloneqq u(\bar{y}, \bar{q})$, the triplet $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{q})$ satisfies the Karush-Kuhn-Tucker necessary optimality conditions of the static problem $(SOCP^T)$.

We introduce the notation $\beta \coloneqq (y, q)$ and $G \coloneqq (g, -\nabla_y H)$ such that the differential equation in (BVP_ε^T) may be written in the more compact form $\varepsilon \dot{\beta}(s) = G(\beta(s))$. With this notation and under suitable assumptions, we can prove that the fast variable β_ε, solution of (BVP_ε^T), converges on every compact interval $[a, b] \subset [0, 1]$, uniformly to the zero order solution $\bar{\beta} = (\bar{y}, \bar{q})$[65, 66, 106]. Moreover, in order to get a uniform convergence on the fast variables on $[0, 1]$ (of course it's trivial to see that boundary conditions on the fast variables are not necessary verified by the approximate zero order solution), one can add some boundary layer conditions on the fast variables in order to make a correction at the initial and final conditions. Roughly speaking (see [65, 66, 83] for more details), at the zero order one can write the fast variables in the form :

$$\beta(t, \varepsilon) = \bar{\beta}(t) + \beta^i(\tau) + \beta^f(\sigma) + O(\varepsilon) \tag{10.2}$$

with β^i (resp. β^f) $\to 0$ when $\tau = t/\varepsilon$ (resp. $\sigma = (1 - t)/\varepsilon$) $\to \infty$ and where the zero order boundary layers β^i and β^f satisfy :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta^i}{d\tau}(\tau) &= \quad G(\beta^i(\tau) + \bar{\beta}(0)), \quad \beta^i_{1,\dots,m}(0) = y(0) - y_0, \\ \frac{d\beta^f}{d\sigma}(\sigma) &= -G(\beta^f(\sigma) + \bar{\beta}(0)), \quad \beta^f_{1,\dots,m}(0) = y(1) - y_f. \end{aligned} \tag{10.3}$$

To summarize, one can say that the boundary layers correspond to the first and third short-time pieces of the solution of the turnpike problem and that the zero order outer solution is trivially the static solution. Finally we make the following crucial observation :

Proposition 10.2.1. *A turnpike optimal control problem (*i.e.*an optimal control problem in the form of (OCP^T)) is equivalent to a singularly perturbed optimal control problem with only fast variables (in the form of (OCP_ε^T)).*

10.2.3 Numerical methods for turnpike control problems

From the numerical point of view, solving a singularly perturbed boundary value problem is difficult due to the stiffness of the dynamical system. For an initial value problem it is known that some Runge-Kutta schemes as Radau methods (which is an implicit method) are more suitable than others to integrate stiff differential equations[56]. When we are dealing with boundary value problems, one can use a collocation method on a fully discretized grid and refine the mesh iteratively where the stiffness introduces large errors [39]. The main idea is to integrate on several small time intervals and match the extremities since the stiffness amplifies errors during the integration. The multiple shooting methods hinge on this idea. Let us recall the principle of the simple shooting method, considering (BVP_ε^T), before giving some details about multiple shooting. Let us write $(y(s,s_0,\alpha,\beta),q(s,s_0,\alpha,\beta))$ the solution of the dynamical system from (BVP_ε^T) with initial condition $(y(s_0,s_0,\alpha,\beta),q(s_0,s_0,\alpha,\beta)) = (\alpha,\beta)$ and introduce the mapping $S(\beta) \coloneqq y(1,0,y_0,\beta) - y_f$. The simple shooting method consists in solving $S(\beta) = 0$ with a Newton method, the point $(y(1,0,y_0,\beta),q(1,0,y_0,\beta))$ being computed with a numerical integrator. The idea of multiple shooting is to add intermediate steps. As an example, we can add one step at the middle of the time interval and define the mapping $S(\beta,y_1,q_1) \coloneqq (y(1/2,0,y_0,\beta) - y_1, q(1/2,0,y_0,\beta) - q_1, y(1,1/2,y_1,q_1) - y_f)$. The multiple shooting method then consists in solving $S(\beta,y_1,q_1) = 0$. The first two equations are the so-called matching conditions which improve numerical stability [98].

We propose here a new approach based on the idea of multiple shooting to improve numerical stability and a kind of automatic mesh refining like algorithm to improve convergence of the underlying Newton method, known to be sensitive to the initial guess. The orginality of this approach is double : the multiple shooting method is a variant of the classical one that we have presented just before, which has been introduced in [103] and which is appropriate when dealing with turnpike control problems. Secondly, to improve the convergence we introduce a two-steps homotopic method, the homotopic algorithm being a differential path following technique. The homotopy method is a Predictor-Corrector method with arc length parameterization, with a high-order variable step-size Runge-Kutta scheme for the prediction and a simple modified Newton method for the correction.

The shooting function When dealing with turnpike boundary value problems (that is boundary value problems coming from turnpike optimal control problems), it is convenient to use multiple shooting. As introduced in [103], it is better to add an intermediate step at the middle of the time interval, denoted $s_{\text{mid}} \coloneqq 1/2$, since we know that the extremal trajectory is close to the static solution $(\bar{y},\bar{q},\bar{u})$ at this time. This information gives a very good initial guess if the unknown of the shooting method is the point at s_{mid}. The shooting function is thus defined by :

$$\begin{array}{rccl} S\colon & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ & (y_{\text{mid}}, q_{\text{mid}}) & \longmapsto & S(y_{\text{mid}}, q_{\text{mid}}) \coloneqq (y(0, s_{\text{mid}}, y_{\text{mid}}, q_{\text{mid}}) - y_0,\ y(1, s_{\text{mid}}, y_{\text{mid}}, q_{\text{mid}}) - y_f)\,. \end{array}$$

There are two halves integration each starting from the middle point, note that the first one is computed backward to match the initial condition while the second one is computed forward.

