HAL open science

Approximation par Éléments finis C1 des modèles magnétohydrodynamiques pour les plasmas de fusion

Ali Elarif

▶ **To cite this version:**

Ali Elarif. Approximation par Éléments finis C1 des modèles magnétohydrodynamiques pour les plasmas de fusion. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Côte d'Azur, Nice, France; Inria - Sophia Antipolis, 2020. Français. NNT : . tel-03201512v2

HAL Id: tel-03201512

https://inria.hal.science/tel-03201512v2

Submitted on 19 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

THÈSE DE DOCTORAT

Approximation par Éléments finis C^1 des modèles magnétohydrodynamiques pour les plasmas de fusion

Ali Aboudou ELARIF

Laboratoire de Mathématiques J. A. Dieudonné (LJAD)

Présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en Mathématique **d'**Université Côte d'Azur

Dirigée par : *Hervé Guillard*

Soutenue le : 17 décembre 2020

Devant le jury, composé de :
Eric Serre, DR CNRS, Centrale Marseille
Michel Mehrenberger, Professeur, Aix Marseille université
Boniface Nkonga, Professeur, Université Côte d'Azur
Florence Hubert, Professeur, Aix Marseille Université
Francesca Rapetti, Maître de conférences, Université Côte d'Azur
Hervé Guillard, DR INRIA, Université Côte d'Azur

Inria

THÈSE DE DOCTORAT

en vue d'obtenir le titre de
Docteur en Sciences
de l'Université Côte d'Azur

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue par

Ali Aboudou Elarif

Approximation par Éléments finis C^1 des modèles magnétohydrodynamiques pour les plasmas de fusion

Thèse dirigée par :
Hervé Guillard

Soutenu le **17 Décembre 2020**

devant le jury composé de :

Eric Serre,	DR CNRS,	Centrale Marseille,	Rapporteur
Michel Mehrenberger,	Professeur,	Aix Marseille Université,	Rapporteur
Boniface Nkonga,	Professeur,	Université Côte d'Azur,	Examinateur
Florence Hubert,	Professeur,	Aix Marseille Université,	Examinatrice
Francesca Rapetti,	MCF,	Université Côte d'Azur,	Examinatrice
Hervé Guillard,	DR INRIA,	Université Côte d'Azur,	Directeur de thèse

Résumé

Cette thèse participe au développement de méthodes numériques avancées pour simuler les instabilités du plasma pour la fusion par confinement magnétique dans les tokamaks. Ces écoulements sont décrits dans un cadre général par des modèles fluides de type magnetohydrodynamique(MHD) et peuvent être considérés comme incompressibles dans certaines approximations connues sous le nom de modèles MHD réduits. Dans ce travail, la contrainte d'incompressibilité est traitée par l'introduction de fonctions de courant. Une conséquence de cette formulation est l'apparition de termes différentiels d'ordre 4 dans les équations. L'utilisation de fonctions C^1 est alors nécessaire pour appliquer la méthode des éléments finis de Galerkin conforme. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis dite de Clough-Tocher(CT) réduite sur des triangulations générales. La méthode a été validée sur des problèmes simples, puis étendue à des problèmes pertinents pour l'étude des plasmas de fusion. Tout d'abord, l'équilibre des plasmas décrit par l'équation de Grad-Shafranov a été abordé. Ensuite, nous avons étudié des modèles incompressibles dans une formulation fonction de courant pure. Premièrement, nous avons introduit une discrétisation des équations incompressibles de Navier-Stokes qui constituent un sous-modèle des équations de la MHD incompressible. Nous avons montré la stabilité en énergie de la méthode et démontré ses performances sur certains cas tests standards. Nous avons ensuite étendu ce schéma numérique aux équations de la MHD incompressible. Nous avons également démontré la stabilité en énergie de l'approche numérique et appliqué le schéma numérique à la simulation d'un problème d'instabilité du plasma connu sous le nom de "instabilité du tilt".

Au vu des résultats obtenus, la méthode CT s'est révélée adaptée à la simulation des instabilités du plasma décrites par les modèles MHD. En raison de sa capacité à représenter des géométries complexes, elle se compare favorablement aux autres méthodes numériques en termes de précision, de temps CPU, de coût mémoire et de la flexibilité.

Mots clefs : Plasma de fusion, modèles MHD, formulation fonction de courant, éléments finis C^1, équations de Navier-Stokes incompressibles, équilibre de Grad-Shafranov

Abstract

This thesis participates in the development of advanced numerical methods to simulate plasma instabilities for fusion by magnetic confinement in tokamaks. These flows are described in a general framework by magnetohydrodynamic(MHD) fluid models and can be considered incompressible in some approximations known as reduced MHD models. In this work, the incompressibility constraint is dealt with by the introduction of stream functions. A consequence of this formulation is the appearence of differential terms of order 4 in the equations. The use of C^1 functions is then required to apply the conforming Galerkin finite element method. We have used the the so-called reduced Clough-Tocher(CT) finite element method on general triangulations. The method has been validated on simple problems and then extented to problems relevant for the study of fusion plasmas. First, plasma equilibrium described by the Grad-Shafranov equation, has been investigated. Then we have studied incompressible models in a pure streamfunction formulation. First, we introduced a discretization of the incompressible Navier-Stokes equations which constitute a sub-model of the incompressible MHD equations. We have shown the stability in energy of the method and demontrated its performance on some standard test cases. We have then extended this numerical scheme to the incompressible MHD equations. We have also proved the stability in energy of the numerical approach and applied the numerical scheme to the simulation of the well-known "tilt instability".

In view of the results obtained, the CT method appears to be suitable for the simulation of plasma instabilities described by MHD models. Due to its capability to represent complex geometry, it compares favorably to other numerical methods in term of accuracy, CPU time, memory cost and versatility.

Key words : Fusion plasmas, MHD models, Streamfunction formulation, C^1 finite elements, incompressible Navier-Stokes equations, Grad-Shafranov equilibrium.

Remerciements

Avant de nous lancer dans cette thèse, je voudrais prendre le temps de remercier toutes les personnes qui ont participé à ce merveilleux parcours.

En premier, je remercie mon directeur de thèse, Hervé Guillard, pour sa disponibilité, son écoute, son intérêt à l'avancée de mes travaux et pour nos échanges d'une valeur non mesurable tant sur le plan scientifique que humain. Ses conseils et sa rigueur ont beaucoup contribué tant sur mon développement professionnel que personnel. Je le remercie également pour ses relectures et corrections de ce manuscrit.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers Michel Mehrenberger et Eric Serre d'avoir accepté de rapporter cette thèse et de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail. Leurs remarques pertinentes ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit.

Je remercie également Francesca Rapetti, Boiniface Nkonga et Florence Hubert qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail. Francesca, je la remercie particulièrement pour les discussions enrichissantes que nous avons eues pendant la rédaction de notre article avec Blaise Faugeras, qui je lui remercie également. Boniface, je le remercie grandement pour les conseils, les compétences et la sympathie qu'il m'a fait bénéficier durant ces 3 ans de thèse. Quant à Florence, je la remercie énormément pour la confiance et le soutien qu'elle m'a toujours témoignés depuis quand j'étais étudiant à Aix Marseille, il y a 4 ans.

J'adresse mes remerciements aux membres de l'équipe CASTOR avec qui il a été très agréable d'échanger et de travailler. I express my gratitude especially to my co-office, Ashish, with whom I will keep excellent memories. Je remercie également les membres des équipes ACUMES, ATLANTIS et TOSCA. En particulier, Georges, Pascal, Quentin, Stefano, Mickael pour les moments de détente qu'on a passé ensemble notamment

pendant les les pauses café et déjeuner. Mes remerciements vont aussi à mes collègues organisateurs des PhD seminars (année 2019 et 2020) avec lesquels je me suis enrichi professionnellement en organisant différents événements scientifiques et sociaux. Je garderai d'excellents souvenirs également, des bons moments partagés avec les doctorants du LJAD, notamment pendant les GdR Gouter et les GdR ciné. Je remercie particulièrement, mon amie Farchat, pour son soutien indéfectible et je la souhaite bon vent pour la suite de sa thèse.

Je désire remercier notre assistante d'équipe, Montserrat Argente, et notre chargé RH, Diane Polinelli, pour leurs gestions très efficace de mes démarches administratives et mes formations. Montserrat, je la remercie énormément pour sa sympathie, pour ses conseils, ses bons plans de recettes et de voyages.

Je ne peux pas oublier de remercier tous mes enseignants et collègues de GSBT, de l'Université des Comores, de l'Université de Toulon et de l'Université d'Aix Marseille, pour leurs encouragements et leurs contributions majeurs dans la personne que je suis devenu aujourd'hui.

M'éloignant de la sphère de la recherche, j'adresse mes reconnaissances et bien plus... à mes parents pour leur soutien inconditionnel surtout durant ces cinq dernières années passées loin de leurs yeux. Sans eux je n'aurais pas eu la joie de continuer sur ce long chemin studieux. Cette réussite est également la leur.

Un clin d'œil aussi au reste de la famille qui de près ou de loin, m'ont toujours soutenu et encourager d'aller au delà de mes objectifs. Plus particulièrement, je remercie Said, d'être toujours présent dans mon quotidien et de s'être déplacé afin d'assister à ma soutenance. Merci à M. Zitoumbi, qui même de loin n'a jamais manqué ses encouragements et son soutien. Merci à ma sœur, Nihlat, pour son écoute et sa relecture minutieuse de ce manuscrit, j'espère être toujours là quand elle aura besoin de moi. Merci à Nathalie pour sa présence, sa bienveillance, son amour à mon égard. Merci à Zed, pour l'énergie positive qu'elle m'a toujours transmise chaque fois que je la rencontre.

A titre plus personnel, je remercie chaleureusement ma chérie, Ansoiriat, pour la grande patience, l'encouragement et la confiance qu'elle m'a témoignés. Je ne peux pas exprimer en quelques lignes la gratitude que j'ai pour elle.

À la mémoire de mon grand père, Youssouf Soilihi, j'aimerais pouvoir lui dire là où il se repose : Mbaye, ton rêve vient de se réaliser !

Mgou ngoudjo mrehemou ya mlaze pvwema

Table des matières

Introduction **1**
0.1 Énergie de fusion 1
0.2 Les tokamaks et la fusion par confinement magnétique . . . 4
0.3 Instabilités du plasma dans les tokamaks 6
0.4 Simulations numériques dans les tokamaks 7
0.5 Organisation du manuscrit 9

1 Les modèles magnétohydrodynamiques (MHD) **13**
1.1 Modèle cinétique du plasma 14
1.1.1 Équation de Boltzmann 14
1.1.2 Propriétés des opérateurs de collision 14
1.1.3 Équations de Maxwell 15
1.2 Les modèles bi-fluides 16
1.2.1 Quantités macroscopiques 16
1.2.2 Équations bi-fluides du plasma 18
1.2.3 Équations bi-fluides dans un régime quasi-neutre . . 22
1.3 Les modèles MHD mono-fluide 25
1.3.1 Normalisation du système bi-fluide 25
1.3.2 Modèle MHD réduite 30
1.3.3 MHD réduite et visco-resistive 36

2 Méthode des éléments finis **40**
2.1 Généralités 40
2.1.1 Méthode de Galerkin et des éléments finis 40
2.1.2 Analyse de convergence 44
2.2 Méthode des éléments finis C^1 45
2.2.1 Généralités sur les éléments finis C^1 45
2.2.2 Éléments finis de Clough Tocher réduits 47
2.3 Prise en compte des conditions aux limites 51
2.3.1 Méthode de pénalisation 52
2.3.2 Méthode de pénalisation discrète exacte 53

3 Problèmes elliptiques **57**
3.1 Problème du potentiel 58
3.1.1 Équation de Poisson 58
3.1.2 Approximation de Galerkin et estimation d'erreur . . 59
3.1.3 Résultats numériques 61
3.2 Problème biharmonique 62
3.2.1 Équation du bilaplacien 62
3.2.2 Approximation de Galerkin et analyse d'erreur . . . 63
3.2.3 Résultats numériques 66
3.3 Équilibre du plasma dans un tokamak 67
3.3.1 Équation de Grad Shafranov 67
3.3.2 Équilibre dans un Tokamak 71
3.3.3 Équations discrètes 74
3.3.4 Résultats numériques 75

4 Formulation fonction de courant des équations de Navier Stokes incompressible **86**
4.1 Équations primitives 87
4.1.1 Préliminaires 87
4.1.2 Equations de Navier-Stokes avec les variables primitives 88
4.1.3 Caractérisation des fonctions à divergence nulle . . . 90
4.2 Formulation fonction de courant 90
4.2.1 Formulation faible 90
4.2.2 Approximation de Galerkin et analyse d'erreur . . . 92
4.2.3 Discrétisation en temps 96
4.3 Résultats numériques 97
4.3.1 Solutions manufacturées 98
4.3.2 Tourbillons de Green-Taylor 100
4.3.3 Cavité entrainée 103

5 Les équations de la MHD incompressible **109**
5.1 Équations primitives de la MHD incompressible 110
5.1.1 Modèle MHD résistive et incompressible 110
5.1.2 Formulation faible du système primitif 110
5.1.3 Propriété de décroissance de l'énergie 112
5.2 Formulation fonction de courant 112
5.2.1 Formulation faible 112
5.2.2 Approximation éléments finis CT et analyse d'erreur 117
5.2.3 Discrétisation temporelle 122
5.3 Résultats numériques 123

5.3.1 Solutions manufacturées 123
5.3.2 Instabilités du tilt 125

Conclusions **133**

A **136**

Introduction

L'évolution de la science et des nouvelles technologies entrainent une croissance exponentielle de la population au cours de ces derniers siècles, qui s'est accompagnée d'une augmentation de la demande en énergie, notamment pour les transports, les usines industrielles, l'urbanisation, la sécurité, etc. Le recours aux combustibles fossiles tels que le charbon, le pétrole et le gaz, est synonyme d'émission de gaz à effet de serre et de pollution. La concentration de gaz à effet de serre comme le CO2 est clairement corrélée à l'augmentation de la température mondiale [53], et aux changements climatiques qui se traduisent entre autre, par l'acidification des océans, le réchauffement de la planète, la fonte des glaces polaires et l'élévation du niveau de la mer.

Il est urgent de trouver des nouvelles sources d'énergies à grandes échelles, disponibles, pérennes et non émettrices de CO2. La fusion thermonucléaire pourrait bien satisfaire aux besoins énergétiques des générations futures. En effet, à masse égale, la fusion d'atomes légers libère une énergie près de quatre millions de fois supérieure à celle d'une réaction chimique telle que la combustion du charbon, du pétrole ou du gaz, et quatre fois supérieure à celle des réactions de fission nucléaire. La fusion peut fournir l'énergie de base nécessaire pour satisfaire les besoins en électricité de nos villes et de nos industries.

0.1 Énergie de fusion

Ce que nous percevons sous la forme de lumière et de chaleur résulte des réactions de fusion qui se produisent au cœur du Soleil et des étoiles. Au cours de ce processus, des noyaux d'hydrogène entrent en collision et fusionnent pour donner naissance à des atomes d'hélium plus lourds et de considérables quantités d'énergie, voir figure (1). À chaque seconde, le Soleil transforme 600 millions de tonnes d'hydrogène en hélium, libérant ainsi une gigantesque quantité d'énergie. La force gravitationnelle des étoiles crée les conditions nécessaires à la fusion dans l'espace.

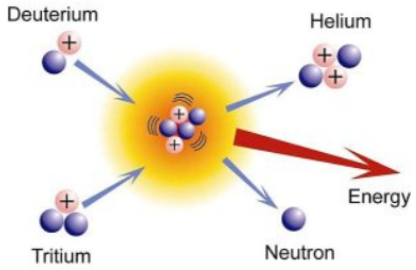


FIGURE 1 – Réaction de fusion [1]

La masse du ou des produits d'une réaction de fusion étant inférieure à la somme des masses des noyaux fusionnés, la différence est transformée en énergie cinétique (puis en chaleur) selon la formule d'Einstein $E = mc^2$. où m est la différence de masse et c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Faute de pouvoir disposer, sur terre, de l'intensité de la force gravitationnelle à l'œuvre au cœur des étoiles, une nouvelle approche a été développée pour réaliser des réactions de fusion. Au XXe siècle, on a identifié la réaction de fusion la plus efficace réalisable en laboratoire : il s'agit de la réaction entre deux isotopes de l'hydrogène (H), le deutérium (D) et le tritium (T). La fusion D-T présente deux intérêts majeurs [36] :

- La disponibilité des combustibles : pour obtenir du deutérium, il suffit de distiller de l'eau, qu'il s'agisse d'eau douce ou d'eau de mer. Cette ressource est largement disponible et quasiment inépuisable. Chaque mètre-cube d'eau de mer contient 33 grammes de deutérium [2]. Le tritium n'existe pas naturellement sur terre, il peut toutefois être produit par l'interaction d'un neutron et d'un atome de lithium. Le lithium est un métal léger, présent en abondance dans la croûte terrestre. Les ressources prouvées, faciles à extraire, représentent un stock suffisant pour alimenter les centrales de fusion pendant plus de 1 000 ans. Le lithium est également présent dans l'eau de mer (en quantité suffisante pour couvrir les besoins en énergie de la planète pendant 6 millions d'années).
- Ensuite, elle a un impact environnemental faible : la réaction de fusion ne génère pas de dioxyde de Carbone ni d'autres gaz à effet de serre. Seul l'hélium, un gaz inerte et non toxique, est rejeté par la fusion.
- Le dernier avantage majeur est la sécurité des réacteurs de fusion : un accident nucléaire de type Fukushima ou Tchernobyl ne peut pas se produire dans un réacteur de fusion. Les conditions pro-

pices aux réactions de fusion sont difficiles à atteindre ; en cas de perturbation, le plasma se refroidit extrêmement rapidement et les réactions s'arrêtent. En outre, la quantité de combustible présente dans l'enceinte est insuffisante pour alimenter les réactions au-delà de quelques secondes et une « réaction en chaîne » est inconcevable du point de vue de la physique.

Comme on peut s'y attendre, la fusion présente également quelques inconvénients dont il faut tenir en compte. Il s'agit des défis scientifiques, technologiques et économiques à mettre en place pour aboutir à la réalisation des réacteurs et produire l'énergie. Un autre inconvénient à prendre en compte est le fait que le tritium est radioactif et que le lithium est une matière dangereuse. Cependant, ces inconvénients sont mineurs comparées à celles des réacteurs de fission. En effet, la demi vie du tritium est de 12.5 ans alors que celle de l'uranium 235 est de 700 millions d'années et celle de l'uranium 238 est de 4 milliards d'années [3].

La réaction de fusion Deutérium-Tritium(D-T) se révèle la plus efficace et permet d'obtenir le gain énergétique le plus élevé aux températures les plus « basses ». Néanmoins, les températures préalables pour allumer le processus sont de l'ordre de 150 millions de degrés, soit dix fois plus que la réaction Hydrogène-Hydrogène(H-H) qui se produit au cœur du Soleil. À ces hautes températures, le combustible est complètement ionisé et se transforme en "*plasma*", le quatrième état de la matière. Un plasma est un mélange d'électrons chargés négativement et de nucléons et ions chargés positivement. Lorsqu'un plasma D-T est chauffé dans des conditions thermonucléaires, le chauffage des particules fournit une quantité croissante de l'énergie totale. Lorsque des conditions de confinement adéquates sont fournies, on atteint un point où la température du plasma peut être maintenue contre les pertes d'énergie uniquement par la température des particules. Le chauffage externe appliqué peut alors être désactivé et la température du plasma est maintenue uniquement par le chauffage interne [48]. Le critère de Lawson donne la condition suivante sur la densité des particules n, la température d'allumage T et le temps de confinement τ pour atteindre cet équilibre [50] :

$$nT\tau > 3.10^{20} m^{-3}.keV.s \tag{1}$$

La réaction est considérée comme un succès, lorsque le rapport entre la puissance produite par la fusion et celle fournit pour confiner le plasma est supérieure à 1. Bien que les recherches sur les réacteurs de fusion aient commencées depuis les années 1940, jusqu'à nos jours, aucune conception n'a été capable de produire plus de puissance de fusion que la puissance

fournie pour confiner le plasma, ce qui va à l'encontre du but recherché. La gestion des neutrons libérés, qui au fil du temps dégradent les matériaux des parois de l'appareil, est un deuxième problème important qui affecte le processus.

Il existe deux manières d'atteindre la condition (1) :

1. Soit en maximisant le temps de confinement τ : le plasma chaud est confiné par de forts champs magnétiques appliqués à une densité de particule de l'ordre $1.5 \times 10^{20} m^{-3}$, soit 2×10^5 fois plus petit que la densité atomique d'un gaz dans des conditions normales. Avec cette densité, le temps de confinement nécessaire est de l'ordre de 2 à 4 secondes [48]. Cette approche est aujourd'hui la principale ligne de recherche sur la fusion et elle est appelée "fusion par confinement magnétique".
2. L'autre moyen extrême consiste à maximiser la densité. Cela peut se faire par un chauffage fort et symétrique d'un petit volume sphérique de D-T. Le chauffage peut être effectué au moyen de lasers ou de faisceaux de particules et entraîne l'ablation d'une partie du matériau, ce qui provoque une implosion due à la conservation de la quantité de mouvement. Il est clair que le temps de confinement de l'énergie est extrêmement court dans ce concept : c'est le temps nécessaire pour que les particules quittent le centre d'implosion chaud. La densité requise est environ 1000 fois la densité du D-T liquide. Comme on se base sur l'inertie de masse pour maintenir le plasma dans ce volume, cette approche de la fusion est souvent appelée "fusion par confinement inertielle".

Dans ce travail, on s'intéresse uniquement à la fusion par confinement magnétique.

0.2 Les tokamaks et la fusion par confinement magnétique

Le concept de confinement magnétique repose sur la formation d'un plasma à partir de forts champs magnétiques. Les particules étant chargées, se mettent à tourner autour des lignes des champs. Leur mouvement perpendiculaire au champ magnétique est donc extrêmement limité, les pertes d'énergie sont très réduites, ce qui conduit à un confinement très efficace des particules et de leur énergie associée. L'astuce consiste donc à trouver une configuration dans laquelle les lignes de champ magnétique

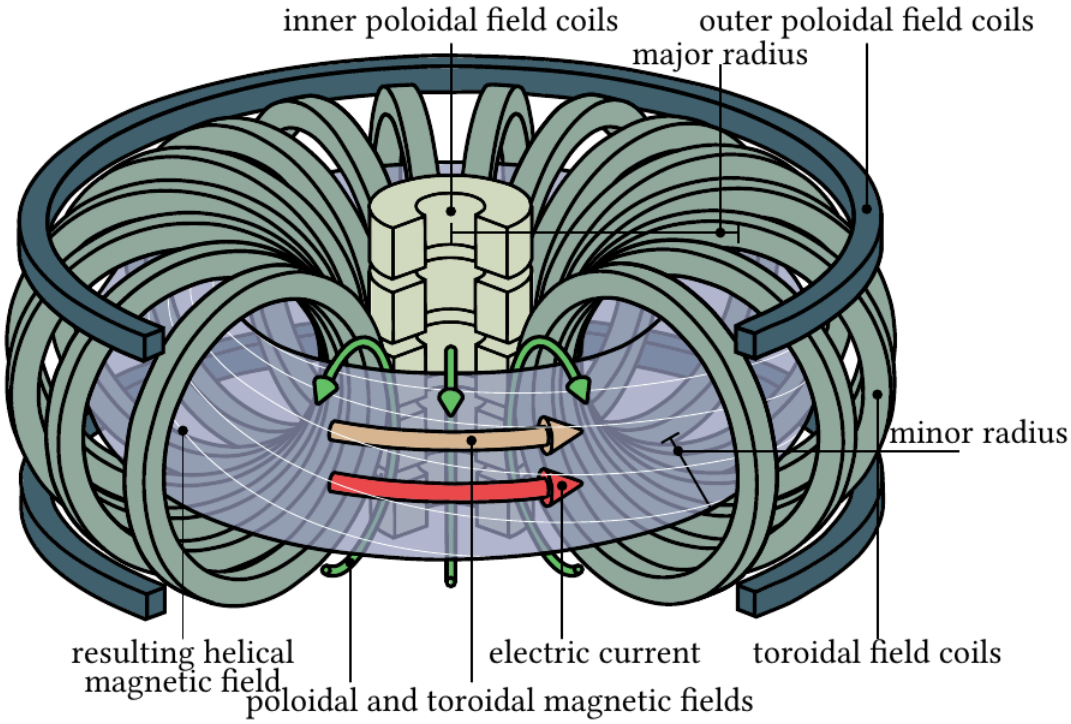


FIGURE 2 – Schéma montrant les éléments de bases d'un tokamak [64]

forment des surfaces emboîtées, appelées surfaces de flux, ce qui fait que les particules restent confinées à leur surface, et retiennent la chaleur à l'intérieur du dispositif. La forme des tokamaks a été conçue pour respecter cette configuration, voir figure (2).

Le concept de tokamak a été proposé et réalisé par les physiciens russes, Tamm, Sakharov et Artsimovich en 1952. Le mot tokamak lui-même est un acronyme russe qui signifie "chambre toroïdale avec champ magnétique". C'est un système de confinement toroïdal dans lequel le plasma est confiné par un champ magnétique. Le champ magnétique principal est le champ toroïdal. Cependant, ce champ ne permet pas à lui seul de confiner le plasma. Afin d'obtenir un équilibre dans lequel la pression du plasma est équilibrée par les forces magnétiques, il est nécessaire d'avoir également un champ magnétique poloïdal. Dans un tokamak, ce champ est principalement produit par le courant dans le plasma lui-même, ce courant circule dans la direction toroïdale. Le courant sert également à l'accumulation et au chauffage du plasma.

Compte tenu des défis que requiert la fusion, il devint rapidement évident que, pour produire de l'énergie de fusion, la communauté internationale devrait mettre en commun ses forces créatives, ses compétences technologiques et ses ressources financières. Le *Joint European Torus (JET)* de Culham, au Royaume-Uni, mis en service en 1983, est un exemple de cette collaboration internationale . C'est d'ailleurs le tokamak qui détient le record actuel de puissance produite par la fusion. En 1997, ce tokamak a généré 16 MW de puissance de fusion pour une puissance de chauffage totale de 24 MW, ce qui correspond à un rendement de 0.67. Les scientifiques sont en train de concevoir une machine de nouvelle génération qui générera plus d'énergie qu'elle n'en recevra : l'*International Thermonuclear Experimental Reactor*, connu sous le nom d'ITER, produira 500 MW d'énergie pour 50 MW consommés par ses systèmes de chauffage, ce qui correspond donc à un facteur d'amplification de puissance $Q \geq 10$, pour une période d'environs 400 à 600 secondes. Cette machine est en cours de construction à Cadarache en France, voire figure (3). Le début de la phase opérationnelle est programmé pour 2025-2030 et la construction du réacteur de démonstration DEMO suivra si le projet ITER obtient des résultats satisfaisants.

0.3 Instabilités du plasma dans les tokamaks

Comme tous les concepts de confinement magnétique développés, les tokamaks sont également sujets à diverses instabilités du plasma qui limitent leurs performances. Pour un plasma en équilibre, une perturbation auto-renforcée ou "mode" causée par une petite force arbitraire agissant sur lui est appelée une instabilité. Plusieurs formes d'instabilités sont observées dans les tokamaks. Les unes sont causées par de fortes densités de courant : on parle de *kink modes instability*. Et d'autres sont suscitées par des fortes gradients de pression, comme par exemple les modes de ballonnement (*ballooning modes*). Dans les cas où les gradients de pression sont importants à la périphérie du plasma, les modes de ballonnement peuvent se développer et entraîner des chutes répétitives et une perte de pression. De telles instabilités sont également appelées "modes localisées aux bords" (*Edge Localised modes*). D'autres perturbations peuvent provenir d'un transport turbulent du plasma [54].
Le contrôle de ces instabilités est un enjeux majeur pour la réalisation d'un réacteur de fusion. Les simulations numériques sont nécessaires pour comprendre la dynamique de ces instabilités.

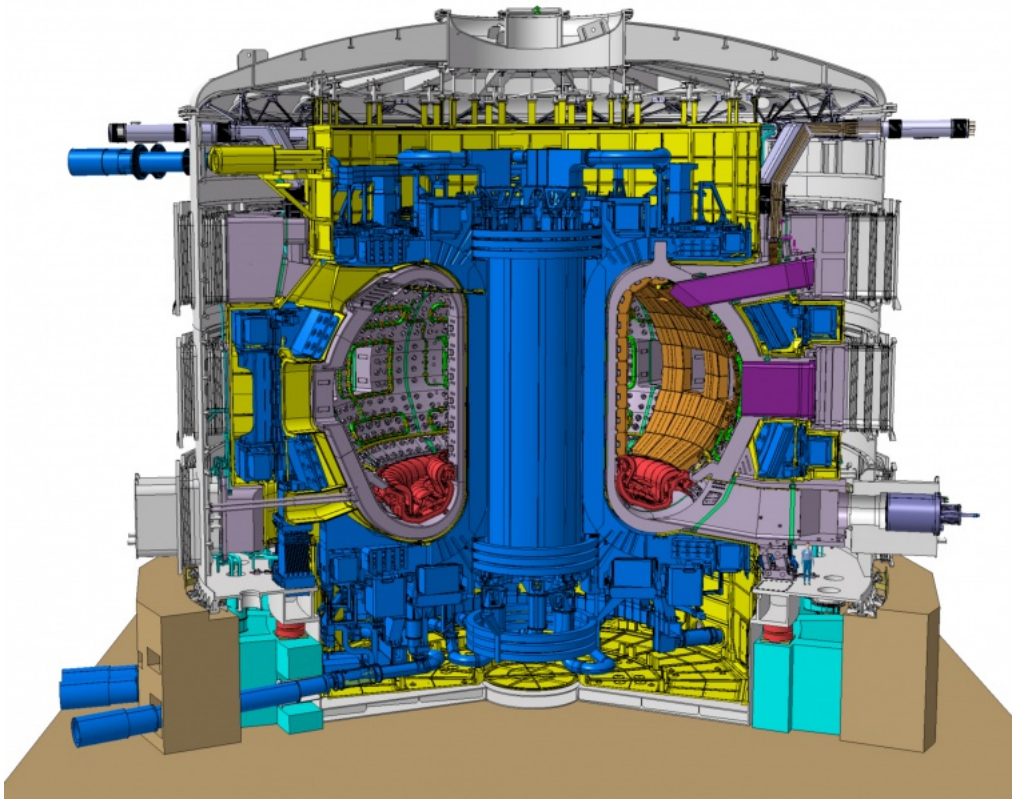


FIGURE 3 – Représentation du futur tokamak ITER [4]

0.4 Simulations numériques dans les tokamaks

La grande complexité des expériences de la fusion et les instabilités du plasma citées ci-dessus ont motivé le besoin de la simulation numérique. Cette dernière permet d'étudier virtuellement le dynamisme des instabilités du plasma et mieux comprendre le mécanisme théorique de la fusion. Les modèles pour décrire la fusion sont relativement complexes. Une grande simplification utile est de décrire le plasma comme un fluide électriquement conducteur. Sa dynamique est donc décrite par les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) : c'est un couplage des équations de Maxwell avec les trois premiers moments de l'équation de Boltzmann [35]. La MHD est capable de décrire une grande catégorie d'instabilités du plasma telles que celle qui sont listées ci-dessus.

La dynamique du plasma est quasiment la même sur chaque section poloïdale du tore et périodique suivant la direction toroïdale, voir figure (4).

Une des méthodes utilisées, dans le code JOREK [44, 64] par exemple,

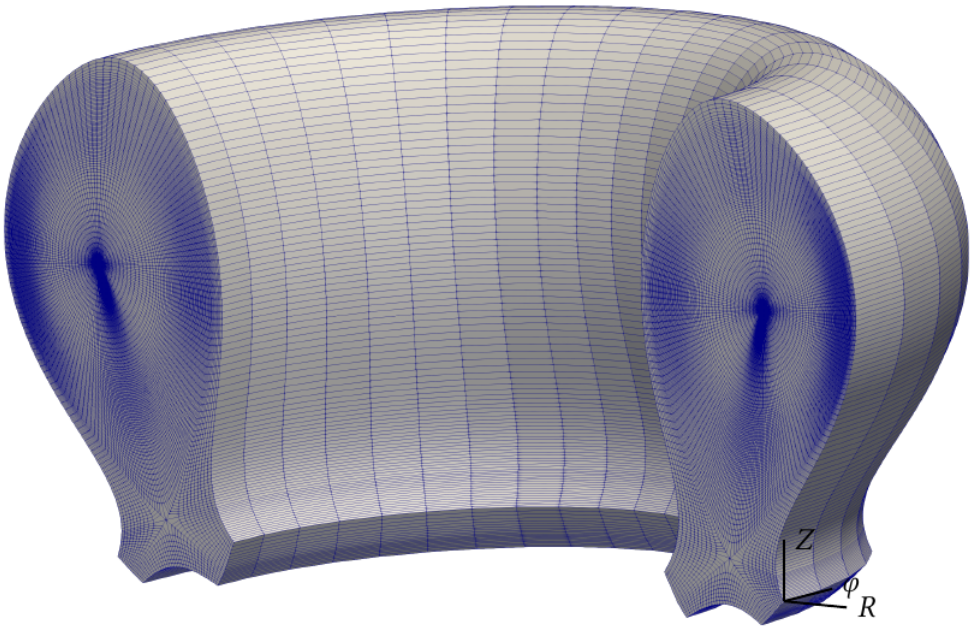


FIGURE 4 – Domaine de calcul 3D dans un tokamak [64]

consiste à décomposer le domaine de calcul du tore, Ω_{3D}, en une combinaison d'un domaine 2D et un domaine 1D périodique : $\Omega_{3D} = \Omega_{2D} \times [0, 2\pi]$, puis approcher les équations par une méthode 2D dans la direction poloïdale et une méthode 1D périodique dans la direction toroïdale. JOREK par exemple, utilise les fonctions périodiques de Fourier dans la direction toroïdale.

Comme on le verra dans le chapitre (**??**), les modèles MHD utilisés pour l'étude des plasmas de fusion, font intervenir des dérivées du 4e ordre. Pour les approcher de façon conforme par une méthode de type éléments finis par exemple, il est nécessaire que celle ci soit de régularité au moins C^1. Les éléments finis sur des triangles sont particulièrement bien adaptés à la discrétisation de la géométrie complexe de la section poloïdale des tokamaks. En effet, JOREK par exemple utilises des éléments finis C^1 d'Hermite Bezier dans des quadrangles, voir figure (5) et ils rencontrent des problèmes de singularités numériques au centre de la section poloïdale dues à l'intersection de plus de 4 éléments. D'autres codes éléments finis C^1 sur des triangles sont développés pour la simulation des plasmas. Le code $M3D - C^1$ développé par Jardin [45] par exemple, utilise des éléments finis d'Argyris, M.Martin [52] a développé sa thèse sur ces éléments finis pour approcher les équations de la MHD. Il s'est avéré que

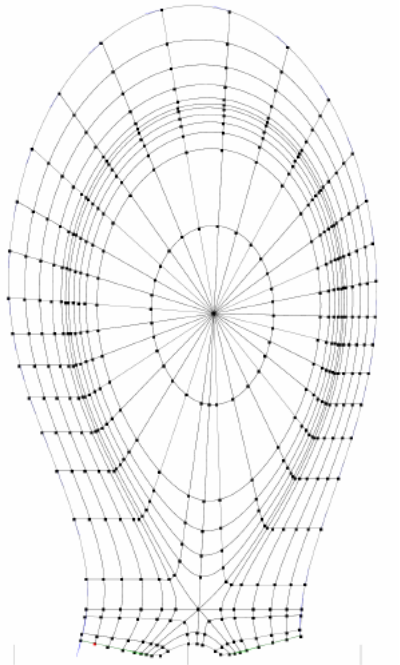


FIGURE 5 – Maillage quadrangle utilisé dans le code JOREK [54]

les éléments finis d'Argyris sont très couteux du fait qu'ils consistent à approcher les variables par des polynômes de degré 5 sur les triangles.

Dans cette thèse, nous allons développer une méthode d'éléments finis C^1 dont le principe consiste à approcher les fonctions par des polynômes de degré 3 sur des triangles : les éléments dits de Clough-Tocher (voir chapitre (2) pour les détails). A long terme, et si les résultats sont satisfaisants, on pourrait envisager de les coupler avec le code JOREK pour approcher autour du centre de la section poloïdale. Une première étape dans cette direction a été réalisé dans le rapport (**??**), où nous avons étudié le couplage des éléments finis CT avec des éléments fins P1 en utilisant la méthode de Mortar.

0.5 Organisation du manuscrit

L'objectif principal de ce travail est la simulation numérique des plasmas de fusion dans les tokamaks en utilisant une méthode de type éléments finis de continuité C^1. Ce travail est organisé en 5 chapitres dont le contenu

est structuré comme suit :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on décrit les modèles de la magnétohydrodynamique modélisant la dynamique d'un plasma magnétisé. Après un rappel de la théorie cinétique du plasma, on présentera un modèle bi-fluide qui consiste à modéliser le plasma comme un ensemble de deux fluides ("ions" et "électron"). Ensuite, on avancera des hypothèses sur les équations bi-fluides adimensionnées qui permettront de passer du modèle bi-fluide à un modèle de la MHD mono-fluide. Ensuite, on prendra en compte le contexte physique des tokamaks pour obtenir le modèle simplifié dit de MHD réduite qui sera étudié dans le chapitre (5).

Chapitre 2 : Le principe de la méthode des éléments finis sera présenté dans ce chapitre. On rappellera les théorèmes généraux de cette méthode avant de décrire la méthode des élément finis de Clough-Tocher réduit (CT) qui sera utilisée pour la simulation des problèmes de la MHD.

Chapitre 3 : On validera l'implémentation de la méthode CT dans ce chapitre, par l'étude de quelques problèmes elliptiques simples. Ensuite, on étudiera le problème d'équilibre du plasma dans les tokamaks. Dans une configuration axisymétrique, cet équilibre est décrit par une équation non linéaire appelée l'équation de Grad Shafranov. Des tests de comparaison des résultats avec ceux d'autres codes d'équilibre MHD seront réalisés dans ce chapitre [30].

Chapitre 4 : Avant d'étudier le problème de la MHD incompressible, on étudiera dans ce chapitre, un sous modèle de celui ci : les équations de Navier-Stokes incompressibles. On proposera une formulation fonction de courant de ces équations, permettant de satisfaire de façon naturelle la condition d'incompressibilité des variables. Une analyse théorique de convergence de la méthode CT pour ce problème sera présentée. Une autre validation de la méthode sera réalisée en étudiant quelques cas tests relatifs à ce problème et comparant les résultats avec ceux déjà existant dans la littérature.

Chapitre 5 : Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'approximation numérique des équations de la MHD réduite. On étendra la formulation fonction de courant du chapitre précédent au système de la MHD. Après une étude théorique et numérique de la convergence de la méthode CT pour ces équations, nous simulerons un problème d'instabilité du plasma. Ce problème est communément utilisé par la communauté des physiques de plasma, pour la validation des codes MHD. Les résultats seront

comparés avec ceux déjà publiés.

Enfin, on terminera ce travail par une conclusion des travaux réalisés et un ouverture vers les perspectives futures.

Chapitre 1

Les modèles magnétohydrodynamiques (MHD)

Sommaire

1.1 Modèle cinétique du plasma **14**
1.1.1 Équation de Boltzmann 14
1.1.2 Propriétés des opérateurs de collision 14
1.1.3 Équations de Maxwell 15
1.2 Les modèles bi-fluides **16**
1.2.1 Quantités macroscopiques 16
1.2.2 Équations bi-fluides du plasma 18
1.2.3 Équations bi-fluides dans un régime quasi-neutre 22
1.3 Les modèles MHD mono-fluide **25**
1.3.1 Normalisation du système bi-fluide 25
1.3.2 Modèle MHD réduite 30
1.3.3 MHD réduite et visco-resistive 36

Dans ce chapitre, on décrit les modèles de la magnétohydrodynamique modélisant la dynamique d'un plasma conducteur soumis à un champs magnétique. Le plasma est un ensemble de particules chargées, constitué principalement d'électrons et d'ions. Après un rappel de la théorie cinétique décrivant le mouvement de ces particules au cours du temps, on présentera un modèle bi-fluide qui consiste à considérer le plasma comme un ensemble de deux fluides ("ions" et "électron"). Ensuite, on avancera des hypothèses sur les équations bi-fluides adimensionnées qui permettront de passer du modèle bi-fluide à un modèle de la MHD mono-fluide. Ensuite,

on prendra en compte le contexte physique des tokamaks pour obtenir un modèle simplifié dit de MHD réduite qui sera étudié dans le chapitre (5).

1.1 Modèle cinétique du plasma

1.1.1 Équation de Boltzmann

Un plasma est un ensemble de particules composé principalement d'ions et d'électrons en mouvement. Ces particules sont soumis à des champs magnétique $\mathbf{B}$ et électrique $\mathbf{E}$. La théorie cinétique du plasma associe à chacune des espèces $s = e$ ou i, une *fonction de distribution* $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ telle que $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ est le nombre le nombre de particules de l'espèce s qui se trouvent à la position $\mathbf{x}$ et ayant la vitesse $\mathbf{v}$ à l'instant t. Cette distribution est solution de l'équation de Boltzmann suivante :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla f_s + \mathbf{a}_s.\nabla_{\mathbf{v}} f_s = C_{s,s} + C_{s,s'} \tag{1.1}$$

avec $\mathbf{v}$ la vitesse, $\nabla_{\mathbf{v}}$ le gradient dans l'espace des vitesses. $C_{s,s}$ représente les collisions des particules s entre elles et $C_{s,s'}$ modélise les collisions entre les particules s et s' [33, 35]. $\mathbf{a}_s$ représente l'ensemble des forces appliquées au plasma. Ces forces sont la force de Lorentz et la force électrostatique :

$$\mathbf{a}_s = \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{1.2}$$

q_s et m_s représentent respectivement la densité de charge et la masse de l'espèce s.

1.1.2 Propriétés des opérateurs de collision

La modélisation des opérateurs de collision est un sujet très complexe [35], néanmoins, tous ces opérateurs respectent des propriétés communes telles que : la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} m_s C_{s,s'} d\mathbf{v} = 0, \quad s = e, i;\ s' = e, i \tag{1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v} C_{s,s'} d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} m_{s'} \mathbf{v} C_{s',s} d\mathbf{v} = 0, \quad s = e, i;\ s' = e, i \tag{1.4}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m_s \mathbf{v}^2 C_{s,s'} d\mathbf{v} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m_{s'} \mathbf{v}^2 C_{s',s} d\mathbf{v} = 0, \quad s = e, i;\ s' = e, i \tag{1.5}$$

Il existe quelques situations où les collisions peuvent être négligées. Dans ce cas l'équation cinétique de Boltzmann se simplifie pour donner l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla f_s + \mathbf{a}_s.\nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0 \tag{1.6}$$

1.1.3 Équations de Maxwell

Dans la modélisation des plasmas, l' équation de Boltzmann (1.1) est couplée avec les équations de Maxwell régissant le comportement des champs magnétiques et électriques.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} & = 0 & (1.7.a) \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} & = \nabla \times \mathbf{B} & (1.7.b) \\ \epsilon_0 \nabla.\mathbf{E} & = \bar{\rho} & (1.7.c) \\ \nabla.\mathbf{B} & = 0 & (1.7.d) \end{cases}$$

où $\mathbf{B}$ est le champs magnétique, $\mathbf{E}$ le champs électrique, $\mathbf{J}$ la densité de courant, $\bar{\rho}$ est la charge totale du plasma et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Elle vérifie la relation

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{1.8}$$

μ_0 et ϵ_0 représentent respectivement la perméabilité et la permittivité du plasma dans le vide.

La condition $\nabla.\mathbf{B} = 0$ est vérifiée pour tout $t > 0$, à conditions qu'elle le soit à $t = 0$. En effet, d'après (1.7.a),

$$\frac{\partial \nabla.\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla.(\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

On verra plus tard que cette condition constitue une des difficultés numériques rencontrés dans la résolution des équations de la MHD.

La vitesse de déplacement du plasma est très petite comparée à celle de la lumière $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$. Il est donc usuel de négliger le terme de

variation du courant $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. L'équation de Maxwell (1.7.b) se réduit à la loi d'Ampère :

$$\mu_0 \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

On a donc le système d'équation de Maxwell-Ampère

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} & = 0 \quad (1.9.a) \\ \mu_0 \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{B} & = 0 \quad (1.9.b) \\ \epsilon_0 \nabla . \mathbf{E} & = \bar{\rho} \quad (1.9.c) \\ \nabla . \mathbf{B} & = 0 \quad (1.9.d) \end{cases}$$

1.2 Les modèles bi-fluides

En général, il est très difficile de résoudre directement l'équation (1.1) à cause de la complexité des opérateurs de collision mais aussi de la dimension spatiale de la fonction de distribution f_s (3 dimensions de l'espace des positions et 3 dimensions de l'espace des vitesses). En adoptant une description fluide du plasma, on peut réduire cette dimension à 3, une simplification importante surtout d'un point de vue numérique.

1.2.1 Quantités macroscopiques

Dans une théorie fluide, un plasma est caractérisé par des paramètres locaux tels que : la densité des particules, la vitesse de flux, l'énergie cinétique,... Dans ce paragraphe, nous décrivons ces variables macroscopiques en fonction des moments de vitesse de la fonction de distribution f_s.

D'abord, le moment d'ordre zéro donne *la densité des particules* de l'espèce s

$$n_s(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \tag{1.10}$$

On définit la *densité de masse* par

$$\rho_s = n_s m_s \tag{1.11}$$

La densité de courant $\mathbf{J}$, ainsi que la charge totale $\bar{\rho}$ du plasma sont exprimés par les relations :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \sum n_s q_s = n_e q_e + n_i q_i \\ \mathbf{J} &= \sum n_s q_s \mathbf{u}_s = n_e q_e \mathbf{u}_e + n_i q_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \tag{1.12}$$

où la *vitesse* $\mathbf{u}_s$ est définie à partir du moment d'ordre un

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x},t) = \frac{1}{n_s}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v} \tag{1.13}$$

Le moment d'ordre deux permet de définir la densité d'énergie totale de chaque espèce s :

$$\mathcal{E}_s = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m_s \mathbf{v}^2 f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v} \tag{1.14}$$

La *densité de flux d'énergie* est définie à partir du moment d'ordre trois

$$\mathbf{Q}_s(\mathbf{x},t) = \int \frac{1}{2} m_s \mathbf{v}^2 \mathbf{v} f_s(\mathbf{x},\mathbf{v},t)dv \tag{1.15}$$

Les interactions entre les espèces s et s' sont décrites par le moment d'ordre un de l'opérateur de collision $C_{s,s'}$. C'est ce qu'on appelle les *forces de friction*. Elles sont définies par

$$\mathbf{F}_{ss'} = \int m_s \mathbf{v} C_{s,s'} d\mathbf{v} \tag{1.16}$$

L'ensemble de ces forces permet de définir les forces de friction totales que reçoivent les particules s sous l'action des particules s' et vice versa :

$$\mathbf{F}_s = \sum_{s'} F_{ss'} \tag{1.17}$$

Ces forces sont telles que :

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_{s'} = \mathbf{F} \tag{1.18}$$

Dans [**?**], on retrouve une définition explicite de la force de friction entre les ions et électrons :

$$\mathbf{F} = \frac{\rho_e \rho_i}{\tau_{i,e}\rho_e + \tau_{e,i}\rho_i}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \tag{1.19}$$

où $\tau_{s,s'}$ est le temps de collision entre les espèces s et s'.

D'une manière analogue, on définit le moment de l'énergie de collision par

$$W_{ss'} = \int \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v} - \mathbf{u}_s|^2 C_{s,s'}(f)d\mathbf{v} \tag{1.20}$$

C'est le transfert d'énergie subi par l'espèce s due à sa collision avec l'espèce s'. L'énergie totale transféré à l'espèce s est donc

$$W_s = \sum_{s'} W_{ss'} \tag{1.21}$$

1.2.2 Équations bi-fluides du plasma

Les équations fluides du plasma sont obtenues en prenant les moments successifs de la vitesse de l'équation (1.1).

D'abord, utilisant le fait que la divergence du vecteur $\mathbf{a}_s$ dans l'espace des vitesses est nulle,

$$\nabla_{\mathbf{v}}.\mathbf{a}_s = 0$$

on a l'égalité

$$\frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).\nabla_{\mathbf{v}} f_s = \nabla_{\mathbf{v}}.\left(\frac{q_s}{m_s}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})f_s\right)$$

Ainsi, une forme conservative de (1.1) est donnée par :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla.(f_s\mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}}.(f_s\mathbf{a}_s) = C_{s,s} + C_{s,s'} \tag{1.22}$$

I **Équation de conservation de la masse**

L'équation de conservation de la masse associée à chacune des espèces $s = e, i$ est obtenue en prenant le moment d'ordre zéro de l'équation (1.22). Ce qui revient à intégrer cette équation dans l'espace des vitesses puis multiplier par la masse m_s.

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} m_s f_s d\mathbf{v} + \nabla.\left(\int_{\mathbb{R}^3} m_s f_s \mathbf{v} d\mathbf{v}\right) + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{v}}.(m_s f_s \mathbf{a}_s) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} m_s (C_{s,s} + C_{s,s'}) d\mathbf{v} \tag{1.23}$$

Le troisième terme de l'équation (1.23) est nul car la fonction de distribution est nulle à l'infini.
Le second membre de (1.23) s'annule, selon la relation (1.3).

Ainsi, en introduisant les définitions (1.11) et (1.13), on obtient *l'équation de conservation de la masse*

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla.(\rho_s \mathbf{u}_s) = 0 \tag{1.24}$$

II **Équation de la quantité de mouvement**

L'équation de conservation de la quantité de mouvement de l'espèce s est obtenue en prenant le moment d'ordre un de l'équation (1.22). On le multiplie par $m_s\mathbf{v}$ puis on l'intègre dans l'espace des vitesses :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} m_s f_s \mathbf{v} d\mathbf{v} + \nabla.\left(\int_{\mathbb{R}^3} m_s f_s \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v}\right) + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{v}}.(m_s f_s \mathbf{a}_s) \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v}(C_{s,s} + C_{s,s'}) d\mathbf{v} \tag{1.25}$$

Suivant la relation (1.16), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} m_s \mathbf{v}(C_{s,s} + C_{s,s'}) d\mathbf{v} = \mathbf{F}_{s,s'}$$

Ensuite, le terme de divergence dans l'espace des vitesses est tel que :

$$\nabla_{\mathbf{v}}.(m_s f_s \mathbf{a}_s) \otimes \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{v}}.(m_s f_s \mathbf{v} \otimes \mathbf{a}_s) - m_s f_s \mathbf{a}_s$$

En utilisant le fait que la fonction de distribution s'annule à l'infini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\mathbf{v}}.(m_s f_s \mathbf{a}_s) \mathbf{v} d\mathbf{v} = -\int_{\mathbb{R}^3} m_s f_s \mathbf{a}_s d\mathbf{v} = -q_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) \tag{1.26}$$

Pour le terme de divergence spatiale, nous avons cette égalité

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) + \mathbf{u}_s \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) + (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \otimes \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s \tag{1.27}$$

On obtient donc

$$\nabla.\left(\int_{\mathbb{R}^3} m_s f_s \mathbf{v}^2 d\mathbf{v}\right) = \nabla.(\mathbf{p}_s + \rho_s \mathbf{u}_s^2)$$

avec $\mathbf{p}_s$ le *tenseur de pression* défini par

$$\mathbf{p}_s(\mathbf{x}, t) = \int m_s (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \tag{1.28}$$

La *pression scalaire* est définie par

$$p_s \equiv \frac{1}{3} Tr(\mathbf{p}_s) \tag{1.29}$$

A partir de cette pression scalaire, on définit la *température cinétique* par

$$T_s \equiv \frac{p_s}{n_s} \tag{1.30}$$

On définit *la vitesse thermique* de chaque espèce par

$$v_{t,s} = \sqrt{\frac{2T_s}{m_s}} = \sqrt{\frac{2p_s}{n_s m_s}} \tag{1.31}$$

Introduisons le tenseur de viscosité généralisé de l'espèce s, π_s tel que

$$\mathbf{p}_s = p_s\mathbf{I} + \pi_s \tag{1.32}$$

avec $\mathbf{I}$ le tenseur identité.

