



**HAL**  
open science

# Optimisation des moyens dans la recombinaison commerciale de dessertes TER

Mohamed Benkirane

► **To cite this version:**

Mohamed Benkirane. Optimisation des moyens dans la recombinaison commerciale de dessertes TER. Optimisation et contrôle [math.OA]. Université de Bordeaux (UB), France, 2020. Français. NNT : . tel-03149199

**HAL Id: tel-03149199**

**<https://inria.hal.science/tel-03149199>**

Submitted on 22 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR DE**  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE  
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Par Mohamed BENKIRANE

**Optimisation des moyens dans la recomposition commerciale  
de dessertes TER**

Sous la direction de : François CLAUTIAUX  
Et Boris DETIENNE

Soutenue le 20/04/2020 devant un jury composé de :

M.	SIMON, Laurent	Professeur, Bordeaux INP	Président
Mme.	ELLOUMI, Sourour	Professeur, ENSTA ParisTech	Rapporteur
M.	DAUZERE-PERES, Stéphane	Professeur, École des mines de Saint-Étienne	Rapporteur
M.	PORUMBEL, Daniel	Maître de conférences, CEDRIC Lab, CNAM	Examineur
M.	RAMOND, François	Docteur, SNCF Innovation et Recherche	Examineur
M.	CLAUTIAUX, François	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur de Thèse
M.	DETIENNE, Boris	Maître de conférences, Université de Bordeaux	Co-directeur
M.	DAMAY, Jean	Docteur, SNCF Voyageurs	Co-encadrant

**Titre : Optimisation des moyens dans la recomposition commerciale de dessertes TER**

**Résumé :** Les travaux de la présente thèse traitent d'une approche d'optimisation intégrée pour la planification du matériel roulant et l'optimisation des grilles horaires dans le contexte du trafic ferroviaire de passagers. Notre approche repose sur un modèle de programmation entière basé sur un hypergraphe qui autorise des configurations composées de rames matérielles hétérogènes. L'objectif est de trouver une grille horaire et optimiser l'utilisation des rames étant donné une demande voyageur, les besoins du service et le parc des rames matérielles. Les grilles produites permettent une optimisation du coût de production et un usage optimal des rames. Notre approche repose sur l'utilisation d'un flot de coût minimum sur un hypergraphe espace/temps/configuration. Nous nous servons de ces modèles pour gérer efficacement les contraintes liées aux coupes et accroches des configurations. Nous avons proposé un algorithme de filtrage sur les coûts réduits basé sur une relaxation surrogate des contraintes de flot pour réduire la taille du modèle généré. Cette relaxation débouche sur un modèle relâché avec une structure similaire et un nombre de variables et de contraintes sensiblement réduit. Nous sommes capables de produire à la fois une borne inférieure et une borne supérieure pour le problème initial. Ces bornes permettent l'application implicite de techniques de filtrage sur le modèle initial. Le modèle réduit est résolu par un solveur MIP. Nous présentons des résultats basés sur des études de plans de transport ferroviaire régional pour montrer que notre modèle passe à l'échelle sur des problèmes réels.

**Mots clés :** hypergraphe, modèle de flot espace-temps, rotation du matériel roulant, sélection des trains

---

**Title :** Optimizing means when redefining the railway service for TER activity.

**Abstract :** The subject of this work is an integrated optimization approach for timetabling and rolling stock rotation planning in the context of passenger railway traffic. Our approach is based on a hypergraph based integer programming model, which can handle trains composed of multiple heterogeneous self-powered railcars. The method aims at producing a timetable and solving the rolling stock problem given a set of possible passenger trips, a service requirement and a fleet of self-powered railcars. The produced timetable optimizes the production cost and especially the use of railcars. To solve our optimization problem, we use a minimum cost flow problem in a time/space/configuration hypergraph network. These models are used to handle effectively constraints related to coupling and decoupling railcars. To reduce the size of the generated model, we propose a reduced-cost fixing method based on a surrogate relaxation of the flow constraints. This relaxation allows to produce a relaxed model with a similar structure, but significantly less variables and constraints. We are able to produce both lower and upper bounds for the initial problem. These bounds allow to apply implicitly reduced-cost fixing techniques to the initial model. The obtained reduced version of the initial model is then solved by an MIP solver. We present some results based on several French regional railway traffic case studies to show that our methods scales to real-life problems.

**Keywords :** hypergraph, time-space flow model, rolling stock rotation, train selection



## Remerciements

TODO



*Dédication*

*Citation préférée*





## Acronymes

**AO** Autorité Organisatrice. 15, 20–24, 26, 37, 38, 72

**DGTER** Direction Générale du TER. 21, 24, 106, 113, 116

**EF** Entreprise Ferroviaire. 22–24, 27, 51, 53, 58, 64, 65

**EPIC** Etablissement Public à caractère Industriel et Commercial. 10

**GI** Gestionnaire de l’Infrastructure. 22, 35, 38, 52, 64, 65

**MIP** Programme linéaire mixte en nombres entiers. 17, 40, 46, 47, 54–57, 59, 60, 63, 68, 83, 84, 86, 89, 95, 101, 102, 116

**PL** Programme Linéaire. 40, 41

**PLNE** Programme Linéaire en Nombres Entiers. 40, 43, 64, 130

**TSRP** La sélection des trains et l’optimisation du roulement matériel. 37, 38, 48, 50, 51, 53, 64, 65, 72, 83–85, 89–91, 95, 108, 135, 137

## Glossaire

**bi-tranche** Deux trains couplés partageant soit la portion du trajet de départ, soit la portion de trajet à l’arrivée. A titre d’exemple, les trajets Paris → Arcachon et Paris → Toulouse peuvent former un bi-tranche; la portion Paris → Bordeaux est partagée entre les deux. 9, 26, 27, 49, 60, 70, 74, 76, 77

**configuration** Liste ordonnée de rames matérielles. On parle d’*US*, *UM2* et *UM3* pour signifier respectivement des configurations composées d’une rame, de deux rames et de trois rames matérielles. 9, 30, 32–34, 45

**horairiste** Concepteur chargé de définir les horaires de circulation des trains en toute sécurité et en toute fluidité. 27

**rame** Véhicule ferroviaire automoteur utilisé pour le transport des voyageurs. Il assure seul sa propulsion. 11, 22, 26, 35

**SnCF** Groupe international de mobilité de personnes et de logistique de marchandises. Le groupe SNCF est structuré selon trois *Etablissement Public à caractère Industriel et Commercial* (EPIC) : l’EPIC SNCF (définit la stratégie du groupe), l’EPIC SnCF-Mobilités et l’EPIC SnCF-Réseau (Gestionnaire de l’infrastructure). 11, 15–17, 20–22, 28, 53, 57, 61, 64, 65, 107, 135

**Sncf-Mobilités** Établissement public à caractère industriel et commercial, est l'opérateur du groupe **SNCF (Société Nationale des Chemins de Fer français)**. Il s'occupe de l'exploitation des trains de voyageurs et de marchandises en France. 10, 11, 20, 21, 23

**Sncf-Réseau** Établissement public à caractère industriel et commercial, est propriétaire et est le principal gestionnaire du réseau ferré national français. L'entreprise est chargée de la maintenance et de l'entretien du réseau ferré, de la construction de nouvelles lignes ferroviaires et gère la circulation de tous les trains empruntant le réseau ferré national. 10, 15, 22, 23, 27, 28, 53, 65

**technicentre** Établissement rattaché à l'activité TER en charge de la maintenance des **rames** matérielles. 36

**TER** le terme TER sera utilisé pour signifier à la fois le Transport Express Régional et l'entreprise ferroviaire de **Sncf-Mobilités** s'occupant du transport des voyageurs en région. 15, 16, 21, 23, 24, 28, 30, 34, 36, 37, 53, 65, 107, 109, 115, 116

**train** Trajet depuis une gare origine vers une gare destination. Il est défini par une heure de départ et d'arrivée précises et peut contenir des dessertes intermédiaires. 9, 23

## Notations

$\mathbb{N}$	Ensemble d'entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble d'entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$Opt(P)$	Valeur optimale du problème $P$
$\{\dots\}$	Représentation d'un ensemble
$\{\{\dots\}\}$	Représentation d'un multi-ensemble
$(\dots)$	Représentation d'une liste
$\llbracket 0..n \rrbracket$	Intervalle des entiers entre 0 et $n$ : $\llbracket 0..n \rrbracket = \{0 \dots n\}$
$A$	Ensemble d'hyperarcs
$V$	Ensemble de nœuds
$\Gamma^+(v)$	Multi-ensemble des hyperarcs entrants au nœud $v$
$\Gamma^-(v)$	Multi-ensemble des hyperarcs sortants du nœud $v$
$\mathcal{T}(a)$	Multi-ensemble queue de $a$
$\mathcal{H}(a)$	Multi-ensemble tête de $a$
$q(a)$	Coût de l'hyperarc $a$
$T$	Longueur de l'horizon de temps
$\mathcal{T}$	$\llbracket 0..T \rrbracket$
$\mathcal{S}$	Ensembles de gares
$\mathcal{R}$	Ensemble de types de rames
$\mathcal{C}$	Ensemble de <b>configurations</b>
$\mathcal{V}$	Ensemble de <b>trains</b>
$\mathcal{V}^+$	Ensemble de <b>bi-tranches</b> en accroche
$\mathcal{V}^-$	Ensemble de <b>bi-tranches</b> en coupe
$\mathcal{M}$	Ensemble de <b>missions</b>
$\mathcal{V}_f$	Ensemble de trains fixés
$\mathcal{E}_i$	Ensembles de paires de trains comprenant $i \in \mathcal{V}$ et mutuellement exclusifs

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Notations &amp; Acronymes</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>Chapitre 1. Problème d'optimisation au TER</b>	<b>20</b>
1.1 TER, activité de Sncf-Mobilités	20
1.1.1 Contexte économique	20
1.1.2 Ouverture à la concurrence	21
1.2 Position du problème	23
1.2.1 Problème d'établissement des grilles horaires	25
1.2.2 Formulation de la demande	25
1.2.3 Problème de planification des rames matérielles	30
1.2.3.1 Infrastructure & Parc des rames matérielles	32
1.2.3.2 Contraintes opérationnelles et règles de gestion	35
1.2.3.3 Maintenance des rames et contraintes du dépôt	36
<b>Chapitre 2. Éléments de Recherche Opérationnelle</b>	<b>40</b>
2.1 Programmation linéaire en nombres entiers	41
2.1.1 Programmation linéaire	41
2.1.2 Résultats en programmation linéaire	42
2.2 Hypergraphes	44
2.2.1 Définitions	44
2.2.2 Flots sur les hypergraphes	46
<b>Chapitre 3. Revue de la littérature</b>	<b>49</b>

3.1	Problématiques en ferroviaire . . . . .	50
3.2	Problème d'établissement des grilles horaires . . . . .	52
3.3	Problème d'optimisation du matériel roulant . . . . .	54
3.3.1	Approches par flots . . . . .	55
3.3.2	Approches par chemins . . . . .	59
3.3.3	Focus sur les modèles d'hyergraphe . . . . .	62
3.3.4	Approches heuristiques . . . . .	65
<b>Chapitre 4.</b>	<b>Modélisation du problème . . . . .</b>	<b>68</b>
4.1	Formalisation du problème . . . . .	69
4.1.1	Infrastructure et parc des rames matérielles . . . . .	69
4.1.2	Contraintes sur la sélection des trains . . . . .	71
4.1.3	Données des missions . . . . .	72
4.2	Formalisation de l'hypergraphe . . . . .	73
4.2.1	Ensemble des nœuds . . . . .	74
4.2.2	Ensemble des hyperarcs . . . . .	77
4.3	Formulation du programme mixte en nombres entiers . . . . .	84
4.4	Tests et résultats . . . . .	86
<b>Chapitre 5.</b>	<b>Un algorithme pour résoudre le modèle TSRP . . . . .</b>	<b>92</b>
5.1	Préambule . . . . .	93
5.2	Relaxation du problème TSRP . . . . .	94
5.2.1	Définition . . . . .	94
5.2.2	Algorithme itératif de résolution . . . . .	101
5.2.3	Filtrage sur les coûts réduits . . . . .	101
5.3	Tests et résultats . . . . .	103
<b>Chapitre 6.</b>	<b>OptimTER, outil d'aide à la décision . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1	Contexte . . . . .	107
6.2	Architecture d'optimTER . . . . .	108
6.3	Données . . . . .	110
	<b>Conclusion &amp; Perspectives</b>	<b>116</b>
	<b><u>Bibliographie</u></b>	<b>120</b>

<b><u>Annexes</u></b>	<b>131</b>
A Filtrage par agrégation et désagrégation . . . . .	131
B Multi-ensembles . . . . .	133
C Réticulaire - Document de Sncf Réseau . . . . .	135

# Introduction

Le ferroviaire constitue un mode de transport d'importance capitale. Écologique, il est un acteur majeur dans le développement économique des territoires. Ainsi en France, à travers le **TER**, les différentes régions ont la maîtrise de leur politique de transport aussi bien sur les exigences de service que sur les niveaux d'investissement. La **Sncf**, dans la perspective de l'ouverture totale à la concurrence, doit développer sa capacité à optimiser et innover. C'est dans ce contexte que l'entreprise publique a mis en place un plan stratégique ambitieux lui permettant de relever ce grand défi. Les travaux de recherche menés dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre de ce plan nommé *CapTER 2020*. L'objectif est de mettre en œuvre un outil de simulation pour la conception des offres de transport répondant au cahier des charges des régions. Cet outil d'aide à la décision doit s'intégrer dans le système d'information de la **Sncf**.

La conception d'une offre de transport ferroviaire doit prendre en considération différentes contraintes, certaines sont liées aux ressources, humaines et matérielles, d'autres concernent les exigences de l'exploitation imposées par les *Autorités Organisatrices (AOs)* et le gestionnaire de l'infrastructure **Sncf-Réseau**. Dans la présente thèse, nous abordons principalement le problème d'optimisation de l'offre de transport ferroviaire en fonction de la demande exprimée par l'**AO** et la contrainte économique en lien avec la planification des rames matérielles. Ce problème d'optimisation intègre deux problématiques de la littérature du ferroviaire. La première concerne la sélection des trajets et la seconde porte sur la planification du parc des rames matérielles. Dans la littérature, ces problématiques sont traitées séparément. L'ouverture à la concurrence du ferroviaire en Europe conduit à



la séparation de l'entreprise ferroviaire (transporteur) et le gestionnaire de l'infrastructure (régulateur) et contraint le problème de sélection des trajets.

Les méthodes de résolution utilisées dans cette thèse relèvent du domaine de la recherche opérationnelle. Nous mettons en œuvre des modèles fondés sur des formulations par flots et des techniques de prétraitement des modèles. Notre approche d'optimisation porte sur l'utilisation d'un flot de coût minimum sur un hypergraphe espace-temps paramétré par les configurations des trains. Nous nous servons de ces modèles pour gérer efficacement les contraintes liées à la gestion des rames. Notre méthode de résolution repose sur une relaxation du problème que nous affinons par la suite pour prendre en considération le problème initial dans sa totalité. Nous considérons dans notre relaxation un nombre réduit de types de rames matérielles. Le but est à la fois d'éliminer un grand nombre de variables et de pouvoir utiliser cette même relaxation dans une méthode heuristique pour trouver une solution réalisable. Ces deux nouvelles approches sont développées pour résoudre le problème industriel de manière efficace.

Le plan de la thèse se structure comme suit.

Dans le premier chapitre, nous présentons le contexte industriel et économique de la **Sncf** propre au **TER**. Nous définissons les deux problématiques liées à la sélection des trains et à la planification des rames. La problématique de sélection des trains est contrainte d'une part par le gestionnaire de l'infrastructure **Sncf-Réseau** à travers le **réticulaire** et d'autre part par l'autorité organisatrice à travers une **demande d'offre de transport**. La problématique de planification des rames est quant à elle contrainte par les règles d'exploitation des ressources matérielles et infrastructures. Nous caractérisons la demande d'offre exprimée par les autorités organisatrices sous forme de missions et nous spécifions les contraintes opérationnelles en lien avec la gestion des rames matérielles.

Dans le second chapitre, nous rappelons des prérequis de recherche opérationnelle pour appréhender les modèles et les algorithmes développés. Nous présentons des résultats en

programmations linéaire où nous définissons la notion de filtrage sur les coûts réduits. Nous nous focalisons ensuite sur les modèles de flots sur hypergraphes et nous exposons le concept de modélisation utilisé dans cette thèse.

Dans le troisième chapitre, nous situons le problème industriel dans la littérature du ferroviaire. Nous présentons dans un premier temps un aperçu des problèmes d'optimisation traités par les entreprises ferroviaires. Nous passons ensuite en revue les problèmes d'établissement des grilles horaires et de planification du matériel roulant afin d'identifier les points communs avec notre problème. Nous nous focalisons en fin de ce chapitre sur les approches de résolution du problème de planification du matériel roulant, en l'occurrence les approches basées sur les flots, les chemins et les hypergraphes.

Le quatrième chapitre présente la première contribution de cette thèse. Nous formalisons et modélisons le problème industriel. Nous définissons les données du problème et nous caractérisons les missions par des fréquences, spécifiées sur des intervalles de temps, et paramétrées par des fonctions de coût convexes. Nous proposons ensuite une modélisation sous forme d'un hypergraphe. Les nœuds correspondent à des états des dépôts ou des états de départ ou d'arrivée des trains. Les hyperarcs modélisent des opérations sur les rames matérielles, en l'occurrence des déplacements et/ou des opérations de coupes ou d'accroches. Nous traduisons ensuite le problème sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers en s'appuyant sur un flot. Enfin, nous présentons les résultats obtenus sur des instances réelles grâce à une résolution directe.

Le cinquième chapitre correspond à la seconde contribution de cette thèse. Il s'agit d'une méthode itérative basée sur une relaxation du problème. Nous montrons comment obtenir cette relaxation en réalisant une agrégation des variables dans le modèle. Cette agrégation est définie par une agrégation des paramètres du problème et du modèle d'hypergraphe. Nous développons par la suite un algorithme de résolution basé sur cette relaxation et sur une méthode permettant de fixer des variables à partir des coûts réduits.

Enfin, nous présentons les tests et nous comparons les performances de l'algorithme développé à celles d'une résolution directe.

Le dernier chapitre s'intéresse à la description du module logiciel implémenté. Nous montrons comment il répond au besoin exprimé par la **Sncf** à travers une description de l'architecture globale adoptée.

Enfin, en conclusion, nous rappelons les objectifs de la présente thèse, les contributions, les résultats obtenus et les perspectives de développement de ce travail. En particulier, nous discutons de l'intégration de contraintes opérationnelles comme la maintenance des rames matérielles.

Conférences :

- Benkirane, M., Clautiaux, F., Detienne, B., and Damay, J. (2019b). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. In *EURO*, Dublin, Irlande
- Benkirane, M., Clautiaux, F., Detienne, B., and Damay, J. (2018). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. In *ISMP*, Bordeaux, France
- Benkirane, M., Damay, J., and Clautiaux, F. (2017a). An integrated approach for timetable planning and rolling stock rotations. pages 644 – 658, Lille, France. 7th International Conference on railway operations modelling and Analysis (IAROR, RailLille 2017)
- Benkirane, M., Clautiaux, F., Detienne, B., and Damay, J. (2019c). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. In *ROADEF*, Le Havre, France
- Benkirane, M., Damay, J., and Clautiaux, F. (2017b). Une approche intégrée pour l'établissement des grilles horaires et la planification du matériel roulant. In *ROADEF*, Metz, France

Article soumis :

- Benkirane, M., Clautiaux, F., Damay, J., and Detienne, B. (2019a). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. (Submitted)

Réalisation :

- Implémentation d'un outil d'aide à la décision nommé OptimTER

Enseignement :

- Encadrement d'étudiants en école d'ingénieur Enseirb-Matmeca : 38 heures de TDs et de TPs.

Encadrement :

- Stages : CMI & Master 2 recherche opérationnelle.

# Chapitre 1

## Problème d'optimisation au TER

### Sommaire

---

1.1	TER, activité de Sncf-Mobilités . . . . .	20
1.1.1	Contexte économique . . . . .	20
1.1.2	Ouverture à la concurrence . . . . .	21
1.2	Position du problème . . . . .	23
1.2.1	Problème d'établissement des grilles horaires . . . . .	25
1.2.2	Formulation de la demande . . . . .	25
1.2.3	Problème de planification des rames matérielles . . . . .	30

---

## 1.1 TER, activité de Sncf-Mobilités

### 1.1.1 Contexte économique

Le ferroviaire est un mode de transport respectueux de l'environnement. Il est certainement la solution adéquate au transport collectif de masse. Il assure la cohésion du territoire et est un vecteur important dans le développement économique et dans l'aménagement des territoires. C'est dans ce cadre que les régions françaises, représentées par les conseils régionaux, disposent d'un service de *Transport Express Régional* (TER). Elles sont plei-

nement responsables de l'organisation des transports régionaux et à ce titre, elles sont **AOs** depuis le 1er janvier 2002. Cela signifie que les régions contractualisent avec l'opérateur, **SnCF-Mobilités**, dans le cadre de conventions portant sur les exigences des services de transport des voyageurs (dessertes, tarifications, qualité du service, ...) et les décisions sur les investissements à mettre en place comme le renouvellement du parc de matériels roulants. Sont aussi décrits, au moyen de ces conventions, l'ensemble des aspects financiers. Une bonne estimation du bilan économique permet d'éviter des distorsions, parfois considérables, entre le plan de transport envisagé et celui réellement mis en place et donc les pénalités versées à l'autorité organisatrice si les objectifs de ponctualité et de qualité de service ne sont pas atteints.

À l'heure actuelle, le contexte de pré-ouverture à la concurrence a amorcé des exigences et des objectifs de plus en plus ambitieux. À titre d'exemple, la dernière convention signée en Nouvelle Aquitaine impose une baisse de 50% des suppressions inopinées de trains, une création d'offre allant jusqu'à 8% de trajets en plus (60 trajets supplémentaires par jour) et un taux de ponctualité supérieur à 95%, soit une division par deux du nombre de trains en retard. La région Nouvelle Aquitaine se positionne ainsi parmi les régions fixant des objectifs les plus élevés à la **SnCF**. Ces exigences sont légitimes étant donné que la région finance 80% du coût du voyage, ce qui équivaut à 300 millions d'euros sur une année.

Confrontée à ces objectifs, la **SnCF** doit réduire ses dépenses en assurant une qualité de service exigeante afin de regagner la confiance de l'ensemble des régions et rester leader en France. L'ouverture du marché ferroviaire à la concurrence sera effective en 2023, la **SnCF** doit relever ce grand défi d'autant plus que le nombre de voyageurs a baissé de 4.4% entre 2010 et 2015, et que l'essor de la concurrence inter-modale comme le covoiturage, les cars longue-distance ou les avions low-cost marque un contexte de plus en plus difficile.

### 1.1.2 Ouverture à la concurrence

La **SnCF** doit répondre au grand défi que représente l'ouverture à la concurrence en développant sa capacité à optimiser et innover. En particulier le **TER** doit gagner en compétitivité

et doit améliorer la qualité du service avec des conditions de sécurité très rigoureuses. C'est dans ce cadre que la *Direction Générale du TER (DGTER)*, activité de *Sncf-Mobilités*, a lancé en 2016 un grand plan stratégique appelé *CapTER 2020*. Ce projet ambitieux se décline en quatre grands chantiers. Le premier, *SegmenTER*, a pour objectif de clarifier les missions des trains, de généraliser le cadencement et de différencier les offres selon la nature du marché et la densité de la population. Le second chantier, *BoosTER*, a comme finalité d'industrialiser les processus en interne et de les standardiser. Il s'agit d'être réactif aux demandes des *AOs* et des voyageurs et aux différentes mutations du marché. Le troisième chantier, *ConnectTER*, vise à développer le système d'information et personnaliser la relation client à travers les canaux numériques. Enfin le quatrième chantier *MuTER* s'attache à renforcer et développer les liens de *Sncf* avec les autorités organisatrices.

Les travaux de la présente thèse s'inscrivent dans le cadre de ce grand plan stratégique *CapTER 2020*. L'objectif est de mettre en place un outil d'aide à la décision en vue de négocier les conventions avec les autorités organisatrices. Il s'agit de coordonner les compétences du département ingénierie de l'offre et celles du département planification des ressources (*BoosTER*). L'outil d'aide à la décision mis en œuvre permet d'effectuer à moindre coût plusieurs tests de simulation afin de budgéter les offres segmentées pour les *AOs* (*MuTER*, *SegmenTER*). Enfin, le logiciel informatique développé s'intègre dans le système d'information de la *Sncf* (*ConnectTER*).

### TER - Les chiffres clés

- 900 000 passagers quotidiens
- 7000 trains par jours
- 1300 cars par jour
- 28 000 collaborateurs
- 11 régions TER
- 4 milliards d'euros de chiffre d'affaires
- 2.9 milliards d'euros de subventions versées par les régions

- 7300 rames et 1300 cars

## 1.2 Position du problème

La conception d'une offre de transport ferroviaire repose sur l'exploitation de plusieurs ressources comme l'infrastructure, les agents de conduite, les agents de service commercial du train (contrôleurs) ou encore le matériel roulant. La mise en place et l'interaction entre ces différentes ressources donnent lieu à des contraintes de natures différentes. Certaines contraintes sont imposées ou proposées par le conseil régional, d'autres sont liées à la structure du réseau ferroviaire et aux types des rames circulant sur celui-ci. Élaborer un service de transport requiert l'intervention de différents acteurs.

Le premier est l'**Entreprise Ferroviaire (EF)**. C'est une entreprise de service, elle assure le transport des voyageurs sur le réseau ferré. TER, TGV et Intercités sont des entreprises ferroviaire du groupe **Sncf**. Le second acteur est le **Gestionnaire de l'Infrastructure (GI)**. Il est l'entreprise chargée de gérer le réseau ferroviaire. Le **GI** est généralement propriétaire du réseau et doit assurer son entretien et son maintien. Il s'occupe aussi de la gestion des circulations des trains des entreprises ferroviaires et de la sécurité sur le réseau. **Sncf-Réseau** est le gestionnaire de l'infrastructure ferroviaire en France. Le troisième acteur est l'autorité organisatrice des transports. Elle est représentée par le conseil régional et assure l'organisation du transport public avec les entreprises ferroviaires. L'**AO** coordonne aussi avec **Sncf-Réseau** de grands projets d'investissements sur le réseau ferré. Enfin vient le voyageur, client final du service de transport proposé par l'entreprise ferroviaire. La figure 1.1 récapitule les acteurs intervenant dans l'élaboration du plan de transport et dégrossit les différents échanges entre ces acteurs.

La planification du transport ferroviaire est décomposée en différentes phases, en commençant par les études stratégiques. Ces études sont menées en vue de négocier des appels d'offres ou d'investiguer des projets d'investissement importants. Ensuite vient la phase de conception. Cette phase est située deux ans avant la mise en place du plan de transport.



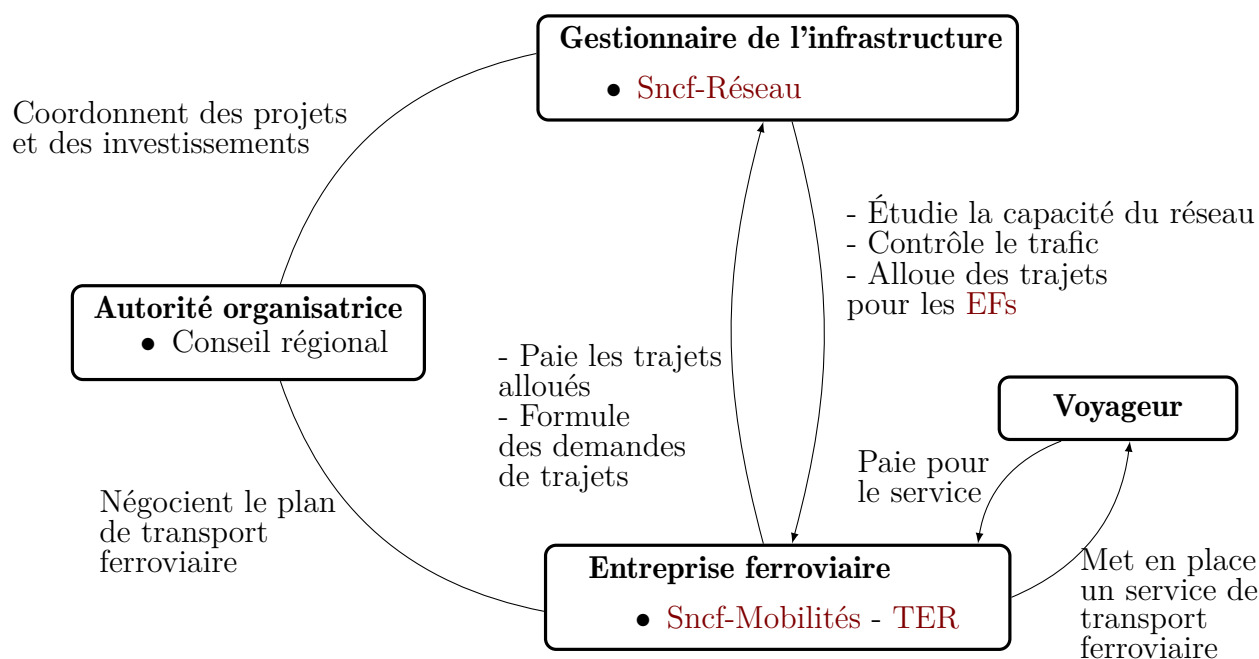


FIGURE 1.1 – Acteurs intervenant dans le transport ferroviaire en région

L'offre de transport est notamment défini par les EFs et les trajets sont réservés auprès de Sncf-Réseau. La phase adaptation du plan de transport s'ensuit pour prendre en compte les éventuels travaux sur le réseau ferré. Finalement vient la phase pré-opérationnelle pour gérer les éventuels incidents survenant la veille de la mise en place du plan de transport. On place notre problème d'optimisation dans le cadre des études stratégiques en vue de négocier le service de transport avec l'AO. On définit dans la sous-section 1.2.1 suivante l'offre de transport et le service négocié. On présentera par la suite les différentes exigences des autorités organisatrices.

Afin de lever toute ambiguïté, on désigne dans la suite par **train** un trajet depuis une gare origine vers une gare destination. Il est défini par une heure de départ et d'arrivée précises et peut contenir des dessertes intermédiaires. On utilisera dans ce document indifféremment les termes train et trajet.

### 1.2.1 Problème d'établissement des grilles horaires

Une offre de transport ferroviaire est formalisée à travers des grilles horaires (cf. fig. 1.2). Ces grilles rapportent l'ensemble des trajets à assurer par l'EF et représentent l'élément central de négociation avec l'AO.

Le département Ingénierie de l'Offre du TER conjointement avec l'AO définissent au préalable une segmentation de l'offre traduite sous forme de *missions*. La DGTER préconise dans son chantier *SegmenTER* un modèle pour clarifier et unifier l'offre de transport pour les voyageurs. Cette segmentation définit les missions, soit la politique des dessertes pour chaque ligne ferroviaire. Elle se décline en trois types de missions majeurs : *City* pour les dessertes métropolitaines intégrant potentiellement des offres de transports urbains, *Proxi* pour un maillage plus fin et une cohésion des territoires et *Chrono* pour les liaisons rapides entre pôles régionaux ; cette dernière mission définit des trajets avec un nombre restreint de dessertes. La figure 1.3 représente une telle segmentation pour une ligne ferroviaire donnée. Ce découpage de l'offre s'appuie sur des études du marché et des études de la performance des lignes ferroviaires. Celles-ci n'entrent pas dans le cadre de cette thèse, toutefois nous tenons compte des résultats de ces études dans notre problématique.

Une fois la segmentation partagée avec l'AO, les études d'offre s'ensuivent afin de satisfaire les critères de qualité de service exigés. On dédie la sous-section suivante à la description de ces exigences et on les identifiera par la *demande d'offre*.

### 1.2.2 Formulation de la demande

Le transport ferroviaire en région se décline selon les types de déplacements domicile-travail et occasionnels. De plus, la mesure de l'attractivité des différents pôles régionaux et la nécessité d'assurer des dessertes sur le territoire permettent à l'AO et au TER de traduire le service en des *fréquences sur des missions*. Ces fréquences sont formulées sur une journée d'étude type, celle-ci correspond le plus souvent à un jour ouvrable de base

N° moyen de transport	865010 (1/1)	865040 (0/1)	865012 (1/1)	865042 (0/1)	865044 (0/1)	865016 (0/1)	
Origine	BORDEAUX ST JEAN	BORDEAUX ST JEAN	BORDEAUX ST JEAN	BORDEAUX ST JEAN	BORDEAUX ST JEAN	BORDEAUX ST JEAN	
Destination	ANGOULEME	LIBOURNE	ANGOULEME	LIBOURNE	LIBOURNE	ANGOULEME	
Durée du parcours	01:32:0	00:34:0	01:32:0	00:34:0	00:34:0	01:32:0	
Distance du	136	37	136	37	37	136	
BORDEAUX S	BX	06:00	06:38	07:00	07:38	08:38	09:00
CENON	CBX	06:05/06	06:42/43	07:05/06	07:42/43	08:42/43	09:05/06
BASSENS VIL	BAS	-	06:47/48	-	07:47/48	08:47/48	-
LA GORP	GOP	-	06:51/52	-	07:51/52	08:51/52	-
ST LOUBES	SIT	-	06:56/57	-	07:56/57	08:56/57	-
SAINT SULPI	IZ	-	07:00/01	-	08:00/01	09:00/01	-
VAYRES	VYR	-	07:05/06	-	08:05/06	09:05/06	-
LIBOURNE	LI	06:24/25	07:12	07:24/25	08:12	09:12	09:24/25
ST DENIS DE	XDS	06:29 <sup>3</sup> /30 <sup>3</sup>	-	07:29 <sup>3</sup> /30 <sup>3</sup>	-	-	09:29 <sup>3</sup> /30 <sup>3</sup>
COUTRAS	COU	06:36/37	-	07:36/37	-	-	09:36/37
LES ÉGLISO	EGE	06:43 <sup>3</sup> /44 <sup>3</sup>	-	07:44/45	-	-	09:44/45
ST AIGULIN L	SAI	06:50 <sup>3</sup> /51 <sup>3</sup>	-	07:51/52	-	-	09:51/52

FIGURE 1.2 – Exemple de grille horaire

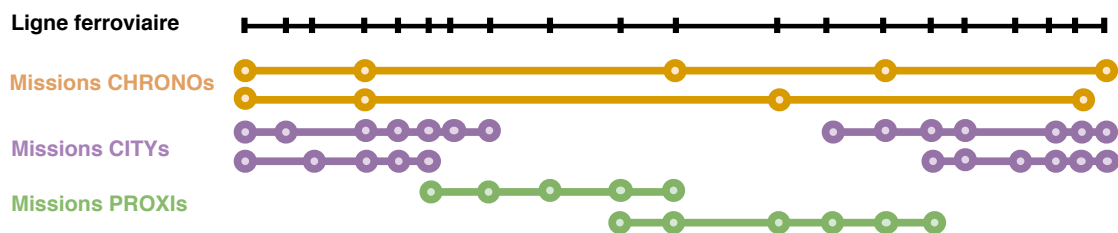


FIGURE 1.3 – Segmentation de l'offre

(mardi, mercredi ou jeudi) des saisons hiver et été. Le service de transport est ainsi défini sur toute une année.