The shooting homotopic function on the boundary conditions Since the static optimal point $(\bar{y},\bar{u})$ is the equilibrium point that optimizes the cost function, if we consider the turnpike optimal control problem (OCP_ε^T) where we replace the initial and final conditions by $y(0) = \bar{y}$ and $y(1) = \bar{y}$, then, the optimal solution is simply the constant extremal trajectory $(y,u) \equiv (\bar{y},\bar{u})$ with associated adjoint vector $q \equiv \bar{q}$, and this whatever the final time T. The idea is thus to connect the solution of this simple control problem to the solution of (OCP_ε^T) by performing an homotopy on the boundary conditions. We thus introduce the following homotopic shooting

function (still denoted S) :

$$\begin{array}{rccl} S\colon & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ & (y_{\mathrm{mid}}, q_{\mathrm{mid}}, \lambda) & \longmapsto & S(y_{\mathrm{mid}}, q_{\mathrm{mid}}, \lambda) \coloneqq \begin{pmatrix} y(0, s_{\mathrm{mid}}, y_{\mathrm{mid}}, q_{\mathrm{mid}}) - (\lambda y_0 + (1-\lambda)\bar{y}) \\ y(1, s_{\mathrm{mid}}, y_{\mathrm{mid}}, q_{\mathrm{mid}}) - (\lambda y_f + (1-\lambda)\bar{y}) \end{pmatrix}. \end{array}$$

The steps of our algorithm Let us recall that the main goal is to solve (BVP_ε^T) for an ε small enough to have the turnpike property and so possibly we have to deal with singular perturbations (the dynamical system may be stiff). To tackle this kind of optimal control problems, we propose the following approach :

1. **First step** : solve the static problem $(SOCP^T)$ and get $(\bar{y}, \bar{q})$, solution of $S(y_{\mathrm{mid}}, q_{\mathrm{mid}}, 0) = 0$.
2. **Second step** : fix ε to a relatively large value to reduce stiffness and solve $S(y_{\mathrm{mid}}, q_{\mathrm{mid}}, \lambda) = 0$ by homotopy for $\lambda \in [0, 1]$, starting from the solution $(\bar{y}, \bar{q})$ at $\lambda = 0$. This step is refered as the homotopy on the boundary conditions.
3. **Third step** : make a homotopy on the parameter ε to the desired value (supposed to be small).

10.2.4 Example of turnpike control problem and numerical results

Let us consider the following turnpike optimal control problem from [103] :

$$\begin{cases} \min \displaystyle\int_0^1 \left((y_1(t)-1)^2 + (y_2(t)-1)^2 + (u(t)-2)^2\right) \mathrm{d}t, \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = (y_2(t),\ 1 - y_1(t) + y_2^3(t) + u(t)), \\ y(0) = (1,1), \quad y(1) = (3,0), \end{cases}$$

with $y \coloneqq (y_1, y_2)$, $\varepsilon = 1/T$ and $T = 70$. The associated boundary value problem is

$$\begin{cases} \varepsilon\, \dot{y}(t) = (y_2(t),\ 1 - y_1(t) + y_2^3(t) + u(t)), \\ \varepsilon\, \dot{q}(t) = (y_1(t) + q_1(t) - 1,\ y_2(t) - 3y_2^2(t)\, q_2(t) - q_1(t) - 1), \\ y(0) = (1,1), \quad y(1) = (3,0), \end{cases}$$

where $q \coloneqq (q_1, q_2)$ and the static optimal solution is given by $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{u}) = (2, 0, -1, -1, 1)$. For the second step, we fix $T = 40$. Figure 10.1 shows the evolution of the optimal extremal trajectory along the homotopy on the boundary conditions, while Figure 10.2 is the same but for the third step. We compare our approach with the variant of the multiple shooting method presented before taking the static solution as the initial guess and we compare also this approach with the reduced procedure where we only perform the first and second steps but with the desired value for the parameter ε. The results of these numerical experiments are given in Table 10.1.

Remark 31. *We use the software HamPath[32] to compute the paths of zeros of the homotopies and to solve the shooting equations for these numerical experiments and the followings in the rest of the paper.*

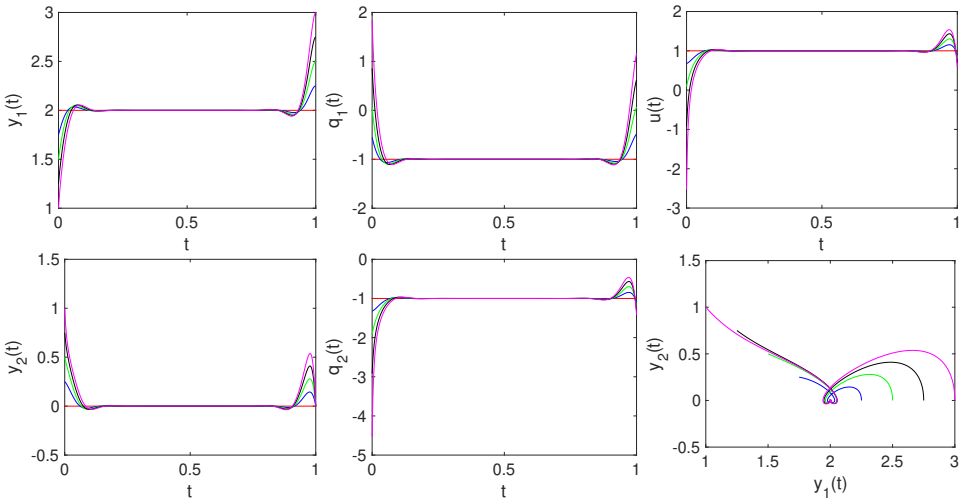


FIGURE 10.1 – **Second step** (homotopy on λ). Graphs of state, co-state and optimal control during the first homotopy, with $T = 40$, for $\lambda \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

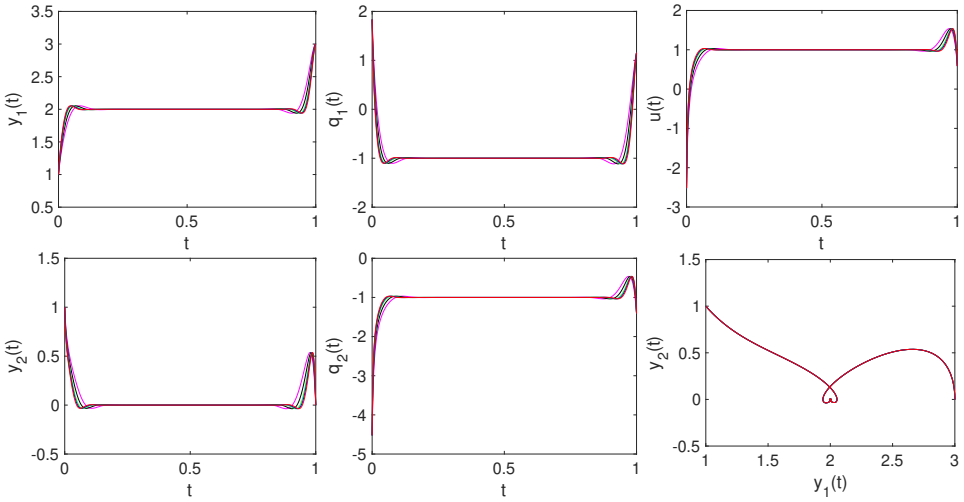


FIGURE 10.2 – **Third step** (homotopy on ε). Graphs of state, co-state and optimal control during the homotopy on $\varepsilon = 1/T$, for $T \in \{40, 50, 60, 65, 70\}$.