Finalement, les résultats précédents nous permettent d'obtenir l'équation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho_s \mathbf{u}_s}{\partial t} + \nabla.(\rho_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + p_s\mathbf{I} + \pi_s) - q_s n_s(\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}_{s,s'} \tag{1.33}$$

III **Équations de conservation de l'énergie**

Le moment d'ordre 2 de l'équation cinétique (1.22) permet de d'obtenir l'équation de conservation de l'énergie. En multipliant (1.22) par $\frac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2$ puis intégrant sur l'espace des vitesses, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \tfrac{1}{2}m_s f_s \mathbf{v}^2 d\mathbf{v} \quad &+\nabla.\left(\int_{\mathbb{R}^3} \tfrac{1}{2}m_s f_s \mathbf{v}\mathbf{v}^2 d\mathbf{v}\right) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \tfrac{1}{2}m_s \mathbf{v}^2 \nabla_{\mathbf{v}}.(f_s\mathbf{a}_s)d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \tfrac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2(C_{s,s} + C_{s,s'})d\mathbf{v}\end{aligned} \tag{1.34}$$

Comme

$$\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s).\mathbf{v} + \mathbf{u}_s.\mathbf{v}$$

le second membre de (1.34) s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2(C_{s,s} + C_{s,s'})d\mathbf{v} = W_s + \mathbf{F}_s.\mathbf{u}_s \tag{1.35}$$

avec W_s définie dans (1.21).

À propos du terme de divergence dans l'espace des vitesses, on constate que :

$$\frac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2\nabla_{\mathbf{v}}.(f_s\mathbf{a}_s) = \nabla_{\mathbf{v}}.(\frac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2 f_s\mathbf{a}_s) - m_s\mathbf{v}.\mathbf{a}_s f_s$$

Donc en utilisant le fait que la fonction de distribution est nulle à l'infini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}m_s\mathbf{v}^2\nabla_{\mathbf{v}}.(f_s\mathbf{a}_s)d\mathbf{v} = -q_s n_s\mathbf{E}.\mathbf{u}_s \tag{1.36}$$

Et d'après (1.15), on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m_s f_s \mathbf{v}\mathbf{v}^2 = \mathbf{Q}_s \tag{1.37}$$

Ainsi, on déduit l'équation de conservation de l'énergie à partir des expressions (1.35), (1.36), (1.37)

$$\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial t} + \nabla.\mathbf{Q}_s - q_s n_s \mathbf{E}.\mathbf{u}_s = W_s + \mathbf{F}_s.\mathbf{u}_s \tag{1.38}$$

L'équation de conservation de l'énergie peut être exprimé en fonction de la pression scalaire par la relation :

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} p_s + \frac{1}{2} \rho_s \mathbf{u}_s^2 \tag{1.39}$$

En effet à partir de l'égalité (1.27), on peut vérifier que la densité de flux d'énergie $\mathbf{Q}_s$ est telle que :

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{q}_s + \mathbf{p}_s + \mathcal{E}_s$$

avec

$$\mathbf{q}_s = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m_s |\mathbf{v} - \mathbf{u}_s|^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dv \tag{1.40}$$

L'équation d'évolution de la pression se déduit de (1.38) en utilisant les relations (1.39), (1.24) et (1.33) :

$$\frac{3}{2} \frac{d_s p_s}{dt} + \frac{3}{2} p_s \nabla.\mathbf{u}_s + \nabla.\mathbf{q}_s + \mathbf{p}_s : \nabla \mathbf{u}_s = W_s \tag{1.41}$$

avec

$$\mathbf{p}_s : \nabla \mathbf{u}_s = \nabla.(\mathbf{p}_s.\mathbf{u}_s) - \mathbf{u}_s.(\nabla.\mathbf{p}_s)$$

et $\frac{d_s}{dt}$, la dérivée convective définie par

$$\frac{d_s}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_s.\nabla \tag{1.42}$$

IV Le système bi-fluides

Le système bi-fluides de la MHD est composé par l'ensemble des équations de Maxwell (1.9) couplées avec les équations hydrodynamiques de chaque particule (ions et électrons). Ainsi, les équations bi-fluides du plasma sont données par

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla.(\rho_e \mathbf{u}_e) &= 0 \qquad (1.43.a) \\
\dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla.(\rho_i \mathbf{u}_i) &= 0 \qquad (1.43.b) \\
\dfrac{\partial \rho_e \mathbf{u}_e}{\partial t} + \nabla.(\rho_e \mathbf{u}_e \otimes \mathbf{u}_e + p_e \mathbf{I} + \pi_e) - q_e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) &= \mathbf{F} \qquad (1.43.c) \\
\dfrac{\partial \rho_i \mathbf{u}_i}{\partial t} + \nabla.(\rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + p_i \mathbf{I} + \pi_i) - q_i n_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) &= -\mathbf{F} \qquad (1.43.d) \\
\frac{3}{2}\dfrac{dp_e}{dt} + \frac{3}{2} p_e \nabla.\mathbf{u}_e + \nabla.\mathbf{q}_e + \mathbf{p}_e : \nabla \mathbf{u}_e &= W_e \qquad (1.43.e) \\
\frac{3}{2}\dfrac{dp_i}{dt} + \frac{3}{2} p_i \nabla.\mathbf{u}_i + \nabla.\mathbf{q}_i + \mathbf{p}_i : \nabla \mathbf{u}_i &= W_i \qquad (1.43.f) \\
\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \qquad (1.43.g) \\
\mu_0 \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \qquad (1.43.h) \\
\epsilon_0 \nabla.\mathbf{E} &= \bar{\rho} \qquad (1.43.i)
\end{cases}
$$

où d'après (1.18), nous avons posé $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_i$

1.2.3 Équations bi-fluides dans un régime quasi-neutre

Le régime quasi-neutre consiste à supposer que le volume est suffisamment grand par rapport à la longueur de Debye. Cette longueur caractéristique du plasma est définie par :

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 T}{n e^2} \right) \tag{1.44}$$

avec T la température, n la densité totale des particules et $e = 1.6022 \times 10^{-19} C$ la charge élémentaire .

La perméabilité ϵ_0 est supposé très petite de sorte que :

$$\epsilon_0 \nabla.\mathbf{E} = 0$$

Donc la charge totale est globalement nulle :

$$\bar{\rho} = n_e q_e + n_i q_i = 0 \tag{1.45}$$

Les charges des électrons et ions sont données par :

$$q_e = -e \ \text{ et } \ q_i = Ze$$

avec Z l'état de charge des ions. On va considérer ici $Z = 1$ qui correspond à celui des isotopes d'hydrogène tels que le Deteurium et le Tritium. Ce sont les isotopes utilisés dans les tokamaks.
On a donc

$$n_e = n_i = n$$

L'expression de la densité du courant (1.12) s'écrit :

$$\mathbf{J} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

Introduisons la vitesse de mélange $\mathbf{u}$, définie par :

$$\mathbf{u} = \frac{\rho_e \mathbf{u}_e + \rho_i \mathbf{u}_i}{\rho} = \frac{m_e \mathbf{u}_e + m_i \mathbf{u}_i}{m_e + m_i} \tag{1.46}$$

avec $\rho = \rho_e + \rho_i = n_e m_e + n_i m_i$.

Ainsi, on peut réécrire les expressions des vitesses des particules en fonction de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{J}$:

$$\begin{cases} \mathbf{u_e} & = \mathbf{u} - \frac{c_i}{ne}\mathbf{J} \\ \mathbf{u_i} & = \mathbf{u} + \frac{c_e}{ne}\mathbf{J} \end{cases} \tag{1.47}$$

où le rapport de masse c_s, de l'espèce $s = e, i$ est défini par :

$$c_s = \frac{m_s}{(m_e + m_i)} = \frac{m_s}{m}$$

où nous avons posé

$$m = m_e + m_i$$

L'expression (1.19) de la force de friction $\mathbf{F}$ devient :

$$\mathbf{F} = \eta n e \mathbf{J} \tag{1.48}$$

où η est la résistivité du plasma qui est définie par :

$$\eta = \frac{m_e m_i}{(\tau_{ie} m_e + \tau_{ei} m_i)e} \tag{1.49}$$

avec $\frac{1}{\tau_{ss'}}$ la fréquence de collision de l'espèce s sur s'.

En appliquant la définition de la vitesse de mélange (1.46), on peut remplacer les deux équations de quantité de mouvement des ions et électrons par une équation de quantité de mouvement total et une équation de densité de courant $\mathbf{J}$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement total est obtenue à partir de (1.43.c) et (1.43.d) :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{m_e m_i}{ne^2 m}\mathbf{J} \otimes \mathbf{J} + p\mathbf{I} + \pi\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{1.50}$$

avec

$$p = p_e + p_i \qquad \pi = \pi_e + \pi_i$$

Dans un plasma magnétisé, le tenseur de viscosité est un terme très complexe. Il prend en compte différentes catégories de viscosités suivant les directions parallèles ou perpendiculaires au champs magnétique [35]. Dans le cadre de cette thèse, on utilisera l'expression très simplifiée

$$\pi = -\mu \nabla \mathbf{u} \tag{1.51}$$

avec μ la viscosité dynamique du fluide, identique à celle utilisée dans un fluide neutre.
L'équation (1.50) devient :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{m_e m_i}{ne^2 m}\mathbf{J} \otimes \mathbf{J} + p\mathbf{I} - \mu \nabla \mathbf{u}\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{1.52}$$

Pour obtenir l'équation de densité de courant, on multiplie l'équation (1.43.c) par $\frac{q_e}{m_e}$ et (1.43.d) par $\frac{q_i}{m_i}$ puis on somme les deux résultats :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \nabla.\left(ne\mathbf{u}_e \otimes \mathbf{u}_e + \frac{e}{m_e}\mathbf{p}_e\right) \quad &+\nabla.\left(ne\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + \tfrac{e}{m_i}\mathbf{p}_i\right) \\ &+\tfrac{ne^2}{m_e}[\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] + \tfrac{ne^2}{m_i}[\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}] = \tfrac{em}{m_e m_i}\mathbf{F}\end{aligned} \tag{1.53}$$

En utilisant les relations (1.47) et (1.48), on obtient l'équation de la loi d'Ohm généralisée suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \quad &\eta \mathbf{J} + \tfrac{1}{ne}\tfrac{m_i - m_e}{m}\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \tfrac{1}{ne}\nabla.\left(\tfrac{m_e}{m}\mathbf{p}_i - \tfrac{m_i}{m}\mathbf{p}_e\right) \\ &-\tfrac{1}{n^2 e^3}\tfrac{m_e m_i}{m}\nabla.(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}) - \tfrac{1}{ne^2}\tfrac{m_e m_i}{m}\left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{J} + (\mathbf{J}.\nabla)\mathbf{u}\right)\end{aligned} \tag{1.54}$$

Les deux équations (1.43.a) et (1.43.b) sont assemblées pour donner une unique équation globale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1.55}$$

L'équation de conservation de l'énergie se déduit à partir de (1.43.e) et (1.43.f) :

$$\frac{3}{2}\frac{dp}{dt} + \frac{3}{2}p\nabla.\mathbf{u} + \nabla.\mathbf{q} + \mathbf{p} : \nabla\mathbf{u} + \frac{3}{2}\frac{1}{ne}\left[\nabla.(p_m\mathbf{J}) + \mathbf{p}_m : \nabla\mathbf{J}\right] = W \qquad (1.56)$$

où nous avons posé

$$p = p_e + p_i, \quad p_m = c_e p_i - c_i p_e, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i \quad \text{et} \quad W = W_i + W_e$$

Ainsi, on retrouve les équations suivantes pour le modèle complète de la MHD bi-fluides :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\mathbf{u}) = 0 & (1.57.a) \\
\dfrac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \dfrac{m_e m_i}{ne^2 m}\mathbf{J}\otimes\mathbf{J} + p\mathbf{I} - \mu\nabla\mathbf{u}\right) = \mathbf{J}\times\mathbf{B} & (1.57.b) \\
\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = \eta\mathbf{J} + \frac{1}{ne}\frac{m_i - m_e}{m}\mathbf{J}\times\mathbf{B} + \frac{1}{ne}\nabla.\left(\frac{m_e}{m}\mathbf{p}_i - \frac{m_i}{m}\mathbf{p}_e\right) & \\
-\frac{1}{n^2e^3}\frac{m_e m_i}{m}\nabla.(\mathbf{J}\otimes\mathbf{J}) - \frac{1}{ne^2}\frac{m_e m_i}{m}\left(\dfrac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{J} + (\mathbf{J}.\nabla)\mathbf{u}\right) & (1.57.c) \\
\frac{3}{2}\dfrac{dp}{dt} + \frac{3}{2}p\nabla.\mathbf{u} + \nabla.\mathbf{q} + \mathbf{p} : \nabla\mathbf{u} + \frac{3}{2}\frac{1}{ne}\left[\nabla.(p_m\mathbf{J}) + \mathbf{p}_m : \nabla\mathbf{J}\right] = W & (1.57.d) \\
\frac{3}{2}\dfrac{dp_e}{dt} + \frac{3}{2}p_e\nabla.\mathbf{u}_e + \nabla.\mathbf{q}_e + \mathbf{p}_e : \nabla\mathbf{u}_e = W_e & (1.57.e) \\
\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{E} = 0 & (1.57.e) \\
\mu_0\mathbf{J} - \nabla\times\mathbf{B} = 0 & (1.57.f)
\end{cases}$$

avec $n = n_e = n_i$.

1.3 Les modèles MHD mono-fluide

1.3.1 Normalisation du système bi-fluide

Les équations de la MHD décrites dans la section précédente, contiennent des termes qui couvrent un spectre très large de phénomènes physiques et qui sont très compliqués à étudier, que ça soit mathématiquement ou numériquement. Dans certains cas, il est possible de négliger quelques uns de ces termes pour obtenir un système plus simple. Dans cette section, nous allons normaliser les équations (1.57) en fonction de quelques paramètres caractéristiques du plasma, dans le but de pouvoir décider quels sont les termes à conserver ou à négliger suivant les types de problèmes

que nous allons étudier par la suite.
On note par $\rho_0 = n_0 m$ et B_0 des valeurs respectives de référence de la densité des particules et du champs magnétique. On introduit une échelle de longueur L_0 et une échelle de temps $t_0 = \frac{L_0}{u_0}$, avec u_0 une vitesse de référence.
D'après l'équation (1.9.b), la densité de courant de référence sera définie par :

$$J_0 = \frac{B_0}{\mu_0 L_0}$$

La vitesse de référence u_0, considérée ici, correspond à la vitesse d'Alfvén :

$$u_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_0 m}}$$

On introduit une température de référence T_0. À partir de cette température, on définit la vitesse thermique de référence par

$$\bar{v}_t = \sqrt{\frac{2T_0}{m}}$$

Puis suivant l'expression (1.31), on définit la pression de référence par :

$$p_0 = \rho_0 \bar{v}_t^2$$

Considérons les variables non dimensionnelles suivantes :

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0},\ \tilde{x} = \frac{x}{L_0},\ \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\mathbf{u}_0}\mathbf{u},\ \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0},\ \tilde{p} = \frac{p}{p_0},\ \tilde{p_{i,e}} = \frac{p_{i,e}}{p_0},\ \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{B_0}\mathbf{B}$$

Les opérateurs différentiels sont normalisés par : $\tilde{\nabla} = L_0 \nabla,\ \ \partial_{\tilde{t}} = t_0 \partial_t$.

On notera par $\bar{\mu}$ une valeur de référence de la viscosité. Et on définit le nombre de Reynold du fluide par

$$R_e = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\bar{\mu}} \tag{1.58}$$

Introduisons le paramètre *beta du plasma* défini par :

$$\beta = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2} \tag{1.59}$$

C'est un paramètre primordial dans l'analyse des plasma de fusion. Il définit le rapport entre les pressions hydrodynamique et magnétique. On

peut vérifier que la vitesse thermique et la vitesse du plasma sont liées par :

$$\bar{v}_t^2 = \beta u_0^2 \tag{1.60}$$

Ensuite, on définit la fréquence de cyclotron du plasma, appelée aussi gyro-fréquence, par

$$\Omega_p = \frac{eB}{m} \tag{1.61}$$

Le rayon de Larmor est donné par

$$\rho_L = \frac{v_t}{\Omega_p} \tag{1.62}$$

On définit sa forme normalisée par

$$\rho^* = \frac{\rho_L}{L_0}$$

En introduisant les paramètres (1.59) et (1.62) dans l'équation (1.57.b), on obtient l'équation non dimensionnelle de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial_{\tilde{t}}}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla}.(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{m_e m_i}{m^2\beta^2}(\rho^*)^2\tilde{\nabla}.(\tilde{\mathbf{J}} \otimes \tilde{\mathbf{J}}) + \beta\tilde{\nabla}\tilde{p} - \frac{1}{R_e}\tilde{\nabla}.(\tilde{\mu}\tilde{\nabla}\tilde{u}) = \tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} \tag{1.63}$$

Effectuons l'adimensionnement de l'équation de l'énergie (1.57.d).

Les pressions de référence associées à chacune des espèces $\bar{p}_e$ et $\bar{p}_i$, seront prises égale à la pression totale de référence

$$\bar{p}_i = \bar{p}_e = p_0 = n_0 m \bar{v}_t^2$$

Suivant l'expression (1.40), on normalise la densité de flux d'énergie par

$$q_0 = nmu_0^3$$

Et la quantité d'énergie de collision (1.5) sera normalisée par

$$W_0 = \frac{nmu_0^3}{L_0}$$

Ainsi, en utilisant les paramètres (1.62) et (1.59), l'équation de conservation d'énergie (1.57.d) adimensionnée s'écrit :

$$\frac{3}{2}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} + \frac{3}{2}\tilde{p}\tilde{\nabla}.\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla}.\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{p}} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{3}{2}\frac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\left[\tilde{\nabla}.(\tilde{p}_m\tilde{\mathbf{J}}) + \tilde{\mathbf{p}}_m : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{J}}\right] = \tilde{W} \tag{1.64}$$

En utilisant le fait que $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{p}I + \tilde{\pi}$, on obtient l'expression suivante de l'équation de l'énergie :

$$\frac{3}{2}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} + \frac{5}{2}\tilde{p}\tilde{\nabla}.\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla}.\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\pi} : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{3}{2}\frac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\left[\tilde{\nabla}.(\tilde{p}_m\tilde{\mathbf{J}}) + \tilde{\mathbf{p}}_m : \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{J}}\right] = \tilde{W} \quad (1.65)$$

Il nous reste maintenant à écrire l'équation sans dimension de la loi d'Ohm (1.54).

A partir de la relation (1.9.a), on définit le champs électrique de référence par :

$$E_0 = B_0 u_0$$

On notera par $\bar{\eta}$ une valeur de référence de de la résistivité. D'une manière analogue à (1.58), on définit le nombre de Reynold magnétique par

$$R_m = \frac{\mu_0 u_0 L_0}{\bar{\eta}} \quad (1.66)$$

En introduisant les paramètres (1.62) et (1.59) dans l'équation (1.57).c), on obtient la forme sans dimension de la loi d'Ohm :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \; & \tfrac{\tilde{\eta}}{R_m}\,\tilde{\mathbf{J}} + \tfrac{m_i - m_e}{m\sqrt{\beta}}\,\rho^*\,\tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} + \tfrac{m_e}{m}\sqrt{\beta}\,\rho^*\,\tilde{\nabla}\tilde{p}_i - \tfrac{m_e}{m\sqrt{\beta}}\,\rho^*\,\tilde{\nabla}.(\tfrac{\tilde{\mu}}{R_e}\tilde{\nabla}\tilde{u}_i) \\ & -\tfrac{m_i}{m\sqrt{\beta}}\,\rho^*\,\tilde{\nabla}\tilde{p}_e + \tfrac{m_i}{m\sqrt{\beta}}\,\rho^*\,\tilde{\nabla}.(\tfrac{\tilde{\mu}}{R_e}\tilde{\nabla}\tilde{u}_e) - \tfrac{m_e m_i}{m^2\beta}\,(\rho^*)^2\,\tilde{\nabla}.(\tilde{\mathbf{J}} \otimes \tilde{\mathbf{J}}) \\ & +\tfrac{m_e m_i}{m^2\beta\sqrt{\beta}}\,(\rho^*)^3\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{J}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{u}}.\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{J}} + (\tilde{\mathbf{J}}.\tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{u}}\right)\end{aligned} \quad (1.67)$$

Dans la table (1.1), sont référencées les différentes valeurs des paramètres utilisés dans les équations précédentes. Ces valeurs sont tirées du livre de Freidberg [36]. On négligera tous les termes d'ordre $(\rho^*)^2 \simeq 10^{-6}$. On peut voir dans les équations (1.63) et (1.67), que ces termes sont multipliés par $\frac{m_e}{m} \simeq 5.446 \times 10^{-4}$, ce qui les rend encore plus petits.
La masse totale des particules étant très proche de celle des ions, on considérera l'approximation suivante :

$$\frac{m_i}{m} \simeq 1$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.63) devient :

$$\frac{\partial}{\partial_{\tilde{t}}}(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\nabla}.(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \beta\tilde{\nabla}.(\tilde{p}\mathbf{I}) - \frac{1}{R_e}\tilde{\nabla}.(\tilde{\mu}\tilde{\nabla}\tilde{u}) = \tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} \quad (1.68)$$

L'équation de la loi d'Ohm (1.67) s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \; & \tfrac{\tilde{\eta}}{R_m}\tilde{\mathbf{J}} + \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} \\ & -\tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\tilde{\nabla}\tilde{p}_e + \tfrac{1}{R_e}\tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\tilde{\nabla}.(\tilde{\mu}\tilde{\nabla}\tilde{u}_e)\end{aligned} \tag{1.69}$$

Dans le chapitre (5), nous allons considérer des problèmes avec un nombre de Reynold très grand. On négligera donc le dernier terme de l'équation (1.69). On obtient

$$\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \; \tfrac{\tilde{\eta}}{R_m}\tilde{\mathbf{J}} + \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\tilde{\mathbf{J}} \times \tilde{\mathbf{B}} - \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\tilde{\nabla}\tilde{p}_e \tag{1.70}$$

Ainsi, dans tous les chapitres qui suivent, nous ne considérerons que les équations non dimensionnelles. On omettra alors les tildes sur les variables adimensionnées afin de simplifier les notations.
Les équations mono-fluide de la MHD sont données par

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla.(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \beta\nabla p - \nabla.(\mu\nabla u) &= \mathbf{J}\times\mathbf{B} \\ \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = \eta\mathbf{J} + \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\nabla p_e & \\ \tfrac{3}{2}\frac{dp}{dt} + \tfrac{5}{2}p\nabla.\mathbf{u} + \nabla.\mathbf{q} + \pi : \nabla\mathbf{u} + \tfrac{3}{2}\tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\left[\nabla.(p_m\mathbf{J}) + \mathbf{p}_m : \nabla\mathbf{J}\right] &= W \end{aligned}\right. \tag{1.71}$$

Le système (1.71) est complété par les équations de Maxwell-Ampère sans dimension

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \nabla\times\mathbf{E} &= 0 \\ \mu_0\mathbf{J} - \nabla\times\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1.72}$$

Les différentes simplifications faites sur la loi d'ohm permettent de déterminer le type de modèle de la MHD. On retrouve par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{MHD de Hall :} & \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = \eta\mathbf{J} + \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\mathbf{J}\times\mathbf{B} - \tfrac{\rho^*}{\sqrt{\beta}}\nabla p_e \\ \text{MHD resistive :} & \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = \eta\mathbf{J} \\ \text{MHD idéale :} & \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = 0 \end{array}\right.$$

Plasma	Tokamak ITER
Densité $n(m^{-3})$	10^{20}
B_0 (Tesla)	5.3
Gyro-fréquence $\Omega_p(s^{-1})$	5.2987×10^8
Rayon de Larmor $\rho^*(m)$	2.1816×10^{-2}

TABLE 1.1 – Valeurs du rayon de Larmor et de la Gyro-fréquence du tokamak ITER

1.3.2 Modèle MHD réduite

La dynamique des particules du plasma peut être décrite par le modèle de la MHD complète (1.71) et (1.72). Ce modèle permet de décrire les quantités caractéristiques du plasma sur des espaces et des temps comparables aux grandeurs caractéristiques accessibles à l'expérience. Cependant, ce modèle reste très complexe et très couteux d'un point de vue du calcul. Il contient 8 variables indépendantes : les trois composantes de la vitesse, les trois composantes du champs magnétique, la densité et la pression. Cependant, il n'est pas généralement nécessaire de retenir tous les termes de ces équations quand on investi sur un problème particulier de la physique des plasmas. Dans ce paragraphe, nous allons proposer une approximation particulières du problème (1.71) et (1.72) qui est fondée sur la géométrie des tokamaks.

D'abord, on considère le modèle MHD idéale. On suppose donc que le rayon de Larmor est suffisamment petit de façon à négliger tous les termes en ρ^*. La resistivité est supposée égale à zéro. Les systèmes (1.71) et (1.72) donnent :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{u}) &= 0 \qquad (1.73.a) \\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \beta \nabla p - \nabla.(\mu \nabla u) &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \qquad (1.73.b) \\[2ex]
\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= 0 \qquad (1.73.c) \\[2ex]
\frac{3}{2}\dfrac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \nabla.\mathbf{u} + \nabla.\mathbf{q} + \pi : \nabla \mathbf{u} &= W \qquad (1.73.d) \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \qquad (1.73.e) \\[2ex]
\mu_0 \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \qquad (1.73.f)
\end{cases}
$$

À partir des équations (1.73.c) et (1.73.f), on écrit l'équation d'évolution du champs magnétique (1.73.e) par :

$$
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{1.74}
$$

En utilisant l'égalité suivante (voir dans [7]),

$$
\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla.\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla.\mathbf{A}) + (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B}
$$

on obtient

$$
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{B}(\nabla.\mathbf{u}) = 0 \tag{1.75}
$$

La loi d'Ampère (1.73.f) permet d'écrire le second membre de l'équation du moment (1.73.b) par :

$$
\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} - \nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2} \right)
$$

L'équation de la conservation du moment (1.73.b) devient :

$$
\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \beta \nabla p = (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} - \nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \tag{1.76}
$$

Introduisons la densité d'entropie du plasma définie par

$$
S = \frac{p}{\rho^\gamma}, \qquad \text{avec} \quad \gamma = \frac{5}{3} \tag{1.77}
$$

Il est souvent usuel d'exprimer l'équation d'évolution de l'énergie en fonction de l'entropie. Ainsi, avec quelques formules algébriques, l'équation (1.73.d) s'écrit comme suit :

$$\frac{dS}{dt} = \Theta \tag{1.78}$$

avec $\Theta = W - \nabla.\mathbf{q} - \pi : \nabla\mathbf{u}$, caractérisant le taux de production entropique par unité de volume. Ce terme quantifie la dissipation d'énergie qui est due à la collision des particules, la viscosité et le flux de chaleur.

Dans la suite, on négligera tous les termes dissipatifs. L'équation (1.79) donne

$$\frac{dS}{dt} = 0 \tag{1.79}$$

On en déduit que l'entropie est constante le long des trajectoires du fluide, $S = cte$, ceci se traduit par

$$p = p(\rho) \quad \text{ou} \quad \rho = \rho(p)$$

Dans le système (1.73), on ne gardera que l'une de ces deux variables. La densité ρ sera supposée constante. On considère alors le système suivant :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \beta\nabla p + \nabla\left(\dfrac{\mathbf{B}^2}{2}\right) &= (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} \quad (1.80.a) \\ \dfrac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{B}(\nabla.\mathbf{u}) &= 0 \quad (1.80.b) \\ \dfrac{3}{5p}\dfrac{dp}{dt} + \nabla.\mathbf{u} &= 0 \quad (1.80.c) \end{cases}$$

On considère un tokamak droit ayant la forme d'un cylindre très fin caractérisé par un petit rapport d'aspect $\epsilon = \frac{a}{R_0}$ (voir figure (1.1). Dans ce modèle, le tore est approché à un cylindre périodique de longueur $2\pi R_0$ et de section de rayon a. Ce modèle est largement utilisé dans les études théoriques pour comprendre la dynamique des plasmas de fusion dans les tokamak. En particulier, il a été considéré dans [40, 62] pour dériver les équations de la MHD réduite.

On considère le changement de variable suivant :

$$x = \frac{\xi}{a}, \quad y = \frac{\kappa}{a} \quad z = \frac{\zeta}{R_0}$$

où (ξ, κ, ζ) représente le système de coordonnées cartésien usuel. On notera par $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, le repère associé aux coordonnées normalisées (x, y, z).

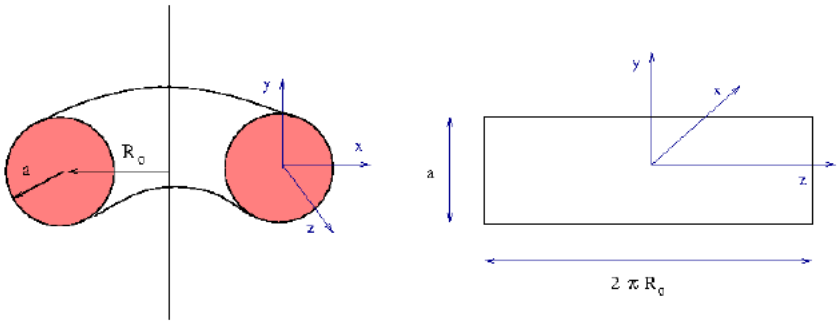


FIGURE 1.1 – Forme d'un tokamak droit [40]

Les opérateurs différentiels dans le système de coordonnées normalisées deviennent :

$$a\nabla f = \nabla_\perp f + \epsilon \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{1.81.a}$$

$$a\nabla.\mathbf{v} = \nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp + \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} \tag{1.81.b}$$

$$a\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial x}\mathbf{e}_y + (\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial y})\mathbf{e}_z + \epsilon(-\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial z}\mathbf{e}_y) \tag{1.81.c}$$

où nous avons utilisé les définitions suivantes :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_z\mathbf{e}_z \qquad \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_x\mathbf{e}_x + \mathbf{v}_y\mathbf{e}_y$$

$$\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y \qquad \nabla_\perp.\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y}$$

Admettons les hypothèses suivantes qui sont établies dans le rapport [40] :

i Le champs magnétique est principalement toroïdal. On écrit

$$\mathbf{B} = B_0(\mathbf{e}_z + \epsilon\mathcal{B})$$

avec B_0 une valeur de référence du champs magnétique toroïdale à l'axe magnétique $(R = R_0)$.

ii La vitesse des particules est très petite devant celle d'Alfen, $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0}}$ avec ρ_0 une densité de référence. On pose alors

$$\mathbf{u} = \epsilon v_A \mathbf{v}$$

iii On considère des simulations sur des temps long devant le temps d'Alfen, $t_A = \dfrac{a}{v_A}$. On pose

$$t = \frac{a}{\epsilon v_A}\tau$$

iv Les fluctuations de la pression sont considérées d'ordre ϵ :

$$p = P_0(\bar{p} + \epsilon q)$$

avec $\bar{p}$ une constante et P_0 une pression de référence qu'on choisit par $P_0 = \rho_0 v_A^2$.

Comme le champs poloïdale est aussi d'ordre ϵ, cela implique que le paramètre β du plasma (1.59) est d'ordre 1 dans le plan poloïdale. On supposera par simplification que β est d'ordre 1 partout, afin de le simplifier dans l'équation (1.80.b). On introduit la pression totale du plasma définie par :

$$p_T = p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \tag{1.82}$$

Elle représente l'ensemble de la pression dynamique et la pression magnétique. Par simplification, on notera $p = p_T$. Ainsi, l'équation du moment (1.80.b) s'écrit de la forme suivante :

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} \tag{1.83}$$

Le système (1.80) devient :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} &= 0 \quad (1.84.a) \\ \dfrac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{B}(\nabla.\mathbf{u}) &= 0 \quad (1.84.b) \\ \dfrac{3}{5p}\dfrac{dp}{dt} + \nabla.\mathbf{u} &= 0 \quad (1.84.c) \end{cases}$$

En introduisant les expressions des hypothèses ci-dessus et la normalisation (1.81) dans le système de la MHD (1.84), on obtient :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\rho(\bar{p}+\epsilon q)\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}+(\mathbf{v}_\perp.\nabla_\perp)\mathbf{v}\right]+\frac{\partial(q+\mathcal{B}_z)}{\partial z}\mathbf{e}_z+\nabla_\perp\mathcal{B}^2/2-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}-(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)\mathcal{B}\\
&\qquad +\epsilon\left(\rho\mathbf{v}_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}+\frac{\partial(\mathcal{B}^2/2)}{\partial z}\mathbf{e}_z-\mathcal{B}_z\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}\right)+\frac{1}{\epsilon}\nabla_\perp(q+\mathcal{B}_z) &&= 0 \quad (1.85.a)\\
&\frac{\partial \mathcal{B}_\perp}{\partial \tau}+(\mathbf{v}_\perp.\nabla_\perp)\mathcal{B}_\perp-(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)\mathbf{v}_\perp+\mathcal{B}_\perp\nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp-\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial z}\\
&\qquad +\epsilon\left(\mathbf{v}_z\frac{\partial \mathcal{B}_\perp}{\partial z}-\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial z}\mathcal{B}_\perp\right) &&= 0 \quad (1.85.b)\\
&\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial \tau}+(\mathbf{v}_\perp.\nabla_\perp)\mathcal{B}_z-(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)\mathbf{v}_z+\mathcal{B}_z\nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp+\epsilon\mathbf{v}_z\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z}+\frac{1}{\epsilon}\nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp &&= 0 \quad (1.85.c)\\
&\frac{1}{\gamma(\bar{p}+\epsilon q)}\left[\frac{\partial q}{\partial \tau}+(\mathbf{v}_\perp.\nabla_\perp)q+\epsilon\mathbf{v}_z\frac{\partial q}{\partial z}\right]+\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z}+\frac{1}{\epsilon}\nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp &&= 0 \quad (1.85.d)
\end{aligned}
\right.
$$

L'analyse asymptotique faite dans le rapport [40] montre que les solutions du problème (1.85) converge vers les solutions du problème suivant :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\rho\frac{d^\perp}{dt}\mathbf{v}_\perp-(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)\mathcal{B}_\perp+\nabla_\perp\lambda+\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial z} &= 0 \quad (1.86.a)\\
\frac{d^\perp}{dt}\mathcal{B}_\perp-(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)\mathbf{v}_\perp+\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial z} &= 0 \quad (1.86.b)\\
\nabla_\perp.\mathbf{v}_\perp &= 0 \quad (1.86.c)\\
\nabla_\perp.\mathcal{B}_\perp &= 0 \quad (1.86.d)\\
\rho\frac{d^\perp}{dt}\mathbf{v}_z+(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)q+\frac{\partial q}{\partial z} &= 0 \quad (1.86.e)\\
\left(\frac{3}{5\bar{p}}-1\right)\frac{d^\perp}{dt}q+(\mathcal{B}_\perp.\nabla_\perp)\mathbf{v}_z+\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial z} &= 0 \quad (1.86.f)
\end{aligned}
\right.
$$

où λ représente un terme de pression scalaire qui permet de garantir la condition de divergence nulle de la composante poloïdale de la vitesse.

Le système (1.86) nous permet de conclure que les équations (1.86.a) et (1.86.b) associées aux contraintes (1.86.c) décrivent une dynamique *incompressible* du mouvement du plasma dans la direction poloïdale. Ces deux équations ne dépendent pas de la pression q ni de la composante toroïdale de la vitesse. Elles peuvent donc être résolues indépendamment des deux dernières équations.
Cependant, les deux dernières équations du système (1.86) décrivant le mouvement du plasma dans la direction toroïdale, font intervenir les composantes poloïdales du champs magnétique. Elles peuvent donc être résolues uniquement lorsque les deux solutions des deux premières équations sont calculées. Ces deux équations décrivent une dynamique *compressible* du plasma la direction toroïdale.

Notons que dans le cas d'une configuration axisymétrique ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$), les équations (1.86.a)-(1.86.d) sont complètement découplées des équations (1.86.e) et (1.86.f).

1.3.3 MHD réduite et visco-resistive

Dans ce paragraphe, on considère le modèle de la MHD réduite décrit dans le paragraphe précédent. On suppose une configuration axisymétrique du tokamak ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$). On peut donc découpler les équations de la MHD réduite (1.86), dans les deux directions poloïdale et toroïdale. Dans cette partie, on s'intéresse uniquement de la dynamique poloïdale du plasma. On examine donc les quatre premières équations du problème (1.86) :

$$\begin{cases} \rho \frac{d^{\perp}}{dt}\mathbf{v}_{\perp} - (\mathcal{B}_{\perp}.\nabla_{\perp})\mathcal{B}_{\perp} + \nabla_{\perp}\lambda + \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial z} &= 0 \quad (1.87.a) \\ \frac{d^{\perp}}{dt}\mathcal{B}_{\perp} - (\mathcal{B}_{\perp}.\nabla_{\perp})\mathbf{v}_{\perp} + \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}}{\partial z} &= 0 \quad (1.87.b) \\ \nabla_{\perp}.\mathbf{v}_{\perp} &= 0 \quad (1.87.c) \\ \nabla_{\perp}.\mathcal{B}_{\perp} &= 0 \quad (1.87.d) \end{cases}$$

Pour garder une conformité des notations, on notera la vitesse par $\mathbf{u}$ au lieu de $\mathbf{v}$, et le champs magnétique par $\mathbf{B}$ au lieu de $\mathcal{B}$, la pression sera notée p au lieu de λ. Comme on ne considère que la partie poloïdale, on omettra donc l'indice $\perp$ dans les notations. Ce qui donne le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} + \nabla p &= 0 \quad (1.88.a) \\ \dfrac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} &= 0 \quad (1.88.b) \\ \nabla.\mathbf{u} &= 0 \quad (1.88.c) \\ \nabla.\mathbf{B} &= 0 \quad (1.88.d) \end{cases}$$

Ensuite, on examine le cas de la MHD visco-resistive. La loi d'Ohm (1.73.c) devient :

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$$

Ainsi, en utilisant l'égalité suivante (voir dans [7])

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla.\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

et supposant une résistivité η constante, l'équation du champs magnétique (1.75) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{B}(\nabla.\mathbf{u}) - \eta\nabla^2\mathbf{B} = 0 \tag{1.89}$$

Nous avons posé $\eta = \dfrac{\eta}{\mu_0}$.

Enfin, prenons en compte le terme de viscosité dans l'équation du moment (1.88.a), ce qui donne

$$\rho\frac{\mathbf{u}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} + \nabla p - \nabla.(\mu\nabla\mathbf{u}) = 0 \tag{1.90}$$

Le paramètre de viscosité μ sera considéré constante. Et comme la densité ρ est aussi constante, on utilisera plutôt la viscosité cinématique $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$, pour éviter toute confusion avec le perméabilité du plasma μ_0.

On obtient finalement, le modèle suivant pour la MHD réduite et visco-resistive :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} + \nabla p &= \nu\nabla^2\mathbf{u} \quad (1.91.a) \\ \dfrac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} &= \eta\nabla^2\mathbf{B} \quad (1.91.b) \\ \nabla.\mathbf{u} &= 0 \quad (1.91.c) \\ \nabla.\mathbf{B} &= 0 \quad (1.91.d) \end{cases}$$

Ce modèle est un prototype simplifié du modèle de la MHD réduite. Il retient l'essentiel des difficultés de la MHD. Il a été utilisé dans plusieurs études numériques des problèmes de la MHD comme dans [49], [62], [45], [24]. On étudiera ce modèle en détail dans le chapitre (5).

Chapitre 2

Méthode des éléments finis

Sommaire

2.1 Généralités **40**
2.1.1 Méthode de Galerkin et des éléments finis 40
2.1.2 Analyse de convergence 44
2.2 Méthode des éléments finis C^1 . . . . . **45**
2.2.1 Généralités sur les éléments finis C^1 45
2.2.2 Éléments finis de Clough Tocher réduits 47
2.3 Prise en compte des conditions aux limites **51**
2.3.1 Méthode de pénalisation 52
2.3.2 Méthode de pénalisation discrète exacte 53

Ce chapitre est dédié à la présentation de la méthode des éléments finis. D'abord, on effectuera une description générale de celle ci en rappelant quelques théorèmes et résultats communs. Ensuite on décrira quelques méthodes éléments finis de régularité C^1 en général, avant de présenter en particulier les éléments de Clough-Tocher qui seront utilisés pour l'approximation des problèmes qui seront abordés dans les prochains chapitres.

2.1 Généralités

2.1.1 Méthode de Galerkin et des éléments finis

Dans ce paragraphe, nous allons décrire brièvement la méthode de Galerkin. Cette méthode associée de façon naturelle à la méthode des éléments finis, consiste à approcher la formulation faible d'une équation aux

dérivées partielles (EDP), ou d'un système d'EDP, sur des espaces fonctionnels approchés de dimensions finies.

On considère le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver} & u \in V \text{ tel que} \\ \quad a(u,v) & = L(v) \quad \forall\, v \in V \end{cases} \tag{2.1}$$

avec V, un espace de Hilbert muni de la norme $||.||$, $a(.,.)$ une forme bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ et L, une forme linéaire continue de V dans $\mathbb{R}$.

Sous des hypothèses supplémentaires sur la forme bilinéaire a, le théorème suivant permet de garantir l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1).

Théorème 2.1.1. ***(Lax-Milgram)*** *(cf [57] Théorème 2.2-1 pg 37)*
On suppose que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive. C'est à dire qu'il existe des constantes positives M et α tels que :

$$|a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V \quad \forall u, v \in V \tag{2.2}$$

et

$$|a(u,u)| \geq \alpha||u||_V^2 \quad \forall u \in V \tag{2.3}$$

Alors le problème (2.1) admet une solution unique $u \in V$.

La méthode de Galerkin appliquée au problème (2.1), consiste à remplacer l'espace V par un espace $V_h \subset V$ de dimension finie, et de calculer la solution dans l'espace V_h. À ce sous espace $V_h \subset V$, on associe *le problème approché* suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver} & u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) & = L(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h \end{cases} \tag{2.4}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram dans $V_h \subset V$, on montre que le problème (2.4) admet une unique solution $u_h \in V_h$.

Comme l'espace V_h est de dimension finie, il peut être engendré par une base $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N)$, avec $N = \dim V_h$. Le choix de l'espace V_h résulte du choix de cette base.
Ainsi, en écrivant $u_h \in V_h$ par

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j$$

et en posant

$$U = (u_1, u_2, ..., u_N) \in \mathbb{R}^N$$

le problème (2.4) est équivalent à la formulation suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathbb{R}^N & \text{tel que} \\ a\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j, \phi_i\right) & = L(\phi_i) \quad \forall\, 1 \leq i \leq N \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant

$$\mathcal{K}U = b \tag{2.6}$$

avec

$$\mathcal{K}_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) \quad b_i = L(\phi_i), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

L'espace V_h peut être choisi de sorte que la matrice $\mathcal{K}$ soit creuse, ce qui réduira le cout de calcul sur la résolution du système linéaire (2.6).
Intéressons nous maintenant à la construction de l'espace V_h par une approche de type éléments finis. Supposons que le problème (2.1) est la formulation variationnelle d'un problème elliptique du second ou quatrième ordre posé sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, avec des conditions aux limites imposées sur sa frontière $\partial\Omega$ supposée lipschitzienne. Des exemples typique seront étudiés dans les chapitres qui suivent.

La méthode des éléments finis s'appuie sur la construction de l'espace V_h à partir d'une discrétisation $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω en volumes élémentaires (triangles, quadrangle, tétraèdre, ...), appelée "*maillage*" (voir figure (2.1)) tel que

$$\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

Dans ce contexte, le paramètre h correspond à la taille maximale de l'élément du maillage. Ceci à l'avantage qu'à la limite $h \to 0$, l'espace V_h grandit de plus en plus et approchera de mieux l'espace V tout entier. Typiquement, les fonctions de bases ϕ_i seront constituées de façon à ce que leur support soit localisée sur un ou quelques éléments. Ceci aura une conséquence majeure que la matrice $\mathcal{K}$ devient creuse (ce qui limitera le coût de la résolution numérique).

Définition 2.1.1. ***Élément fini***[27]
Un élément fini est en général défini par le triplet (K, P_K, Σ_K) tel que :

i K est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$ d'intérieur non vide et de frontière lipschitzienne et continue.

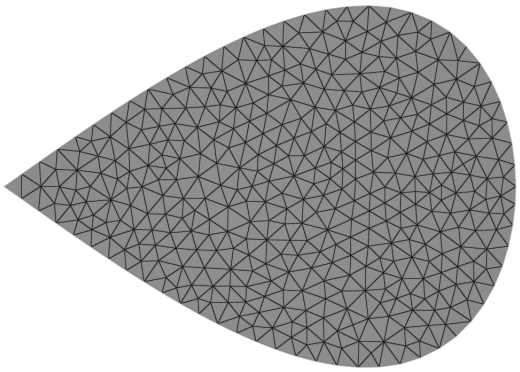


FIGURE 2.1 – Exemple de maillage triangulaire en dimension N = 2

ii P_K *est un espace fonctionnel des fonctions (polynomiales) définie sur* K.

iii Σ_K *est un ensemble fini de forme linéaire* χ_i, $1 \leq i \leq M$ $(M = card\Sigma_K)$, *définie sur* P_K *et linéairement indépendante.*
Σ_K *est appelé ensemble des degrés de liberté de l'élément fini.*

Par définition, on dit que l'ensemble Σ_K est P_K-*unisolvant* dans le sens où : pour tout réel donné α_i, $1 \leq i \leq M$, il existe une unique fonction $p \in P_K$, satisfaisant

$$\chi_i(p) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq M$$

Par conséquent, il existe des fonctions $\phi_i \in P_K$, $1 \leq i \leq M$ satisfaisant

$$\chi_j(\phi_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq M$$

Les fonction ϕ_i sont appelées les *fonctions de bases de l'élément fini.*

Définition 2.1.2. ***Opérateur d'interpolation***
Soit (K, P_K, Σ_K) *un élément fini défini dans le sens de la définition* (2.1.1), *avec* Σ_K *qui vérifie la* P_K*-unisolvance. Soit* v *une fonction définie de* K *sur* $\mathbb{R}$ *suffisamment régulière de sorte que les degrés de libertés* $\chi_i(v)$ *soient bien définies. On appelle interpolant de la fonction* $v \in P_K$, *la fonction définie par*

$$\Pi_v = \sum_{i=1}^{M} \chi_i(v)\phi_i$$

Cet opérateur d'interpolation est caractérisé par les conditions suivantes :

$$\Pi_v \in P_K \quad et \quad \chi_i(\Pi_v) = \chi_i(v)$$

La méthode des éléments finis est une des méthodes les plus efficaces et les plus utilisées dans la résolution numériques des problèmes aux limites. Elle est à la base d'innombrables logiciels de calculs industriels et académique comme GetFEM [58], FEniCS [10] ANSYS [5], DEAL.II [12],... par exemple.

2.1.2 Analyse de convergence

Avant de décrire la méthode des éléments finis qui sera utilisée dans ce travail, nous rappelons dans ce paragraphe, quelques propriétés générales liées à l'approximation de Galerkin appliquée aux problèmes elliptiques. Les preuves des théorèmes qui seront présentés ici se retrouvent dans plusieurs manuels des éléments finis. On considère le cas où l'approximation est conforme c'est à dire que l'espace approché V_h est inclus dans l'espace variationnel V. On suppose aussi que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive pour s'assurer de l'existence et l'unicité de la solution dans les espaces V_h et V (voir théorème (2.1.1)). Alors on a l'estimation suivante de l'erreur de convergence de la solution discrète u_h de (2.4) vers u, solution du problème continu (2.1).

Théorème 2.1.2. ***(Lemme de Céa)*** *(cf. [27] Théorème 2.4.1 pg 104)*
Soit u la solution exacte du problème (2.1) et u_h la solution du problème approché (2.4). Alors on a l'estimation suivante de l'erreur d'approximation

$$||u - u_h||_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V \tag{2.7}$$

avec M et α les constante respectives de continuité et de coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, qui apparaissent dans le théorème de Lax-Milgram (2.1.1).

Le théorème (2.1.2) montre que l'erreur d'approximation u_h de u est uniformément bornée par la distance entre $u \in V$ et l'espace $V_h \subset V$, définie par :

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V \tag{2.8}$$

On remarque donc que la solution u_h dans V_h converge vers u dans V lorsque $h \to 0$, dès que $d(u, V_h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. On utilise la propriété de consistance suivante :

Lemme 2.1.3. *On se place sous les hypothèse du théorème (2.1.1). On suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{V} \subset V$ dense dans V et une application Π_h de $\mathcal{V}$ dans V_h tel que*

$$\lim_{h\to 0} ||v - \Pi_h(v)||_V = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \tag{2.9}$$

alors

$$d(u, V_h) \to 0 \ \ \textit{quand} \ \ h \to 0$$

On remarque qu'en utilisant une approximation de type éléments finis de l'espace V_h, l'opérateur Π_h peut être choisi comme l'opérateur d'interpolation défini dans la définition (2.1.2).

En appliquant des techniques plus élaborées, on peut évaluer la différence $(u - u_h)$ dans des normes ou semi-normes, autres que la norme dans V. Notamment la norme L^2 pour le cas où $V = H^1(\Omega)$ ou $H^2(\Omega)$, par exemple.

Théorème 2.1.3. ***(Lemme d'Aubin-Nitche)*** *(cf. [27] Théorème 3.2.4 pg 137)*
Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $|.|_H$ et du produit scalaire $(.,.)_H$ tel que

$$\bar{V} = H \quad \textit{et} \quad V \hookrightarrow H$$

alors

$$|u - u_h|_H \leq M||u - u_h||_V \left(\sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{|g|_H} d(\phi_g, V_h) \right\} \right) \tag{2.10}$$

où $\forall g \in H$, $\phi_g \in V$ est l'unique solution du problème variationnel :

$$\forall v \in V, \quad a(v, \phi_g) = (g, v)_H$$

et M est une constante telle que :

$$|a(u, v)| \leq M||u||_V||v||_V$$

Le symbole $V \hookrightarrow H$ désigne l'injection canonique de V dans H.

2.2 Méthode des éléments finis C^1

2.2.1 Généralités sur les éléments finis C^1

La plupart des propriétés établies dans le paragraphe précédent requiert une approximation conforme des éléments finis. C'est à dire que l'espace d'approximation V_h soit contenu dans l'espace variationnel V. Autrement, des hypothèses supplémentaires doivent être considérées afin d'établir des résultats de convergence. On parle des méthodes éléments finis non conformes, voir par exemple dans [20] Chapitre 10, pg 271. On ne

traitera pas cette théorie dans ce travail. Cependant, beaucoup d'applications physiques telles que la magnétohydrodynamique, les problèmes des plaques, font intervenir des dérivées d'ordre supérieur à 2, et leurs formulations variationnelles sont établies dans un espace V contenu dans H^k ($k \geq 2$). Pour avoir la conformité de l'approximation Galerkin, l'espace V_h doit au moins satisfaire la condition $V_h \subset C^1(\Omega)$. Cette condition serait satisfaite si l'espace V_h est approché par des éléments de régularité supérieur ou égale 1. C'est à dire des éléments finis dont les fonctions de bases sont de classes au moins C^1. Bien que la mise en œuvre de ces éléments est complexe, il existe un grand panel des méthodes éléments finis de régularité au moins C^1.