S'ajoute à ces exigences le besoin en **capacité d'emport**. Un nombre minimal de places assises doit notamment être disponible sur les trajets. La capacité minimale d'emport est estimée grâce aux études des flux des voyageurs et aux comptages effectués sur les trajets couverts à présent. On ne traite pas de ces études dans notre problème et on prend uniquement en compte une distribution de la demande en places assises sur une journée donnée.

Certains **trajets précis** sont exigés par l'AO. Les trajets identifiés ciblent des horaires spécifiques (pointe du matin/soir, transport scolaire, transport domicile-travail etc.).

Pour certaines origines-destinations, l'AO exige des trajets sans aucune correspondance. Cette exigence donne lieu dans certains cas à des couplages des trajets en **bi-tranche**. Cette déclinaison est illustrée dans les figures 1.4 et 1.5. Deux trains peuvent se coupler s'ils partagent en même temps une portion du parcours, la portion partagée contient la gare origine ou la gare destination. On parle de **bi-tranche** en accroche si les deux trains partagent une portion du trajet à l'arrivée et on parle de **bi-tranche** en coupe dans le cas où ils partagent une portion du trajet au départ. Le **bi-tranche** en coupe de la figure 1.4 est formé de deux trajets Bordeaux → Hendaye et Bordeaux → Tarbes et partagent la portion Bordeaux → Dax. Les deux trajets pourront être couverts par exemple par deux **rames** accrochées au départ de Bordeaux, une *coupe* des deux rames est ensuite réalisée à Dax pour envoyer une rame à Tarbes et l'autre à Hendaye. La gare Dax est appelée gare de *coupe*. Il est à noter que ce **bi-tranche** permet de gagner<sup>1</sup> en capacité sur le réseau ferré et de gagner<sup>2</sup> en ressource conducteur. Inversement, le **bi-tranches** en accroche de la figure 1.5 représente les deux trajets Tarbes → Bordeaux et Hendaye → Bordeaux. Ils partagent de même la portion de trajet Dax → Bordeaux. La gare Dax est la gare d'*accroche*. Dans ces cas de figure présentés, les correspondances à Dax sont évitées pour les origines–destinations Bordeaux–Hendaye et Bordeaux–Tarbes. Les correspondances

---

1. Le trajet Bordeaux → Dax est réservé une fois

2. Un seul conducteur est nécessaire pour assurer le trajet Bordeaux → Dax

des voyageurs ne sont pas étudiées dans notre problème. On considère uniquement les demandes de fréquences sur les missions et les possibilités de couvrir des **bi-tranches**.

L'objectif de notre problème d'optimisation est de proposer une offre (i.e grilles horaires) respectant les critères susmentionnés et minimisant l'écart par rapport à la demande en fréquences.

Un choix des horaires des trajets doit prendre en compte les contraintes imposées par le réseau ferré et du fait de la circulation des trains des **EFs** ayant accès au réseau. Le gestionnaire de l'infrastructure impose donc des horaires de circulation possibles. Ceci est représenté par un ensemble de trajets et est formalisé à l'aide d'un schéma appelé *réticulaire*. Ce graphe représente de manière agrégée un catalogue des trajets possibles à l'échelle régionale. Ainsi, les entreprises ferroviaires peuvent passer la commande des trajets sélectionnés depuis le catalogue proposé. Le réticulaire est un point central, c'est le document partagé avec l'ensemble des entreprises ferroviaires. On définit dans la suite ce graphe et on déduit en conséquence le problème de sélection des trains.

## Réticulaire

La définition de la capacité du réseau ferré est réalisée par une fixation des minutes des départs et des arrivées en chaque gare. Ces différentes études de capacité sont réalisées par des **horairistes** de **Sncf-Réseau** et sont représentées par le graphe réticulaire. Ce graphe permet de synchroniser la circulation du trafic ferroviaire à l'échelle nationale. Il permet aussi de simplifier pour les entreprises ferroviaires la planification et la mise en place du plan de transport. La figure 1.6 représente une portion du graphe des régions Bretagne et Pays de la Loire (cf. Annexe C). Chaque ligne représentée en couleur correspond à deux sillons ; un pour le sens aller et l'autre pour le sens retour. Le sillon est défini par deux gares origine et destination (représentées par les rectangles grisés) et des dessertes intermédiaires (représentées par des points ou des rectangles grisés). Les sillons bleus représentés sur la figure 1.6 permettent de couvrir des missions *Proxi* et

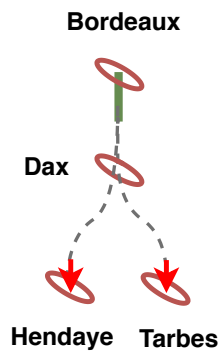


FIGURE 1.4 – Bi-tranches : Origine Bordeaux

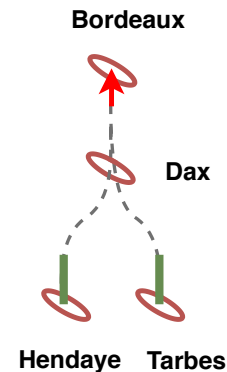


FIGURE 1.5 – Bi-tranche : Destination Bordeaux

ont comme gare origine et destination Rennes et Vitré. À chaque sillon sont associées une minute de départ et d'arrivée permettant de définir des trajets. La première ligne bleue horizontale de la fig. 1.6 correspond à deux sillons. Le premier définit un trajet au départ de Rennes toutes les heures à la minute 49, la minute d'arrivée à Vitré étant 22. Le second définit un trajet au départ de Vitré toutes les heures à la minute 40, la minute d'arrivée à Rennes étant 11. Des contraintes d'exclusion sont aussi formalisées par ce graphe. Elles permettent d'identifier les trajets non réalisables ensembles.

Le réticulaire a été mis en place à la SnCF en 2012. Il impose aux entreprises ferroviaires l'ensemble des trajets possibles, les missions doivent notamment correspondre aux

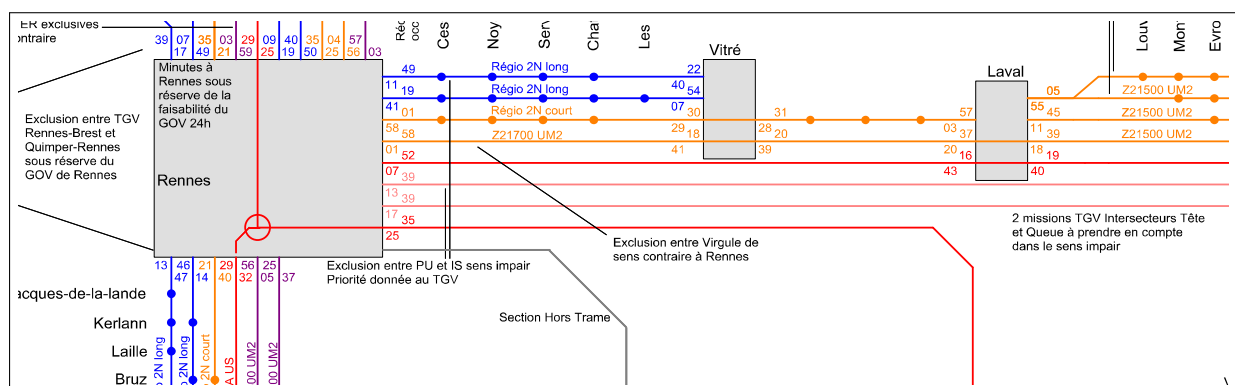


FIGURE 1.6 – Portion du graphe réticulaire des régions Bretagne & Pays de la Loire

schémas des dessertes des sillons du réticulaire. Des modifications des minutes des sillons peuvent être proposées à **Sncf-Réseau**. Ceci doit être formulé trois ans avant la mise en service du plan de transport et ne doit pas impacter les minutes de départ et d'arrivée aux gares métropolitaines. Des études prospectives sont menées dans ce sens au **TER** pour remettre en cause des contraintes imposées et mieux optimiser le plan de transport. On dispose pour notre problème d'optimisation **d'un ensemble de trajets** ainsi que **des contraintes d'exclusions entre trajets**. On se restreint à **sélectionner des trains** de manière à optimiser les moyens engagés et à satisfaire la **demande** de l'autorité organisatrice et celle des voyageurs. On **ne s'intéresse pas à la conception du graphe réticulaire**, l'ensemble des trajets provient soit du graphe soit d'études anticipées par le TER.

On se place dans la phase stratégique de négociation de la convention avec l'autorité organisatrice des transports. Les coûts dimensionnants engagés dans un plan de transport correspondent à l'utilisation des rames matérielles. Elles sont financées par l'autorité organisatrice et représentent un grand levier de négociation. A titre indicatif, le coût d'achat d'une rame avoisine les dix millions d'euros. La section suivante s'inscrit dans cette optique et présente le problème de planification des rames matérielles. On présentera les ressources engagées ainsi que les contraintes régissant celles-ci.

### 1.2.3 Problème de planification des rames matérielles

On s'intéresse dans ce problème à planifier l'utilisation d'un parc composé uniquement de rames matérielles (cf. fig. 1.8). Cette planification est formalisée par un *roulement matériel*. Il définit pour chaque rame et pendant une période donnée l'ensemble des trajets à effectuer ainsi que les différents passages en maintenance. La figure 1.7 représente une portion d'un roulement, chaque ligne numérotée (appelée ligne de roulement) représente une rame et les segments<sup>3</sup> représentent les tâches à effectuer. Les rames matérielles

---

3. un ségement représente un trajet ou une maintenance définis par des horaires et des lieux origine et destination

peuvent être couplées pour former une **configuration** (cf. fig. 1.9), cette dernière est définie par un ensemble ordonné de rames.

On parle de composition d'un train pour indiquer la configuration au départ de ce train, on distingue les rames de tête et de queue d'une composition. **L'ordre des rames** dans la configuration est donc primordial ; il est à noter que le roulement matériel définit aussi la position des rames dans la configuration ainsi que la composition<sup>4</sup> des trains.

Le roulement matériel intègre différentes contraintes allant de la compatibilité des rames avec l'infrastructure jusqu'à la planification de la maintenance. Du fait de sa complexité, il est en grande partie planifié manuellement par des concepteurs au **TER**. La planification est décomposée en un ensemble de tâches interconnectées (cf. fig. 1.10). La première est celle de définir la composition des trains ayant une grille horaire fixée et connaissant le besoin en nombre de places assises. La seconde tâche est celle de planifier la rotation des rames. On définit notamment les enchaînements des trains sous un ensemble de contraintes opérationnelles. Enfin vient la planification de la maintenance des rames et la gestion de la capacité du dépôt. Ces tâches peuvent être perçues comme des sous-problèmes d'optimisation. On parle de planification intégrée lorsque les sous-problèmes ne sont pas traités indépendamment.

4. Les compositions des trains et les configurations sont identifiées par les doubles segments dans les roulements matériels

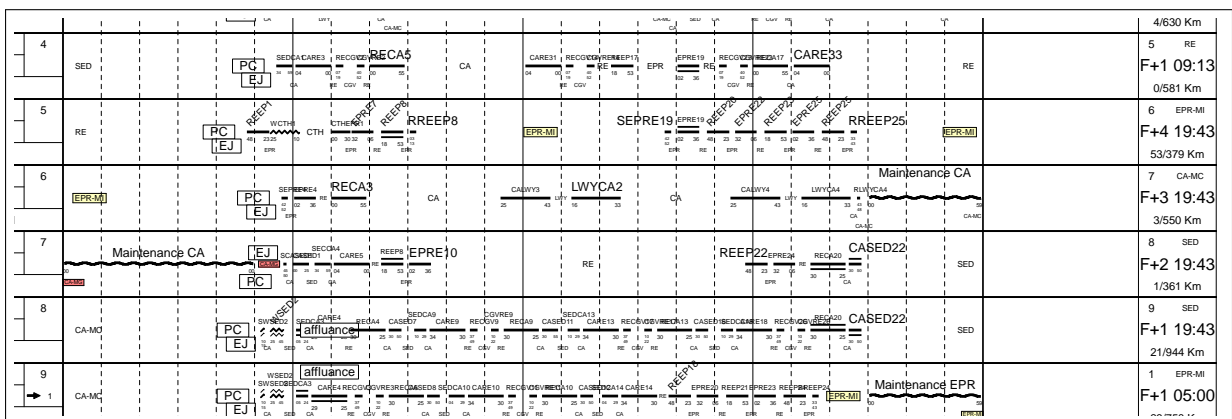


FIGURE 1.7 – Portion d'un roulement matériel





FIGURE 1.8 – Rame automotrice



FIGURE 1.9 – Configuration

On expose en 1.2.3.1 les ressources rame et infrastructure engagées. On décrit par la suite en 1.2.3.2 les contraintes opérationnelles ainsi que les règles de gestion régissant ces ressources. La sous-section 1.2.3.3 est dédiée à la description des contraintes en lien avec la maintenance des rames et la gestion de la capacité du dépôt.

### 1.2.3.1 Infrastructure & Parc des rames matérielles

On considère un parc composé de plusieurs types de rames. Chaque type est caractérisé par un nombre de places assises, une longueur, un type de propulsion (thermique ou électrique) et un nombre de rames disponibles dans chaque gare (ou dépôt associé).

Les rames sont couplées pour former des configurations uniquement si elles sont compatibles entre elles. Les configurations autorisées sont celles composées d'une, de deux et de

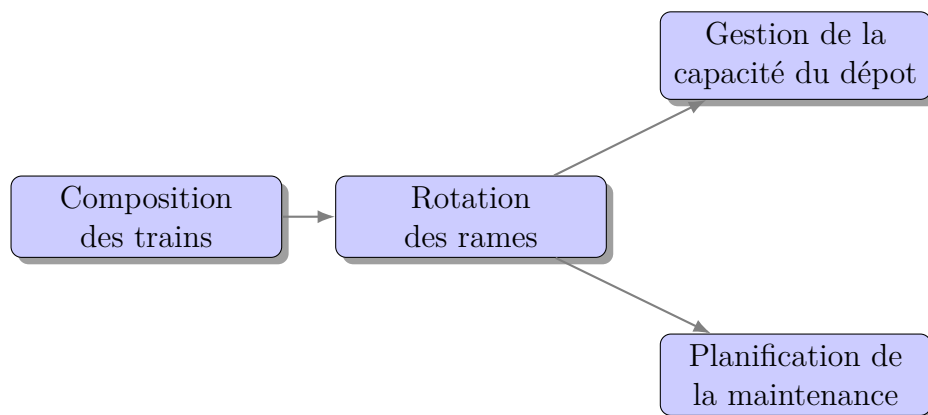


FIGURE 1.10 – Étapes de planification du matériel roulant

trois rames matérielles ; celles composées de trois rames sont faiblement tolérées du fait de la difficulté de leur gestion dans la phase opérationnelle. Les configurations de taille deux et trois permettent de ré-acheminer des rames ou d'augmenter la capacité d'emport pour couvrir une demande.

Les installations de l'infrastructure ferroviaire ne sont pas toutes électrifiées, les rames électriques ne sont donc pas compatibles avec la totalité de l'infrastructure. On parlera de compatibilité d'une configuration avec un trajet si les rames sont compatibles avec l'infrastructure et si la longueur de la configuration<sup>5</sup> est inférieure à la longueur des quais des dessertes du trajet.

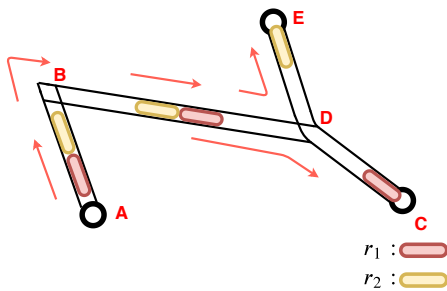


FIGURE 1.11 – Topologie avec rebroussements

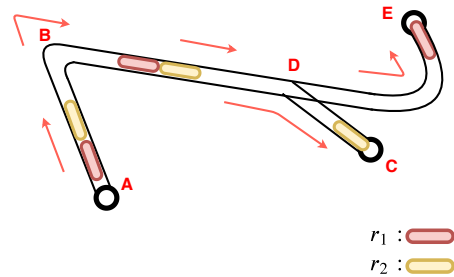


FIGURE 1.12 – Topologie sans rebroussements

Le routage des rames par rapport à des trajets formant des bi-tranches dépend de la topologie de l'infrastructure. Les figures 1.11 et 1.12 illustrent cette dépendance à travers deux trajets  $A \rightarrow E$  et  $A \rightarrow C$  formant un bi-tranche et s'arrêtant en gares  $B$  et  $D$ . Les deux trajets partagent la portion  $A - D$  et le premier départ depuis  $D$  a pour destination  $C$ . En faisant référence à la figure 1.12, les arrêts  $B$  et  $D$  ne génèrent aucun rebroussement. Après une coupe de la configuration en  $D$  et sachant la destination du premier départ depuis  $D$ , la rame  $r_1$  se retrouve à l'arrivée en gare  $E$  et la rame  $r_2$  se retrouve en gare  $C$ . En revanche, la figure 1.11 représente un premier rebroussement en  $B$ , ceci induit un inversement de la configuration après le passage par  $B$ . En outre, le trajet  $A \rightarrow E$  comprend un second rebroussement en  $D$ . Puisque la destination du premier départ depuis  $D$  est  $C$ , la rame  $r_2$  se retrouve à l'arrivée en gare  $E$  et la rame  $r_1$  se retrouve en gare  $C$ .

5. La longueur d'une configuration est la somme des longueurs des rames constituant la configuration

Les configurations aux départs et aux arrivées des bi-tranches dépendent de la topologie de l'infrastructure. Elles dépendent aussi de la destination du premier départ depuis la gare de coupe dans le cas d'un bi-tranches en coupe; elles dépendent de la provenance de la première arrivée à la gare d'accroche dans le cas d'un bi-tranches en accroche. On parlera de règles de **gestion opérationnelle des bi-tranches** pour signifier les contraintes susmentionnées.

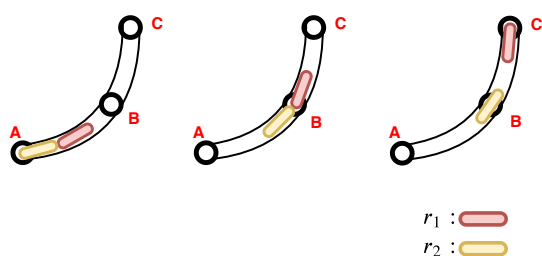


FIGURE 1.13 – B : Gare traversante

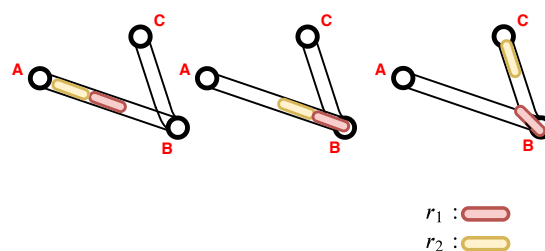


FIGURE 1.14 – B : Gare en cul de sac

La topologie de l'infrastructure impacte aussi sur la réutilisation des rames pour enchaîner avec d'autres trajets. Les figures 1.13 et 1.14 illustrent ce point à travers deux trajets  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  tel que  $B \rightarrow C$  peut enchaîner  $A \rightarrow B$ . Le trajet  $A \rightarrow B$  est couvert par une **configuration UM2** alors que le trajet  $B \rightarrow C$  est couvert par une configuration **US**. La gare  $B$  est une gare traversante sur la figure 1.13, la rame  $r_1$  couvre donc le trajet  $B \rightarrow C$  après une coupe de la configuration en  $B$ . En revanche,  $B$  est modélisée comme une gare en cul-de-sac sur la figure 1.14, dans ce cas la rame  $r_2$  couvre le trajet  $B \rightarrow C$ .

On a représenté dans l'exemple ci-dessus le cas d'une arrivée enchaînant avec un départ. Dans ce mémoire nous ne détaillons pas tous les cas des enchaînements, notamment l'enchaînement comprenant deux arrivées en gare donnant lieu à une accroche d'une configuration pour effectuer un départ; ou le cas d'un enchaînement comprenant une arrivée donnant lieu à une coupe pour effectuer deux départs différents. On limite l'ensemble des cas à ceux faisant intervenir aux maximum trois trajets (deux arrivées et un unique départ ou inversement) et faisant intervenir au maximum une opération de coupe ou d'accroche sur les configurations. Les opérations de coupe et d'accroche des rames ne sont réalisées

que dans certaines gares du fait du besoin d'agents opérationnels pour effectuer ces opérations. On parlera de **contraintes de rebroussement et de topologie de l'infrastructure** pour signifier les contraintes susmentionnées.

On ne considère pas dans notre problème le routage des rames consistant à définir les chemins empruntés par les rames. Ceci est établi au niveau de la phase de conception du réticulaire. On inclut uniquement la gestion des rames au niveau des connexions en gare (traversante ou en cul-de-sac). La capacité du réseau ainsi que la gestion des espacements entre trajets ne sont pas gérés ; on considère uniquement les trajets non réalisables ensemble. Par ailleurs, les séquençements entre trajets ne sont pas prédéfinis en entrée de notre problème. Ils sont régis par un ensemble de contraintes et règles de gestion qu'on présente dans la sous section suivante.

### 1.2.3.2 Contraintes opérationnelles et règles de gestion

On parle d'un enchaînement ou d'un séquençement de deux trajets lorsque la configuration couvrant le trajet en amont est reprise pour couvrir le trajet en aval. Enchaîner deux trajets requiert un ensemble de règles de gestion, certaines sont souples et d'autres plutôt fermes. Dans notre problème, les compositions des trains et les séquençements ne sont pas prédéfinis. Des préférences d'enchaînements de trajets selon les **missions** couvertes sont préconisées par les concepteurs du **TER**. Pour des raisons de gestion à l'opérationnel, certains enchaînements sont interdits si les trajets sont très proches dans le temps. Ces interdictions et priorisations d'enchaînements interviennent dans le cas des études d'offres faisant intervenir plusieurs lignes ferroviaires à la fois ; on préférera isoler si possible les rames sur une même ligne ferroviaire<sup>6</sup> dans le cas où ceci n'engendre pas des surcoûts.

Un temps d'attente minimum est requis entre deux enchaînements pour permettre la gestion des flux des voyageurs. Ce temps d'attente dépend de la gare d'arrêt, de la **configuration** et de la nature de l'enchaînement, il est notamment allongé si l'enchaînement engendre un rebroussement. Les temps d'attente privilégiés sont ceux s'écartant du temps

---

6. Isoler des rames dans des lignes ferroviaires permet d'éviter la propagation des incidents d'une ligne à l'autre.

minimum imposé afin d'éviter la répercussion d'un éventuel retard sur le train en aval. Les temps d'attente trop longs en gare ne sont par ailleurs pas souhaités car le **GI** impose de libérer les voies en gare. Les rames doivent être envoyées vers des espaces de garage<sup>7</sup>. On utilisera le terme **évolution** pour identifier les mouvements entre gare et espaces de garages.

La **gestion opérationnelle des coupes et accroches en gare** impose aussi une augmentation des temps d'attente pour assurer ces opérations et pouvoir réutiliser les rames. On parlera de règles de **gestion des enchaînements** pour se référer aux contraintes susmentionnées.

Le **parcage des rames** la nuit oblige d'envisager des départs le matin depuis certains sites. On contraint donc un nombre minimum de départs en début de journée depuis ces sites. En outre, la capacité de stockage est limitée, celle-ci impose un nombre maximal par type de rames pouvant être parquées le soir sur chacun des sites.

Ces règles de parcage des rames induisent une contrainte de **cyclicité** des rames. Concrètement, pour chaque type de rame, le nombre de véhicules débutant le service en chaque site doit être égale au nombre de rames finissant le service sur ce même site.

On clôture cette sous-section par une description des coûts pris en compte dans notre problème. Les rames matérielles correspondent aux coûts prédominants, on minimise donc le nombre de rames nécessaires pour couvrir une **demande** donnée. Aussi, les trajets couverts sans voyageurs ainsi que les **évolutions** représentent un coût important, ces derniers sont également minimisés. Enfin on pénalise le nombre de coupes et d'accroches du fait du besoin de synchroniser plusieurs ressources à la fois (rames et agents). Ces différents coûts seront identifiés dans la suite de ce document comme étant des **coûts de production**.

### 1.2.3.3 Maintenance des rames et contraintes du dépôt

Une ressource d'une **rame** est dite maintenable s'il s'agit d'une ressource épuisable pouvant être rétablie selon des critères. Parmi les ressources maintenables on cite le niveau du gazole, la propreté des trains, le niveau de la sablière, le niveau du liquide lave-glace,

---

7. Voies annexes, dépôts etc

etc. Les causes d'épuisement de ces ressources sont la durée, la distance parcourue ou le nombre de trajets effectués. Le critère principal de rétablissement de ces ressources est l'immobilisation de la rame pendant une certaine durée sur un site de maintenance particulier et pendant une période de disponibilité au dépôt.

Le besoin de passage en maintenance d'une rame est identifié lorsqu'une des ressources est épuisée. De plus, il est possible d'effectuer plusieurs maintenances à la fois. L'ensemble des ressources maintenables sont rétablies à leur état initial même si elles ne sont pas totalement épuisées, le passage en maintenance ne donne pas lieu à un cumul de la ressource. Les critères relatifs aux ressources maintenables seront désignés dans la suite par les contraintes de **la maintenance des rames**.

Les ressources maintenables sont suivies par le **technicentre**, entité rattachée au **TER**. Certains critères de passage en maintenance ne sont pas connus au niveau du département chargé de la conception du roulement matériel, le **technicentre** réserve des créneaux horaires pour chaque type de rame et définit la **capacité maximale** d'accueil par type. Connaissant le besoin de passage en maintenance, le **technicentre** immobilise un nombre de rames par type sur des **créneaux horaires**. Cette contrainte "organisationnelle" réduit le nombre d'itérations entre le **technicentre** et les concepteurs du roulement matériel, elle reste admissible puisque le roulement matériel est généralement étudié sur une offre d'une semaine, durée en dessous de certains critères de passage en maintenance. Ces contraintes sont identifiées dans ce document par les règles de **logistique du dépôt**.

Le passage en maintenance des rames impose une organisation au niveau du dépôt. Elle est effectuée sur plusieurs sites comme le dépôt, les voies de garage, les machines à laver. On confond dans ce document l'ensemble de ces sites et on les identifie par le dépôt. On prend en compte dans notre problème uniquement la gestion logistique du dépôt, à savoir les contraintes de capacité et les contraintes liées aux créneaux imposés pour des maintenances. Par ailleurs, la maintenance des rames ne sera pas étudiée. Cette contrainte reste ouverte dans les perspectives de cette thèse. Il est intéressant de vérifier la faisabilité de la maintenance pour une offre sur une semaine bien qu'on dimensionne le parc matériel pour des études stratégiques.

## Conclusion

On a présenté dans ce chapitre le problème d'optimisation au TER traité dans la présente thèse. On estime le besoin en rames matérielles nécessaires pour couvrir une demande exprimée par les AOs et minimisant les coûts de production. On identifie dans ce document notre problème par "*La sélection des trains et l'optimisation du roulement matériel (TSRP)*", le tableau 1.1 récapitule l'ensemble des critères pris en compte. Nous intégrons la quasi-totalité des contraintes opérationnelles pour aboutir à une bonne estimation des coûts réels liés à des demandes exprimées par les AOs.

TABLE 1.1 – Synthèse des critères du problème de **TSRP**

<b>Problème de <b>TSRP</b></b>		
Sous problèmes	Contraintes	Remarques
Problème de sélection des trains	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Fréquences des missions</li> <li>● Capacité d'emport</li> <li>● Possibilité des bi-tranches</li> <li>● Trajets spécifiques requis</li> </ul>	Contraintes de la demande imposées par l' <b>AO</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Trajets possibles</li> <li>● Exclusions entre trajets</li> </ul>	Contraintes imposées par le <b>GI</b> décrites dans le réticulaire
Planification du roulement matériel	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Cyclicité des rames</li> <li>● Parcage des rames</li> <li>● Gestion des enchaînements</li> <li>● Coût de production</li> <li>● Rang des rames dans les configurations</li> </ul>	Contraintes liées à l'utilisation des rames matérielles
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Gestion opérationnelle des bi-tranches</li> <li>● Rebroussements et topologie de l'infrastructure</li> <li>● Gestion opérationnelle des coupes/ accroches</li> </ul>	Contraintes liées à la topologie de l'infrastructure ferroviaire
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Trajets pour des évolutions</li> </ul>	Contrainte imposée par le <b>GI</b>
Logistique du dépôt	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Capacité du dépôt</li> </ul>	Contrainte de capacité
	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Créneaux pour des maintenances</li> </ul>	Contrainte organisationnelle imposée par le technicentre



## Chapitre 2

# Éléments de Recherche Opérationnelle

### Sommaire

---

2.1	Programmation linéaire en nombres entiers . . . . .	41
2.1.1	Programmation linéaire . . . . .	41
2.1.2	Résultats en programmation linéaire . . . . .	42
2.2	Hypergraphes . . . . .	44
2.2.1	Définitions . . . . .	44
2.2.2	Flots sur les hypergraphes . . . . .	46

---

Ce chapitre présente quelques prérequis de recherche opérationnelle pour comprendre les modèles et les algorithmes présentés dans la suite de ce document. Nous introduisons brièvement en section 2.1.1 la programmation linéaire. Nous présentons par la suite en section 2.1.2, sous forme de propositions et de corollaires, quelques résultats en programmation linéaire et en programmation linéaire en nombres entiers. La seconde partie de ce chapitre s'intéresse, en section 2.2, aux objets hypergraphes et aux modèles de flot appliqués à ces mêmes objets mathématiques. Enfin, nous présentons le modèle de programme mixte en nombres entiers employé dans cette thèse.

## 2.1 Programmation linéaire en nombres entiers

### 2.1.1 Programmation linéaire

La programmation linéaire s'intéresse aux méthodes permettant de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire. Le fondateur de cette théorie est *George B. Dantzig* (1914 – 2005)<sup>1</sup>, il a notamment découvert l'algorithme du simplexe, méthode phare pour la résolution de ces problèmes. Les problèmes d'optimisation linéaire sont formalisés sous forme d'un *Programme Linéaire (PL)* décrit par une fonction objectif à maximiser ou à minimiser sous un ensemble de contraintes linéaires. Formellement un **PL** est défini dans sa forme normale par :

$$\begin{aligned} (P) &:= \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i && \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \in \mathbb{R} && \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \end{aligned}$$

où les  $x_j$  sont les variables de décision.

Nous passons sous silence quelques notions de la **PL**, notamment la dualité et les coûts réduits. Nous invitons le lecteur à se reporter aux livres de **Dantzig [1998]** et de **Chvatal et al. [1983]** pour plus d'indications.

On parle de *programmes linéaires mixtes en nombres entiers (MIPs)* lorsqu'une partie des variables  $(x_j)_{j \in \llbracket 1..m \rrbracket}$  de  $(P)$  appartiennent à  $\mathbb{Z}$ ; et on parle de *Programmes Linéaires En Nombres Entiers (PLNEs)* lorsque la totalité des variables  $(x_j)_{j \in \llbracket 1..m \rrbracket}$  de  $(P)$  appartiennent à  $\mathbb{Z}$ . Les méthodes de résolution des **MIPs** et **PLNEs** s'appuient sur des algorithmes itératifs et tirés du principe de l'algorithme de *Branch & Bound* (cf **Lawler and Wood [1966]**). Pour plus d'indications, nous renvoyons le lecteur vers les livres **Wolsey and Nemhauser [2014]** et **Wolsey [1998]**

Nous présentons dans la suite un résultat en **PL** et nous extrapolons ce même résultat aux **PLNEs** sous forme d'un corollaire.

---

1. **Cottle et al. [2007]** lui rendent hommage dans un article de l'*American Mathematical Society*

### 2.1.2 Résultats en programmation linéaire

**Filtrage sur les coûts réduits :** Le résultat présenté en proposition 1 permet de caractériser les solutions optimales d'un PL.

**Proposition 1:** Soit le problème de maximisation  $(P)$  :

$$\begin{aligned} (P) : \max p(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i && \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket \\ x_j &\geq 0 && \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \end{aligned}$$

On suppose que  $(P)$  est réalisable et borné. On note respectivement  $R$  et  $\Theta$  l'ensemble des solutions réalisables et optimales de  $(P)$

Soit  $x^* \in \Theta$ ,  $k \in \llbracket 1..n \rrbracket$ ,  $\hat{x} \in R$  et  $\bar{c}^*$  le coût réduit associé à une solution duale quelconque de  $x^*$ . Alors  $p(\hat{x}) \leq p(x^*) + \hat{x}_k \bar{c}_k^*$

En gardant les mêmes notations, dans le cas d'un problème de minimisation  $(Q)$  :

$$\begin{aligned} (Q) : \min q(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i && \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket \\ x_j &\geq 0 && \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \end{aligned}$$

On a le résultat :  $q(\hat{x}) \geq q(x^*) + \hat{x}_k \bar{c}_k^*$

*Preuve.* (Cas de maximisation) Soit  $x^* \in \Theta$ ,  $k \in \llbracket 1..n \rrbracket$ ,  $\hat{x} \in R$ ,  $y^*$  une solution duale de  $x^*$  et  $\bar{c}^*$  le coût réduit associé à  $y^*$ .