10.3 Generalization to singularly perturbed optimal control problems

10.3.1 Numerical method

Let us consider now the following optimal control problem in Lagrange form with a singular perturbation :

$$(OCP_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \min \displaystyle\int_0^1 f^0(x(t), y(t), u(t))\ \mathrm{d}t \\ \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t)), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x(1) = x_1, \quad y(1) = y_1, \end{cases}$$

Algorithms	$T = 40$	$T = 41$	$T = 60$	$T = 70$
Shooting from the middle point	❍	✗	✗	✗
Step 2	✓	✓	❍	❍
Steps 2-3	✓	✓	✓	✓

TABLE 10.1 – Comparison of the numerical methods (for the 3 strategies the initial guess is the solution of the static problem (step 1)) : shooting from the middle point, our approach with only step 2 and our complete approach with step 2 for $\varepsilon = 1/40$ and step 3. The numerical integrations are done with the `dopri5` code with relative and absolute local errors of 1e-8 and 1e-14. The signification of the symbols are :

✓ : the algorithm converges without difficulty ;

❍ : the algorithm converges with warnings from the numerical integrations, or is very slow ;

✗ : the algorithm diverges.

where f and g are defined on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ and supposed to be smooth, and where x_0, y_0, x_1 and y_1 are given. We suppose also that there are no control constraints, that is we have $u(t) \in \mathbb{R}^k$. From the maximum principle, there must exist absolutely continuous mappings $p(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ and $q(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, respectively associated to the slow and fast variables, such that, for almost every $t \in [0,1]$ one has :

$$(\Sigma_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p H(x(t), y(t), p(t), q(t), u(t)), & \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x(t), y(t), p(t), q(t), u(t))), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = \nabla_q H(x(t), y(t), p(t), q(t), u(t))), & \varepsilon\, \dot{q}(t) = -\nabla_y H(x(t), y(t), p(t), q(t), u(t))), \end{cases}$$

together with the maximisation condition

$$H(x(t), y(t), p(t), q(t), u(t)) = \max_{w \in \mathbb{R}^k} H(x(t), y(t), p(t), q(t), w), \tag{10.4}$$

where the Hamiltonian H is defined by $H(x, y, p, q, u) := p \cdot f(x, y, u) + q \cdot g(x, y, u) - f^0(x, y, u)$ (we suppose we are in the normal case). We suppose that the maximisation condition (10.4) allows us to obtain the control in a smooth feedback form $u = u(x, y, p, q)$. Introducing the slow and fast state-costate vectors $\psi := (x, p)$ and $\beta := (y, q)$, the system (Σ_ε) with the boundary conditions form the following boundary value problem :

$$(BVP_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \dot{\psi}(t) = F(\psi(t), \beta(t)) \\ \varepsilon\, \dot{\beta}(t) = G(\psi(t), \beta(t)) \\ \psi_{1,\cdots,n}(0) = x_0, \quad \beta_{1,\cdots,m}(0) = y_0, \quad \psi_{1,\cdots,n}(1) = x_1, \quad \beta_{1,\cdots,m}(1) = y_1. \end{cases}$$

We define the associated reduced boundary value problem with differential-algebraic equations by :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = F(\psi(t), \beta(t)), \\ \quad 0 = G(\psi(t), \beta(t)), \\ \psi_{1,\cdots,n}(0) = x_0, \quad \psi_{1,\cdots,n}(1) = x_1. \end{cases}$$

Assuming that the partial derivative G_β is invertible, then by the implicit function theorem G is solvable for β and one can write $\beta(t) := \Phi(\psi(t))$. In this setting the semi-explicit differential-algebraic system of equations is of index 1 and β satisfies

$$\dot{\beta}(t) = -G_\beta^{-1}\left(\psi(t), \beta(t)\right) \cdot \left(G_\psi\left(\psi(t), \beta(t)\right) \cdot F\left(\psi(t), \beta(t)\right)\right).$$

We can thus rewrite the reduced problem in the following equivalent form :
(BVP_0)

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = F(\psi(t), \beta(t)) \\ \dot{\beta}(t) = -G_\beta^{-1}(\psi(t), \beta(t)) \cdot \big(G_\psi(\psi(t), \beta(t)) \cdot F(\psi(t), \beta(t))\big), \\ \psi_{1,\cdots,n}(0) = x_0, \quad \beta_{1,\cdots,m}(0) = \Phi_{1,\cdots,m}(\psi(0)), \quad \psi_{1,\cdots,n}(1) = x_1, \quad \beta_{1,\cdots,m}(1) = \Phi_{1,\cdots,m}(\psi(1)). \end{cases}$$

This reduced boundary value problem is called the associated *zero order boundary value problem* of problem (BVP_ε) and will be the initialization of our homotopy, that is of the first step of our algorithm.

Remark 32. *We can of course simplify the problem (BVP_0) by eliminating the β variable if it is possible to obtain the analytic expression of the implicit function Φ as it is the case in the simple example we treat in the next paragraph. Otherwise we have to numerically solve the implicit equation to obtain the boundary condition of the problem (BVP_0) or to modify the shooting function by replacing $\beta_{1,\cdots,m}(0) = \Phi_{1,\cdots,m}(\psi(0))$ (respectively $\beta_{1,\cdots,m}(1) = \Phi_{1,\cdots,m}(\psi(1))$) by the equation $0 = G(\psi(0), \beta(0))$ (respectively $0 = G(\psi(1), \beta(1))$). There is a second reason for using the differential equation in β : the solution of the (BVP_0) problem is exactly the same as the initial problem for the first homotopy we use in our method, as it is explained in the following.*

Shooting function and shooting homotopic function The aim remains to solve (BVP_ε) for ε sufficiently small and the shooting function is still defined from the middle point. The most significant difference here compared to the turnpike case may be seen in the homotopic function since we have to take into account the new boundary conditions and the new dynamics (of the fast variables) from the zero order boundary value problem. We thus define the following homotopic function :

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2m} \\ (\psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}, \lambda) &\mapsto S(\psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}, \lambda) \coloneqq S_\lambda(\psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}) \end{aligned}$$

where

$$S_\lambda(\psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}) \coloneqq \begin{pmatrix} \psi_{1,\cdots,n}(0, t_{\text{mid}}, \psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}) - x_0 \\ \psi_{1,\cdots,n}(1, t_{\text{mid}}, \psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}) - x_1 \\ \beta_\lambda(0, t_{\text{mid}}, \psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}) - (\lambda y_0 + (1-\lambda)\Phi_{1,\cdots,m}(\psi(0, t_{\text{mid}}, \psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}})) \\ \beta_\lambda(1, t_{\text{mid}}, \psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}}) - (\lambda y_1 + (1-\lambda)\Phi_{1,\cdots,m}(\psi(1, t_{\text{mid}}, \psi_{\text{mid}}, \beta_{\text{mid}})) \end{pmatrix}$$

with $t_{\text{mid}} = 1/2$ and where $(\psi(T, t_0, \psi_0, \beta_0), \beta_\lambda(T, t_0, \psi_0, \beta_0))$ is the solution at time T of

$$\dot{\psi}(t) = F(\psi(t), \beta(t)),$$

$$\dot{\beta}(t) = (\lambda/\varepsilon)\, G(\psi(t), \beta(t)) - (1-\lambda)\, G_\beta^{-1}(\psi(t), \beta(t)) \cdot \big(G_\psi(\psi(t), \beta(t)) \cdot F(\psi(t), \beta(t))\big),$$

with initial condition (ψ_0, β_0) at time t_0.