On peut citer par exemple les éléments finis d'Argyris [11] qui consiste à approcher les fonction de V_h par des polynômes de degré 5 sur chaque élément. Pour assurer la continuité C^1, ces éléments font intervenir des degrés de liberté associés à la dérivée normale de la fonction au milieu des arrêtes du triangle. Ce qui constitue une des difficultés de son implémentation. Cependant, il existe une version réduite de cette méthode, appelée éléments finis de Bell ou éléments finis quantiques réduits [52, 45]. Ces derniers ont seulement 18 degrés de libertés au lieu de 21 pour le cas complet et ils sont tous situés aux nœuds du maillage. Ces éléments présentent une convergence d'ordre élevé, $\mathcal{O}(h^5)$, de la solution discrète u_h de (2.4) vers la solution u du problème continue (2.1).

Il existe d'autres catégories d'éléments finis C^1 avec une interpolation polynômial de degré moins élevés mais dont la structure de l'espace fonctionnel est plus complexe. C'est le cas par exemple des éléments de Powell-Sabin [38, 60] qui consiste à diviser l'élément triangulaire K en 6 sous triangles et approcher les fonctions de V_h par des polynômes P_2(de degré 2) sur chaque sous triangle. Il existe aussi d'autres éléments de Powell-Sabin de degré polynômial supérieur à 2, ce qui revient à augmenter le nombre de subdivision du triangle (voir par exemple dans [8]). Les éléments finis de Clough-Tocher [28, 18] font aussi partie de cette famille d'éléments. Ces dernières consiste à subdiviser l'élément triangulaire K en 3 sous triangles et d'approcher d'approcher les fonctions de V_h par des polynômes P_3 sur chaque sous triangle. Comme dans le cas des éléments d'Argyris, il existe les éléments finis de Clough-Tocher complets qui font intervenir des degrés de liberté associés aux dérivées normales de la fonction au milieu des arrêtes du triangle, et d'autre part, les éléments finis réduits qui n'ont que 9 degrés de liberté par élément au lieu de 12 pour le cas complet et qui sont tous localisés aux sommets du triangle. C'est cette dernière catégorie d'éléments finis qui fera l'objet de notre travail.

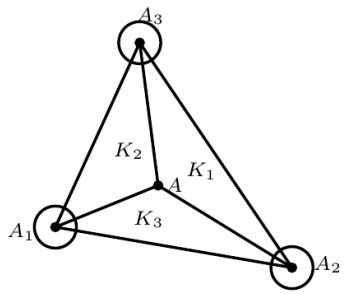


FIGURE 2.2 – élément fini réduit de Clough-Tocher

2.2.2 Éléments finis de Clough Tocher réduits

Dans ce paragraphe, nous décrivons une classe particulière d'éléments finis C^1 : les éléments finis dites de Clough-Tocher réduits, qu'on notera de façon abrégée CT par simplification. Vers les années 1965, Clough et Tocher ont développés cette catégorie d'éléments finis pour l'approximation des problèmes des plaques [28]. Notre choix est porté sur les éléments finis de Clough-Tocher, d'abord par le fait qu'ils garantissent la régularité C^1 tout en minimisant le degré d'approximation polynomiale et dans une structure moins complexe des éléments que celle de Powell-Sabin par exemple. Cette régularité élevé permet d'approcher des problèmes faisant intervenir des dérivées d'ordre élevé comme ceux de la MHD par exemple. Ensuite par le fait qu'ils sont des éléments triangulaires, les rendra plus flexible pour approcher des géométrie complexes comme celle du tokamak. Les triangles sont aussi très pratiques pour effectuer un raffinement adaptatif direct du maillage, ce qui constitue un ingrédient clé dans la simulation des équations anisotropes. On se restreint aux éléments de Clough-Tocher réduits afin de réduire les difficultés de l'implémentation dans un premier temps. En effet, toutes les inconnues sont situées sur les nœuds de la triangulation, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'inconnues sur les faces ni à l'intérieur des éléments. Cette localisation est très utile pour la parallélisation du code par exemple.

Définition 2.2.1. *Un élément fini réduit de Clough-Tocher (CT) est le triplet* (K, P_K, Σ_K) *tel que :*

— *L'élément* K *est un triangle de sommets* A_1, A_2, A_3 *qui est subdivisé en trois sous triangles* K_i*, constitués des sommets* A, A_{i+1}, A_{i+2}*,* $i \in \{1, 2, 3[\equiv 3]\}$*.* A *est un point à l'intérieur du triangle* K *(cf. Fig 2.2)*

— *L'espace des fonctions P_K est donné par :*

$$P_K = \left\{ P \in C^1; P_{|K_i} \in P_3(K_i), i = 1,2,3 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial n_i} \in P_1(K_i') \; \forall \; K' \subset K \right\}$$

où K_i' est le coté du triangle K ne contenant pas le point A_i, n_i est la normale sortante au côté K_i', et $\frac{\partial P}{\partial n_i}$ est la dérivée normale de P dans la direction K_i'.

— *L'ensemble des degrés de liberté Σ_K est :*

$$\Sigma_K = \{P(A_i), DP(A_i)(A_{i+1} - A_i), DP(A_i)(A_{i+2} - A_i), i = 1,2,3[\equiv 3]\}$$

où $DP(A_i)(A_{i+1} - A_i)$ est la dérivée directionnelle suivant le côté $[A_i A_{i+1}]$.

Dans la définition générale des éléments finis CT, le point A peut se situer sur n'importe quelle position à l'intérieur du triangle K à condition qu'il satisfait la restriction suivante : les projections orthogonales du point A sur les trois côtes du triangle doivent se trouver sur ces côtes. Si le point A est considéré comme le barycentre du triangle, alors cette restriction est satisfaite. C'est la considération utilisée par exemple dans [26], [18], [59]. Dans ce travail, on choisira A comme étant le barycentre du triangle K. Les notations utilisées se référent de celles de Bernadou et Hassane [17, 18]

Définition 2.2.2. *Soit (K, P_K, Σ_K) un élément fini CT. Pour tout $f \in P_K$, on lui associe les degrés de libertés globaux suivantes sur chaque sommet A_i du triangle, $1 \leq i \leq 3$:*

$$f(A_i), \quad f_x(A_i) \;\; \text{et} \;\; f_y(A_i)$$

On notera les 3 fonctions de bases CT associées au sommet A_i par $\phi_i, \phi_i^x, \phi_i^y$, $1 \leq i \leq 3$, appartenant à P_K. Elles sont telles que

$$\phi_i(A_j) = \delta_{ij} \quad \partial_x \phi_i^x(A_j) = \delta_{ij} \quad \partial_y \phi_i^y(A_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i \leq 3 \tag{2.11}$$

Dans cette définition, nous avons choisi ces notations pour différencier les fonctions de bases associées aux valeurs des fonctions à celles associées aux composantes du gradient. Ces fonctions de bases vérifient les propriétés suivantes :

— Elles sont de régularité C^1 sur l'élément K et sur tous ses éléments voisins,

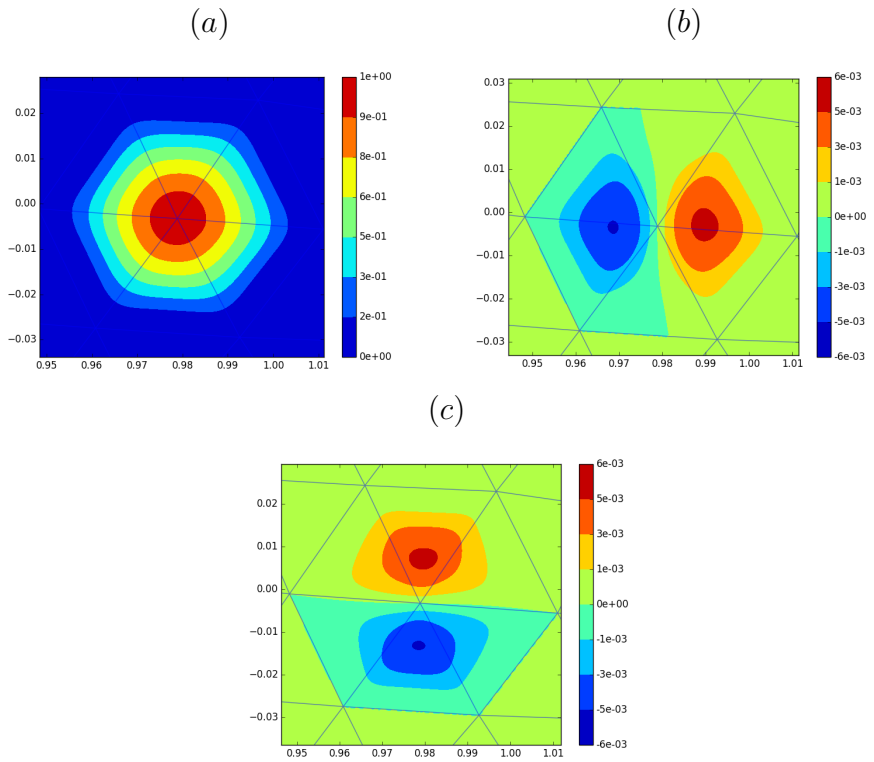


FIGURE 2.3 – Fonctions de bases en un point donnée A_i du maillage : (a) fonction associée à la valeur de la fonction (ϕ_i), (b) associée au gradient dans la direction des x (ϕ_i^x), (c) associée au gradient dans la direction des y (ϕ_i^y).

— Les 3 fonctions de bases associées au sommet A_i du triangles et leurs gradients, s'annulent sur tous les points appartenant au côté opposé à ce sommet. Cette propriété joue un rôle important sur la prise en compte des conditions aux limites, comme on le verra dans les chapitres qui suivent.

Notons que la restriction de chacune de ces fonctions sur chaque sous triangle est un polynôme de degré 3 qui sera défini de façon distincte sur chaque sous triangles K_i. On renvoie le lecteur aux articles de Bernadou et Hassane [17, 18], pour plus de détails sur l'implémentation de la méthode. Dans la figure (2.3), nous illustrons les trois fonctions de bases associées à un sommet particulier d'un maillage.

Définition 2.2.3. ***(Opérateur d'interpolation CT)***
Étant donné une fonction v définie dans K, on appelle opérateur d'interpolation

$\Pi_h v$ *de* v*, la fonction définie par la relation suivante :*

$$\Pi_h v \in P_K \quad \text{et} \quad \Pi_h v(A_i) = v(A_i), \quad 1 \leq A_i \leq 3$$

Ce qui équivaut à :

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^{3} v(A_i)\phi_i + \sum_{i=1}^{3} v_x(A_i)\phi_i^x + \sum_{i=1}^{3} v_y(A_i)\phi_i^y \tag{2.12}$$

avec $\phi_i, \phi_i^x, \phi_i^y$*, les fonctions de bases définies dans* (2.11) *et* A_i *les sommets du triangles* K*.*

On définit la notion de famille régulière de Clough-Tocher.

Définition 2.2.4. ***(Famille régulière CT)*** *(cf. [27] pg 343)*

On dit qu'une famille triangulaire de Clough-tocher $\mathcal{T}_h$ *est régulière si elle satisfait les trois conditions suivantes :*

1. *Il existe une constante* σ *tel que*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \ \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

   avec h_K *une taille caractéristique de* K *et* ρ_K *le rayon du cercle inscrit au triangle* K*.*

2. *la quantité* $h = \max h_K \to 0$
3. *Soit* $\hat{K}$ *un triangle fixé, de sommet* $\hat{A}_i$*,* $1 \leq i \leq 3$*. Pour tout élément* $K \in \mathcal{T}_h$*, de sommet* A_i*,* $1 \leq i \leq 3$*, on dénote par* F_K*, l'unique application affine satisfaisant* $F_K(\hat{A}_i) = A_i$*,* $1 \leq i \leq 3$*. Alors pour tout point* $A \in K$*,* $\hat{A} = F_K^{-1}(A)$ *est toujours contenu dans un sous ensemble compacte* $\hat{B}$ *de l'intérieur d triangle* $\hat{K}$*.*

Le résultat d'interpolation suivant a été prouvé par Ciarlet dans [25, 26].

Théorème 2.2.1. ***(Erreur d'interpolation CT)****([26])*
Soit $v \in H^3(\Omega) \cap C^1$*. On se donne une famille régulière de triangles CT, au sens de la définition* (2.2.4)*. Alors*

$$|v - \Pi_h v|_m \leq C h^{3-m} |v|_3, \quad m = 0, 1, 2 \tag{2.13}$$

où Π_h *dénote l'opérateur d'interpolation définie dans* (2.12) *et* $|.|_m$ *la semi-norme dans* $H_0^m(\Omega)$ *définie par*

$$|u|_m = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad m = 0, 1, 2 \tag{2.14}$$

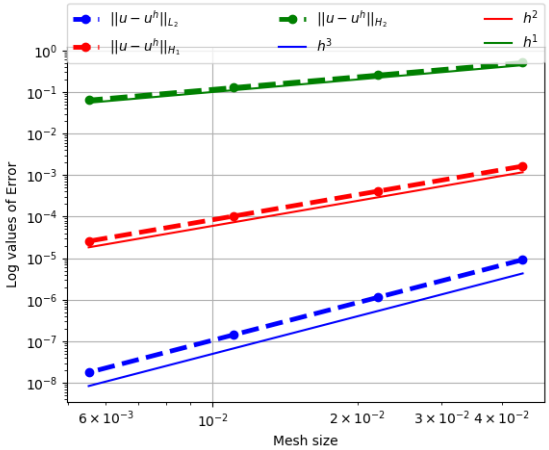


FIGURE 2.4 – Variation des semi-normes (2.14) de l'erreur d'interpolation de la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4$

Dans la figure (2.4), nous présentons la variation des semi-normes (2.14) de l'erreur d'interpolation de la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4$, dans un domaine $\Omega = [0, 1]^2$. Le domaine est discrétisé en éléments triangulaires structurés de taille $h = \frac{1}{N}$, $N = 16, 32, 64, 128$. On observe qu'on a une erreur d'interpolation d'ordre 3 pour la semi-norme L^2, d'ordre 2 pour la semi-norme H^1 et d'ordre 1 pour la semi-norme H^2. Ce qui est conforme aux résultats théoriques.

2.3 Prise en compte des conditions aux limites

Finissons ce chapitre par une brève description des techniques et méthodes qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent pour traiter les conditions aux limites imposées à la solution du problème (2.1). Pour introduire la méthode des éléments finis, on a supposé que le problème (2.1) provient d'un problème elliptique du 2e ou du 4e ordre posé dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ avec des conditions aux limites posées sur sa frontière $\partial\Omega$. Nous supposerons que le domaine Ω est polygonal afin de s'assurer que $\bar{\Omega}$ sera entièrement approchée par une triangulation. On supposera le cas des conditions aux limites de type Dirichlet pour les problèmes de 2nd ordre

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{2.15}$$

Pour traiter des problèmes de 4e ordre, il sera nécessaire d'imposer des conditions aux limites à la fois sur les valeurs de la fonction et sur ses

dérivées. On aura donc des conditions de type Dirichlet et Neumann sur le bord

$$\left\{ \begin{array}{rl} u = g & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u.\mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.16}$$

avec g et h des fonctions dans $L^2(\partial\Omega)$ et $\mathbf{n}$ un vecteur normal sortant de la frontière $\partial\Omega$.
On introduit les espace des fonctions tests qui s'annulent au bord

$$V_0 = \{v \in V, v_{|\partial\Omega} = 0\}$$

si besoin, on définira l'espace

$$V_{00} = \{v \in V, v_{|\partial\Omega} = 0, \partial_{\mathbf{n}} v = 0\}$$

On notera par V_{0h} et V_{00h} les espaces approchés de Galerkin associés à V_0 et V_{00} respectivement.

Il existe plusieurs méthodes dans la littérature permettant de traiter ces types de conditions limites en éléments finis. Sans être exhaustive, on peut citer par exemple la méthode des multiplicateurs de Lagrange [13, 56], la méthode de pénalisation [14, 16], la méthode de Nitsche [61, 43]... et d'autres méthodes stabilisées telle que la méthode des multiplicateurs de Lagrange stabilisée [15]. D'autres techniques ont été introduites pour imposer les conditions aux limites directement sur la matrice du système linéaire. On présentera d'abord la méthode de pénalisation de façon très brève. Cette méthode sera utilisée pour traiter les conditions aux limites sur les problèmes du 2nd ordre. Ensuite on décrira une technique de pénalisation discrète exacte qui consiste à imposer les conditions aux limites directement sur la matrice du système linéaire.

2.3.1 Méthode de pénalisation

On considère le cas où la formulation (2.1) est associée à un problème elliptique du 2nd ordre avec des conditions aux limites de type Dirichlet non homogène, tel qu'est énoncé dans (2.15). Le problème variationnel correspondant au problème (2.1) est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{Trouver } u \in V \text{ satisfaisant} & u = g \text{ sur } \partial\Omega \text{ tel que} \\ a(u,v) & = L(v) \quad \forall v \in V_0 \end{array} \right. \tag{2.17}$$

La méthode de pénalisation consiste à remplacer la condition de Dirichlet (2.15) par une condition de type Robin. Pour cela, on introduit un

paramètre de pénalité $\epsilon > 0$ et cherchons une fonction u_ϵ solution de (2.1) et vérifiant la condition aux limites suivante :

$$\partial_{\mathbf{n}} u_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}(u_\epsilon - g) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.18}$$

L'avantage de cette méthode est que pour ϵ suffisamment petit, la condition de Robin (2.18) approche celle de Dirichlet (2.15).

La formulation faible pénalisée associée au problème (2.17) s'écrit donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\epsilon \in V \quad \text{tel que} \\ a(u_\epsilon, v) + \dfrac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega}(u_\epsilon - g)v \quad = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2.19}$$

L'approximation de Galerkin associée au problème (2.19) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\epsilon^h \in V_h \quad \text{tel que} \\ a(u_\epsilon^h, v^h) + \dfrac{1}{\epsilon}\int_{\partial\Omega}(u_\epsilon^h - g^h)v^h \quad = L(v^h) \quad \forall v^h \in V_h \end{cases} \tag{2.20}$$

où nous avons noté par g^h la fonction approchée de g sur les arêtes du bord. Cette approximation est en générale donnée par l'opérateur d'interpolation des éléments finis utilisés, en supposant que g soit suffisamment régulière pour que cette interpolation aie un sens.

On peut facilement montrer que pour ϵ suffisamment petit, il existe une constante $C > 0$ tel que [13]

$$||u - u_\epsilon|| \leq \epsilon C$$

Cette méthode a pour atout principal qu'elle est très facile a mettre en œuvre et qu'elle s'étend naturellement à des problèmes beaucoup plus complexes.
En revanche, en approchant la condition de Dirichlet par une condition de Robin, on perd la consistance de la formulation variationnelle. Il faut alors choisir ϵ aussi petit que possible pour satisfaire au mieux la condition de Dirichlet. D'un autre côté, plus ϵ est petit, plus le Problème (2.20) est mal conditionné et donc difficile à résoudre. Il faut donc choisir avec discernement le paramètre ϵ et ce choix dépend souvent du problème considéré.

2.3.2 Méthode de pénalisation discrète exacte

Pour étudier des problèmes elliptique d'ordre supérieur ou égal à 4, il est primordial d'imposer des conditions aux limites à la fois sur les valeurs

de la fonction que sur la dérivée normale (ou sur le laplacien). La méthode de pénalisation telle qu'elle est décrite dans la section précédente ne permet pas de prendre en compte ces deux conditions aux limites. Il nous faudrait donc d'autres techniques supplémentaires. Nous présentons ici une technique standard utilisée en éléments finis qui consiste à imposer de façon directe, les conditions aux limites de la solution, directement sur la matrice du système linéaire.
On suppose que le problème (2.1) est posé dans un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ où des conditions aux limites de type (2.16) sont imposées. On pose $\mathcal{T}_h$, une triangulation de Ω et V_h l'espace de Galerkin associé à $\mathcal{T}_h$. Il est montré dans la section (2.1.1) que la méthode des éléments revient à résoudre un système linéaire de la forme

$$\mathcal{K}U = b$$

avec

$$\mathcal{K}_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) \quad \text{et} \quad b_i = L(\phi_i), \quad 1 \leq i, j \leq 3N$$

ϕ_i représente les fonctions de bases qui engendrent l'espace V_h. Les indices de la matrice varie de 1 à $3N$ (avec N le nombre de nœuds du maillages) car pour les éléments finis CT, chaque nœud du maillage est associé à trois fonctions de bases distinctes.
On note par I l'ensemble des indices des nœuds du maillage, et par I_{ext} celui des indices des nœuds extérieurs. Pour un indice k d'un nœud du maillage, on notera par $i = 3k - 2$, $i_x = 3k - 1$ et $i_y = 3k$, les indices de la matrice associées respectivement aux valeur de la fonction, au gradient suivant x et au gradient suivant y.

La méthode de pénalisation discrète exacte consiste à modifier les lignes de la matrice $\mathcal{K}$ correspondantes aux nœuds du bord, en remplaçant les éléments diagonaux par 1 et les éléments hors diagonaux par 0. Ensuite, on remplacera les valeurs du vecteur b correspondantes aux indices du bord par la valeur exacte des solutions à ces nœuds. En effet, si on pose par g_k et h_k les valeurs respectives des fonctions g et h définies dans (2.16) au nœud $k \in I_{ext}$, l'implémentation des conditions aux limites suit l'algorithme suivant

$$
\begin{aligned}
&Pour \quad k \in I_{ext}, \quad Faire \\
&\qquad\qquad i = 3k - 2 \\
&\qquad\qquad i_x = 3k - 1 \\
&\qquad\qquad i_y = 3k \\
&\qquad\qquad \mathcal{K}_{i,i} = \mathcal{K}_{i_x,i_x} = \mathcal{K}_{i_y,i_y} = 1 \\
&\qquad\qquad \mathcal{K}_{i,j} = 0, \ \ pour\ tout \ \ j \neq i \\
&\qquad\qquad \mathcal{K}_{i_x,j} = 0, \ \ pour\ tout \ \ j \neq i_x \\
&\qquad\qquad \mathcal{K}_{i_y,j} = 0, \ \ pour\ tout \ \ j \neq i_y
\end{aligned}
$$

Chapitre 3

Problèmes elliptiques

Sommaire

3.1 Problème du potentiel **58**
3.1.1 Équation de Poisson 58
3.1.2 Approximation de Galerkin et estimation d'erreur 59
3.1.3 Résultats numériques 61
3.2 Problème biharmonique **62**
3.2.1 Équation du bilaplacien 62
3.2.2 Approximation de Galerkin et analyse d'erreur . 63
3.2.3 Résultats numériques 66
3.3 Équilibre du plasma dans un tokamak **67**
3.3.1 Équation de Grad Shafranov 67
3.3.2 Équilibre dans un Tokamak 71
3.3.3 Équations discrètes 74
3.3.4 Résultats numériques 75

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la validation de l'implémentation numérique de la méthode des éléments finis CT, en étudiant différents problèmes elliptiques. D'abord on étudiera l'équation de Poisson qui est un exemple prototype des équations aux dérivées partielles. Il nous permettra de rappeler quelques notions générales de la méthode des éléments finis. Ensuite, on s'intéressera à la résolution d'un problème bi-harmonique, où nous montrerons l'intérêt d'appliquer la méthode de Clough-Tocher pour obtenir une approximation conforme du problème. Pour finir, on étudiera le problème d'équilibre du plasma dans les tokamks. Cet équilibre est modélisée par une équation elliptique non linéaire : l'équation de Grad Shafranov.

3.1 Problème du potentiel

3.1.1 Équation de Poisson

On considère le problème suivant :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ supposé polygonal, de frontière $\partial\Omega$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. On étudie le problème de Dirichlet suivant : Trouver une fonction $u \in C^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ sur } \ \Omega \\ \quad u = g \ \text{ sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

On rappelle le théorème de trace suivant qui est prouvé dans beaucoup de manuel éléments finis comme par exemple dans [57] Théorème 1.3-1 pg 21.

Théorème 3.1.1. ***(Existence de l'opérateur trace)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, alors l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\bar{\Omega}$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Et l'application $\gamma : v \mapsto \gamma v = v_{|\partial\Omega}$ de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $C^0(\partial\Omega)$ se prolonge par continuité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Notons que $\gamma(H^1(\Omega)) \subset L^2(\partial\Omega)$ mais $\gamma(H^1(\Omega)) \neq L^2(\partial\Omega)$. On note par

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma(H^1(\Omega))$$

Remarquons que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ alors $\bar{\Omega}$ est compact et donc toutes les fonctions C^∞ sont à support compact dans Ω. Et si sa frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne, alors $H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega), u_{|\partial\Omega} = 0\}$ est le noyau de l'opérateur γ (cf [57] Théorème 1.4-1 pg 25)

$$\text{Ker } \gamma = H_0^1(\Omega) \tag{3.2}$$

Comme $H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma(H^1(\Omega))$, avec γ l'application trace définie dans le théorème précédent, alors il existe une fonction $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ telle que $\gamma(\tilde{g}) = g$ sur $\partial\Omega$. Et on considère l'ensemble

$$K = \{u \in H^1(\Omega), u - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}$$

Suivant l'égalité (3.2), l'espace K est indépendant du choix de $\tilde{g}$. Il dépend uniquement de la condition aux limites g.

La détermination de la solution $u \in K$ du problème (3.1), revient donc à trouver $\tilde{u} = (u - \tilde{g}) \in H_0^1(\Omega)$, solution de la formulation variationnelle suivante

Trouver $\tilde{u} \in V$ tel que :

$$a(\tilde{u}, v) = L(v) \ \ \forall\, v \in V \tag{3.3}$$

avec $V = H_0^1(\Omega)$, l'espace des fonctions tests. La norme associée à cet espace sera notée $\|.\|_V$,

$$a(\tilde{u}, v) = \int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v$$

$$L(v) = \int_\Omega fv - \int_\Omega \nabla\tilde{g}.\nabla v$$

et $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ une fonction à construire.

En dimension 2, il n'est toujours pas facile de construire la fonction $\tilde{g}$. Dans la pratique, nous allons remplacer le deuxième terme de $L(v)$ par une intégrale de pénalisation au bord (voir section pénalisation du chapitre (2)) qui sera introduite dans les deux membres de l'équation (3.3). Ainsi, les applications a et L deviennent :

$$a(\tilde{u}, v) = \int_\Omega \nabla\tilde{u}.\nabla v + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\epsilon}\tilde{u}v$$

$$L(v) = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\epsilon}gv$$

avec $\epsilon \to 0$.

Dans la suite, on omettra les tildes dans la variables u pour simplifier les notations.

3.1.2 Approximation de Galerkin et estimation d'erreur

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω. On note par V_h un espace approché de dimension finie associé à cette triangulation. L'approximation Galerkin standard du problème (3.3) consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \ \ \forall\, v_h \in V_h \tag{3.4}$$

Cette approximation est dite conforme si $V_h \subset V$. Cette condition est naturellement satisfaite quand on engendre l'espace V_h par des fonctions de base de classe au moins C^0. Les éléments finis de Lagrange par exemple permettent d'obtenir une approximation conforme de ce problème.

Nous appliquons la méthode des éléments finis de Clough-Tocher définie dans la section [section CT] pour approcher le problème (3.4). Cette méthode permet d'engendrer l'espace V_h par une base de fonctions de classe C^1, ce qui assure largement la conformité de l'approximation.

Rappelons le lemme de Céa qui a été annoncé dans le chapitre précédent.

Théorème 3.1.2. ***Lemme de Céa*** *[23]*
Soit $u_h \in V_h$ la solution approchée du problème (3.4) par les éléments finis CT et u la solution exacte du problème (3.3). On peut facilement montrer que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive. Donc par le théorème de Lax-Milgram il y a existence et unicité de la solution. Et on a l'estimation suivante :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

où M et α sont respectivement la constante de continuité et coercivité de $a(.,.)$ qui apparaissent dans le théorème de Lax-Milgram (voir chapitre (2), Théorème (2.1.1))

Ainsi l'ordre de convergence de la solution approchée u_h vers la solution exacte u, en utilisant la méthode des éléments finis CT, est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. ***Erreur d'approximation CT***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{T}_h$ une famille régulière de triangles CT. Soit $u_h \in V_h$ la solution approchée du problème (3.4) par les éléments finis CT et u la solution exacte du problème (3.3). On suppose que $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ Alors il existe une constante C tel que :

$$|u - u_h|_1 \leq Ch^2 |u|_3 \tag{3.5}$$

avec $|.|_k$ la semi-norme définie par

$$|\psi|_k = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha \psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad k = 0, 1, 2 \tag{3.6}$$

Preuve. : La preuve de ce théorème est immédiate par application du lemme de Céa (3.1.2) et l'estimation de l'erreur d'interpolation CT dans le théorème (2.2.1) du chapitre (2). □

En appliquant le Lemme d'Aubin-Nitsche (voir chapitre (2), théorème (2.1.3)), on obtient l'estimation suivante de l'erreur d'approximation en norme L^2 :

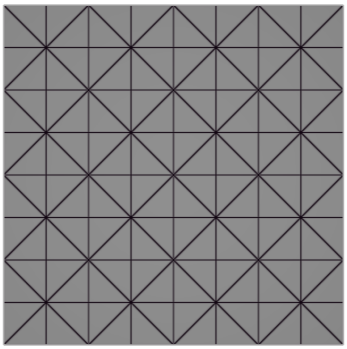


FIGURE 3.1 – Maillage structuré de triangles

Théorème 3.1.4. *On suppose les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. Alors il existe une constante C tel que*

$$||u - u_h||_0 \leq Ch^3|u|_3 \tag{3.7}$$

3.1.3 Résultats numériques

Nous allons résoudre le problème (3.1) par la méthode des éléments finis CT. La fonction source est donnée par :

$$f(x, y) = -2[6x^2(y-1)^2 + 6y^2(x-1)^2 + x^4 + y^4]$$

Et donc la solution exacte est définie par

$$u(x, y) = x^4(y-1)^2 + y^4(x-1)^2$$

On considère des conditions aux limites de Dirichlet homogène ($g = 0$). Le domaine Ω est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ qui sera discrétisé en maillage triangulaire de taille de référence $h = \frac{1}{N+1}$, $N = 16, 32, 64, 128$ (voir fig 4.1)

Les erreurs de convergences seront calculées par les semi-normes H^k de la différence entre la solution approchée et la solution exacte.

$$e = |u - u_h|_k, \quad k = 0, 1, 2 \tag{3.8}$$

Les intégrales (3.6) ainsi que les autres intégrales qui apparaissent dans les sections précédentes sont approchées en utilisant une formule de quadrature de Gauss à 6 points sur chaque sous triangle CT. Celle ci est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Notons que cette formule n'est pas exacte pour l'intégration du membre de droite de l'équation

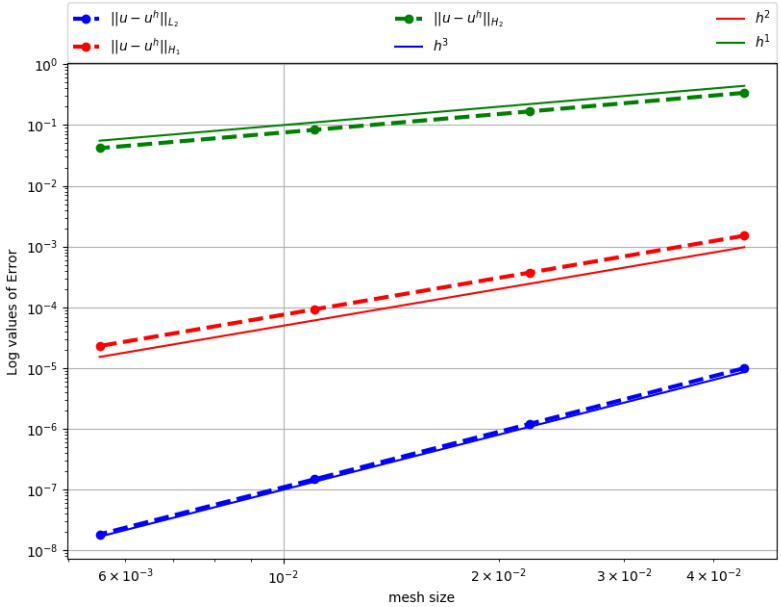


FIGURE 3.2 – Variation des semi-normes H^k $(k = 0, 1, 2)$ de l'erreur d'approximation du problème du potentiel (3.8)

(3.4) pour ce cas test, mais les résultats numériques montrent que cela n'influence pas les résultats de convergence.

Dans la figure (3.2) on montre la variation des semi-normes H^k de l'erreur (3.8) en fonction de la taille du maillage. On retrouve un ordre 3 pour la norme L^2 (k=0), d'ordre 2 pour la norme H^1 (k=1). Ce qui est conforme aux résultats théoriques. On retrouve aussi une convergence d'ordre 1 pour la norme H^2 (k=2).

3.2 Problème biharmonique

3.2.1 Équation du bilaplacien

On étudie le problème suivant :

Trouver une fonction $u \in C^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \text{ sur } \Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ supposé connexe, de frontière $\partial\Omega$, f est une fonction scalaire dans $L^2(\Omega)$, n le vecteur normal extérieur en tout point de la frontière $\partial\Omega$ et Δ^2 l'opérateur du bilaplacien défini par :

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

Ce type d'équation est couramment utilisé pour la modélisation des problèmes de plaques. Par exemple, pour modéliser la déformation d'une membrane, l'équation (3.9) s'écrit :

$$c\Delta^2 u = f$$

où f est l'ensemble des forces appliquées à la membrane, u représente sa surface et c est le coefficient de résistance à la flexion. c peut s'écrire sous la forme

$$c = \frac{Ee^3}{12(1-\nu)}$$

avec E le module de Young du matériau de la membrane, e l'épaisseur de la membrane et ν le coefficient de poisson du matériau.

On pose $V = H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2;\ u_{|\partial\Omega} = \dfrac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0\}$.
La formulation variationnelle associée à (3.9) s'écrit :
Trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u,v) = L(v) \ \ \forall\, v \in V \tag{3.10}$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta u.\Delta v$$

$$L(v) = \int_\Omega fv$$

3.2.2 Approximation de Galerkin et analyse d'erreur

Ayant une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω, on note par V_h l'espace approchée de dimension finie associé à celle-ci. L'approximation Galerkin de (3.10) s'écrit :
Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \ \ \forall\, v_h \in V_h \tag{3.11}$$

Contrairement au problème du potentiel précédent, la méthode des éléments finis de Lagrange ne permet pas d'obtenir une approximation conforme du problème (3.11). Pour satisfaire cette condition, il est nécessaire que V_h soit inclus dans $H^2(\Omega)$. L'utilisation des éléments finis de Clough-Tocher permet d'approcher le problème (3.11) de façon conforme. En effet, V_h étant engendré par des fonctions de base de classe C^1, on a naturellement l'implication $V_h \subset H^2$.

On présente les estimations d'erreur de la méthode CT pour l'approximation de Galerkin (3.11). Ces résultats sont issus des travaux de Ciarlet [26].

On introduit d'abord le résultat de continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$.

Lemme 3.2.1. *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive car l'application $v \to ||\Delta v||_0$ est une norme sur V équivalent à la norme $|.|_2$. Et on a [39] p 15*

$$||\Delta u||_0 = |u|_2 \qquad \forall u \in V \tag{3.12}$$

avec $|.|_m$, la semi-norme définie dans (3.6) et $||.||_0$ la norme L^2 sur Ω.

On a aussi le résultat de régularité suivant qui est démontré dans ([39] Theorem 1.11 p 17) :

Lemme 3.2.2. *Soit u la solution de (3.10). On suppose $u \in H^4(\Omega) \cap V$. Alors la majoration suivante est vérifiée*

$$|u|_4 \leq C||f||_0 \tag{3.13}$$

avec C une constante qui ne dépend que du domaine Ω.

Par application du Lemme de Céa (3.1.2), on a l'estimation suivante de l'erreur d'approximation.

Théorème 3.2.1. *Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{T}_h$ une famille régulière de triangles CT discrétisant Ω. Soit u la solution exacte du problème (3.10) dans V et u_h la solution approchée du problème de Galerkin (3.11) dans V_h. On suppose que $u \in H^3(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C tel que*

$$|u - u_h|_2 \leq Ch|u|_3 \tag{3.14}$$

Preuve. : On pose $e = u - u_h$ Donc pour tout λ_h in V_h

$$||e||_2^2 = a(e,e) = a(e, u - \lambda_h) + a(e, \lambda_h - u_h)$$

donc par la propriété d'orthogonalité de la méthode de Galerkin et la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ dans V, on a

$$|e|_2^2 = a(e, u - \lambda_h) \leq |e|_2 |u - \lambda_h|_2$$

et la conclusion se déduit en prenant par exemple $\lambda_h = I_h u$ et utilisant l'estimation d'erreur d'interpolation CT (2.2.1). □

L'estimation de l'erreur en norme L^2 et H^1, utilise le Lemme standard de la dualité d'Aubin-Nitsche.

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathcal{T}_h$ une famille régulière de triangles CT discrétisant Ω. Soit u la solution exacte du problème (3.10) dans V et u_h la solution approchée du problème de Galerkin (3.11) dans V_h. On suppose que $u \in H^3(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. On a*

$$||u - u_h||_0 \leq C_0 h^2 |u|_3 \tag{3.15}$$

et

$$|u - u_h|_1 \leq C_1 h^{3/2} |u|_3 \tag{3.16}$$

où C_0 et C_1 sont des constantes qui ne dépendent que de la taille du maillage.

Preuve. : Commençons par démontrer l'inégalité (3.15).
Posons $e = u - u_h$. On introduit le problème dual suivant : Trouver $u^* \in V$ tel que :

$$a(\chi, u^*) = (\chi, e) \quad \forall\, \chi \in H_0^2(\Omega) \tag{3.17}$$

On note par u_h^* l'approximation de Galerkin de u^* dans V_h, vérifiant :

$$a(\chi_h, u_h^*) = (\chi_h, e) \quad \forall\, \chi_h \in V_h$$

On dénote par $e^* = u^* - u_h^*$, l'erreur d'approximation de u^* par la méthode de Galerkin. En prenant $\chi = e$ dans (3.17) et utilisant la définition du problème dual, on a

$$||e||_0^2 = a(e, u^*) = a(e, e^*) + a(e, u_h^*)$$

le dernier terme s'annule en utilisant la propriété d'orthogonalité de la méthode de Galerkin. Et à partir de la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ dans V, on a

$$||e||_0^2 = a(e, e^*) \leq C |e^*|_2 |e|_2$$

en appliquant le lemme de Céa pour e et e^*, on obtient :

$$||e||_0^2 = a(e, e^*) \leq C|e^*|_2|e|_2 \leq Ch^2|u^*|_3|u|_3$$

Ainsi, par application du lemme de régularité (3.13) au problème dual (3.17), on a $|\psi^*|_4 \leq C||e||_0$, ce qui implique que $|u^*|_3 \leq C||e||_0$. On obtient donc

$$||e||_0^2 \leq Ch^2||e||_0|u|_3$$

d'où la conclusion.

L'inégalité (3.16) se démontre facilement. Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} |e|_1^2 &= (\nabla e, \nabla e) \\ &= (e, \Delta e) \\ &\leq ||e||_0|e|_2 \end{aligned}$$

A partir des inégalités (3.14) et (3.15), on obtient

$$|e|_1^2 \leq C_1 h^2|u|_3 \, C_2 h|u|_3$$

D'où

$$|e|_1 \leq Ch^{3/2}|u|_3 \qquad \square$$

3.2.3 Résultats numériques

Dans cette section, on étudie numériquement l'ordre de convergence de l'approximation du problème (3.9) par la méthode des éléments finis CT. Pour ce faire, la fonction source f de (3.9) est choisie de sorte que la solution exacte soit

$$u(x, y) = x^2(y-1)^2y^2(x-1)^2$$

Le domaine de calcul Ω est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ qui sera discrétisé en maillage triangulaire de taille de référence $h = \frac{1}{N+1}$, $N = 16, 32, 64, 128$ (voir fig 4.1)

A chaque taille du maillage, on évaluera les semi-normes H^k des erreurs

$$e = |u - u_h|_k, \quad k = 0, 1, 2 \tag{3.18}$$

L'approximation numérique de ces intégrales sera obtenue à partir d'une formule de quadrature de Gauss à 6 points sur chaque sous triangle CT. Celle ci est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égale à 4. Compte tenu du degré du polynôme représentant la fonction source f, on

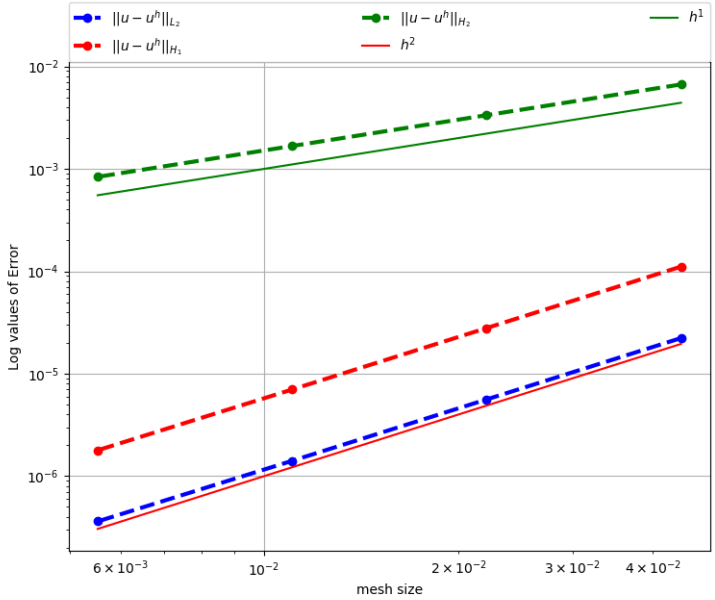


FIGURE 3.3 – Variation des semi-normes H^k $(k = 0, 1, 2)$ de l'erreur d'approximation du problème du bi-harmonique (3.18)

remarque que cette quadrature suffit pour calculer le membre de droite de l'équation (3.11).

Dans la figure (3.3) on montre la variation des semi-normes H^k de l'erreur (3.8) en fonction de la taille du maillage. On retrouve des ordres de convergences conformes aux résultats théoriques pour les normes L^2 et H^2. A savoir l'ordre 2 et 1 respectivement. Quant à la norme H^1 on une convergence d'ordre 2 au lieu de $3/2$ comme prévu dans les résultats théoriques (3.16). Ce résultat meilleur que prévu est peut être dû au fait que la solution exacte choisie est un polynôme de faible degré.

3.3 Équilibre du plasma dans un tokamak

3.3.1 Équation de Grad Shafranov

L'équilibre de la MHD est décrite par les équations de Maxwell d'une part et d'autre part, l'équilibre statique du plasma. C'est à dire que la vitesse du plasma est supposée égale à zéro ($v = 0$). On obtient donc les équations d'équilibre suivantes :

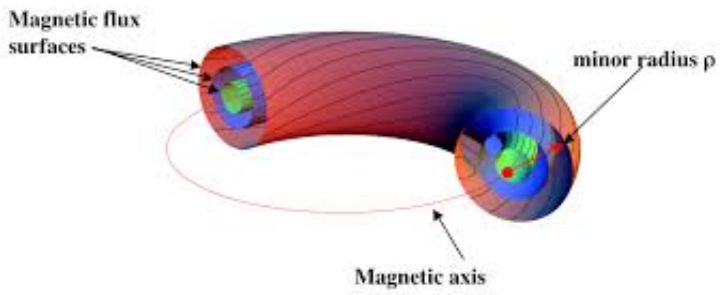


FIGURE 3.4 – Surface magnétique du plasma dans les tokamaks [6]

$$\begin{cases} \nabla \times \left(\dfrac{\mathbf{B}}{\mu}\right) &= \mathbf{J} \qquad (3.19.a) \\ \nabla.\mathbf{B} &= 0 \qquad (3.19.b) \\ \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \nabla P \quad (3.19.c) \end{cases}$$

où P est la pression cinétique, $\mathbf{B}$ le champs magnétique , $\mathbf{J}$ la densité du courant du plasma et μ, la perméabilité magnétique (que l'on considérera ici constante équivalente à la perméabilité du vide).

L'équation (3.19.c) signifie qu'à l'équilibre, la pression est égale à la force de Lorentz. On en déduit aussi les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{B}.\nabla P = 0 \\ \mathbf{J}.\nabla P = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Ainsi, pour un plasma à l'équilibre, les lignes de champ et de courant reposent sur des surfaces isobares (pression constante) ; ces surfaces, générées par les lignes de champ, sont appelées surfaces magnétiques. La géométrie toroïdale des tokamaks s'explique par le fait qu'elle permet contenir ces surfaces magnétiques dans un volume borné. Ces surfaces forment une famille de tores emboîtés (voir figure 3.4). Le tore le plus interne dégénère en une courbe qui est appelée axe magnétique.

L'équilibre de Grad Shafranov consiste à rajouter aux équations (3.19), une condition de symétrie axiale dans la direction toroïdale. Il s'agit d'imposer la condition ($\dfrac{\partial}{\partial \phi} = 0$), dans le système de coordonnées cylindriques (R, ϕ, Z) (voir figure 3.5).

Le domaine de calcul Ω sera défini par

$$\Omega = \{(R, Z) \in \mathbb{R}^2; R > 0\} \tag{3.21}$$

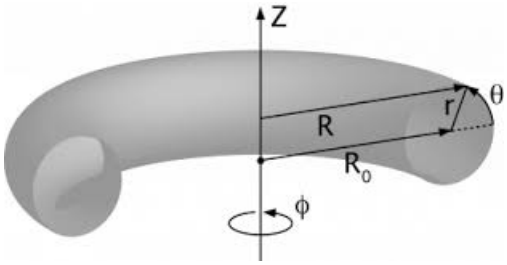


FIGURE 3.5 – Coordonnées toroïdales dans les tokamaks [4]

En introduisant le vecteur potentiel, on peut écrire le système (3.19) sous forme d'une équation scalaire. En effet, le champs magnétique $\mathbf{B}$ est tel que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3.22}$$

avec $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_R, \mathbf{A}_\phi, \mathbf{A}_Z)$ un vecteur potentiel.

Puisque $\dfrac{\partial \mathbf{A}_R}{\partial \phi} = \dfrac{\partial \mathbf{A}_Z}{\partial \phi} = 0$, la décomposition de (3.22) suivant les composantes de $\mathbf{B}$ donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_R &= -\frac{\partial \mathbf{A}_\phi}{\partial Z} \\ \mathbf{B}_Z &= \frac{1}{R}\frac{\partial R\mathbf{A}_\phi}{\partial R} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Introduisons une fonction de courant ψ définie par

$$\psi = R\mathbf{A}_\phi$$

L'équation (3.23) devient

$$\begin{cases} \mathbf{B}_R = & -\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \psi}{\partial Z} \\ \mathbf{B}_Z = & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \psi}{\partial R} \end{cases}$$

Si, on décompose le champs magnétique en un champs poloïdal $\mathbf{B}_p$ et un champs toroïdal $\mathbf{B}_\phi$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \quad \mathbf{B}_\phi \mathbf{e}_\phi + \mathbf{B}_p \\ \mathbf{B}_p = & \quad \frac{1}{R}[\nabla\psi \times \mathbf{e}_\phi] \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec $\mathbf{e}_\phi$ un vecteur unitaire dans la direction toroïdale.

Compte tenu de l'hypothèse d'axisymetrie, on peut vérifier facilement que cette écriture de $\mathbf{B}$ en fonction de la fonction de courant ψ permet de satisfaire de façon naturelle, la condition de divergence nulle (3.19.b).

En introduisant les notations (3.24) dans l'équation (3.19.a), on obtient l'expression suivante pour la densité du courant :

$$\mu\mathbf{J} = -\frac{1}{R}\Delta^*\psi\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R}\nabla(R\mathbf{B}_\phi) \times \mathbf{e}_\phi \tag{3.25}$$

avec $\Delta^*\psi$, l'opérateur de Grad Shafranov défini par :

$$\Delta^*\psi = R\nabla^\star.\left(\frac{1}{R}\nabla^\star\psi\right) = R\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)\right] \tag{3.26}$$

où $\nabla^\star$ désigne le vecteur gradient en coordonnées cartésiennes suivant les variables (R, Z).

$$\nabla^\star\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial R}, \frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)$$

et la divergence $\nabla^\star.$ est définie comme la divergence cartésienne suivant les variables (R, Z)

$$\nabla^\star.\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}_R}{\partial R} + \frac{\partial\mathbf{u}_Z}{\partial Z}$$

La projection de l'équation (3.19.c) dans la direction du champs $\mathbf{B}$ donne $\mathbf{B}.\nabla P = 0$ ce qui équivaut à :

$$(\nabla P \times \nabla\psi).\mathbf{e}_\phi = (\nabla\psi \times \mathbf{e}_\phi).\nabla P = 0$$

Ceci revient à dire que $\nabla\psi$ et ∇P sont colinéaires, et que les iso-contours de ψ se confondent avec les les surfaces magnétiques (surfaces isobares). On peut donc écrire

$$P = P(\psi)$$

De façon analogue, la projection de (3.19.c) suivant la direction du courant $\mathbf{J}$ donne $\mathbf{J}.\nabla P = 0$, ce qui se traduit d'après (3.25) par :

$$(\nabla P \times \nabla(R\mathbf{B}_\phi)).\mathbf{e}_\phi = (\nabla(R\mathbf{B}_\phi) \times \mathbf{e}_\phi).\nabla P = 0$$

Donc $R\mathbf{B}_\phi$ est aussi constante sur chaque surface magnétique. Il existe une fonction scalaire F telle que

$$R\mathbf{B}_\phi = F(\psi)$$

Cette fonction F représente la partie du courant poloïdale (3.25).

L'équation de Grad Shafranov est obtenue en projetant l'équation du moment (3.19.c) dans la direction de $\nabla\psi$. En introduisant les fonctions de flux $P(\psi)$ et $F(\psi)$, on obtient

$$-\Delta^*\psi = \mu_0 R^2 \frac{dP}{d\psi} + F\frac{dF}{d\psi} \tag{3.27}$$

On constate à partir de l'expression du courant (3.25), que les termes de droite de (3.27) représentent la composante toroïdale de la densité de courant du plasma.
La donnée des fonctions de flux $P(\psi)$ et $F(\psi)$, ainsi que les conditions aux limites associées à la variables ψ, permettent de définir le type d'équilibre dans un Tokamak.

3.3.2 Équilibre dans un Tokamak

Dans un Tokamak, on distingue deux régions : la région du "corps du plasma" (*Plasma core*) où les surfaces de flux sont toutes fermées, et la région dite "couche de frottement" (*The Scrape Off-Layer*) où les surfaces de flux s'ouvrent vers les parois du tokamaks, plus précisément, ces surfaces ouvertes dirigent les flux du plasma vers ce qu'on appelle "les composantes de revêtement du plasma" (*Plasma Facing Components*). Ces deux régions sont séparés par la dernière surface fermée appelée *séparatrice* ou *bords du plasma* (voir figure 3.6). C'est cette surface de flux qui définit la frontière du plasma.