On pose le problème  $(\hat{P})$  :  $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i && \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket \\ x_k &= \hat{x}_k \text{ et } x_j \geq 0 && \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \end{aligned}$$

Soit  $(D)$  et  $(\hat{D})$  respectivement le dual de  $(P)$  et de  $(\hat{P})$  :

$$\begin{array}{l}
 (D) : \min \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \\
 y_i \geq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 (\hat{D}) : \min \sum_{i=1}^m b_i y_i + \hat{x}_k z_k \\
 \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket, j \neq k \\
 \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i + z_k \geq c_k \\
 z_k \in \mathbb{R} \text{ et } y_i \geq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket
 \end{array}
 \right.$$

La solution  $(y_i = y_i^*)_{i \in \llbracket 1..m \rrbracket}, z_k = c_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i^*$  est réalisable pour  $(\hat{D})$ . D'où  $Opt(\hat{D}) \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* + \hat{x}_k (c_k - \sum_{i=1}^m a_{ik} y_i^*)$ . Et par suite  $Opt(\hat{P}) \leq (Opt(P) + \hat{x}_k \bar{c}_k^*)$  d'après la propriété de dualité forte. Et comme  $p(\hat{x}) \leq Opt(\hat{P})$  et  $p(x^*) = Opt(P)$ , on a  $p(\hat{x}) \leq p(x^*) + \hat{x}_k \bar{c}_k^*$ .  $\square$

**Corollaire 1:** Soit  $(E)$  un programme linéaire en nombre entiers :

$$\begin{array}{l}
 (E) : \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket \\
 x_j \geq 0 \quad \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \\
 x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket
 \end{array}$$

On note  $\Theta$  l'ensemble des solutions optimales et  $\omega$  une borne primale. Soit  $(L)$  le problème correspondant à la relaxation continue associée à  $(E)$ ,  $\varphi$  la valeur de la solution optimale de  $(L)$  et pour tout  $j \in \llbracket 1..n \rrbracket$  on note  $\bar{c}_j^*$  le coût réduit associé à la variable  $x_j^*$ . Si  $\bar{c}_j^* > \omega - \varphi$  alors pour toute solution optimale  $x \in \Theta$ , on a  $x_j = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $j \in \llbracket 1..n \rrbracket$  et  $\hat{x}$  une solution réalisable de  $E$  tel que  $\hat{x}_j \geq 1$  et  $\bar{c}_j^* > \omega - \varphi$ .  $\hat{x}$  est une solution réalisable de  $L$ . D'après la proposition 1, on a  $\sum_{k=1}^n c_k \hat{x}_k \geq \varphi + \bar{c}_j^* \hat{x}_j$ . Comme  $\bar{c}_j^* \geq 0$  alors  $\sum_{k=1}^n c_k \hat{x}_k \geq \varphi + \bar{c}_j^*$  et par suite  $\sum_{k=1}^n c_k \hat{x}_k > \varphi + \omega - \varphi = \omega$ . D'où  $\hat{x} \notin \Theta$ .  $\square$

**Remarque 1.** On fera référence au terme *filtrage* pour signifier le fait de fixer des variables entières à 0. On parlera de *filtrage sur les coûts réduits* pour se référer au filtrage dans le

cas où les coûts réduits satisferaient les conditions décrites précédemment.

Du corollaire 1 découle donc une procédure pour pré-traiter les variables d'un PLNE. Il suffit de calculer la relaxation linéaire ainsi qu'une solution réalisable du PLNE en question et filtrer par la suite les variables sur les coûts réduits.

Nous clôturons cette section par un rappel de la notion de relaxation surrogate utilisée dans le chapitre 5. Une **Relaxation surrogate** d'un problème ( $P$ ) consiste en la définition d'un problème relâché en remplaçant des contraintes de ( $P$ ) par de nouvelles contraintes. Chaque nouvelle contrainte (nommée contrainte surrogate) est définie à partir d'une combinaison linéaire, à coefficient positifs, de certaines contraintes initiales. Cette nouvelle contrainte surrogate remplace les contraintes permettant de la définir.

## 2.2 Hypergraphes

### 2.2.1 Définitions

Les modèles de graphes représentent un cas particulier des modèles d'hypergraphes. Contrairement à une arête, une hyperarête connecte un sous-ensemble quelconque de nœuds. Une large classe de problèmes est modélisable grâce à ces modèles où les contraintes y sont incorporées. Celles-ci sont respectées grâce à la loi de conservation des flots. De façon plus abstraite, les modèles d'hypergraphes permettent de formaliser des programmes dynamique et de développer des *frameworks* de résolution génériques (cf. [Martin et al. \[1990\]](#)).

Les hypergraphes ont été introduits par le mathématicien français Claude Berge (1926 - 2002)<sup>2</sup>. Il a généralisé des résultats de la théorie des graphes aux hypergraphes ; le lecteur peut se référer au livre [Berge \[1973\]](#) pour plus d'indications. Dans la présente thèse, les modèles d'hypergraphes seront uniquement utilisés pour modéliser le problème industriel, nous manipulerons notamment les hypergraphes orientés.

Un hypergraphe orienté est défini par un couple d'ensembles  $(V, A)$  où  $V$  représente l'en-

---

2. [Chvátal \[2003\]](#) rend hommage à C. Berge dans un article et y évoque ses contributions majeures.

semble des nœuds et  $A$  l'ensemble des hyperarcs. Un hyperarc est communément défini par un couple d'ensembles  $(T, H)$ .  $T$  est l'ensemble origine appelé aussi queue de l'hyperarc et  $H$  est l'ensemble destination appelé aussi tête de l'hyperarc. Nous autorisons dans nos modèles la duplication des nœuds dans les ensembles tête et queue de l'hyperarc. Les hyperarcs définis seront alors représenté par un couple de multi-ensembles<sup>3</sup>  $(T, H)$ . Pour tout  $v \in V$  on note  $\Gamma^+(v)$  le multi-ensemble d'hyperarcs entrants au nœud  $v$  et  $\Gamma^-(v)$  le multi-ensemble d'hyperarcs sortants du nœud  $v$ . L'exemple 2.2.1 décrit les ensembles et multi-ensembles susmentionnés pour l'hypergraphe de la figure 2.1.

**Exemple 2.2.1.** Soit  $(V, A)$  l'hypergraphe représenté sur la figure 2.1.

On a  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  et  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  où :  $a_1 = (\{\{v_1, v_1\}, \{v_3, v_5\}\})$ ,  $a_2 = (\{\{v_5, v_5, v_3\}, \{v_6\}\})$ ,  $a_3 = (\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\})$ ,  $a_4 = (\{\{v_4, v_7\}, \{v_3, v_3\}\})$ .

Pour le nœud  $v_3$  on a :  $\Gamma^+(v_3) = \{\{a_1, a_3, a_4, a_4\}\}$  et  $\Gamma^-(v_3) = \{\{a_2\}\}$ .

La notation  $\{\{.\}\}$  est utilisée pour représenter les multi-ensembles.

**Remarque 2.** Dans ce manuscrit, la notation  $\mathbf{card}(u, \mathcal{N})$  désigne la multiplicité de l'élément  $u$  dans le multi-ensemble  $\mathcal{N}$ , la notation  $\mathbf{support}(\mathcal{N})$  est le support du multi-ensemble  $\mathcal{N}$  i.e l'ensemble des éléments de  $\mathcal{N}$ . La somme sur un ensemble  $\Xi$  de multi-ensembles est le multi-ensemble  $\xi = \sum_{\mathcal{N} \in \Xi} \mathcal{N}$  tel que  $\mathbf{support}(\xi) = \cup_{\mathcal{N} \in \Xi} \mathbf{support}(\mathcal{N})$  et  $\mathbf{card}(u, \xi) = \sum_{\mathcal{N} \in \Xi} \mathbf{card}(u, \mathcal{N})$ .

3. L'annexe B rappelle la définition des multi-ensembles ainsi que des opérations sur ces derniers.

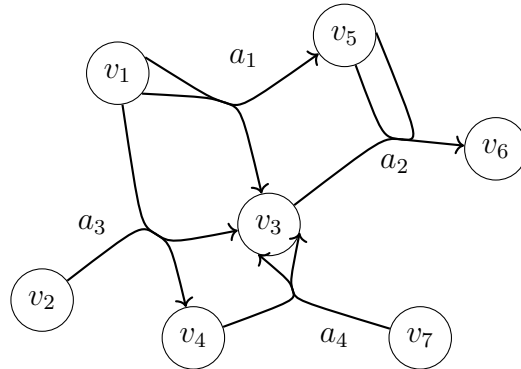


FIGURE 2.1 – Hypergraphe orienté

Nous parlerons de multi-hypergraphe lorsque nous autorisons des liens multiples entre des multi-ensembles. Deux multi-ensembles peuvent donc être connectés par plus d'un hyperarc. Dans cette thèse, nous manipulerons plus précisément les modèles de multi-hypergraphes orientés, le terme hypergraphe fera référence à ces objets.

### 2.2.2 Flots sur les hypergraphes

Soit  $(V, A)$  un hypergraphe,  $\alpha$  et  $\Omega$  deux nœuds de  $V$ .  $\alpha$  est appelé nœud source et  $\Omega$  est appelé nœud puits. On associe à chaque  $a \in A$  un entier  $u_a \in \mathbb{N}$  et un réel  $c_a \in \mathbb{R}$ .  $u_a$  et  $c_a$  sont respectivement la capacité et le coût de l'hyperarc  $a$ .

On définit un flot entier de la source  $\alpha$  au puits  $\Omega$  par la fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant :

$$\sum_{a \in \Gamma^+(v)} f(a) = \sum_{a \in \Gamma^-(v)} f(a) \quad \forall v \in V \setminus \{\alpha, \Omega\} \quad (2.1)$$

$$f(a) \leq u_a \quad \forall a \in A \quad (2.2)$$

Les contraintes 2.1 sont les contraintes de conservation du flot et les contraintes 2.2 sont les contraintes de la capacité. Le flot est de coût minimal si de plus la valeur  $\sum_{a \in A} c_a f(a)$  est minimale. Notons que les sommes apparaissant dans les contraintes 2.1 sont définies pour des multi-ensembles, l'occurrence d'un hyperarc  $a$  dans  $\Gamma^+(v)$  ou dans  $\Gamma^-(v)$  est comptabilisée. Les contraintes de conservation du flot pour les nœuds  $v_5$  et  $v_3$  de l'hypergraphe représenté dans la figure 2.1 sont respectivement  $a_1 = 2a_2$  et  $a_3 + a_1 + 2a_4 = a_2$ . Le lecteur peut se référer à l'article de [Cambini et al. \[1997\]](#) pour plus d'indications sur les modèles et les algorithmes de flot sur les hypergraphes.

La figure 2.2 illustre l'exemple d'un flot unitaire où en chaque nœud la valeur du flot entrant et sortant est égale à 1. Cet exemple illustre particulièrement un cas d'utilisation des modèles d'hypergraphes. L'hyperarc  $a_2$  représente un scindement d'un état  $v_1$  en deux états  $v_2$  et  $v_3$  i.e  $v_1 \Rightarrow (v_2 \wedge v_3)$ . Inversement l'hyperarc  $a_7$  représente une combinaison de deux états  $v_5$  et  $v_4$  en un nouveau état  $v_6$  i.e  $(v_4 \wedge v_5) \Rightarrow v_6$ . Si les états sont des **configurations** alors  $a_2$  représente une coupe de la configuration représentée par  $v_1$  et  $a_7$

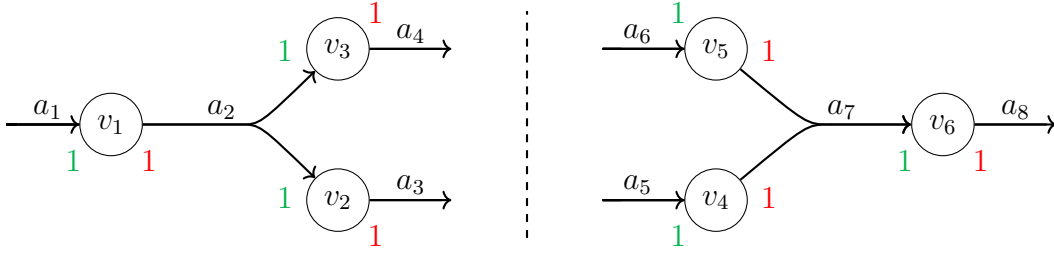


FIGURE 2.2 – Exemple de modélisation

représente une accroche de deux configurations représentées par  $v_5$  et  $v_4$ . Ce même formalisme d'hyperarcs a été utilisé pour représenter des coupes guillotines du verre dans l'article [Clautiaux et al. \[2018\]](#). Les modèles d'hypergraphe appréhendent facilement certains problèmes industriels. Notre principale motivation derrière l'utilisation de ces derniers vient de la modélisation des configurations et la modélisation des changements de compositions des trains par une structuration particulière des hyperarcs.

$$(E) : \min \sum_{a \in A} c_a x_a + g(y) \quad (2.3)$$

$$\sum_{a \in \Gamma^+(v)} x_a = \sum_{a \in \Gamma^-(v)} x_a \quad \forall v \in V \setminus \{\alpha, \Omega\} \quad (2.4)$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b \quad (2.5)$$

$$x_a \leq u_a \quad \forall a \in A \quad (2.6)$$

$$x \in \mathbb{N}^{|A|}, \quad y \in \mathbb{R}_+^{|y|} \quad (2.7)$$

On conclut cette sous section par la présentation de la forme du **MIP** à résoudre. On considère un hypergraphe  $(V, A)$ . On modélise le problème industriel avec des variables entières pour représenter le flot sur l'hypergraphe et des variables continues pour mesurer l'écart par rapport à la **demande**. La fonction objectif 2.3 minimise le coût du flot ainsi que le coût de déviation par rapport à la demande. Les contraintes 2.4 représentent la conservation du flot. Les contraintes 2.5 représentent les contraintes de la demande ainsi que les



contraintes non modélisées par l'hypergraphe. En définitive, les contraintes 2.6 autorisent uniquement pour chaque hyperarc un flot inférieur à la capacité sur cet hyperarc.

## **Conclusion**

Ce chapitre a été consacré à un rappel des principales notions en recherche opérationnelle utilisées dans cette thèse. Nous avons passé en revue la méthode de filtrage sur les coûts réduits. En définitive nous avons introduit le modèle d'hypergraphe utilisé, le modèle de flot et la forme du MIP à résoudre.

# Chapitre 3

## Revue de la littérature

### Sommaire

---

3.1	Problématiques en ferroviaire . . . . .	50
3.2	Problème d'établissement des grilles horaires . . . . .	52
3.3	Problème d'optimisation du matériel roulant . . . . .	54
3.3.1	Approches par flots . . . . .	55
3.3.2	Approches par chemins . . . . .	59
3.3.3	Focus sur les modèles d'hypergraphe . . . . .	62
3.3.4	Approches heuristiques . . . . .	65

---

L'objectif de ce chapitre est de situer le problème de **TSRP** dans la littérature du ferroviaire. Nous présentons dans un premier temps en section 3.1 un aperçu des problèmes d'optimisation traités par les **entreprises ferroviaires** dans la littérature. Nous passons ensuite en revue les problèmes d'établissement des grilles horaires et de planification du matériel roulant afin d'identifier les points communs avec le **TSRP**. Nous nous focalisons en section 3.3 sur les approches de résolution du problème de planification du matériel roulant, en l'occurrence les approches basées sur les flots, les chemins et les hypergraphes.

### 3.1 Problématiques en ferroviaire

Dans la littérature, la planification du plan de transport ferroviaire est décomposée en des problèmes d'optimisation résolus de manière séquentielle. Le premier sous-problème est la planification des lignes, le second est l'établissement des grilles horaires, puis vient la planification du matériel roulant et des agents (*cf. fig. 3.1*). Cette décomposition séquentielle s'impose du fait de la difficulté de la planification et du fait de l'interaction de différentes ressources hétérogènes comme l'infrastructure, les rames et les agents. On expose dans la suite ces différents problèmes traités en partie ou en totalité par les entreprises ferroviaires. Pour de plus amples indications, le lecteur peut se référer aux articles [Huisman et al. \[2005\]](#), [Caprara et al. \[2007\]](#) et [Caprara et al. \[2010\]](#) résumant ces problèmes d'optimisation.

Le processus de **planification des lignes** s'intéresse à la définition des lignes et des dessertes ferroviaires, à savoir les **missions**, leurs routages et leurs fréquences. Il s'intéresse aussi à la distribution de la demande en nombre de places assises sur l'horizon de temps étudié. Ce problème d'optimisation, d'ordre stratégique, s'intéresse à couvrir une demande des voyageurs exprimée sous forme de matrices origine/destination. L'objectif est de minimiser les correspondances introduites et les coûts opérationnels. Les études de planification des lignes sont généralement effectuées sur une tranche horaire couvrant les heures de pointe. Ces études réalisées par les entreprises ferroviaires s'appuient en entrée sur le réseau ferré, modélisé sous forme d'un graphe, et sur la prévision de la demande voyageur sur un temps de cycle (ex. Une heure). Il est à noter que la définition de la structure des **bi-tranches** est effectuée durant cette phase d'optimisation. Les articles [Caprara et al. \[2007\]](#) et [Schöbel \[2012\]](#) passent en revue la littérature en lien avec la *planification des lignes*. Le lecteur

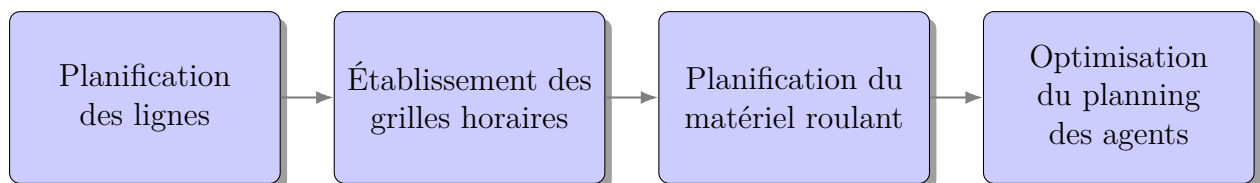


FIGURE 3.1 – Étapes de conception du plan de transport.

peut se référer aussi aux récents travaux de [Gattermann et al. \[2017\]](#). La planification des lignes est en amont du problème de **TSRP** et est située avant la conception du **graphe réticulaire**.

**L'établissement des grilles horaires** est la phase de conception définissant les trajets à opérer *i.e* l'offre de transport ferroviaire satisfaisant la demande des voyageurs. Ce problème prend en entrée les résultats de la planification des lignes et définit les horaires pour chaque fréquence des missions. La conception des *grilles horaires* est généralement établie par le **gestionnaire de l'infrastructure**. Ce problème est développé en **3.2**, nous évoquons notamment ses variantes et son lien avec le problème de **TSRP** traité dans la présente thèse.

Le problème de **planification du matériel roulant** définit la composition de chaque train des grilles horaires *i.e* les rames permettant de les couvrir. Ceci équivaut à définir pour chaque rame matérielle les trajets à couvrir et quand opérer les coupes et accroches des configurations. Plusieurs contraintes doivent être prises en compte lors de cette phase de planification (*cf.* Section **1.2.3** du premier chapitre). Le problème de **TSRP** traite en grande partie la planification des rames. La sous-section **3.3** est notamment dédiée à une revue approfondie de la littérature en lien avec la *planification du matériel roulant*.

Le problème de **planification des agents** s'intéresse à la définition des emplois du temps des agents conducteurs et contrôleurs. Un emploi du temps est constitué d'un ensemble de tâches à effectuer où chaque tâche correspond à la couverture d'un train en partie ou dans sa totalité. Plusieurs règles de travail sont imposées par le service des ressources humaines. D'autres règles et contraintes sont en lien avec les compétences et les qualifications de chaque agent et d'autres sont en lien avec la localisation et la capacité des lieux de découchage. Dans la littérature, ce problème est décomposé en deux sous problèmes. Le premier concerne la planification des journées de service. Elle permet de planifier des tâches sur une courte durée (maximum deux jours) et intègre les règles de travail quotidien. Durant cette phase de planification, les journées de service ne sont pas affectées aux agents. Les articles [Caprara et al. \[1997\]](#), [Caprara et al. \[2007\]](#) et [Heil et al. \[2019\]](#) passent en revue la littérature en lien avec la *planification des journées de service*. Le lecteur peut

se référer aussi aux travaux de [Jütte et al. \[2011\]](#) et [Jütte and Thonemann \[2012\]](#). Le second sous problème concerne la *la planification des emplois du temps des agents*. Cette fois-ci, les tâches à planifier sont les journées de service obtenues à partir de la phase précédente de planification et sous des contraintes à plus long terme (durée de travail sur une semaine, congés ...). L'objectif est de minimiser le nombre d'agents nécessaires pour couvrir l'ensemble des journées de service tout en équilibrant la charge de travail. Le lecteur peut se référer aux articles [Hartog et al. \[2009\]](#) et [Breugem et al. \[2019\]](#) pour plus d'indications. D'autres articles de la littérature comme [Caprara et al. \[2001\]](#) et [Mesquita et al. \[2011\]](#) investiguent des approches intégrées des deux sous problèmes susmentionnés. La planification des agents est en aval du problème de **TSRP** traité par la présente thèse.

### 3.2 Problème d'établissement des grilles horaires

Comme mentionné dans la section précédente, le problème d'établissement des grilles **défini les horaires des trajets** à couvrir par les entreprises ferroviaires. On distingue deux types de grilles : des grilles avec un schéma cyclique et des grilles acycliques sans aucune structure de périodicité. Une grille horaire est dite cyclique si on retrouve un temps de cycle pour chaque groupe de trains d'une même mission. Par exemple, les horaires de départ des trains d'une mission pourrait être 6 :20, 6 :50, 7 :20, 7 :50, etc., le temps de cycle dans ce cas est de 30 minutes. Les grilles cycliques correspondent aux offres de transport métropolitaines, elles induisent moins d'incidents dans la phase opérationnelle du fait du caractère reproductible. Les grilles acycliques quant à elles sont dédiées au transport de longue distance et au transport de fret, non adaptés aux grilles cycliques car coûteuses en cas de faible demande. En Europe, le système de transport ferroviaire impose aux **EFs** de formuler des demandes de trajets aux gestionnaires de l'infrastructure. On retrouve dans la littérature des demandes exprimées sous forme de trajets avec des horaires souhaités et des intervalles de tolérance pour chaque horaire de départ et d'arrivée. Des intervalles de tolérance sont aussi définis pour les durées des trajets. Le gestionnaire de l'infrastructure établit dès lors les grilles horaires pour l'ensemble des **EFs** tout en s'approchant le plus

des demandes formulées. Les départs et arrivées des trajets sont donc déterminés par le GI sous plusieurs contraintes. Parmi ces contraintes on retrouve celles liées à l'espace-temps des trains, elles sont définies par les cantons des voies ferrées et les systèmes de signalisation. D'autres contraintes sont liées aux types des voies (voie à sens unique, voie à grande vitesse, électrifiée ...), aux capacités d'accueil des rames en chaque gare et au temps minimal d'arrêt en desserte intermédiaire. La planification des grilles doit prendre en compte aussi la possibilité d'augmenter la durée des trajets et la possibilité de créer des arrêts pour croiser des trains. Elle doit prendre en compte aussi les travaux sur les voies et les limitations des vitesses planifiées. Nous renvoyons le lecteur vers les articles [Caprara et al. \[2007\]](#), [Cacchiani and Toth \[2012\]](#) et [Caimi et al. \[2017\]](#) pour une revue approfondie de la littérature en lien avec la conception des grilles.

On identifie de plus dans la littérature des problèmes en lien avec la conception des horaires comme le calcul des temps des trajets prenant en compte la consommation d'énergie, problème traité par [Chevrier et al. \[2013\]](#) et [Scheepmaker et al. \[2017\]](#). D'autres problèmes traitent de la possibilité d'insertion des trajets du transport de fret dans des grilles (cf. [Cacchiani et al. \[2010a\]](#), [Borndörfer et al. \[2016\]](#)). On identifie aussi des problèmes largement traités comme la re-planification des grilles (cf. [Adenso-Diaz et al. \[1999\]](#), [Cacchiani et al. \[2014\]](#) et [Altazin et al. \[2017\]](#)) ou plus récemment la robustesse des grilles (cf. [Cacchiani et al. \[2012a\]](#), [Cacchiani and Toth \[2012\]](#) et [Lusby et al. \[2018\]](#)).

L'approche intuitive de modélisation du problème des grilles acyclique est celle de représenter le problème par un graphe espace/temps discrétisé à la minute. Les nœuds représentent des départs ou des arrivées des trains et les arcs représentent de possibles trajets. Ce modèle a été proposé par [Caprara et al. \[2002\]](#) et le résolvent grâce à une méthode heuristique basée sur une relaxation lagrangienne. [Caprara et al. \[2006\]](#) s'appuient sur ce même modèle et incluent des contraintes additionnelles comme la capacité des gares.

La planification des grilles horaires cycliques quant à elle s'appuie essentiellement sur le problème de planification d'événements périodiques<sup>1</sup>, problème introduit par [Serafini and](#)

---

1. En anglais : Periodic Event Scheduling Problem (PESP)

Ukovich [1989]. Un événement représente généralement un départ ou une arrivée définie sur un temps de cycle. Le modèle de Serafini and Ukovich [1989] a été largement repris dans la littérature par Nachtigall [1996], Nachtigall and Voget [1997], Kroon and Peeters [2003], Nielsen et al. [2006], Kroon et al. [2007] et Sparing and Goverde [2017].

A la Sncf, le parallèle du problème d'établissement des grilles horaires cycliques est la conception du *graphe réticulaire*, problème traité par Sncf-Réseau. À notre connaissance, le concept du *réticulaire* n'existe pas dans la littérature, concept introduit par la Sncf en 2012. Sncf-Réseau reçoit les missions segmentées, exprimées par les entreprises ferroviaires, et grâce auxquelles le réticulaire est établi sur un temps de cycle égale à deux heures. Le réticulaire représente ainsi la totalité des trajets pouvant être couvert par les EFs. Le problème de TSRP traité par la présente thèse ne traite pas tout à fait du problème d'établissement des grilles horaires tel que défini dans la littérature, néanmoins, il intègre des spécificités introduites par le réticulaire comme la *disjonction entre trajets* et la *sélection des trains*, spécificités retrouvées dans le problème d'établissement des grilles. Il est à noter qu'au TER les trajets sélectionnés ne respectent pas forcément la cyclicité des grilles.

### 3.3 Problème d'optimisation du matériel roulant

On effectue dans cette sous section un état de l'art du problème de planification du matériel roulant présenté en 1.2.3 et en lien avec le transport des passagers. Le lecteur peut se référer aussi aux articles Cordeau et al. [1998], Caprara et al. [2007] et Bunte and Kliewer [2009] pour une revue de la littérature.

L'optimisation du matériel roulant englobe les sous problèmes consistant à définir la composition des trains, à planifier la rotation des rames et à planifier la maintenance des rames. On parle de planification intégrée lorsque ces sous problèmes sont traités ensemble et non de manière séquentielle. Dans la littérature, les problèmes traités n'intègrent souvent pas la maintenance des rames, problème situé très en aval dans la chaîne de planification du plan de transport. Certains articles de la littérature tentent d'intégrer le problème de

conception des grilles horaires au problème de planification du matériel roulant. Cadarso and Marín [2012] proposent dans ce sens un MIP résolu directement grâce au solveur *Cplex*, les instances traitées n'intègrent qu'un seul type de rame. Schöbel [2017] quant à elle présente une heuristique itérative pour trouver une solution aux problèmes de planification des lignes, de conception des grilles et de planification du matériel roulant. Abbink et al. [2004] présentent un MIP pour répartir les rames matérielles entre les lignes. Le modèle proposé détermine une estimation de la taille du parc des rames et ne résout pas le problème de planification. Dauzère-Pérès et al. [2015] proposent une heuristique basée sur relaxation lagrangienne pour résoudre le problème de planification des rames et du service des agents, les contraintes couplantes y sont relâchées aboutissant à une résolution séparée des deux sous problèmes. Enfin, Liebchen and Peeters [2002] et Liebchen and Möhring [2007] proposent une estimation de la taille du parc. Cette estimation est intégrée au problème de planification des grilles horaires cycliques définies sur une même ligne, les rames matérielles ne sont par ailleurs pas affectées aux trains.

Les tentatives d'intégrer des sous problèmes de la figure 3.1 sont moins nombreuses. On analysera dans la suite uniquement les articles traitant du problème de planification du matériel roulant. On catégorisera ces articles selon les approches de modélisation par flots, chemins et hypergraphes. On présentera dans une sous section les travaux focalisés sur des méthodes heuristiques de résolution.

#### 3.3.1 Approches par flots

Les modèles de flots sur graphes sont les plus répandus dans la littérature pour résoudre le problème du roulement matériel. Le plus utilisé est celui proposé par Fioole et al. [2006], extension du modèle de flot avec multi-commodités proposé dans Peeters and Kroon [2003] et publié par la suite dans Peeters and Kroon [2008]). Nous détaillons ci-dessous le modèle de Fioole et al. [2006], modèle repris par Nielsen et al. [2012], Cacchiani et al. [2012b], Kroon et al. [2014] et Wagenaar et al. [2017]

Fioole et al. [2006] modélisent le problème avec une approche par flots. Ils se distinguent



par leur capacité à intégrer les contraintes liées aux coupes et accroches des rames et celles liées à la position des rames dans les configurations. Le problème résolu prend en entrée une grille horaire, définie pour une journée d'étude type, ainsi qu'une estimation du nombre de voyageurs pour chaque train de la grille. La solution au problème est un roulement matériel minimisant les trois critères : (i) le nombre de kilomètres total parcourus par type de rames, (ii) le nombre de voyageurs non transportés ou sans place assise et (iii) le nombre d'opérations de coupe et d'accroche. Les spécificités et les contraintes du problème résolu par [Fioole et al. \[2006\]](#) sont les suivantes. Pour chaque train  $i$  l'ensemble des configurations valides sont connues en entrée et un train  $j$  enchaînant  $i$  est imposé ; l'ensemble des trains pouvant enchaîner  $i$  est présenté comme une variante du problème. De plus, les transitions valides des configurations sont connues en entrée *i.e* pour chaque train  $i$  couvert par une configuration  $p$ , les configurations  $p'$  pouvant couvrir le train  $j$  successeur de  $i$  sont connues en entrée. La paire de configurations  $(p, p')$  représente une transition ainsi qu'une éventuelle opération de coupe ou d'accroche pour obtenir  $p'$  à partir de  $p$ . Ces transitions sont représentées sous forme d'un graphe où chaque nœud représente un train couvert par une configuration et les arcs représentent les transitions possibles. Le rang des rames dans les configurations est implicitement intégré dans ce graphe de transition. Enfin, les rames découplées doivent attendre un temps minimal en gare pour une réutilisation ultérieure.

Les auteurs de [Fioole et al. \[2006\]](#) traduisent le problème sous forme d'un MIP. On dénombre six types de variables utilisées dont deux binaires. Le premier type dénote si un train  $t$  est couvert par une configuration  $p$ , le seconde dénote si un train  $t$  est couvert par une configuration  $p$  et si son successeur est couvert par une configuration  $p'$ . Les autres variables sont linéaires et permettent de capturer pour chaque type de matériel : (i) le nombre de rames utilisées afin de couvrir un train  $t$ , (ii) pour chaque transition de configuration  $(p, p')$ , le nombre de rames accrochées à  $p$  pour assurer le train successeur de  $t$  et (iii) pour chaque transition de configuration  $(p, p')$ , le nombre de rames décrochées de la configuration  $p$  pour assurer le train successeur de  $t$ . Ayant ces variables définies les contraintes découlent naturellement. On distingue (i) des contraintes de couverture de la

demande, (ii) des contraintes couplantes et (iii) des contraintes pour décrire l'inventaire en rames matérielles pour chaque type et avant chaque départ de train. Le modèle est résolu avec le solveur *Cplex*. Une configuration de ce dernier ainsi qu'une priorisation sur les branchements des variables sont proposées. En définitive des approches heuristiques sont décrites afin d'obtenir une solution réalisable améliorée grâce à une méthode de recherche locale.

Il est à noter que le modèle proposé par [Fioole et al. \[2006\]](#) est très contraint en entrée, l'ensemble des transitions valides ainsi que les coupes et accroches sont fixées. De plus un train unique enchaînant chaque train est connu en entrée du problème.

[Nielsen et al. \[2012\]](#) adaptent le modèle de [Fioole et al. \[2006\]](#) pour prendre en compte la re-planification du roulement matériel dans le cas des perturbations. La fonction objectif est notamment modifiée pour minimiser (i) les trajets non couverts, (ii) les changements opérés sur les configurations définies auparavant pour chaque train *i.e* les opérations de coupes et accroches introduites par la re-planification et (iii) la déviation de l'état final du stock des rames en chaque gare par rapport à l'état initial. Pour modéliser l'information des trains qui vont circuler après l'incident, une grille horaire est définie en chaque pas d'un horizon de temps glissant discrétisé. Le problème est résolu autant de fois que de pas définis grâce au solveur *Cplex*. [Kroon et al. \[2014\]](#) résolvent le problème de re-planification en prenant en compte un flot dynamique de voyageurs pour ajuster la capacité d'emport. Ils proposent un algorithme simulant le flot des passager et s'appuient sur le modèle de [Fioole et al. \[2006\]](#) pour résoudre la re-planification des rames. Les deux approches sont utilisées dans une heuristique itérative pour résoudre le problème global. [Wagenaar et al. \[2017\]](#) développent le modèle de [Nielsen et al. \[2012\]](#) pour prendre en compte finement la demande des voyageurs en cas d'un incident. Ils ajustent le flot des voyageurs et modélisent le comportement de ce dernier. Ils étendent les contraintes de [Nielsen et al. \[2012\]](#) pour prendre en compte le flux des voyageurs et ils incluent de plus la possibilité de couvrir des trajets non commerciaux.

[Alfieri et al. \[2006\]](#) proposent un modèle similaire à celui développé par [Fioole et al. \[2006\]](#). Ils se basent sur un graphe de transition des configurations et sont les premiers a

introduire ce formalisme. Les problèmes résolus par ces deux articles sont les mêmes et diffèrent par la formulation du MIP. Là encore, le successeur de chaque train est défini en entrée. [Alfieri et al. \[2006\]](#) proposent un algorithme itératif dans lequel ils intègrent une méthode pour réduire la taille du graphe de transition. Les MIPs introduits dans cet algorithme sont résolus grâce au solveur *Cplex*, l'algorithme termine une fois une solution réalisable est trouvée.

[Ahuja et al. \[2005\]](#) proposent un modèle de flot multi-commodités pour résoudre le problème de planification des locomotives pour le transport de fret. Ils modélisent le problème sous forme d'un graphe espace-temps où les nœuds correspondent à des événements (départ/arrivée) et les arcs modélisent soit des trajets ou soit des connexions. Chaque type de locomotive correspond à une commodité. Des contraintes spécifiques aux parcs composé de locomotive et voiture comme le tonnage et la puissance de traction doivent être prises en compte. Le MIP est résolu grâce à une heuristique de recherche locale. Ce même modèle a été adapté et développé dans la thèse de [Marcos \[2006\]](#) pour planifier les locomotives en lien avec le transport de fret à la *Sncf*. Nous invitons le lecteur à se référer aussi aux articles [Lingaya et al. \[2002\]](#), [Cordeau et al. \[2001\]](#) et [Cordeau et al. \[2000\]](#) pour plus d'indications sur les problèmes de planification des locomotives et des voitures.

[Cadarso and Marín \[2011\]](#) proposent une formulation par flots pour résoudre le problème de planification du roulement matériel robuste. Dans ce papier, le terme robuste signifie la pénalisation des changements sur les configurations (coupes/accroches) et la pénalisation des trains non commerciaux. Les contraintes intégrant l'ordre des rames dans les configurations, les rebroussements et la maintenance des rames ne sont par ailleurs pas intégrées.

[Maroti and Kroon \[2007\]](#) résolvent la planification de la maintenance des rames et s'appuyant en entrée sur un roulement matériel. Ils cherchent à couvrir les maintenances urgentes des rames en faisant croiser des lignes de roulements. Le problème est modélisé sous forme d'un flot multi-commodités.

[Brucker et al. \[2003\]](#) s'intéressent à la résolution du problème de routage des voiture

sachant les trains à couvrir et leur composition ; le parc étant composé de locomotives et voitures. La planification des locomotives est effectuée dans une phase ultérieure. [Brucker et al. \[2003\]](#) modélisent le problème sous forme d'un flot entier multi-commodité avec une fonction objectif non linéaire. Une approche heuristique de recherche locale utilisant la méthode du recuit simulé est développée pour résoudre le problème.