The steps of the algorithm As in the turnpike case, we proceed in three steps :

1. **First step** : solve the zero order boundary value problem (BVP_0) to get the *zero order outer solution*, solving $S(y_{\text{mid}}, q_{\text{mid}}, 0) = 0$.
2. **Second step** : fix ε to a relatively large value to reduce stiffness and solve $S(y_{\text{mid}}, q_{\text{mid}}, \lambda) = 0$ by homotopy for $\lambda \in [0, 1]$, starting from the solution at $\lambda = 0$. This corresponds to make a continuation from problem (BVP_0) to (BVP_ε).
3. **Third step** : make a homotopy on the parameter ε to the desired value (supposed to be small).

Let us emphasize the fact that compare to the turnpike case, the first homotopy is done on the differential equations as well as on the boundary conditions.

10.3.2 Example and results

Let us consider the following optimal control problem [67] :

$$\begin{cases} \min J(u) = \displaystyle\int_0^1 \left(x^4(s) + \frac{1}{2} y^2(s) + \frac{1}{2} u^2(s) \right) \mathrm{d}s \\ \dot{x}(s) = x(s)\, y(s), \\ \varepsilon\, \dot{y}(s) = -y(s) + u(s), \\ x(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y(0) = 0, \quad x(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

The associated boundary value problem obtained from the maximum principle and its associated zero order boundary value problem are given by :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\, y(t), \\ \dot{p}(t) = -y(t)\, p(t) + 4x^3(t), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = -y(t) + q(t), \\ \varepsilon\, \dot{q}(t) = y(t) + q(t) - x(t)\, p(t), \\ x(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ y(0) = 0, \\ x(1) = \dfrac{1}{2}, \ y(1) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{1}{2} x^2(t)\, p(t), \\ \dot{p}(t) = 4x^3(t) - \dfrac{1}{2} x(t)\, p^2(t), \\ \dot{y}(t) = 2x^4(t), \\ \dot{q}(t) = 2x^4(t), \\ x(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ y(0) = \dfrac{1}{2} x(0)\, p(0), \\ x(1) = \dfrac{1}{2}, \ y(1) = \dfrac{1}{2} x(1)\, p(1). \end{cases}$$

Figure 10.3 and 10.4 show the results we obtained for the first, respectively second, homotopy. In Table 10.2 we make a comparison of three different approaches : (i) simple shooting from the middle point fixing $\lambda = 1$, (ii) simple shooting followed by the homotopy on λ (that is steps 1 and 2 of our algorithm) (iii) simple shooting followed by the two homotopies on λ and then ε (that is steps 1, 2 and 3).

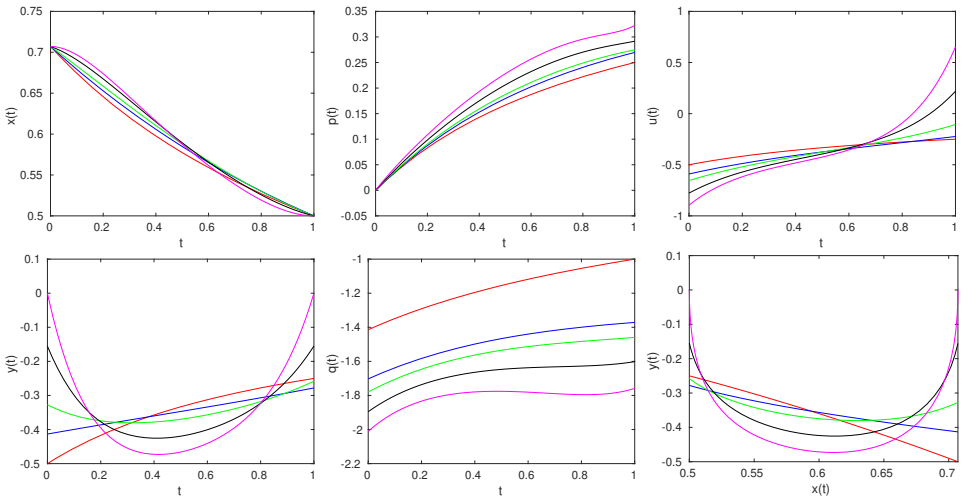


FIGURE 10.3 – **Second step** (homotopy on λ). Graphs of state, co-state and optimal control for $\lambda \in \{0.0, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0\}$, with $\varepsilon = 0.25$.

10.3.3 Conclusion and perspectives

In this work, we have presented a new approach for the numerical resolution of singularly perturbed problems in optimal control, this has been possible thanks to the link that we have

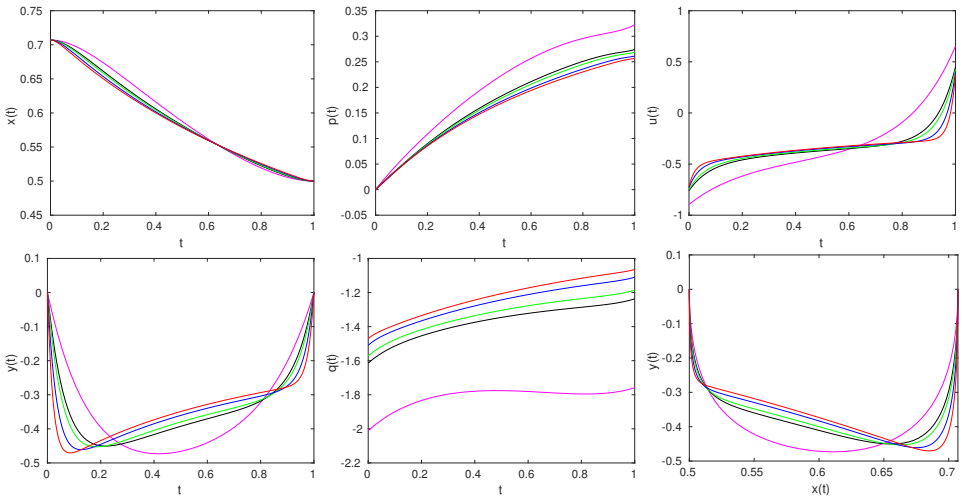


FIGURE 10.4 – **Third step** (homotopy on ε). Graphs of state, co-state and optimal control for $\varepsilon \in \{0.025, 0.05, 0.08, 0.1, 0.25\}$, with $\lambda = 1$.