Ainsi, pour étudier l'équilibre du plasma dans les tokamaks, on distingue deux types de configurations. Une première, dite "configuration avec Limiteur" où la frontière du plasma est limitée par une structure matérielle (le limiteur) (3.7.a). On peut citer par exemple, le cas du Tokamak TORE SUPRA à Cadarache (France). La deuxième est la " configuration avec déviateur ou point X", où une bobine axisymétrique supplémentaire est introduite près du plasma de sorte que le champ magnétique poloïdal disparaisse à une position radiale choisie. Cela forme un point X dans le flux poloïdal, voire figure (3.7.b). Ce point X est un point selle de la fonction de courant ψ. La séparatrice est la surface de flux qui se forme à ce point X. La position de ce point joue un rôle important sur la stabilité du plasma. En effet, comme les particules suivent les lignes de champs, dès que le plasma s'échappe de la séparatrice, il est rapidement transporté vers les déviateurs par les lignes de champs ouvertes. La plupart de l'énergie perdue par la séparatrice arrive aux points de contact entre les déviateurs

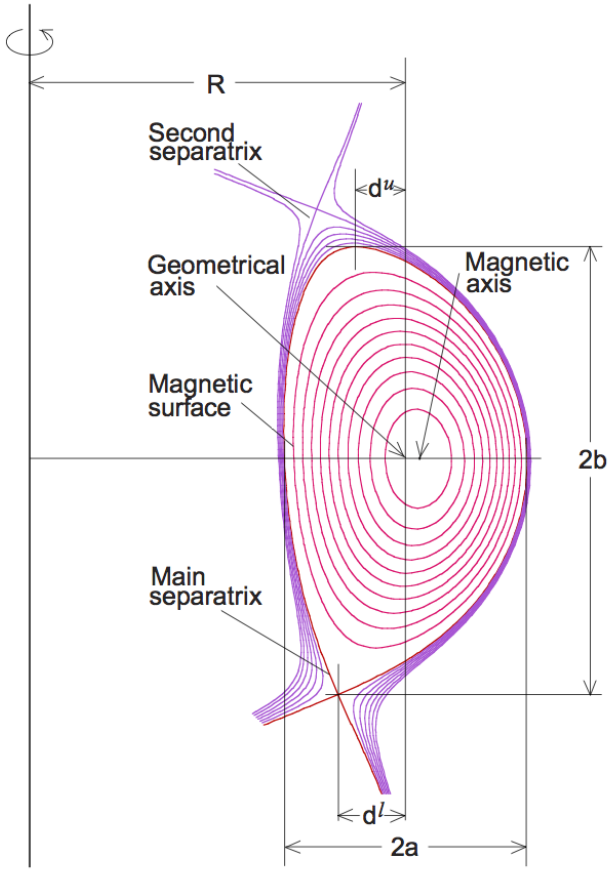


FIGURE 3.6 – Schéma de la géométrie du tokamak, incluant la séparatrice [4]

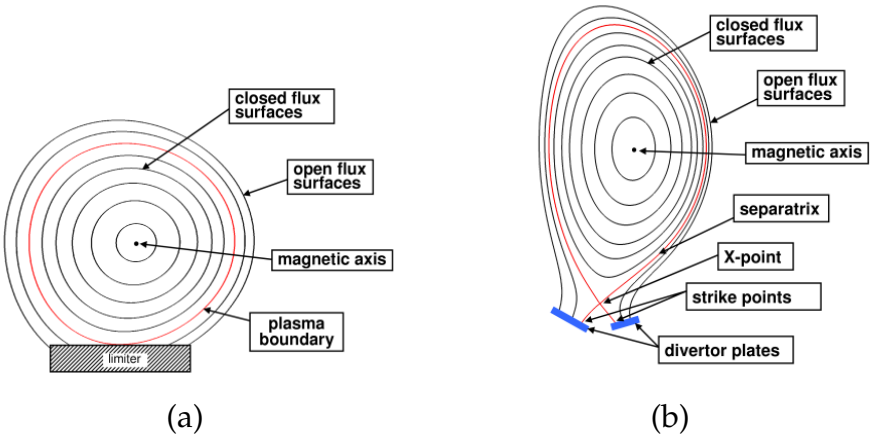


FIGURE 3.7 – Bords du plasma dans les tokamaks :(a) configuration avec limiteur, (b) configuration avec point X [54]

et les lignes ouvertes. Ces points sont appelés "points d'impact" (*strike points*). La plupart des machines construites à partir de 1980 sont des tokamaks avec une configuration avec point X. C'est le cas par exemple du tokamak JET à Abingdon, au Royaume-Uni.

La région $\Omega_p \subset \Omega$ du plasma dans un tokamak est définie par :

$$\Omega_p = \{x \in \Omega, \psi(x) \geq \psi_X\} \tag{3.28}$$

où soit $\psi_X = \psi(X)$, la valeur de ψ au point X, dans le cas d'une configuration avec point X, soit ψ_X est une valeur définissant l'isovaleur de la ligne de flux limitant le plasma (dans le cas d'une configuration limiteur), et le domaine de calcul Ω est défini dans (3.21).

Supposons que ψ est donnée avec des conditions de Dirichlet h au bord $\Gamma = \partial\Omega$ qui est la section d'une contour ne contenant pas des bobines. L'équilibre de Grad Shafranov (3.27) est reformulée dans les tokamaks, pour prendre en compte le bord du plasma. On obtient l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\nabla^\star.\left(\dfrac{1}{R}\nabla^\star\psi\right) = \left(\mu_0 R\dfrac{dP(\bar{\psi})}{d\psi} + \dfrac{F(\bar{\psi})}{R}\dfrac{dF(\bar{\psi})}{d\psi}\right)\chi_{\Omega_p} \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \psi = h \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.29}$$

où χ_{Ω_p} est la fonction caractéristique sur Ω_p et $\bar{\psi}$ est la valeur du flux normalisé qui est définie par :

$$\bar{\psi} \equiv \bar{\psi}(\psi) := \frac{\psi - \psi_A}{\psi_X - \psi_A} \tag{3.30}$$

avec

$$\psi_A = \min_{x\in\Omega} \psi(x) \quad \text{ou} \quad \psi_A = \max_{x\in\Omega} \psi(x) \quad \text{selon la normalisation choisie.}$$

Cette valeur de ψ_A permet de positionner l'axe magnétique du plasma dans le domaine. $\bar{\psi}$ est choisit de façon à définir les fonctions P' et FF' sur $[0; 1]$.

3.3.3 Équations discrètes

On s'intéresse à la discrétisation spatiale de l'équation de Grad Shafranov (3.29) par la méthode des éléments finis CT.

On pose par $V = H_0^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel. La formulation variationnelle de (3.29) s'écrit :
Trouver $\psi \in V$ tel que :

$$a(\psi, \xi) = L(\xi) \qquad \forall\, \xi \in V \tag{3.31}$$

avec

$$a(\psi, \xi) = \int_\Omega \frac{1}{R} \nabla^\star \psi . \nabla^\star \xi dRdZ$$

$$L(\xi) = \int_\Omega \left(\mu_0 R \frac{dP(\bar{\psi})}{d\psi} + \frac{F(\bar{\psi})}{R} \frac{dF(\bar{\psi})}{d\psi} \right) \chi_{\Omega_p} \xi dRdZ$$

Ainsi, pour obtenir l'approximation Galerkin de (3.31), on se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω, on définit par V_h l'espace fonctionnel de dimension finie associé à cette triangulation. Le problème de Galerkin associé à (3.31) s'écrit :
Trouver $\psi_h \in V_h$ tel que :

$$a(\psi_h, \xi_h) = L_h(\xi_h) \qquad \forall\, \xi_h \in V_h \tag{3.32}$$

$$L_h(\xi_h) = \int_\Omega \left(\mu_0 R \frac{dP(\bar{\psi}_h)}{d\psi} + \frac{F(\bar{\psi}_h)}{R} \frac{dF(\bar{\psi}_h)}{d\psi} \right) \chi_{\Omega_p} \xi_h dRdZ$$

Le problème (3.32) est une équation non linéaire que nous allons résoudre par la méthode itérative de Picard :

$$a(\psi_h^{n+1}, \xi_h) = L^n(\xi_h) \qquad \forall\, \xi_h \in V_h \tag{3.33}$$

avec

$$L_h^n(\xi_h) = \int_\Omega \left(\mu_0 R \frac{dP(\bar{\psi}_h^n)}{d\psi} + \frac{F(\bar{\psi}_h^n)}{R} \frac{dF(\bar{\psi}_h^n)}{d\psi} \right) \chi_{\Omega_p} \xi_h dRdZ$$

Néanmoins, l'évolution du membre de droite nécessite de redéfinir ψ_X et ψ_A (3.30) à chaque itération de Picard. L'utilisation de la méthode des éléments de Clough-Tocher est de grand intérêt pour répondre à ce type de problème. En effet, cette méthode prend en compte le gradient de la fonction dans ses degrés de liberté. Pour obtenir les points critiques de la fonction, il suffira de résoudre un problème de point fixe en 2D pour le gradient. C'est à dire, à chaque itération de Picard, on résout l'équation

$$\nabla \psi_h^n = 0 \qquad \text{sur } \Omega \tag{3.34}$$

Nous appliquerons la méthode de Newton pour résoudre l'équation (3.34) à chaque itération de Picard.

Pour traiter les conditions aux limites de Dirichlet non homogène, on appliquera la technique de pénalisation utilisée dans le paragraphe (3.1.1). Ainsi, les applications a et L de l'égalité (3.31) seront modifiées par :

$$a(\psi, \xi) = \int_\Omega \frac{1}{R} \nabla^\star \psi . \nabla^\star \xi dRdZ + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\epsilon} \psi \xi$$

$$L(\xi) = \int_\Omega \left(\mu_0 R \frac{dP(\bar{\psi})}{d\psi} + \frac{F(\bar{\psi})}{R} \frac{dF(\bar{\psi})}{d\psi} \right) \chi_{\Omega_p} \xi dRdZ + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\epsilon} h \xi$$

3.3.4 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, on résout numériquement l'équation (3.29) par la méthode éléments finis de Clough-Tocher décrite dans la section (2.2.2). Dans un premier temps, un problème avec solution analytique sera étudié : l'équilibre de Soloviev. Il permettra de valider l'implémentation des termes de l'équation (3.29). Ensuite on étudiera deux cas tests d'équilibre des tokamaks, une avec une configuration limiteur et une autre avec un point X. Les résultats seront comparés avec ceux d'autres codes MHD utilisés dans la communauté des plasmas de fusion.

Problème à frontière fixe : Équilibre de Soloviev

Dans ce cas test, le domaine du plasma Ω_p est le domaine Ω de calcul tout entier. Il est délimité par la frontière définie par :

$$\partial\Omega = \left\{ (R, Z) \in \mathbb{R}^2, R = \sqrt{1 + cos\theta}, Z = \frac{sin\theta}{2}, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

La pression P et la fonction de flux toroïdale F sont définies par

$$P(\psi) = \frac{1}{\mu_0}\psi$$

$$F(\psi) = \sqrt{2\psi}$$

ainsi, la solution exacte du problème (3.29) est :

$$\psi(R, Z) = \frac{1 - 4Z^2 - (R^2 - 1)^2}{8} \tag{3.35}$$

Soit donc à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\nabla^\star . \left(\frac{1}{R} \nabla^\star \psi \right) = R + \frac{1}{R} & \text{dans} \quad \Omega \\ \psi = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.36}$$

Dans la figure (3.8.b), on présente la solution approchée du problème (3.36).

La solution analytique de ce problème étant connue, on effectue une étude de convergence de la méthode CT. Le raffinement du maillage (3.8) s'effectue en subdivisant les triangles par 3. Les résultats de convergence sont présentés dans la figure (3.9). On obtient une convergence d'ordre 1 pour la norme H^2, d'ordre 2 pour la norme H^1 et une convergence d'ordre 3 pour la norme L^2. L'équilibre de Soloviev est un problème elliptique du second ordre, l'analyse théorique de convergence de la méthode CT pour ce problème est la même que celle du laplacien (voir paragraphe paragraphe (3.1.1)). Ce qui explique bien ces résultats.

Configuration avec limiteur

On compare les résultats utilisant les éléments finis CT sur un cas test réalisé avec le code JOREK qui utilisent des éléments finis d'Hermite Bezier. JOREK [44, 29] est un code MHD utilisé par la communauté des plasma de fusion pour des simulations dans les tokamaks tels que JET

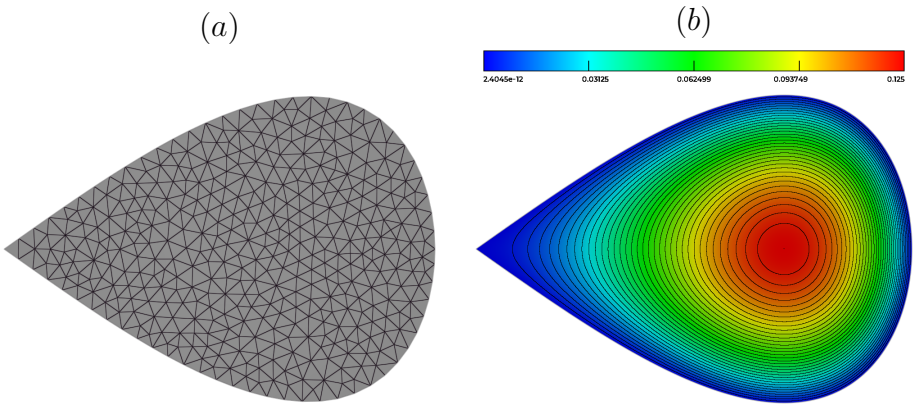


FIGURE 3.8 – (a) Maillage du domaine de calcul pour le problème de Soloviev, (b)Allure de la solution d'équilibre

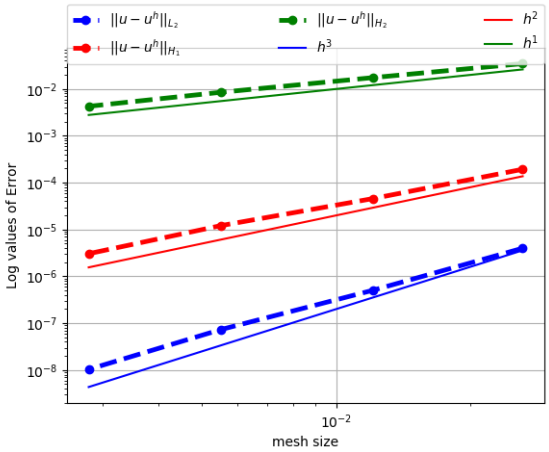


FIGURE 3.9 – Variation des semi-normes H^k $(k = 0, 1, 2)$ de l'erreur d'approximation du problème d'équilibre de Soloviev (3.36)

ou TORE SUPRA. Nous utiliserons la solution JOREK comme solution de référence pour valider nos résultats.
Le domaine de calcul est le cercle centré en $(10, 0)$ et de rayon 1. La frontière du plasma est la ligne de niveau 0 de la fonction ψ ($\psi_X = 0$). La valeur de ψ_X étant fixée, la redéfinition du flux normalisé (3.30) revient à recalculer uniquement la position de l'axe magnétique ψ_A.

Le flux toroïdal F et la pression P sont tels que :

$$F(\psi) = \sqrt{G(\psi)}$$

$$P(\psi) = \rho T$$

où la température T, la densité ρ et G sont des fonctions polynomiales définies par :

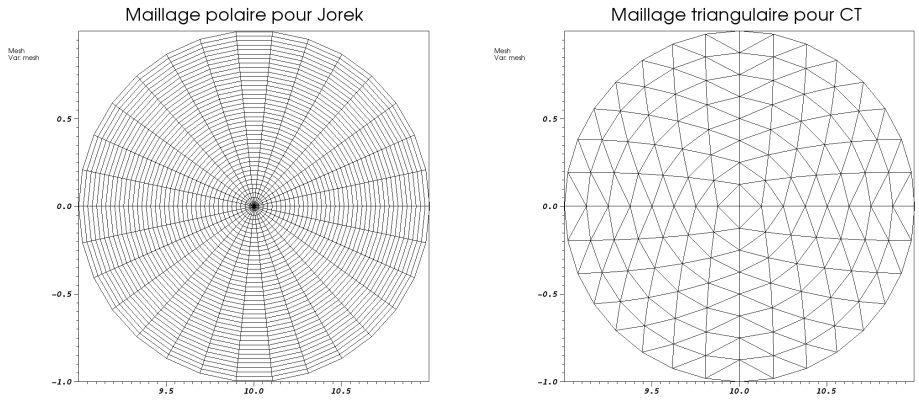
$$\begin{cases} T(\bar{\psi}) \simeq T^{(0)} \left(1 + \sum_{s=1}^{s_p} T^{(s)} (\bar{\psi})^s\right) \\ \rho(\bar{\psi}) \simeq \rho^{(0)} \left(1 + \sum_{s=1}^{s_p} \rho^{(s)} (\bar{\psi})^s\right) \\ G(\bar{\psi}) \simeq G^{(0)} + 2(\psi_X - \psi_A) \sum_{s=1}^{s_p} G^{(s)} \frac{(\bar{\psi})^s}{s} \end{cases} \tag{3.37}$$

avec $T^{(s)}$, $\rho^{(s)}$, $G^{(s)}$ des paramètres. Ces derniers sont choisis de sorte que la valeur des polynômes soit négligeable pour $\bar{\psi} > 1$.

Le maillage utilisé dans JOREK est un maillage polaire (voir figure 3.10.a). Nous avons discrétisé un maillage triangulaire (figure 3.10.b) avec un même nombre approximatif de points pour pouvoir comparer les deux solutions.

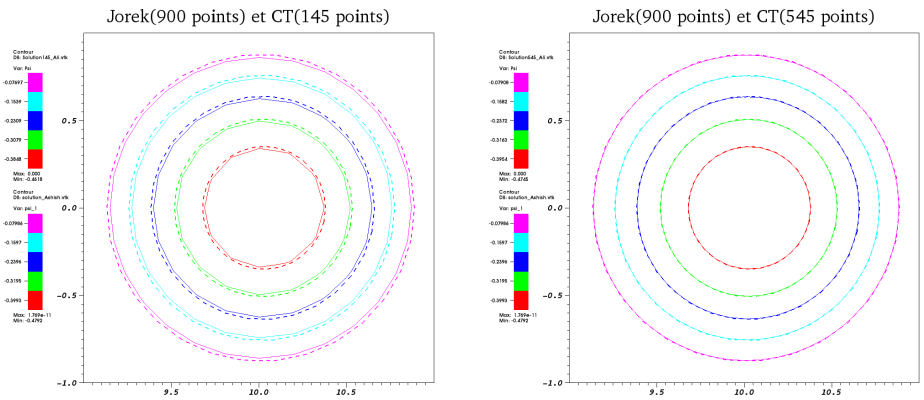
Dans la figure (3.11), on superpose la solution obtenue par JOREK dans un maillage à 900 points avec des solutions CT obtenues sur des maillages de raffinement différents. Cette superposition est gérée par le logiciel "visit" qui utilise une interpolation de type P1 des solutions. Dans cette figure, on voit bien qu'avec un maillage triangulaire à 545 points, la solution CT coïncide pratiquement avec la solution de référence.

Dans la table (3.1), on represente les positions de l'axe magnétique obtenues par le code JOREK dans un maillage à 900 points et le code CT dans un maillage à 545 points. On retrouve les mêmes positions et valeurs de ψ_A à 10^{-2} près.



(a) (b)

FIGURE 3.10 – (a) Maillage polaire, (b) Maillage triangulaire



(a) (b)

FIGURE 3.11 – Supperposition des solutions CT et JOREK : (a) JOREK à 900 points et CT à 145 points, (b) JOREK à 900 points et CT à 545 points

	Position	value of ψ_A
JOREK (900 points)	(10.0310671, 0.0000000)	-0.47919978
CT (545 points)	(10.0308657, -0.0000718)	-0.47512708

TABLE 3.1 – Comparaison des positions de l'axe magnétique entre les codes JOREK et CT, dans le cas d'une configuration avec limiteur

Configuration avec point X

On étudie un cas d'équilibre correspondant à une expérience réalisé dans le tokamak JET (Joint Equilibrium Torus, à Abingdon). Le calcul de cet équilibre a été réalisé avec le code EFIT(Equilibrium Fitting) [ref]. Comme son nom l'indique, ce code calcule l'équilibre du plasma en utilisant des mesures réalisées directement dans l'enceinte du tokamak. Il utilise une discrétisation de type différence finies pour approcher l'équation de Grad-Shafranov (3.29).
On utilisera les résultats d'équilibre du code EFIT comme conditions initiales de la méthode de Picard (3.33).

Le domaine de calcul est le rectangle $\Omega = [1.5, 4.5] \times [-2, 2.5]$ discrétisé en 65×65 points. A l'équilibre, le code EFIT fournit les allures des fonction de flux P' et FF' évaluées en fonction du flux normalisé $\bar{\psi}$ (3.30), de façon uniforme dans une grille linéaire allant de l'axe magnétique jusqu'à la position du point X. Pour conserver les même profils, nous effectuerons une interpolation spline cubique de ces données en toute valeur de $\bar{\psi}$ sur les nœuds du maillage. Dans la figure (3.12), on représente les données P' et FF' puis ses interpolations sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour imposer les conditions aux limites, on utilisera les valeurs de la solution d'équilibre du code EFIT aux nœuds du bords. Ces conditions aux limites seront traitées par une méthode de type pénalisation (voir section pénalisation).

Pour initialiser la méthode de Picard (3.33), on a besoin des valeurs et du gradient de la fonction initiale aux nœuds du maillage. La solution d'équilibre d'EFIT est une solution de type différence finie où seules les valeurs de la fonction aux nœuds sont connues. Pour avoir le gradient de la fonction initiale, on considérera cette solution d'EFIT comme une solution P1 sur les triangles et on approchera le gradient sur chaque nœud, par une moyenne des dérivées sur tous les triangles voisins.

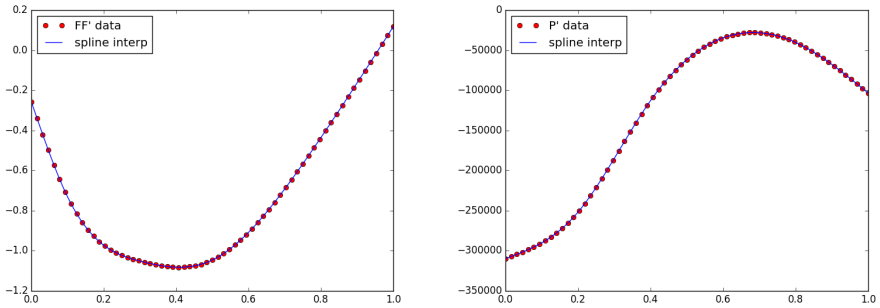


FIGURE 3.12 – Profile of $FF'(\psi)$ (left) and $P'(\psi)$ (right) for JET equilibrium and their spline interpolation in $[0, 1]$

Ce même cas test est réalisé avec un autre code MHD appelé "NICE" [34] *(Newton direct and Inverse Computation for Equilibrium)*. Ce code implémente une méthode de type éléments finis P1. Les résultats d'équilibres des trois codes sont représentés dans la figure (3.13). On peut voir dans cette figure que les trois solutions ont la même allure.

Bien que l'allure semble être la même pour les trois solutions, ces dernières ne coïncident pas vraiment. Dans la figure (3.14.a), on peut voir que les lignes de niveaux des solutions P1 et CT coïncident bien, contrairement aux solutions CT et EFIT, comme on peut le voir dans la figure (3.14.b). Cette différence est due au fait que dans le tokamak JET, des bobines extérieures sont présentes dans le domaine de calcul et elles fournissent des densités de courant externes qui influencent la position du point X et les conditions aux limites pour les calculs réalisés par le code EFIT. La position de ces bobines est illustrée dans la figure (3.15).

En reprenant ces calculs dans le domaine de la chambre à vide uniquement, où l'influence des bobines extérieurs est absente, on retrouve que les trois solutions CT, P1 et EFIT coïncident, voir figure (3.16.a) où nous avons superposé les solutions CT et P1 ; et figure (3.16.b) où nous avons superposé les solutions CT et EFIT. Ensuite, nous avons raffiné le maillage autour du point X et interpolé les trois solutions dans celui-ci. La figure (3.17.a) montre une superposition des lignes de niveaux des trois solutions autour du point X. En faisant un zoom autour de ce point (figure (3.17.b)), on voit bien que la frontière du plasma formée à partir de la solution CT est beaucoup plus lisse par rapport aux autres. Ce qui confirme l'intérêt d'utiliser des méthodes C^1 pour bien approcher le bord du plasma et calculer la position du point X précisément. On peut aussi voir dans cette

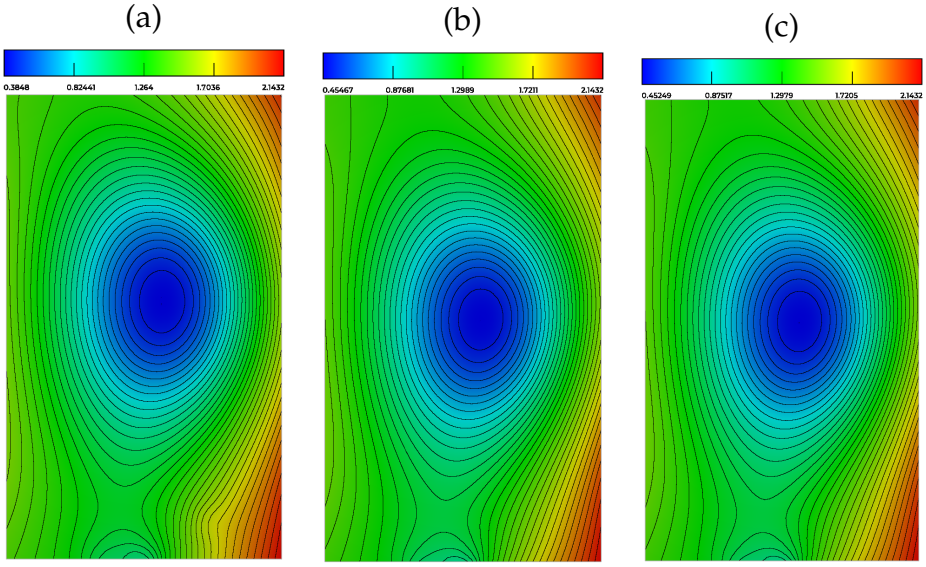


FIGURE 3.13 – Solutions d'équilibre du tokamak JET : (a) code EFIT, (b) code NICE et (c) code CT

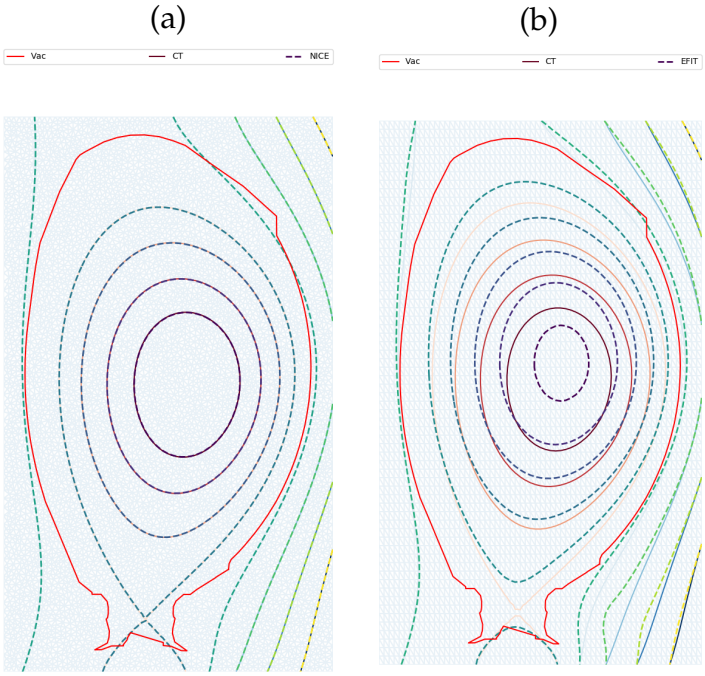


FIGURE 3.14 – Superposition des lignes de niveaux des solutions : (a) CT et P1 du code NICE, (b) CT et EFIT

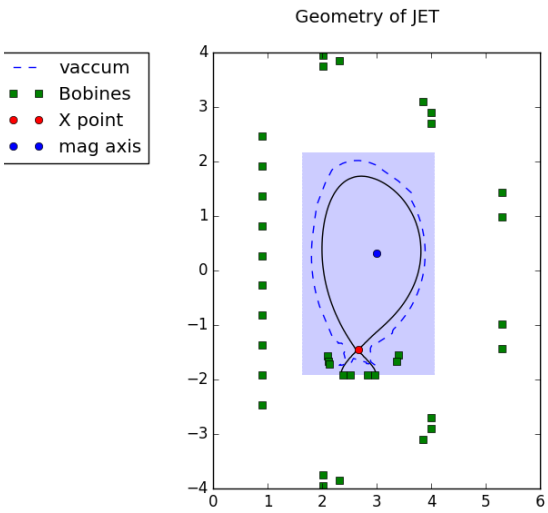


FIGURE 3.15 – Position des bobines extérieures dans le tokamak JET

figure que les courbes de niveau de la solution CT se coupent à un angle droit.

Les résultats de ces éléments finis pour le calcul de l'équilibre du plasma nous ont motivé avec des collègues de mon équipe, d'explorer une autre approche qui consiste à coupler ces éléments CT dans la région contenant le plasma avec des éléments finis P1 en dehors de la région du plasma. La continuité de la solution à l'interface de couplage est imposée de manière faible par une méthode de projection de Mortar. Cette approche permet facilement d'obtenir une régularité d'ordre élevé de l'approximation de la fonction flux dans le domaine couvert par le plasma, tout en préservant un maillage précis des structures géométriques dans le reste du domaine. Nous n'allons pas donner des détails sur cette approche dans ce travail. Toutefois, l'intégralité du rapport publié dans [30] peut se retrouver dans l'annexe (5.3.2).

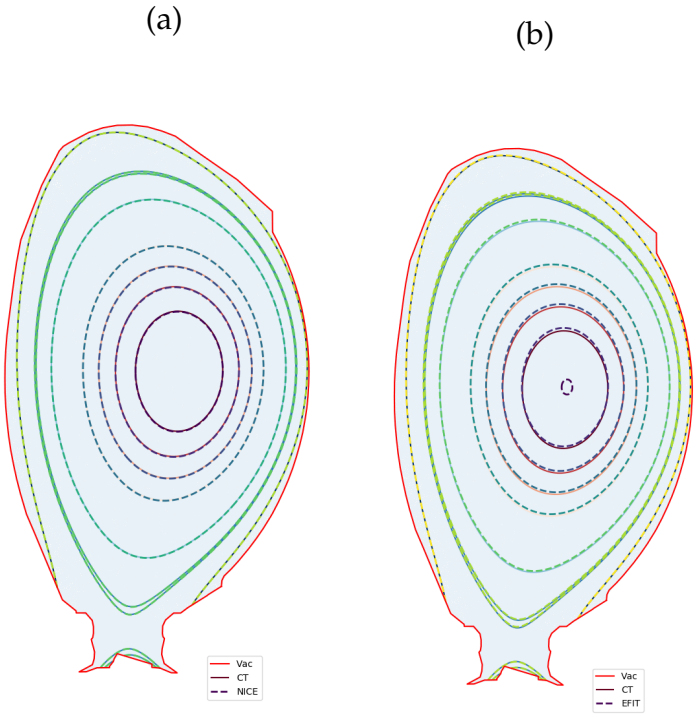


FIGURE 3.16 – Superposition des solutions dans le domaine de la chambre à vide : (a) CT et P1, (b) CT et EFIT

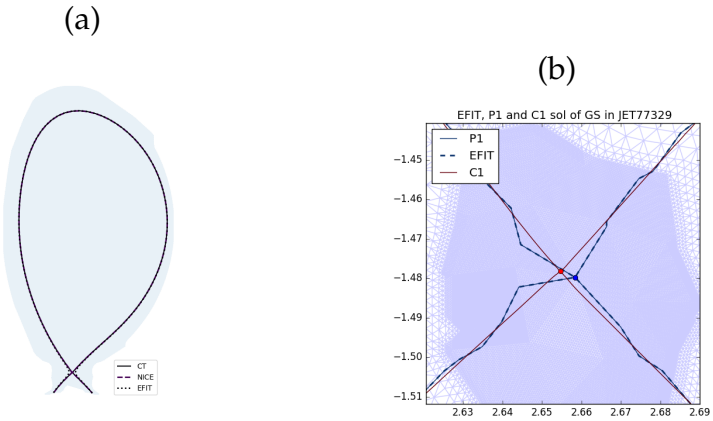


FIGURE 3.17 – (a) Superposition de la frontière du plasma pour les codes CT, EFIT et P1, (b) Zoom autour du point X

Chapitre 4

Formulation fonction de courant des équations de Navier Stokes incompressible

Sommaire

4.1 Équations primitives **87**
4.1.1 Préliminaires 87
4.1.2 Equations de Navier-Stokes avec les variables primitives 88
4.1.3 Caractérisation des fonctions à divergence nulle . 90
4.2 Formulation fonction de courant **90**
4.2.1 Formulation faible 90
4.2.2 Approximation de Galerkin et analyse d'erreur . 92
4.2.3 Discrétisation en temps 96
4.3 Résultats numériques **97**
4.3.1 Solutions manufacturées 98
4.3.2 Tourbillons de Green-Taylor 100
4.3.3 Cavité entrainée 103

Avant d'étudier le problème de la MHD incompressible introduit dans le paragraphe (1.3.3), on étudie dans ce chapitre, un sous modèle celui-ci : le problème de Navier-Stokes incompressible. On propose une formulation fonction de courant de ces équations, permettant de garantir de façon naturelle la condition d'incompressibilité de la vitesse du fluide. Une analyse théorique et numérique de convergence de la méthode CT, sera également présenté pour l'approximation de ces équations. Pour mettre en évidence la performance de la méthode CT pour l'étude de ce problème,

on examinera un cas test largement utilisé pour la validation des codes de calculs en mécanique de fluide : la cavité entrainée. Les résultats seront comparés avec ceux déjà présents dans la littérature.

4.1 Équations primitives

4.1.1 Préliminaires

On rappelle ici quelques définitions et notations qui seront utilisées dans ce chapitre. Ω dénotera un sous domaine borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. Un champs de vecteur sur Ω sera noté en fonte grasse. On note $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ la base cartésienne standard de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Si nécessaire, un vecteur 2D $\mathbf{u}$ peut être considéré comme un vecteur 3D avec une composante nulle le long du vecteur $\mathbf{k}$.
$L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable associé à la norme $||.||_0$. On note par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont ses dérivés, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$. On note par $||.||_m$ la norme associée à $H^m(\Omega)$, qui est définie par

$$||v||_m = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha v||_0^2 \right)^{1/2} \qquad k = 0, 1, 2, .. \tag{4.1}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$; nous avons utilisé la notation $\partial^\alpha v$ pour la dérivée partielle jusqu'à l'ordre $|\alpha|$ d'une fonction v. On définit par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$. $H_0^m(\Omega)$ sera associé à la semi-norme $|.|_m$ définie par

$$|v|_m = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |\partial^\alpha v|^2 \right)^{1/2} \qquad k = 0, 1, 2, .., m \tag{4.2}$$

Cette norme est équivalente à la norme $||.||_m$ dans $H_0^m(\Omega)$ [57].

Les normes d'un vecteur dans $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$ seront données par

$$||\mathbf{u}||_m = \left(||\mathbf{u}_1||_m^2 + ||\mathbf{u}_2||_m^2 \right)^{1/2} \qquad m = 0, 1, 2, .. \tag{4.3}$$

$$|\mathbf{u}|_m = \left(|\mathbf{u}_1|_m^2 + |\mathbf{u}_2|_m^2 \right)^{1/2} \qquad m = 0, 1, 2, .. \tag{4.4}$$

On définit les opérateurs, rotationnel vectoriel et scalaire en 2D par les expressions :

$$\mathbf{curl}\ \phi = (\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x}) \qquad \texttt{curl}\ \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{4.5}$$

On peut comprendre le scalaire $\texttt{curl}\ \mathbf{u}$ comme le vecteur $\texttt{curl}\ \mathbf{u}\ \mathbf{k}$.
Les identités suivantes sont facilement vérifiées :

$$\texttt{curl}\ (\mathbf{curl}\ \phi) = -\Delta\phi \quad \text{et} \quad \mathbf{curl}\ (\texttt{curl}\ \mathbf{u}) = -\Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{4.6}$$

On retrouve dans [39] Théorème 2.11 p 34, la formule de Green associée à ces opérateurs :

$$(\texttt{curl}\ \mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{u}, \mathbf{curl}\ \phi) =< \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \phi > \tag{4.7}$$

où $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$ dénote le scalaire $u_x n_y - u_y n_x$.
En appliquant cette formule de Green, avec $\mathbf{u} = \mathbf{curl}\ \chi$, on obtient :

$$(\texttt{curl}\ \mathbf{curl}\ \chi, \phi) - (\mathbf{curl}\ \chi, \mathbf{curl}\ \phi) =< \mathbf{curl}\ \chi \times \mathbf{n}, \phi >$$

soit aussi

$$(\mathbf{curl}\ \chi, \mathbf{curl}\ \phi) = -(\Delta\chi, \phi) - < \frac{\partial \chi}{\partial n}, \phi > \tag{4.8}$$

Le crochet de Poisson entre deux fonctions scalaires ϕ et χ sera défini par :

$$[\phi, \chi] = (\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial x}) \tag{4.9}$$

4.1.2 Equations de Navier-Stokes avec les variables primitives

L'écoulement d'un fluide incompressible dans un domaine Ω est décrit par le problème de Navier-Stokes suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \nu\Delta\mathbf{u} \quad \text{in } \Omega, \ t > 0 \\ \nabla.\mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \ t > 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide, $\mathbf{p}$ représente la pression et ν la viscosité cinématique du fluide.
Une des quantités les plus importants en mécanique des fluide est *le nombre de Reynold*. Ce nombre sans dimension évalue le rapport entre les forces d'inertie du fluide et les forces de viscosité. Il est défini par

$$R_e = \frac{LV}{\nu} \tag{4.11}$$

avec V une échelle de vitesse et L une longueur caractéristique.

Dans le problème (4.10), on n'a pas pris en compte les forces extérieures appliquées au fluide. Pour compléter le système, on doit rajouter des conditions aux limites au bord $\partial\Omega$ du domaine Ω. Dans ce travail, on utilisera principalement, des conditions aux limites de type Dirichlet sur la vitesse :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

Sauf mention contraire, les conditions aux limites considérées dans ce chapitre seront de type Dirichlet homogène ($\mathbf{u}_d = 0$).
On définit l'espace des fonctions tests par :

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in H_0^1; \nabla.\mathbf{v} = 0\}$$

Introduisons la forme bilinéaire définie dans $\mathbf{V}$ par :

$$a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx \tag{4.12}$$

Les propriétés suivantes de $a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ sont prouvées dans [39], Lemme 2.1 et 2.2 p 284-285 :

$$\begin{aligned} &|a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \Gamma_1 |\mathbf{u}|_1 ||\mathbf{v}||_1 ||\mathbf{w}||_1 \\ &a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \\ &a_1(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

où Γ_1 est une constante qui ne dépend que du domaine Ω.
On définit aussi la forme bilinéaire suivante dans $\mathbf{V}$

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) \tag{4.14}$$

En multipliant les équations (4.10) par une fonction test $\mathbf{u}^* \in \mathbf{V}$ et intégrant par partie, on obtient la formulation faible des équations de Navier-Stokes incompressible dans les variables primitives :
Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tel que :

$$(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}^*) + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \quad = -\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \qquad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{V} \tag{4.15}$$

4.1.3 Caractérisation des fonctions à divergence nulle

La formulation des équations de Navier-Stokes incompressibles par des fonctions de courant est due à une propriété caractéristique de l'espace des fonctions à divergence nulle $\mathbf{V}$ montrée par exemple dans [39] corollaire 3.2 p 42

Théorème 4.1.1. *Soit* $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega); \nabla.\mathbf{v} = 0\}$ *alors* $\mathbf{V} = \{\mathbf{curl}\ \phi; \phi \in \mathbf{\Psi}\}$ *où* $\mathbf{\Psi} = \{\phi \in H^2(\Omega); \phi|_{\partial\Omega} = 0, \partial\phi/\partial n = 0 \ \ on \ \ \partial\Omega\}$ *et l'application* $\mathbf{curl}$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{\Psi}$ *à* $\mathbf{V}$.

Ainsi, la fonction de courant ϕ *correspondante à* $\mathbf{v}$ *est définie comme l'unique solution du problème bi-harmonique : Trouver* $\phi \in \mathbf{\Psi}$ *tel que :*

$$(\Delta\phi, \Delta\chi) = -(\texttt{curl}\ \mathbf{v}, \Delta\chi), \quad \forall\chi \in \mathbf{\Psi}$$

4.2 Formulation fonction de courant

4.2.1 Formulation faible

Le théorème (4.1.1) permet d'exprimer un champs vectoriel à divergence nulle par une quantité scalaire, donc au lieu de travailler avec un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ vérifiant la forme faible (4.15) :
Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tel que

$$\frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial t} + a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{4.16}$$

et comme l'opérateur $\mathbf{curl}$ réalise un isomorphisme entre les espaces $\mathbf{\Psi}$ et $\mathbf{V}$ nous allons simplement remplacer $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans l'équation ci dessus, par leurs représentant en terme de rotationnel d'un scalaire, ce qui donne :
Trouver $\psi \in \mathbf{\Psi}$ avec $\mathbf{u} = \mathbf{curl}\ \psi$ et $\mathbf{v} = \mathbf{curl}\ \chi$ tel que

$$\frac{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial t} + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall\chi \in \mathbf{\Psi} \tag{4.17}$$

Développons maintenant les différents termes des équations précédentes, on a

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{curl}\ \psi, \mathbf{curl}\ \chi) = (\psi, \texttt{curl}\ \mathbf{curl}\ \chi) = -(\psi, \Delta\chi) = (\nabla\psi, \nabla\chi) \tag{4.18}$$

$$
\begin{aligned}
a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= -\textstyle\sum_{i,j=1}^{2}(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}) \\
&= -2(\partial^2_{xy}\psi,\partial^2_{xy}\chi) - (\partial^2_{xx}\psi,\partial^2_{xx}\chi) - (\partial^2_{yy}\psi,\partial^2_{yy}\chi) \\
&= -(\Delta\psi,\Delta\chi) = -a_0(\psi,\chi)
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

où nous avons défini la forme bilinéaire $a_0(.,.)$ en terme de fonction scalaire par

$$a_0(\psi,\chi) = (\Delta\psi,\Delta\chi)$$

Dans l'égalité (4.19), nous avons utilisé le fait que pour ψ et $\chi \in \mathbf{\Psi}$, on a

$$(\partial^2_{xy}\psi,\partial^2_{xy}\chi) = (\partial^2_{xx}\psi,\partial^2_{yy}\chi) = (\partial^2_{yy}\psi,\partial^2_{xx}\chi)$$

Pour exprimer la forme trilinéaire $a_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})$ sous forme scalaire, on utilise les identités suivantes [7] :

$$(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}^2/2 - \mathbf{u}\times\nabla\times\mathbf{u}$$

on obtient :

$$(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}^2/2 - \Delta\psi\nabla\psi$$

Le terme $a_1(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})$ peut donc s'écrire :

$$
\begin{aligned}
a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) &= (-\Delta\psi\nabla\psi, \mathbf{curl}\ \chi) \\
&= \textstyle\int_\Omega \Delta\psi(\partial_y\psi\partial_x\chi - \partial_x\psi\partial_y\chi) \\
&= \textstyle\int_\Omega \Delta\psi[\chi,\psi] \\
&= a_1(\psi;\psi,\chi)
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

ici, nous avons défini la forme trilinéaire a_1 en terme de fonction scalaire par :

$$a_1(\psi;\phi,\chi) = \int_\Omega \Delta\psi[\chi,\phi] \tag{4.21}$$

Notons que l'expression $a_1(\zeta;\phi,\chi)$ ne correspond pas au terme vectoriel $\int_\Omega(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Nous donnerons sa forme générale dans le chapitre suivant.
Avec des calculs direct, on peut prouver les propriétés suivantes pour $a_1(\psi;\phi,\chi)$:

$$
\begin{aligned}
&a_1(\psi;\phi,\chi) + a_1(\psi;\chi,\phi) = 0 \\
&a_1(\psi;\phi,\phi) = 0
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

Dans (4.20), nous avons utilisé le fait que

$$(\nabla\mathbf{u}^2/2,\mathbf{v}) = (\mathbf{u}^2/2,\nabla.\mathbf{v}) = 0 \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$$

On obtient finalement la formulation faible suivante du problème de Navier-Stokes incompressible 2D en terme de fonction de courant

Trouver $\psi \in \mathbf{\Psi}$ tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi, \nabla\chi) + \int_\Omega \Delta\psi[\chi, \psi] + \nu(\Delta\psi, \Delta\chi) = 0 \quad \forall\chi \in \mathbf{\Psi} \tag{4.23}$$

Remarque 4.2.1. *Après une intégration par partie de l'équation* (4.23)*, on obtient*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{curl}\ \psi + \Delta\psi\nabla\psi - \nu\mathbf{curl}\ (\Delta\psi), \mathbf{curl}\ \chi) = 0 \quad \forall\chi \in \mathbf{\Psi} \tag{4.24}$$

Donc en appliquant une seconde intégration par partie, et utilisant les formules de la section (4.1.1)*, on obtient une formulation forte alternative au système* (4.10) *en terme de fonction de courant* ψ

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + [\Delta\psi, \psi] = \nu\Delta^2\psi \ \ on\ \Omega \tag{4.25}$$

En introduisant une variable intermédiaire $\omega = -\Delta\psi$*, on obtient la formulation standard appelée formulation vorticité-fonction de courant. Cette formulation est majoritairement utilisé dans beaucoup d'algorithmes de résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles [32].*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial t} + [\omega, \psi] &= \nu\Delta\omega \quad on\ \Omega \\ \omega &= -\Delta\psi \quad on\ \Omega \end{aligned} \tag{4.26}$$

La mise en place des conditions aux limites sur la vorticité est un des problèmes majeurs de cette formulation. Ses valeurs sur les frontières ne sont généralement pas connues et il faut procéder à diverses approximations numériques pour les évaluer. Erturk [32], par exemple, calcule la valeur de ω *aux nœuds du bord en faisant intervenir les valeurs de* ψ *aux noeuds adjacents à ceux du bords et de la vitesse évaluée aux bords par une méthode approchée appelée "Computational boundary method (CBM)", telle que détaillée dans [67]. Cependant, ces difficultés sont inexistantes dans la formulation fonction de courant pure* (4.25) *où on ne fait pas intervenir la variable intermédiaire* ω*.*

4.2.2 Approximation de Galerkin et analyse d'erreur

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'approximation spatiale du problème (4.23) par la méthode des éléments finis de Clough-Tocher, détaillé

dans le chapitre (2). On considère ainsi, la forme stationnaire de l'équation (4.23) avec une fonction source :
Trouver $\psi \in \mathbf{\Psi}$ tel que :

$$a_1(\psi;\psi,\chi) + \nu a_0(\psi,\chi) = (f,\chi) \quad \forall \chi \in \mathbf{\Psi} \tag{4.27}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Soit $\mathbf{\Psi_h}$ un espace d'éléments finis approchant de façon conforme l'espace $\mathbf{\Psi}$: i.e $\mathbf{\Psi_h} \subset \mathbf{\Psi}$, l'approximation Galerkin de l'équation (4.27) s'écrit :
Trouver $\psi_h \in \mathbf{\Psi_h}$ tel que :

$$a_1(\psi_h;\psi_h,\chi_h) + \nu a_0(\psi_h,\chi_h) = (f,\chi_h) \quad \forall \chi_h \in \mathbf{\Psi_h} \tag{4.28}$$

En choisissant des fonctions de base de régularité au moins C^1, pour engendrer l'espace $\mathbf{\Psi_h}$, on retrouve une approximation conforme de $\mathbf{\Psi}$. Dans ce travail, nous utiliserons une famille particulière d'éléments finis C^1 sur une triangulation, les éléments de Clough-Tocher réduits, décrites dans le chapitre (2) paragraphe (2.2.2). L'avantage d'utiliser ces éléments triangulaires réside sur le fait qu'on peut approcher facilement le problème (4.10) dans des domaines complexes, ce qui n'est pas toujours possible avec des quadrangles. De plus, la régularité C^1 des fonctions de base permet d'obtenir des fonctions approchée de classe C^1, contrairement aux éléments finis de Lagrange où on n'a que la continuité C^0 qui est satisfaite.

Présentons quelques résultats d'analyse d'erreur pour l'approximation de Galerkin (4.28). Ces résultats sont adaptés des travaux de Cayco et Nicolaides [22].

D'abord, nous avons le résultat de stabilité suivant

Théorème 4.2.1. *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et ψ la solution de (4.27) donc*

$$|\psi|_2 \leq ||f||_{-1}/\nu \tag{4.29}$$

Preuve. En prenant $\chi = \psi$ dans (4.27), et utilisant le fait que $a_1(\psi;\psi,\psi) = 0$, on obtient

$$\nu a_0(\psi,\psi) = (f,\psi) \leq ||f||_{-1}|\psi|_2$$

or $a_0(\psi,\psi) = ||\Delta\psi||_0^2 = |\psi|_2^2$, pour $\psi \in H_0^2$. Alors

$$|\psi|_2 \leq ||f||_{-1}/\nu \quad \square$$

L'estimation suivante est prouvée dans l'article de Cayco et Nicolaides [22]

Théorème 4.2.2. *Soit ψ la solution du problème (4.27) et ψ_h celle du problème approchée (4.28). On suppose que $\nu > \nu^*$, avec $\nu^* = (\Gamma_1||f||_{-1})^{1/2}$ et Γ_1 la constante de continuité de la forme trilinéaire a_1, définie dans (4.13). On a alors l'estimation suivante*

$$|\psi - \psi_h|_2 \leq c(\nu) \inf_{\chi_h \in \mathbf{\Psi_h}} |\psi - \chi_h|_2 \tag{4.30}$$

où $c(\nu) = (1 + 2\Gamma_1||f||_{-1}/\nu^2)(1 - \Gamma_1||f||_{-1}/\nu^2)^{-1} \leq c(\nu^*)$.

Le théorème (4.2.2) donne une estimation en norme H^2 de l'erreur d'approximation et la condition $\nu > \nu^*$ assure la positivité de $c(\nu)$. Cette estimation est valable pour des petites valeurs du nombre de Reynold (Re). Pour Re plus grand, c.à.d $\nu \leq \nu^*$ l'estimation n'est pas forcement vérifiée.

En utilisant l'erreur d'interpolation des éléments finis CT (2.2.1), on retrouve l'ordre de convergence en norme H^2 de l'erreur d'approximation.

Corollaire 4.2.3. *Supposons que $\psi \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Donc en utilisant les hypothèses du théorème (4.2.2) et l'estimation de l'erreur d'interpolation des éléments finis CT, on obtient le résultat suivant : il existe une constante positive C_2 tel que*

$$|\psi - \psi_h|_2 \leq C_2 h |\psi|_3 \tag{4.31}$$

Pour avoir une estimation de l'erreur de convergence en norme L^2 et H^1, on utilise le lemme de dualité standard d'Aubin-Nitsche, décrit dans le chapitre (2) théorème (2.1.3).

On aura besoin du résultat de régularité suivant, qui est prouvé dans [39], théorème 1.11 p 17.

Lemme 4.2.2. *Soit ψ la solution du problème (4.27). On suppose $\psi \in H^4(\Omega) \cap \mathbf{\Psi}$. Alors il existe $C = C(\Omega)$ tel que*

$$||\psi||_4 \leq C||f||_0 \tag{4.32}$$

Théorème 4.2.4. *Supposons que $\psi \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Alors pour tout $\nu > \nu^*$, il existe des constantes positives C_0, C_1 telles que*

$$|\psi - \psi_h|_1 \leq C_1 h^{3/2} |\psi|_3 \tag{4.33}$$

$$||\psi - \psi_h||_0 \leq C_0 h^2 |\psi|_3 \tag{4.34}$$

La preuve de ce théorème suit celle de Cayco et Nicolaides [22].