[Ben-Khedher et al. \[1998\]](#) s'intéressent à ajuster la capacité d'emport sur les trains de l'EF TGV pour maximiser les profits. Ils se basent en entrée sur une prévision de la demande, calculée grâce à des techniques de *yield management* et connectée au système de réservation des billets. Le problème est modélisé sous forme d'un flot multi-commodité avec des contraintes supplémentaires et est résolu à l'aide du solveur *Cplex*. Le routage des rames est planifié grâce à un second module. Celui-ci est formulé comme un problème de partition résolu à l'aide d'un algorithme de génération des colonnes (problème de plus court chemin avec contraintes de ressource) intégré dans un algorithme de *branch-and-price*.

En somme, les modèles de flots intègrent les contraintes en lien avec **l'ordre des rames dans les configurations** uniquement dans le cas où un graphe de transition des configurations est fourni en entrée du problème. Ces problèmes sont par ailleurs très contraints en entrée et la maintenance des rames matérielles n'est pas intégrée. Les modèles proposés sont dans la majorité des cas résolus directement grâce à des solveurs commerciaux.

#### 3.3.2 Approches par chemins

On s'intéresse dans cette sous section aux modèles de la littérature se basant sur une modélisation par chemins. Dans ce cas de figure, certaines variables de décision correspondent à des chemins empruntés par les rames matérielles où chaque chemin est à une suite de trajets.

[Haahr et al. \[2014\]](#) étudient le problème d'optimisation du matériel roulant en cas de perturbations. Celui-ci diffère du cas nominal par les conditions initiales. Les rames

matérielles ne sont pas toutes disponibles au début de l’horizon d’étude et sont récupérées au fur et à mesure de l’arrivée des trains ayant un départ avant la perturbation. Le problème résolu prend en entrée une grille horaire ainsi qu’une estimation du nombre de voyageurs pour chaque train. Les trains de la grille sont définis sur une journée et les annulations des trains sont autorisées. Les instants de récupération des rames après la perturbation sont connus pour chaque site en entrée du problème. La solution est un roulement matériel optimisé selon les critères suivant : (i) minimisation du nombre de trains annulés, (ii) minimisation du nombre d’opérations de coupe et d’accroche (iii) minimisation du nombre de voyageurs non transportés/sans place assise (iv) priorisation des roulements matériels *cyclique* (v) minimisation des coûts liés à la production des trains. Le problème résolu par [Haahr et al. \[2014\]](#) intègre les spécificités suivantes. Toutes les rames sont compatibles entre elles, les configurations sont implicitement définies à partir de l’affectation des rames aux trains. La capacité du dépôt ainsi que le temps nécessaire de coupe et d’accroche sont données en entrée. En revanche, la maintenance et le rang des rames dans les configurations ne sont pas pris en compte. Les trains de la grille appartiennent à une même ligne et les compositions contiennent au maximum trois rames. Les auteurs font référence à [Desrosiers et al. \[1995\]](#) pour plus de précision sur la gestion de la maintenance.

[Haahr et al. \[2014\]](#) modélisent le problème sous forme d’un **MIP**. Les variables utilisées permettent de (i) identifier si un chemin  $p$  est choisi, (ii) identifier si un train  $t$  est couvert par une rame matérielle, (iii) capturer pour chaque type de matériel le surplus des rames en fin de la période d’étude dans chaque dépôt et (iv) capturer le surplus de voyageurs pour chaque train; les contraintes du **MIP** découlent naturellement avec ce jeu de variables. Le **MIP** est résolu grâce à un *branch & price* où le sous problème correspond au problème du plus court chemin. La solution entière est obtenue grâce à deux stratégies de branchement proposées.

Les travaux de [Haahr et al. \[2014\]](#) sont étendus dans [Lusby et al. \[2017\]](#) pour intégrer la maintenance des rames. Dans ce cas, le sous problème correspond au plus court chemin avec contraintes de ressources. Ils présentent des résultats sur des instances où les rames

ne doivent pas dépasser un certain nombre de kilomètres parcourus.

Peeters and Kroon [2008] résolvent un problème similaire à celui défini dans Fioole et al. [2006] et s'appuient aussi sur un graphe de transition des configurations. En revanche, il n'intègre pas les trains *bi-tranche*. Ils prennent en compte trois critères d'évaluation, à savoir le manque de places assises, le nombre de manœuvres (trains évolutions) et le nombre de kilomètres parcourus. Ils proposent une formulation par flot et une reformulation par chemins résolue grâce à un algorithme de *branch-and-price*.

Cacchiani et al. [2010b] proposent une formulation par flot où les nœuds du graphe correspondent à des trajets et les arcs représentent la possibilité d'enchaîner des trajets. Ils proposent ensuite une reformulation basée sur des chemins résolue par une méthode heuristique et s'appuyant sur une génération des colonnes. Ils parviennent à inclure les contraintes de la maintenance des rames. Lucas et al. [2018] proposent un modèle de flot similaire à celui décrit par Cacchiani et al. [2010b] pour adapter le roulement matériel en cas de demandes supplémentaire en rames sur certains trains. Une définition et une analyse des coûts de l'adaptation à travers des indicateurs sont proposées.

Giacco et al. [2014] proposent une formulation basée sur des circuits hamiltoniens. Ils incluent dans le MIP les contraintes de la maintenance des rames et minimisent le nombre de rames utilisés. En revanche, ils n'intègrent ni les compositions des trains ni la capacité du réseau ni le rang des rames dans les configurations. Le modèle proposé est résolu directement à l'aide du solveur CPLEX.

Les approches de modélisation par chemins ne sont pas répandues dans la littérature du fait de la difficulté d'intégrer les contraintes en lien avec la position des rames dans les configurations. En revanche, ces approches appréhendent aisément les contraintes en lien avec la maintenance des rames, elles sont adaptées aux méthodes de résolution basées sur la génération des colonnes.

### 3.3.3 Focus sur les modèles d'hyergraphe

On s'intéresse dans cette sous section au modèle proposé dans la thèse de Reuther [2017] basé sur les hypergraphes. À notre connaissance, ces travaux sont les seuls à modéliser microscopiquement<sup>2</sup> les contraintes opérationnelles. Le modèle développé a été publié pour la première fois dans Borndörfer et al. [2011] et ensuite étendu dans Borndörfer et al. [2012] et Borndörfer et al. [2015] pour intégrer la maintenance des rames et étendu une fois de plus dans Borndörfer et al. [2017] pour prendre en compte la re-planification du roulement matériel. À notre connaissance, ces travaux sont les seuls contributions à s'appuyer sur les hypergraphes. Le problème résolu par Borndörfer et al. [2015] prend en entrée une grille horaire définie sur une semaine et s'intéresse à résoudre le problème de planification du roulement matériel. Ils incluent la quasi-totalité des contraintes introduites dans la section 1.2.3 du premier chapitre et se distinguent par leur capacité à intégrer la maintenance des rames. La logistique du dépôt, contrainte spécifique à la SnCF, et la gestion opérationnelle des bi-tranches ne sont pas intégrées. La maintenance n'est gérée que pour les rames découplées. Ils imposent par ailleurs des séquencements de trains devant être couverts par un même sous-ensemble de rames, les compositions des trains peuvent changer sur un même séquencement. On distingue aussi dans le problème présenté par Borndörfer et al. [2015] d'autres contraintes spécifiques à la Deutsche Bahn Rail comme l'orientation des rames dans les configurations. Cette contrainte s'impose car les pantographes des rames d'une même configuration doivent être éloignés selon une distance bien précise, le pantographe des rames de la Deutsche Bahn Rail n'étant pas positionnés au milieu. D'autres contraintes présentées sont liées à la gestion des rames. Il est souhaitable d'étendre le caractère reproductible des grilles horaires définies sur une semaine au roulement matériel. Autrement dit, il est préférable de définir les mêmes séquencements des trajets planifiés sur des jours différents, les grilles horaires sont similaires d'un jour à l'autre.

L'hypergraphe proposé par Borndörfer et al. [2015] est défini par le triplet  $(V \cup S, A, H)$

---

2. Sont souvent distinguées dans la littérature du ferroviaire les modélisations microscopiques et macroscopiques

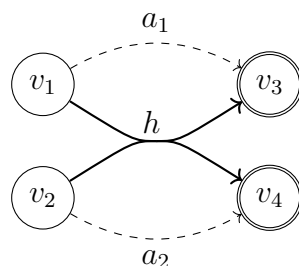


FIGURE 3.2 – Concept de modélisation utilisé dans Borndörfer et al. [2015]

où :  $V \cup S$  correspond à l'ensemble des nœuds,  $V$  étant l'ensemble des nœuds départs/arrivées et  $S$  l'ensemble des nœuds services où les opérations de maintenance sont effectuées.  $A$  correspond à l'ensemble des arcs et  $H$  correspond à l'ensemble des hyperarcs où chaque hyperarc  $h \in H$  est un sous-ensemble d'arcs de  $A$ . La figure 3.2 représente l'unique concept de modélisation utilisé pour définir l'hypergraphe. On considère un arc  $a_1$  représentant un trajet  $i$  couvert par une rame  $r_1$  et un arc  $a_2$  représentant le même trajet  $i$  mais couvert par une autre rame  $r_2$ .  $i$  est couvert par la configuration  $r_1 r_2$  implique une égalité entre la valeur des flots portés par  $a_1$  et  $a_2$ . Le flot porté par  $a_1$  et celui porté par  $a_2$  peuvent donc être représentés par une seule variable. Cette dernière représente à la fois le flot de  $v_1$  à  $v_3$  et le flot de  $v_2$  à  $v_4$ . Elle modélise donc le flot porté par l'hyperarc  $h = \{a_1, a_2\}$  de la figure 3.2, l'ensemble  $A$  des arcs permet de définir les hyperarcs de  $H$ . Il est à noter que ce concept de modélisation est totalement différent de celui utilisé dans la présente thèse et présenté dans le second chapitre en sous section 2.2.2.

Un nœud  $v \in V$  représente à la fois un départ ou une arrivée d'un train, une rame matérielle, une configuration, une position de la rame dans la configuration et une orientation de la rame. Les hyperarcs représentent soit une couverture d'un train, soit un enchaînement de trajets, induisant potentiellement des coupes/accroches de rames, ou soit une reproductibilité des séquencements des trajets d'un jour à l'autre.

Les contraintes de la maintenance des rames sont modélisés par une ressource fractionnaire définie pour chaque type de maintenance. Chaque ressource, représentée par une variable continue, est régénérée à chaque passage par un nœud service modélisant cette même ressource. Les ressources fractionnaires sont portées par les arcs appartenant à  $A$ .



Par conséquent, un multi-flot à valeur fractionnaire circule sur ces arcs. La valeur fractionnaire est positive lorsque l'hyperarc, incluant l'arc en question, est activé. Elle est réduite à chaque passage par un nœud appartenant à  $V$  et est nulle lorsque l'hyperarc n'est pas activé. Plus récemment, [Grimm et al. \[2019\]](#) proposent une reformulation sous forme de chemins des contraintes de flot fractionnaire en lien avec la maintenance. Un algorithme de génération dynamique des coupes est développé du fait du nombre exponentiel des contraintes introduites. Celui-ci permet d'écarter les chemins non réalisables.

La résolution du MIP, formulé à partir du modèle de flot sur hypergraphe, est présentée dans l'article [Borndörfer et al. \[2014\]](#). La relaxation linéaire du MIP est résolue par une génération des colonnes. L'approche de [Borndörfer et al. \[2014\]](#), décrite comme étant générique, s'applique sur les problèmes pouvant être modélisé sous différents niveaux de précision. Par exemple, pour le problème du roulement matériel, le premier niveau de description correspond à la description la plus fine du problème, le second niveau ne prend pas en compte l'orientation des rames, le troisième niveau ne prend pas en compte l'orientation et l'ordre des rames dans la composition. Le niveau le moins précis ne prend pas en compte les hyperarcs, problème équivalent à un flot de coût minimum. Formellement, des projections sont définies entre les niveaux les plus précis et les niveaux les moins précis. Ces différents problèmes déduits des différents niveaux de description sont utilisés dans une méthode de génération de colonne, où les contraintes du problème ayant le niveau de description le plus précis sont gardés dans le problème maître. Les problèmes avec des niveaux de précision moindre sont utilisés pour identifier les colonnes à introduire dans le problème maître. Cette décomposition en des problèmes avec différents niveaux de description est adaptée au problème décrit par [Borndörfer et al. \[2015\]](#). Le problème avec le niveau de précision moindre permet d'obtenir une bonne borne inférieure du coût d'utilisation des rames matérielles et les problèmes intermédiaires permettent d'obtenir dans certains cas des solutions réalisables du problème maître. La solution entière est obtenue grâce à une méthode heuristique basée sur un *rapid branching* (cf. [Borndörfer et al. \[2013\]](#)) et une recherche locale.

### 3.3.4 Approches heuristiques

On s'intéresse dans cette sous section aux articles de la littérature se focalisant sur des méthodes heuristiques de résolution et ne rentrant pas dans les catégories de modélisation susmentionnées.

[Thorlacius et al. \[2015\]](#) proposent une heuristique gloutonne pour résoudre le problème de planification du matériel roulant. Ils intègrent la quasi-totalité des contraintes présentées en section 1.2.3. La recherche d'une solution améliorante dans l'heuristique se fait à l'aide d'un problème de plus court chemin avec des contraintes supplémentaires pour prendre en compte la position des rames dans les configurations.

[Cacchiani et al. \[2012c\]](#) proposent une heuristique pour résoudre le problème d'affectation des rames aux trains. Ils calculent dans un premier temps une borne inférieure en résolvant un **PLNE** du problème considérant un sous-ensemble de trajets parallèles dans le temps (ex. Trajets couvrant des heures de pointes). Une heuristique constructive suivie d'une recherche locale sont développées afin de trouver une solution réalisable. Ces mêmes travaux ont été développés et publiés dans [Cacchiani et al. \[2019\]](#)

## Conclusion

La littérature du ferroviaire est riche, avec une grande variété d'approches. Les problèmes d'optimisation sont définis différemment de part la diversité des ressources ; on distingue des contraintes disparates pour une même catégorie de problèmes. L'optimisation du

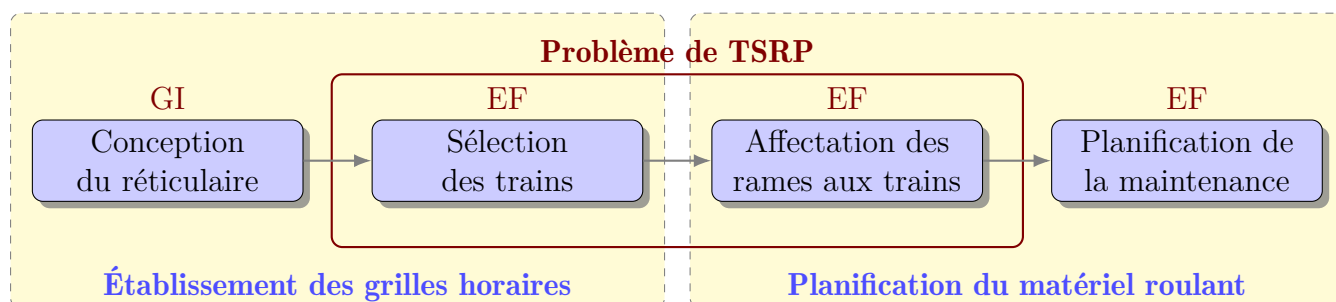


FIGURE 3.3 – Périmètre du problème de **TSRP** à la **SnCF**

matériel roulant diffère selon que l'on traite d'un parc composé de rames matérielles ou composé de locomotives et voitures. De plus, le mode de fonctionnement en Europe du ferroviaire impose que le gestionnaire de l'infrastructure **Sncf-Réseau** décide des minutes de départ et d'arrivée des trains en chaque gare. En France, ceci a engendré l'adoption par la **Sncf** d'un nouveau formalisme basé sur le graphe réticulaire. La figure 3.3 représente un découpage à la **Sncf** du problème d'établissement des grilles horaires et de planification du matériel roulant délimitant ainsi le périmètre du **TSRP**. Ce découpage selon **(GI)** et **(EF)** peut différer d'un pays à l'autre, l'ensemble des sous problèmes représentés sont traités par le **TER (EF)** sauf pour la conception du graphe réticulaire. De ces conclusions, on peut affirmer que le problème de **TSRP** auquel nous nous intéressons est un nouveau problème non traité auparavant dans la littérature. Le tableau 3.1 présente un bilan de la revue de la littérature.



# Chapitre 4

## Modélisation du problème

### Sommaire

---

4.1	Formalisation du problème . . . . .	69
4.1.1	Infrastructure et parc des rames matérielles . . . . .	69
4.1.2	Contraintes sur la sélection des trains . . . . .	71
4.1.3	Données des missions . . . . .	72
4.2	Formalisation de l'hypergraphe . . . . .	73
4.2.1	Ensemble des nœuds . . . . .	74
4.2.2	Ensemble des hyperarcs . . . . .	77
4.3	Formulation du programme mixte en nombres entiers . . . . .	84
4.4	Tests et résultats . . . . .	86

**Les travaux exposés dans ce chapitre sont résumés dans une section d'un article soumis au journal *Transportation science***

Benkirane, M., Clautiaux, F., Damay, J., and Detienne, B. (2019a). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. (Submitted)

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la formalisation et la modélisation du problème industriel défini dans le premier chapitre et synthétisé dans le tableau 1.1. Nous formalisons les données du problème en section 4.1. Nous proposons ensuite en section 4.2 une modélisation sous forme d'un hypergraphe. Puis, nous traduisons en section 4.3 le pro-

blème sous forme d'un **MIP** basé sur un flot sur hypergraphe. Enfin, nous présentons les résultats obtenus sur des instances réelles grâce à une résolution directe avec un solveur **MIP**.

## 4.1 Formalisation du problème

Rappelons que notre objectif est de résoudre de manière intégrée le problème de sélection des trains et d'optimisation du roulement matériel étant donné un **réticulaire**, une **demande d'offre** et des contraintes opérationnelles introduites par le problème de **planification des rames**. Le but est d'estimer et de minimiser les coûts liés à l'utilisation des rames et de minimiser des pénalités liées à la non-couverture de la **demande**. Les décisions à prendre dans notre problème concerne le choix des trains à couvrir, l'affectation des configurations aux trains et la manière de les enchaîner. Nous formalisons d'abord, en section 4.1.1, les données en lien avec l'infrastructure, à savoir les sillons et les trains définis à partir du réticulaire. Puis, nous formalisons les données du parc des rames. Nous introduisons ensuite en section 4.1.2 les contraintes régissant le **problème de sélection des trains**. Enfin, nous formalisons en section 4.1.3 la **demande d'offre** traduite sous forme de missions.

### 4.1.1 Infrastructure et parc des rames matérielles

- **Infrastructure**

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des gares. L'infrastructure ferroviaire permet de faire circuler des rames d'un point à un autre à des instants de temps précis de l'horizon de temps  $\mathcal{T} = \llbracket 0..T \rrbracket$ , où  $T$  est la longueur de l'horizon de temps.

**Définition 1** (sillon). Un *sillon*  $p$  est un  $n$ -uplet défini par  $(s_p^-, s_p^+, S_p)$ , où  $s_p^-, s_p^+ \in \mathcal{S}$  représentent respectivement les gares de départ et d'arrivée ;  $S_p \subset \mathcal{S}$  représente l'ensemble des dessertes intermédiaires.

Soit  $P$  l'ensemble des sillons. Nous rappelons qu'un sillon ne peut être réservé, par une entreprise ferroviaire, qu'à des horaires précis décrits dans le **réticulaire** par le gestionnaire de l'infrastructure. Un *train* correspond donc à un sillon assigné à des horaires de départ et d'arrivée. L'ensemble des *trains* est noté  $\mathcal{V}$ .

**Définition 2** (train). Un *train*  $i \in \mathcal{V}$  est un  $n$ -uplet  $(p_i, t_i^-, t_i^+)$ , où  $p_i \in P$  est un sillon,  $t_i^- \in \mathcal{T}$  et  $t_i^+ \in \mathcal{T}$  sont respectivement les horaires de départ et d'arrivée de  $i$ .

- **Parc des rames**

Nous nous intéressons à un parc de rames hétérogènes; soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des types de rames. Pour chaque  $r \in \mathcal{R}$ ,  $\psi(r)$  est le coût de  $r$  et  $\mu(r)$  est sa capacité d'emport.

Les rames sont localisées dans des dépôts reliés à des gares. Pour chaque  $s \in \mathcal{S}$ ,  $r \in \mathcal{R}$ , on note respectivement  $n_{r,s}^{\min}$  le nombre minimum de départs, couverts par des rames de type  $r$ , depuis  $s$  en début de l'horizon  $\mathcal{T}$ .  $n_{r,s}^{\max}$  est le nombre maximal de rames, de type  $r$ , pouvant retourner à la gare  $r$  en fin de l'horizon  $\mathcal{T}$  et  $n_{r,s}^t$  correspond au nombre minimal de rames de type  $r$  en maintenance au dépôt  $s$  à l'instant  $t$ . Rappelons que le nombre de rames débutant le service depuis chaque gare doit être égal au nombre de rames finissant le service dans cette même gare (**cyclicité des rames**).

Une configuration  $c$  correspond à une liste de type de rames. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des configurations valides composées de rames compatibles entre elles. L'indice de chaque élément de la liste des rames correspond au rang de la rame dans la configuration. Le premier élément correspond à la rame en queue et le dernier élément correspond à la rame en tête. Le nombre d'éléments de la liste est noté  $\text{len}(c)$ . Nous utilisons la notation  $c_1 + c_2$  lorsque les deux configurations  $c_1$  et  $c_2$  sont concaténées. Les rames individuelles sont considérées comme des configurations simples. Par abus de notations, on note  $\mu(c) = \sum_{r \in c} \mu(r)$  la capacité d'emport de la configuration  $c$ . Chaque opération de coupe (resp. accroche) entraîne un coût noté  $\delta^+$  et  $\delta^-$ .

Une configuration ne peut rester à quai au-delà d'un temps  $\tau_s$ ,  $s \in \mathcal{S}$ : les rames composant la configuration sont envoyées au dépôt après la durée  $\tau_s$ . Les configurations sont créées

à partir d'autres configurations en appliquant des opérations de coupes ou d'accroches. Les contraintes opérationnelles limitent le nombre d'opérations à une seule opération de coupe ou d'accroche sur les quais des gares. D'autres contraintes spécifiques à chaque gare peuvent également interdire de telles opérations. Une configuration ne peut être utilisée dans une gare donnée que si elle est déjà présente à cette gare, ou le stock de rames dans le dépôt de cette gare est suffisant pour créer la configuration ; les configurations sont notamment créées à partir d'unités de rames depuis les dépôts, et vice-versa.

#### 4.1.2 Contraintes sur la sélection des trains

Décider si un train  $i \in \mathcal{V}$  est couvert par une configuration ou non est la principale décision de notre problème. Un train ne peut être exploité que si une configuration lui est attribué sous certaines contraintes : la longueur de la configuration ne dépasse pas la longueur des quais des gares ; les voies et les types de propulsion doivent être compatibles avec les types de rames composant la configuration du train.

Le **réticulaire** définit des paires de trains mutuellement exclusifs. Pour chaque train  $i \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{V}$  représente l'ensemble des trains incompatibles/exclusifs avec  $i$  indépendamment de la configuration utilisée, *i.e.* si un train de  $\mathcal{E}_i$  est activé alors  $i$  ne peut pas être activé.

On note  $\mathcal{V}^+$  l'ensemble des paires de trains pouvant se coupler *i.e.* l'ensemble des **bi-tranches** en accroche ;  $\mathcal{V}^-$  est l'ensemble des paires de trains pouvant se découpler *i.e.* l'ensemble des **bi-tranches** en coupe.

Le coût d'exploitation d'un ou deux trains avec une ou deux configurations (cas **bi-tranches** en coupe/accroche) dépend de plusieurs facteurs. Pour simplifier, on note  $\beta((I_k, c_k)_k)$  le coût de couverture des trains de l'ensemble  $I_k$  avec leurs configurations respectives  $c_k$ .  $\beta$  est tel que  $\beta((I_k, c_k)_k) = +\infty$  dans le cas où l'association n'est pas possible. Cette notation est utilisée ci-après pour exprimer le coût dans notre modèle mathématique.



### 4.1.3 Données des missions

Nous nous intéressons dans cette sous-section la formalisation de la **demande**. La sélection des trains est soumise aux contraintes de demande des passagers provenant d'un besoin de couvrir un service public exprimé par les autorités organisatrices. La répartition des fréquences des trains et la capacité d'emport prévue doivent répondre aux exigences de cette demande ; elles sont exprimées sous forme de *missions*.

**Définition 3** (mission). Une *mission*  $m$  est un n-uplet  $(p_m, \nu_m^{\min}, \theta_m, [t_m^{\min}, t_m^{\max}])$  où  $p_m \in P$  est un sillon,  $[t_m^{\min}, t_m^{\max}]$  est un intervalle de temps,  $\nu_m^{\min} \in \mathbb{N}$  est la capacité minimale d'emport pour la mission  $m$  et  $\theta_m$  est une fonction déterminant le coût de non-couverture de la demande.

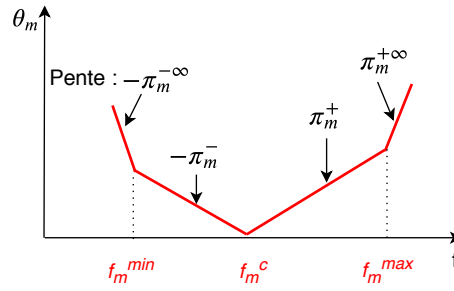
Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des missions. Comme les trains autorisés sont connus a priori à partir du réticulaire, on note  $\mathcal{V}_m, m \in \mathcal{M}$  l'ensemble des trains pouvant couvrir la mission  $m$  (ensemble calculé en entrée du problème). Un train  $i \in \mathcal{V}$  peut couvrir la mission  $m$  si  $p_i = p_m$  et  $t_i^+ \in [t_m^{\min}, t_m^{\max}]$ .

Une demande pour une mission est exprimée comme suit : dans l'intervalle  $[t_m^{\min}, t_m^{\max}]$ , le nombre de trains choisis de  $\mathcal{V}_m$  pour couvrir  $m$  doit être entre  $f_m^{\min}$  et  $f_m^{\max}$ . De plus, la somme des capacités d'emport des configurations utilisées pour couvrir ces trains doit être au minimum égale à  $\nu_m^{\min}$ .

Pour chaque mission  $m \in \mathcal{M}$ , la fonction linéaire par morceaux  $\theta_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  exprime la pénalité liée à la non-couverture de la fréquence cible  $f_m^c$  pour la mission  $m$ .

$$\theta_m(f) = \begin{cases} \pi_m^{+\infty}(f - f_m^{\max}) + \pi_m^+(f_m^{\max} - f_m^c) & \text{si } f \geq f_m^{\max} \\ \pi_m^+(f - f_m^c) & \text{si } f_m^c \leq f \leq f_m^{\max} \\ \pi_m^-(f_m^c - f) & \text{si } f_m^{\min} \leq f < f_m^c \\ \pi_m^{-\infty}(f_m^{\min} - f) + \pi_m^-(f_m^c - f_m^{\min}) & \text{si } f \leq f_m^{\min} \\ \text{avec } \pi_m^- < \pi_m^{-\infty} \text{ et } \pi_m^+ < \pi_m^{+\infty} \end{cases}$$

Où  $f_m^{\min} \in \mathbb{N}$ ,  $f_m^c \in \mathbb{N}$ ,  $f_m^{\max} \in \mathbb{N}$  sont respectivement les fréquences minimale et maximale

FIGURE 4.1 – Fonction  $\theta_m$ ,  $m \in \mathcal{M}$ 

critiques pour la mission  $m$ ,  $\pi_m^+ \in \mathbb{R}_+$  et  $\pi_m^- \in \mathbb{R}_+$  représentent respectivement le coût unitaire de déficit et de surplus de couverture de la demande, et  $\pi_m^{-\infty} \in \mathbb{R}_+$ ,  $\pi_m^{+\infty} \in \mathbb{R}_+$  représentent respectivement les coûts critiques de déficit et de surplus de couverture. Les premier et dernier cas se produisent respectivement lorsque la fréquence est supérieure à la fréquence maximale ou inférieure à la fréquence minimale autorisées ; dans les deux cas, un coût élevé est payé. Les deux cas intermédiaires correspondent respectivement à un surplus et à un déficit raisonnables de couverture de la demande. La figure 4.1 représente une telle fonction.

Comme mentionné dans le premier chapitre, dans certains cas et pour des raisons politiques, l'AO exige de couvrir certains trains spécifiques. Soit  $\mathcal{V}_f$  cet ensemble de trains.

Ayant formalisé les données du problème **TSRP**, nous nous intéressons dans la section suivante à sa modélisation.

## 4.2 Formalisation de l'hypergraphe

Comme montré dans [Borndörfer et al. \[2015\]](#), les modèles de flot sur les hypergraphes intègrent naturellement les contraintes en lien avec les compositions des trains et en lien avec les opérations de coupes et d'accroches des configurations. Ces contraintes sont respectées grâce à la loi de conservation des flots (cf section : 2.2.2). De plus, nous pouvons asso-

cier aux configurations un coût non proportionnel à celui d'une rame matérielle. De ces conclusions, nous optons dans la présente thèse pour une modélisation par flots sur des hypergraphes. Notre formulation diffère de celle présentée dans [Borndörfer et al. \[2015\]](#) pour plusieurs raisons. Les concepts de modélisation sont différents. Un hyperarc dans notre modèle représente un scindement ou une combinaison d'états modélisant une opération de coupe ou d'accroche sur les configurations, alors que dans le modèle de [Borndörfer et al. \[2015\]](#), un hyperarc modélise plusieurs arcs activés simultanément. Les figures 2.2 et 3.2 clarifient les particularités de chaque concept. De plus, une unité de flot dans notre modèle fait référence à une ou plusieurs rames matérielles formant éventuellement des configurations ; ce dernier point est expliqué dans la sous section 4.2.2 formalisant les hyperarcs.

Les nœuds dans notre hypergraphe correspondent à des états logiques dans un espace-temps et les hyperarcs correspondent à des opérations sur des rames matérielles (déplacements et/ou opérations de coupes/accroches).

Formellement, notre hypergraphe est défini par un couple d'ensembles  $(V, A)$  où  $V$  est l'ensemble des nœuds et  $A$  est l'ensemble des hyperarcs. Chaque hyperarc  $a \in A$  est défini par deux multi-ensembles :  $\mathcal{T}(a)$  est le multi-ensemble queue de  $a$  et  $\mathcal{H}(a)$  est le multi-ensemble tête, le coût d'un hyperarc  $a \in A$  est noté  $q(a)$  ; le lecteur peut se référer à la section 2.2 du second chapitre pour plus d'indications.

Nous développons dans la suite les ensembles  $V$  et  $A$  de l'hypergraphe et nous clôturons cette sous-section par un récapitulatif des caractéristiques de notre modèle.

### 4.2.1 Ensemble des nœuds

Un nœud est caractérisé par un tuple  $(s, t, c, \mathcal{I})$  où  $s \in \mathcal{S}$  est une gare,  $t \in \mathcal{T}$  est un instant du temps,  $c \in \mathcal{C}$  est une configuration et  $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$  est un ensemble de trains. En principe, un nœud correspond à un état représentant la configuration  $c$  dans la gare  $s$  à un instant  $t$  et représentant de plus des informations en lien avec la couverture des trains de  $\mathcal{I}$ . Pour

chaque train  $i \in \mathcal{V}$  et pour chaque configuration  $c \in \mathcal{C}$  pouvant couvrir  $i$ , deux *nœuds trains* sont créés :  $(s_i^-, t_i^-, c, \{i\})$  et  $(s_i^+, t_i^+, c', \{i\})$ , où  $c'$  est la configuration à l'arrivée du train  $i$  si  $i$  est couvert au départ par la configuration  $c$ . Le nœud  $(s_i^-, t_i^-, c, \{i\})$  est appelé *nœud départ* et le nœud  $(s_i^+, t_i^+, c', \{i\})$  est appelé *nœud arrivée*.

Pour chaque paire de trains  $\{i, j\} \in \mathcal{V}^+$  et pour chaque configuration  $c$  compatible à l'arrivée avec le **bi-tranche** en accroche  $\{i, j\}$ , un *nœud arrivée*  $(s_i^+, t_i^+, c, \{i, j\})$  est créé. De même, pour chaque paire de trains  $\{i, j\} \in \mathcal{V}^-$  et pour chaque configuration  $c$  compatible au départ avec le **bi-tranche** en coupe  $\{i, j\}$ , un *nœud départ*  $(s_i^-, t_i^-, c, \{i, j\})$  est créé. La figure 4.2 représente l'ensemble des *nœuds trains* dans un espace tridimensionnel ; les *nœuds départs* sont représentés par :  $\circ$  et les *nœuds arrivées* par :  $\odot$ . Chaque plan de la figure représente des nœuds partageant une même configuration de  $\mathcal{C}$ .

L'ensemble des nœuds  $V$  contient aussi des nœuds modélisant des attentes dans le dépôt. Pour ces nœuds spéciaux,  $\mathcal{I} = \emptyset$  et  $c = (r)$  où  $r \in \mathcal{R}$ . Ces nœuds sont appelés *nœuds dépôts* et sont caractérisés par des types de rames de  $\mathcal{R}$ . Un *nœud dépôt* est créé pour chaque élément de  $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \times \mathcal{R}$ . La figure 4.3 représente l'ensemble des *nœuds dépôts* dans un espace tridimensionnel ; les *nœuds dépôts* sont représentés par :  $\square$ . Chaque plan de la figure représente des nœuds partageant un même type de rame de  $\mathcal{R}$ . Ces nœuds servent à modéliser des attentes dans les dépôts et à combiner des unités de flot.

Enfin, deux nœuds  $\alpha = (\emptyset, -\infty, \emptyset, \emptyset)$  et  $\Omega = (\emptyset, +\infty, \emptyset, \emptyset)$  sont ajoutés à  $V$  pour représenter respectivement la source et le puits du réseau. L'algorithme 1 récapitule la génération de l'ensemble des nœuds.