Algorithms	$\varepsilon = 0.09$	$\varepsilon = 0.08$	$\varepsilon = 0.06$	$\varepsilon = 0.027$	$\varepsilon = 0.025$
Shooting from the middle point	✓	◯	✗	✗	✗
Step 2	✓	✓	✓	✓	✗
Steps 2-3	✓	✓	✓	✓	✓

TABLE 10.2 – Comparison of the numerical methods (for the 3 strategies the initial guess is the solution of the static problem (step 1)) : shooting from the middle point, our approach with only step 2 and our complete approach with step 2 for $\varepsilon = 1/40$ and step 3. The numerical integrations are done with the `dopri5` code with relative and absolute local errors of 1e-8 and 1e-14. The signification of the symbols are given in Table 10.1.

established between the turnpike and singular perturbations frameworks. It must be said that the idea of this homotopic method is well justified by the fact that the two problems (original problem and reduced problem) are close (in the sense of ε) and the reduced problem is much easier to solve.

This paper has been prepared with the aim of laying the groundwork for a more thorough study. We therefore propose to carry out a detailed analysis of the different integrators adapted to stiff problems ; then, to apply our approach with the most efficient integrator on several case studies and make a comparison with existing methods for solving stiff problems (considering direct and indirect methods).

Bibliographie

[1] A. A. Agrachev & Y. L. Sachkov, *Control theory from the geometric view-point*, vol **87** of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin (2004), xiv+412.

[2] A. Agrachev, N.N. Chtcherbakova, I. Zelenko, *On curvatures and focal points of dynamical Lagrangian distributions and their reductions by first integrals,* J. Dyn. Control Syst. **11** (2005), no. 3, pp. 297–327.

[3] Agrachev, A. ; Bonnard, B. ; Chyba, M. ; Kupka, I. *Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), pp. 377–448.

[4] Agrachev, A. A. ; Sarychev, A. V. *Abnormal sub-Riemannian geodesics : Morse index and rigidity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), no.. 6, pp. 635–690.

[5] E. Allgower and K. Georg, *Introduction to numerical continuation methods*, Classics in Applied Mathematics, Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, PA, USA, **45** (2003), xxvi+388.

[6] M. D. Ardema *Solution of the minimum time-to-climb problem by matched asymptotic expansions,* AIAA Journal, **14** (1976), no. 4, pp. 843–850.

[7] V. I. Arnold & B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, vol 125 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 1998, 376 pages.

[8] V.I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics,* Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **60**. Springer-Verlag, New York, (1989), xvi+508 pp. ISBN : 0-387-96890-3.

[9] A. Babiano, G. Boffetta, A. Provenzale and A. Vulpiani, *Chaotic advection in point vortex models and two-dimensional turbulence,* Physics of Fluids, **6** (1994), no. 7, pp. 2465–2474.

[10] D. Bao, S.-S. Chern & Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, vol 200 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2000, 435 pages.

[11] D. Bao, C. Robles & Z. Shen, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **66** (2004), no. 3, pp. 377–435.

[12] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian Systems, Geometry, Topology, Classification,*, Chapman and Hall/CRC, London, 2004.

[13] V.G. Boltyanskii, *Sufficient conditions for optimality and the justification of the dynamic programming method*, SIAM J. Control Optim., **4** (1966), no. 2, pp. 326–361.

[14] B. Bonnard, J.B. Caillau, *Geodesic flow of the averaged controlled Kepler equation,* Forum Math. **21** (2009), no. 5, pp. 797–814.

[15] B. Bonnard, J. B. Caillau, G. Janin, *Conjugate-cut loci and injectivity domains on two-spheres of revolution.*, ESAIM : COCV **19** (2013), no. 2, pp. 533–554.

[16] B. Bonnard, J. B. Caillau, R. Sinclair, M. Tanaka, *Conjugate and cut loci of a two-sphere of revolution with application to optimal control*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 4, 1081-1098.

[17] B. Bonnard, J.-B. Caillau & E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, ESAIM Control Optim. and Calc. Var., 13 (2007), no. 2, pp. 207–236.

[18] B. Bonnard & M. Chyba, *Singular trajectories and their role in control theory*, vol **40** of *Mathematics & Applications*, Springer-Verlag, Berlin (2003), xvi+357.

[19] B. Bonnard, O. Cots, N. Shcherbakova, *Riemannian metrics on 2D-manifolds related to the Euler-Poinsot rigid body motion,* ESAIM : COCV **20** (2014), no. 3 pp. 864–893. https ://doi.org/10.1051/cocv/2013087

[20] C. Balsa, O. Cots, J. Gergaud, B. Wembe, *Minimum energy control of passive tracers advection in point vortices flow.* In : Gonçalves J.A., Braz-César M., Coelho J.P. (eds) CONTROLO 2020. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 695. Springer, Cham. https ://doi.org/10.1007/978-3-030-58653-9_22

[21] B. Bonnard, O. Cots, J. Gergaud, B. Wembe, *Abnormal Geodesics in 2D-Zermelo Navigation Problems in the Case of Revolution and the Fan Shape of the Small Time Balls*, hal-02437507 (2020), Submitted at System Control & Letters.

[22] B. Bonnard, O. Cots & B. Wembe, *A Zermelo Navigation Problem with a Vortex Singularity*, ESAIM : COCV, **27** (2021) no 10, pp : 1-37, https ://doi.org/10.1051/cocv/2020058

[23] B. Bonnard, O. Cots & B. Wembé. *Zermelo Navigation Problems on Surfaces of Revolution and Geometric Optimal Control,* (2021). hal-03209491

[24] B. Bonnard, L. Faubourg & E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, vol **51** of Mathématiques & Applications, Springer-Verlag Berlin, 2006, 276 pages.

[25] B. Bonnard, I. Kupka, *Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal*, Forum Math., **5** (1993), no. 2, pp. 111–159.

[26] B. Bonnard, J. Rouot & B. Wembe *Accessibility, Abnormal Geodesics in Optimal Control. A Geometric Approach from Singularity Theory using Two Case Studies*, hal-03310348 (2021).

[27] B. Bonnard, D. Sugny, *Time-minimal control of dissipative two-level quantum systems : the integrable case,* SIAM J. Control Optim. **48** (2009), no. 3, pp. 1289–1308. (Reviewer : Paolo Mason) 82C10 (49K15 70Q05).