Preuve. On définit le problème dual suivant :
Trouver $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ tel que pour tout $\chi \in H_0^2(\Omega)$,

$$a_1(\psi;\chi,\zeta) + a_1(\chi;\psi,\zeta) + \nu a_0(\zeta,\chi) =< g,\chi > \tag{4.35}$$

avec ψ est la solution du problème (4.27), $< .,. >$ dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $g \in H^{-2}(\Omega)$.
En faisant la différence des équations (4.28) et (4.27), on peut vérifier cette égalité

$$a_1(\psi;\psi,\chi_h) - a_1(\psi_h;\psi_h,\chi_h) + \nu a_0(\psi-\psi_h,\chi_h) = 0 \tag{4.36}$$

Prenons $\chi = \psi - \psi_h$ dans (4.35), et notons par ζ_h la solution approchée du problème dual (4.35) par la méthode de Galerkin. En utilisant l'égalité (4.36), on obtient

$$\begin{aligned} < g,\psi-\psi_h >= \ & \nu a_0(\psi-\psi_h,\zeta-\zeta_h) + a_1(\psi;\psi-\psi_h,\zeta-\zeta_h) \\ & + a_1(\psi-\psi_h;\psi_h,\zeta-\zeta_h) + a_1(\psi-\psi_h;\psi-\psi_h,\zeta), \end{aligned}$$

donc

$$| < g,\psi-\psi_h > | \leq |\psi-\psi_h|_2|\zeta-\zeta_h|_2(\nu+\Gamma_1|\psi|_2+\Gamma_1|\psi_h|_2)+\Gamma_1|\zeta|_2|\psi-\psi_h|_2^2$$

Le corollaire (4.2.3) appliquée à la fois au problème dual (4.35) et au problème direct (4.27), donne

$$\begin{aligned} | < g,\psi-\psi_h > | \ & \leq K_0h^2|\psi|_3|\zeta|_3(\nu+\Gamma_1|\psi|_2+\Gamma_1|\psi_h|_2)+K_1\Gamma_1|\zeta|_2|\psi|_3^2h^2 \\ & \leq [K_0|\zeta|_3(\nu+\Gamma_1|\psi|_2+\Gamma_1|\psi_h|_2)+K_1\Gamma_1|\zeta|_2|\psi|_3]|\psi|_h^2 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Les théorèmes de stabilité (4.29) et de régularité (4.32) appliqués au problème dual (4.35) donnent les inégalités suivantes

$$|\zeta|_2 \leq C_0||g||_{-2} \tag{4.38}$$

$$||\zeta||_4 \leq C_1||g||_0 \tag{4.39}$$

avec C_0 et C_1 des constantes.

On a donc,

$$|\zeta|_3 \leq ||\zeta||_4 \leq C||g||_0$$

et

$$|\zeta|_2 \leq C_0||g||_{-2} \leq C_0||g||_0$$

Les résultats de stabilité (4.29) et de régularité (4.32) donnent

$$|\psi|_3 \leq ||\psi||_4 \leq C||f||_0$$

et

$$|\psi|_2 \leq ||f||_{-1}/\nu$$

L'équation (4.37) devient

$$| < g, \psi - \psi_h > | \quad \leq K_2 h^2 |\psi|_3 ||g||_0 \quad \text{pour} \quad g \in L^2(\Omega) \tag{4.40}$$

avec $K_2 = K_0(\nu + \Gamma_1||f||_{-1}/\nu + \Gamma_1||f||_{-1}/\nu) + K_1\Gamma_1||f||_0$

Pour démontrer l'inégalité (4.33), on prend $g = \Delta(\psi - \psi_h)$. En appliquant une intégration par partie, l'inégalité (4.40) devient

$$\begin{aligned} |\psi - \psi_h|_1^2 &=< g, \psi - \psi_h > \\ &\leq K_2 h^2 ||\psi||_3 ||\Delta(\psi - \psi_h)||_0 \\ &\leq K_2 h^2 ||\psi||_3 |\psi - \psi_h|_2 \end{aligned}$$

L'ordre de convergence de l'erreur en norme H^1 est obtenu à partir du corollaire (4.2.3)

$$|\psi - \psi_h|_1 \leq C_1 h^{3/2} ||\psi||_3$$

Démontrons maintenant l'estimation en norme L^2 (4.34). Prenons $g = \psi - \psi_h$. A partir de (4.40), on a

$$\begin{aligned} ||\psi - \psi_h||_0^2 &=< g, \psi - \psi_h > \\ &\leq K_2 h^2 ||\psi||_3 ||\psi - \psi_h||_0 \end{aligned}$$

d'où

$$||\psi - \psi_h||_0 \leq C_0 h^2 ||\psi||_3 \qquad \square$$

4.2.3 Discrétisation en temps

On dénote par $\bar{\psi}$ et $\tilde{\psi}$ deux moyennes de ψ^{n+1} et ψ^n (elles peuvent être définies différemment). Nous utiliserons le schéma suivant pour la discrétisation en temps du problème (4.23) :

$$(\nabla\psi^{n+1},\nabla\chi)-(\nabla\psi^{n},\nabla\chi)+\tau\int_{\Omega}\Delta\tilde{\psi}(\partial_y\bar{\psi}\partial_x\chi-\partial_x\bar{\psi}\partial_y\chi)=-\nu(\Delta\bar{\psi},\Delta\chi)\quad\forall\chi\in\mathbf{\Psi} \tag{4.41}$$

avec τ le pas de temps. Les moyennes $\bar{\psi}$ et $\tilde{\psi}$ seront définies de sorte qu'on puisse obtenir un schéma en temps qui assure la stabilité en énergie. L'énergie est définie par

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\mathbf{u}^2=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla\psi|^2 \tag{4.42}$$

Dans l'équation (4.41), prenons $\chi=\psi^{n+1}$ et $\chi=\psi^{n}$, on obtient :

$$\begin{array}{l}|\nabla\psi^{n+1}|^2-(\nabla\psi^{n},\nabla\psi^{n+1})+\tau\int_{\Omega}\Delta\tilde{\psi}(\partial_y\bar{\psi}\partial_x\psi^{n+1}-\partial_x\bar{\psi}\partial_y\psi^{n+1})=-(\Delta\bar{\psi},\Delta\psi^{n+1})\\(\nabla\psi^{n+1},\nabla\psi^{n})-|\nabla\psi^{n}|^2+\tau\int_{\Omega}\Delta\tilde{\psi}(\partial_y\bar{\psi}\partial_x\psi^{n}-\partial_x\bar{\psi}\partial_y\psi^{n})=-\nu(\Delta\bar{\psi},\Delta\psi^{n})\end{array}$$

En additionnant ces deux équations, on a

$$|\nabla\psi^{n+1}|^2-|\nabla\psi^{n}|^2+\tau\int_{\Omega}\Delta\tilde{\psi}(\partial_y\bar{\psi}\partial_x(\psi^{n+1}+\psi^{n})-\partial_x\bar{\psi}\partial_y(\psi^{n+1}+\psi^{n})=-\nu(\Delta\bar{\psi},\Delta(\psi^{n+1}+\psi^{n}))$$

On peut voir à partir de cette équation, que indépendamment du choix de $\tilde{\psi}$, le terme non linéaire s'annule en prenant $\bar{\psi}=(\psi^{n+1}+\psi^{n})/2$, c.à.d le schéma semi implicite de Crank-Nicholson. On obtient donc, une décroissance de l'énergie. Notez qu'avec ce choix de $\bar{\psi}$, le terme convectif s'annule indépendamment du choix de $\tilde{\psi}$. Pour des raison de simplicité des calculs, nous évaluerons ce dernier en explicite. En effet, en prenant $\tilde{\psi}$ en explicite, on obtient à chaque pas de temps, un système linéaire à résoudre :

$$(\nabla\psi^{n+1},\nabla\chi)-(\nabla\psi^{n},\nabla\chi)\ +\frac{\tau}{2}\int_{\Omega}\Delta\psi^{n}[\chi,(\psi^{n+1}+\psi^{n})]=-\frac{\nu\tau}{2}(\Delta(\psi^{n+1}+\psi^{n}),\Delta\chi)\quad\forall\chi\in\mathbf{\Psi} \tag{4.43}$$

4.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous appliquons les éléments finis CT décrits dans le chapitre (2), section (2.2.2) pour approcher les équations (4.43). Nous étudierons la performance et la précision de la méthode en résolvant des problèmes dont des solutions exactes sont connues ou avec les quels des résultats sont présents dans la littérature.
Les intégrales apparaissant dans la formulation faible (4.43) seront calculés

par une formule de quadrature à 6 points sur chaque sous triangle CT. Cette formule est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 4.
La méthode de Galerkin et le schéma en temps utilisé dans (4.43), conduisent à la résolution à chaque itération en temps d'un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} \tag{4.44}$$

où $\mathbf{\Phi}$ est un vecteur de taille $3N$ (N est le nombre de points du maillage) contenant les degrés de liberté associés aux valeurs de la fonction et du gradient de celle-ci, $\mathbf{K}$ est la matrice éléments finis de Clough-Tocher et $\mathbf{F}$ correspond au vecteur source.

Pour prendre en compte les conditions aux limites dans la résolution du système linéaire, nous modifierons les lignes de la matrices $\mathbf{K}$ correspondant aux nœuds du bord, en remplaçant les éléments diagonaux par 1 et les éléments hors diagonaux par 0. Ensuite, on remplacera les valeurs du vecteur $\mathbf{F}$ correspondant aux indices du bord par la valeur exacte de la solution au bord (voir les détails dans le chapitre (2), section (2.3.2)).

4.3.1 Solutions manufacturées

Pour mettre en évidence la précision de la méthode CT, nous résolvons l'équation stationnaire (4.27) par la méthode d'une solution manufacturée. Soit à résoudre l'équation suivante

$$[\Delta\psi, \psi] - \nu\Delta^2\psi = f \quad \text{in } \Omega \tag{4.45}$$

où f est un terme source obtenu en remplaçant l'inconnue par la solution exacte ψ définie par

$$\psi(x, y) = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$$

On considérera comme domaine de calcul, le carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ qui sera subdivisé en $2(N+1)^2$, $(N = 16, 32, 64, 128)$ éléments triangulaires structurés comme dans la figure (4.1). On choisira comme taille caractéristique du maillage, la racine carrée de l'aire du triangle.

$$h = \sqrt{\text{Aire du triangle}}$$

L'équation (4.27) est non linéaire et doit donc être résolue d'une manière itérative. Afin d'avoir un algorithme numérique itératif, nous utilisons une

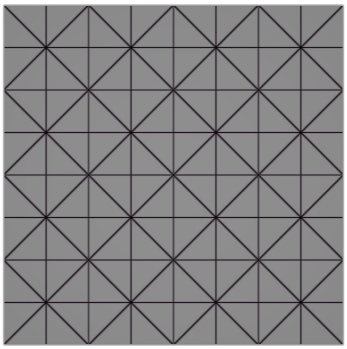


FIGURE 4.1 – Structured triangular mesh

méthode de pseudo avancée en temps et résolvons une équation discrète non statique jusqu'à la convergence vers une solution stationnaire [1].
L'équation à résoudre est donc la suivante :

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + [\Delta\psi, \psi] - \nu\Delta^2\psi = f \quad \text{in } \Omega \tag{4.46}$$

Le schéma en temps décrits dans (4.43) sera utilisé pour résoudre l'équation faible de (4.46). Comme l'objectif est d'atteindre une solution stationnaire, le choix du pas de temps n'affecte pas la précision des résultats.

La convergence de la méthode vers la solution d'équilibre est supposée atteinte, quand la norme L^2 de la différence de deux solutions successives est plus petit que 10^{-10}.

$$||\psi^{n+1} - \psi^n||_0 \leq 10^{-10}$$

Après convergence, l'erreur sera calculée par :

$$e = |\psi_h - \psi|_k, \quad k = 0, 1, 2 \tag{4.47}$$

où ψ_h et ψ sont respectivement la solution approchée du problème (4.28) et la solution exacte du problème (4.27). Et $|.|_k$ est la semi-norme H^k définie dans (4.2).

Comme dans le calcul des intégrales des matrices éléments finis (5.45), on utilisera une formule de quadrature à 6 points sur chaque sous triangle CT pour calculer les intégrales des semi-normes H^k de l'erreur.

1. Nous avons d'abord appliquée une méthode itérative de Picard directement sur l'équation (4.45), mais celle ci ne converge pas pour des nombres de Reynold plus grand.

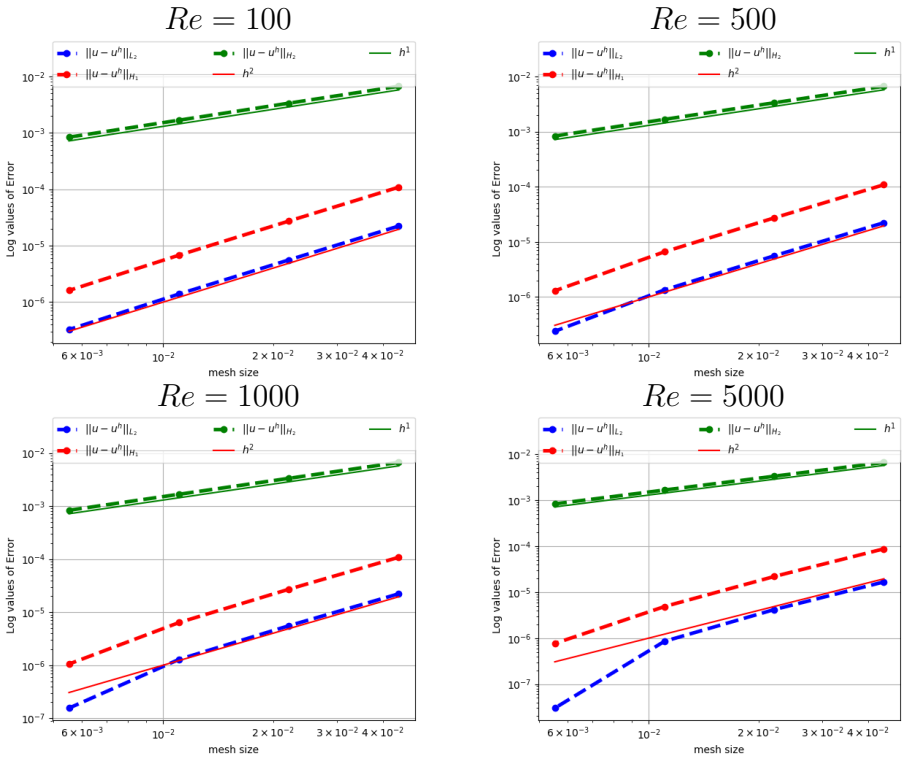


FIGURE 4.2 – Variation des normes H^k $(k = 0, 1, 2)$ de l'erreur d'estimation de l'équation stationnaire pour différentes valeurs du nombre de Reynold.

Dans la figure (4.2), nous montrons les variations des erreurs (4.47) en fonction de la taille du maillage, en prenant différentes valeurs du nombre de Reynold (Re). On peut voir que pour des petites valeurs de Re, on obtient une convergence d'ordre 2 pour la norme L^2 et d'ordre 1 pour la norme H^1. Ce qui reste conforme aux résultats théoriques (4.31) et (4.34). Quant à la norme H^1, on obtient une convergence d'ordre 2 au lieu de 3/2. Cette meilleure convergence peut être due au fait qu'on a choisi une solution exacte très régulière.
Bien qu'on n'a pas une estimation théorique de convergence de l'erreur pour des grands nombres de Reynold, les résultats de la figure (4.2) montrent qu'on a en faite une meilleure convergence pour $Re = 1000$ ou $Re = 5000$.

4.3.2 Tourbillons de Green-Taylor

On considère le problème d'un écoulement amorti par la viscosité qui est régi par les équations de Navier-Stokes incompressibles (4.10) dans le

carré $\Omega = [0, \pi]^2$. Ce problème a une solution exacte donnée par : [66, 46] :

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{bmatrix} -cos\ x\ sin\ y \\ sin\ x\ cos\ y \end{bmatrix} e^{-2t\nu}$$

en terme de fonction de courant, la solution exacte du système scalaire (4.25) est :

$$\psi(x, y, t) = cos\ x\ cos\ y\ e^{-2t\nu} \tag{4.48}$$

Les conditions aux limites seront données par les valeurs de cette fonction aux nœuds du bord. Ces valeurs varient au cours du temps et doivent être imposées à chaque itération en temps.
Le domaine sera discrétisé par des éléments triangulaires structurés comme dans la section précédente.

L'erreur globale sera donnée par :

$$e = |\psi_h^n - \psi(t^n)|_k, k = 0, 1, 2 \quad \forall\, t^n = n\Delta t \geq 0 \tag{4.49}$$

où ψ_h^n et $\psi(t^n)$ sont respectivement la solution numérique et exacte au temps $t^n = n\Delta t$ et $|.|_k$ et la semi norme H^k est définie dans (4.2).

On peut remarquer que le crochet de Poisson de la solution exacte s'annule. Pour un maillage très fin, l'erreur de troncature associée à ce terme sera donc proche de zéro et le problème (4.23) se comporte comme une équation parabolique en $\Delta\psi$.

De plus, on peut voir que pour $t = \frac{1}{\nu}$, la solution spatiale est la même quelque soit la valeur du nombre de Reynold. Pour cette raison, nous choisirons $Re = \pi$ dans cette analyse d'erreur. On calculera l'erreur à l'instant $t = 0.5$.

La figure (4.3) représente l'allure de la fonction ψ_h à $t = 0.5$ et pour un nombre de Reynold $Re = \pi$.

Dans la figure (4.4) on représente les variations de l'erreur globale (4.49) en fonction du pas de temps et de l'espace. Cette erreur globale est uniformément majorée par l'erreur d'approximation spatiale et l'erreur d'approximation temporelle.

$$e = |\psi_h^n - \psi(t^n)|_k \leq |\psi_h^n - \psi_h(t^n)|_k + |\psi_h(t^n) - \psi(t^n)|_k$$

La figure (4.4.a) montre les variations de l'erreur globale en fonction du pas de temps $dt = \frac{1}{2^k}$, $(k = 1, 2, 3, ...12)$ dans un maillage de taille fixe

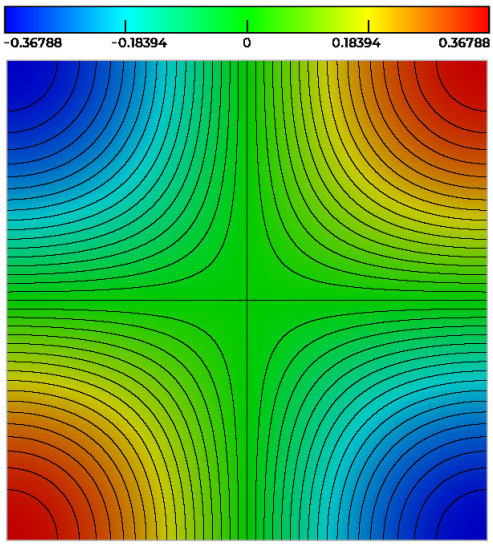


FIGURE 4.3 – Solution approchée du problème des tourbillons de Green-Taylor à $t = 0.5$ pour $Re = \pi$

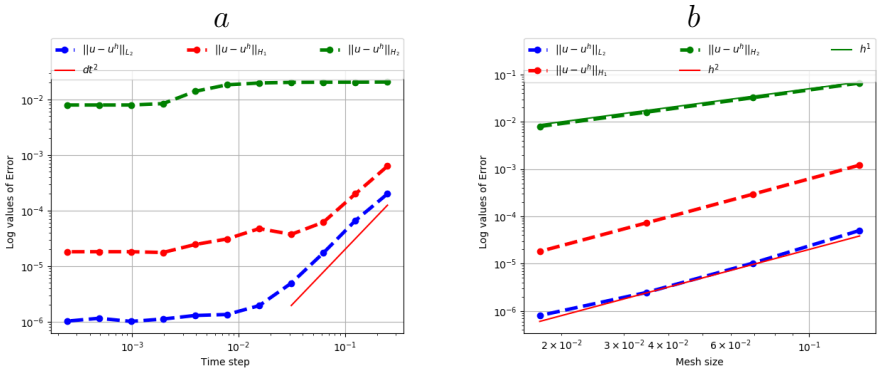


FIGURE 4.4 – Variation des semi normes de l'erreur global pour le problème de Taylor Green à $T = 0.5$ et $Re = \pi$: (a) pour différentes valeurs de pas de temps et un pas d'espace fixe $h = 1/128$; (b) pour différentes valeurs de pas d'espace et un pas de temps fixe $dt = \frac{1}{2^9}$

$h = \frac{\pi}{128}$. On observe que pour des petites valeurs du pas de temps, $dt \leq \frac{1}{2^8}$, l'erreur globale est uniquement dominée par l'erreur spatiale. Et lorsque le pas de temps augmente, l'erreur temporelle emporte sur l'erreur spatiale et on obtient une convergence en $\mathcal{O}(dt^2)$. Ce qui correpond bien à la convergence théorique d'un schéma de Crank-Nicholson pour l'approximation d'un problème parabolique [9]. On répète ensuite la même expérience en faisant varier la taille du maillage $h = \frac{\pi}{N}, N = 16, 32, 64, 128$, et on a observé le même comportement de l'erreur globale. Dans la figure (4.4.b), on représente les valeurs de celle ci en fonction des différentes tailles du maillage. Ces valeurs correspondent au pas de temps $dt = \frac{1}{2^9}$. Cette figure confirme qu'on a le même ordre de convergence de l'erreur globale que celui de l'erreur spatiale obtenu dans l'approximation du problème stationnaire précédent pour des petites valeurs de Reynolds. A savoir, une convergence d'ordre 1 pour la norme H^2 et d'ordre 2 pour les normes L^2 et H^1.
A partir de cette expérience, on conclu que lorsque le pas de temps dt tend vers 0, l'erreur globale du schéma numérique est dominée par l'erreur spatiale et elle garde le même ordre de convergence que cellui des théorèmes (4.2.3) et (4.2.4). Ce qui correspond bien aux attentes.

4.3.3 Cavité entrainée

On considère le problème bi-dimensionnel de la cavité entrainée qui est largement utilisée pour la validation des codes de calculs sur les équations Navier-Stokes incompressibles [31, 32, 37, 42]. Le mouvement du fluide dans le domaine $\Omega = [0, 1]^2$, est généré par le glissement de la paroi supérieure de la cavité $(y = 1)$. Les conditions aux limites sur la vitesse sont données par $\mathbf{u} = 1$ sur la paroi supérieure du domaine, et $\mathbf{u} = 0$ sur les autres côtés. Cela conduit à des conditions aux limites homogènes sur les valeurs et le gradient de la fonction de courant ψ, sauf sur la paroi supérieure où la dérivée en y est fixée à 1.

Comme dans le cas test (4.3.1), le choix du pas de temps n'affecte pas la précision des résultats quand on atteint un régime stationnaire.

Pour mettre en évidence la précision de la méthode CT, nous allons résoudre le problème sur des maillages de tailles différentes et en faisant varier le nombre de Reynolds (Re), défini dans (4.11). On comparera les résultats avec d'autres déjà disponibles dans la littérature.

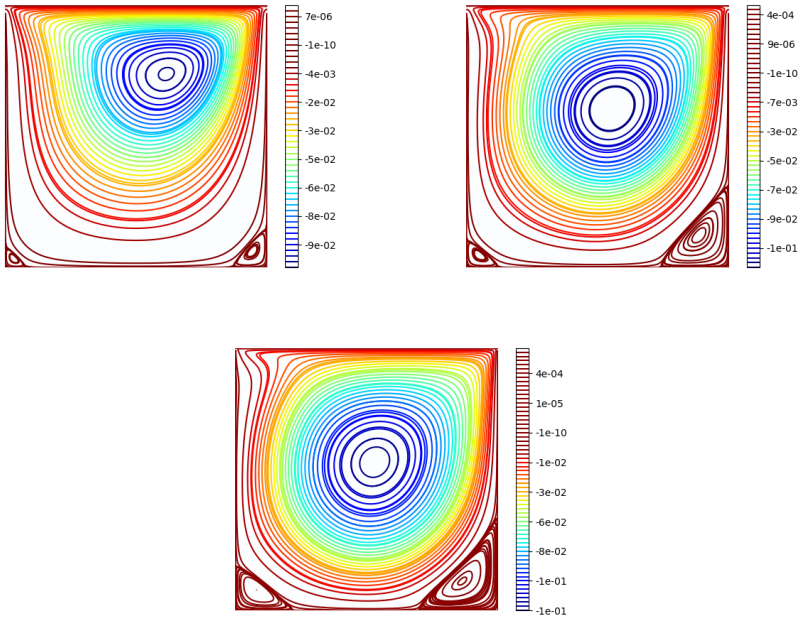


FIGURE 4.5 – De gauche à droite, les iso-contours de la fonction de courant pour le problème de la cavité entrainée pour Re = 100, Re = 400 et Re = 1000

Dans toutes les simulations, on supposera que l'état d'équilibre est atteint lorsque la semi-norme L^2 (4.2) de la différence entre deux solutions de deux itérations temporelles successives est inférieure à 10^{-8}.

Le domaine Ω sera discrétisé en éléments triangulaire structurés comme dans la figure (4.1).

Dans la figure 4.5, on montre les contours de la fonction de de courant ψ, pour différentes valeurs de Re. On observe la présence d'un grand tourbillon au centre (vortex primaire) et deux autres tourbillons dans les deux coins inférieurs du domaine (vortex secondaires). Plus le nombre de Reynold est grand, plus les tourbillons secondaires sont importants. Toutes ces résultats sont en bon accord avec les résultats publiés [32, 37, 42].

Afin d'établir une comparaison quantitative avec d'autres auteurs, nous présentons dans les tableaux 4.1 et 4.2 les positions des centres des tourbillons ainsi que les valeurs de la fonction de courant ψ en ces points. Ces

données sont fournies pour Re = 100, 400 et 1000 et pour différentes tailles du maillage. Le choix de Re est régi par les résultats disponibles dans la littérature. La solution stationnaire pour $Re = 100$ est utilisée pour initialiser les calculs à $Re = 400$, puis la solution d'équilibre pour $Re = 400$ est utilisée pour initialiser les calculs à $Re = 1000$.

On retrouve quelques références dans la littérature qui ont traité le problème (4.10) avec des petites valeurs du nombre de Reynold. Erturk [32] par exemple a traité le cas $Re = 100$ en utilisant une formulation vorticité-foncntion de courant de l'équation (4.10). La résolution numérique est faite à partir d'une méthode de type différence finie, d'ordre 4, dans un maillage plus raffiné de taille 256×256. Gupta [41] a étudié le cas $Re = 100, 400$ dans un maillage de taille 41×41 en utilisant une méthode de type différence finis d'ordre 4. Ghia et al [37], qui constitue un article de référence pour ce problème, a aussi étudié le cas $Re = 100, 400$ dans une grille très raffinées de 129×129 points en utilisant une méthode multigrilles d'ordre 2. Kalita et Gupta [42] ont étudié aussi le cas $Re = 100$ dans une grille de 41×41 points et $Re = 400$ dans une grille de 81×81 points, avec la méthode de différence finie d'ordre 2. L'ensemble des références cités ci dessus retrouvent des résultats qui sont très proches les uns des autres. Ils obtiennent une valeur du première vortex aux alentours de -0.1035 pour $Re = 100$ et -0.1136 pour $Re = 400$. Comme on peut le constater dans le tableau (4.1), avec un maillage grossiers de 33×33 points, on retrouve déjà des résultats très similaires à ceux de la littérature. Ce qui montre l'efficacité et la précision de la méthode C^1 qui est utilisée.

Le cas avec Re = 1000 a été étudié par de nombreux auteurs [19, 21, 37, 42, 41, 65]. Les résultats sont très proches les uns des autres. Botella [19] par exemple, a trouvé la valeur -0.11893 pour le vortex primaire, en utilisant une méthode très précise de collocation de Tchebyshev avec 160 polynômes de Tchebyshev. Bruneau [21] a également obtenu la même valeur dans un maillage plus raffiné de 1024×1024, en utilisant un schéma de type différences finies d'ordre 3. On peut voir à partir du tableau (4.1) qu'avec les éléments finis CT, on obtient une valeur très proche de ceux cités ci-dessus à partir d'un maillage de 81×81 points. Ces résultats se rapprochent de plus en plus en raffinant le maillage. On obtient par exemple la valeur -0.11918 dans un maillage de 129×129 points.

Dans le tableau (4.2), nous avons effectué une comparaison des valeurs et positions des centres des vortexes secondaires avec ceux des auteurs cités ci-dessus. On observe que nos résultats sont en très bon accords avec

Re	Reference	Grid	ψ_{min}	x	y
100	Erturk [32]	256×256	-0.1035173	0.6172	0.7383
	Gupta and Kalita [42]	41×41	-0.103	0.6125	0.7375
	Ghia and al. [37]	129×129	-0.103423	0.6172	0.7344
	Present	33×33	-0.1038096	0.6154	0.7370
	Present	81×81	-0.1035680	0.6156	0.7373
400	Gupta and Kalita [42]	81×81	-0.113	0.5500	0.6125
	Ghia and al. [37]	129×129	-0.113909	0.5547	0.6055
	Present	33×33	-0.1156086	0.5531	0.6047
	Present	81×81	-0.1142590	0.5538	0.6053
1000	Erturk [32]	256×256	- 0.11887	0.5313	0.5664
	Gupta and Kalita [42]	81×81	- 0.117	0.5250	0.5625
	Ghia and al. [37]	129×129	- 0.117929	0.5313	0.5625
	Bruneau [21]	1024×1024	-0.11892	0.4687	0.5654
	Botella [19]	$Nc = 160$	-0.11893	0.4692	0.5652
	Present	81×81	-0.11962	0.5306	0.5651
	Present	129×129	-0.11918	0.5307	0.5652

TABLE 4.1 – Valeurs et positions du centre du vortex primaire pour le problème de la cavité entrainée. Nc représente le nombre des polynômes de Chebychev.

les leurs. On retrouve les mêmes constats que ceux du tableau précédent : les valeurs et positions obtenues par les éléments finis CT sont très proches des résultats précis de Botella [19] et Bruneau [21].

On peut le constater dans les résultats des tableaux (4.1) et (4.2), que les positions des vortex ne varient pas beaucoup d'un maillage à l'autre. Ceci est dû au fait qu'on utilise des éléments finis d'ordre élevé et plus réguliers. En utilisant une méthode d'ordre 3, Bruneau [21] a aussi trouvé des positions très proches pour le centre du vortex primaire dans un maillage à 128×128 points que dans un maillage à 1024×1024 points.

Re	Reference	Grid	ψ_{max} left	x	y	ψ_{max} right	x	y
100	Gupta and Kalita [42]	41×41	1.83e-6	0.0375	0.0375	1.45e-5	0.9375	0.0625
	Ghia and al. [37]	129×129	1.75 e-6	0.0313	0.0391	1.25 e-5	0.9453	0.0625
	Present	33×33	8.94e-7	0.03354	0.03352	9.34e-6	0.9444	0.0597
	Present	81×81	1.59e-6	0.03377	0.03381	1.22e-5	0.9428	0.0613
400	Gupta and Kalita [42]	81×81	1.42e-5	0.0508	0.0469	6.42e-4	0.8906	0.1250
	Ghia and al. [37]	129×129	1.30e-5	0.0500	0.0500	6.48e-4	0.8875	0.1250
	Present	33×33	1.03e-5	0.0475	0.0451	5.9e-4	0.8877	0.1204
	Present	81×81	1.36e-5	0.0507	0.0472	6.35e-4	0.8856	0.1219
1000	Gupta and Kalita [42]	81×81	2.02e-4	0.0875	0.0750	1.70e-3	0.8625	0.1125
	Ghia and al. [37]	129×129	2.31e-4	0.0859	0.0781	1.75e-3	0.8594	0.1094
	Bruneau [21]	1024×1024	–	–	–	1.72e-3	0.8642	0.1123
	Botella [19]	$Nc = 160$	2.33e-4	0.0833	0.0781	1.72e-3	0.8640	0.1118
	Present	81×81	2.32e-4	0.08314	0.07830	1.71e-3	0.8645	0.1116
	Present	129×129	2.33e-4	0.08328	0.07803	1.72e-3	0.8641	0.1117

TABLE 4.2 – Valeurs et positions des deux centres des vortex secondaires pour le problème de la cavité entrainée. Nc est le nombre des polynômes de Chebychev.

Chapitre 5

Les équations de la MHD incompressible

Sommaire

5.1 Équations primitives de la MHD incompressible 110
5.1.1 Modèle MHD résistive et incompressible 110
5.1.2 Formulation faible du système primitif 110
5.1.3 Propriété de décroissance de l'énergie 112
5.2 Formulation fonction de courant 112
5.2.1 Formulation faible 112
5.2.2 Approximation éléments finis CT et analyse d'erreur 117
5.2.3 Discrétisation temporelle 122
5.3 Résultats numériques 123
5.3.1 Solutions manufacturées 123
5.3.2 Instabilités du tilt 125

Dans ce chapitre, nous allons étendre la formulation fonction de courant, introduite dans le chapitre précédent, pour étudier les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) incompressible. Cette formulation permettra d'éviter les difficultés rencontrées dans l'approximation numérique des problèmes de la MHD, notamment pour satisfaire la condition de divergence nulle du champs magnétique. Cette condition sera garantie de façon naturelle. On montrera dans ce chapitre, que cette formulation permet de satisfaire la propriété de conservation de l'énergie totale. L'approximation numérique des équations sera effectuée par la méthode des éléments finis de Clough-Tocher réduits. Une analyse de stabilité et de convergence de la méthode sera proposée. Des expériences numériques

seront réalisées sur des cas tests dont des solutions exactes sont connues et d'autres dont on pourra comparer les résultats avec ceux déjà publiés. On adoptera les mêmes notations que celles du chapitre précédent, voir paragraphe (4.1.1), et on admettra les propriétés établies dans celui-ci.

5.1 Équations primitives de la MHD incompressible

5.1.1 Modèle MHD résistive et incompressible

Rappelons le modèle de la MHD réduite, resistive et incompressible introduit dans le paragraphe (1.3.3) du chapitre (1). Ce modèle est un prototype simplifié du modèle de la MHD réduite plus sophistiqué comme celui qui est implémenté dans le code JOREK [44, 29]. Il retient l'essentiel des difficultés de la MHD et constitue donc un bon point de départ pour étudier le développement d'une méthode numérique pour les plasmas de fusion.

On reprend le modèle de la MHD réduite, resistive et incompressible, introduit dans le paragraphe (1.3.3).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{B} = \eta \Delta \mathbf{B} & \text{dans } \Omega,\ t \geq 0 \quad (5.1.a) \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} & \text{dans } \Omega,\ t \geq 0 \quad (5.1.b) \\ \nabla.\mathbf{u} = \nabla.\mathbf{B} = 0 & \text{dans } \Omega,\ \forall t \geq 0 \quad (5.1.c) \end{cases}$$

avec $\mathbf{u}$, le champ de vitesse, $\mathbf{B}$ le champs magnétique, ν et η représentent respectivement la viscosité cinématique et la résistivité.

Pour compléter ce modèle, on associera aux variables $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B}$, des conditions aux limites de type Dirichlet homogène.

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{5.2}$$

5.1.2 Formulation faible du système primitif

On s'intéresse à la formulation faible du système (5.1). D'abord on introduit l'espace des fonctions tests, associé aux fonctions à divergence

nulle

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in (H_0^1)^2; \nabla.\mathbf{v} = 0\}$$

En multipliant le système (5.1) par des fonctions tests $\mathbf{u}^*, \mathbf{B}^* \in \mathbf{V}$ et intégrant les résultats sur le domaine Ω, on obtient la formulation faible du problème (5.1) : Trouver $(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times L_0^2$

$$\begin{cases} (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{B}^*) + \int_\Omega (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u}.\mathbf{B}^* - \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{B}.\mathbf{B}^* & = -\eta(\nabla\mathbf{B}, \nabla\mathbf{B}^*) \quad \forall \mathbf{B}^* \in (H_0^1)^2 \quad (5.3.a) \\ (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}^*) + \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}.\mathbf{u}^* - \int_\Omega (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u}.\mathbf{u}^* - (\nabla.\mathbf{u}^*, p) & = -\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in (H_0^1)^2 \quad (5.3.b) \end{cases}$$

Comme $\mathbf{u}^* \in \mathbf{V}$ alors le dernier terme de pression s'annule dans l'équation (5.3.b). On obtient le système suivant :
Trouver $(\mathbf{u}, \mathbf{B}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$

$$\begin{cases} (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{B}^*) + \int_\Omega (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{u}.\mathbf{B}^* - \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{B}.\mathbf{B}^* & = -\eta(\nabla\mathbf{B}, \nabla\mathbf{B}^*) \quad \forall \mathbf{B}^* \in \mathbf{V} \quad (5.4.a) \\ (\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}^*) + \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}.\mathbf{u}^* - \int_\Omega (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{B}.\mathbf{u}^* & = -\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{V} \quad (5.4.b) \end{cases}$$

La variable de la pression p est définie de façon implicite et elle pourra se calculer à partir des résultats de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{u}$ en utilisant des techniques comme celles utilisées dans l'article de Cayco et Nicolaides [22] pour le problème de Navier-Stokes incompressible. On ne détaillera pas cette procédure dans ce travail.

Introduisons la forme trilinéaire $a_1(.;.,.)$ définie dans $\mathbf{V}$ par

$$a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx \tag{5.5}$$

On rappelle les propriétés suivantes pour $a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}))$ qui sont prouvés dans [39], Lemme 2.1 et 2.2 p 284-285 :

$$\begin{aligned} &|a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_2 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 |\mathbf{w}|_1 \\ &a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \\ &a_1(\mathbf{w}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

On introduit aussi la forme bilinéaire suivante

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \tag{5.7}$$

Le problème (5.4) s'écrit de la forme suivante : Trouver $(\mathbf{u}, \mathbf{B}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ tel que

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{B}^*) + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{B}, \mathbf{B}^*) - a_1(\mathbf{B}; \mathbf{u}, \mathbf{B}^*) & = -\eta a_0(\mathbf{B}, \mathbf{B}^*) \quad \forall \mathbf{B}^* \in \mathbf{V} \\ (\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}^*) + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) - a_1(\mathbf{B}; \mathbf{B}, \mathbf{u}^*) & = -\nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{V} \end{cases} \tag{5.8}$$

5.1.3 Propriété de décroissance de l'énergie

On peut montrer facilement que la formulation (5.8) vérifie la propriété de conservation de l'énergie totale de la MHD. Cette dernière est constituée par l'énergie magnétique et l'énergie cinétique. Elle est définie par :

$$\mathscr{E} = \int_\Omega \frac{\mathbf{B}^2 + \mathbf{u}^2}{2}$$

En prenant $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}$ et $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$ dans (5.8), et en additionnant les deux équations, on obtient

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{B}, \mathbf{B}) - a_1(\mathbf{B}; \mathbf{u}, \mathbf{B}) + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{u}) - a_1(\mathbf{B}; \mathbf{B}, \mathbf{u}) = -(\eta a_0(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \tag{5.9}$$

Utilisant les identités (5.6), on obtient que la formulation (5.8) vérifie la propriété suivante :

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -(\eta a_0(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \tag{5.10}$$

Ce résultat joue un rôle important sur la stabilité du schéma numérique utilisé pour approcher le problème (5.8). Il permet aussi de mettre en cohérence les résultats numériques et les propriétés physiques.

5.2 Formulation fonction de courant

5.2.1 Formulation faible

Dans le chapitre précédent, théorème (4.1.1), nous avons vu que tout vecteur $\mathbf{u}$ à divergence nulle peut s'identifier au rotationnel d'une quantité

scalaire $\phi \in \mathbf{\Psi}$ par

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl}\ \phi$$

avec

$$\mathbf{\Psi} = \{\phi \in H^2(\Omega); \phi|_{\partial\Omega} = 0, \partial\phi/\partial n = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega\}$$

et que l'opérateur **curl** réalise un isomorphisme entre les espaces $\mathbf{\Psi}$ et $\mathbf{V}$. Sur ce, au lieu de chercher un couple de vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B} \in (\mathbf{V})^2$ nous remplacerons simplement $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B}$ dans ces équations par leur représentation en terme de rotationnel d'un scalaire. Le problème (5.8) peut donc être remplacé par la formulation alternative suivante :

Trouver un couple $(\phi, \psi) \in \mathbf{\Psi} \times \mathbf{\Psi}$ tel que :

$$\begin{aligned}
&(\frac{\partial \mathbf{curl}\ \psi}{\partial t}, \mathbf{curl}\ \psi^*) + a_1(\mathbf{curl}\ \phi; \mathbf{curl}\ \psi, \mathbf{curl}\ \psi^*) - a_1(\mathbf{curl}\ \psi; \mathbf{curl}\ \phi, \mathbf{curl}\ \psi^*) = \\
&-\eta a_0(\mathbf{curl}\ \psi, \mathbf{curl}\ \psi^*) \quad \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \\
&(\frac{\partial \mathbf{curl}\ \phi}{\partial t}, \mathbf{curl}\ \phi^*) + a_1(\mathbf{curl}\ \phi; \mathbf{curl}\ \phi, \mathbf{curl}\ \phi^*) - a_1(\mathbf{curl}\ \psi; \mathbf{curl}\ \psi, \mathbf{curl}\ \phi^*) = \\
&-\nu a_0(\mathbf{curl}\ \phi, \mathbf{curl}\ \phi^*) \quad \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Exprimons les formes $a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ en terme de fonctions scalaires comme ça a été fait dans le paragraphe (4.1.2).
Posons $\mathbf{u} = \mathbf{curl}\ \phi$, $\mathbf{v} = \mathbf{curl}\ \chi$, et $\mathbf{w} = \mathbf{curl}\ \psi$.
En appliquant les mêmes techniques que dans le paragraphe (4.1.2), on obtient l'expression suivante pour a_0 :

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\Delta\phi, \Delta\chi) \tag{5.12}$$

L'expression généralisée de $a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ en terme de fonction scalaire étant assez complexe, utilisons d'abord l'identité vectorielle suivante qui est valide pour tout vecteur à divergence nulle [7] :

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \nabla \times \mathbf{u}]$$

Et donc

$$a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \nabla \times \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} dx$$

En prenant $\mathbf{u} = \mathbf{curl}\ \phi, \mathbf{w} = \mathbf{curl}\ \zeta, \mathbf{v} = \mathbf{curl}\ \chi$, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{curl}\ \chi &= \int_\Omega (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \chi = -\int_\Omega (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \Delta\chi \\ &= \int_\Omega [\zeta, \phi] \Delta\chi\end{aligned}$$

où nous avons défini le crochet de Poisson $[.,.]$ par :

$$[a, b] = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a$$

On a aussi :

$$\int_\Omega (\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega (\mathbf{u} \times \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \zeta) \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega [\phi, \chi] \Delta\zeta$$

Par symétrie, on obtient :

$$\int_\Omega (\mathbf{w} \times \nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega (\mathbf{w} \times \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \phi) \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega [\zeta, \chi] \Delta\phi$$

On trouve finalement l'expression générale de a_1 en terme de fonctions scalaires :

$$a_1(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_1(\zeta; \phi, \chi) = \frac{1}{2} \int_\Omega [\zeta, \phi] \Delta\chi + [\chi, \phi] \Delta\zeta + [\chi, \zeta] \Delta\phi dx \tag{5.13}$$

Pour obtenir l'expression scalaire des termes des dérivées temporelles, on utilise l'égalité suivante :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{curl}\ \phi, \mathbf{curl}\ \chi) = (\phi, \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \chi) = -(\phi, \Delta\chi) = (\nabla\phi, \nabla\chi) \tag{5.14}$$

Ces résultats nous permettent d'exprimer le problème (5.11) en terme de champs scalaire : Trouver un couple $(\phi, \psi) \in \mathbf{\Psi} \times \mathbf{\Psi}$ tel que :

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial \nabla\psi}{\partial t}, \nabla\psi^*) + \displaystyle\int_\Omega [\phi, \psi] \Delta\psi^* dx = -\eta(\Delta\psi, \Delta\psi^*) & \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.15.a) \\ (\dfrac{\partial \nabla\phi}{\partial t}, \nabla\phi^*) + \displaystyle\int_\Omega [\phi^*, \phi] \Delta\phi - [\phi^*, \psi] \Delta\psi = -\nu(\Delta\phi, \Delta\phi^*) & \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.15.b) \end{cases}$$

À partir de maintenant, nous allons modifier les notations et exprimer les formes a_0 et a_1 en terme de fonctions scalaires comme dans [22]. On utilise ainsi les formes suivantes :

$$a_1(\zeta; \phi, \chi) = \int_\Omega \Delta\zeta [\chi, \phi] dx \tag{5.16}$$

et

$$a_0(\phi, \chi) = (\Delta\phi, \Delta\chi)$$

La forme trilinéaire a_1 vérifie l'inégalité suivante, qui est prouvée dans [22] : Il existe une constante $\Gamma_1 > 0$ tel que :

$$a_1(\zeta; \phi, \chi) \leq \Gamma_1 |\zeta|_2 |\phi|_2 |\chi|_2 \tag{5.17}$$

Et comme pour une fonction $u \in H_0^2$, $||\Delta u||_0 = |u|_2$, on a alors le résultat de continuité suivant pour la forme bilinéaire a_0 dans H_0^2

$$a_0(\phi, \chi) \leq |\phi|_2 |\chi|_2 \tag{5.18}$$

Avec ces nouvelles notations, le problème (5.15) devient : Trouver un couple $(\phi, \psi) \in \mathbf{\Psi} \times \mathbf{\Psi}$ tel que :

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial \nabla \psi}{\partial t}, \nabla \psi^*) + a_1(\psi^*; \psi, \phi) + \eta a_0(\psi, \psi^*) = 0 & \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.19.a) \\ (\dfrac{\partial \nabla \phi}{\partial t}, \nabla \phi^*) + a_1(\phi; \phi, \phi^*) - a_1(\psi; \psi, \phi^*) + \nu a_0(\phi, \phi^*) = & \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.19.b) \end{cases}$$

Notons que (5.19) n'est pas exactement la formulation faible du problème (5.1), nous allons définir la formulation forte associée au problème (5.19).

Formulation forte alternative des équations scalaires

Appliquons une intégration par partie au système (5.15) et utilisons les propriétés des opérateurs rotationnels, vectoriel et scalaire montrées dans le paragraphe (4.1.1) du chapitre précédent. On a :

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial \mathbf{curl}\ \psi}{\partial t} - \mathbf{curl}\ ([\phi, \psi]) - \eta \mathbf{curl}\ \Delta\psi, \mathbf{curl}\ \psi^*) = 0 & \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.20.a) \\ (\dfrac{\partial \mathbf{curl}\ \phi}{\partial t} - \Delta\phi\nabla\phi + \Delta\psi\nabla\psi - \nu \mathbf{curl}\ \Delta\phi, \mathbf{curl}\ \phi^*) & \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.20.b) \end{cases}$$

La formule de Green (4.8) appliquée au problème (5.20), donne

$$\begin{cases} (\dfrac{\partial \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \psi}{\partial t} - \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ ([\phi, \psi]) - \eta \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \Delta\psi, \psi^*) = 0 & \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.21.a) \\ (\dfrac{\partial \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \phi}{\partial t} - \mathtt{curl}\ (\Delta\phi\nabla\phi + \Delta\psi\nabla\psi) - \nu \mathtt{curl}\ \mathbf{curl}\ \Delta\phi, \phi^*) & \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.21.b) \end{cases}$$

On obtient la formulation forte alternative du problème (5.19) en terme de fonctions scalaires :
Trouver un couple $(\phi, \psi) \in C^4 \times C^4$ tel que :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \Delta([\phi,\psi]) + \eta\Delta^2\psi &= 0 \quad (5.22.a) \\ -\dfrac{\partial \Delta\phi}{\partial t} - [\Delta\phi,\phi] + [\Delta\psi,\psi] + \nu\Delta^2\phi &= 0 \quad (5.22.b) \end{cases}$$

Remarque 5.2.1. *Posons* $\omega = \texttt{curl}\ \mathbf{u} = -\Delta\phi$ *et* $J = \texttt{curl}\ \mathbf{B} = -\Delta\psi$*, ces variables sont connues respectivement, comme étant la* vorticité *et le* courant *. Le problème* (5.22) *peut être interprété comme l'équation d'évolution de la vorticité et du courant.*

1. *L'équation (5.22.a) représente la forme forte de l'équation de courant utilisée par exemple dans [63]. Dans plusieurs travaux, [44, 29] par exemple, au lieu de (5.22.a), on utilise directement, le fait que* $\mathbf{B} = \mathbf{curl}\,\psi$ *dans l'équation d'induction (5.1.a) et on retient l'équation d'évolution suivante du flux magnétique :*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + [\psi,\phi] - \eta\Delta\psi = 0 \tag{5.23}$$

   Cela peut sembler plus naturel et plus simple. Cependant, comme il a été remarqué dans [63], cette formulation brise la symétrie entre la vorticité et le courant dans le problème (5.15). D'un point de vue informatique, lorsqu'une méthode de type Galerkin est utilisée, cette symétrie assure un transfert exact entre les énergies cinétique et magnétique, ce qui conduit à une stabilité en énergie du schéma semi-discret.

2. *La plupart des auteurs [63, 49, 24, 47] utilisent une résolution directe sur les variables du courant et de vorticité pour coupler ensuite avec deux équations de Poisson pour* ψ *et* ϕ*, au lieu de la formulation fonction de courant pure sur les variables* ϕ *et* ψ*. Ils résolvent le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial t} + \Delta([\phi,\psi]) - \eta\Delta J &= 0 \quad (5.24.a) \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + [\omega,\phi] - [J,\psi] - \nu\Delta J &= 0 \quad (5.24.b) \\ -\Delta\phi &= \omega \quad (5.24.c) \\ -\Delta\psi &= J \quad (5.24.d) \end{cases}$$

Comme nous l'avons fait remarquer dans le chapitre précédent, cette formulation présente des difficultés sur la mise en place des conditions aux limites sur la vorticité et le courant. Les auteurs développent des solutions approchées pour définir leurs valeurs aux bords. De plus, une des difficultés vient du fait qu'on aura à résoudre 4 équations couplées au lieu de 2. Ces difficultés sont inexistantes en utilisant la formulation fonction de courant pure (5.22)*. Cependant, la résolution numérique de celle-ci nécessite des méthodes numériques plus régulières pour pouvoir bien approcher les dérivées du 4e ordre qui y apparaissent. Ce qui est bien le cas dans ce travail où nous allons appliquer une méthode éléments finis C^1 pour l'approximation numérique.*

Inégalité d'énergie du problème scalaire

En terme de fonctions de courants, l'énergie totale $\mathscr{E} = \int_\Omega \frac{\mathbf{B}^2+\mathbf{u}^2}{2}$ s'écrit :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\psi|^2 + |\nabla\phi|^2$$

Dans le paragraphe (5.1.3), nous avons montré que la formulation faible des équations primitives respecte la propriété de conservation de l'énergie du problème de la MHD. On peut facilement montrer que cette inégalité est aussi vérifiée en utilisant la formulation fonction de courant pure (5.15). En effet, en choisissant $(\psi^*, \phi^*) = (\psi, \phi)$, on obtient que le terme $[\phi^*, \phi]\Delta\phi$ disparait dans l'équation (5.15.a). Cela se traduit physiquement par le principe que le terme non linéaire $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ ne crée pas ou ne dissipe pas d'énergie mais est seulement un terme de redistribution.
Ensuite, en additionnant les équations (5.15.a) et (5.15.b), les termes $[\phi, \psi]\Delta\psi^*$ et $[\phi^*, \psi]\Delta\psi$ s'annulent, cela exprime que le travail de la force de Lorentz crée (ou dissipe) de l'énergie magnétique et on obtient la propriété suivante pour l'énergie totale du plasma :

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} + \nu(\Delta\phi, \Delta\phi) + \eta(\Delta\psi, \Delta\psi) = 0$$

5.2.2 Approximation éléments finis CT et analyse d'erreur

On s'intéresse à l'approximation spatiale du problème (5.19) par la méthode des éléments finis CT, introduite dans le chapitre (2). On considère alors la forme stationnaire de ce problème :

Trouver $(\psi, \phi) \in (\mathbf{\Psi})^2$ tels que :

$$a_1(\psi^*; \psi, \phi) + \eta a_0(\psi, \psi^*) = (g, \psi^*) \quad \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.25.a)$$

$$a_1(\phi; \phi, \phi^*) - a_1(\psi; \psi, \phi^*) + \nu a_0(\phi, \phi^*) = (f, \phi^*) \quad \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.25.b)$$

où nous avons introduit des fonctions sources f et g appartenant à $H^{-1}(\Omega)$.