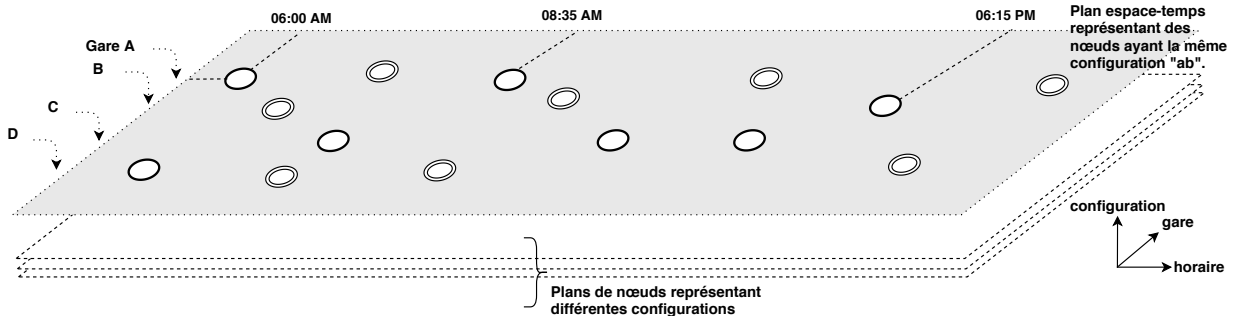


FIGURE 4.2 – Représentation des nœuds *trains* dans un espace tridimensionnel

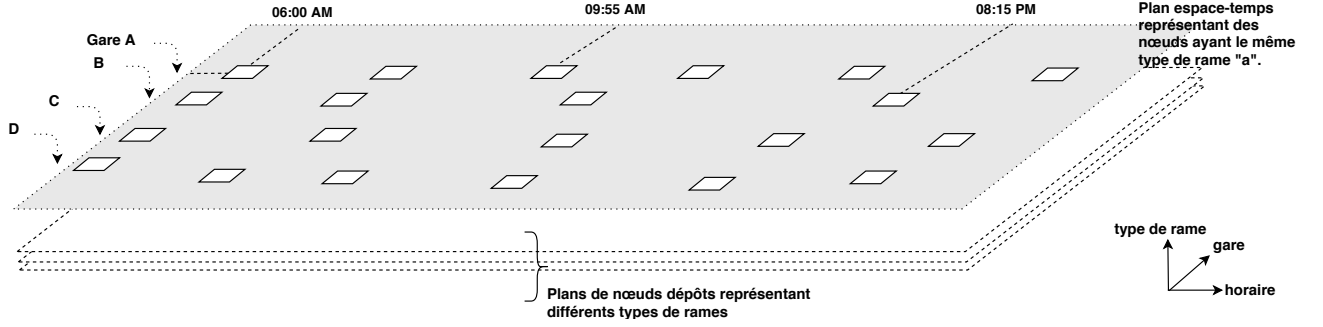


FIGURE 4.3 – Représentation des nœuds *dépôts* dans un espace tridimensionnel

---

**Algorithme 1 :** Génération de l'ensemble  $V$  des nœuds

---

```

1  $V \leftarrow \{\alpha, \Omega\}$  ; // Ajout des nœuds source et puits
2 for  $(i, c) \in \mathcal{V} \times \mathcal{C}$  do
3   if  $c$  est compatible avec  $i$  au départ then
4     //  $c'$  est la configuration à l'arrivée de  $i$ 
5     ajouter à  $V$  les nœuds  $\{(s_i^-, t_i^-, c, \{i\}), (s_i^+, t_i^+, c', \{i\})\}$ 
6 for  $(\{i, j\}, c) \in \mathcal{V}^+ \times \mathcal{C}$  do
7   if  $c$  est compatible avec  $\{i, j\}$  à l'arrivée then
8     ajouter à  $V$  le nœud  $(s_i^+, t_i^+, c, \{i, j\})$ 
9 for  $(\{i, j\}, c) \in \mathcal{V}^- \times \mathcal{C}$  do
10  if  $c$  est compatible avec  $\{i, j\}$  au départ then
11    ajouter à  $V$  le nœud  $(s_i^-, t_i^-, c, \{i, j\})$ 
12 for  $(s, t, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} \times \mathcal{R}$  do
13  ajouter à  $V$  le nœud  $(s, t, (r), \emptyset)$ 

```

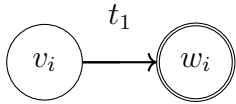
---

### 4.2.2 Ensemble des hyperarcs

Les hyperarcs représentent les décisions à prendre. On distingue trois types d'hyperarcs. Des **hyperarcs trains** représentant la possibilité de couvrir un train avec une configuration donnée, des **hyperarcs connexions** permettant d'assurer les enchaînements entre des trains et d'assurer les liens avec les dépôts et des **hyperarcs techniques** permettant d'assurer la conservation du flot de chaque type de rame dans les dépôts. Selon le nombre de rames utilisées dans les configurations, chaque hyperarc peut avoir un, deux ou trois éléments dans sa queue/tête. Tous les hyperarcs ont une capacité unitaire à l'exception des hyperarcs techniques, ils sont bornés par le nombre de rames matérielles disponibles.

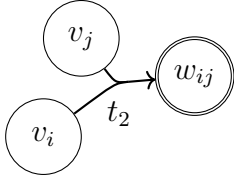
#### Hyperarcs trains

Les *hyperarcs trains* sont liés aux principales variables de décision modélisant la sélection des trains. Un *hyperarc train* peut représenter la couverture d'un train ou la couverture d'un **bi-tranche** en coupe ou en accroche. Les hyperarcs modélisant un unique train sont définis comme suit.

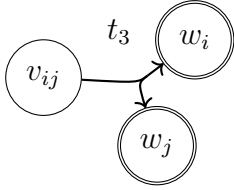


Pour chaque train  $i \in \mathcal{V}$  et pour chaque configuration  $c \in \mathcal{C}$  compatible avec  $i$ , un hyperarc  $a$  est créé tel que :  $\mathcal{T}(a) = \{v_i\}$ ,  $\mathcal{H}(a) = \{w_i\}$  où  $v_i = (s_{p_i}^-, t_i^-, c, \{i\})$ ,  $w_i = (s_{p_i}^+, t_i^+, c', \{i\})$  et  $c'$  est la configuration à l'arrivée dans le cas où  $i$  est couvert par la configuration  $c$  au départ (cf. Hyperarc  $t_1$ ). Il est à noter que  $c'$  est égale à  $c$  ou à son symétrique dans le cas où  $i$  passe par un nombre impair d'arrêts avec rebroussement ; les contraintes en lien avec les **rebroussements et la topologie de l'infrastructure** sont ainsi modélisés. Le coût  $q(a)$  pour ces hyperarcs est  $\beta(\{i, c\})$ .  $h_2$  et  $h_3$  de la figure 4.4 sont des représentations de ces hyperarcs. Le cas  $h_2$  modélise un rebroussement car la configuration est inversée à l'arrivée.

Les *hyperarcs trains* modélisant des **bi-tranches** permettent de couvrir des paires de trains  $\{i, j\}$  de  $\mathcal{V}^+ \cup \mathcal{V}^-$ .



Un hyperarc  $a$  est créé pour chaque  $\{i, j\} \in \mathcal{V}^+$  et pour chaque combinaison possible  $c'$  des configurations  $c_i$  et  $c_j$ .  $\mathcal{T}(a) = \{\{v_i, v_j\}\}$ ,  $\mathcal{H}(a) = \{\{w_{ij}\}\}$ , où  $v_i = (s_{p_i}^-, t_i^-, c_i, \{i\})$ ,  $v_j = (s_{p_j}^-, t_j^-, c_j, \{j\})$ , et  $w_{ij} = (s_{p_i}^+, t_i^+, c', \{i, j\})$  (cf. Hyperarc  $t_2$ ).  $h_4$  de la figure 4.4 est un exemple représentant ces hyperarcs.



De même, un hyperarc  $a$  est créé pour chaque paire de trains  $\{i, j\} \in \mathcal{V}^-$  et pour chaque combinaison possible  $c'$  des configurations  $c_i$  et  $c_j$ .  $\mathcal{T}(a) = \{\{v_{ij}\}\}$ ,  $\mathcal{H}(a) = \{\{w_i, w_j\}\}$ ,  $w_i = (s_{p_i}^+, t_i^+, c_i, \{i\})$ ,  $w_j = (s_{p_j}^+, t_j^+, c_j, \{j\})$ ,  $v_{ij} = (s_{p_i}^-, t_i^-, c', \{i, j\})$  (cf. Hyperarc  $t_3$ ).  $h_1$  de la figure 4.4 est un exemple représentant ces hyperarcs.

Dans ces deux derniers cas, la combinaison des  $c_i$  et  $c_j$  en  $c'$  est dite possible si les contraintes en lien avec la **gestion opérationnelle des bi-tranches** sont respectées. A savoir, dans le cas par exemple d'un **bi-tranche** en accroche, si  $i$  effectue un départ avec la configuration  $c_i$  et  $j$  effectue un départ avec  $c_j$  alors la configuration à l'arrivée du **bi-tranche** en accroche est  $c'$ . Le coût de ces hyperarcs est tel que :  $q(a) = \beta(\{i\}, c_i, \{j\}, c_j, \{i, j\}, c')$ . L'algorithme 2 résume la génération des *hyperarcs trains*.

---

**Algorithme 2** : Génération des *hyperarcs trains*


---

```

1 for  $(i, c) \in \mathcal{V} \times \mathcal{C}$  do
2   if  $c$  est compatible avec  $i$  then
3     générer un hyperarc train pour  $(i, c)$ 
4 for  $(\{i, j\}, c_i, c_j, c') \in \mathcal{V}^+ \cup \mathcal{V}^- \times \mathcal{C}^3$  do
5   if  $(c_i, c_j, c')$  est compatible avec  $\{i, j\}$  then
6     générer un hyperarc train pour  $(\{i, j\}, c_i, c_j, c')$ 

```

---

### Hyperarcs techniques

Les *hyperarcs techniques* prennent en compte les contraintes en lien avec la **logistique du dépôt** et en lien avec la taille du parc des rames matérielles. Pour chaque gare  $s$  de  $\mathcal{S}$  et pour chaque type de rame  $r \in \mathcal{R}$ , un hyperarc est créé pour connecter le premier dépôt

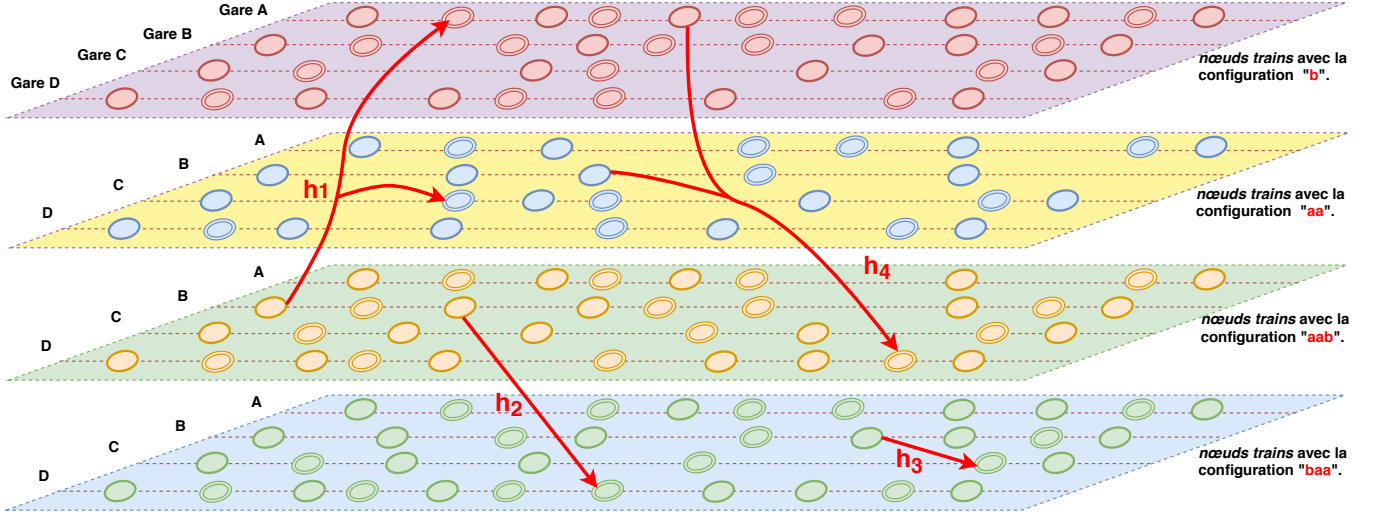


FIGURE 4.4 – Exemple d'hyperarcs trains

de  $s : (s, 0, (r), \emptyset)$  à  $\alpha$  (cf. Hyperarc  $h_\alpha$  de la fig. 4.5). Cet hyperarc est désigné dans la suite par  $a_{r,s}^\alpha$ , il permet de positionner les rames dans chaque dépôt au début de l'horizon de temps, son coût est celui de la rame  $r$  :  $\psi(r)$  (cf. 4.1.1).

De plus, pour chaque  $t = 0, \dots, T - 1$ , un hyperarc de coût nul connectant  $(s, t, (r), \emptyset)$  à  $(s, t + 1, (r), \emptyset)$  est créé. Cet hyperarc, noté  $a_{r,s}^t$ , modélise le fait que les rames de type  $r$  restent au dépôt  $s$  entre  $t$  et  $t + 1$  (cf. Hyperarc  $h_t$  de la fig. 4.5).

Enfin, pour chaque gare  $s$  de  $\mathcal{S}$  et pour chaque type de rame  $r \in \mathcal{R}$  un hyperarc de coût zéro est créé pour connecter le dernier *nœud dépôt*  $(s, T, (r), \emptyset)$  à  $\Omega$ . (cf. Hyperarc  $h_\Omega$  de la fig. 4.5). Cet hyperarc est noté dans la suite par :  $a_{r,s}^\Omega$ . Il permet de mesurer le nombre de rames de type  $r$  dans chaque gare  $s$  à la fin de l'horizon de temps.

L'algorithme 3 résume la génération des *hyperarcs techniques*.

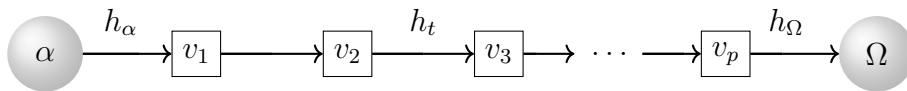


FIGURE 4.5 – Hyperarcs techniques pour une gare et un type de rame donnés



---

**Algorithme 3** : Génération des *hyperarcs techniques*

---

```

1 for  $(s, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{R}$  do
2   |   générer les hyperarcs  $(\alpha, \{(s, 0, (r), \emptyset)\})$  et  $(\{(s, T, (r), \emptyset)\}, \Omega)$ 
3   |   for  $t \in \llbracket 0, \dots, T - 1 \rrbracket$  do
4   |   |   générer l'hyperarc  $(\{(s, t, (r), \emptyset)\}, \{(s, t + 1, (r), \emptyset)\})$ 

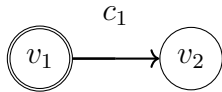
```

---

### Hyperarcs connexions

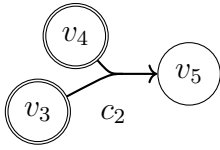
Les *hyperarcs connexions* sont utilisés pour connecter les rames aux dépôts ou pour enchaîner un ensemble de trains couverts par les mêmes rames. Les contraintes en lien avec **la logistique du dépôt, les évolutions, les coupes/accroches des rames, les rebroussements** et **la gestion des enchaînements** sont modélisées par ces hyperarcs. On agrège dans une unique fonction  $\gamma$  toutes ces contraintes techniques pour assurer les connexions. Une connexion est caractérisée par un couple  $(e_1, e_2)$  de multi-ensemble de  $V$ . La fonction  $\gamma$  prend comme paramètre  $(e_1, e_2)$ ; la valeur  $\gamma(e_1, e_2)$  est positive si la connexion est possible, elle est égale à  $+\infty$  sinon.

Pour chaque couple de multi-ensembles  $(e_1, e_2)$ , chacun de cardinalité un, deux ou trois, il existe un hyperarc  $a \in A$ ,  $\mathcal{H}(a) = e_1$  et  $\mathcal{T}(a) = e_2$  si et seulement si  $\gamma(e_1, e_2) < +\infty$ . Les hyperarcs que nous notons ci-dessous  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  et  $c_7$ , modélisent des connexions. On explicite ces hyperarcs où diverses contraintes techniques sont élucidées comme les évolutions, les coupes/accroches en gare, le temps minimum et maximum d'attente en gare, etc.

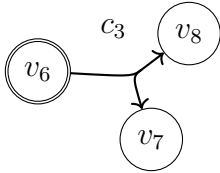


L'hyperarc  $c_1$  est tel que  $c_1 = (\{v_1\}, \{v_2\})$ . Cet hyperarc représente un enchaînement entre deux trajets couverts par les mêmes rames. La configuration du train en aval, représentée par  $v_2$ , est la même que celle du train en amont à une orientation près. L'hyperarc n'est créé

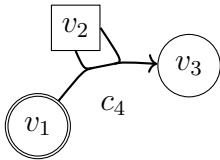
que si l'enchaînement entre les deux trains est réalisable. Les hyperarcs  $h_3$  et  $h_8$  de la figure 4.6 en sont des exemples;  $h_8$  modélise un rebroussement en gare  $D$ .



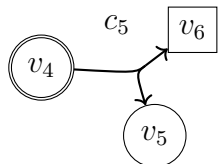
L'hyperarc  $c_2$  est tel que  $c_2 = (\{\{v_4, v_3\}\}, \{\{v_5\}\})$ . Cet hyperarc modélise une accroche en gare de deux configurations représentées par les nœuds arrivées  $v_4$  et  $v_3$ . La configuration résultat effectue un départ modélisé par le nœud  $v_5$ . L'hyperarc n'est créé que si l'accroche est possible et le temps minimum d'attente ainsi que les rebroussements sont respectés. L'hyperarc  $h_5$  de la figure 4.6 en est un exemple, une rame de type  $a$  est accrochée en queue de  $ab$  pour effectuer un départ (sans rebroussement) avec la configuration  $aab$ .



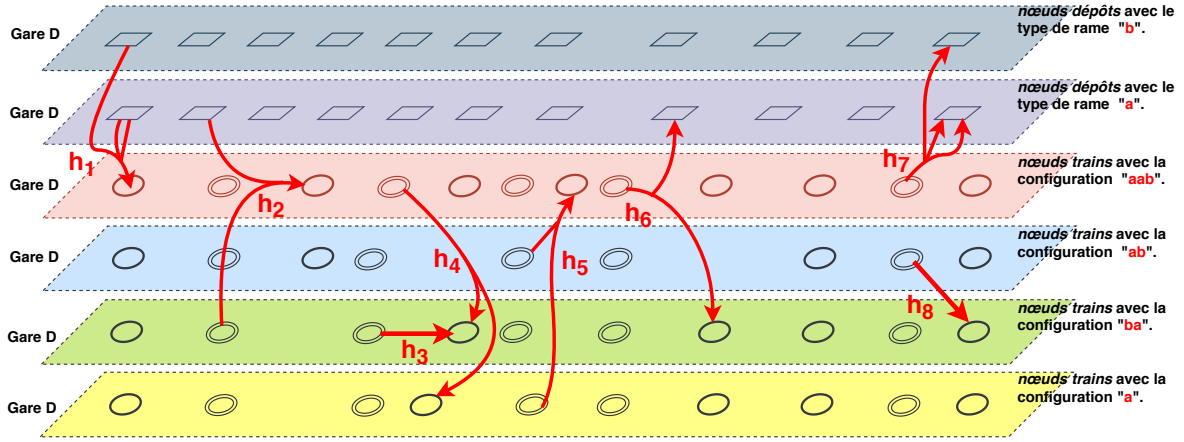
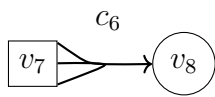
L'hyperarc  $c_3$  est tel que  $c_3 = (\{\{v_6\}\}, \{\{v_7, v_8\}\})$ . Cet hyperarc modélise une coupe de la configuration modélisée par le nœud arrivée  $v_6$ . Comme pour  $c_2$ , l'hyperarc  $c_3$  n'est créé que si les mêmes conditions sont respectées. L'hyperarc  $h_4$  de la figure 4.6 en est un exemple, dans ce cas, deux rebroussements sont modélisés pour effectuer respectivement un départ avec les configurations  $a$  et  $ba$ .



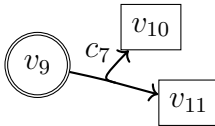
L'hyperarc  $c_4$  est tel que  $c_4 = (\{\{v_1, v_2, v_2\}\}, \{\{v_3\}\})$ . Cet hyperarc modélise une accroche en gare. Cette fois-ci, on modélise deux rames de même type provenant du nœud dépôt  $v_2$  et accrochés à la configuration modélisée par le nœud  $v_1$ . L'hyperarc n'est créé que si l'accroche des deux configurations et l'évolution sont possibles.  $h_2$  de la figure 4.6 en est un exemple, une rame de type  $a$  provenant du dépôt est accrochée en tête de la configuration  $ba$ ; un rebroussement est modélisé pour assurer un départ avec la configuration  $aab$ .



L'hyperarc  $c_5$  est tel que  $c_5 = (\{\{v_4\}\}, \{\{v_6, v_5\}\})$ . Cet hyperarc modélise une coupe de la configuration représentée par le nœud  $v_4$ , une rame est ensuite envoyée au dépôt (représenté par  $v_6$ ). L'autre partie de la configuration assure un départ modélisé par le nœud  $v_5$ . L'hyperarc  $h_6$  de la figure 4.6 en est un exemple, un rebroussement est modélisé pour effectuer un départ avec la configuration  $ba$ .


 FIGURE 4.6 – Exemples d'hyperarcs connexions en gare  $D$ 


L'hyperarc  $c_6$  est tel que  $c_6 = (\{v_7, v_7, v_7\}, \{v_8\})$ . Cet hyperarc modélise une combinaison en une configuration de trois rames de même type. Ces rames proviennent du nœud dépôt  $v_7$  pour assurer un départ modélisé par le nœud  $v_8$ . Une évolution est aussi modélisée par cet hyperarc.  $h_1$  de la figure 4.6 en est un exemple, dans ce cas deux rames de type  $a$  et une rame de type  $b$  sont combinées pour former la configuration  $aab$ .



L'hyperarc  $c_7$  est tel que  $c_7 = (\{v_9\}, \{v_{10}, v_{11}\})$ . Cet hyperarc modélise un envoi de la configuration modélisé par le nœud  $v_9$  vers le dépôt modélisé par les nœuds  $v_{10}$  et  $v_{11}$ . La configuration de  $v_9$  est constituée de deux types de rames différents, d'où le multi-ensemble  $\{v_{10}, v_{11}\}$ .  $h_7$  de la figure 4.6 en est un exemple.

**Remarque 3.** Chaque branche d'un *hyperarc connexion* liant un *nœud dépôt* ( $\square$ ) correspond à une unité de rame matérielle, elle modélise une évolution. Les branches connectant des *nœuds départs/arrivées* ( $\circ/\odot$ ) correspondent à des configurations.

Les *hyperarcs connexions* modélisent au maximum une opération de coupe ou d'accroche et modélisent des configurations de taille au maximum trois. Ils sont générés uniquement lorsque les *nœuds départs/arrivées*, des multi-ensembles tête et queue, sont espacés dans le temps d'au maximum  $\tau_s$ . Ceci modélise le fait que les rames ne doivent pas rester

en gare (le long des quais) plus de  $\tau_s$  unités de temps. La figure 4.7 représente des régions délimitant des nœuds où les *hyperarcs connexions* sont créés. Dans notre modèle, au-delà de  $\tau_s$ , les configurations sont éclatées en des unités de flots et combinées dans les nœuds dépôts. Pour un instant  $t \in \mathcal{T}$ , on note  $V_{t,t+\tau_s}$  l'ensemble des nœuds pouvant être connectés par des *hyperarcs connexions*. L'algorithme 4 récapitule les hyperarcs générés.

---

**Algorithme 4** : Génération des *hyperarcs connexions*


---

```

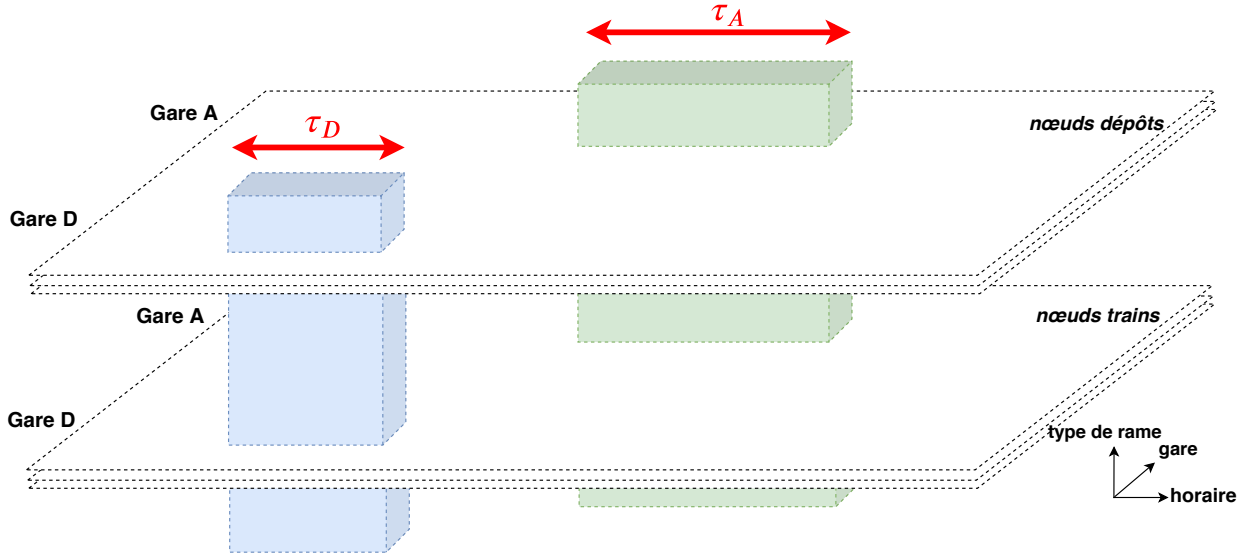
1 for  $s \in \mathcal{S}$  do
2   for  $t \in \mathcal{T}$  do
3     // Pour chaque intervalle  $\tau_s$  glissant
4     for  $e_1, e_2$  multi-ensembles de  $V_{t,t+\tau_s}$  do
5       if  $\gamma(e_1, e_2) < +\infty$  then
6         générer l'hyperarc connexion  $(e_1, e_2)$ 

```

---

**Remarque 4.** Les prétraitements suivants sont appliqués afin de réduire la taille de l'hypergraphe généré. Les *nœuds arrivées* représentant des trains avec les mêmes caractéristiques à l'arrivée, à savoir l'heure d'arrivée et l'entrée en gare, et représentant les mêmes configurations sont fusionnés. De plus, si un nœud a un unique hyperarc prédécesseur et un unique hyperarc successeur, alors ce nœud est retiré de l'hypergraphe et les deux hyperarcs liant ce même nœud sont fusionnés en un seul hyperarc.

Enfin, nous soulignons ci-après les caractéristiques de notre modèle d'hypergraphe. L'introduction des intervalles de temps glissant  $\tau$  permettent de suivre localement, dans l'espace et dans le temps, les opérations de coupes et accroches opérées sur les configurations. La taille de l'hypergraphe généré dépend de la taille de cet intervalle  $\tau$ . De plus, l'utilisation du formalisme d'hyperarc introduit dans 2.2 permet d'appréhender facilement des contraintes opérationnelles. Enfin, nous agrégeons également des *nœuds arrivées* pour des trains ayant les mêmes caractéristiques à l'arrivée afin de réduire la combinatoire.


 FIGURE 4.7 – Intervalles temporels glissants  $\tau$ 

Nous nous intéressons dans la section suivante à la formulation du problème de **TSRP** sous forme d'un **MIP** en se basant sur un modèle de flot sur hypergraphe (cf Section 2.2.2 du second chapitre).

### 4.3 Formulation du programme mixte en nombres entiers

Nous modélisons le problème sous forme d'un flot dans un hypergraphe avec des contraintes additionnelles. Soit donc  $(V, A)$  un hypergraphe tel que défini en section 4.2. Pour tout train  $i \in \mathcal{V}$ , on note  $\mathcal{A}(i) \subset A$  le sous ensemble d'hyperarcs en lien avec la couverture du train  $i$ ; un hyperarc  $a \in \mathcal{A}(i)$  représente l'unique train  $i$  ou une paire de trains incluant  $i$  et appartenant à  $\mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+$ . Pour tout  $i \in \mathcal{V}$ ,  $a \in \mathcal{A}(i)$ , la valeur  $\mathcal{N}(a, i) = \mu(c)$  correspond au nombre de places assises représentées par la configuration modélisée par  $a$ ,  $c$  est la configuration liée à la couverture du train  $i$  dans sa totalité.

On associe à chaque hyperarc  $a \in A$  une variable entière, notée  $z_a$ , représentant le flot sur l'hyperarc  $a$ . Pour  $v \in V$ , on note respectivement  $\Gamma^+(v)$  et  $\Gamma^-(v)$  les multi-ensembles des hyperarcs entrant et sortant du nœud  $v$ . Pour chaque mission  $m \in \mathcal{M}$ , on définit les variables continues  $y_m^-, y_m^+, y_m^{-\infty}$  et  $y_m^{+\infty}$  tel que  $(y_m^- + y_m^{-\infty})$  représente le nombre de

### 4.3. FORMULATION DU PROGRAMME MIXTE EN NOMBRES ENTIERS

fréquences non couvertes et  $(y_m^+ + y_m^{+\infty})$  représente le surplus de couverture en fréquences pour la mission  $m$ . La formulation en **MIP** du problème de **TSRP** est comme suit :

$$(\mathbf{TSRP}) : \min \gamma(z, y) = \sum_{a \in A} q(a)z_a + \sum_{m \in \mathcal{M}} (\pi_m^+ y_m^+ + \pi_m^{+\infty} y_m^{+\infty} + \pi_m^- y_m^- + \pi_m^{-\infty} y_m^{-\infty}) \quad (4.1)$$

$$\sum_{a \in \Gamma^+(v)} z_a = \sum_{a \in \Gamma^-(v)} z_a \quad \forall v \in V \setminus \{\alpha\}, \{\Omega\} \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_m} \sum_{a \in \mathcal{A}(i)} z_a + y_m^- + y_m^{-\infty} - y_m^+ - y_m^{+\infty} = f_m^c \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (4.3)$$

$$y_m^+ \leq f_m^{\max} - f_m^c \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (4.4)$$

$$y_m^- \leq f_m^c - f_m^{\min} \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (4.5)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(i)} z_a = 1 \quad \forall i \in \mathcal{V}_f \quad (4.6)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{V}_m} \sum_{a \in \mathcal{A}(i)} \mathcal{N}(a, i) z_a \geq \nu_m^{\min} \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (4.7)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(i)} z_a \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (4.8)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}(i) \cup \mathcal{A}(j)} z_a \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathcal{E}_i \quad (4.9)$$

$$z_{a_{r,s}^\alpha} = z_{a_{r,s}^\Omega} \quad \forall r \in \mathcal{R}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.10)$$

$$n_{r,s}^{\min} \leq z_{a_{r,s}^\alpha} \leq n_{r,s}^{\max} \quad \forall r \in \mathcal{R}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (4.11)$$

$$n_{r,s}^t \leq z_{a_{r,s}^t} \quad \forall (r, s, t) \in \mathcal{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{T} \quad (4.12)$$

$$y_m^+, y_m^-, y_m^{+\infty}, y_m^{-\infty} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (4.13)$$

$$z_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in \cup_{i \in \mathcal{V}} \mathcal{A}(i) \quad (4.14)$$

$$z_a \in \mathbb{N} \quad \forall a \in A \setminus \cup_{i \in \mathcal{V}} \mathcal{A}(i) \quad (4.15)$$

La fonction objectif (4.1) minimise (i) le coût de production et (ii) le coût de la pénalité liée à la non couverture de la demande souhaitée en fréquences (voir figure 4.1). Les contraintes (4.2) représentent la conservation du flot qui assure la faisabilité des enchaînements de matériel. Les contraintes (4.3) expriment la couverture de la demande.

Pour  $m \in \mathcal{M}$  la valeur  $(y_m^- + y_m^{-\infty})$  est le nombre de trajets non couverts et la valeur  $(y_m^+ + y_m^{+\infty})$  est le surplus de couverture en trajets. Les contraintes (4.6) imposent l'activation d'un hyperarc parmi un ensemble d'hyperarcs liés à la couverture d'un train  $i$  de  $\mathcal{V}_f$ . Les contraintes (4.7) assurent la disponibilité d'un nombre minimal de places assises pour chaque mission. Les contraintes (4.4) et (4.5) permettent de majorer la valeur de  $(y_m^-)$  et de  $(y_m^+)$ . Les contraintes (4.8) assurent qu'à maximum un hyperarc peut être activé depuis un ensemble d'hyperarcs représentant un même train. Les contraintes (4.9) évitent l'activation de deux hyperarcs représentant deux trains exclusifs. Les contraintes (4.10) représentent la contrainte de cyclicité *i.e* le nombre de rames débutant le service en chaque gare  $s$  est égal au nombre de rames terminant le service dans la même gare  $s$ . Les contraintes (4.11) imposent à ce que le nombre de rames, pour chaque type, commençant le service en gare  $s$  soit entre  $n_{r,s}^{\max}$  et  $n_{r,s}^{\min}$ . Les contraintes (4.12) imposent pour chaque type  $r \in \mathcal{R}$  un nombre minimal de rames en maintenance au pas de temps  $t$ .

La solution correspond à un flot sur un hypergraphe, nous générons par la suite les chemins résultant de ce flot. Chaque chemin correspond à une succession de trains et d'arrêts dans les dépôts couverts par la même rame.

**Remarque 5.** Une relaxation du problème consiste à ne pas prendre en compte le rang des rames dans les configurations. Dans ce cas, une configuration  $c$  de  $\mathcal{C}$  est définie par un multi-ensemble de  $\mathcal{R}$ . Les contraintes en lien avec la **gestion opérationnelle des bi-tranches** et en lien avec les **rebroussements** sont relâchées. Le cardinal de l'ensemble des configuration  $\mathcal{C}$  est réduit d'où la réduction de la taille de l'hypergraphe.

En pratique, cette relaxation donne dans certains cas des solutions réalisables au problème de **TSRP** initial et permet de calculer une bonne estimation de la taille du parc des rames.

## 4.4 Tests et résultats

Nous présentons ici les résultats expérimentaux obtenus pour des données de taille réelle afin d'évaluer notre formulation. Nous avons utilisé un processeur Haswell Intel Xeon E5-

2680 à 2,5 Ghz et une RAM de 128Go. Les **MIPs** sont résolus en utilisant le solveur IBM Ilog Cplex 12.6.