[28] U. Boscain, B. Piccoli, *Optimal syntheses for control systems on 2-D manifolds,* Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], **43**. Springer-Verlag, Berlin, (2004), xiv+261 pp

[29] C. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds,* Duke Math. J. **168** (2019), no. 13, pp. 2507–2558.

[30] J.W. Bruce, P.J. Giblin, *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory,* Cambridge University Press, Cambridge, (1984). xii+222 pp.

[31] A. E. Bryson & Y.-C. Ho, *Applied optimal control*, Hemisphere Publishing, New-York, 1975.

[32] J.-B. Caillau, O. Cots & J. Gergaud, *Differential continuation for regular optimal control problems*, Optimization Methods and Software, **27** (2011), no. 2, pp. 177–196.

[33] R. C. Calleja, E. J. Doedel & C. García-Azpeitia, *Choreographies in the n-vortex problem*, Regul. Chaot. Dyn., **23** (2018), no. 5, pp. 595–612.

[34] P. Cannarsa & C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.

[35] P. Cannarsa & L. Rifford, *Semiconcavity results for optimal control problems admitting no singular minimizing controls*, Ann. Inst. H. Poincaré Non Linéaire, **25** (2008), pp. 773–802.

[36] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part 1, Part 2,* Holden-Day, San Francisco, California, 1965–1967 ; Reprint : 2nd AMS printing, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, USA, 2001, 412 pages.

[37] M.P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Mathematics : Theory & applications, 2nd edn 1988.

[38] J. R. Cash and M. H. Wright, *A Differed correction method for nonlinear two-points boundary value problems : implementation and numerical evaluation,* SIAM J. Sci. Comput., **12** (1991), no. 4, pp. 971–989.

[39] J. R. Cash, *The numerical solution of nonlinear two-point boundary value problems using iterated deferred correction - a survey,* Opuscula Math., **26** (2006), no. 2.

[40] Y. Chen and T. Kolokolnikov, *Collective behaviour of large number of vortex in the plane,* Proc. R. Soc, A, **469** (2013), no. 2156, 12 pages.

[41] J. H. Chow, *A Class of Singularly Perturbed Nonlinear Fixed-Endpoint Control Problems,* J. Optim. Theory Appl., **29** (1979), no. 2, pp. 231–251.

[42] A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery & C. Simó, *Simple Choreographic Motions of N Bodies : A Preliminary Study*, in Newton P., Holmes P., Weinstein A. (eds) Geometry, Mechanics, and Dynamics. Springer, New York, NY, 2002, pp. 287–308.

[43] A. Chenciner, *À l'infini en temps fini. (French) [To infinity in finite time]*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97. Astérisque No. 245 (1997), Exp. No. 832, 5, 323–353.

[44] R. Chertovskih, D. Karamzin, N.T. Khalil and F.L. Pereira, *Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields*, European Journal of Control. https ://doi.org/10.1016/j.ejcon.2020.02.003,

[45] L. Cesari, *Optimization-theory and applications : problems with ordinary differential equations*, vol 17 of *Applications of mathematics*, Springer-Verlag New York, 1983, 542 pages.

[46] O. Cots, *Contrôle optimal géométrique : méthodes homotopiques et applications.* Phd thesis, Université de Bourgogne, Dijon, 2012.

[47] O. Cots, *Geometric and numerical methods for a state constrained minimum time control problem of an electric vehicle*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 23 (2017), no. 4, 1715-1749.

[48] O. Cots, J. Gergaud & B. Wembé. *Homotopic approach for turnpike and singularly perturbed optimal control problems,* FGS 2020, ESAIM : PROCEEDINGS AND SURVEYS, **71** (2021), pp. 43–53.

[49] Gluck, Herman ; Singer, David *Scattering of geodesic fields I*, Ann. of Math. (2) 108 (1978), no. 2, 347–372.

[50] Gluck, Herman ; Singer, David A. *Scattering of geodesic fields. II*, Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 2, 205–225.

[51] G. Godbillon, *Feuilletages, études géométriques*, Progr. Math. 98, Birkhäuser, Boston, 1991.

[52] W. B. Gordon *A minimizing property of Keplerian orbits,* AMS, **99** (1977), no 5, pp. 962-971

[53] V. V. Goryunov & V. M. Zakalyukin, *Lagrangian and Legendrian Singularities*, in Brasselet JP., Ruas M.A.S. (eds) Real and Complex Singularities. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2006.

[54] V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, D. Malyshev, *On topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on the sphere* S^n, $(n > 3)$, Nonlinearity **33** (2020), no. 12, pp. 7088–7113.

[55] V.Z. Grines, *On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers,* (Russian) Mat. Sb. 188 (1997), no. 4, pp. 57–94 ; translation in Sb. Math. 188 (1997), no. 4, pp. 537–569

[56] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems,* Springer, Berlin, Springer Series in Comput. Math., Vol. 14, second reveted edn 1996, 614 pages.

[57] R. Hama, J. Kasemsuwan & S. V. Sabau, *The cut locus of a Randers rotational 2-sphere of revolution*, Publ. Math. Debrecen, **93** (2018), no 3-4, pp. 387–412.

[58] R. Hama and S. V. Sabau, *The Geometry of a Randers Rotational Surface with an Arbitrary Direction Wind*, Mathematics, **8** (2020), no. 11, pp. 2047,

[59] G. Hector, *Les feuilletages de Reeb*, L'Ouvert. Num. 76 spécial Georges Reeb, IREM de Strasbourg, Strasbourg, 1994, pp. 93–111.

[60] H. V. Helmholtz, *On integrals of hydrodynamics equations, corresponding to vortex motions.* Rus. J. Nonlin. Dyn., **2** (2006), No. 4, pp. 473–507.

[61] J. Itoh and K. Kiyohara, *The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids*, Manuscripta math., **114** (2004), no. 2, pp. 247–264.

[62] F. Jean, *Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique*, Notes de cours, 2009/2010.

[63] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, vol. 52 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[64] G. R. Kirchhoff, *Vorlesungen uber mathematische Physik, Mechanik*, Leipzig, Teubner, 1876, 466 pages.

[65] H. K. Khalil *Non-Linear systems,* Prentice-Hall : Upper Saddle River, second edn 1996.

[66] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control,* Birkhäuser, Mathematics : Theory and Applications, second edn 1988.

[67] P. V. Kokotović, R. E. O'Malley and P. Sannuti, *Singular perturbations and order reduction in control theory — an overview,* Automatica, **12** (1976), no. 2, pp. 123–132.