On a le résultat de régularité suivant :

Théorème 5.2.1. *Posons $V = (\psi, \phi)$ et $F = (g, f)$. Les solutions de (5.25) vérifient la stabilité suivante*

$$|V|_2 \leq ||F||_{-2}/\bar{\nu} \tag{5.26}$$

Preuve. On choisit $\psi^* = \psi$ et $\phi^* = \phi$ dans (5.25). En additionnant les deux équations, et utilisant le fait que $a_1(\phi, \phi, \phi) = 0$, on obtient

$$\eta a_0(\psi, \psi) + \nu a_0(\phi, \phi) = (F, V)$$

dont nous déduisons :

$$\bar{\nu}|V|_2^2 = \bar{\nu}(\int_\Omega |\Delta\phi|^2 + \int_\Omega |\Delta\psi|^2) \leq (F, V) \leq |F|_{-2}|V|_2$$

avec $\bar{\nu} = \min(\nu, \eta)$.

Soit $\mathbf{\Psi}_h$ un espace d'éléments finis approchant de façon conforme l'espace $\mathbf{\Psi}$. L'approximation de Galerkin associée au problème (5.25) s'écrit :

Trouver $(\psi_h, \phi_h) \in (\mathbf{\Psi}_h)^2$ tels que

$$a_1(\psi_h^*; \psi_h, \phi_h) + \eta a_0(\psi_h, \psi_h^*) = (g, \psi_h^*) \quad \forall \psi_h^* \in \mathbf{\Psi_h} \quad (5.27.a)$$

$$a_1(\phi_h; \phi_h, \phi_h^*) - a_1(\psi_h; \psi_h, \phi_h^*) + \nu a_0(\phi_h, \phi_h^*) = (f, \phi_h^*) \quad \forall \phi_h^* \in \mathbf{\Psi_h} \quad (5.27.b)$$

Nous allons appliquer les éléments finis de Clough-Tocher réduits pour approcher le problème (5.27). Ce qui permettra de garantir une approximation conforme $\mathbf{\Psi_h}$ de $\mathbf{\Psi}$.
Présentons quelques résultats d'analyse d'erreur de cette méthode pour l'approximation du système (5.25).

Théorème 5.2.2. *Soit (ψ, ϕ) la solution du problème (5.25) dans $(\mathbf{\Psi})^2$ et (ψ_h, ϕ_h) la solution approchée du problème (5.27) dans $(\mathbf{\Psi_h})^2$. Posons $V = (\psi, \phi)$, $V_h = (\psi_h, \phi_h)$, $F = (g, f)$ et $\bar{\nu} = \max(\nu, \eta)$. On suppose que $\bar{\nu} > \theta$, avec $\theta = (2\Gamma_1||F||_2)^{1/2}$. Alors il existe $C(\nu, \eta) > 0$ telle que*

$$|V - V_h|_2 \leq C(\nu, \eta) \inf_{W_h \in (\mathbf{\Psi_h})^2} |V - W_h|_2$$

avec $C(\nu, \eta) = [1 + (\bar{\nu} - 2\Gamma_1||F||_2/\bar{\nu}))^{-1}(\nu + \eta + 4\Gamma_1)]$.

On rappelle que les normes d'un vecteur dans $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) \times H_0^m(\Omega)$ sont définies par

$$||\mathbf{u}||_m = \left(||\mathbf{u}_1||_m^2 + ||\mathbf{u}_2||_m^2\right)^{1/2} \quad m = 0, 1, 2, .. \tag{5.28}$$

$$|\mathbf{u}|_m = \left(|\mathbf{u}_1|_m^2 + |\mathbf{u}_2|_m^2\right)^{1/2} \quad m = 0, 1, 2, .. \tag{5.29}$$

Démonstration. Posons $e = V - V_h$.
La preuve est une simple adaptation de la démonstration donnée dans [22] pour une formulation scalaire du problème de Navier-Stokes incompressible. Comme l'approximation que nous considérons est conforme, la formulation (5.25) est valable pour tout $(\phi, \psi) \in (\mathbf{\Psi}_h)^2$. Ensuite, la différence entre le système (5.27) et (5.25) donne :

$$a_1(\psi_h^*; \psi, \phi) - a_1(\psi_h^*; \psi_h, \phi_h) + \eta a_0(\psi - \psi_h, \psi_h^*) = 0 \tag{5.30.a}$$

$$a_1(\phi; \phi, \phi_h^*) - a_1(\phi_h; \phi_h, \phi_h^*) - a_1(\psi; \psi, \phi_h^*) + a_1(\psi_h; \psi_h, \phi_h^*) + \nu a_0(\phi - \phi_h, \phi_h^*) = 0 \tag{5.30.b}$$

L'équation (5.30.a) s'écrit :

$$\begin{aligned} \eta a_0(\psi - \psi_h, \psi_h^*) &= -a_1(\psi_h^*, \psi, \phi) + a_1(\psi_h^*, \psi_h, \phi) - a_1(\psi_h^*, \psi_h, \phi) + a_1(\psi_h^*, \psi_h, \phi_h) \\ &= -a_1(\psi_h^*, \psi - \psi_h, \phi) - a_1(\psi_h^*, \psi_h, \phi - \phi_h) \end{aligned} \tag{5.31}$$

Décomposons l'erreur d'approximation $\psi - \psi_h$ en deux composantes $\psi - \psi_h = (\psi - \chi_h) + (\chi_h - \psi_h) = \lambda + \xi_h$ où χ_h est un éléments arbitraire de $\mathbf{\Psi_h}$ et notons que ξ_h est un élément de $\mathbf{\Psi_h}$. De manière analogue, l'erreur de la fonction du potentiel de vitesse $\phi - \phi_h$ est décomposée en deux composantes
$\phi - \phi_h = (\phi - \kappa_h) + (\kappa_h - \phi_h) = \delta + \zeta_h$ où $\zeta_h \in \mathbf{\Psi_h}$. En introduisant cette décomposition dans (5.31), on a :

$$\eta a_0(\xi_h, \psi_h^*) = -\eta a_0(\lambda, \psi_h^*) - a_1(\psi_h^*, \lambda + \xi_h, \phi) - a_1(\psi_h^*, \psi_h, \delta + \zeta_h)$$

or en prenant $\psi_h^* = \xi_h$

$$\begin{aligned} \eta|\xi_h|_2^2 = & -\eta a_0(\lambda, \xi_h) - a_1(\xi_h, \lambda, \phi) - a_1(\xi_h, \xi_h, \phi) \\ & -a_1(\xi_h, \psi_h, \delta) - a_1(\xi_h, \psi_h, \zeta_h) \end{aligned} \tag{5.32}$$

car $a_0(\xi_h, \xi_h) = |\xi_h|_2^2$.

Ensuite l'addition et soustraction de $a_1(\phi, \phi_h, \phi_h^*)$ et $a_1(\psi, \psi_h, \phi_h^*)$ à (5.30.b) donnent :

$$\begin{aligned} \nu a_0(\phi - \phi_h, \phi_h^*) = & -a_1(\phi, \phi - \phi_h, \phi_h^*) - a_1(\phi - \phi_h, \phi_h, \phi_h^*) \\ & +a_1(\psi, \psi - \psi_h, \phi_h^*) + a_1(\psi - \psi_h, \psi_h, \phi_h^*) \end{aligned} \tag{5.33}$$

Introduisons les décompositions des erreurs $\psi - \psi_h = \lambda + \xi_h$ et $\phi - \phi_h = \delta + \zeta_h$ et prenons $\phi_h^* = \zeta_h$ dans (5.33). On obtient :

$$\begin{aligned} \nu|\zeta_h|_2 = & -\nu a_0(\delta, \zeta_h) - a_1(\phi, \delta, \zeta_h) - a_1(\phi, \zeta_h, \zeta_h) \\ & -a_1(\delta, \phi_h, \zeta_h) - a_1(\zeta_h, \phi_h, \zeta_h) \\ & +a_1(\psi, \lambda, \zeta_h) + a_1(\psi, \xi_h, \zeta_h) \\ & +a_1(\lambda, \psi_h, \zeta_h) + a_1(\xi_h, \psi_h, \zeta_h) \end{aligned} \tag{5.34}$$

Maintenant additionnons (5.33) et (5.34), puis utilisons le fait que $a_1(\phi, \zeta_h, \zeta_h) = 0$), on obtient :

$$\begin{aligned} \nu|\zeta_h|_2^2 + \eta|\xi_h|_2^2 = & -\nu a_0(\delta, \zeta_h) - \eta a_0(\lambda, \xi_h) - a_1(\phi, \delta, \zeta_h) \\ & -a_1(\delta, \phi_h, \zeta_h) - a_1(\zeta_h, \phi_h, \zeta_h) \\ & +a_1(\psi, \lambda, \zeta_h) + a_1(\psi, \xi_h, \zeta_h) \\ & +a_1(\lambda, \psi_h, \zeta_h) \end{aligned} \tag{5.35}$$

On dénote par $e_h = (\zeta_h, \xi_h)$. En utilisant (5.17) et (5.18) et $|e_h|_2$ comme une majoration de $|\zeta_h|_2$ et $|\xi_h|_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\nu}|e_h|_2^2 \leq & \ \nu|\delta|_2|e_h|_2 + \eta|\lambda|_2|e_h|_2 + \Gamma_1|\phi_h|_2|e_h|_2^2 + \Gamma_1|\psi|_2|e_h|_2^2 + \\ & \Gamma_1[|\phi|_2|\delta|_2 + |\delta|_2|\phi_h|_2 + |\psi|_2|\lambda|_2 + |\lambda|_2|\psi_h|_2]|e_h|_2 \end{aligned} \tag{5.36}$$

En utilisant l'hypothèse $2\Gamma_1||F||_2 \leq (\bar{\nu})^2$, et le résultat de régularité (5.26), notons que ce résultat est aussi valable pour l'approximation de Galerkin dans $V_h = (\psi_h, \phi_h)$, on déduit :

$$\begin{aligned} (\bar{\nu} - 2\Gamma_1||F||_2/\bar{\nu})|e_h|_2^2 \leq & \ (\bar{\nu} - \Gamma_1|\phi_h|_2 - \Gamma_1|\psi|_2)|e_h|_2^2 \leq \nu|\delta|_2 e_h + \eta|\lambda|_2 e_h + \\ & \Gamma_1[|\phi|_2|\delta|_2 + |\delta|_2|\phi_h|_2 + |\psi|_2|\lambda|_2 + |\lambda|_2|\psi_h|_2]|e_h|_2 \end{aligned} \tag{5.37}$$

et donc :

$$\begin{aligned}(\bar{\nu} - 2\Gamma_1||F||_2/\bar{\nu})|e_h|_2 &\leq \nu|\delta|_2 + \eta|\lambda|_2 \\ &\Gamma_1[|\phi|_2|\delta|_2 + |\delta|_2|\phi_h|_2 + |\psi|_2|\lambda|_2 + |\lambda|_2|\psi_h|_2]\end{aligned} \tag{5.38}$$

le résultat de régularité (5.26) implique $|\phi_h|_2 \leq ||F||_2/\bar{\nu}$ et $|\psi|_2 \leq ||F||_2/\bar{\nu}$, ce qui entraine l'inégalité suivante

$$(\bar{\nu} - 2\Gamma_1||F||_2/\bar{\nu})|e_h|_2 \leq (\nu + \eta + 4\Gamma_1)|\bar{e}|_2 \tag{5.39}$$

où nous avons défini $\bar{e} = (\delta, \lambda)$.
Finalement, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$|e|_2 \leq |\bar{e}|_2 + |e_h|_2 \leq [1 + (\bar{\nu} - 2\Gamma_1||F||_2/\bar{\nu}))^{-1}(\nu + \eta + 4\Gamma_1)]|\bar{e}|_2 \tag{5.40}$$

Comme

$$\begin{aligned}|\bar{e}|_2^2 &= |\lambda|_2^2 + |\delta|_2^2 \\ &= |\psi - (\psi_h - \xi_h)|_2^2 + |\phi - (\phi_h + \zeta_h)|_2^2, \quad \forall(\xi_h, \zeta_h) \in (\mathbf{\Psi}_h)^2\end{aligned}$$

alors

$$|e|_2 \leq [1 + (\bar{\nu} - 2\Gamma_1||F||_2/\bar{\nu}))^{-1}(\nu + \eta + 4\Gamma_1)] \inf_{W_h \in (\mathbf{\Psi_h})^2} |V - W_h|_2 \tag{5.41}$$

D'où la conclusion. □

Le résultat du théorème (5.2.2) donne une estimation de l'erreur en norme H^2 qui est valable pour des petites valeurs des nombres de Reynolds fluide (Re) et magnétique (Rm). Cette estimation n'est pas forcement vérifiée pour des grandes valeurs de Reynold.

Corollaire 5.2.3. *Supposons que $V = (\psi, \phi) \in (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega))^2$. Donc en utilisant les hypothèses du théorème (5.2.2), on obtient le résultat suivant : il existe une constante positive C_2 tel que*

$$|V - V_h|_2 \leq C_2 h|V|_3 \tag{5.42}$$

Ce résultat est une conséquence directe du théorème (5.2.2) et l'estimation de l'erreur d'interpolation des éléments finis CT, établie dans le théorème (2.2.1) du chapitre (2)

5.2.3 Discrétisation temporelle

Un schéma temporel très courant pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressible est le schéma d'Adam-Bashforth et Crank-Nicholson (ABCN), où on utilise un schéma explicite d'ordre 2 d'Adam-Bashforth pour discrétiser le terme non linéaire et le schéma semi-implicite de Crank-Nicholson pour discrétiser les termes linéaires [55] . Nous utiliserons la même technique pour discrétiser notre problème :

$$\begin{cases} (\frac{\nabla\psi^{n+1}-\nabla\psi^n}{dt}, \nabla\psi^*) + \theta\eta a_0(\psi^{n+1}, \psi^*) + (1-\theta)\eta a_0(\psi^n, \psi^*) = \\ \qquad\qquad \frac{1}{2}[a_1(\psi^*; \psi^{n-1}, \phi^{n-1}) - 3a_1(\psi^*; \psi^n, \phi^n)] \\ (\frac{\nabla\phi^{n+1}-\nabla\phi^n}{dt}, \nabla\phi^*) + \theta\nu a_0(\phi^{n+1}, \phi^*) + (1-\theta)\nu a_0(\phi^n, \phi^*) = \\ \qquad\qquad \frac{1}{2}[\Lambda(\phi^{n-1}, \psi^{n-1}, \phi^*) - 3\Lambda(\phi^n, \psi^n, \phi^*)] \end{cases} \tag{5.43}$$

avec $\theta = 1/2$, et

$$\Lambda(\phi, \psi, \phi^*) = a_1(\phi; \phi, \phi^*) - a_1(\psi; \psi, \phi^*)$$

Ce couplage permet d'avoir un schéma d'ordre 2 en temps (à priori) tout en minimisant le temps et le coût des calculs. En effet, on aura à inverser une matrice qu'on calculera une seule fois, sans avoir besoin de la mettre à jour au cours du temps. Les termes non linéaires étant des vecteurs, leur implémentation est facile à mettre en œuvre et moins couteuse. Numériquement, nous avons constaté que ce schéma est stable sous une condition CFL que nous n'avons pas estimé théoriquement. On adaptera le pas de temps de façon à obtenir une stabilité numérique du schéma. On utilisera ainsi l'expression suivante pour le choix du pas de temps :

$$dt = \frac{\alpha h}{\max(\sqrt{|\nabla\phi|^2}, \sqrt{|\nabla\psi|^2})} \tag{5.44}$$

avec α un paramètre à choisir en fonction du problème étudié, de façon à assurer la stabilité numérique du schéma et h représente la taille minimale du maillage.

5.3 Résultats numériques

Nous allons résoudre numériquement le problème (5.19) en utilisant la méthode des éléments finis réduits de Clough-Tocher (CT) décrite dans le chapitre (2). D'abord, on étudiera la convergence numérique de cette méthode pour l'approximation des équations de la MHD réduite. A défaut d'avoir une solution exacte de ces équations, on utilisera la méthode des solutions manufacturées pour l'étude de la convergence. Ensuite, on va résoudra un problème particulier des instabilités du plasma appelé : "*instabilité du tilt*. Les résultats obtenus seront comparés avec d'autres déjà présent dans la littérature.

Pour calculer numériquement les intégrales apparaissant dans la formulation faible (5.19), nous utiliserons une formule de quadrature à 6 points sur chaque sous triangles CT. Cette formule est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égale à 4.
La méthode de Galerkin couplée avec le schéma en temps (5.43), consiste à résoudre à chaque itération temporelle, deux systèmes linéaires de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{K_1}\mathbf{\Phi} &= \mathbf{F_1} \\ \mathbf{K_2}\mathbf{\Psi} &= \mathbf{F_2} \end{aligned} \tag{5.45}$$

avec $\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}$ deux matrices, $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$ deux vecteurs et Φ et Ψ deux vecteurs contenant les degrés de liberté associés aux fonctions ϕ et ψ, respectivement.

Pour prendre en compte les conditions aux limites dans la résolution des systèmes linéaires (5.45), nous modifierons les lignes des matrices $\mathbf{K_1}$ et $\mathbf{K_2}$ correspondantes aux nœuds du bord, en remplaçant les éléments diagonaux par 1 et les éléments hors diagonaux par 0. Ensuite, on remplacera les valeurs des vecteurs $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ correspondantes aux indices du bord par la valeur exacte des solutions à ces nœuds du bord (voir paragraphe (2.3.2), pour plus de détails).

5.3.1 Solutions manufacturées

Pour étudier l'ordre de convergence de la discrétisation spatiale du système (5.25), nous utiliserons la méthode des solutions manufacturées. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière supposée lipschitzienne. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \eta\Delta^2\psi - \Delta([\phi,\psi]) = f & \text{dans } \Omega \quad (5.46.a) \\ \nu\Delta^2\phi - [\Delta\phi,\phi] + [\Delta\psi,\psi] = g & \text{dans } \Omega \quad (5.46.b) \end{cases}$$

où f et g sont des termes sources obtenus en remplaçant les inconnues du système par des solutions exactes ϕ et ψ. On choisit comme solutions exactes,

$$\begin{cases} \phi(x,y) &= x^3(1-x)y^3(1-y) \\ \psi(x,y) &= x^2(1-x)^2y^2(1-y) \end{cases} \tag{5.47}$$

Pour résoudre numériquement le système non linéaire (5.46), nous utiliserons une méthode de pseudo avancée en temps et résoudrons un système non stationnaire jusqu'à la convergence vers les solutions statiques. Le système à résoudre est donc le suivant :

$$-\partial_t\Delta\psi + \texttt{curl}\,(\Delta\psi\nabla\psi - \Delta\phi\nabla\phi) + \nu\Delta^2\phi \quad = 0 \quad (5.48.a)$$

$$-\partial_t\Delta\phi + \Delta([\phi,\psi]) + \eta\Delta^2\psi \quad = 0 \quad (5.48.b)$$

On utilisera le schéma en temps développé dans (5.43) pour la résolution temporelle du système (5.48). La convergence vers les solutions stationnaires est supposée atteinte, lorsque la norme L^2 des deux termes du résidus est inférieure à 10^{-8}. Ces normes sont données par

$$\text{Res}_\phi = \frac{1}{dt}\sqrt{\int_\Omega |\phi^{n+1} - \phi^n|^2}$$

$$\text{Res}_\psi = \frac{1}{dt}\sqrt{\int_\Omega |\psi^{n+1} - \psi^n|^2}$$

On considérera un domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, qui sera discrétisé en $2(N+1)^2$ éléments triangulaires structurés comme dans la figure (4.1), $(N = 16, 32, 64, 128)$.
Les conditions au limites du système (5.48) seront données par les solutions exactes (5.47) évaluées aux noeuds du bord.

Après convergence du système non linéaire, les erreurs d'approximations des deux solutions seront calculées par

$$\begin{aligned} e_\phi &= |\phi - \phi_h|_k \\ e_\psi &= |\psi - \psi_h|_k \end{aligned} \tag{5.49}$$

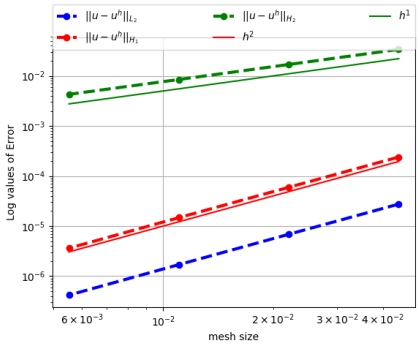
où ϕ, ψ sont les solutions exactes, ϕ_h, ψ_h sont les solutions approchées et $|.|_k$ représente la semi norme H^k définie par

$$|v|_m = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha v|^2 \right)^{1/2} \qquad k = 0, 1, 2, .., m \tag{5.50}$$

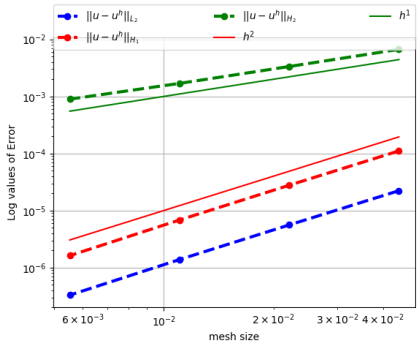
Dans la figure (5.1), on représente les variations des erreurs (5.49) en fonction de la taille du maillage et pour différentes valeurs du nombre de Reynold du fluide (Re) et du Reynold magnétique (Rm). Ces figures sont représentées en échelle logarithmique. On observe que pour des petites valeurs de Re=Rm = 10, la convergence est d'ordre 1 pour la norme H^2. Ce qui est conforme au résultat du corollaire (5.2.3). On obtient aussi une convergence d'ordre 2 pour les normes H^1 et L^2. Bien que nous n'avons pas fait une estimation théorique de ces deux dernières normes, on peut tout au moins constater que cette convergence est la même que celle obtenue théoriquement et numériquement, dans le problème de Navier-Stokes incompressible (voir chapitre (4)), qui constitue un sous problème de la MHD réduite incompressible. Notons aussi qu'on a une convergence d'ordre 2 pour la norme H^1 au lieu de $3/2$ comme prévu théoriquement dans l'approximation du problème du bilaplacien (voir théorème (3.2.1)) ou dans celui de Navier-Stokes incompressible (voir théorème (4.33)). Ce résultat nous laisse penser que soit l'estimation d'ordre $3/2$ pour la norme H^1 n'est pas optimale, soit c'est dû au fait que les solutions exactes choisies sont plus régulières.
Pour des grandes valeurs de Re et Rm, nous n'avons pas d'estimations théoriques des erreurs (5.49), mais on obtient néanmoins les mêmes ordres de convergence pour les normes H^2 et H^1 et une meilleure convergence pour la norme L^2 (ordre 3).

5.3.2 Instabilités du tilt

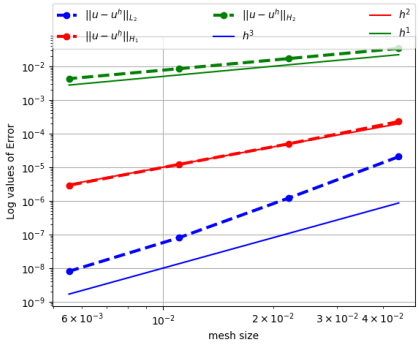
Dan ce cas test, on applique la méthode des éléments finis CT décrite dans le chapitre (2) pour simuler un problème d'instabilité bidimensionnel du plasma appelé : instabilité du tilt. Ce problème est largement utilisé par la communauté de la physique des plasmas pour la validation des codes MHD [49, 63, 45, 24]. Le principe consiste à partir d'une condition initiale d'équilibre stationnaire du plasma, en rajoutant une petite perturbation sur la vitesse. Une fois l'équilibre perturbé, il s'effectue un transfert de l'énergie magnétique en énergie cinétique. Cette énergie cinétique croit de façon exponentielle sous la forme $e^{\gamma t}$ pendant la phase linéaire [49, 24].



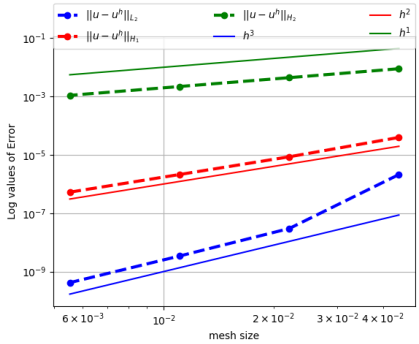
(a) Erreurs en ϕ, Re = 10



(b) Erreurs en ψ, Rm = 10



(c) Erreurs en ϕ, Re = 1000



(d) Erreurs en ψ, Rm = 1000

FIGURE 5.1 – Variations des semi normes $||.||_k$ des erreurs en ψ et ϕ en fonction du pas du maillage, pour des valeurs de Reynolds Re = Rm 10 (haut) et Re = Rm = 1000 (bas).

Après cette phase, des instabilités MHD apparaissent dans les régions de fort gradient de courant.

La condition d'équilibre initiale du flux magnétique ψ est le vortex bipolaire définie par [49] :

$$\psi_0(r,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{kJ_0(k)} J_1(kr)\cos(\theta), & \text{si } r < 1 \\ (r - 1/r)\cos(\theta), & \text{si } r \geq 1 \\ J_1(k) = 0 \end{cases} \tag{5.51}$$

où $c = 2/(kJ_0(k))$, J_0 et J_1 sont des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 respectivement, et k est la première racine de la fonction J_1. On utilisera la valeur numérique de $k = 3.83170597020751$ dans nos calculs.

Pour initialiser le potentiel de vitesse, on rajoute la perturbation suivante :

$$\phi_0(x,y) = \phi(x,y,0) = \epsilon \exp(-(x^2 + y^2)), \text{ with } \epsilon = 10^-4 \tag{5.52}$$

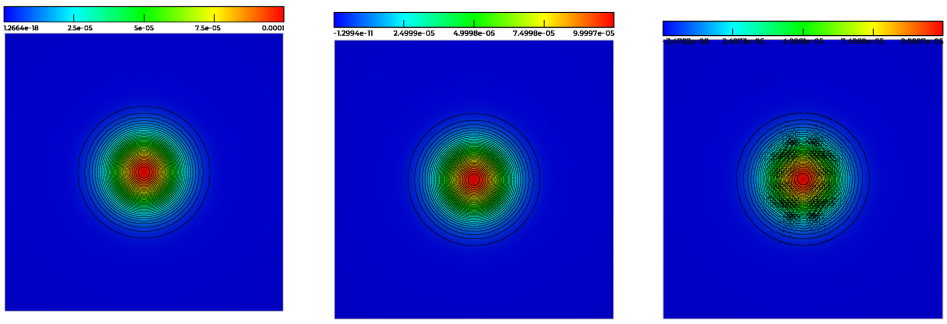
On considère les conditions aux limites suivantes sur les deux variables :

$$\phi(x,y,t) = 0 \text{ et } \psi(x,y,t) = \psi(x,y,0) \ \forall (x,y) \in \partial\Omega$$

où le domaine de calcul est $\Omega = [-4,4] \times [-4,4]$ qui est discrétisé en maillage triangulaire comme dans la figure (4.1).

Le plasma est supposé idéal $(\eta = 0)$ et une viscosité cinématique $\mu = 0.005$ sera utilisé dans toutes les simulations.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'évaluation des instabilités physiques qui apparaissent lorsque l'équilibre est perturbé. Il est donc nécessaire d'avoir un schéma qui préserve l'équilibre initial de façon précise, sinon des erreurs numériques du schéma peuvent dominer les petites perturbations et entrainer une croissance rapide des instabilités. Praveen et al [24] par exemple, ont rencontré ce problème en utilisant une méthode de type Galerkin discontinu. Pour garantir la préservation de l'équilibre du schéma numérique, ils ont retiré l'équation de celui dans l'équation d'induction non stationnaire. Ce qui reviendrait à résoudre le système suivant en utilisant la formulation (5.19) :



(a) (b) (c)

FIGURE 5.2 – Vorticity solution in tilt instability problem : (a) initial, (b) solution with well-balanced scheme after one time step, (c) solution without well-balanced scheme after one time step

$$(\frac{\partial \nabla \psi}{\partial t}, \nabla \psi^*) + a_1(\psi^*, \psi, \phi) + \eta a_0(\psi, \psi^*) = 0 \qquad \forall \psi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.53.a)$$

$$(\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t}, \nabla \phi^*) + a_1(\phi, \phi, \phi^*) - a_1(\psi, \psi, \phi^*) + \nu a_0(\phi, \phi^*) = -a_1(\psi_0, \psi_0, \phi^*) \quad \forall \phi^* \in \mathbf{\Psi} \quad (5.53.b)$$

avec ψ_0 le flux magnétique à l'équilibre défini dans (5.51).

Dans la figure (5.2), nous avons présenté les deux solutions du potentiel de vitesse après une itération en temps, en utilisant le schéma sans soustraction de l'équilibre (5.19) et avec soustraction de l'équilibre (5.53). La solution sans la soustraction de l'équilibre (5.2.b) n'est pas très différente de celle avec la soustraction (5.2.c), contrairement aux résultats de Praveen et al [24] où le schéma sans la préservation de l'équilibre est instable et la solution devient chaotique après la première itération en temps.

Taux de croissance des instabilités

Une des quantités les plus importantes de ce problème est le taux de croissance des instabilités. Il est montré dans [49, 24] que l'énergie cinétique croît de manière exponentielle comme $e^{\gamma t}$. Le taux de croissance des instabilités est la moitié du taux auquel l'énergie cinétique croît avec le temps. Ce taux est calculé entre les temps 4 et 6 unités. L'évolution temporelle de l'énergie cinétique est illustrée sur la figure. 5.3. On obtient un taux de croissance $\gamma = 1,33$ dans un maillage de 32768 éléments. Nous pouvons voir sur cette figure que nous avons le même taux de croissance pour un

Références	nombre d'éléments	régularité de la méthode	(μ, η)	taux de croissance
[49]	32768	p = 1 et C^0	(0.005, 0)	1.34
[49]	32768	p = 4 and C^0	(0.005, 0)	1.30
[24]	32092	p = 1 et C^0	(0.005,0)	1.35
[24]	32092	p = 2 et C^0	(0.005,0)	1.34
[45]	3200	p = 5 et C^1	(0.005,0.001)	1.28
Présent	32768	p = 3 et C^1	(0.005,0)	1.33

TABLE 5.1 – Valeurs du taux de croissance de l'énergie cinétique comparées à d'autres résultats de la littérature. p représente le degré d'approximation polynômial

schéma avec ou sans la soustraction de l'équilibre. En effet, le schéma sans préservation de l'équilibre réalise un petit pic au début de la simulation puis se stabilise ensuite pour reprendre la croissance attendue.
Dans [24], ils utilisent des éléments finis de Galerkin discontinus pour résoudre ce problème et ils obtiennent un taux de 1,39 dans un maillage grossiers et un taux de 1,34 dans un maillage très fin. En utilisant des éléments finis de Lagrange P_1, couplée avec une procédure d'adaptation automatique du maillage, Strauss [49] trouve un taux de croissance entre 1,30 et 1,34 dans un maillage avec le même nombre d'éléments que nous. Ces valeurs varient en fonction du degré de raffinement polynômial. Plus leur degré de raffinement est élevé, plus le taux est petit.

Dans le tableau (5.1), on compare les valeurs de ce taux de croissance avec d'autres résultats disponibles dans la littérature. Nos résultats sont en bon accord avec ceux déjà publiés. On observe dans ce tableau que Jardin [45] trouve un taux de croissance de 1.28, en utilisant des éléments finis de régularité C^1 avec une approximation polynômiale de degré 5. Cette petite valeur du taux peut être due au fait qu'il pris une valeur non nulle de la résistivité. On constate aussi que plus la méthode est précise, plus le taux de croissance est faible.

Résultats numériques du tilt

Dans cette partie, nous illustrons l'évolution au cours du temps des variables physiques du problème. Les solutions sont calculées sur une grille de 32768 éléments qui est similaire à celle utilisée dans [49] et [24].

D'abord, dans la figure (5.4), nous avons présenté les lignes de champs de la vitesse et du champs magnétique. On peut voir à partir de cette fi-

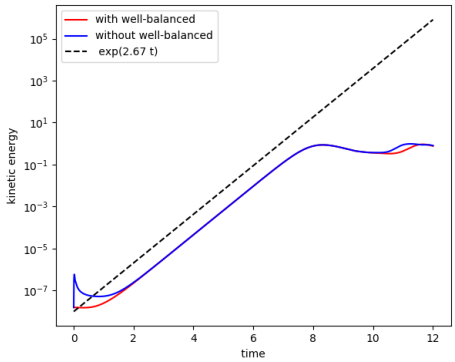


FIGURE 5.3 – Croissance de l'énergie cinétique en utilisant un schéma avec et sans la préservation de l'équilibre.

gure que les tourbillons magnétiques tournent et s'alignent horizontalement dans le domaine. La vitesse également illustrée dans cette figure, indiquent que le mouvement de l'instabilité est dû à la rotation des tourbillons autour de l'origine et du déplacement des lignes de champs magnétiques de part et autre suivant la direction horizontale. Lorsque les tourbillons tournent, des lignes de champ magnétique de direction opposée se croisent sur les bords d'attaque des tourbillons.

Dans la figure (5.5), nous montrons l'évolution du potentiel de vitesse ϕ et du flux magnétique ψ au cours du temps. Le vortex bipolaire du flux magnétique initialement formé au centre du domaine s'aligne également de façon horizontale sous l'effet du champ magnétique environnant. Ce phénomène a été observé dans les résultats des références citées ci-dessus. Et nos résultats restent en bon accord avec les leurs. Au-delà d'un temps d'environ 8 unités, les instabilités commencent à s'amplifier et à développer des régions à fort gradient et potentiel qui ne peuvent être résolues avec précision par le maillage. Néanmoins, nos calculs restent toujours stables numériquement. Pour améliorer cette situation, nous pouvons effectuer la simulation en utilisant une procédure d'adaptation du maillage qui permettra d'affiner fortement les régions de fortes gradient. Cette technique ne sera pas abordée dans ce travail. Néanmoins, notons que pour bien raffiner les régions de fortes gradients, il va falloir effectuer l'adaptation suivant la fonction du courant J, définie par $J = -\Delta\psi$.

Pour visualiser les solutions, nous avons utilisé le logiciel Calife. C'est un outil qui permet de visualiser un polynôme de degré k dans une triangulation avec des pixels exactes [51].

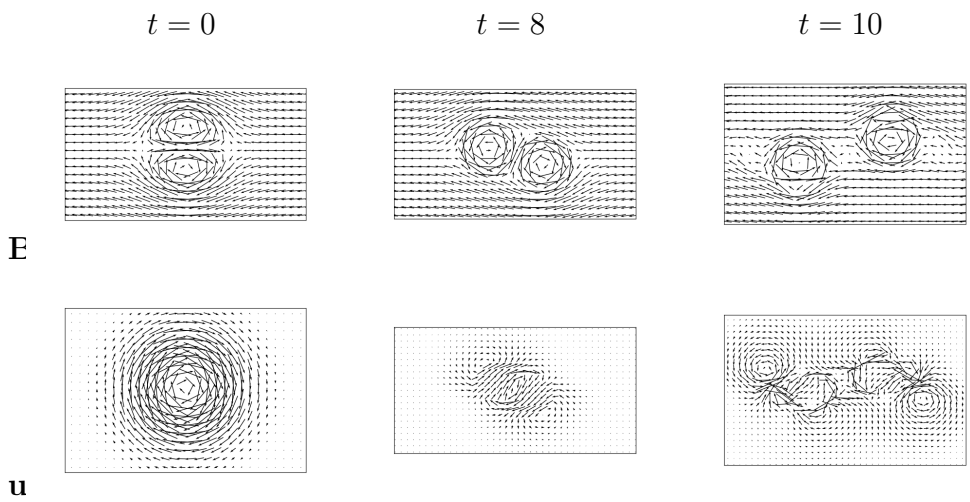


FIGURE 5.4 – Du haut en bas, représentation du champs magnétique et de la vitesse. De gauche à droite, résultats à l'instant t = 0, t = 8 et t = 10 respectivement.

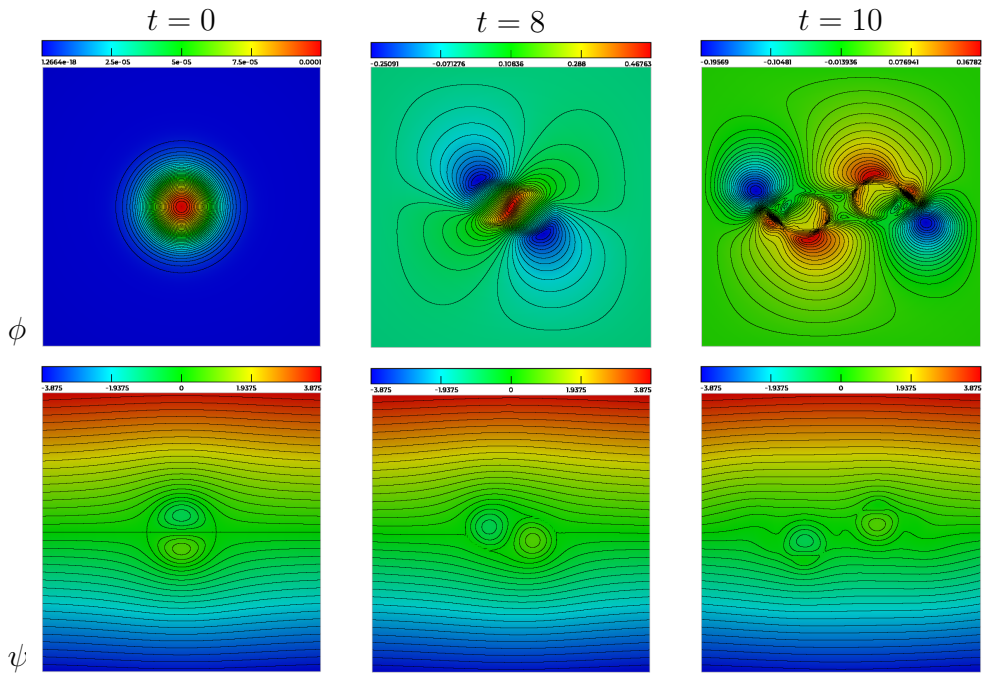


FIGURE 5.5 – Du haut en bas, représentation respective du potentiel de vitesse et du flux magnétique. De gauche à droite, résultats à l'instant t = 0, t = 8 and t = 10 respectivement. Les solutions sont calculées dans un domaine $\Omega = [-4, 4] \times [-4, 4]$ discrétisé en 32768 triangles.

Conclusions et perspectives

Ce travail s'est focalisé sur le développement d'une méthode éléments finis de régularité C^1 pour la simulation des plasmas de fusion dans les tokamaks.

Dans le chapitre (1), nous avons détaillé les modèles de magnétohydrodynamique(MHD) décrivant la dynamique des plasma magnétisé. En ce sens, nous avons présenté un modèle bi-fluide obtenu à partir des trois premiers moments de l'équation de Boltzmann. Après adimensionnement et sous quelques hypothèses posées sur les paramètres des équations, nous avons obtenu un modèle mono-fluide. Le couplage du modèle mono-fluide avec les équations de Maxwell nous a permis d'obtenir les équations de MHD. Ainsi, avec différentes hypothèses de simplification des paramètres, nous avons énuméré quelques formes particulières des équations de la MHD : MHD réduite, MHD resistive et incompressible et MHD de Hall.

Pour résoudre les équations de la MHD, nous avons choisi d'utiliser une méthode de type éléments finis. Cependant, l'introduction d'une fonction de courant pour le champs magnétique et la vitesse, conduit à un système d'équation d'ordre 4 pour lequel il est nécessaire d'avoir des éléments finis de régularité au moins C^1 pour avoir une approximation conforme des équations. Après un bref rappel de la méthode des éléments finis en général, nous avons présenté dans le chapitre (2), une méthode de régularité C^1 sur une triangulation, les éléments dits de Clough-Tocher réduits. C'est une méthode dont les degrés de libertés ne sont portés que par les nœuds du maillage. Chaque nœud possède 3 degré de libertés et les 9 fonctions de bases forment une base réduite de l'espace des polynômes de degré 3. Ensuite, les différentes techniques utilisées pour imposer les conditions aux limites dans les équations discrètes sont présentées dans ce chapitre.

L'implémentation informatique de la méthode CT a été validée, dans le chapitre (3), par l'étude de différents problème elliptiques simples :

équation de Poisson, problèmes bi-harmonique. Une étude de convergence théorique a été aussi réalisée pour ces problèmes. Ensuite, la résolution de l'équation d'équilibre du plasma dans les tokamaks dans une configuration axisymétrique, l'équation de Grad-Shafranov a été abordée dans ce chapitre. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux obtenus par des éléments finis P1 du code d'équilibre plasma NICE, une méthode utilisant des éléments finis d'Hermite-Bezier sur des quadrangles utilisés dans le code MHD JOREK et la solution obtenue par le code EFIT, couramment utilisé par la communauté des physiciens des plasmas. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats précédents.

Dans cette thèse, nous nous sommes principalement intéressé à l'étude des modèles de la MHD incompressible dans une formulation fonction de courant pure. Cette approche permet de satisfaire de façon naturelle, les contraintes de divergence nulle sur le champs magnétique et la vitesse. Dans le chapitre (4), nous avons d'abord utilisé cette approche pour étudier le problème de Navier-Stokes incompressible qui constitue un sous modèle de la MHD incompressible. D'un point de vue théorique, nous avons introduit une discrétisation en temps et en espace qui permet d'avoir une conservation de l'énergie des équations discrètes. Ensuite, une étude de convergence à la fois théorique et numérique a été réalisée pour ce problème, pour des petites valeurs du nombre de Reynolds. Les résultats obtenus, comme ceux du problème de la cavité entrainée, montrent de très bonnes performances de la méthode CT.

Enfin, dans le chapitre (5), nous avons étendu ce schéma numérique aux équations de la MHD incompressible. Nous avons prouvé que cette discrétisation, permet la décroissance de l'énergie totale (magnétique et mécanique). Ce qui constitue un point important pour la stabilité de l'approche numérique. Ensuite, des propriété théoriques de convergence de la méthode ont été avancées pour des petites valeurs des nombres de Reynolds magnétique et fluide. Des tests numériques de convergence ont été accomplis en utilisant la méthode des solutions manufacturées, et les résultats sont en très bon accord avec la théorie. Pour finir ce chapitre, nous avons étudié un problème test, courant dans la communauté des plasmas : l'instabilité du "tilt". Des comparaisons à la fois qualitatives et quantitatives ont été faites et ces dernières sont en très bon accord avec la littérature.

En résumé, au vu des résultats présentés ci-dessus, la méthode des éléments finis CT s'est révélée adaptée à la résolution des équations de la MHD, dans des géométries complexes comme celles des tokamaks. Contrai-

rement aux éléments finis d'Argyris, le surcout de la méthode CT comparé à celui des éléments finis P1, s'avère raisonnable et cette méthode présente un bon compromis entre précision et coût CPU et mémoire.

Parmi les perspectives ouvertes par ce travail, on peut noter :

1. L'extension du code en 3 dimensions afin de prendre en compte toute la géométrie des tokamaks. Pour ce faire, on pourrait d'une part effectuer une décomposition du domaine 3D en $\Omega_{3D} = \Omega_{2D} \times [0, 2\pi]$, comme cela est fait dans le code JOREK, et coupler les éléments finis CT dans le domaine 2D, Ω_{2D}, avec des éléments finis périodique de Fourier 1D dans la direction toroïdale. Une autre possibilité serait de construire des éléments finis $3D$ comme produits tensoriels d'éléments 1D dans la direction toroïdale et d'éléments CT dans la direction poloïdale.
2. Le modèle MHD réduite utilisé dans ce travail, est valable pour un petit rapport d'aspect $\frac{a}{R_0}$, avec a et R_0, respectivement, le petit et grand rayon du tore. On pourrait considérer un modèle MHD réduite plus sophistiqué tenant compte de la courbure du tokamak et introduisant des corrections d'ordre $\varepsilon = \frac{a}{R_0}$, comme celui utilisé dans le code JOREK et dans d'autres modèles de MHD réduite [49]. Cette approche peut être étendu aussi pour étudier les modèle MHD de Hall.
3. En fin, une dernière piste qui peut être envisagée est le couplage des éléments finis d'Hermite Bezier courbes dans la région contenant le plasma avec des éléments CT en dehors. Une étude préliminaire sur ce thème est déjà mise en place dans le rapport [30] où nous avons couplé les éléments CT dans la région du plasma avec des éléments P1 en dehors. La continuité à l'interface du couplage est assurée par la méthode de Mortar.

Annexe A

HAL
archives-ouvertes.fr

Tokamak free-boundary plasma equilibrium computation using finite elements of class C0 and C1 within a mortar element approach

Ali Elarif, Blaise Faugeras, Francesca Rapetti

To cite this version:

Ali Elarif, Blaise Faugeras, Francesca Rapetti. Tokamak free-boundary plasma equilibrium computation using finite elements of class C0 and C1 within a mortar element approach. [Research Report] RR-9364, INRIA Sophia Antipolis. 2020. hal-02955007

HAL Id: hal-02955007

https://hal.inria.fr/hal-02955007

Submitted on 1 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tokamak free-boundary plasma equilibrium computation using finite elements of class $\mathcal{C}^0$ and $\mathcal{C}^1$ within a mortar element approach

Ali Elarif, Blaise Faugeras, Francesca Rapetti

RESEARCH REPORT
N° 9364
Oct. 2020
Project-Team CASTOR

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--9364--FR+ENG

Tokamak free-boundary plasma equilibrium computation using finite elements of class $\mathcal{C}^0$ and $\mathcal{C}^1$ within a mortar element approach

Ali Elarif, Blaise Faugeras, Francesca Rapetti

Project-Team CASTOR

Research Report n° 9364 — Oct. 2020 — 28 pages

Abstract: The numerical simulation of the equilibrium of the plasma in a tokamak as well as its self-consistent coupling with resistive diffusion should benefit from higher regularity of the approximation of the magnetic flux map. In this work, we propose a finite element approach on a triangular mesh of the poloidal section, that couples piece-wise linear finite elements in a region that does not contain the plasma and reduced Hsieh-Clough-Tocher finite elements elsewhere. This approach gives the flexibility to achieve easily and at low cost higher order regularity for the approximation of the flux function in the domain covered by the plasma, while preserving accurate meshing of the geometric details in the rest of the computational domain. The continuity of the numerical solution at the coupling interface is weakly enforced by mortar projection. A new technique for the computation of the geometrical coefficients is also presented.

Key-words: Tokamak, equilibrium, reduced Hsieh-Clough-Tocher finite element, Newton method, geometrical coefficients

RESEARCH CENTRE
SOPHIA ANTIPOLIS – MÉDITERRANÉE

2004 route des Lucioles - BP 93
06902 Sophia Antipolis Cedex

Résumé : La simulation numérique de l'équilibre du plasma dans un tokamak et du couplage avec la diffusion resistive devrait bénéficier d'une plus grande régularité de l'approximation du flux magnétique. Dans ce travail nous proposons une approche par éléments finis sur un maillage triangulaire de la section poloidale, couplant éléments finis linéaires par morceaux dans une region ne contenant pas le plasma et éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher réduits ailleurs. Cette approche permet facilement d'obtenir une régularité d'ordre élevé de l'approximation de la fonction flux dans le domaine couvert par le plasma, tout en préservant un maillage précis des structures géométriques dans le reste du domaine. La continuité de la solution numérique à l'interface de couplage est imposée de manière faible par projection de mortar. Une nouvelle méthode pour le calcul des coefficients geométriques du plasma est également présentée.

Mots-clés : tokamak, équilibre, elements finis de Hsieh-Clough-Tocher réduits, méthode de Newton, coefficients geométriques

Contents

1 Introduction **4**

2 Free-boundary Grad-Shafranov equation **5**

3 Variational formulation **8**

4 Coupling different finite elements on non-overlapping meshes **10**
4.1 The finite element spaces 10
4.2 The discrete coupling condition 12
4.2.1 The interpolation case 12
4.2.2 The L^2-projection case 12
4.2.3 The discrete problem 14

5 The discrete problem in matrix form **15**

6 Computation of geometric coefficients **17**
6.1 The iso-contour method 17
6.2 The weak formulation method 18

7 Numerical results **19**
7.1 Validation of rHCT FE implementation 19
7.2 JT60-SA tokamak test case 20

8 Conclusion **24**

1 Introduction

The way a magnetic field influences the transport properties of charged particles is of high interest for a wide spectrum of physical systems and areas. It is a complex challenging problem that goes beyond the purpose of the present paper. However, its suggests some key ingredients that need to be correctly treated from the mathematical and numerical points of view.

Among the ingredients we first have the computation of the equilibrium of a plasma in a Tokamak (see for example [22] and the references therein). It is a free boundary problem described by the Grad-Shafranov equation in axisymmetric configuration (see more details in [6]). The right-hand side of this equation is a nonlinear source, which represents the toroidal component of the plasma current density. On the numerical side, the use of finite elements (FEs) enables an accurate resolution of complicated geometric features of realistic tokamak devices, while Newton methods are involved to solve the resulting nonlinear finite-dimensional systems thus ensuring fast convergence. The Newton schemes are highly non-trivial, since the domain covered by the plasma is unknown and depends non-linearly on the poloidal magnetic flux, ψ, the primal unknown. Boundary conditions at infinity are consistently incorporated through boundary integral equations [13]. Another ingredient is the correct simulation of the transport in the plasma which is rather complex due to the presence of turbulence at the plasma edge and of thermal exchanges with the chamber wall (see [6], [11]).

An aspect linking the two previous ones is the precise computation of the magnetic configuration and of 1D averaged quantities, which is the object of the present work. In tokamaks the energy and particle transport is anisotropically distributed, that is, along magnetic surfaces it is much greater than across the magnetic surfaces. We can thus assume that densities and temperatures are constant on each magnetic surface. If we label by ρ the magnetic surface S, we define the average over S of a given quantity u by $\langle u \rangle = \partial_V (\int_S u \, dV) = \frac{1}{V'} \int_S u \frac{dS}{|\nabla \rho|}$ where $V' = \partial_\rho V$ and V is the volume enclosed inside the surface S. The derivative $\partial_\rho V$ can be computed once suitable 1D profiles (such as, for example, $\partial_\rho \psi$ or $\partial_\psi \rho$) are known. These 1D profiles, among which the so-called *geometric coefficients* have to be computed with care. They are important functionals of the solution of such equilibrium problems that are essential to incorporate resistive diffusion effects into plasma evolution modeling [18, 24, 6, 26]. Also many plasma characteristics (e.g. the so-called safety factor or the average current density profile), important to quantify stability or for monitoring during the experiment, are defined as integrals involving the gradient $\nabla \psi$ of the poloidal flux.