Les instances sont regroupées par taille de l'ensemble des trains, de l'ensemble des missions, de l'ensemble des types de rames et de l'ensemble des configurations. Nous nous intéressons aussi au paramètre  $\tau_s, s \in \mathcal{S}$  qui représente la durée maximale de stationnement des rames à quai. Ce dernier paramètre influe sur la taille de l'hypergraphe. Nous rappelons que les unités de flot sont fusionnés dans les *nœuds dépôts* et modélisent des évolutions. Le paramètre  $\tau_s$  vaut une heure pour des instances comprenant de grandes gares avec plusieurs départs et arrivées contre deux heures pour les gares moins importantes avec un nombre restreint de trajets. L'étude s'étend sur une durée de 24 heures pour toutes les instances ( $T = 24$ ). La taille de  $\mathcal{R}$  ne dépasse pas trois. Ce choix est dû au fait que les types de rames sont répartis selon des zones géographiques du réseau ferré. Certains trains sont très demandés, nous autorisons ainsi des configurations de trains comportant jusqu'à trois rames. Ces configurations sont pénalisées dans la fonction objectif : elles ne sont pas souhaitées car difficilement gérables à l'opérationnel ; la fraction du coût de ces configurations sur la pénalité  $\pi_m^-$  lié à la non-couverture de la demande est égale à 0.7 (cf Section 4.3). Le paramètre **%MU3** représente la part de ces configuration dans  $\mathcal{C}$ . Le tableau 4.1 regroupe les instances testées. Nous générons pour chaque instance des variantes en changeant les paramètres  $\mathcal{R}, \mathcal{C}$  et  $\tau$ . Ces variantes sont définies dans la colonne *Data*. La colonne *TP* représente le nombre de sillons et  $\tau = \max_{s \in \mathcal{S}}(\tau_s)$  est exprimé en minutes.

Le tableau 4.2 regroupe les résultats du modèle **TSRP** (MIP : (4.1)-(4.15)) obtenus en utilisant un solveur MIP. Les colonnes **#Ctrs** et **#Vars** regroupent respectivement le nombre de contraintes et de variables du modèle. La colonne **CPU1** représente le temps en seconde nécessaire pour résoudre le **TSRP** et **%CPU Build** représente la part de temps nécessaire à la génération de l'hypergraphe. Les colonnes **Opt** et **LP** contiennent respectivement l'optimum et la valeur de la relaxation linéaire du problème. **Gap(LP, Opt)** correspond l'écart entre la valeur de la relaxation linéaire *LP* et la valeur optimale *LP*,



TABLE 4.1 – Caractéristiques des instances

Instance	Data	TP	$ \mathcal{V} $	$ \mathcal{V}^+  +  \mathcal{V}^- $	$\tau$	$ \mathcal{M} $	$ \mathcal{R} $	$ \mathcal{C} $	%MU3
I1	D1	30	426	0	50	63	2	14	57
	D2	30	426	0	50	63	3	47	70
I2	D3	31	620	0	50	175	2	14	57
	D4	31	620	0	50	175	3	47	70
I3	D5	40	576	118	50	93	2	14	57
	D6	40	576	118	70	93	2	14	57
	D7	40	576	118	50	93	3	47	70
I4	D8	44	644	152	30	129	2	14	57
	D9	44	644	152	70	129	2	14	57
	D10	44	644	152	70	129	3	47	70
I5	D11	24	480	0	70	64	2	22	64
	D12	24	480	0	70	64	3	47	70
I6	D13	23	287	0	60	107	2	22	64
	D14	23	287	0	90	107	2	22	64
	D15	23	287	0	90	107	3	47	70
I7	D16	10	200	0	120	60	2	14	57
	D17	10	200	0	120	60	3	47	70
I8	D18	86	1462	0	50	120	3	47	70
	D19	86	1462	0	50	120	3	9	33
	D20	86	1462	0	50	120	3	6	0

TABLE 4.2 – Résolution directe du modèle **TSRP**

Instance	Data	#Ctrs	#Vars	CPU1	%CPU Build	Gap(LP, Opt)
I1	D1	13211	139255	924	0,54	4,57
	D2	38814	530663	12161	0,62	4,38
I2	D3	19175	463959	29361	0,17	5,31
	D4	44655	1190217	79316	0,41	5,32
I3	D5	17557	196889	1024	0,98	42,58
	D6	17557	310065	3787	0,61	42,71
	D7	52088	733240	15939	0,80	42,58
I4	D8	19759	114598	821	0,49	1,51
	D9	19759	387908	3968	0,91	1,49
	D10	58795	1518731	112967	0,47	1,50
I5	D11	20904	846961	425	39,06	2,03
	D12	43204	2102872	2984	34,01	6,73
I6	D13	10178	145421	80	7,50	13,23
	D14	10178	247017	200	8,00	13,06
	D15	22214	690238	2284	4,90	9,64
I7	D16	4648	80661	9	22,22	4,63
	D17	19888	729407	621	24,32	0,98
I8	D18	70309	2245103	3474	36,87	0,45
	D19	22501	426573	1165	4,12	0,65
	D20	16633	168505	540	1,48	0,65

$$\mathbf{Gap}(\mathbf{LP}, \mathbf{Opt}) = 100 * \frac{|LP - Opt|}{|Opt|}.$$

Bien qu'il ait des modèles avec jusqu'à 2 000 000 de variables, la bonne relaxation linéaire permet une résolution rapide. Les solutions sont optimales pour une tolérance de  $10^{-4}$  (valeur par défaut du solveur). La résolution la plus longue en temps a pris 32 heures, 15 instances parmi les 20 ont été résolues en moins d'une heure. Le temps de génération des hypergraphes est assez petit sauf pour les instances I7 et I5.

## Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre, dans sa première partie, à la formalisation des données du problème de **TSRP**. Nous avons notamment introduit une modélisation originale de la **demande** sous forme de missions. En seconde partie de ce chapitre, nous avons présenté une modélisation du problème sous forme d'un hypergraphe où une unité de flot dans le modèle fait référence à une rame ou à une configuration. L'hypergraphe proposé intègre naturellement les contraintes de coupe/accroche des configuration et se prête à intégrer les contraintes en lien avec la **la logistique du dépôt**. En dernière partie de ce chapitre, nous avons proposé une formulation sous forme d'un **MIP** du problème industriel et avons testé le modèle sur des instances réelles à l'aide d'un solveur **MIP**. Le tableau 4.3 synthétise la modélisation du problème de **TSRP**.

TABLE 4.3 – Synthèse de modélisation

<b>Problème de TSRP</b>			
Sous problèmes	Contraintes	Formalisation des données	Modélisation
Problème de sélection des trains	• Fréquences des missions	Ensemble $\mathcal{M}$ Fct convexe $\theta_m$	MIP : Ctrs 4.3, 4.4, 4.5
	• Capacité d'emport	Entiers $\nu_m^{\min}$	MIP : Ctr 4.7
	• Possibilité des bi-tranches	Ensembles $\mathcal{V}^+$ et $\mathcal{V}^-$	—————
	• Trajets spécifiques requis	Ensemble $\mathcal{V}_f$	MIP : Ctr 4.6
	• Trajets possibles	Ensemble $\mathcal{V}$	—————
	• Exclusions entre trajets	Ensemble $\mathcal{E}_i$	MIP : Ctr 4.9
Planification du roulement matériel	• Cyclicité des rames	—————	MIP : Ctr 4.10
	• Parcage des rames	Entiers $n_{r,s}^{\min}$	MIP : Ctr 4.11
	• Gestion des enchaînements	—————	Hyperarcs connexions
	• Coût de production	Coût $q(a)$ des hyperarcs $a$ de $A$	Valeur $\sum_{a \in A} q(a)z_a$ de la fct obj 4.1
	• Rang des rames dans les configurations	Ensemble $\mathcal{C}$	Hyperarcs connexions Hyperarcs trains
	• Gestion opérationnelle des bi-tranches	—————	Hyperarcs trains
	• Rebroussements et topologie de l'infrastructure	—————	Hyperarcs connexions
	• Gestion opérationnelle des coupes/ accroches	—————	Hyperarcs connexions Hyperarcs trains
	• Trajets pour des évolutions	—————	Hyperarcs connexions
Logistique du dépôt	• Capacité du dépôt	Entiers $n_{r,s}^{\max}$	Hyperarcs techniques MIP : Ctr 4.11
	• Créneaux pour des maintenances	Entiers $n_{r,s}^t$	Hyperarcs techniques MIP : Ctr 4.12

# Chapitre 5

## Un algorithme pour résoudre le modèle TSRP

### Sommaire

---

5.1	Préambule . . . . .	93
5.2	Relaxation du problème TSRP . . . . .	94
5.2.1	Définition . . . . .	94
5.2.2	Algorithme itératif de résolution . . . . .	101
5.2.3	Filtrage sur les coûts réduits . . . . .	101
5.3	Tests et résultats . . . . .	103

---

**Les travaux exposés dans ce chapitre sont résumés dans une section d’un article soumis au journal *Transportation science***

Benkirane, M., Clautiaux, F., Damay, J., and Detienne, B. (2019a). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. (Submitted)

Ce chapitre expose l’approche de résolution développée ainsi que les résultats obtenus grâce à celle-ci sur des instances réelles du problème de **TSRP**. Nous présentons en section **5.1** le contexte ainsi que le schéma global de résolution. Nous exposons ensuite en section **5.2** une relaxation du modèle **TSRP** formulée à partir d’une agrégation, nous développons par la suite un algorithme de résolution basé sur cette relaxation et sur filtrage. Enfin, nous

présentons en section 5.3 les tests comparant les performances de l’algorithme développé à celles d’une résolution directe.

## 5.1 Préambule

Les premiers tests ont montré que le modèle (4.1)–(4.15) peut être résolu efficacement pour des données de taille réelle en ne considérant qu’un seul type de rame. Cependant, prendre en compte tous les types, typiquement trois types de rames, dans le modèle réel augmente considérablement le temps de calcul.

Notre méthode de résolution repose sur une relaxation du problème que nous affinons par la suite pour prendre en considération le problème initial dans sa totalité. Nous y considérons un nombre réduit de types de rames matérielles. Le but est à la fois d’éliminer un grand nombre d’hyperarcs en utilisant un filtrage sur les coûts réduits et de pouvoir utiliser cette même relaxation dans une méthode heuristique pour trouver une solution réalisable. Cette relaxation est obtenue grâce à une agrégation des paramètres du problème (ensembles  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{C}$ ) et du modèle d’hypergraphe.

Notre agrégation comporte des similarités avec celle utilisée dans [Borndörfer et al. \[2014\]](#). Les auteurs utilisent simultanément trois niveaux de précision pour décrire le problème. Ces niveaux de description peuvent être vus comme des agrégations. Le lecteur peut se référer à la section 3.3.3 du chapitre *Revue de la littérature* pour plus d’indications.

Nous nous inspirons de la même idée. Nous remarquons aussi que la résolution directe du problème initial est prohibitive et que cette dernière ne sera pas très affectée si nous retirons quelques contraintes. La différence entre notre problème et celui de [Borndörfer et al. \[2015\]](#) est due au fait qu’une relaxation similaire à celle dans [Borndörfer et al. \[2014\]](#) garderait notre problème NP difficile car elle donne lieu à un problème de flot de coût minimal dans un hypergraphe avec des contraintes additionnelles de couverture de la demande ; nous résolvons à la fois un problème de sélection des trains et d’optimisation de la rotation des rames matérielles. Aussi, nous ne considérons pas les contraintes de maintenance ce qui débouche sur un problème plus facile même en prenant en compte les

hyperarcs. Ceci a motivé une agrégation différente de celle dans [Borndörfer et al. \[2015\]](#). Nous résolvons à l'aide d'un solveur MIP un problème simplifié où tous les types de rames considérés sont équivalents. Nous nous en servons ensuite pour éliminer plusieurs variables et pour obtenir une première solution réalisable. Les deux techniques sont utilisées pour accélérer la résolution du problème initial.

## 5.2 Relaxation du problème TSRP

### 5.2.1 Définition

La relaxation de notre problème est définie à partir d'une agrégation de l'ensemble des types de rames  $\mathcal{R}$ . De cette agrégation découlent une agrégation de l'ensemble des configurations  $\mathcal{C}$ , puis une agrégation de l'ensemble des nœuds  $V$  et enfin une agrégation de l'ensemble des hyperarcs  $A$ . Dans le modèle relâché, chaque agrégat de nœuds ou d'hyperarcs est désigné par un unique élément représentatif de l'agrégat. On formalise dans la suite les étapes de l'agrégation, la figure 5.1 récapitule celles-ci.

Soit  $\mathcal{P} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{|\mathcal{P}|}\}$  une partition de l'ensemble  $\mathcal{R}$ . Pour chaque type de rame  $r_1 \in \mathcal{R}$ , on note sa partie – ou *agrégat* – par  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^r(r_1) = \mathcal{R}_i$  où  $r_1 \in \mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_i \in \mathcal{P}$ .

- **Configurations.** L'agrégat d'une configuration est l'ensemble des configurations constituées de types de rames de même agrégats. Formellement, l'agrégat de  $c = (r_i)_{i \in [1, \text{len}(c)]} \in \mathcal{C}$  est  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^c(c) = \{(r'_i)_{i \in [1, \text{len}(c)]} \in \mathcal{C} : (\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^r(r_i))_i = (\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^r(r'_i))_i\}$ .
- **Nœuds.** L'agrégat d'un nœud  $u$  (avec  $u = (s, t, c, \mathcal{I}) \in V$ ) est constitué de nœuds partageant les mêmes caractéristiques que  $u$  sauf pour la configuration  $c$ . Les configurations, des nœuds d'un même agrégat, doivent partager le même agrégat de configurations. Formellement :  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^v(u) = \{(s, t, c', \mathcal{I}) \in V : c' \in \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^c(c)\} \subseteq V$  et l'agrégat des nœuds  $\alpha$  et  $\Omega$  sont définis respectivement par :  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^v(\alpha) = \{\alpha\}$  et  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^v(\Omega) = \{\Omega\}$ .
- **Hyperarcs.** On définit l'agrégat d'un hyperarc à partir des agrégats des multi-ensembles tête et queue. Un multi-ensemble est défini par un en-

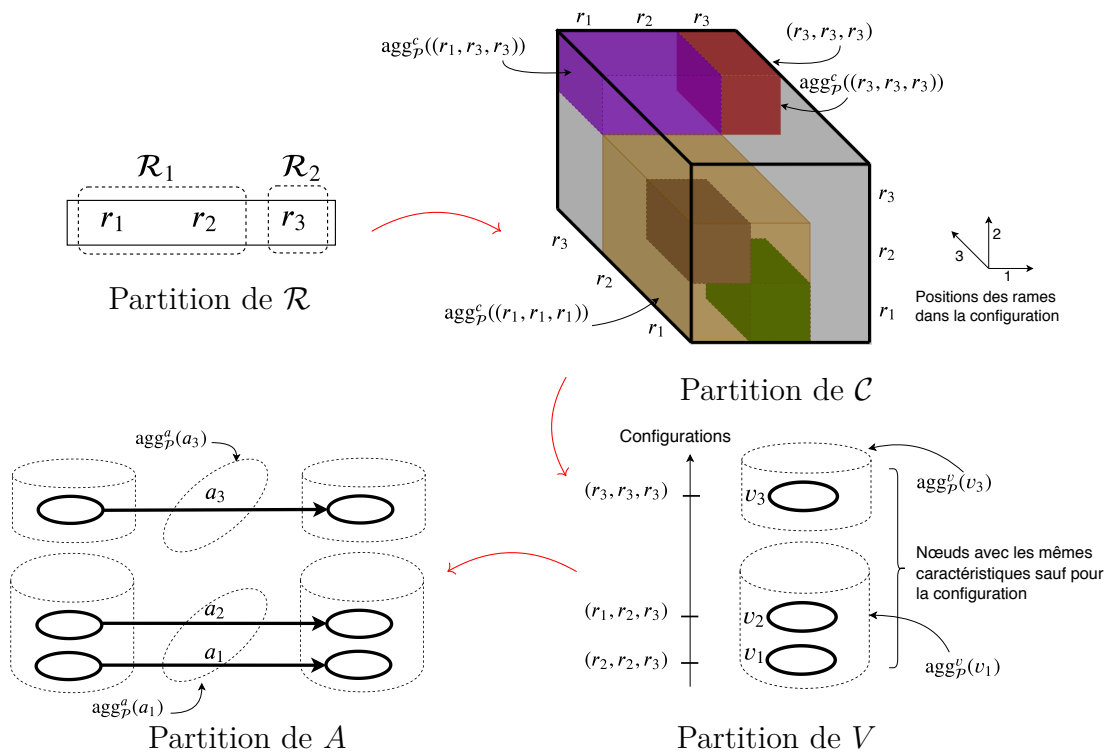


FIGURE 5.1 – Étapes d'agrégation de l'hypergraphe



semble support ainsi qu'une application de multiplicité. Soit  $\mathcal{N}$  un multi-ensemble quelconque de  $V$ . On définit l'agrégat de l'ensemble  $\mathbf{support}(\mathcal{N})$  par  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathbf{support}(\mathcal{N})) = \{\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^v(q) : q \in \mathbf{support}(\mathcal{N})\}$  et on définit l'agrégat de l'application de multiplicité, notée  $\mathbf{card}_{\mathcal{N}}^V$ , par : soit  $U$  un agrégat de nœuds tel que  $U \in \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathbf{support}(\mathcal{N}))$ . La valeur  $\mathbf{card}_{\mathcal{N}}^V(U)$  est telle que  $\mathbf{card}_{\mathcal{N}}^V(U) = \sum_{u \in U} \mathbf{card}(u, \mathcal{N})$ . Cette valeur représente le cumulé des multiplicités des éléments de  $U$  dans le multi-ensemble  $\mathcal{N}$ . On déduit l'agrégat d'un multi-ensemble :  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^M(\mathcal{N}) = (\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathbf{support}(\mathcal{N})), \mathbf{card}_{\mathcal{N}}^V)$  et par suite l'agrégat d'un hyperarc  $b \in A$  :  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(b) = \{b' \in A : \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^M(\mathcal{T}(b')) = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^M(\mathcal{T}(b)), \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^M(\mathcal{H}(b')) = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^M(\mathcal{H}(b))\}$ .

La relaxation du modèle **TSRP** est formulée en remplaçant l'ensemble des nœuds  $V$  par l'ensemble des agrégats des nœuds et l'ensemble des hyperarcs par l'ensemble des agrégats des hyperarcs. Ceci induit un hypergraphe de taille inférieure. Le modèle **TSRP** requiert de plus la relaxation de la fonction objectif et la relaxation de certaines contraintes pour exploiter la nouvelle structure de l'hypergraphe défini à partir de l'ensemble des agrégats. Formellement, soit respectivement  $\mathcal{P}_V = \{\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^v(u) : u \in V\}$  et  $\mathcal{P}_A = \{\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a) : a \in A\}$  les ensembles des agrégats de  $V$  et  $A$ . Soit de plus les variables  $X_F = \sum_{a \in F} z_a$ ,  $F \in \mathcal{P}_A$ ;  $X_F$  correspond au flot total porté par les hyperarcs de l'agrégat  $F$ . Pour chaque agrégat de types de rames  $R' \in \mathcal{P}$  et pour chaque gare  $s \in \mathcal{S}$ , on note  $F_{R',s}^\alpha = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a_{r,s}^\alpha)$ ,  $F_{R',s}^\Omega = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a_{r,s}^\Omega)$  et  $F_{R',s}^t = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a_{r,s}^t)$  avec  $r$  un élément arbitraire de  $R'$ , la figure 5.2 illustre ces agrégats. Une relaxation du **MIP** est obtenue en remplaçant les variables "z" dans (4.1)-(4.15) par les variables "X" et en relâchant certaines contraintes. Ceci donne lieu au **MIP** ci-dessous, nommé dans la suite : (**ATSRP**).

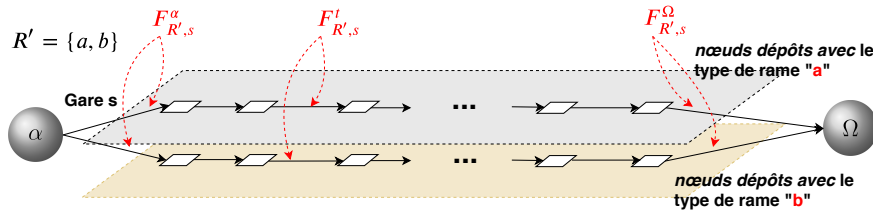


FIGURE 5.2 – Agrégats :  $F_{R',s}^\alpha$ ,  $F_{R',s}^\Omega$ ,  $F_{R',s}^t$

$$(\mathbf{ATSRP}) : \min \bar{\gamma}(X, y) = \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \min_{b \in F} \{q(b)\} X_F + \sum_{m \in \mathcal{M}} (\pi_m^+ y_m^+ + \pi_m^{+\infty} y_m^{+\infty} + \pi_m^- y_m^- + \pi_m^{-\infty} y_m^{-\infty}) \quad (5.1)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{P}_A} \max_{a \in F} \{\mathbf{card}_{\mathcal{T}(a)}^V(W)\} X_F = \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \max_{a \in F} \{\mathbf{card}_{\mathcal{H}(a)}^V(W)\} X_F \quad \forall W \in \mathcal{P}_V \quad (5.2)$$

$$-y_m^+ - y_m^{+\infty} + y_m^- + y_m^{-\infty} + \sum_{i \in \mathcal{V}_m} \sum_{F \in \mathcal{P}_A: \mathcal{A}(i) \cap F \neq \emptyset} X_F = f_m^{c_m} \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.3)$$

$$y_m^+ \leq f_m^{\max} - f_m^c \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.4)$$

$$y_m^- \leq f_m^c - f_m^{\min} \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.5)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{P}_A: \mathcal{A}(i) \cap F \neq \emptyset} X_F = 1 \quad i \in \mathcal{V}_f \quad (5.6)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{P}_A: \mathcal{A}(i) \cap F \neq \emptyset} \max_{b \in F} \{\mathcal{N}(b, i)\} X_F \geq \nu_m^{\min} \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.7)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{P}_A: \mathcal{A}(i) \cap F \neq \emptyset} X_F \leq 1 \quad i \in \mathcal{V} \quad (5.8)$$

$$\sum_{F \in \mathcal{P}_A: (\mathcal{A}(i) \cup \mathcal{A}(j)) \cap F \neq \emptyset} X_F \leq 1 \quad \forall i \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathcal{E}_i \quad (5.9)$$

$$X_{F_{R,s}^\alpha} = X_{F_{R,s}^\Omega} \quad \forall R \in \mathcal{P}, s \in \mathcal{S} \quad (5.10)$$

$$\sum_{r \in R} n_{r,s}^{\min} \leq X_{F_{R,s}^\alpha} \leq \sum_{r \in R} n_{r,s}^{\max} \quad \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \quad (5.11)$$

$$\sum_{r \in R} n_{r,s}^t \leq X_{F_{R,s}^t} \quad \forall (R, s, t) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S} \times \mathcal{T} \quad (5.12)$$

$$y_m^+, y_m^-, y_m^{+\infty}, y_m^{-\infty} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.13)$$

$$X_F \in \{0, 1\} \quad \forall F \in \mathcal{P}_A : F \cap \mathcal{A}^\mathcal{V} \neq \emptyset \quad (5.14)$$

$$X_F \in \mathbb{N} \quad \forall F \in \mathcal{P}_A : F \cap \mathcal{A}^\mathcal{V} = \emptyset \quad (5.15)$$

**Proposition 2:** Le modèle **(ATSRP)** est une relaxation du modèle **(TSRP)** et pour tout  $(z, y)$  solution du modèle **(TSRP)**,  $(X, y)$  tel que  $\forall G \in \mathcal{P}_A, X_G = \sum_{a \in G} z_a$  on a  $(X, y)$  est une solution du modèle **(ATSRP)** et  $\gamma(z, y) \geq \bar{\gamma}(X, y)$ .

*Démonstration.* La preuve se structure autour de l'application d'un changement de variables et l'application de plusieurs relaxations surrogates au modèle **(TSRP)**.

On commence par appliquer aux contraintes (4.3), (4.6), (4.8) et (4.9) un changement de variables en s'appuyant sur le résultat (5.16) démontré comme suit :

$\mathcal{P}_A$  est une partition de  $A$  alors  $\sum_{a \in \mathcal{A}(i)} z_a = \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \sum_{a \in \mathcal{A}(i) \cap F} z_a$ . De plus, à partir de la définition de  $\mathcal{P}_A$ ,  $\forall F \in \mathcal{P}_A$ ,  $\forall a, b \in F$ , on a  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathcal{H}(a)) = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathcal{H}(b))$  et  $\mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathcal{T}(a)) = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^V(\mathcal{T}(b))$ . Par conséquent,  $a \in \mathcal{A}(i)$  si et seulement si  $b \in \mathcal{A}(i)$ . On a donc :  $\mathcal{A}(i) \cap F = F$  ou  $\mathcal{A}(i) \cap F = \emptyset$ . D'où le résultat (5.16).

$$\forall i \in \mathcal{V}, \quad \sum_{a \in \mathcal{A}(i)} z_a = \sum_{F \in \mathcal{P}_A: \mathcal{A}(i) \cap F \neq \emptyset} X_F \quad (5.16)$$

D'où l'équivalence entre (4.3, 4.6, 4.8, 4.9) et (5.3, 5.6, 5.8, 5.9).

On exprime de plus, avec les nouvelles variables  $X_F$ , les contraintes de conservation du flot entrant et sortant des agrégats de nœuds.

$$\forall W \in \mathcal{P}_V, \quad \sum_{v \in W} \sum_{a \in \Gamma^+(v)} z_a = \sum_{v \in W} \sum_{a \in A} \mathbf{card}(v, \mathcal{T}(a)) z_a \quad (5.17)$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \sum_{a \in F} \sum_{v \in W} \mathbf{card}(v, \mathcal{T}(a)) z_a \quad (5.18)$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \max_{a \in F} \{ \mathbf{card}_{\mathcal{T}(a)}^V(W) \} X_F \quad (5.19)$$

L'égalité (5.17) découle de la définition de  $\Gamma^+$ . La seconde ligne (5.18) est déduite du fait que  $\mathcal{P}_A$  est une partition de  $A$  et enfin la ligne (5.19) est tirée de la définition des  $X_F$  et de la fonction agrégat  $\mathbf{card}_{\mathcal{T}(a)}^V$ . Remarquons que pour tout  $a, b \in F$ , on a  $\mathbf{card}_{\mathcal{T}(a)}^V(W) = \mathbf{card}_{\mathcal{T}(b)}^V(W)$  et donc  $\mathbf{card}_{\mathcal{T}(a)}^V(W) = \max_{a \in F} \{ \mathbf{card}_{\mathcal{T}(a)}^V(W) \}$ . Il est à noter que le choix du maximum est arbitraire et évite l'introduction de nouvelles notations.

On prouve de même :

$$\forall W \in \mathcal{P}_V, \quad \sum_{v \in W} \sum_{a \in \Gamma^-(v)} z_a = \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \max_{a \in F} \{ \mathbf{card}_{\mathcal{H}(a)}^V(W) \} X_F \quad (5.20)$$

Les contraintes (4.2) sont relâchées en des contraintes surrogates; elles sont remplacées

par les sommes de ces mêmes contraintes sur les agrégats des nœuds :

$$\begin{aligned}
 (4.2) \Rightarrow \sum_{v \in W} \sum_{a \in \Gamma^+(v)} z_a &= \sum_{v \in W} \sum_{a \in \Gamma^-(v)} z_a & \forall W \in \mathcal{P}_V \setminus \{\{\alpha\}, \{\Omega\}\} \\
 \Leftrightarrow \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \mathbf{card}_{\mathcal{T}(a), a \in F}^V(W) X_F &= \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \mathbf{card}_{\mathcal{H}(a), a \in F}^V(W) X_F & \forall W \in \mathcal{P}_V \setminus \{\{\alpha\}, \{\Omega\}\} \\
 & & (\text{\textcircled{à partir de (5.19)–(5.20)})}
 \end{aligned}$$

D'où la relaxation de (4.2) en (5.2)

Selon la définition de  $\mathcal{P}_A$ , on peut noter les agrégats suivants :

$$\forall R' \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}, \{a_{r,s}^\alpha, r \in R'\} \in \mathcal{P}_A, \{a_{r,s}^\Omega, r \in R'\} \in \mathcal{P}_A \text{ et } \{a_{r,s}^t, r \in R'\} \in \mathcal{P}_A. \quad (5.21)$$

(la figure 5.2 représente un exemple de ces agrégats)

Et en se basant aussi sur une relaxation surrogate, les contraintes (4.10), (4.11), et (4.12) sont sommées sur chaque agrégat de types de rames :

$$\begin{aligned}
 (4.10) \Rightarrow \sum_{r \in R} z_{a_{r,s}^\alpha} &= \sum_{r \in R} z_{a_{r,s}^\Omega} & \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \\
 \Leftrightarrow X_{F_{R,s}^\alpha} &= X_{F_{R,s}^\Omega} & \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \\
 (4.11) \Rightarrow \sum_{r \in R} n_{r,s}^{\min} &\leq \sum_{r \in R} z_{a_{r,s}^\alpha} \leq \sum_{r \in R} n_{r,s}^{\max} & \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \\
 \Leftrightarrow \sum_{r \in R} n_{r,s}^{\min} &\leq X_{F_{R,s}^\alpha} \leq \sum_{r \in R} n_{r,s}^{\max} & \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \\
 (4.12) \Rightarrow \sum_{r \in R} n_{r,s}^t &\leq \sum_{r \in R} z_{a_{r,s}^t} & \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S} \\
 \Leftrightarrow \sum_{r \in R} n_{r,s}^t &\leq X_{F_{R,s}^t} & \forall R \in \mathcal{P}, \forall s \in \mathcal{S}, \forall t \in \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } F_{R,s}^\alpha = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a_{r,s}^\alpha), F_{R,s}^\Omega = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a_{r,s}^\Omega) \text{ et } F_{R,s}^t = \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(a_{r,s}^t)$$

pour tout  $R \in \mathcal{P}$  et pour  $r$  arbitraire de  $R$ , (à partir de (5.21))

D'où la relaxation de (4.10, 4.11, 4.12) en (5.10, 5.11, 5.12)

Les contraintes (4.7) sont relâchées comme suit :

$$(4.7) \Rightarrow \sum_{i \in \mathcal{V}_m} \sum_{e \in \mathcal{A}(i)} \left\{ \max \mathcal{N}(b, i) : b \in \mathbf{agg}_{\mathcal{P}}^a(e) \right\} z_e \geq \nu_m^{\min} \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{F \in \mathcal{P}_A : \mathcal{A}(i) \cap F \neq \emptyset} \left\{ \max \mathcal{N}(b, i) : b \in F \right\} X_F \geq \nu_m^{\min} \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (\text{à partir de (5.16)})$$

D'où la relaxation de (4.7) en (5.7)

Il est à noter que les contraintes disjonctives (5.8) induisent des bornes binaires sur les variables  $X_F$  dans les contraintes (5.14) avec  $F \in \mathcal{P}_A$  tel que  $F \cap A^\nu \neq \emptyset$ .

D'où les bornes définies dans (5.14) pour les variables  $X_F$

La fonction objectif est relâchée comme suit :

$$\sum_{a \in A} q(a) z_a \geq \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \sum_{a \in F} \min\{q(b) : b \in F\} z_a = \sum_{F \in \mathcal{P}_A} \min\{q(b) : b \in F\} X_F$$

D'où la relaxation de (4.1) en (5.1)

Les contraintes (4.4 et 4.5) restent inchangées

À partir des résultats encadrés, on déduit que le modèle (**ATSRP**) est une relaxation du modèle (**TSRP**) et pour tout  $(z, y)$  solution du modèle (**TSRP**),  $(X, y)$  tel que  $\forall G \in \mathcal{P}_A, X_G = \sum_{a \in G} z_a$  on a  $(X, y)$  est une solution du modèle (**ATSRP**) et  $\gamma(z, y) \geq \bar{\gamma}(X, y)$ .  $\square$

Les modèles **ATSRP** et **TSRP** ont les mêmes types de contraintes. Par conséquent, le problème **ATSRP** peut être perçu comme un problème de **TSRP** basé sur différentes données en entrée. On montre que c'est le cas en définissant, à partir du **ATSRP**, de nouveaux ensembles artificiels de types de rames (noté  $\mathcal{R}^a$ ) et de configurations (noté  $\mathcal{C}^a$ ). Chaque  $\mathcal{R}' \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  définit un nouveau type de rame  $r' \in \mathcal{R}^a$  caractérisé par les propriétés les plus permissives parmi celles caractérisant les types de rames dans  $\mathcal{R}'$ ; l'ensemble  $\mathcal{C}^a$  est défini de même à partir de la partition  $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ . Résoudre le modèle **ATSRP** équivaut à résoudre un modèle **TSRP** défini à partir des données  $\mathcal{R}^a$  et  $\mathcal{C}^a$ .

**Exemple 5.2.1.** Soit  $i \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{C}' = \{c_1, c_2\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$  tel que  $c_1$  est compatible avec  $i$  et  $c_2$  ne l'est pas. Alors la configuration artificielle  $c' \in \mathcal{C}^a$ , associée à  $\mathcal{C}'$ , est compatible avec  $i$ . Nous avons aussi le coût  $\beta(\{i\}, c') = \min_{i \in \{1,2\}} \{\beta(\{i\}, c_i)\}$  et  $\mu(c') = \max_{i \in \{1,2\}} \{\mu(c_i)\}$

**Remarque 6.** On parle des propriétés les plus permissives ci-dessus au sens où elles induisent une relaxation du modèle **TSRP** initial. Par exemple, associer à une configuration artificielle le maximum des capacités des configurations d'un même agrégat n'est rien d'autre que la relaxation des contraintes (4.7) en (5.7) définie dans le modèle **ATSRP**.

### 5.2.2 Algorithme itératif de résolution

Notre approche de résolution, décrite dans l'algorithme 5, repose sur trois étapes : une première étape pour la résolution de la relaxation, une seconde pour le calcul d'une solution réalisable et une dernière étape pour la résolution exacte s'appuyant sur les résultats des deux étapes précédentes. Les lignes 1, 2 et 3 de l'algorithme correspondent à la définition de la relaxation linéaire du modèle **TSRP** qui a comme données d'entrée  $(\mathcal{R}^a, \mathcal{C}^a, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$ ;  $\lambda^*$  est la valeur de cette relaxation linéaire. Nous calculons ensuite, en ligne 4 et 5 la valeur  $\sigma$  d'une solution réalisable. Ceci est établi en résolvant à l'optimalité le modèle relâché, en extrayant de la solution les ensembles de trains sélectionnés  $(\mathcal{J}, \mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-)$  (tel que  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{J}^+ \subseteq \mathcal{V}^+$  et  $\mathcal{J}^- \subseteq \mathcal{V}^-$ ) et en résolvant en ligne 5 la restriction du **TSRP** à ses sous ensembles de trains, *i.e.* avec les données  $(\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{J}, \mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-, \mathcal{M})$ . Nous filtrons ensuite les hyperarcs dont le coût réduit est supérieur au gap entre la borne inférieure et la borne supérieure obtenues et sachant la proposition 3 énoncée ci-après. Enfin, nous résolvons le modèle de **TSRP** initial restreint aux hyperarcs restants.