[68] Kopacz, P. *A note on generalization of Zermelo navigation problem on Riemannian manifolds with strong perturbation*, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta-Matematic*, **25** (2017), pp. 107–123.

[69] A. J. Krener, *The high order maximal principle and its application to singular extremals*, SIAM J. Control Optim., **15** (1977), pp. 256–293.

[70] I. Kupka. *Geometric theory of extremals in optimal control problems. i. the fold and maxwell case*, Trans. Amer. Math. Soc., **299** (1987), no. 1, 225–243.

[71] I. Kupka, Preprint , 1992.

[72] H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1932, Sec. 159.

[73] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics,* Course of Theoretical Physics, **1** (1976), 3rd ed, Pergamon, Oxford, 1976.

[74] J. Liu and H. Hu *Biological Inspiration : From Carangiform Fish to Multi-Joint Robotic Fish*. Springer Nature, J. Bionic Eng., **7** (2010), no. 1, pp. 35–48.

[75] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*, Translated from the French by Carl P. Simon. London Mathematical Society Lecture Note Series, 58. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982. xiv+256 pp.

[76] R.K. Meyer, G.R. Hall, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, **90** (1992), xii+292, pp. 101–120.

[77] K. Meyer, G. Hall & D. C. Offin, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, vol. 90 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag New York, 2009, 399 pages.

[78] S.B. Myers, *Connections between differential geometry and topology. I. Simply connected surfaces.* Duke Math. J. 1, **3** (1935), pp. 376–391. doi :10.1215/S0012-7094-35-00126-0. https ://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077489099

[79] S.B. Myers, *Connections between Differential Geometry and Topology,* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **21** (1935), no. 4, pp. 225–227.

[80] R. Montgomery, *Abnormal minimizers*, SIAM J. Control Optim. 32 (1994), no. 6, 1605–1620.

[81] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, Mathematical Surveys and Monographs, 91. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xx+259 pp.

[82] P. K. Newton, *The N-Vortex Problem - Analytical Techniques*, vol. 145 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag New York, 2001, 420 pages.

[83] O'Mailley, *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations,* Springer-Verlag : Applied Math science, Vol. 89, 1991.

[84] J.Jr. Palis, de Melo, *Welington Geometric theory of dynamical systems, An introduction,* Translated from the Portuguese by A. K. Manning. Springer-Verlag, New York-Berlin, (1982), xii+198 pp. ISBN : 0-387-90668-1

[85] M.M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds,* Topology **1** (1962), pp. 101–120.

[86] M.M. Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds,* Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), (1973), pp. 389–419. Academic Press, New York.

[87] F. L. Pereira and, T. Grilo and S. Gama, *Optimal Multi-process Control of a Two Vortex Driven Particle in the Plane,* IFAC-PapersOnLine, **50** (2017), no. 1, pp. 2193–2198.

[88] H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. (French) [On the geodesic lines of convex surfaces]* Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), no. 3, pp. 237–274.

[89] H. Poincaré, Œuvres complète, Editions Jacques Gabay sceaux, 1965.

[90] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskiĭ, R. V. Gamkrelidze & E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Translated from the Russian by K. N. Trirogoff, edited by L. W. Neustadt, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London, 1962.

[91] B. Protas, *Vortex dynamics models in flow control problems*, vol **21 R203** of IOP Science, Nonlinearity, 2008.

[92] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, vol. 1183, Paris, Hermann, coll. "Actualités Sci. Indust.", 1952.

[93] P. G. Saffman, *Vortex dynamics*, Cambridge University Press, 1992.

[94] J. La Salle, S. Lefschetz *Stability by Liapunov's direct method with applications,* Academic press, New York, 1(961). vii+133 pp.

[95] U. Serres, *Géométrie et classification par feedback des systèmes de contrôle non linéaires de basse dimension*, PhD thesis, Université de Bourgogne, Dijon, 24th March 2006, pp. 51–62.

[96] C.L. Siegel, J.K. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Translation by Charles I. Kalme. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 187. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971. xii+290 pp.

[97] K. Shiohama, T. Shioya, M. Tanaka, *The geometry of total curvature on complete open surfaces,* Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, **159** (2003), pp. x+284 ISBN : 0-521-45054-3 (Reviewer : Victor Bangert)

[98] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, volume 12 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag New-York, third edition, 2002.

[99] H.J Sussmann, *Regular synthesis for time-optimal control of single-input real analytic systems in the plane,* SIAM J. Control Optim. **25** (1987), no. 5, pp. 1145–1162. (Reviewer : Ronald Hirschorn) 93B50 (34C40 49B36)

[100] H.J Sussmann, *The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the C1 nonsingular case.* SIAM J. Control Optim. **25** (1987), no. 2, pp. 433–465. (Reviewer : P. Brunovský) 49B36 (49C20 58A35 93C10 93C15)

[101] Thom, René, *Structural stability and morphogenesis. An outline of a general theory of models.* Translated from the French by D. H. Fowler. With a foreword by C. H. Waddington. Second printing. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. xxv+348 pp.

[102] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie & applications,* Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005, 246 pages. ISBN : 2 71177175 X.

[103] E. Trelat, E. Zuazua, *The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control,* J. Differential Equations, **258** (2015), no. 1, pp 81–114.

[104] D. Vainchtein, I. Mezi, *Optimal control of a co-rotating vortex pair : averaging and impulsive control*, Physica D 192, (2004), pp. 63–82.

[105] D. Vainchtein, I. Mezi, *Vortex-based control algorithms,* Control of fluid flow, Berlin : Springer (2006), 189–212.

[106] A. B. Vasil'eva, *Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations containing small parameters in front of the higher derivatives,* USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 3, no. 4, 1963, Translated by R. Feinstein.

[107] A. B. Vasil'eva and M. G. Dmitriev, *Singular perturbations in optimal control problems,* J. Math. Sci., **34** (1986), pp. 1579–1626.

[108] H. Whitney, *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*, Annals of Mathematics, **62** (1955), no. 3, pp. 374–410.

[109] V.M. Zakaljukin, *Lagrangian and Legendre singularities* (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 1, pp. 26–36.

[110] E. Zermelo, *Über das Navigations problem bei ruhender oder veränderlicher wind-verteilung*, Z. Angew. Math. Mech., **11** (1931), no. 2, pp. 114–124.