In order to improve the description of $\nabla \psi$ we wish to introduce in certain parts of the computational domain, FE functions that are not only continuous, but have also first order continuous derivatives. For this purpose, instead of relying on composite meshes [23], we consider a non-overlapping domain decomposition formulation of the physical problem and couple, by means of mortar projection [3, 4], reduced Hsieh-Clough-Tocher (rHCT) FEs [9, 8] in the plasma domain to piece-wise linear Lagrange FEs in the exterior domain. These rHCT FEs have the advantage to be defined on triangles and to be less expensive from a computational point of view than quintic FEs used in [25]. Concerning the computation of geometric coefficients, we propose and compare two strategies. The first one, rather usual in equilibrium codes, relies on the explicit computation of iso-contours. The second one which proves to be very efficient is based on the coarea formula and motivated by results from [10].

The paper is organised as follows. Section 2 briefly introduces the equations modelizing the equilibirum of the plasma in a tokamak. In Section 3 we introduce the associated variational formulation in a non-overlapping domain decomposition framework. Section 4 exposes the finite elements used and the proposed coupling method. In Section 5 we move to the fully discretized problem and the implemented Newton method. Section 6 presents the numerical methods pro-

posed for the computation of geometric coefficents, and in Section 7 we show numerical results and as an example apply the method to the computation of an equilibrium in the JT60-SA tokamak.

2 Free-boundary Grad-Shafranov equation

The equations which govern the equilibrium of a plasma in presence of a magnetic field in a tokamak are the solenoidal condition and Ampère's law in the whole space (including the plasma) and the force balance in the plasma itself, which read, respectively,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{curl}\, \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \mathbf{J}, \qquad \mathbf{grad}\, p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

where p is the plasma kinetic pressure, $\mathbf{B}$ is the magnetic induction, $\mathbf{J}$ is the current density and μ the magnetic permeability. These equations are sufficient for the modeling of the plasma static equilibrium. To simulate the plasma quasi-static evolution, the set of equations (1) has to be completed with also Faraday's law in all the conducting structures, and Ohm's laws in the plasma, coils and passive structures. Assuming axial symmetry in the geometry of the tokamak, we may introduce a cylindrical coordinate system (r, φ, z), such that $r = 0$ is the major axis of the tokamak torus. We recall that the transformation $x = r\cos\varphi$ and $y = r\sin\varphi$ allows to pass from cylindrical coordinates (r, φ, z) to Cartesian ones (x, y, z). Equations (1) are reformulated in a (poloidal) section $\varphi =$ constant of the tokamak, making the hypothesis that the scalar field p does not depend on the angle φ, thus $\mathbf{grad}\, p$ belongs to the poloidal (r, z)-plane. The classical primal unknowns for toroidal plasma equilibria described by (1) are the *poloidal magnetic flux* $\psi = \psi(r, z)$, the pressure p and the *diamagnetic function* f. The poloidal magnetic flux $\psi := r\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\varphi$ is the scaled toroidal component (φ-component) of the magnetic vector potential $\mathbf{A}$, such that $\mathbf{B} = \mathbf{curl}\, \mathbf{A}$, where $\mathbf{e}_\varphi$ denotes the unit vector for the φ coordinate. Note that $\mathbf{A}$ is divergence-free (Coulomb gauge) by construction. The diamagnetic function $f = r\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\varphi$ is the scaled toroidal component of the magnetic induction $\mathbf{B}$. The magnetic induction $\mathbf{B}$ can thus be represented as

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{pol} + \mathbf{B}_{tor}, \qquad \mathbf{B}_{pol} = \frac{1}{r}\nabla\psi \times \mathbf{e}_\varphi, \qquad \mathbf{B}_{tor} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \frac{f}{r}\mathbf{e}_\varphi$$

as it is assumed to be independent of the angle φ, where ∇ is the gradient operator in the r, z coordinates. The previous relations show that the magnetic surfaces are generated by the rotation of the iso-flux lines around the axis of the torus. We refer to standard text books, e.g. [15], [6], [34], [17], [16] and [26] for the details and state in the following only the final equations.

We introduce $\Omega_\infty = [0, \infty] \times [-\infty, \infty]$, the positive half plane, to denote the meridian plane that contains the poloidal section of the tokamak, centered at the origin. In axisymmetric coordinates, force balance, the solenoidal condition and Ampère's law in (1) yield the following equation for the flux $\psi(r, z)$ in Ω_∞

$$-\Delta^*\psi = \mathrm{J}_\varphi, \tag{2}$$

where $\mathrm{J}_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ is the toroidal component of $\mathbf{J}$, and the second order elliptic differential operator $-\Delta^*$ is defined by

$$-\partial_r\left(\frac{1}{\mu(\psi)r}\partial_r\psi\right) - \partial_z\left(\frac{1}{\mu(\psi)r}\partial_z\psi\right) := -\Delta^*\psi \tag{3}$$

where $\mu(\psi)$ is the magnetic permeability, which is equal to μ_0, the constant permeability of the vacuum, everywhere except in the possibly existing iron parts of the tokamak (see Figure 1). The geometry of the tokamak determines various subdomains (see Figure 1) which are then used to specify J_φ accordingly:

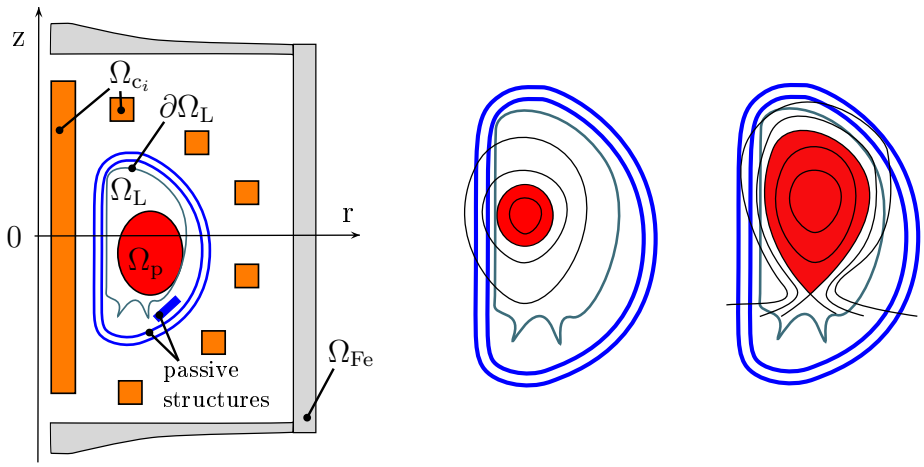


Figure 1: Left: Geometric description of the tokamak in the poloidal plane. Middle and right: Sketch for characteristic plasma shapes. The plasma boundary touches the limiter (middle) or the plasma is enclosed by the separatrix, a flux line that goes through an X-point (right).

- $\Omega_{\rm Fe} \subset \Omega_\infty$ denotes those parts of Ω_∞ made of iron where the permeability μ is not constant and given as a (non-linear) function of ψ, namely $\mu(\psi) = \mu_{Fe}(|\nabla\psi|^2 r^{-2})$; if $\Omega_{\rm Fe} = \emptyset$, then $\mu = \mu_0$ everywhere;
- $\Omega_{c_i} \subset \Omega_\infty$, $1 \le i \le N_c$, denotes the intersection of the ith coil with the poloidal plane. We suppose that ith coil has n_i wire turns and cross section area $|\Omega_{c_i}|$;
- $\Omega_{\rm L} \subset \Omega_\infty$, denotes the domain bounded by the limiter, thus the domain accessible by the plasma;
- $\Omega_{\rm p} \subset \Omega_{\rm L}$, denotes the domain covered by the plasma and the boundary $\partial\Omega_{\rm p}$ is the outermost closed ψ-isocontour contained within the limiter region $\Omega_{\rm L}$.

The toroidal component of the current density J_φ is zero everywhere outside the plasma domain and the poloidal field coils (and possibly the passive structures).
In the coils Ω_{c_i}, we set $J_\varphi = \frac{I_i}{|\Omega_{c_i}|}$, where I_i is the total current (in At, ampère turns) in the ith coil. In the static modeling, I_i is constant whereas in the quasi-static case I_i is related to assigned tensions $v_i(t)$ in the supplies and to mutual and self inductance via electric circuit equations, as explained in [22].
In the passive structures, we set $J_\varphi = 0$ for static equilibrium computations whereas for the quasi-static evolution of the equilibrium we need to set $J_\varphi = -(\sigma/r)\partial_t\psi$ where σ is the electric conductivity of the passive structures.
In the plasma domain $\Omega_{\rm p}$, the equations (1) imply that both the pressure p and the diamagnetic function f are constant on each ψ-isoline, *i.e.*, $p = p(\psi)$ and $f = f(\psi)$. One then deduces the so-called Grad-Shafranov-Schlüter equilibrium equation in the plasma [19], [31], [27]

$$-\Delta^*\psi = rp'(\psi) + \frac{1}{\mu_0 r} f f'(\psi) \tag{4}$$

where the right-hand side of equation (4) is the toroidal component J_φ of the plasma current density. Functions p' and ff', that are zero outside $\Omega_{\rm p}$, are non-linear with respect to ψ. They

can be either reconstructed starting from field measures (this is the goal of the inverse equilibrium reconstruction problem) or supplied as data (in the direct equilibrium problem). In the latter case, we need to introduce few additional notations.

The plasma domain $\Omega_{\rm p}(\psi)$ is unknown and depends non-linearly on the poloidal flux ψ, in other words, $\Omega_{\rm p} = \Omega_{\rm p}(\psi)$ is a functional of the poloidal flux ψ (and we have a free-boundary problem). The different characteristic shapes of $\Omega_{\rm p}(\psi)$ are illustrated in Figure 1: the boundary of $\Omega_{\rm p}(\psi)$ either touches $\partial\Omega_{\rm L}$ the boundary of $\Omega_{\rm L}$ (limiter configuration) or contains one or more saddle points of ψ (divertor configuration). In the latter case, the boundary of the plasma domain is named the magnetic separatrix. The saddle points of ψ, denoted by $(r_{\rm X}, z_{\rm X})$=$(r_{\rm X}(\psi), z_{\rm X}(\psi))$, are called X-points of ψ. The plasma domain $\Omega_{\rm p}(\psi)$ is the largest subdomain of $\Omega_{\rm L}$ bounded by a closed ψ-isoline in $\Omega_{\rm L}$ and containing the magnetic axis (r_a, z_a). The magnetic axis is the point $(r_a, z_a) = (r_a(\psi), z_a(\psi))$, where ψ has its global maximum (or minimum, depending on axis positive direction) in $\Omega_{\rm L}$. For convenience, we introduce also the coordinates $(r_b, z_b) = (r_b(\psi), z_b(\psi))$ of the point that determines the plasma boundary. Note that (r_b, z_b) is either an X-point of ψ or the contact point with $\partial\Omega_{\rm L}$.

The domain of p' and $f\,f'$ is the interval $[\psi_a, \psi_b]$, with the scalar values ψ_a and ψ_b being the flux values at the *magnetic axis* and at the boundary of the plasma (supposing $\psi_a < \psi_b$):

$$\begin{aligned} \psi_a(\psi) &:= \psi(r_a(\psi), z_a(\psi))\,, \\ \psi_b(\psi) &:= \psi(r_b(\psi), z_b(\psi))\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Since the domain of p' and $f\,f'$ depends on the poloidal flux itself, it is more practical to supply these profiles as functions of the normalized poloidal flux $\psi_{\rm N}(r, z)$:

$$\psi_{\rm N}(r, z) = \frac{\psi(r, z) - \psi_a(\psi)}{\psi_b(\psi) - \psi_a(\psi)}\,. \tag{6}$$

These two functions, subsequently termed $S_{p'}$ and $S_{ff'}$, have, independently of ψ, a fixed domain $[0, 1]$. They are usually given as piecewise polynomial functions. Another frequent a priori model is

$$S_{p'}(\psi_{\rm N}) = \lambda\frac{\beta}{r_0}(1 - \psi_{\rm N}^{\alpha})^{\gamma}\,, \quad S_{ff'}(\psi_{\rm N}) = \lambda(1 - \beta)\mu_0 r_0(1 - \psi_{\rm N}^{\alpha})^{\gamma}\,, \tag{7}$$

with r_0 the characteristic radius (in meters) of the tokamak vacuum chamber and $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ given parameters. The parameter β is related to the poloidal beta [6, p. 15], whereas α and γ describe the peakage of the current profile, λ is a scaling parameter related to the total plasma current. In the following we use the formulation

$$\mathrm{J}_{\varphi} = \lambda(\frac{r}{r_0}\mathcal{A}(\psi_{\rm N}) + \frac{r_0}{r}\mathcal{B}(\psi_{\rm N}))$$

with $\mathcal{A} = r_0 S_{p'}$ and $\mathcal{B} = \dfrac{1}{r_0\mu_0}S_{ff'}$ given functions on $[0, 1]$.

Equilibrium equation (2) can be either considered in the whole poloidal plane Ω_∞, with $\lim_{||(r,z)||\to+\infty}\psi(r, z) = 0$ as boundary condition at infinity and $\psi(0, z) = 0$ at the axis $r = 0$, or in a restricted bounded domain Ω_{re}, as in Figure 2 (right). In this second case, the boundary of Ω_{re} can be viewed as a measurement contour Γ including $\Omega_{\rm L}$, and possibly some of the coils and passive structures, with $\psi(r, z)$ assigned for all points (r, z) on the boundary of Ω_{re}. Suitable initial conditions on ψ should be added in case we were interested by the quasi-static evolution problem (see [12]). In this paper, we restrict ourselves to static equilibrium computations for an iron-free tokamak.

As we are going to present later a discretization scheme for the problem (2) that employs different approximation spaces on the tokamak poloidal section Ω_∞, we formulate the variational problem in a bounded spatial domain $\Omega \subset \Omega_\infty$ directly in a non-overlapping domain decomposition framework.

3 Variational formulation

There are two possible ways to define a computational domain $\Omega \subset \Omega_\infty$ to be triangulated. It can either be a restricted domain Ω_{re} enclosed in the measurement contour Γ with $\Omega_{\mathrm{L}} \subset \Omega_{re}$, as in Figure 2 (right), or a sufficiently large semi-circle centered at the origin and containing the whole poloidal section of the tokamak, as in Figure 2 (left). The first case is called the bounded domain case and the second the ABB domain case, that bears its name from Albanase, Blum, de Barbieri, who first introduced in [1] the boundary integral method on the semi-circle used to take into account conditions at infinity. In the following, we work with the ABB domain.

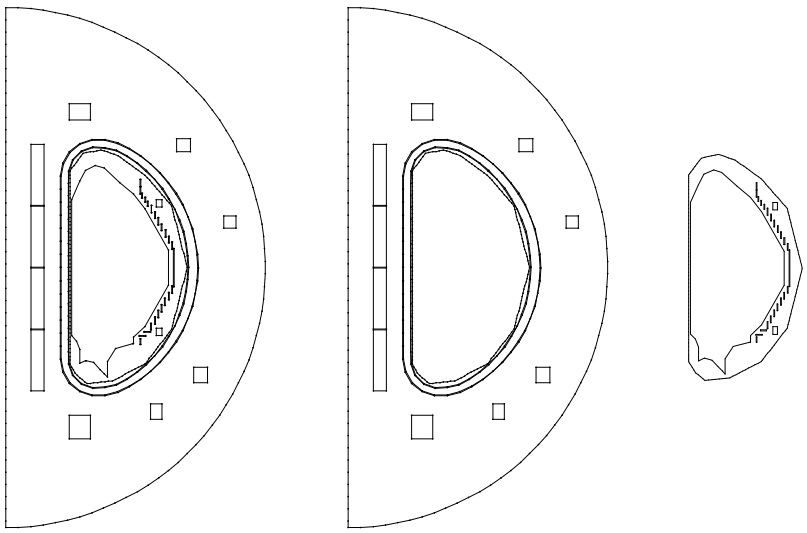


Figure 2: The global ABB configuration containing the poloidal section of the JT60SA tokamak (left), as union of two subdomains, namely the external part not containing Ω_{L} (center) and the internal part containing Ω_{L} (right).

To define the ABB domain, we choose a semi-circle γ of radius ρ_γ surrounding all the coil domains Ω_{c_i}. The ABB domain $\Omega \subset \Omega_\infty$, that is used for computations, has boundary $\partial\Omega = \gamma \cup \gamma_0$, where $\gamma_0 := \{(0,z),\, -\rho_\gamma \le z \le \rho_\gamma\}$. We have now to select the functional space where the unknown ψ lives. We recall that the coordinates (r,z,φ) vary in $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, 2\,\pi] \subset \mathbb{R}^3$ and $\psi(r,z) = rA_\varphi(r,z)$ where $\mathbf{A} = (0,0,A_\varphi)^\top$ is the magnetic vector potential. The vector potential $\mathbf{A}$ has to be selected in $H(\mathbf{curl}, \tilde{\Omega})$, the space of vector fields in $L^2(\tilde{\Omega})^3$ with $\mathbf{curl}$ in $L^2(\tilde{\Omega})^3$. We thus need to have:
(i) $[\mathbf{A} \times \mathbf{n}]_{\mathcal{I}} = \mathbf{0}$, that is the continuity of the tangential trace of $\mathbf{A}$ across any interface $\mathcal{I} \subset \Omega$. This condition is associated with $[\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}]_{\mathcal{I}} = 0$, the continuity of the normal component of $\mathbf{B}$ across $\mathcal{I}$. Since $\mathbf{A} = A_\varphi\, \mathbf{e}_\varphi$ whereas $\mathbf{n}$, the normal vector to $\mathcal{I}$, is in the poloidal section Ω, it is sufficient to have A_φ continuous across $\mathcal{I}$. The transmission condition $[\frac{1}{\mu}\mathbf{curl}\,\mathbf{A} \times \mathbf{n}]_{\mathcal{I}} = \mathbf{0}$, associated with

$[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]_{\mathcal{I}}=\mathbf{0}$, the continuity of the tangential trace of the magnetic field $\mathbf{H}=(1/\mu)\mathbf{B}$ across $\mathcal{I}$, is embedded in the variational formulation and can be recovered by integration by parts.
(ii) $\mathbf{A}$ and $\mathbf{curl}\,\mathbf{A}$ in $L^2(\tilde{\Omega})^3$, therefore

$$\int_{\tilde{\Omega}}|A_\varphi|^2 r\,dr\,dz\,d\varphi=2\,\pi\int_{\Omega}|A_\varphi|^2 r\,dr\,dz=2\,\pi\int_{\Omega}|\psi|^2\frac{1}{r}dr\,dz<\infty$$

and $\int_{\tilde{\Omega}}|\mathbf{curl}\,\mathbf{A}|^2 r\,dr\,dz\,d\varphi<\infty$ that is

$$2\,\pi\int_{\Omega}\frac{1}{r^2}|\nabla\,(r\,A_\varphi)|^2 r\,dr\,dz=2\,\pi\int_{\Omega}|\nabla\,\psi|^2\frac{1}{r}\,dr\,dz<\infty.$$

We thus remark that $\mathbf{A}\in H(\mathbf{curl},\tilde{\Omega})$ if and only if $\psi\in\mathcal{H}^1(\Omega)$ where

$$L^2_*(\Omega)=\{g:\Omega\to\mathbb{R},\quad \|g\|^2_{*,\Omega}:=\int_{\Omega}g^2\frac{1}{r}\,dr\,dz<\infty\}$$

and $\mathcal{H}^1(\Omega)=\{u\in L^2_*(\Omega),\ \nabla\,u\in L^2_*(\Omega)^2\}$ is the Hilbert space endowed with the norm $\|u\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)}=\|u\|^2_{*,\Omega}+|u|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ being $|u|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)}=\|\partial_r u\|^2_{*,\Omega}+\|\partial_z u\|^2_{*,\Omega}$. For $\psi\in\mathcal{H}^1(\Omega)$ the trace on γ_0 vanishes in the following sense [21]

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{\{r\}\times[-\rho_\gamma,\rho_\gamma]\cap\Omega}\psi(r,z)^2\frac{1}{r^2}\,dz=0\,.$$

To formulate (2) (see Figure 2 (left)) as a variational problem in a non-overlapping domain decomposition framework, we set $\Omega=\Omega^{\rm in}\cup\Omega^{\rm ex}$ where $\Omega^{\rm in}$ is a bounded domain containing $\Omega_{\rm L}$ (see Figure 2 (right)) and $\Omega^{\rm ex}$ is the complement of $\Omega^{\rm in}$ in Ω (see Figure 2 (center)). The boundary of $\Omega^{\rm in}$ is denoted $\mathcal{I}$, to recall that it is an interface between the two subdomains $\Omega^{\rm in}$, $\Omega^{\rm ex}$, on which we will impose, at the discrete level, the continuity of ψ, in a weak sense, that is through a mortar-like L^2 projection [3]. Note that $\mathcal{I}=\overline{\Omega}^{\rm ex}\cap\overline{\Omega}^{\rm in}$. Let us now introduce the functional space $\mathcal{V}=\{(v,w)\in\mathcal{H}^1(\Omega^{\rm ex})\times\mathcal{H}^1(\Omega^{\rm in}),\ v_{|\gamma_0}=0,\ v_{|\mathcal{I}}=w_{|\mathcal{I}}\}$. Continuity is required for ψ in $\Omega^{\rm in}$ in order to have meaningful ψ_a and ψ_b that appear in the definition of $\Omega_{\rm p}$ and $\psi_{\rm N}$ [7, Remark I.5, page 18]. The weak formulation of (2) is: Find $\psi=(\psi_{\rm ex},\psi_{\rm in})\in\mathcal{V}$ such that

$$a(\psi,s):=a_{\rm ex}(\psi_{\rm ex},v)+a_{\rm in}(\psi_{\rm in},w)=\ell(I,s)\quad\forall s=(v,w)\in\mathcal{V}_{0,\mathcal{I}}\tag{8}$$

where $\mathcal{V}_{0,\mathcal{I}}=\mathcal{H}^1_0(\Omega^{\rm ex})\times\mathcal{H}^1_{0,\mathcal{I}}(\Omega^{\rm in})$. In (8), we have set

$$\begin{aligned}a_{\rm ex}(\psi,v)&:=\int_{\Omega^{\rm ex}}\frac{1}{\mu\,r}\,\nabla\,\psi\cdot\nabla\,v\,drdz+\mathsf{c}(\psi,v),\\ a_{\rm in}(\psi,w)&:=\int_{\Omega^{\rm in}}\frac{1}{\mu_0 r}\,\nabla\,\psi\cdot\nabla\,w\,drdz-\,\mathsf{J}_{\rm p}(\psi,w)\,,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\mathsf{J}_{\rm p}(\psi,w)&:=\int_{\Omega_{\rm p}(\psi)}\lambda\left(\frac{r}{r_0}\mathcal{A}(\psi_{\rm N})+\frac{r_0}{r}\mathcal{B}(\psi_{\rm N})\right)w\,drdz\,,\\ \ell(I,s)&:=\sum_{i=1}^{N_c}\frac{I_i}{|\Omega_{{\rm c}_i}|}\int_{\Omega_{{\rm c}_i}}(\chi_{\Omega^{\rm ex}}v+\chi_{\Omega^{\rm in}}w)\,drdz\,,\end{aligned}\tag{9}$$

with $\ell(I,s)$ containing the expression $\chi_{\Omega^{\rm ex}}v+\chi_{\Omega^{\rm in}}w$ to take into account the presence of coils in $\Omega^{\rm in}$ and $\Omega^{\rm ex}$ (here, χ_D is the characteristic function of a set D).

The bilinear form $\mathsf{c}(\cdot,\cdot)$ is defined as

$$\mathsf{c}(\psi,\xi) := \frac{1}{\mu_0}\int_\Gamma \psi(\mathbf{x})N(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\int_\Gamma\int_\Gamma (\psi(\mathbf{x})-\psi(\mathbf{y}))M(\mathbf{x},\mathbf{y})(\xi(\mathbf{x})-\xi(\mathbf{y}))\,dS(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{y})\,, \tag{10}$$

and accounts for the boundary conditions at infinity [1], with $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_z)$, $\mathbf{y}=(\mathbf{y}_r,\mathbf{y}_z)$ and

$$M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{k_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}{2\pi(\mathbf{x}_r\mathbf{y}_r)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2-k^2_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}{2-2k^2_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}E(k_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) - K(k_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\right)$$

$$N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}_r}\left(\frac{1}{\delta_+}+\frac{1}{\delta_-}-\frac{1}{\rho_\Gamma}\right) \text{ and } \delta_\pm = \sqrt{\mathbf{x}_r^2+(\rho_\Gamma\pm\mathbf{x}_z)^2}\,.$$

Here, K and E are the complete elliptic integrals of first and second kind, respectively, and

$$k_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \sqrt{\frac{4\mathbf{x}_r\mathbf{y}_r}{(\mathbf{x}_r+\mathbf{y}_r)^2+(\mathbf{x}_z-\mathbf{y}_z)^2}}\,.$$

We refer to [20, Chapter 2.4] for the details of the derivation. Rigorous existence and uniqueness assertion for the general case are still an open problem. See [33, 2, 7, 30] for some theoretical work related to such results.

4 Coupling different finite elements on non-overlapping meshes

In the domain containing the plasma, we wish to have a finite element approximation ψ_h for the poloidal flux ψ that is not only continuous but has also continuous gradient $\nabla\psi_h$. This is possible if we use the reduced or minimal Hsieh-Clough-Tocher (rHCT) finite element space on a triangular mesh over $\bar{\Omega}^{\text{in}}$. The rHCT triangular element is one of the simplest elements which provide continuous differentiability of the approximated solution ψ_h. For the definition of a rHCT finite element on a triangle we refer to [9], [8] and to [5] for more details on the basis functions' definition. This regularity is not necessary in the external domain therefore we couple rHCT finite elements in Ω^{in} with continuous piece-wise linear finite elements on a mesh of triangles of $\bar{\Omega}$. We thus introduce τ^{ex} (resp. τ^{in}) a mesh of triangles that covers $\bar{\Omega}^{\text{ex}}$ (resp. $\bar{\Omega}^{\text{in}}$). The two meshes τ^{ex}, τ^{in} are shape regular and quasi-uniform. They are supposed to match at the common interface $\mathcal{I}$, that is $(\tau^{\text{ex}})_{|\mathcal{I}} = (\tau^{\text{in}})_{|\mathcal{I}}$. We assume that $\mathcal{I}$ is a polygonal with nodes and edges in τ^{ex} (this is adopted to write the discrete equivalent of the matching condition at interface $\mathcal{I}$). We denote by h_{ex} (resp. h_{in}) the maximum element diameter in τ^{ex} (resp. τ^{in}) and set $h=\max(h_{\text{ex}},h_{\text{in}})$.

4.1 The finite element spaces

Now, let us introduce the finite element spaces, that we use in the simulations. Locally, on one triangle, they are triples $(T,\mathcal{P}_{loc}(T),\Sigma(T))$ where T denotes a triangle of the mesh, $\mathcal{P}_{loc}(T)$ the local space of functions defined on that triangle and $\Sigma(T)$ a set of unisolvent degrees of freedom for the functions in the local space (see [8]). The indices i, $i+1$, $i+2$, in Definition 2 below, take values $1,2,3$. When $i+1>3$ (resp. $i+2>3$), we replace it by $[(i+1) \mod 3]+1$ (resp. $[(i+2) \mod 3]+1$).

Definition 1 *Let us denote by $T=[V_1,V_2,V_3]$ the triangle of vertices V_1,V_2,V_3. The $\mathbb{P}_1$ Lagrange finite element associated with T is the triple $(T,\mathbb{P}_1(T),\Sigma_0(T))$ where $\Sigma_0(T)=\{\sigma_i : v\mapsto v(V_i)\}_{i=1,2,3}$*

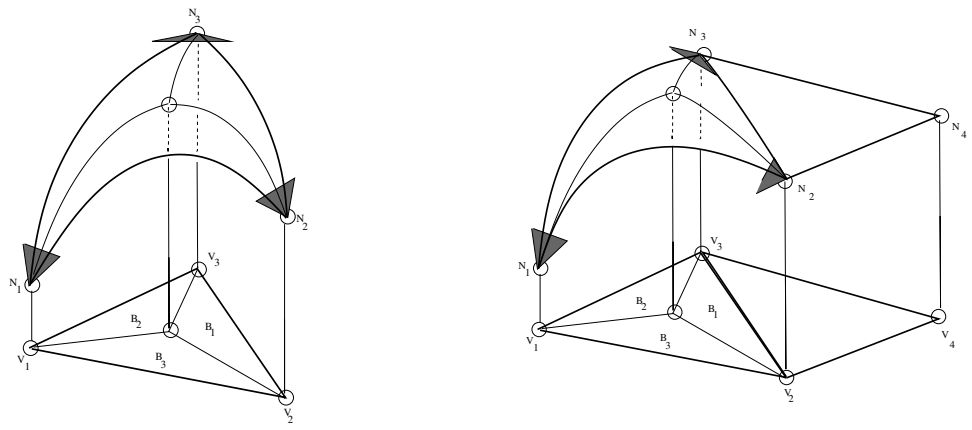


Figure 3: A visualization of the rHCT reconstruction of the function ψ in a triangle $T \in \tau^{\text{in}}$ (left). The mesh triangle $T = [V_1, V_2, V_3]$ is cut into three triangles $\mathtt{B}_i$: each $\mathtt{B}_i = [G, V_m, V_\ell]$ having vertices in V_m, V_ℓ with $m, \ell \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ and at the barycenter G (denoted by the small circle at the interior) of the triangle T. We can thus reconstruct the height $N_i = \psi_h(V_i)$ of ψ at the three vertices V_i of T and the tangent plane to the surface ψ_h at the vertices V_i, as generated by $\partial_r \psi_h(V_i), \partial_z \psi_h(V_i)$. The coupling with a piece-wise linear element (right).

Definition 2 *Let us denote by $T = [V_1, V_2, V_3]$ the triangle of vertices V_1, V_2, V_3. The triangle T is divided into three subtriangles $\mathtt{B}_i = [G, V_{i+1}, V_{i+2}]$ where G is the barycenter of T (see Figure 3). The reduced Hsieh-Clough-Tocher (rHCT) finite element associated with T is the triple $(T, \mathcal{P}_{loc}(T), \Sigma(T))$, where $\mathcal{P}_{loc}(T)$ is the polynomial space of functions $w \in C^1(T)$ such that,*

$$w_{|\mathtt{B}_i} \in \mathbb{P}_3(\mathtt{B}_i) \quad \textit{and} \quad (\partial_n w)_{|\mathtt{b}_i} \in \mathbb{P}_1(\mathtt{b}_i) \quad \textit{for any edge } \mathtt{b}_i \in \partial \mathtt{B}_i \cap \partial T.$$

Here above, n is the outward normal vector to ∂T, $\mathtt{b}_i$ the edge on ∂T that does not insist in the vertex V_i and $(\partial_n w)_{|\mathtt{b}_i}$ the normal derivative of w at $\mathtt{b}_i$, and $\Sigma(T)$ is the set defined by the following functionals:

$$\zeta_{i,00} : w \mapsto w(V_i), \tag{11}$$

$$\zeta_{i,10} : w \mapsto (\mathbf{grad}\, w)(V_i) \cdot (V_{i+1} - V_i), \tag{12}$$

$$\zeta_{i,01} : w \mapsto (\mathbf{grad}\, w)(V_i) \cdot (V_{i+2} - V_i), \tag{13}$$

where $(\mathbf{grad} w)(V_i) \cdot (V_{i+1} - V_i)$ is the directional derivative of w on $[V_i, V_{i+1}]$. Note that $(\mathbf{grad}\, w)(V_i) \cdot (V_{i+1} - V_i) = (\partial_n w)_{|\mathtt{b}_{i+1}}(V_i) - (\partial_n w)_{|\mathtt{b}_i}(V_i)$.

Globally, over the meshes τ^{ex} and τ^{in}, the finite element spaces are, respectively,

$$\mathcal{V}^{\text{ex}} = \{v \in C^0(\Omega^{\text{ex}}),\, v_{|\gamma_0} = 0,\, v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T),\, \forall\, T \in \tau^{\text{ex}}\}$$
$$\mathcal{V}^{\text{in}} = \{w \in C^1(\Omega^{\text{in}}),\, w_{|T} \in \mathcal{P}_{loc}(T),\, \forall\, T \in \tau^{\text{in}}\}$$

with the space $\mathcal{P}_{loc}(T)$ defined in Definition 2 . We then denote by $\mathcal{V}^{\text{ex}}_\partial$ (resp. $\mathcal{V}^{\text{in}}_\partial$) the trace space of $\mathcal{V}^{\text{ex}}$ (resp. $\mathcal{V}^{\text{in}}$) on the closed polygonal line $\mathcal{I}$. For functions in $\mathcal{V}^{\text{ex}}$, the degrees of freedom are given in Definition 1 . One degree of freedom is associated with each node $V_k \in \tau^{\text{ex}}$, so the total number of degrees of freedom in $\mathcal{V}^{\text{ex}}$ is equal to N^{ex}, the total number of mesh nodes in τ^{ex}, divided into N^{ex}_∂ nodes on the interface $\mathcal{I}$ and the remaining N^{ex}_o nodes on $\bar{\Omega}^{\text{ex}} \setminus \mathcal{I}$. For

functions $\mathcal{V}^{\rm in}$, the degrees of freedom are given in Definition 2. Three degrees of freedom are associated with each node $V_k \in \tau^{\rm in}$, so the total number of degrees of freedom in $\mathcal{V}^{\rm in}$ is equal to $3N^{\rm in}$, being $N^{\rm in} = N_o^{\rm in} + N_\partial^{\rm in}$ the total number of mesh nodes in $\tau^{\rm in}$ divided into $N_\partial^{\rm in}$ nodes on the interface $\mathcal{I}$ and the remaining $N_o^{\rm in}$ nodes on $\bar{\Omega}^{\rm in} \setminus \mathcal{I}$. By the definition of $\mathcal{V}^{\rm ex}$ and $\mathcal{V}^{\rm in}$ there are finite element spaces $\mathcal{V}_\circ^{\rm ex}$ and $\mathcal{V}_\circ^{\rm in}$ such that

$$\mathcal{V}^{\rm ex} = \mathcal{V}_\circ^{\rm ex} \oplus \mathcal{E}\mathcal{V}_\partial^{\rm ex} \quad \text{and} \quad \mathcal{V}^{\rm in} = \mathcal{V}_\circ^{\rm in} \oplus \mathcal{E}\mathcal{V}_\partial^{\rm in},$$

where $\mathcal{E}$ denotes the trivial extension operators. The elements of $\mathcal{V}_\circ^{\rm ex}$ and $\mathcal{V}_\circ^{\rm in}$ have vanishing Dirichlet trace on $\mathcal{I}$.

4.2 The discrete coupling condition

Let us denote by $\{v_i^{\rm ex}\}_{i=1,N^{\rm ex}}$ the basis of $\mathcal{V}^{\rm ex}$ in duality with the degrees of freedom of Definition 1 associated with vertices $V_i \in \tau^{\rm ex}$ and $\{w_j^{\rm in}\}_{j=1,3N^{\rm in}}$ that of $\mathcal{V}^{\rm in}$ in duality with the degrees of freedom of Definition 2 associated with vertices $V_j \in \tau^{\rm in}$. Then, if $\mathbf{u}^{\rm ex}$ and $\mathbf{u}^{\rm in}$ represent the vectors gathering the values of degrees of freedom of $\psi_h^{\rm ex} \in \mathcal{V}^{\rm ex}$ and $\psi_h^{\rm in} \in \mathcal{V}^{\rm in}$ we have the decomposition $\mathbf{u}^{\rm ex} = (\mathbf{u}_\circ^{\rm ex}, \mathbf{u}_\partial^{\rm ex})$ and $\mathbf{u}^{\rm in} = (\mathbf{u}_\circ^{\rm in}, \mathbf{u}_\partial^{\rm in})$ where $\mathbf{u}_\circ^{\rm ex}$ (resp. $\mathbf{u}_\circ^{\rm in}$) and $\mathbf{u}_\partial^{\rm ex}$ (resp. $\mathbf{u}_\partial^{\rm in}$) are the degrees of freedom in $V_\circ^{\rm ex}$ (resp. $V_\circ^{\rm in}$) and $V_\partial^{\rm ex}$ (resp. $V_\partial^{\rm in}$). Since the differential operator $-\Delta^*$ is only second order, there is no transmission condition on $(\partial_n \psi_h)_\mathcal{I}$ to be included in the discrete space [3]. Examples of MEM coupling between rHCT FEs on both subdomains can be found to solve problems involving four-order operators (we refer to [29] for convergence studies with application to elasticity). In plasma physics, the requirement of $\mathcal{C}^1$ continuity all over Ω could be necessary when discretizing, for example, reduced MHD models which are characterised by stream function formulations and thus require a proper discretization of four-order operators (see [6]).

4.2.1 The interpolation case

The imposition of the transmission condition $[\psi_h]_\mathcal{I} = 0$ by interpolation means to ask for the equality

$$(\psi_h^{\rm ex})_{|\mathcal{I}}(V) = \sum_{j=1}^{N_\partial^{\rm ex}} (\mathbf{u}_\partial^{\rm ex})_j \, v_j^{\rm ex}(V) = \sum_{k=1}^{N_\partial^{\rm in}} (\mathbf{u}_\partial^{\rm in})_k \, w_k^{\rm in}(V) = (\psi_h^{\rm in})_{|\mathcal{I}}(V)\,, \qquad \forall\, V \in \mathcal{I}. \tag{14}$$

If the meshes $\tau^{\rm ex}$, $\tau^{\rm in}$ are coincident at $\mathcal{I}$, then (14) becomes $\mathbf{u}_\partial^{\rm ex} = \mathbf{u}_\partial^{\rm in}$. If the meshes $\tau^{\rm ex}$, $\tau^{\rm in}$ were not coincident at $\mathcal{I}$, relation (14) for $V \equiv V_i \in (\tau^{\rm ex})_{|\mathcal{I}}$ would read $\mathbf{P}\,\mathbf{u}_\partial^{\rm ex} = \mathbf{D}\,\mathbf{u}_\partial^{\rm in}$ where

$$\begin{aligned} (\mathbf{P})_{ij} &= v_j^{\rm ex}(V_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1, N_\partial^{\rm ex} \\ (\mathbf{D})_{i,k} &= w_k^{\rm in}(V_i), \qquad i = 1, N_\partial^{\rm ex}, \qquad k = 1, N_\partial^{\rm in}. \end{aligned}$$

By looking at Figure 4, we remark that relation (14) allows to pass the information on the values of ψ_h at the interface $\mathcal{I}$ (left-hand side of the figure) without influencing the value of $\partial_n \psi_h$ (right-hand side of the figure). Indeed, with matching grids and a point-wise coupling, the block contained in $\mathbf{u}_\partial^{\rm in}$ and associated with the degrees of freedom (12), (13) of Definition 2 at $V_i \in \mathcal{I}$ is not involved to define $\mathbf{u}_\partial^{\rm ex}$.

4.2.2 The L^2-projection case

The imposition of the transmission condition $[\psi_h]_\mathcal{I} = 0$ in a weak sense, by mortar L^2-projection, means to ask that

$$\int_{\mathcal{I}_h} u_h^{\rm ex} \, z_h \, d\mathcal{I} = \int_{\mathcal{I}_h} u_h^{\rm in} \, z_h \, d\mathcal{I}, \qquad \forall\, z_h \in \mathcal{M}_h \tag{15}$$

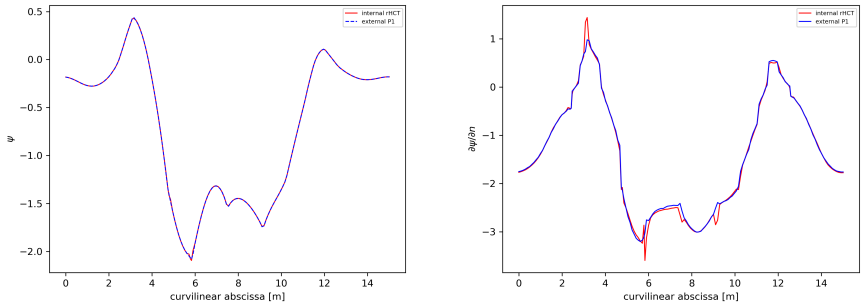


Figure 4: The profile of ψ_h (left) and $\partial_n \psi_h$ (right) at the interface edge mid-points, with pointwise interpolation on matching grids.

where $\mathcal{I}_h$ denotes the description of the interface in terms of edges of the *slave* side mesh (this will become clear with the definition of $\mathcal{M}_h$) and $\mathcal{M}_h$ is a space of Lagrange multipliers, the choice of which is of crucial importance in the error analysis. For simplicity, we omit the foot-index h on $\mathcal{I}$ (also because we consider matching grids at the common interface). The mathematical rationale behind the imposition of the transmission condition by L^2-projection (rather than the more natural condition of pointwise continuity (14) at a chosen set of grid nodes on $\mathcal{I}$) becomes clear from the convergence analysis, shortly presented in Remark 2. This type of condition was firstly studied by Bernardi, Maday and Patera [3], who introduced the mortar element method (MEM) to generalize the spectral element method to geometrically nonconforming partitions, to subdomains with different resolutions (polynomial degrees) on subdomain interfaces, and also to allow the coupling of spectral element methods with other methods, such as, *e.g.*, the h-version of the finite element method. Its generality and flexibility go far beyond these two specific examples (see [4]).

Here, we define the mortar multiplier space as $\mathcal{M}_h = \{\xi_h \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I}) \,:\, \xi_{h|e} \in \mathbb{P}_1(e)\,, \forall\, e \in (\tau^{\text{ex}})_{|\mathcal{I}}\}$. It coincides with the whole trace space $\mathcal{V}_\partial^{\text{ex}}$, due to the fact that $\mathcal{I}$ is a closed curve. In the mortar terminology, the choice of $\mathcal{M}_h$ confers to Ω^{in} the master role (resp. to Ω^{ex} the slave role) with respect to passing the information (value of ψ_h) across $\mathcal{I}$. The left-hand-side of (15) raises no difficulty to be computed since the two discrete functions u_h^{ex}, z_h live on the same mesh inherited from $\bar{\Omega}^{\text{ex}}$ on $\mathcal{I}$. On the contrary, the right-hand-side involves discrete functions that live on different meshes. Whenever the meshes τ^{ex}, τ^{in} coincide or not at $\mathcal{I}$, to compute efficiently the integrals in the coupling condition we rely on numerical quadrature. Relation (15) links the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{ex}}$ to the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{in}}$ by the matrix relation $\mathbf{P}\,\mathbf{u}_\partial^{\text{ex}} = \mathbf{D}\,\mathbf{u}_\partial^{\text{in}}$ where this time

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{P})_{i,j} &= \textstyle\int_{\mathcal{I}} v_{\partial,i}^{\text{ex}}\, v_{\partial,j}^{\text{ex}}\, dr\, dz \qquad && i,j = 1, N_\partial^{\text{ex}}\,,\\
(\mathbf{D})_{i,k} &= \textstyle\int_{\mathcal{I}} v_{\partial,i}^{\text{ex}}\, w_{\partial,k}^{\text{in}}\, dr\, dz \qquad && i = 1, N_\partial^{\text{ex}},\ k = 1, N_\partial^{\text{in}}\,,
\end{aligned}
$$

with $\mathcal{I}$ represented in τ^{ex}. Locally, on each edge $e \in \mathcal{I}$, the 2 entries of the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{ex}}$ are defined in terms of the 6 entries of the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{in}}$.

By looking at Figure 5, we can see that relation (15) allows to pass the information on the values of ψ_h at the interface $\mathcal{I}$ (left-hand side of the figure) improving the behavior of $\partial_n \psi_h$ (right-hand side of the figure). Indeed, with the relation (15), the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{in}}$ is now completely involved in defining $\mathbf{u}_\partial^{\text{ex}}$. We recall that there is no condition imposed on $[\partial_n \psi_h]_{|\mathcal{I}}$, however a good behavior of $\partial_n \psi_h$ passing through the interface $\mathcal{I}$ is important to keep under control the consistency error (as explained later in Remark 2). The behavior of $\partial_n \psi_h$ at the interface $\mathcal{I}$ cannot be improved further by considering for example quadratic multipliers. According to

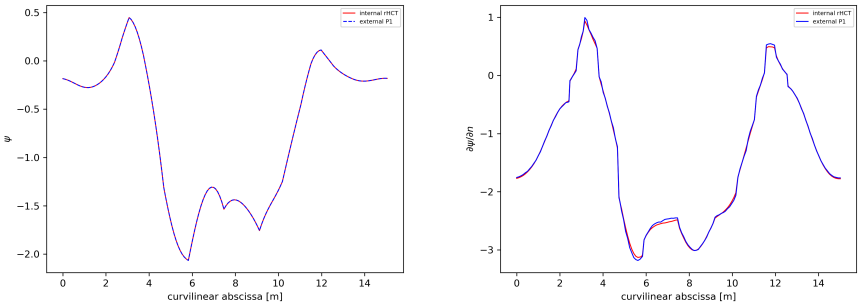


Figure 5: The profile of ψ_h (left) and $\partial_n \psi_h$ (right) at the interface edge mid-points, with mortar L^2-projection by linear mutipliers.

Definition 2, we have $(\partial_n \psi_h^{\text{in}})_{|e} \in \mathbb{P}_1(e)$, for all edges for all $e \in \mathcal{I}$.

Remark 1 *In order to confer to Ω^{ex} the master role (resp. to Ω^{in} the slave role) with respect to passing the information (value of ψ_h) across the interface $\mathcal{I}$, in the coupling condition (15), we have to select the space $\mathcal{M}_h = \{\xi_h \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \,:\, \xi_{h|e} \in \mathbb{P}_3(e)\,, \forall\, e \in (\tau^{\text{in}})_{|\mathcal{I}}\}$. With this choice, locally, on each edge $e \in \mathcal{I}$, the 6 entries of the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{in}}$ would be defined in terms of the 2 entries of the block $\mathbf{u}_\partial^{\text{ex}}$.*

4.2.3 The discrete problem

We set $\mathcal{X}_h = \{u_h \in L^2(\Omega) \,:\, u_{h|\Omega^{\text{in}}} = u_h^{\text{in}} \in \mathcal{V}^{\text{in}}\,,\, u_{h|\Omega^{\text{ex}}} = u_h^{\text{ex}} \in \mathcal{V}^{\text{ex}}\}$, where $h = \max(h_{\text{ex}}, h_{\text{in}})$ and the discrete space

$$\mathcal{V}_h = \{u_h \in \mathcal{X}_h \,:\, u_{h|\gamma_0}^{\text{ex}} = 0 \;\text{ and }\; (15)\,\}. \tag{16}$$

The discrete problem to solve reads: Find $\psi_h \in \mathcal{V}_h$ such that

$$a(\psi_h, s_h) = \ell(\vec{I}, s_h) \quad \forall s_h = (v_h, w_h) \in \mathcal{V}_\circ^{\text{ex}} \times \mathcal{V}_\circ^{\text{in}}. \tag{17}$$

The bilinear and linear forms $a(.,.)$, $\ell(\vec{I},.)$ are defined as for the problem (8) and evaluated in (17) for the functions in the discrete space.

Remark 2 *The presence of the weak coupling condition (15) prevents $\mathcal{V}_h$ from being a subspace of $\mathcal{V}$,* i.e.*, we are using a non-conforming method to approximate the solution of the problem (8). The second Strang lemma allows to derive the following error bound for such an approximation*

$$||u - u_h||_{1,*} \leq c \left\{ \inf_{z_h \in \mathcal{V}_h} ||u - z_h||_{1,*} + \sup_{z_h \in \mathcal{V}_h} \frac{\int_{\mathcal{I}} \partial_n u\, [z_h]_{\mathcal{I}} d\mathcal{I}}{||z_h||_{1,*}} \right\} \tag{18}$$

where $||.||_{1,*}$ is the broken norm $||z_h||_{1,*}^2 = ||z_h^{\text{ex}}||_{1,\Omega^{\text{ex}}}^2 + ||z_h^{\text{in}}||_{1,\Omega^{\text{in}}}^2$. In the right-hand side of (18), the first term represents the best approximation error of ψ (that is, the distance between the exact solution ψ and the finite-dimensional space $\mathcal{V}_h$) and the extra error, the second, involving interface jumps, is known as the consistency error. The consistency error is related to the "variational crime" on the conformity property, due to the fact of dealing with a discrete space $\mathcal{V}_h \not\subset \mathcal{V}$. The error estimate (18) is optimal if each term on the right-hand side can be bounded by the norm of local errors arising from the approximation of ψ in Ω^{ex} and Ω^{in}, in an additive fashion. In this way, we can take advantage of the local regularity of the exact solution as well as

the approximation properties enjoyed by the local subspaces. The second term is optimal owing to the special choice of the mortar. In fact, due to the orthogonality property (15), we can subtract from $\partial_n\psi$ an arbitrary function $z_h \in \mathcal{M}_h$. It is therefore important that such functions allow for an optimal approximation of the normal derivative of ψ at the interface. In the present cas, with the choice we made, we have both $\partial_n\psi_h^{\rm in} \in \mathbb{P}_1(\mathcal{I})$ and $\mathcal{M}_h = \mathbb{P}_1(\mathcal{I})$, with $\mathcal{I}$ described in the same way by $\tau^{\rm ex}$ and $\tau^{\rm in}$.

5 The discrete problem in matrix form

Let us first focus on the discrete problem in $\Omega^{\rm in}$, that reads : Find $\psi_h \in \mathcal{V}^{\rm in}$, with $\psi_h = g_D$ on $\mathcal{I}$, such that

$$\int_{\Omega^{\rm in}} \frac{1}{\mu_0 r}\nabla\psi_h\cdot\nabla w_h\, dr\, dz - \int_{\Omega_{\rm p}(\psi_h)} {\rm J}_\varphi(\psi_{{\rm N},h}, r)\, w_h\, dr\, dz = \sum_{\Omega_{{\rm c}_i}\subset\Omega^{\rm in}} \frac{I_i}{|\Omega_{{\rm c}_i}|}\int_{\Omega_{{\rm c}_i}} w_h\, drdz\,, \qquad \forall w_h \in \mathcal{V}_\circ^{\rm in}, \tag{19}$$

with ${\rm J}_\varphi(\psi_{\rm N}, r) = \lambda(\frac{r}{r_0}\mathcal{A}(\psi_{\rm N}) + \frac{r_0}{r}\mathcal{B}(\psi_{\rm N}))$ and g_D is a given function representing a Dirichlet data. With $N^{\rm in} = N_\circ^{\rm in} + N_\partial^{\rm in}$, the space $\mathcal{V}^{\rm in}$ (resp. $\mathcal{V}_\circ^{\rm in}$) has dimension $n = 2N^{\rm in} + N_\circ^{\rm in}$ (resp. $3N^{\rm in} = n + N_\partial^{\rm in}$). At a point $(r,z) \in \Omega^{\rm in}$, we have

$$\psi_h(r,z) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j\, w_j(r,z) + \sum_{\ell=1}^{N_\partial^{\rm in}} g_{D,\ell}\, v_{D,\ell}(r,z),$$

where $\{w_j\}_j$ (resp., $\{\psi_j\}_j$) is the set of n basis functions (resp., n degrees of freedom) for the rHCT finite element space $\mathcal{V}_\circ^{\rm in}$ and $\{v_{D,\ell}\}_\ell$ the set of $N_\partial^{\rm in}$ basis functions for rHCT finite elements associated with the values of the discrete function at the mesh boundary nodes of $\mathcal{I}$. The reals $\{g_{D,\ell}\}_\ell$ are the values of the Dirichlet boundary condition at the mesh nodes on $\mathcal{I}$. The normalized discrete flux is $\psi_{{\rm N},h}(r,z) = (\psi_N(\psi_h(r,z)), \psi_a(\psi_h), \psi_b(\psi_h))$ with

$$\psi_a(\psi_h) = \psi_h(r_a, z_a), \qquad \psi_b(\psi_h) = \psi_h(r_b, z_b). \tag{20}$$

The critical points (r_a, z_a) and (r_b, z_b) are not necessarily located at nodes of the mesh, as is the case with piece-wise linear finite elements, and in this work we use a Newton method to find them by solving $\nabla\psi_h(r,z) = 0$.