### 5.2.3 Filtrage sur les coûts réduits

On montre maintenant que les hyperarcs du modèle initial, dont les variables correspondantes ont été filtrées dans le modèle agrégé (cf. ligne 6 de l'algorithme), peuvent être

---

**Algorithme 5 :** Algorithme itératif de filtrage sur les coûts réduits

---

- Data :**  $(\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$
- 1  $\mathcal{P} \leftarrow$  Déterminer une partition de l'ensemble  $\mathcal{R}$  ;
  - 2  $(\mathcal{R}^a, \mathcal{C}^a) \leftarrow$  Calculer les types de rames et les configurations artificiels sachant  $\mathcal{P}$  ;
  - 3  $\lambda^* \leftarrow$  Calculer la valeur de la relaxation linéaire de  $\mathbf{TSRP}(\mathcal{R}^a, \mathcal{C}^a, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$  ;
  - 4  $(\mathcal{J}, \mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-) \leftarrow$  Résoudre le  $\mathbf{TSRP}(\mathcal{R}^a, \mathcal{C}^a, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$  et calculer les trains sélectionnés ;
  - 5  $\sigma \leftarrow$  Calculer une borne supérieure en résolvant le  $\mathbf{TSRP}(\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{J}, \mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-, \mathcal{M})$  ;
  - 6 Filtrer les hyperarcs de  $\mathbf{TSRP}(\mathcal{R}^a, \mathcal{C}^a, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$  ayant un coût réduit supérieur à  $(\sigma - \lambda^*)$  ;
  - 7 Générer le modèle initial filtré  $\mathbf{TSRP}(\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$  ;
  - 8 Résoudre le modèle initial filtré  $\mathbf{TSRP}(\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-, \mathcal{M})$  ;
- 

filtrées aussi du modèle initial. Par construction, le modèle (**ATSRP**) est une relaxation du modèle (**TSRP**) et les variables sont liées par la propriété suivante. Cette propriété est valide sachant la relaxation des différentes contraintes définissant le modèle (**ATSRP**).

**Proposition 3:** Soit (**RATSRP**) la relaxation linéaire du modèle (**ATSRP**) et  $\sigma$  une valeur d'une solution primale du modèle (**TSRP**). Soit de plus  $(X^*, y^*)$  la solution optimale de (**RATSRP**),  $\lambda^*$  son coût, et  $\tilde{c}_F$  le coût réduit d'une variable  $X_F$  tel que  $X_F^* = 0$ .

Si  $\lambda^* + \tilde{c}_F > \sigma$  alors pour toute solution de (**TSRP**) de coût inférieur ou égal à  $\sigma$ , on a  $z_a = 0$  pour tout  $a \in F$ .

*Démonstration.* (Nous montrons la contraposée) Soit  $F \in \mathcal{P}_A$  tel que  $\lambda^* + \tilde{c}_F > \sigma$  et soit  $(z, y)$  une solution réalisable de **TSRP** tel que :  $\exists a \in F, z_a \geq 1$ .

Posons  $(X, y)$  tel que  $\forall G \in \mathcal{P}_A, X_G = \sum_{a \in G} z_a$ . À partir de la proposition 2, nous avons  $(X, y)$  est une solution de **ATSRP** et  $\gamma(z, y) \geq \bar{\gamma}(X, y)$ . De plus, nous avons  $X_F = \sum_{a \in F} z_a \geq 1$ . D'où à partir du résultat du filtrage sur les coûts réduits (cf. Corollaire 1) :  $\bar{\gamma}(X, y) > \sigma$ . Par suite :  $\gamma(z, y) > \sigma$ . Enfin, nous avons  $\hat{z}_a = 0$  pour toute solution  $(\hat{z}, \hat{y})$  de **TSRP** ayant un coût inférieur à  $\sigma$ .  $\square$

**Remarque 7.** Une généralisation de l'algorithme 5 est proposée en annexe A Nous y formalisons l'agrégation d'un MIP à partir d'une application de projection et nous y

proposons un algorithme de résolution basé sur un filtrage des variables du **MIP** projeté.

### 5.3 Tests et résultats

Nous présentons ici les résultats expérimentaux obtenus pour les instances présentées dans le tableau 4.1 du chapitre 4 en appliquant l'algorithme 5. L'objectif est de comparer cet algorithme à la résolution directe du problème initial. Nous avons utilisé, de même que les tests présentés dans le chapitre précédent, un processeur Haswell Intel Xeon E5-2680 à 2,5 Ghz et une RAM de 128Go. Les **MIPs** sont résolus en utilisant le solveur IBM Ilog Cplex 12.6.

Dans ce qui suit, nous notons  $\text{Gap}(l, p)$  l'écart entre la borne inférieure  $l$  et la borne supérieure  $p$ ,  $\text{Gap}(l, p) = 100 * \frac{|l-p|}{|p|}$ . L'écart entre un temps CPU  $i$  initial et un nouveau temps CPU  $n$  est notée  $S_{\text{CPU}}$  et est égale à  $100 * \frac{i-n}{i}$ .  $S_{\text{build}}$  désigne le *speed-up* correspondant à la génération de l'hypergraphe. Afin d'évaluer l'effet d'inclure les configurations composées de trois rames sur la résolution, nous faisons varier la fraction  $\xi$  du coût de ces configurations sur la pénalité  $\pi_m^-$  lié à la non-couverture de la demande (cf Section 4.3). Les instances du tableau 4.2 sont testées en fixant cette valeur  $\xi$  entre 0.7 et 15. Les colonnes des tableaux 5.1 et 5.2 représentent respectivement les valeurs moyennes obtenues en faisant varier  $\xi$  à partir des valeurs  $\{6, 8, 10, 15\}$  et  $\{0.7, 1, 2, 4\}$ ; les libellés des colonnes sont surlignés pour signifier des valeurs moyennes. En clair, le tableau 5.1 représente les résultats où les configurations composées de trois rames sont fortement pénalisées. Dans les deux tableaux, **CPU2** représente le temps de calcul global en secondes nécessaire pour résoudre le modèle **TSRP** en s'appuyant sur l'algorithme 5. **%Gen** représente le pourcentage des hyperarcs générés par rapport au nombre de variables du modèle **TSRP** initial. **Opt** représente la valeur optimale, **LPA** est la valeur de la relaxation linéaire du problème agrégé, **Pri** est la valeur d'une solution primale obtenue grâce à l'heuristique décrite dans l'algorithme 5,  $S_{\text{CPU}}$  et  $S_{\text{build}}$  sont respectivement le *speed-up* du temps de calcul total et le *speed-up* de la génération de l'hypergraphe.  $d_{\text{build}}$  est la différence de temps entre la génération de l'hypergraphe initial et la génération de l'hypergraphe filtré.



TABLE 5.1 – Comparaison entre la résolution directe et l’algorithme de filtrage avec  $\xi \in \{6, 8, 10, 15\}$

Data	$\overline{\text{Gap}}(\text{Opt}, \text{Pri})$	$\overline{\text{Gap}}(\text{LPA}, \text{Pri})$	$\overline{\text{Gap}}(\text{LPA}, \text{Opt})$	$\overline{\%Gen}$	$\overline{\text{CPU2}}$	$\overline{S_{\text{build}}}(d_{\text{build}})$	$\overline{S_{\text{CPU}}}$
D1	0,19	5,22	5,04	49,35	111,25	61,16 (3,22)	84,35
D2	0,16	5,00	4,85	41,60	1024,00	71,17 (49,09)	90,07
D3	0,26	6,40	6,16	58,46	5185,25	51,07 (26,15)	72,18
D4	0,25	6,40	6,16	55,75	15152,75	52,02 (171,85)	83,21
D5	<b>0,01</b>	43,01	43,00	<b>99,90</b>	241,75	-5,25 (-0,51)	<b>77,05</b>
D6	<b>0,02</b>	43,15	43,14	<b>100,00</b>	525,75	-1,95 (-0,45)	<b>76,31</b>
D7	<b>0,01</b>	43,01	43,00	<b>99,90</b>	1660,75	-1,13 (-1,48)	<b>82,69</b>
D8	0,02	1,82	1,80	27,79	123,50	79,78 (2,93)	79,47
D9	0,02	1,79	1,77	24,81	129,25	92,01 (32,71)	97,39
D10	0,02	1,79	1,76	17,59	858,50	96,37 (530,70)	99,24
D11	16,95	54,98	45,79	18,26	154,00	96,17 (160,10)	71,57
D12	24,44	45,21	27,48	14,67	1133,50	97,68 (990,99)	82,25
D13	13,65	44,35	35,55	37,72	56,00	75,78 (4,49)	48,88
D14	8,48	41,35	35,91	20,77	58,75	94,17 (15,02)	86,43
D15	7,57	25,97	19,90	16,49	317,50	96,84 (126,89)	87,37
D16	<b>33,57</b>	57,77	<b>36,42</b>	26,88	8,50	77,04 (1,41)	<b>-3,47</b>
D17	0,86	11,99	11,22	15,19	136,50	97,35 (124,40)	81,86
D18	2,12	17,33	15,54	18,93	2692,75	96,25 (1244,08)	24,66
D19	1,48	5,93	4,52	39,33	703,00	82,67 (41,00)	27,76
D20	1,45	5,90	4,52	99,64	974,75	-3,84 (-0,31)	<b>-2,53</b>

TABLE 5.2 – Comparaison entre la résolution directe et l’algorithme de filtrage avec  $\xi \in \{0.7, 1, 2, 4\}$ 

Data	Gap(Opt, Pri)	Gap(LPA, Pri)	Gap(LPA, Opt)	%Gen	CPU2	$S_{\text{build}}(d_{\text{build}})$	$S_{\text{CPU}}$
D1	0,19	5,21	5,04	98,39	221,75	-3,82 (-0,20)	74,89
D2	0,14	4,98	4,85	98,41	980,50	0,05 (0,04)	90,33
D3	0,25	6,65	6,41	97,33	2812,50	4,01 (2,06)	85,79
D4	0,25	6,65	6,41	98,24	11157,00	3,06 (10,07)	76,56
D5	<b>0,01</b>	43,01	43,00	<b>99,90</b>	248,00	-4,01 (-0,39)	<b>76,41</b>
D6	<b>0,02</b>	43,15	43,14	<b>100,00</b>	601,50	-2,06 (-0,47)	<b>76,30</b>
D7	<b>0,01</b>	43,01	43,00	<b>99,90</b>	1764,25	-1,18 (-1,51)	<b>87,11</b>
D8	0,02	1,82	1,80	98,56	143,50	-17,59 (-0,65)	78,28
D9	0,02	1,79	1,77	98,70	294,00	1,01 (0,36)	92,41
D10	0,02	1,79	1,76	99,48	4057,00	1,88 (10,30)	95,82
D11	16,92	54,97	45,79	78,59	455,00	25,76 (42,90)	-1,20
D12	23,69	44,66	27,48	60,56	2594,75	47,50 (482,46)	16,82
D13	15,03	45,24	35,55	100,00	114,75	-3,64 (-0,22)	<b>-15,29</b>
D14	8,48	41,35	35,91	99,79	164,50	-0,08 (-0,01)	7,37
D15	7,68	26,05	19,90	78,85	603,00	24,08 (31,15)	70,94
D16	<b>33,61</b>	57,79	<b>36,42</b>	100,00	12,75	-8,41 (-0,15)	<b>-45,49</b>
D17	0,86	11,99	11,22	19,26	146,75	96,69 (136,00)	78,71
D18	2,06	17,28	15,54	78,82	3654,50	25,87 (332,17)	22,48
D19	1,39	5,85	4,52	54,23	800,00	63,28 (31,97)	50,34
D20	1,48	5,93	4,52	99,41	1032,25	-4,72 (-0,39)	<b>-54,63</b>

Nous avons considérablement amélioré le temps de résolution avec de meilleurs résultats lorsque les configurations composées de trois rames sont pénalisées dans la fonction objectif (cf. tableau 5.1). Ceci est expliqué par le nombre considérable d'hyperarcs filtrés dans ce cas. Pour l'exemple I3 (D5, D6 et D7) nous réussissons à améliorer le temps de résolution même si on génère tout l'hypergraphe. Ceci est dû à un faible écart entre la valeur de la solution primale et celle de la solution optimale. Cependant, aucune variable n'est éliminée à cause de la mauvaise relaxation linéaire obtenue dans ce cas. Les données D16 et D20 ne bénéficient pas de notre algorithme. Pour D16 la solution primale et la relaxation linéaire sont médiocres. Le nombre de configurations pour D20 est assez faible ce qui mène à un hypergraphe de petite taille non réduit par l'algorithme de filtrage. Il convient de noter que leur temps de résolution est faible, 8 secondes pour D16 contre 406s pour D20. En considérant l'heuristique primale, nous obtenons de bonnes solutions pour la plupart des instances mis à part D16 dont l'ensemble des trains sélectionnés obtenus par le modèle agrégé conduit à un surplus de deux rames.

## Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la résolution du modèle **TSRP**. Nous avons présenté une relaxation de celui-ci et avons mis au point un algorithme basé sur une méthode d'agrégation et de désagrégation combinée à un filtrage sur les coûts réduits. Les tests numériques ont montré que cet algorithme est efficace pour des exemples de taille réelle.

# Chapitre 6

## OptimTER, outil d'aide à la décision

### Sommaire

---

6.1	Contexte . . . . .	107
6.2	Architecture d'optimTER . . . . .	108
6.3	Données . . . . .	110

---

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la description du module logiciel implémenté. Nous montrons comment il répond au besoin exprimé par la **DGTER** à travers une description de l'architecture globale adoptée. Nous présentons une vue d'ensemble de l'outil et une description des aspects visibles de l'application, à savoir le découpage logique des macros fonctionnalités et les flux de données reliant les principaux modules identifiés. Nous rappelons en section 6.1 le contexte et le besoin de développer un logiciel. Nous exposons par la suite en section 6.2 l'architecture de l'outil globale adoptée. Enfin, nous présentons en section 6.3 les données d'entrée et de sortie et nous montrons comment elles sont interfacées.

### 6.1 Contexte

Rappelons que les travaux de la présente thèse s'inscrivent dans le cadre du plan stratégique *CapTER 2020* porté par la **DGTER** (cf. Premier chapitre). L'objectif est de mettre

en place un outil d'aide à la décision en vue de négocier les conventions avec les autorités organisatrices. L'outil mis en œuvre doit permettre d'effectuer des tests de simulation et doit s'intégrer dans le système d'information de la **Sncf**.

## 6.2 Architecture d'optimTER

Les choix technologiques ont été orientés par l'ensemble des critères suivants. L'outil doit être accessible aux concepteurs des **TERs**, facile d'utilisation et rapidement déployable. La mise à jour doit se faire sans interruption du service et le coût de développement et de maintenance doit être minimal, n'affectant pas ainsi les travaux de recherche.

La solution adoptée est une application *web* d'aide à la décision, appelée *OptimTER*. Le choix d'une telle solution répond à l'ensemble des critères susmentionnés. Elle est installée sur des serveurs distants et accessible depuis n'importe quel navigateur *web* connecté au réseau **Sncf**.

Pour répondre aux enjeux d'industrialisation d'un outil informatique, nous avons porté une attention particulière à la qualité du code produit : respect des bonnes pratiques de développement,<sup>1</sup> tests unitaires au niveau de l'*api* hypergraphe, modularité. Nous avons veillé à isoler chaque module faisant intervenir des données de même nature et nous avons veillé à factoriser les traitements logiques. Un tel découpage modulaire facilite la capitalisation du logiciel développé. Ces différents aspects sont mis en lumière dans la sous-section suivante décrivant les modules d'*OptimTER*.

### Modules OptimTER

L'architecture logicielle d'OptimTER suit le patron *MVP* (*Modèle Vue Présentation*). Le principe de *MVP* se base sur un découpage de l'application en trois couches : la couche *Vue* assemble les développements liés à l'interface graphique, la couche *Modèle* intègre l'ensemble des modèles et algorithmes développés dans l'application. Enfin, la couche

---

1. Respect des métriques du code inspecté par *Sonarqube*

*Présentation* constitue un pont entre les couches citées précédemment. Elle permet de récupérer les requêtes de l'utilisateur via la couche *Vue*, d'appeler les différentes fonctionnalités de l'application définies dans la couche *Modèle*, de récupérer ensuite la réponse et l'envoyer en fin de compte à la couche *Vue* pour l'affichage. La figure 6.1 illustre ce découpage et récapitule les différentes fonctionnalités intégrées dans chaque couche du patron *MVP*.

La figure 6.2 illustre les étapes structurantes d'un test de simulation lancé par un concepteur via un navigateur *web* (client). Les données ainsi que certains paramètres sont envoyés au serveur à partir de la page représentée en figure 6.4. Ces données sont ensuite transformées en un fichier (*XML*) et vérifiées à l'aide d'un fichier de définition (*XSD*). Une telle approche permet de dissocier la partie représentation et la partie formalisation des données. Nous générons ensuite les données d'entrée en se basant sur une modélisation modulée des objets manipulés. De plus, nous avons implémenté une bibliothèque générique de gestion des hypergraphes, totalement dissociée de l'application. Cette dernière est utilisée pour générer les différents modèles présentés dans les chapitres précédents. Plusieurs itérations sont opérées, selon l'algorithme choisi, entre le module de génération des modèles et le module de résolution. Les données de sortie sont générées dès qu'une solution au problème **TSRP** est obtenue. Nous sérialisons par la suite les objets modélisant le résultat dans un fichier *json*. Enfin, ce même fichier est envoyé au client pour un affichage sur le navigateur (cf. Figure 6.5 et 6.7).

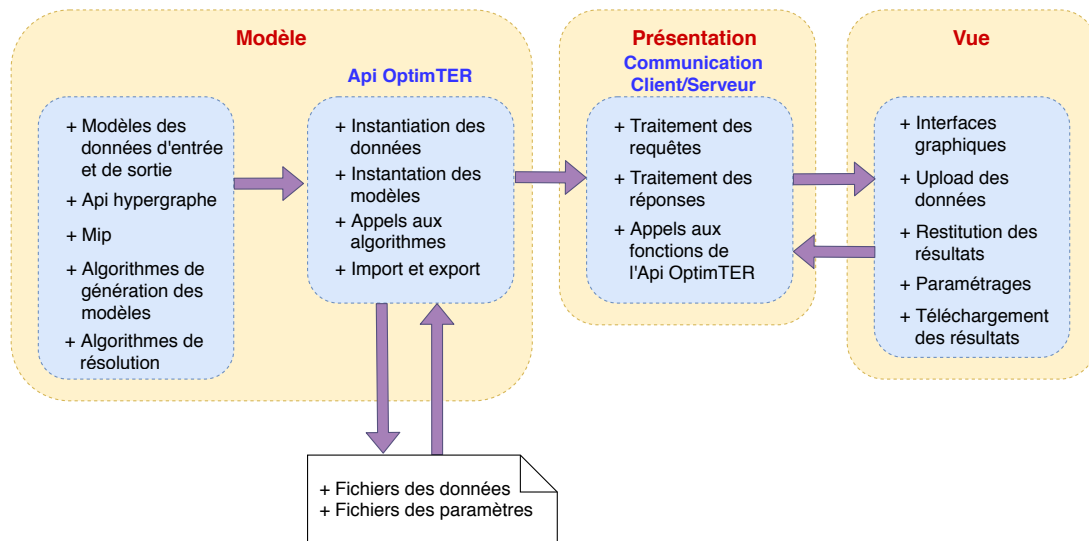


FIGURE 6.1 – MVP

### 6.3 Données

Nous identifions trois catégories de données nécessaire à l'utilisation de l'outil. La première catégorie concerne les données liées à la demande d'offre comme les missions, les fréquences et les capacités d'emport. La seconde catégorie concerne les données liées à l'infrastructure et à sa capacité (réticulaire). Enfin, la troisième catégorie concerne les données de la production (caractéristiques du parc des rames, temps d'attente en gare, etc.). Ces données sont définies dans un fichier *XSD* et représentées en entrée dans un fichier *excel*. Cette dernière représentation est évolutive car totalement dissocié du module d'optimisation.

Nous identifions aussi des données liées au paramétrage de l'outil comme les pentes des fonctions convexes, les coûts définis pour les hyperarcs et les chemins d'accès. Ces données sont définies dans des fichiers de paramétrage, non accessible à un utilisateur lambda.

Nous générons comme données de sortie les grilles horaires et les données du roulement matériel. Nous avons défini un fichier *Json* exploitable par les modules graphiques et des fichiers *excel* téléchargeables et consultables par les concepteurs du **TER** (cf. Figures 6.5, 6.6 et 6.7).

Nous autorisons de plus aux concepteurs d'enregistrer les tests de simulation afin de

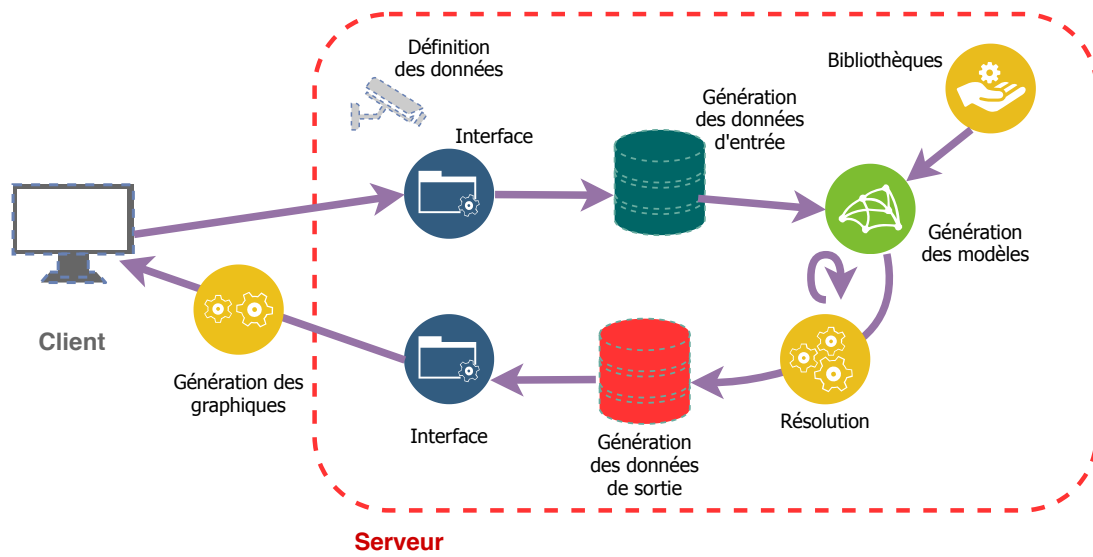


FIGURE 6.2 – Étapes structurante d'un test de simulation

pouvoir les partager et les consulter ; la page d'accueil (fig. 6.3) donne la possibilité de lancer un test de simulation ou de consulter des résultats.

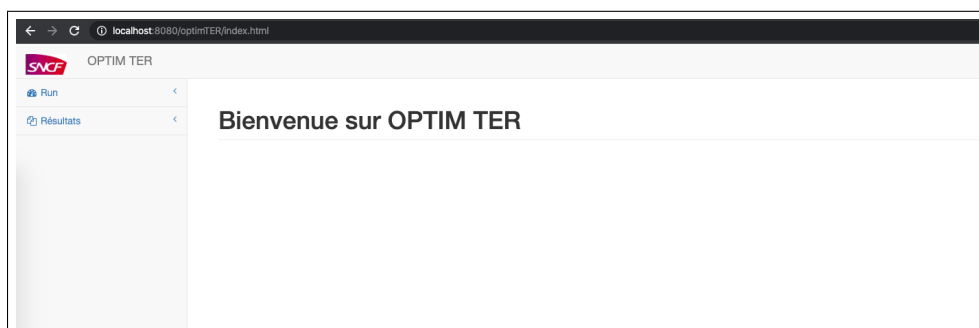


FIGURE 6.3 – Écran d'accueil



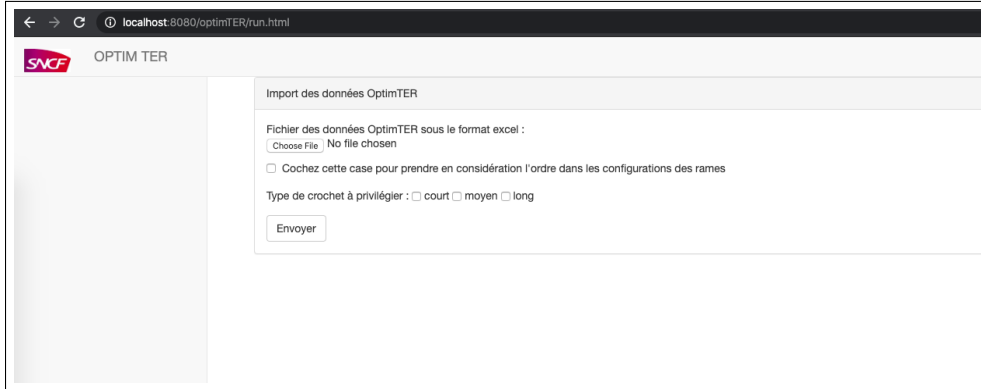


FIGURE 6.4 – Écran pour lancer une simulation

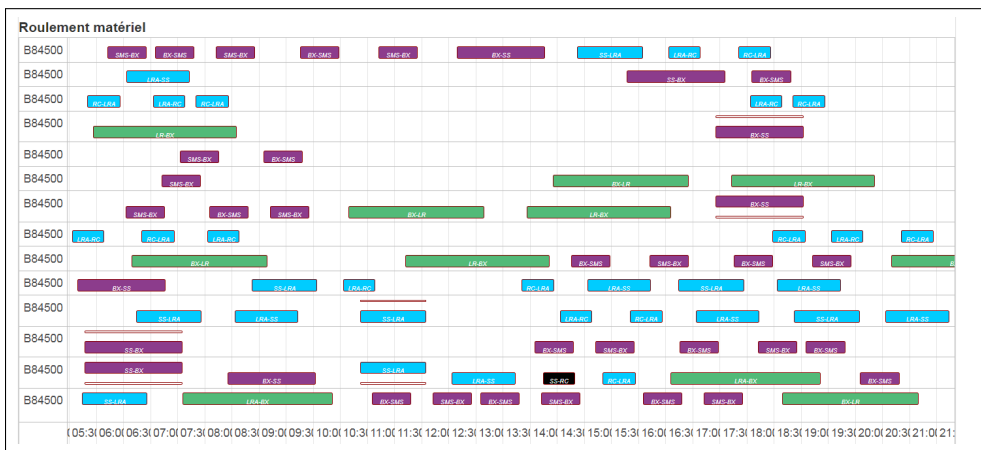


FIGURE 6.5 – Roulement matériel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	-	SMS / BX	LRA / RC	SMS / BX	SMS / BX	SS / BX	SMS / BX	SMS / BX	LR / BX	LRA / RC	LRA / SS
2	LRA	-	05:33	-	-	-	-	-	-	06:33	07:33
3	LR	-	05:39 / 05:41	-	-	-	-	-	06:20	06:39 / 06:41	07:39 / 07:41
4	ATL	-	05:44 / 05:45	-	-	-	-	-	-	06:44 / 06:45	07:44 / 07:45
5	AOM	-	05:47 / 05:48	-	-	-	-	-	-	06:47 / 06:48	07:47 / 07:48
6	CTL	-	05:51 / 05:52	-	-	-	-	-	06:27 / 06:28	06:51 / 06:52	07:51 / 07:52
7	SSC	-	06:00 / 06:01	-	-	-	-	-	07:00 / 07:01	08:00 / 08:01	-
8	RC	-	06:08	-	-	-	-	-	06:41 / 06:42	07:08	08:08 / 08:09
9	TNC	-	-	-	-	-	-	-	-	-	08:15 / 08:16
10	BOR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	08:23 / 08:24
11	SNH	-	-	-	-	-	-	-	-	-	08:31 / 08:32
12	SS	-	-	-	-	06:11	-	-	07:08 / 07:11	-	08:44
13	PN	-	-	-	-	06:27 / 06:28	-	-	07:27 / 07:28	-	-
14	JO	-	-	-	-	06:40 / 06:41	-	-	07:40 / 07:41	-	-
15	MMM	-	-	-	-	06:54 / 06:55	-	-	07:54 / 07:55	-	-
16	SMS	05:32	-	06:12	06:32	07:04 / 07:05	07:12	07:32	08:04 / 08:05	-	-
17	CGC	05:35 / 05:36	-	06:15 / 06:16	06:35 / 06:36	-	07:15 / 07:16	07:35 / 07:36	-	-	-
18	GGT	05:41 / 05:42	-	06:21 / 06:22	06:41 / 06:42	-	07:21 / 07:22	07:41 / 07:42	-	-	-
19	ATX	05:46 / 05:47	-	06:26 / 06:27	06:46 / 06:47	-	07:26 / 07:27	07:46 / 07:47	-	-	-
20	SAC	05:50 / 05:51	-	06:30 / 06:31	06:50 / 06:51	07:16 / 07:17	07:30 / 07:31	07:50 / 07:51	08:16 / 08:17	-	-
21	KBZ	05:53 / 05:54	-	06:33 / 06:34	06:53 / 06:54	-	07:33 / 07:34	07:53 / 07:54	-	-	-
22	GVB	05:58 / 05:59	-	06:38 / 06:39	06:58 / 06:59	-	07:38 / 07:39	07:58 / 07:59	-	-	-
23	SEK	06:03 / 06:04	-	06:43 / 06:44	07:03 / 07:04	-	07:43 / 07:44	08:03 / 08:04	-	-	-
24	CBX	06:09 / 06:10	-	06:49 / 06:50	07:09 / 07:10	07:29 / 07:30	07:49 / 07:50	08:09 / 08:10	08:29 / 08:30	-	-
25	BX	06:15	-	06:55	07:15	07:35	07:55	08:15	08:35	-	-
26											
27											
28											

FIGURE 6.6 – Grille horaire

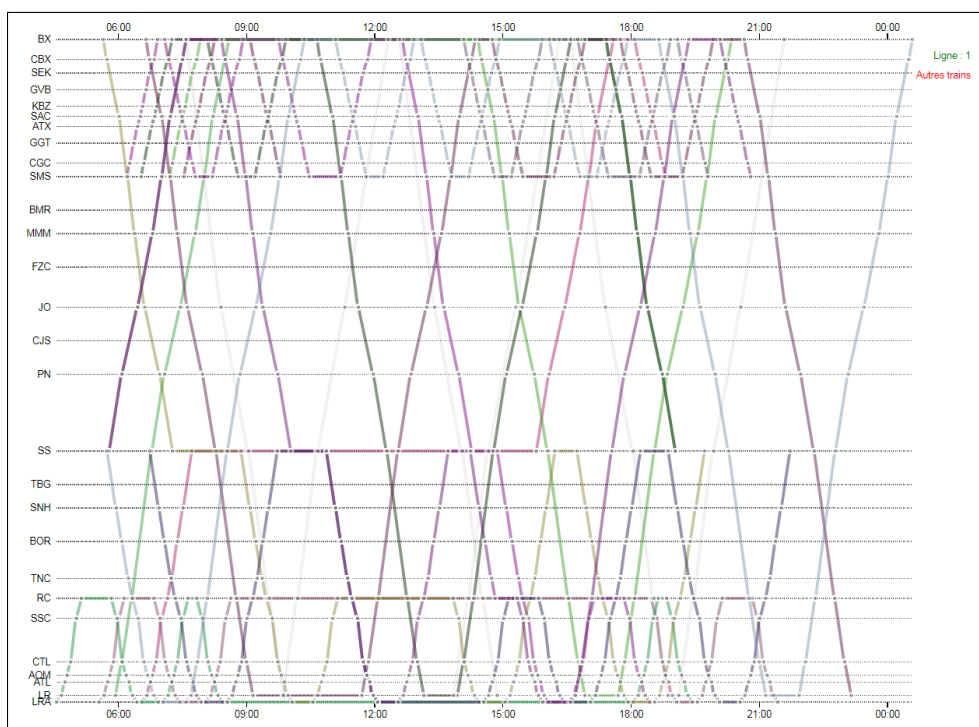


FIGURE 6.7 – Graphique espace-temps

## Conclusion

L'outil développé répond au besoin exprimé par la **DGTER**. Les résultats obtenus grâce à l'outil sont très encourageants, ils ont notamment permis une augmentation significative de l'offre (+8%), à ressources égales, sur la ligne Bordeaux - La Rochelle. La région Nouvelle Aquitaine a montré sa grande satisfaction et a pris la décision d'adopter la démarche d'optimisation. De plus, l'outil intègre d'une part les résultats des travaux de recherche et d'autre part l'interfaçage et la représentation des résultats. Il est conçu de façon à préparer le passage en industrialisation ; son architecture est modulaire et permet une visibilité des différentes fonctionnalités.



## Conclusion et perspectives

Les travaux de recherche menés dans cette thèse relèvent d'une problématique industrielle identifiée au **TER** dans le contexte de l'ouverture à la concurrence du ferroviaire en France. Ils s'inscrivent dans le cadre du plan stratégique *CapTER 2020* visant à développer la capacité du **TER** à optimiser.

Nous nous sommes particulièrement intéressés dans ces travaux à l'optimisation de l'offre de transport ferroviaire en fonction de la contrainte économique en lien avec la planification du parc des rames matérielles. Compte tenu des contraintes imposées par le gestionnaire de l'infrastructure (cf. **réticulaire**) et du coût d'acquisition des rames, nous avons décliné cette problématique en un problème de sélection des trajets et de planification de la rotation des rames. Une originalité de notre démarche consiste à intégrer la sélection des trains dans le processus d'optimisation du matériel roulant prenant en compte des contraintes opérationnelles.

Par ailleurs, l'offre de transport est contrainte par la demande de l'autorité organisatrice, nous en avons proposé une modélisation originale sous forme de missions. Ces missions sont caractérisées par des fréquences, spécifiées sur des intervalles de temps, et paramétrées par des fonctions de coût convexes. Une telle modélisation permet d'approcher la demande souhaitée en fréquences des trains sans pour autant négliger le coût d'engagement des rames matérielles.

Nous avons présenté une modélisation du problème sous forme d'un flot sur un hypergraphe appréhendant facilement plusieurs contraintes opérationnelles. Une unité de flot dans le modèle fait référence à une ou plusieurs rames matérielles formant éventuellement

des configurations. L'introduction du nouveau formalisme des hyperarcs et des intervalles de temps glissant  $\tau$  permettent de suivre localement, dans l'espace et dans le temps, les opérations de coupes et accroches opérées sur les configurations. L'hypergraphe proposé intègre naturellement les contraintes de coupe et accroche des configurations et se prête à intégrer les contraintes en lien avec la logistique du dépôt. Enfin, la fusion des unités de flots dans les nœuds dépôts permet de réduire la combinatoire.

La résolution directe du **MIP** déduit de la formulation par flot est efficace pour des données de taille réelle ne considérant qu'un seul type de rame. Pour résoudre des problèmes avec plusieurs types de rames, nous avons proposé un algorithme basé sur une méthode d'agrégation et de désagrégation de l'hypergraphe combinée à un filtrage sur les coûts réduits. Les tests numériques ont montré que cet algorithme est efficace pour des instances de taille réelle.

Enfin, nous avons développé un outil d'aide à la décision intégrant les modèles, les algorithmes, l'interfaçage et la représentation des résultats. Cet outil répond au besoin exprimé par la **DGTER**, il a permis au **TER** de la région *Nouvelle Aquitaine* de proposer à l'autorité organisatrice des simulations et des offres optimisées.