Résumé : Ce travail étudie les problèmes de Zermelo sur les surfaces de révolution du point de vue du contrôle optimal dans le cadre hamiltonien en combinant des méthodes dites géométriques et numériques. Il est motivé par plusieurs cas d'études notamment *l'exemple historique de Carathéodory-Zermelo* qui est l'un des problèmes fondateurs du calcul des variations et une *forme normale* intéressante pour l'analyse microlocale du problème dans le cas général, ainsi que *le problème dit "du vortex"* qui est une application récente provenant de l'hydrodynamique et qui décrit l'évolution d'une particule passive autour d'un point vortex. Le problème de Zermelo ainsi considéré est déterminé par un triplet (M, g, F_0) où M est une variété de dimension 2 avec des coordonnées normales $q = (r, \theta)$, g une métrique riemannienne sur M et F_0 un champ de vecteur définissant le *courant* (ou le vent). Du point de vue du contrôle optimal, ce problème correspond à un problème de transfert en temps minimal entre deux points q_0 et q_1 pour un système de contrôle affine de la forme : $\dot{q} = F_0(q) + u_1\, F_1(q) + u_2\, F_2(q)$, $\|u\| \leq 1$ où $q(t) \in M$, $u = (u_1, u_2)$ est le contrôle et où les champs F_1, F_2 forment un repère orthonormé associé à la métrique g. Ce type de problème apparaît déjà en *géométrie riemannienne* avec $F_0(q) \equiv 0$ et en *géométrie finslérienne* dans *le cas dit faible* où la norme du courant (associé à la métrique g) est < 1. L'objectif principal de cette étude est de construire une *synthèse optimale dans un voisinage adapté* R qui est un rectangle contenant le point initial q_0. Cette objectif se résume dans l'étude de la régularité et la description des lignes de (sous)-niveaux, correspondant aux *boules dites zerméliennes*, de la *fonction temps minimale* $V_{q_0}(q_1) \coloneqq \inf\{t_f \mid q(t_f, q_0) = q_1,$ où (q, u) est solution du problème$\}$. La principale difficulté de cette analyse réside dans l'existence de *directions anormales* dans le cas d'un courant fort (c'est-à-dire le cas où la norme du courant est > 1), celles-ci étant associées aux situations nouvelles telles que : la perte de contrôlabilité locale en q_0, la discontinuité de la fonction temps minimale, la déformation des petites *sphères et boules*, l'apparition de nouvelles branches dans le *lieu de coupure* (lieu où les trajectoires perdent leur optimalité), etc. Notre analyse est principalement basée sur deux points de vue. Le premier point de vue est le *point de vue de Carathéodory*, équivalent à la transformée de Goh en contrôle. Il permet de réécrire le problème comme un système de contrôle affine et scalaire en dimension 3 et d'utiliser des outils géométriques de ce cadre pour calculer les *lieux conjugué et de coupure* en lien avec l'optimalité locale et globale des solutions. Le second point de vue est *le point de vue système mécanique* qui permet d'écrire le problème à l'aide d'un *potentiel généralisé* et d'utiliser la *relation de Clairaut* pour intégrer le flot et classifier les trajectoires suivant une méthode de classification appelée GMR (generalized Morse-Reeb) qui généralise la classification de Morse-Reeb en système dynamique. Dans ce contexte, nous introduisons les concepts de feuilletage de Reeb, composante de Reeb, géodésique séparatrice qui sépare en différente classe le flot géodésique. Un accent particulier est ensuite mis sur l'étude du problème vortex qui peut être vue comme un modèle réduit du problème de Kepler, mais avec un courant orthoradial. Dans ce cas, on établit un résultat *d'existence de solution optimale* et on construit la synthèse du problème.

Mots clés : Contrôle optimal géométrique, problèmes de navigation de Zermelo sur les surfaces de révolution, géométrie riemannienne et finslérienne, courant faible/fort, géodésiques anormales, synthèse optimale, lieux conjugués et de coupure, classification de Morse-Reeb, problème un vortex, méthodes numériques en contrôle optimal.

Abstract : This work studies Zermelo problems on revolutions surfaces from the point of view of optimal control in the Hamiltonian framework by combining so-called geometrical and numerical methods. It is motivated by several case studies, in particular the *historical example of Carathéodory-Zermelo* which is one of the founding problems of the calculus of variations and an interesting *normal form* for the microlocal analysis of the global problem, as well as the so-called *"vortex problem"* which is a recent application from hydrodynamics and which describes the evolution of a passive particle around a vortex point. The considered Zermelo problem is determined by a triplet (M, g, F_0) where M is a 2D manifold with normal coordinates $q = (r, \theta)$, g is a Riemannian metric on M and F_0 is a vector field defining the *current* (or the wind). From the optimal control view point, this problem corresponds to a minimum time transfer problem between two points q_0 and q_1 for an affine control system of the form : $q(t) = F_0(q) + u_1 F_1(q) + u_2 F_2(q)$, $\|u\| \leq 1$ where $q(t) \in M$, $u = (u_1, u_2)$ is the control and where the fields F_1, F_2 form an orthonormal reference frame associated to the metric g. This kind of problem already appears in Riemannian geometry with $F_0(q) \equiv 0$ and in Finslerian geometry in the so-called weak case where the norm of the current (associated to the metric g) is < 1. The main goal of this study is to construct an *optimal synthesis in a suitable neighborhood* R which is a rectangle containing the initial point q_0. This objective is summarized in the study of the regularity and the description of the (sub)-level lines, corresponding to the so-called Zermelian balls, of the *minimal time value function* $V_{q_0}(q_1) := \inf \{t_f \mid q(t_f, q_0) = q_1,$ where (q, u) is solution of the problem$\}$. The main difficulty of this analysis lies in the existence of *abnormal directions* in the strong current case (i.e. the case where the norm of the current is > 1), which are associated to new situations such as : the loss of local controllability in q_0, the discontinuity of the minimal time value function, the deformation of *small spheres and balls*, the apparition of new branches in the *cut locus* (set of points where trajectories lose their optimality), etc. Our analysis is essentially based on two points of view. The first point of view is the Caratheodory viewpoint, equivalent to the Goh transform in control. It allows us to rewrite the problem as an affine and scalar control system in dimension 3 and to use geometric tools of this framework in order to compute the *conjugate and cut loci* in relation with the local and global optimality of the solutions. The second point of view is the mechanical system viewpoint which allows to write the problem using a generalized potential and to use the Clairaut relation to integrate the flow and to classify the trajectories according to a classification method called GMR (generalized Morse-Reeb) which generalizes the Morse-Reeb classification in dynamical system. In this context, we introduce the concepts of Reeb foliation, Reeb component, separatrix geodesic which separated the geodesic flow into different classes. A special attention is given to the study of the vortex problem which can be seen as a toy model of the Kepler problem, but with an orthoradial current. In this case, we provide a result for the existence of an optimal solution and we construct the synthesis of the problem.

Keys words : Geometric optimal control, 2D-Zermelo navigation problems, Riemannian and Finnerian geometry, weak/strong current, abnormal geodesics, optimal synthesis, conjugate and cut loci, Morse-Reeb classification, single vortex problem, numerical methods in optimal control.