We use a six-point quadrature rule of order 4 (see [28]) on each sub-triangle for the approximation of integrals in (19). A difficulty which arises with rHCT finite elements is the computation of the iso-contours and therefore of the plasma boundary $\Gamma_p(\psi_h)$. Contrary to what has been done in [22, 12] with piece-wise linear finite elements, we do not compute explicitely the plasma boundary and do not consider a specific quadrature rule for elements T such that the intersection $T \cap \Omega_{\rm p}(\psi_h)$ is neither empty nor the whole triangle. We do not look for such elements T, but rather set $\mathcal{A}(\psi_{{\rm N},h}(r,z)) = 0$ and $\mathcal{B}(\psi_{{\rm N},h}(r,z)) = 0$ for points (r,z) outside the plasma domain. Once (r_b, z_b) and (r_a, z_a) are known, the plasma domain can be defined as $\{(r,z) \in \Omega, 0 \le \psi_{{\rm N},h}(r,z) \le 1 \text{ and } \nabla\psi_h(r,z)\cdot(r_a - r, z_a - z)^\top \ge 0\}$. The integral of the current density term over the plasma domain is then approximated with the same quadrature rule as for the linear term.

Let us denote by $\boldsymbol{\psi}$ the vector gathering the n degrees of freedom $\{\psi_i\}_i$ and $\mathbf{g}_D$ the vector of size $N_\partial^{\rm in}$ collecting the values of the Dirichlet boundary conditions. The first term in (19) leads to the linear expression $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{A}_D\mathbf{g}_D$, where $\boldsymbol{A}$ is the $n\times n$ stiffnes matrix and $\boldsymbol{A}_D$ is the $n \times N_\partial^{\rm in}$

matrix associated with the boundary conditions. The second term leads to the definition of a vector $\mathbf{J}(\boldsymbol{\psi})$ of size n with components

$$(\mathbf{J}(\boldsymbol{\psi}))_i = \int_{\Omega_{\mathrm{p}}(\psi_h)} \mathrm{J}_\varphi(\psi_{\mathrm{N},h}, r)\, w_i \, dr\, dz, \qquad i = 1, n, \tag{21}$$

that depend non-linearly on $\boldsymbol{\psi}$. Using the quadrature method explained above and denoting by T_i the subset of elements T of τ_{in} to which the node of the mesh associated with the ith degree of freedom belongs, and by $\mathbf{x}_{q,T} = (r_{q,T}, z_{q,T})$, $\omega_{q,T}$, the quadrature points and weights in the element T, the integral is computed as

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\psi})_i = \sum_{T\in T_i} \sum_q \mathrm{J}_\varphi(\psi_{\mathrm{N},h}(\mathbf{x}_{q,T}), r_{q,T})\, w_i(\mathbf{x}_{q,T})\, \omega_{q,T}. \tag{22}$$

In order to derive a Newton's method, we need to compute the Jacobian matrix $\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})$ which follows from the chain rule now that all notations are set:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})]_{ij} \quad &= \sum_{T\in T_i} \sum_q \omega_{q,T}\, w_i(\mathbf{x}_{q,T})\, \frac{\partial \mathrm{J}_\varphi}{\partial \psi_{\mathrm{N}}}(\psi_{\mathrm{N},h}(\mathbf{x}_{q,T}), r_{q,T})\, [\frac{\partial \psi_{\mathrm{N}}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi_h}{\partial \psi_j} + \frac{\partial \psi_{\mathrm{N}}}{\partial \psi_a}\frac{\partial \psi_a}{\partial \psi_j}(\psi_h) + \frac{\partial \psi_{\mathrm{N}}}{\partial \psi_b}\frac{\partial \psi_b}{\partial \psi_j}(\psi_h)] \\
&= \sum_{T\in T_i} \sum_q \omega_{q,T}\, w_i(\mathbf{x}_{q,T})\, \frac{\partial \mathrm{J}_\varphi}{\partial \psi_{\mathrm{N}}}(\psi_{\mathrm{N},h}(\mathbf{x}_{q,T}), r_{q,T})\, \frac{1}{(\psi_b - \psi_a)}\, [w_j(\mathbf{x}_{q,T}) + \frac{\psi_h(\mathbf{x}_{q,T}) - \psi_b}{(\psi_b - \psi_a)} w_j(\mathbf{x}_a) \\
&\qquad - \frac{\psi_h(\mathbf{x}_{q,T}) - \psi_a}{(\psi_b - \psi_a)} w_j(\mathbf{x}_b)]
\end{aligned} \tag{23}$$

where $w_j(\mathbf{x}_a)$ (resp. $w_j(\mathbf{x}_b)$) are null for indices j not corresponding to the element T_a (resp., T_b) where $\mathbf{x}_a = (r_a, z_a)$ (resp., $\mathbf{x}_b = (r_b, z_b)$) lies. Nevertheless $\mathbf{Jac}_{\psi}(\boldsymbol{\psi})$ has entries at indices (i, j) not local to an element. Each element T is linked to T_a (resp. T_b) through the $w_i(\mathbf{x}_{q,T})w_j(\mathbf{x}_a)$ (resp. $w_i(\mathbf{x}_{q,T})w_j(\mathbf{x}_b)$) terms. This is not standard but the matrix can still be assembled element by element as it is usually done with finite elements. For the right-hand-side of equation (19), we introduce the matrix $\mathbf{L}^{\mathrm{in}}$ of size $n \times N_c^{\mathrm{in}}$ with entries

$$\mathbf{L}^{\mathrm{in}}_{i,j} = \frac{1}{|\Omega_{\mathrm{c}_i}|} \int_{\Omega_{\mathrm{c}_i}} w_j^{\mathrm{in}}\, dr\, dz, \qquad \Omega_{\mathrm{c}_i} \subset \Omega^{\mathrm{in}},$$

and the vector $\mathbf{U}_I^{\mathrm{in}}$ of size N_c^{in} holding the currents I_i of the coils $\Omega_{\mathrm{c}_i} \subset \Omega^{\mathrm{in}}$. Newton's iterations for equation (19) in its fully discretized form, say $\mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}$ with $\mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}) := \boldsymbol{A}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{A}_D\mathbf{g}_D - \mathbf{J}(\boldsymbol{\psi}) - \mathbf{L}^{\mathrm{in}}\,\mathbf{U}_I^{\mathrm{in}}$, can be written as

$$\boldsymbol{\psi}^{k+1} = \boldsymbol{\psi}^k - [\mathbf{e}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi}^k)]^{-1}\,\mathbf{e}(\boldsymbol{\psi}^k), \qquad [\mathbf{e}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})] = \boldsymbol{A} - \mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})\,. \tag{24}$$

In order to write the matrix form of the discrete problem in the whole domain, instead of a Dirichlet type datum $\mathbf{g}_D$ on the boundary $\mathcal{I}$, we have to impose the mortar coupling condition. We denote by $\mathbf{X}$ the reduced variable such that $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{Q}\,\mathbf{X}$ with $\mathbf{Q}$ the coupling matrix. In detail, we have

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\circ^{\mathrm{ex}} \\ \mathbf{u}_\partial^{\mathrm{ex}} \\ \mathbf{u}_\circ^{\mathrm{in}} \\ \mathbf{u}_\partial^{\mathrm{in}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\circ^{\mathrm{ex}} \\ \mathbf{u}_\circ^{\mathrm{in}} \\ \mathbf{u}_\partial^{\mathrm{in}} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\,\mathbf{X},$$

with the matrices $\mathbf{P}$ and $\mathbf{D}$ defined in the previous section. So, $\mathbf{J}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q}\,\mathbf{X}) = \mathbf{H}(\mathbf{X})$ and when we derive $\mathbf{J}(\boldsymbol{\psi})$ with respect to $\mathbf{X}$ we have $D_{\mathbf{X}}\mathbf{H}(\mathbf{X})d\mathbf{X} = \mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})\mathbf{Q}d\mathbf{X}$. Newton's

iterations for problem (8) in its fully discretized form, say $\mathbf{e}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ with now $\mathbf{e}(\mathbf{X}) := \mathbf{Q}^\top\,[(\boldsymbol{A}+\mathbf{C})\,\mathbf{Q}\,\mathbf{X} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\psi}) - \mathbf{L}\,\mathbf{U}_I]$, can be written as

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - [\mathbf{e_X}(\mathbf{X^k})]^{-\mathbf{1}}\,\mathbf{e}(\mathbf{X^k}), \qquad [\mathbf{e_X}(\mathbf{X})] = \mathbf{Q}^\top[(\boldsymbol{A}+\mathbf{C}) - \mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{k}})]\,\mathbf{Q}\,. \tag{25}$$

Here, $\mathbf{L}$ (resp. $\mathbf{U}_I$) now takes into account the contributions associated with all the coils (resp. all the currents I_i of the coils) contained in Ω^{in} and in Ω^{ex}. See the section on numerical results for a convergence history of the proposed Newton's method.

6 Computation of geometric coefficients

Important outputs of an equilibrium computation are 1D profiles computed from integrals of the form

$$A_{\alpha,\beta}(y) = \int_{C_y} r^\alpha |\nabla\psi_h|^\beta ds \tag{26}$$

defined on iso-contours $C_y = \{\mathbf{x} \in \Omega_{\text{p}},\ \psi_{\text{N}}(\mathbf{x}) = y\}$, for $y \in [0,1]$, in the plasma domain. Note that the iso-contour C_y is a priori not given by an explicit parametrization, but implicitly as level set of a scalar function. The 1D profiles, such as (26), are essential to incorporate resistive diffusion effects into plasma evolution modeling. Also many plasma characteristics (*e.g.*, the safety factor or the averaged current density profile), that are important to quantify stability or for monitoring during the experiment, are defined as integrals over iso-contours [6]. These 1D profiles are used for example in the definition of averaged quantities

$$< r^\alpha |\nabla\psi_h|^\beta >= \frac{A_{\alpha+1,\beta-1}}{A_{1,-1}}.$$

With $\mathbb{P}_1$ Lagrange FE, high accuracy in computing these profiles can be achieved only by relying on a very fine mesh. The use of rHCT FEs enables to compute a smooth poloidal magnetic field and to locate precisely the position of the magnetic axis and of the X-point independently of the mesh. At a fixed number of degrees of freedom, it improves the precision of the computation of these 1D profiles with respect to that with $\mathbb{P}_1$ Lagrange FEs.

6.1 The iso-contour method

A drawback of using rHCT FE is that the computation of precise iso-contours for ψ is much more involved than when using $\mathbb{P}_1$ Lagrange FEs. Nevertheless, it is possible and we can proceed as follows: Given the magnetic axis and the point defining the plasma boundary, iterate, until convergence (up to a fixed threshold), the following steps.

1. Find a first point $\mathbf{x}_y^0$ on the levelset C_y, where $\psi_y := \psi_a + (\psi_b - \psi_a)y$ thanks to a Newton's method along the ray $(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)$.
2. Construct isocontour points by first following the direction $\mathbf{t}$ orthogonal to $\nabla\psi_h$ with a step a, namely, set $\mathbf{x}_y^{k+1,0} = \mathbf{x}_y^k + a\mathbf{t}$.
3. Correct $\mathbf{x}_y^{k+1,0}$ to obtain a point located exactly on the levelset, with iterations

$$\mathbf{x}_y^{k+1,\ell+1} = \mathbf{x}_y^{k+1,\ell} + \delta s\, \nabla\psi_h(\mathbf{x}_y^{k+1,\ell})$$

where δs is the Newton's increment for $\psi_h(\mathbf{x}_y^{k+1,\ell} + s\,\nabla\psi_h(\mathbf{x}_y^{k+1,\ell})) - \psi_y = 0$.
If $||\mathbf{x}_y^{k+1,\ell+1} - \mathbf{x}_y^{k+1,\ell}||_2$ inferior to a fixed threshold ε, stop and proceed with next point, otherwise go back to step 2 and reduce step size a.

Typically in our numerical tests (see Section 7) the step a is set to a fraction of h_{in}, $a = \frac{h_{in}}{4}$, the threshold is $\varepsilon = 10^{-12}$ and the Newton loop in step 3 above converges in 2 iterations.

Once the levelset points are found, the integrals (26) are computed using the trapezoidal quadrature rule. This method works perfectly well and gives precise results but the computation of iso-contours can be time consuming. On the other hand these computations are completely independent one from the other and can thus be easily parallelized.

6.2 The weak formulation method

In [10] it is proposed to use a weak formulation based on the coarea formula (see Theorem 3.2.12 in [14]) to compute integrals such as (26). The coarea formula underlines the relationship between integrals on iso-contours and integrals on $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, here $d = 2$. Given a function $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ integrable and $\psi_N : \Omega \to [0,1]$ Lipschitz continuous, the iso-contour integrals are defined as $g_{f,\psi_N}(y) := \int_{\mathbf{x}\in\Omega,\, \psi_N(\mathbf{x})=y} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. The coarea formula states that $g_{f,\psi_N} \in L^1(0,1)$ and

$$\int_0^1 g_{f,\psi_N}(y)\, dy = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, |\nabla\psi_N(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \tag{27}$$

As done in [10], from the identity $g_{f,\psi_N}(y)\,\lambda(y) = g_{f\,\lambda(\psi_N),\psi_N}(y)$ and (27), we have

$$\int_0^1 g_{f,\psi_N}(y)\,\lambda(y)\, dy = \int_0^1 g_{f\,\lambda(\psi_N),\psi_N}(y)\, dy = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,\lambda(\psi_N(\mathbf{x}))\, |\nabla\psi_N(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \tag{28}$$

By combining (28) and (26), we have :

$$\int_0^1 A_{\alpha,\beta}(y)\lambda(y)dy = \int_{\Omega_{\mathrm{p}}(\psi_h)} r^\alpha |\nabla\psi_h|^\beta \lambda(\psi_{\mathrm{N},h})|\nabla\psi_{\mathrm{N},h}| dr dz, \quad \forall\lambda \in L^2(0,1) \tag{29}$$

In [10], to approximate $L^2(0,1)$, the space of all polynomials of degree less than or equal to P in $[0,1]$ is used as discrete space, with a basis of Legendre polynomials. This enables to have a diagonal $(P+1)\times(P+1)$ mass matrix corresponding to the left-hand side of (29) but on the other hand requires the use of an expensive high order quadrature formula to compute terms corresponding to the right-hand side of (29) since Legendre polynomials up to degree 30 or 40 have to be used. In this paper we have succesfully tested the use of a cubic spline basis which does not require such high order quadrature formulas.

We propose an equivalent formulation of (26) which does not involve anymore the explicit computation of iso-contours. Numerically the method consists in writing $A_{\alpha,\beta}(y) = \sum_i a^i_{\alpha,\beta}\lambda_i(y)$,

Table 1: Error values in $H^m(\Omega^{\text{in}})$-norm, $m = 0, 1, 2$, for the linear problem (30) using rHCT FEs on refined meshes.

h	$\|\|u - u_h\|\|_{L^2}$	$\|\|u - u_h\|\|_{H^1}$	$\|\|u - u_h\|\|_{H^2}$
0.44194174e-1	0.99885478e-5	0.15105871e-2	0.33870552e-0
0.22097087e-1	0.12031353e-5	0.37243609e-3	0.16757605e-0
0.11048543e-1	0.14814052e-6	0.92608080e-4	0.83400905e-1
0.55242717e-2	0.18396474e-7	0.23099315e-4	0.41611326e-1

where λ_i are basis Legendre polynomials or spline functions on $[0, 1]$, and finding the vector of coefficients $\mathbf{a}$ by inverting the linear system $\boldsymbol{M}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ where

$$\boldsymbol{M}_{i,j} = \int_0^1 \lambda_i(y)\lambda_j(y)dy$$

and

$$b_i = \int_{\Omega_{\text{p}}(\psi_h)} r^\alpha |\nabla\psi_h|^\beta \lambda_i(\psi_{\text{N},h})|\nabla\psi_{\text{N},h}|drdz$$

For this last surface integral, as it is done for the equilibrium equation, we do not resolve the plasma domain $\Omega_{\text{p}}(\psi_h)$ but only check whether the quadrature points are inside or not.

7 Numerical results

We present some numerical results which highlight the features of the proposed method. We start by checking the correct implementation of rHCT FEs, then show an example of the use of the non-overlapping MEM for the JT60-SA tokamak. The section ends with the computation of several geometric coefficients and 1D output profiles. These last experiments are conducted with the code NICE, a C++ implementation of the methods for axisymmetric free boundary plasma equilibria described in [12].

7.1 Validation of rHCT FE implementation

Since our aim is to combine $\mathbb{P}_1$ Lagrange FEs with rHCT FEs, we can in general only expect that the global error reduction at each mesh refinement step is comparable to the error reduction of a solution without MEM, relying on $\mathbb{P}_1$ Lagrange FEs everywhere. To keep the high-order precision everywhere, we would have had to combine rHCT FEs on the exterior with high order rHCT FEs on the interior, with a large increase in the size of the system to solve. On the other hand, the use of rHCT FEs in Ω^{in} really improves the quality of the computation of interesting physical paramaters, as we will see in the following. To validate the precision of the rHCT in Ω^{in}, we consider the linear problem

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega^{\text{in}} = [0, 1]^2 \qquad u = u_D \quad \text{on } \mathcal{I} = \partial\Omega^{\text{in}}. \tag{30}$$

The mesh τ^{in} is a triangular one, satisfying the regularity requirements stated in [8] for the error estimate $||u - u_h||_m = O(h^{3-m})$, $m = 0, 1, 2$, with u_h the rHCT FE approximated solution of problem (30). The data f and u_D are consistent with $u(r, z) = x^4 (y - 1)^2 + y^4 (x - 1)^2$ being the solution of (30). Convergence rates (see Figure 6 and the detailed values in Table 1) are in agreement with the theoretical ones.

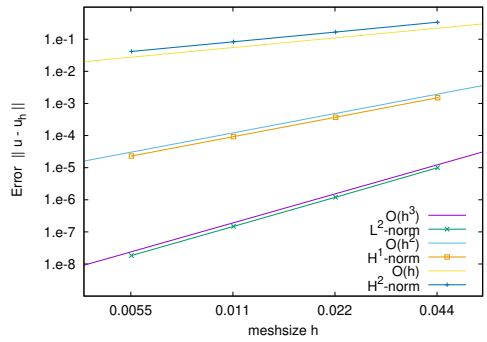


Figure 6: Error decay in $H^m(\Omega^{\text{in}})$-norm, $m = 0, 1, 2$, for the linear problem (30) using rHCT FEs on refined meshes.

7.2 JT60-SA tokamak test case

Numerical solution Numerical results for problem (8) are obtained for the configuration presented in Figure 2. The tokamak JT60SA, where JT60 stands for Japan Torus-60 and SA indicates the upgraded model with Superconducting coils, is the largest machine before ITER and is intended to be able to run with the same D-shaped plasma as ITER. The construction of the JT60SA officially began in 2013 and its assembly was completed between spring and summer 2020. The first plasma in this machine is planned for the end of 2020, it thus constitutes a perfect benchmark configuration for which numerical simulations can compute and analyse a plasma equilibrium before this equilibrium is physically generated in the machine.

Starting from the JT60-SA tokamak machine description (coils, limiter, vaccum vessel and passive structure) and a coupling interface contour , a mesh is generated using the mesh generator Triangle [32]. It is made of 6123 triangles and 3198 vertices for the external domain and 7275 triangles and 3721 vertices for the internal domain. The coupling interface contour is made of 165 vertices. Computations are initialized with an inverse static computation in the full ABB domain using $\mathbb{P}_1$ FE as implemented in the code NICE [12]. It consists in finding the currents in PF coils which enable to have a desired plasma shape. Functions p' and ff' are given through parameterization (7) where $\alpha = 2$, $\gamma = 0.8$ and $\beta = 0.5$. The scaling parameter λ is computed such that the plasma current is $I_p = 5.5 \times 10^6$ A. This provides an initial $\mathbb{P}_1$ FE equilibrium from which the coupled rHCT-$\mathbb{P}_1$ solution is initialized.

It is essential to verify numerically the implementation of the computation of the Jacobian matrix given by (23). This is done by comparison with finite differences and we check that

$$e(\varepsilon) := ||\frac{\mathbf{J}(\boldsymbol{\psi} + \varepsilon \mathbf{h}) - \mathbf{J}(\boldsymbol{\psi})}{\varepsilon} - \mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})\mathbf{h}|| = O(\varepsilon) \tag{31}$$

where the perturbation vector $\mathbf{h}$ is chosen randomly. Table 2 gives a typical example of such a numerical test which enables to make sure that the computation of the Jacobian is correct. The error e starts by decreasing as ε decreases. As it is typical for very small ε values, the error increases due to the accumulation of round-off errors.

This is confirmed by the good convergence of the Newton iterations (25) (see Table 3) for the resolution of the non-linear coupled problem.

The non-overlapping MEM for the $\mathbb{P}_1$-rHCT FEs' coupling works fine to reconstruct the plasma equilibrium in the tokamak (see Figure 7).

ε	e
10^0	$1.13214 \times 10^{+1}$
10^{-1}	4.94353×10^{-2}
10^{-2}	1.32271×10^{-2}
10^{-3}	3.15033×10^{-3}
10^{-4}	6.87336×10^{-5}
10^{-5}	6.61486×10^{-7}
10^{-6}	7.23428×10^{-6}
10^{-7}	7.80983×10^{-5}
10^{-8}	1.21922×10^{-3}
10^{-9}	5.06769×10^{-3}

Table 2: Convergence of the error e (Eqn (31)) for the computation of the Jacobian $\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\psi})$

n	residual relative error
1	3.47561×10^{-2}
2	2.91101×10^{-4}
3	3.32183×10^{-7}
4	1.96881×10^{-13}

Table 3: Convergence history of Newton iterations, iteration number n and residual relative error $||\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}||/||\mathbf{X}^{n-1}||$.

With the non-overlapping MEM we are able to introduce FE functions in Ω^{in} that are continuous with continuous derivatives, hence the location of critical points is no more restricted to a finite number of points. Indeed, we have that the plasma axis position (r_a, z_a) and the X-point position (r_b, z_b) are at points other than mesh nodes of τ^{in}, as shown with a zoom of the solution ψ_h in Figure 8, left and right, respectively.

To highlight the influence of the continuous derivatives we compare the results with the MEM that uses piece-wise linear FEs ($\mathbb{P}_1$) instead of the rHCT FEs. In Figure 9 the behavior of the poloidal component $\frac{1}{r}\nabla\psi \times \mathbf{e}_\varphi$ of the magnetic induction is shown as a function of r along the chord $\{(r, z_a),\ r_{\min} \leq r \leq r_{\max}\}$, with $r_{\min}$ (resp., $r_{\max}$) the minimum radius (resp., the maximum radius) of the tokamak vacuum chamber. The staircase effect associated with the discontinuity of the derivatives for piece-wise linear FEs is replaced by a smooth profile when rHCT FEs are adopted in Ω^{in}.

Geometric coefficients and 1D output profiles After an equilibrium is computed one can proceed with the evaluation of several output quantities which are used either to characterize the plasma (e.g the safety factor which plays a role in stating the stability of the plasma) or geometric coefficients which are use in transport models which are used to compute the quasi-static evolution of the plasma. Here we concentrate on a few 1D profiles for the computation of which we show the benefit of using rHCT FE instead of $\mathbb{P}_1$ FE.

For $\psi_{\text{N}} \in [0, 1]$, $f(\psi) = S_f(\psi_{\text{N}})$ is computed by integration of $\mathcal{B}$.

$$S_f(\psi_{\text{N}}) = [(B_0 r_0)^2 - 2(\psi_b - \psi_a)\lambda\mu_0 r_0 \int_{\psi_{\text{N}}}^1 \mathcal{B}(x)dx]^{1/2} \tag{32}$$

where B_0 is the vacuum toroidal field at $r = r_0$. For simplicity in what follows we will note $f(\psi_{\text{N}})$ for $S_f(\psi_{\text{N}})$.

Let us define a discretization of the unit interval $[0,1]$ by $S+1$ values $\psi_{\mathrm{N}}^0 = 0, \ldots, \psi_{\mathrm{N}}^S = 1$. These points are taken as abscissa for all computed 1D profiles. We also note $\Omega_{\psi_{\mathrm{N}}^s} = \{\mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{p}},\ \psi_{\mathrm{N}}(\mathbf{x}) \leq \psi_{\mathrm{N}}^s\}$ the domain bounded by $C_{\psi_{\mathrm{N}}^s}$.

The toroidal flux coordinate is defined and computed as

$$\rho(\psi_{\mathrm{N}}^s) = \sqrt{\phi(\psi_{\mathrm{N}}^s)/\pi B_0}$$

where

$$\phi(\psi_{\mathrm{N}}^s) = \int_{\Omega_{\psi_{\mathrm{N}}^s}} \frac{f(\psi_h(r,z))}{r} dr dz$$

Again in this last surface integral and as is done for the equilibrium equation we do not resolve the domain $\Omega_{\psi_{\mathrm{N}}^s}$ but only check if the quadrature points are inside or not.

Now that the $f(\psi_{\mathrm{N}}^s)$, $\phi(\psi_{\mathrm{N}}^s)$ and $\rho(\psi_{\mathrm{N}}^s)$ profiles are known we can proceed with other quantities. The safety factor is computed as

$$q(\psi_{\mathrm{N}}^s) = A_{-1,-1}(\psi_{\mathrm{N}}^s) \frac{f(\psi_{\mathrm{N}}^s)}{2\pi}$$

and the ψ derivative of the plasma volume as

$$\frac{\partial V}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s) = -2\pi A_{1,-1}(\psi_{\mathrm{N}}^s).$$

We compute the profile $\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(\psi_{\mathrm{N}}^s)$ as $1/\frac{\partial \rho}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s)$ with $\frac{\partial \rho}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s) = \frac{1}{2\pi B_0 \rho} \frac{\partial \phi}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s)$ and $\frac{\partial \phi}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s) = -2\pi q(\psi_{\mathrm{N}}^s)$. Once this is known we easily obtain the ρ derivative of the plasma volume

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}(\psi_{\mathrm{N}}^s) = \frac{\partial V}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s) \frac{\partial \psi}{\partial \rho}(\psi_{\mathrm{N}}^s).$$

Two important geometric coefficients are $gm_1 :=< \frac{1}{r^2} >$ and $gm_2 :=< \frac{|\nabla \rho|^2}{r^2} >$ computed as

$$gm_1(\psi_{\mathrm{N}}^s) = \frac{A_{-1,-1}(\psi_{\mathrm{N}}^s)}{A_{1,-1}(\psi_{\mathrm{N}}^s)}, \qquad gm_2(\psi_{\mathrm{N}}^s) = (\frac{\partial \rho}{\partial \psi}(\psi_{\mathrm{N}}^s))^2 \frac{A_{-1,1}(\psi_{\mathrm{N}}^s)}{A_{1,-1}(\psi_{\mathrm{N}}^s)}.$$

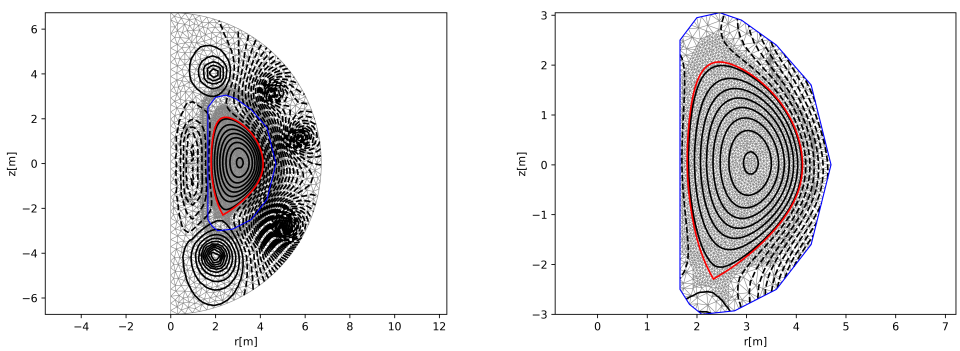


Figure 7: Iso-contours of ψ_h in the whole domain Ω (left) and in Ω_{L} (right), computed by the proposed non-overlapping MEM to have $\mathbb{P}_1$ FEs in Ω^{ex} and rHCT FEs in Ω^{in}.

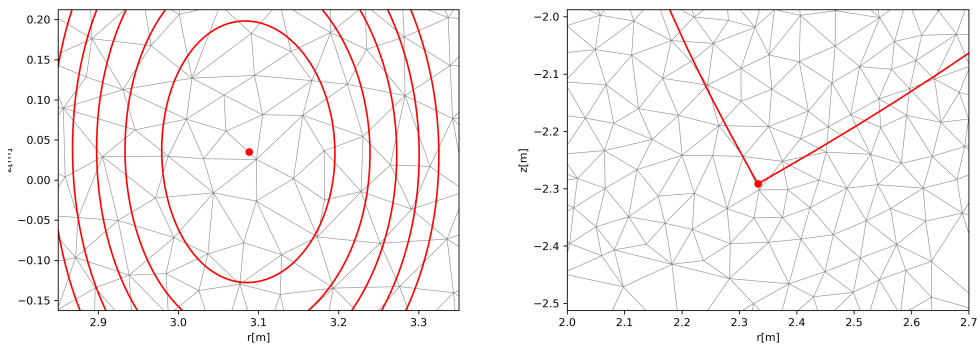


Figure 8: A zoom of the iso-contours of ψ_h in Ω_{L}, with the plasma axis (left) and X-point (right) localization.

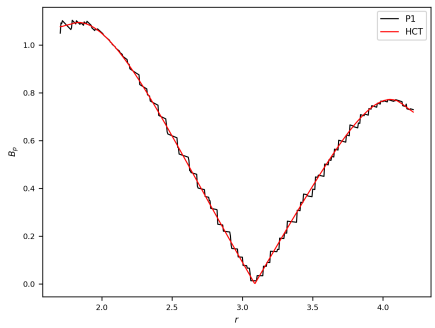


Figure 9: Poloidal magnetic field $||\nabla\psi(r, z_a)||/r$ as a function of r in the vacuum vessel. In black the $\mathbb{P}_1$ solution and in red the rHCT solution

Among the many other quantities that can be computed out from an equilibrium configuration we are only going to examine one more, the magnetic shear profile defined as $sh := \dfrac{\rho}{q}\dfrac{\partial q}{\partial \rho}$ which is difficult to compute smoothly because of the q derivative. This derivative is approximated using centered finite differences.

Figure 10 shows these computed profiles for 4 different cases: the $\mathbb{P}_1$ FE case and three rHCT cases, using the isocontour method or the weak formulation method with either Legendre polynomials or splines in order to compute integrals $A_{\alpha,\beta}$. As expected profiles computed from the rHCT solution are smoother than those computed from the $\mathbb{P}_1$ solution. This is particularly clear for example for gm_2 close to the magnetic axis ($\psi_{\mathrm{N}} = 0$) or for the magnetic shear. Profiles computed from the rHCT solution with three different numerical methods differ very little. Concerning the computation time it can be noted that these runs were done on a laptop with two dual cores using `OpenMP` to parallelize the isocontour computations. Despite this, the weak formulation method is still faster than the isocontour method.

8 Conclusion

In this paper we propose a numerical method which enables the computation of a high order approximation of the equilibrium of the plasma in a tokamak. The method relies on the decomposition of the computational domain in two subdomains, the external one, not containing the plasma and in which $\mathcal{C}^0$ piece-wise linear Lagrange FEs are used, and the internal one, containing the plasma in which $\mathcal{C}^1$ rHCT FEs are used. The coupling between the two subdomains is done thanks to a mortar element method for which we showed that the L^2-projection method enables to ensure an excellent transmission of information from one domain to the other. At the discrete level we propose a Newton method to solve the coupled nonlinear problem and give numerical evidence of its convergence. We also propose two different approaches to compute the geometric coefficients which are essential outputs of a plasma equilibrium computation. The second one, based on a variational formulation over the plasma domain is fast and precise. It does not require the explicit computation of iso-contours as the first method does.

Acknowledgements

This work is supported by the French National Research Agency grant SISTEM (ANR-19-CE46-0005-03). The first and second authors have worked within the framework of the EURO Fusion Consortium and have received funding from Euratom research and training programs 2014-2018, 2019-2020, under the grant agreement N.633053. The views and opinions expressed herein do not necessarily reflect those of the European Commission. The third author thanks the project team CASTOR at INRIA for the delegation in 2020, during which this work was completed.

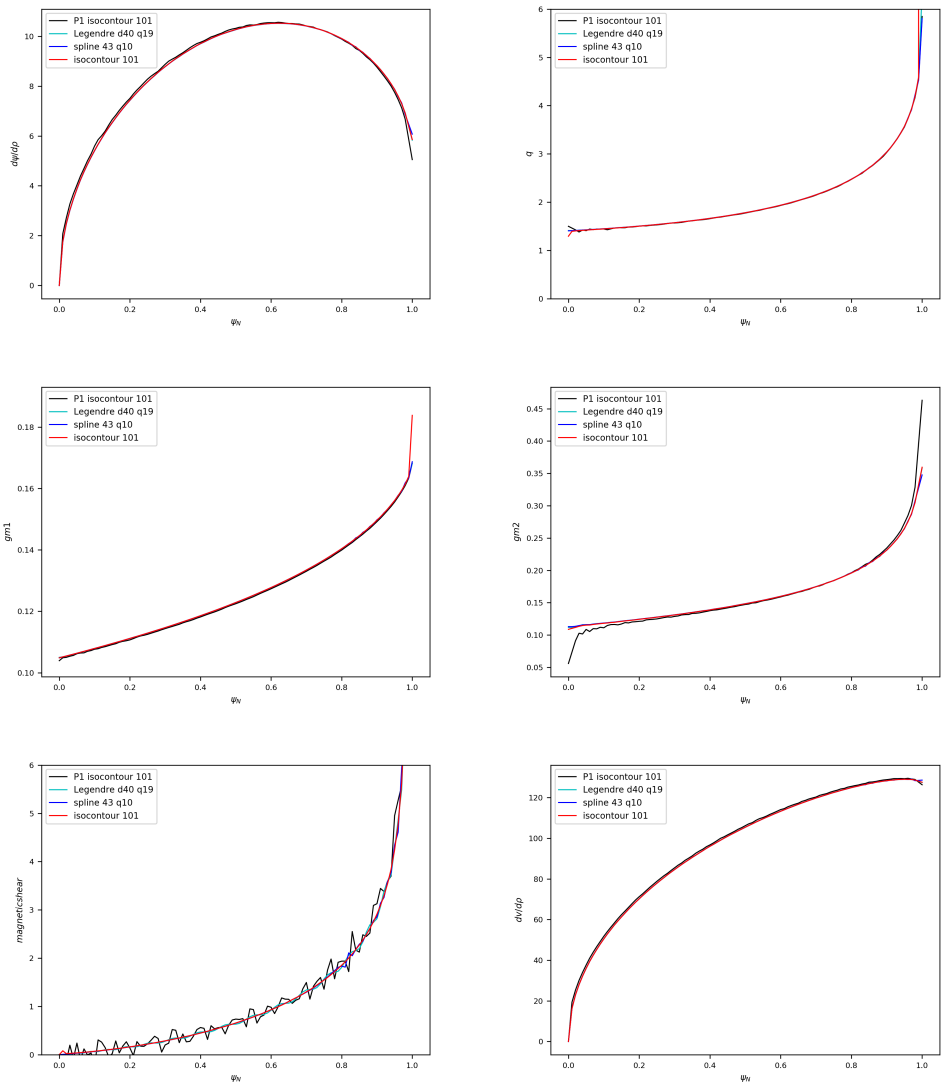


Figure 10: The profile of $\dfrac{\partial \psi}{\partial \rho}(\psi_{\mathrm{N}})$ (top, left), $q(\psi_{\mathrm{N}})$ (top, right), $gm_1(\psi_{\mathrm{N}})$ (center, left), $gm_2(\psi_{\mathrm{N}})$ (center, right), $sh(\psi_{\mathrm{N}})$ (bottom, left) and of $\dfrac{\partial V}{\partial \rho}(\psi_{\mathrm{N}})$ (bottom, right). Black: 101 iso-contours method from the $\mathbb{P}_1$ solution. Red: 101 iso-contours method from the rHCT solution. Cyan: weak formulation method with Legendre polynomials up to degree 40 and a quadrature rule of order 19. Blue: weak formulation method with 43 splines and a quadrature of order 10.

References

[1] R. Albanese, J. Blum, and O. Barbieri. On the solution of the magnetic flux equation in an infinite domain. In *EPS. 8th Europhysics Conference on Computing in Plasma Physics (1986)*, pages 41–44, 1986.

[2] Henri Berestycki and Haïm Brézis. On a free boundary problem arising in plasma physics. *Nonlinear Anal.*, 4(3):415–436, 1980.

[3] C. Bernardi, Y. Maday, and A.T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method. In *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications.* in H. Brézis and J.-L. Lions (eds.), Collège de France Seminar XI., 1992.

[4] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. Basics and some applications of the mortar element method. *GAMM-Mitt.*, 28:97–123, 2005.

[5] M. Bernardou and K Hassan. Basis functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, complete or reduced. Research Report RR-0005, INRIA, 1980. `https://hal.inria.fr/inria-00076556`.

[6] J. Blum. *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics with Applications to Tokamaks.* Series in Modern Applied Mathematics. Wiley Gauthier-Villars, Paris, 1989.

[7] J. Blum, T. Gallouet, and J. Simon. Existence and control of plasma equilibrium in a tokamak. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 17(5):1158–1177, 1986.

[8] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.

[9] R.W. Clough and J.L. Tocher. Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst of Tech., Wright Patterson A.F Base, Ohio, October 1965.

[10] Lukas Drescher, Holger Heumann, and Kersten Schmidt. A high order method for the approximation of integrals over implicitly defined hypersurfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(6):2592–2615, 2017.

[11] G.L. Falchetto, D. Coster, R. Coelho, B.D. Scott, L. Figini, D. Kalupin, E. Nardon, S. Nowak, L.L. Alves, J.F. Artaud, V. Basiuk, Jo ao P.S. Bizarro, C. Boulbe, A. Dinklage, D. Farina, B. Faugeras, J. Ferreira, A. Figueiredo, Ph. Huynh, F. Imbeaux, I. Ivanova-Stanik, T. Jonsson, H.-J. Klingshirn, C. Konz, A. Kus, N.B. Marushchenko, G. Pereverzev, M. Owsiak, E. Poli, Y. Peysson, R. Reimer, J. Signoret, O. Sauter, R. Stankiewicz, P. Strand, I. Voitsekhovitch, E. Westerhof, T. Zok, W. Zwingmann, ITM-TF Contributors, the ASDEX Upgrade Team, and JET-EFDA Contributors. The European Integrated Tokamak Modelling (ITM) effort: achievements and first physics results. *Nuclear Fusion*, 54(4):043018, 2014.

[12] B. Faugeras. An overview of the numerical methods for tokamak plasma equilibrium computation implemented in the NICE code. *Fusion Eng. Design*, 160:112020, 2020.

[13] B. Faugeras and H Heumann. FEM-BEM coupling methods for tokamak plasma axisymmetric free-boundary equilibrium computations in unbounded domains. *J. Computational Physics*, 343(Supplement C):201 – 216, 2017.

[14] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[15] J. P. Freidberg. *Ideal Magnetohydrodynamics.* Plenum US, 1987.

[16] Johan P Goedbloed, Rony Keppens, and Stefaan Poedts. *Advanced magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas.* Cambridge University Press, 2010.

[17] Johan Peter Goedbloed and Stefaan Poedts. *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas.* Cambridge university press, 2004.

[18] H. Grad and J. Hogan. Classical diffusion in a tokomak. *Phys. Rev. Lett.*, 24:1337–1340, Jun 1970.

[19] H. Grad and H. Rubin. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. *Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, 31:190, 1958.

[20] Virginie Grandgirard. *Modélisation de l'équilibre d'un plasma de tokamak.* PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1999.

[21] Z. Jiang H. Haddar and A. Lechleiter. Artificial boundary conditions for axisymmetric eddy current probe problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 68(12A):1844–1870, 2014.

[22] H. Heumann, J. Blum, C. Boulbe, B. Faugeras, G. Selig, J.-M. Ané, S. Brémond, V. Grandgirard, P. Hertout, and E. Nardon. Quasi-static free-boundary equilibrium of toroidal plasma with CEDRES++: Computational methods and applications. *Journal of Plasma Physics*, 81, 6 2015.

[23] H. Heumann and F. Rapetti. A finite element method with overlapping meshes for free-boundary axisymmetric plasma equilibria in realistic geometries. *J. Computational Physics*, 334:522–540, 2017.

[24] F.L. Hinton and R.D. Hazeltine. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. *Rev. Mod. Phys.*, 48:239–308, Apr 1976.

[25] S.C. Jardin. A triangular finite element with first-derivative continuity applied to fusion mhd applications. *J. Comput. Phys.*, 200(1):133–152, October 2004.

[26] S.C. Jardin. *Computational methods in plasma physics.* Boca Raton, FL : CRC Press/Taylor & Francis, 2010.

[27] R. Lüst and A. Schlüter. Axialsymmetrische magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen. *Z. Naturforsch. A*, 12:850–854, 1957.

[28] J.N. Lyness and D. Jespersen. Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. *J. Inst. Maths. Applics.*, 15:19–32, 1975.

[29] Leszek Marcinkowski. *Mortar methods for some second and fourth order elliptic equations.* PhD thesis, 1999.

[30] Masa Aki Nakamura. On an equilibrium of the plasma in a tokamak with a limiter. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 8(3):431–444.

[31] V.D. Shafranov. On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 6:545, 1958.

[32] J.R. Shewchuk. Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors, *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 203–222. Springer-Verlag, May 1996. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry.

[33] R. Temam. Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics. *Comm. Partial Differential Equations*, 2(6):563–585, 1977.

[34] J. Wesson. *Tokamaks*. The International Series of Monographs in Physics. Oxford University Press, 2004.

RESEARCH CENTRE
SOPHIA ANTIPOLIS – MÉDITERRANÉE

2004 route des Lucioles - BP 93
06902 Sophia Antipolis Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399

Bibliographie

[1] https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/physique-iter-4257/.

[2] https://www.iter.org/fr/sci/whatisfusion.

[3] https://www.laradioactivite.com/site/pages/uranium238et235.htm.

[4] http://fusionwiki.ciemat.es/wiki/Main_Page.

[5] https://www.ansys.com/.

[6] A. white, ecole de physique des houches 2015. http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/Equipe2/LesHouches15/Talks_files/White_ExperimentalTokamaks.pdf.

[7] Nrl plasma formulary. https://www.nrl.navy.mil/ppd/content/nrl-plasma-formulary.

[8] Peter Alfeld and Larry L. Schumaker. Smooth macro-elements based on powell–sabin triangle splits. *Advances in Computational Mathematics*, 16(1) :29–46, Jan 2002.

[9] Grégoire Allaire. Approximation numérique et optimisation.Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Lecture, June 2019.

[10] Martin S. Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells. The fenics project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 2015.

[11] J.H. Argyris, H. Balmer, J.St. Doltsinis, P.C. Dunne, M. Haase, M. Kleiber, G.A. Malejannakis, H.-P. Mlejnek, M. Müller, and D.W. Scharpf. Finite element method — the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17-18 :1 – 106, 1979.

[12] Daniel Arndt, Wolfgang Bangerth, Bruno Blais, Thomas C. Clevenger, Marc Fehling, Alexander V. Grayver, Timo Heister, Luca Heltai,

Martin Kronbichler, Matthias Maier, Peter Munch, Jean-Paul Pelteret, Reza Rastak, Ignacio Thomas, Bruno Turcksin, Zhuoran Wang, and David Wells. The `deal.II` library, version 9.2. *Journal of Numerical Mathematics*, 28(3) :131–146, 2020.

[13] Ivo Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20 :179–192, 1972/73.

[14] Ivo Babuška. The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27(122) :221–228, 1973.

[15] H.J.C. Barbosa and T.J.R. Hughes. Boundary lagrange multipliers in finite element methods : Error analysis in natural norms. *Numerische Mathematik*, 62(1) :1–15, 1992. cited By 61.

[16] John Barrett and Charles M. Elliott. Finite element approximation of the dirichlet problem using the boundary penalty method. 49 :343–366, 07 1986.

[17] Michel Bernadou, Jean-Marie Boisserie, and Kamal Hassan. Sur l'implémentation des éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit. Research Report RR-0004, INRIA, 1980.

[18] Michel Bernadou and Kamal Hassan. Basis functions for general hsieh-clough-tocher triangles, complete or reduced. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(5) :784–789, 1981.

[19] O. Botella and R. Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, 27(4) :421 – 433, 1998.

[20] Susanne C. Brenner and Larkin R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2008.

[21] Charles-Henri Bruneau and Mazen Saad. The 2d lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids*, 35(3) :326 – 348, 2006.

[22] M E Cayco and R A Nicolaides. Finite element technique for optimal pressure recovery from stream function formulation of viscous flows. *Math. Comput.*, 46(174) :371–377, apr 1986.

[23] Jean Cea. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Annales de l'institut Fourier*, 14(2) :345–444, 1964.

[24] Praveen Chandrashekar, Boniface Nkonga, and Ashish Bhole. A discontinuous galerkin method for a two dimensional reduced resistive mhd model. *Computers and Fluids*, 190 :178 – 191, 2019.

[25] Philippe G. Ciarlet. Sur l'élément de clough et tocher. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 8(R2) :19–27, 1974.

[26] Philippe G. Ciarlet. Interpolation error estimates for the reduced hsieh-clough-tocher triangle. *Mathematics of Computation*, 32(142) :335–344, 1978.

[27] Philippe G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[28] Ray W. Clough and James L. Tocher. Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. *Proc of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics,Wright Patterson Air Force Base, Ohio*, 60(9) :515–545, 1965.

[29] Olivier Czarny and Guido Huysmans. Bézier surfaces and finite elements for mhd simulations. *Journal of Computational Physics*, 227(16) :7423 – 7445, 2008.

[30] Ali Elarif, Blaise Faugeras, and Francesca Rapetti. Tokamak free-boundary plasma equilibrium computation using finite elements of class C0 and C1 within a mortar element approach. Research Report RR-9364, INRIA Sophia Antipolis, October 2020.

[31] E. Erturk and C. Gökçöl. Fourth-order compact formulation of navier–stokes equations and driven cavity flow at high reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50(4) :421–436, 2006.

[32] Ercan Erturk. Comparison of wide and compact fourth-order formulations of the navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(9) :992–1010, 2009.

[33] Elise Estibals. *MHD modeling and numerical simulation with finite volume-type methods. Application to fusion plasma*. Theses, Université Côte d'Azur, May 2017.

[34] Blaise Faugeras. An overview of the numerical methods for tokamak plasma equilibrium computation implemented in the NICE code. Research Report RR-9347, INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée, June 2020.

[35] R. Fitzpatrick. *Plasma Physics : An Introduction*. CRC Press, 2014.

[36] Jeffrey P. Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, 2007.

[37] U Ghia, K.N Ghia, and C.T Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48(3) :387 – 411, 1982.

[38] Giorgio Giorgiani, Hervé Guillard, Boniface Nkonga, and Eric Serre. A stabilized powell–sabin finite-element method for the 2d euler

equations in supersonic regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 340 :216 – 235, 2018.

[39] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations.Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, 1986.

[40] Hervé Guillard. The mathematical theory of reduced MHD models for fusion plasmas. Research Report RR-8715, INRIA, April 2015.

[41] Murli M Gupta. High accuracy solutions of incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 93(2) :343 – 359, 1991.

[42] Murli M. Gupta and Jiten C. Kalita. A new paradigm for solving navier–stokes equations : streamfunction–velocity formulation. *Journal of Computational Physics*, 207(1) :52 – 68, 2005.

[43] Peter Hansbo. Nitsche's method for interface problems in computational mechanics. 28, 11 2005.

[44] G.T.A Huysmans and O Czarny. MHD stability in x-point geometry : simulation of ELMs. *Nuclear Fusion*, 47(7) :659–666, jun 2007.

[45] S.C. Jardin. A triangular finite element with first-derivative continuity applied to fusion mhd applications. *Journal of Computational Physics*, 200(1) :133 – 152, 2004.

[46] Jiten C. Kalita and Murli M. Gupta. A streamfunction–velocity approach for 2d transient incompressible viscous flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 62(3) :237–266, 2010.

[47] K. S. Kang and D. E. Keyes. Implicit symmetrized streamfunction formulations of magnetohydrodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(11) :1201–1222, 2008.

[48] M. Kubič. Review of plasma parameters of the jet tokamak in various regimes of its operation (bachelor thesis). 2007.

[49] S. Lankalapalli, J.E. Flaherty, M.S. Shephard, and H. Strauss. An adaptive finite element method for magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 225(1) :363 – 381, 2007.

[50] J D Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1) :6–10, jan 1957.

[51] Adrien Loseille and Rémi Feuillet. *Vizir : High-order mesh and solution visualization using OpenGL 4.0 graphic pipeline*.

[52] Marie Martin. *Fluids modeling of fusion plasmas : approximation with C1 finite element of Bell*. Theses, Université Nice Sophia Antipolis, June 2013.

[53] Malte Meinshausen, Nicolai Meinshausen, William Hare, Sarah C. B. Raper, Katja Frieler, Reto Knutti, David J. Frame, and Myles R. Allen. Greenhouse-gas emission targets for limiting global warming to 2° c. *Nature*, 458(7242) :1158–1162, Apr 2009.

[54] Stanislas Pamela. *Magnetohydrodynamic Simulation of Edge-Localised-Modes in a Tokamak*. Theses, Université de Provence, September 2010.

[55] Editor Peyret, R and Reviewer de Vahl Davis, G. Spectral methods for incompressible viscous flow. applied mathematical sciences, vol 148. *Applied Mechanics Reviews*, 56(1) :B13–B15, 01 2003.

[56] Juhani Pitkäranta. Boundary subspaces for the finite element method with lagrange multipliers. 33 :273–289, 09 1979.

[57] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection : Sciences Sup, Dunod, 2004.

[58] Yves Renard and Konstantinos Poulios. GetFEM : Automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language. working paper or preprint, April 2020.

[59] Jochen W. Schmidt, Marion Bastian, and Bernd Mulansky. Nonnegative volume matching by cubic c1 splines on clough-tocher splits. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(2) :566–586, 2002.

[60] Hendrik Speleers. Multivariate normalized powell–sabin b-splines and quasi-interpolants. *Computer Aided Geometric Design*, 30(1) :2 – 19, 2013. Recent Advances in Applied Geometry.

[61] Rolf Stenberg. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 63(1) :139 – 148, 1995. Proceedings of the International Symposium on Mathematical Modelling and Computational Methods Modelling 94.

[62] H. R. Strauss. Nonlinear, three-dimensional magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks. *The Physics of Fluids*, 19(1) :134–140, 1976.

[63] H.R. Strauss and D.W. Longcope. An adaptive finite element method for magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 147(2) :318 – 336, 1998.

[64] Daniël Cornelis van Vugt. *Nonlinear coupled MHD-kinetic particle simulations of heavy impurities in tokamak plasmas*. PhD thesis, Department of Applied Physics, July 2019. Proefschrift.

[65] S.P Vanka. Block-implicit multigrid solution of navier-stokes equations in primitive variables. *Journal of Computational Physics*, 65(1) :138 – 158, 1986.

[66] Wikipedia contributors. Taylor–green vortex — Wikipedia, the free encyclopedia, 2019. [Online ; accessed 19-July-2020].

[67] Henry H. Yang. The computational boundary method for solving the incompressible flows. *Applied Mathematics Letters*, 6(2) :3 – 7, 1993.