## Perspectives

Ce travail peut être développé en considérant une intégration plus large de problèmes de la littérature du ferroviaire, comme **la maintenance des rames**, **l'optimisation du planning des agents** ou **la conception des grilles horaires** (*i.e* conception du **graphe réticulaire**).

**La maintenance des rames** nécessite d'augmenter la durée d'étude des instances, la demande d'offre doit notamment être exprimée sur une durée minimale égale à une semaine. Les ressources maintenables s'épuisent au-delà d'une durée supérieure à une journée. Bien que cette problématique soit traitée à la **SnCF** dans la phase de conception du plan de transport, il est pertinent d'intégrer celle-ci aux études stratégiques pour une

estimation plus fine des coûts réels engagés. Cependant, les contraintes de la maintenance des rames ne peuvent pas s'intégrer directement, à notre connaissance, dans des modèles de flot. Ces contraintes sont définies indépendamment pour chaque unité. Il est donc difficile de les intégrer directement dans notre modèle en raison de la fusion des unités de flot dans les *nœuds dépôts*. Les auteurs de [Zhong et al. \[2019\]](#) développent dans ce sens un algorithme itératif intégrant une modélisation par flots. Ils génèrent plusieurs solutions réalisables à partir du modèle de flot et résolvent par la suite le problème de la maintenance.

L'optimisation du *planning des agents* est un problème intéressant car aussi difficile que le problème de planification des rames. Néanmoins, le coût induit par la planification des agents n'est pas aussi conséquent que celui induit par la planification des rames. L'intégration de ce problème dans notre modèle engage un type de ressource supplémentaire et nécessite d'intégrer les arrêts intermédiaires dans les modèles. Rappelons que les nœuds dans notre modèle d'hypergraphe représentent uniquement des origines ou des destinations des trains. Les approches de la littérature reposent généralement sur des algorithmes itératifs séparant les différentes problématiques. [Dauzère-Pérès et al. \[2015\]](#) proposent une heuristique basée sur relaxation lagrangienne pour résoudre le problème de planification des rames et du service des agents, les contraintes couplantes y sont relâchées aboutissant à une résolution séparée des deux sous problèmes.

Enfin, le problème de conception des grilles horaires reste difficile à intégrer. Il est nécessaire de discrétiser les modèles à la minute et d'inclure l'ensemble des trajets déjà alloués aux différentes entreprises ferroviaires. Ce problème est traité par le gestionnaire de l'infrastructure, certaines contraintes ne sont pas connues au niveau de l'entreprise ferroviaire. Cependant, l'intégration de ce problème permettrait à l'entreprise ferroviaire de proposer, au gestionnaire de l'infrastructure, des horaires pour des trains afin de mieux optimiser son offre.





# Bibliographie

- Abbink, E., Van den Berg, B., Kroon, L., and Salomon, M. (2004). Allocation of railway rolling stock for passenger trains. *Transportation Science*, 38(1) :33–41.
- Adenso-Díaz, B., González, M. O., and González-Torre, P. (1999). On-line timetable re-scheduling in regional train services. *Transportation Research Part B : Methodological*, 33(6) :387–398.
- Ahuja, R. K., Liu, J., Orlin, J. B., Sharma, D., and Shughart, L. A. (2005). Solving real-life locomotive-scheduling problems. *Transportation Science*, 39(4) :503–517.
- Alfieri, A., Groot, R., Kroon, L., and Schrijver, A. (2006). Efficient circulation of railway rolling stock. *Transportation Science*, 40(3) :378–391.
- Altazin, E., Dauzère-Pérès, S., Ramond, F., and Tréfond, S. (2017). Rescheduling through stop-skipping in dense railway systems. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies*, 79 :73–84.
- Ben-Khedher, N., Kintanar, J., Queille, C., and Stripling, W. (1998). Schedule optimization at sncf : From conception to day of departure. *Interfaces*, 28(1) :6–23.
- Benkirane, M., Clautiaux, F., Damay, J., and Detienne, B. (2019a). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. (Submitted).
- Benkirane, M., Clautiaux, F., Detienne, B., and Damay, J. (2018). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. In *ISMP*, Bordeaux, France.

- Benkirane, M., Clautiaux, F., Detienne, B., and Damay, J. (2019b). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. In *EURO*, Dublin, Irlande.
- Benkirane, M., Clautiaux, F., Detienne, B., and Damay, J. (2019c). A hypergraph model for the rolling stock rotation planning and train selection. In *ROADEF*, Le Havre, France.
- Benkirane, M., Damay, J., and Clautiaux, F. (2017a). An integrated approach for timetable planning and rolling stock rotations. pages 644 – 658, Lille, France. 7th International Conference on railway operations modelling and Analysis (IAROR, RailLille 2017).
- Benkirane, M., Damay, J., and Clautiaux, F. (2017b). Une approche intégrée pour l'établissement des grilles horaires et la planification du matériel roulant. In *ROADEF*, Metz, France.
- Berge, C. (1973). Graphs and hypergraphs.
- Borndörfer, R., Grimm, B., Reuther, M., and Schlechte, T. (2017). Template-based re-optimization of rolling stock rotations. *Public Transport*.
- Borndörfer, R., Klug, T., Schlechte, T., Fügenschuh, A., Schang, T., and Schülldorf, H. (2016). The freight train routing problem for congested railway networks with mixed traffic. *Transportation Science*, 50(2) :408–423.
- Borndörfer, R., Löbel, A., Reuther, M., Schlechte, T., and Weider, S. (2013). Rapid branching. *Public Transport*, 5(1-2) :3–23.
- Borndörfer, R., Reuther, M., and Schlechte, T. (2014). A Coarse-To-Fine Approach to the Railway Rolling Stock Rotation Problem. In Funke, S. and Mihalák, M., editors, *14th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems*, volume 42 of *OpenAccess Series in Informatics (OASICS)*, pages 79–91, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

- Borndörfer, R., Reuther, M., Schlechte, T., Waas, K., and Weider, S. (2015). Integrated optimization of rolling stock rotations for intercity railways. *Transportation Science*, 50(3) :863–877.
- Borndörfer, R., Reuther, M., Schlechte, T., and Weider, S. (2011). A hypergraph model for railway vehicle rotation planning. In *OASICS-OpenAccess Series in Informatics*, volume 20. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- Borndörfer, R., Reuther, M., Schlechte, T., and Weider, S. (2012). Vehicle rotation planning for intercity railways. In *Proc. Conference on Advanced Systems for Public Transport*, volume 2012, pages 12–11.
- Breugem, T., Borndörfer, R., Schlechte, T., and Schulz, C. (2019). A three-phase heuristic for cyclic crew rostering with fairness requirements.
- Brucker, P., Hurink, J., and Rolfes, T. (2003). Routing of railway carriages. *Journal of global optimization*, 27(2-3) :313–332.
- Bunte, S. and Kliwer, N. (2009). An overview on vehicle scheduling models. *Public Transport*, 1(4) :299–317.
- Cacchiani, V., Caprara, A., and Fischetti, M. (2012a). A lagrangian heuristic for robustness, with an application to train timetabling. *Transportation Science*, 46(1) :124–133.
- Cacchiani, V., Caprara, A., Galli, L., Kroon, L., Maróti, G., and Toth, P. (2012b). Railway rolling stock planning : Robustness against large disruptions. *Transportation Science*, 46(2) :217–232.
- Cacchiani, V., Caprara, A., and Toth, P. (2010a). Scheduling extra freight trains on railway networks. *Transportation Research Part B : Methodological*, 44(2) :215–231.
- Cacchiani, V., Caprara, A., and Toth, P. (2010b). Solving a real-world train-unit assignment problem. *Mathematical programming*, 124(1-2) :207–231.

- Cacchiani, V., Caprara, A., and Toth, P. (2012c). A fast heuristic algorithm for the train unit assignment problem. In *12th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- Cacchiani, V., Caprara, A., and Toth, P. (2019). An effective peak period heuristic for railway rolling stock planning. *Transportation Science*, 53(3) :746–762.
- Cacchiani, V., Huisman, D., Kidd, M., Kroon, L., Toth, P., Veelenturf, L., and Wagenaar, J. (2014). An overview of recovery models and algorithms for real-time railway rescheduling. *Transportation Research Part B : Methodological*, 63 :15–37.
- Cacchiani, V. and Toth, P. (2012). Nominal and robust train timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 219(3) :727–737.
- Cadarso, L. and Marín, Á. (2011). Robust rolling stock in rapid transit networks. *Computers & Operations Research*, 38(8) :1131–1142.
- Cadarso, L. and Marín, Á. (2012). Integration of timetable planning and rolling stock in rapid transit networks. *Annals of Operations Research*, 199(1) :113–135.
- Caimi, G., Kroon, L., and Liebchen, C. (2017). Models for railway timetable optimization : Applicability and applications in practice. *Journal of Rail Transport Planning & Management*, 6(4) :285–312.
- Cambini, R., Gallo, G., and Scutellà, M. G. (1997). Flows on hypergraphs. *Mathematical Programming*, 78(2) :195–217.
- Caprara, A., Fischetti, M., and Toth, P. (2002). Modeling and solving the train timetabling problem. *Operations research*, 50(5) :851–861.
- Caprara, A., Fischetti, M., Toth, P., Vigo, D., and Guida, P. L. (1997). Algorithms for railway crew management. *Mathematical programming*, 79(1-3) :125–141.

- Caprara, A., Kroon, L., Monaci, M., Peeters, M., and Toth, P. (2007). Passenger railway optimization. c. barnhart, g. laporte, eds. *transportation handbooks in operations research and management science*, vol. 12.
- Caprara, A., Kroon, L., and Toth, P. (2010). Optimization problems in passenger railway systems. *Wiley encyclopedia of operations research and management science*.
- Caprara, A., Monaci, M., and Toth, P. (2001). A global method for crew planning in railway applications. In *Computer-Aided Scheduling of Public Transport*, pages 17–36. Springer.
- Caprara, A., Monaci, M., Toth, P., and Guida, P. L. (2006). A lagrangian heuristic algorithm for a real-world train timetabling problem. *Discrete applied mathematics*, 154(5) :738–753.
- Chevrier, R., Pellegrini, P., and Rodriguez, J. (2013). Energy saving in railway timetabling : A bi-objective evolutionary approach for computing alternative running times. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies*, 37 :20–41.
- Chvátal, V. (2003). Claude berge : 5.6. 1926–30.6. 2002. *Graphs and Combinatorics*, 19(1) :1–6.
- Chvatal, V., Chvatal, V., et al. (1983). *Linear programming*. Macmillan.
- Clautiaux, F., Sadykov, R., Vanderbeck, F., and Viaud, Q. (2018). Combining dynamic programming with filtering to solve a four-stage two-dimensional guillotine-cut bounded knapsack problem. *Discrete Optimization*, 29 :18–44.
- Cordeau, J.-F., Soumis, F., and Desrosiers, J. (2000). A benders decomposition approach for the locomotive and car assignment problem. *Transportation science*, 34(2) :133–149.
- Cordeau, J.-F., Soumis, F., and Desrosiers, J. (2001). Simultaneous assignment of locomotives and cars to passenger trains. *Operations research*, 49(4) :531–548.

- Cordeau, J.-F., Toth, P., and Vigo, D. (1998). A survey of optimization models for train routing and scheduling. *Transportation science*, 32(4) :380–404.
- Cottle, R., Johnson, E., and Wets, R. (2007). George b. dantzig (1914–2005). *Notices of the AMS*, 54(3) :344–362.
- Dantzig, G. B. (1998). *Linear programming and extensions*. Princeton university press.
- Dauzère-Pérès, S., De Almeida, D., Guyon, O., and Benhizia, F. (2015). A lagrangian heuristic framework for a real-life integrated planning problem of railway transportation resources. *Transportation Research Part B : Methodological*, 74 :138–150.
- Desrosiers, J., Dumas, Y., Solomon, M. M., and Soumis, F. (1995). Chapter 2 time constrained routing and scheduling. *Handbooks in operations research and management science*, 8 :35–139.
- Fioole, P.-J., Kroon, L., Maróti, G., and Schrijver, A. (2006). A rolling stock circulation model for combining and splitting of passenger trains. *European Journal of Operational Research*, 174(2) :1281–1297.
- Gattermann, P., Harbering, J., and Schöbel, A. (2017). Line pool generation. *Public Transport*, 9(1-2) :7–32.
- Giacco, G. L., D’Ariano, A., and Pacciarelli, D. (2014). Rolling stock rostering optimization under maintenance constraints. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 18(1) :95–105.
- Grimm, B., Borndörfer, R., Reuther, M., and Schlechte, T. (2019). A Cut Separation Approach for the Rolling Stock Rotation Problem with Vehicle Maintenance. In Cacchiani, V. and Marchetti-Spaccamela, A., editors, *19th Symposium on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS 2019)*, volume 75 of *OpenAccess Series in Informatics (OASICS)*, pages 1 :1–1 :12, Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.

- Haahr, J. T., Lusby, R. M., Larsen, J., and Pisinger, D. (2014). A branch-and-price framework for railway rolling stock rescheduling during disruptions. *DTU Management Engineering*.
- Hartog, A., Huisman, D., Abbink, E. J., and Kroon, L. G. (2009). Decision support for crew rostering at ns. *Public Transport*, 1(2) :121–133.
- Heil, J., Hoffmann, K., and Buscher, U. (2019). Railway crew scheduling : models, methods and applications. *European Journal of Operational Research*.
- Huisman, D., Kroon, L. G., Lentink, R. M., and Vromans, M. J. (2005). Operations research in passenger railway transportation. *Statistica Neerlandica*, 59(4) :467–497.
- Jütte, S., Albers, M., Thonemann, U. W., and Haase, K. (2011). Optimizing railway crew scheduling at db schenker. *Interfaces*, 41(2) :109–122.
- Jütte, S. and Thonemann, U. W. (2012). Divide-and-price : A decomposition algorithm for solving large railway crew scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, 219(2) :214–223.
- Kroon, L., Maróti, G., and Nielsen, L. (2014). Rescheduling of railway rolling stock with dynamic passenger flows. *Transportation Science*, 49(2) :165–184.
- Kroon, L. G., Dekker, R., and Vromans, M. J. (2007). Cyclic railway timetabling : a stochastic optimization approach. In *Algorithmic methods for railway optimization*, pages 41–66. Springer.
- Kroon, L. G. and Peeters, L. W. (2003). A variable trip time model for cyclic railway timetabling. *Transportation Science*, 37(2) :198–212.
- Lawler, E. L. and Wood, D. E. (1966). Branch-and-bound methods : A survey. *Operations research*, 14(4) :699–719.

- Liebchen, C. and Möhring, R. H. (2007). The modeling power of the periodic event scheduling problem : railway timetables—and beyond. In *Algorithmic methods for railway optimization*, pages 3–40. Springer.
- Liebchen, C. and Peeters, L. (2002). Some practical aspects of periodic timetabling. In *Operations Research Proceedings 2001*, pages 25–32. Springer.
- Lingaya, N., Cordeau, J.-F., Desaulniers, G., Desrosiers, J., and Soumis, F. (2002). Operational car assignment at via rail canada. *Transportation Research Part B : Methodological*, 36(9) :755–778.
- Lucas, R., Ales, Z., Elloumi, S., and Ramond, F. (2018). Reducing the adaptation costs of a rolling stock schedule with adaptive solution : the case of demand changes.
- Lusby, R. M., Haahr, J. T., Larsen, J., and Pisinger, D. (2017). A branch-and-price algorithm for railway rolling stock rescheduling. *Transportation Research Part B : Methodological*, 99 :228–250.
- Lusby, R. M., Larsen, J., and Bull, S. (2018). A survey on robustness in railway planning. *European Journal of Operational Research*, 266(1) :1–15.
- Marcos, N. (2006). Modélisation et optimisation de la gestion du matériel roulant à la snf.
- Maroti, G. and Kroon, L. (2007). Maintenance routing for train units : the interchange model. *Computers and Operations Research*, 34(4) :1121–1140.
- Martin, R. K., Rardin, R. L., and Campbell, B. A. (1990). Polyhedral characterization of discrete dynamic programming. *Operations research*, 38(1) :127–138.
- Mesquita, M., Moz, M., Pias, A., Paixão, J., Pato, M., and Respício, A. (2011). A new model for the integrated vehicle-crew-rostering problem and a computational study on rosters. *Journal of Scheduling*, 14(4) :319–334.



- Nachtigall, K. (1996). Periodic network optimization with different arc frequencies. *Discrete Applied Mathematics*, 69(1-2) :1–17.
- Nachtigall, K. and Voget, S. (1997). Minimizing waiting times in integrated fixed interval timetables by upgrading railway tracks. *European journal of operational research*, 103(3) :610–627.
- Nielsen, L. K., Kroon, L., and Maróti, G. (2012). A rolling horizon approach for disruption management of railway rolling stock. *European Journal of Operational Research*, 220(2) :496–509.
- Nielsen, M. N., Hove, B., and Clausen, J. (2006). Constructing periodic timetables using mip-a case study from dsb s-train. *International Journal of Operational Research*, 1(3) :213–227.
- Peeters, M. and Kroon, L. (2003). Circulation of Railway Rolling Stock : A Branch-and-Price Approach. Technical report, Erasmus Research Institute of Management (ERIM), ERIM is the joint research institute of the Rotterdam School of Management, Erasmus University and the Erasmus School of Economics (ESE) at Erasmus University Rotterdam.
- Peeters, M. and Kroon, L. (2008). Circulation of railway rolling stock : a branch-and-price approach. *Computers & operations research*, 35(2) :538–556.
- Reuther, M. (2017). Mathematical optimization of rolling stock rotations.
- Scheepmaker, G. M., Goverde, R. M., and Kroon, L. G. (2017). Review of energy-efficient train control and timetabling. *European Journal of Operational Research*, 257(2) :355–376.
- Schöbel, A. (2012). Line planning in public transportation : models and methods. *OR spectrum*, 34(3) :491–510.

- Schöbel, A. (2017). An eigenmodel for iterative line planning, timetabling and vehicle scheduling in public transportation. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies*, 74 :348–365.
- Serafini, P. and Ukovich, W. (1989). A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2(4) :550–581.
- Sparing, D. and Goverde, R. M. (2017). A cycle time optimization model for generating stable periodic railway timetables. *Transportation Research Part B : Methodological*, 98 :198–223.
- Thorlacius, P., Larsen, J., and Laumanns, M. (2015). An integrated rolling stock planning model for the copenhagen suburban passenger railway. *Journal of Rail Transport Planning & Management*, 5(4) :240–262.
- Wagenaar, J., Kroon, L., and Fragkos, I. (2017). Rolling stock rescheduling in passenger railway transportation using dead-heading trips and adjusted passenger demand. *Transportation Research Part B : Methodological*, 101 :140–161.
- Wolsey, L. A. (1998). *Integer programming*. Wiley.
- Wolsey, L. A. and Nemhauser, G. L. (2014). *Integer and combinatorial optimization*. John Wiley & Sons.
- Zhong, Q., Lusby, R. M., Larsen, J., Zhang, Y., and Peng, Q. (2019). Rolling stock scheduling with maintenance requirements at the chinese high-speed railway. *Transportation Research Part B : Methodological*, 126 :24–44.



# Annexes

## A Filtrage par agrégation et désagrégation

Nous exposons ici une généralisation de l'algorithme de résolution présenté dans le chapitre 5. Nous énonçons une proposition dans laquelle nous définissons un filtrage et une projection d'un PLNE. Ensuite, nous déduisons un algorithme permettant de pré-traiter et d'écartier des variables entières.

**Proposition 4:** Soit  $(E)$  et  $(\Phi)$  des programmes linéaires en nombres entiers :

$$\begin{array}{ll}
 (E) : \min e(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j & (\Phi) : \min \phi(y) = \sum_{j=1}^p \sigma_j y_j \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & \forall i \in \llbracket 1..m \rrbracket \quad \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} y_j \geq \beta_i \quad \forall i \in \llbracket 1..q \rrbracket \\
 x_j \geq 0 & \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \quad y_j \geq 0 \quad \forall j \in \llbracket 1..p \rrbracket \\
 x_j \in \mathbb{Z} & \forall j \in \llbracket 1..n \rrbracket \quad y_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \llbracket 1..p \rrbracket
 \end{array}$$

On suppose que  $(E)$  et  $(\Phi)$  sont réalisables et bornés. On note respectivement  $\Theta^E$  et  $\Theta^\Phi$  l'ensemble des solutions optimales de  $(E)$  et  $(\Phi)$ ,  $R^E$  et  $R^\Phi$  respectivement l'ensemble des solutions réalisables de  $(E)$  et  $(\Phi)$ . De plus on suppose que  $(\Phi)$  est défini tel qu'il existe une application  $\tau : R^E \rightarrow R^\Phi$  vérifiant pour tout  $\hat{u} \in R^E$ ,  $\phi(\tau(\hat{u})) \leq e(\hat{u})$ .

Soit  $(\Lambda)$  le problème correspondant à la relaxation continue associée à  $(\Phi)$ ,  $\varphi$  la valeur de la solution optimale de  $(\Lambda)$  et  $\Theta^\Lambda$  l'ensemble des solutions optimales de  $(\Lambda)$ . Pour  $\lambda^* \in \Theta^\Lambda$ ,  $j \in \llbracket 1..p \rrbracket$  on note  $\bar{\sigma}_j^*$  un coût réduit associé à la valeur  $\lambda_j^*$ .

Soit  $\omega$  la valeur d'une solution réalisable de  $(E)$ . Si  $\bar{\sigma}_j^* > \omega - \varphi$  alors :  $\bullet \forall y^* \in \Theta^\Phi, y_j^* = 0$  et  $\bullet \forall \hat{x} \in R^E$  tel que  $\tau(\hat{x})_j \geq 1$ , on a  $\hat{x} \notin \Theta^E$ .

*Démonstration.* On a  $\omega$  est une borne primale de  $(\Phi)$  car  $\phi(\tau(\hat{u})) \leq e(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in R^E$ . Par suite  $y_j^* = 0 \quad \forall y^* \in \Theta^\Phi$  d'après le corollaire 1.

Concernant le second point, soit  $\hat{x} \in R^E$  tel que  $\tau(\hat{x})_j \geq 1$  et  $\bar{\sigma}_j^* > \omega - \varphi$ . On a  $\tau(\hat{x})$  est une solution réalisable de  $(\Phi)$  et  $\phi(\tau(\hat{x})) \leq e(\hat{x})$ . D'où à partir du corollaire 1 :  $\phi(\tau(\hat{x})) > \omega$ . Par suite  $e(\hat{x}) > \omega$  et donc  $\hat{x} \notin \Theta^E$ . □

**Remarque 8.** En pratique, l'objectif est de filtrer des variables du problème "initial"  $(E)$ . Pour se faire, on définit un problème "agrégé" et une application  $\tau$  appelée "projection". Celle-ci est définie de l'espace des solutions réalisable du problème initial vers l'espace des solutions réalisable du problème agrégé (en pratique  $p < n$ ). On a alors si la projection d'une variable est filtrée dans le problème agrégé alors cette variable est filtrée dans le problème initial. Le nombre de variables filtrées dépend de la qualité de la solution réalisable (proche de la valeur optimale) et aussi de la valeur de la relaxation continue du problème agrégé. L'algorithme 6 résume l'approche de résolution.

---

**Algorithme 6 : Méthode de résolution**

---

- 1  $\omega \leftarrow$  Calculer la valeur d'une solution réalisable du problème initial  $E$  ;
  - 2  $(\Phi, \tau) \leftarrow$  Définir un problème agrégé  $\Phi$  et une projection  $\tau$  ;
  - 3  $\phi \leftarrow$  Calculer la valeur de la relaxation linéaire du problème agrégé  $\Phi$  ;
  - 4 Filtrer le problème agrégé  $\Phi$  sachant  $\omega$  et  $\phi$  ;
  - 5 Filtrer le problème initial  $E$  sachant  $\tau$  ;
  - 6 Résoudre le problème initial  $E$  filtré;
-

## B Multi-ensembles

**Définition :** Soit  $E$  un ensemble fini d'éléments distincts. On dit que  $\mathcal{M}$  est un multiensemble fini d'éléments de  $E$  si on associe à chaque élément  $x$  de  $E$  un nombre d'apparitions (ou de répétitions), on parle alors de multiplicité de  $x$ . Formellement, un multiensemble  $\mathcal{M}$  fini d'éléments de  $E$  est défini par une application  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .

$$\mathcal{M} := f : E \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto f(x)$$

$E$  est appelé l'ensemble de base du multiensemble  $\mathcal{M}$  et  $f(x)$  est la multiplicité de l'élément  $x$ . Le multiensemble  $\mathcal{M}$  est vide si l'application  $f$  est nulle ( $f = \theta$ ).

Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux multissembles finis d'éléments de  $E$  définis par deux application  $m$  et  $n$  respectivement. On définit les opérateurs  $\cup, \cap, \uplus, \setminus, \in, \notin$ , sur les multissembles par :

**L'union**  $\cup$  :  $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$  est le multiensemble défini par :

$$\mathcal{M} \cup \mathcal{N} := k : E \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto \max(m(x), n(x))$$

**L'intersection**  $\cap$  :  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  est le multiensemble défini par :

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} := k : E \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto \min(m(x), n(x))$$

**L'union plus**  $\uplus$  :  $\mathcal{M} \uplus \mathcal{N}$  est le multiensemble défini par :

$$\mathcal{M} \uplus \mathcal{N} := k : E \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto m(x) + n(x)$$

**La différence**  $\setminus$  :  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$  est le multiensemble défini par :

$$\mathcal{M} \setminus \mathcal{N} := k : E \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto \max(0, m(x) - n(x))$$

**L'appartenance**  $\in$  et  $\notin$  : Soit  $x$  un élément de  $E$  :  $x \in \mathcal{M} \iff m(x) > 0$  et  $x \notin \mathcal{M} \iff m(x) = 0$

On utilise la notation  $\{\!\!\{ \cdot \}\!\!\}$  pour représenter les multissembles et on autorise la dupli-

cation des éléments dans cette notation afin de capturer la notion de multiplicité. La notation  $\{.\}$  est utilisée pour représenter des ensembles.

### Support, Cardinalité d'un multiensemble $\mathcal{M}$

Soit  $\mathcal{M}$  un multiensemble définie par l'application  $m : E \rightarrow \mathbb{N}$

Le support d'un multiensemble  $\mathcal{M}$  correspond à l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à  $\mathcal{M}$ , *i.e* l'ensemble des éléments ayant une multiplicité non nulle. Dans la suite le support du multiensemble  $\mathcal{M}$  sera noté **support**( $\mathcal{M}$ ) et on a **support**( $\mathcal{M}$ ) =  $\bigcup_{x \in E: x \in \mathcal{M}} \{x\}$

La cardinalité d'un multiensemble  $\mathcal{M}$  correspond à la somme des multiplicités des éléments appartenant au support de  $\mathcal{M}$ . Dans la suite la cardinalité du multiensemble  $\mathcal{M}$  sera noté **card**( $\mathcal{M}$ ) et on a : **card**( $\mathcal{M}$ ) =  $\sum_{x \in \text{support}(\mathcal{M})} m(x) = \sum_{x \in E} m(x)$

On omet de définir à chaque fois l'ensemble de base ainsi que l'application de multiplicité. La notation **card**( $x, \mathcal{M}$ ) désigne la multiplicité d'un élément  $x$  dans  $\mathcal{M}$ , **card**( $x, \mathcal{M}$ ) =  $m(x)$

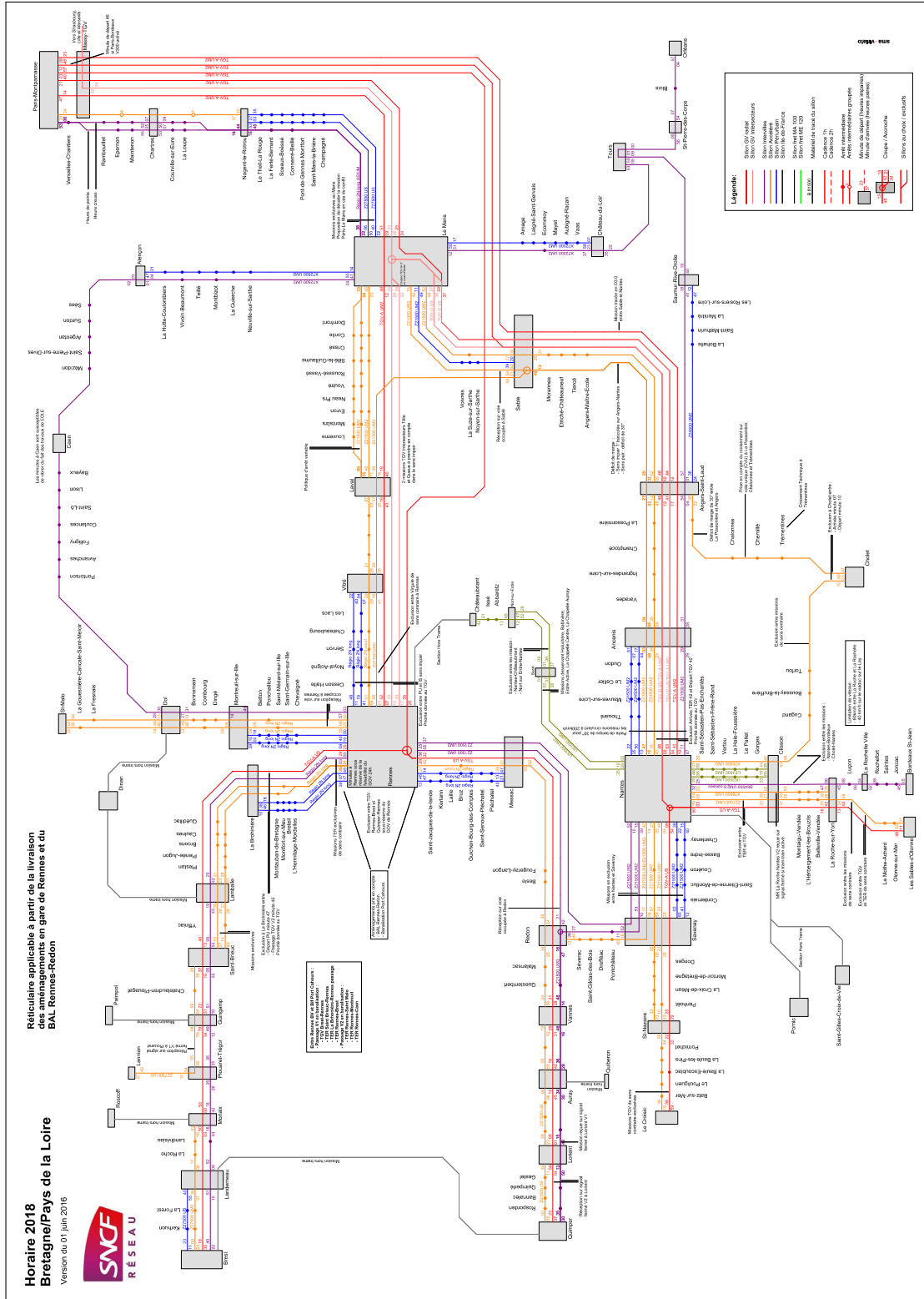
### Somme $\Sigma$ sur les multiensembles :

Soit  $\mathcal{M}$  un multiensemble, la somme des éléments de  $\mathcal{M}$  est notée " $\sum_{x \in \mathcal{M}} x$ " tel que :

$\sum_{x \in \mathcal{M}} x = \sum_{x \in \text{support}(\mathcal{M})} \mathbf{card}(x, \mathcal{M})x$ . La première somme est définie sur les multiensembles et la seconde somme est définie sur les ensembles.

La somme sur un ensemble  $\Xi$  de multi-ensembles est le multi-ensemble  $\xi = \sum_{\mathcal{N} \in \Xi} \mathcal{N}$  tel que **support**( $\xi$ ) =  $\bigcup_{\mathcal{N} \in \Xi} \text{support}(\mathcal{N})$  et **card**( $u, \xi$ ) =  $\sum_{\mathcal{N} \in \Xi} \mathbf{card}(u, \mathcal{N})$ .

# C Réticulaire - Document de SnCF Réseau





# Table des figures

1.1	Acteurs intervenant dans le transport ferroviaire en région . . . . .	24
1.2	Exemple de grille horaire . . . . .	26
1.3	Segmentation de l'offre . . . . .	26
1.4	Bi-tranches : Origine Bordeaux . . . . .	29
1.5	Bi-tranche : Destination Bordeaux . . . . .	29
1.6	Portion du graphe réticulaire des régions Bretagne & Pays de la Loire . . .	29
1.7	Portion d'un roulement matériel . . . . .	31
1.8	Rame automotrice . . . . .	32
1.9	Configuration . . . . .	32
1.10	Étapes de planification du matériel roulant . . . . .	32
1.11	Topologie avec rebroussements . . . . .	33
1.12	Topologie sans rebroussements . . . . .	33
1.13	B : Gare traversante . . . . .	34
1.14	B : Gare en cul de sac . . . . .	34
2.1	Hypergraphe orienté . . . . .	45
2.2	Exemple de modélisation . . . . .	47
3.1	Étapes de conception du plan de transport. . . . .	50
3.2	Concept de modélisation utilisé dans <a href="#">Borndörfer et al. [2015]</a> . . . . .	63
3.3	Périmètre du problème de TSRP à la SnCF . . . . .	65
4.1	Fonction $\theta_m, m \in \mathcal{M}$ . . . . .	73
4.2	Représentation des nœuds <i>trains</i> dans un espace tridimensionnel . . . . .	75

4.3	Représentation des nœuds <i>dépôts</i> dans un espace tridimensionnel . . . . .	76
4.4	Exemple d' <i>hyperarcs trains</i> . . . . .	79
4.5	<i>Hyperarcs techniques</i> pour une gare et un type de rame donnés . . . . .	79
4.6	Exemples d' <i>hyperarcs connexions</i> en gare $D$ . . . . .	82
4.7	Intervalles temporels glissants $\tau$ . . . . .	84
5.1	Étapes d'agrégation de l'hypergraphe . . . . .	95
5.2	Agrégats : $F_{R',s}^\alpha$ , $F_{R',s}^\Omega$ , $F_{R',s}^t$ . . . . .	96
6.1	MVP . . . . .	110
6.2	Étapes structurante d'un test de simulation . . . . .	111
6.3	Écran d'accueil . . . . .	111
6.4	Écran pour lancer une simulation . . . . .	112
6.5	Roulement matériel . . . . .	112
6.6	Grille horaire . . . . .	113
6.7	Graphique espace-temps . . . . .	113

# Liste des tableaux

1.1 Synthèse des critères du problème de TSRP . . . . .	39
3.1 Bilan de la revue de la littérature . . . . .	67
4.1 Caractéristiques des instances . . . . .	88
4.2 Résolution directe du modèle <b>TSRP</b> . . . . .	89
4.3 Synthèse de modélisation . . . . .	91
5.1 Comparaison entre la résolution directe et l'algorithme de filtrage avec $\xi \in \{6, 8, 10, 15\}$ . . . . .	104
5.2 Comparaison entre la résolution directe et l'algorithme de filtrage avec $\xi \in \{0.7, 1, 2, 4\}$ . . . . .	105