



HAL
open science

Cycles dans les graphes et G-configurations

Jean-Claude Bermond

► **To cite this version:**

Jean-Claude Bermond. Cycles dans les graphes et G-configurations. Mathématique discrète [cs.DM]. University Paris 11, 1975. tel-02376958

HAL Id: tel-02376958

<https://inria.hal.science/tel-02376958>

Submitted on 22 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

THESES DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentées

A L'UNIVERSITE PARIS XI

par

JEAN-CLAUDE BERMOND

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

1^{ère} thèse : CYCLES DANS LES GRAPHS
ET G-CONFIGURATIONS

2^{ème} thèse : SUR LE MODELE DE TURBULENCE DE B. MANDELBROT

soutenues le 7 Avril 1975, devant la Commission d'examen

MM.	H. DELANGE	<i>Président</i>
	P. CARTIER	<i>Rapporteur</i>
	C. BERGE	<i>Examineurs</i>
	P. ERDÖS	
	J-P. KAHANE	

J'exprime toute ma reconnaissance à :

Monsieur le Professeur H. DELANGE qui a bien voulu présider le jury de cette thèse .

Monsieur le Professeur P. CARTIER qui a accepté d'en être le rapporteur .

Monsieur le Professeur J-P. KAHANE qui m'a proposé un intéressant sujet de seconde thèse .

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur le Professeur P. ERDÖS pour le grand honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre du jury .

Il m'est également très agréable de remercier Messieurs les Professeurs C. BERGE et P. ROSENSTIEHL pour les conseils et encouragements amicaux, qu'ils n'ont cessé de me prodiguer au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je ne saurais oublier nos réunions hebdomadaires de travail, tenues au C.M.S. ; j'y ai trouvé une atmosphère très favorable à ma recherche et je tiens à en remercier tous les participants .

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

CHAPITRE I : Décomposition de K_n^* en k-circuits et G-configurations.

I.1	Introduction	I.1
I.2	Méthode des différences (orientées).	I.5
I.3	Méthode de composition avec les graphes bipartis.	I.19
I.4	Méthode de composition avec les produits lexicographiques.	I.38
I.5	Décomposition de K_n^* en 3-circuits.	I.51
I.6	Problèmes de recouvrement et de pavage.	I.52
	Bibliographie .	I.61-63

CHAPITRE II : Cycles hamiltoniens et généralisations.

II.1	Rappels sur l'existence de cycles hamiltoniens.	II.1
II.2	Cycles élémentaires de longueur $\geq c$.	II.2
II.3	Cycles pseudo-hamiltoniens.	II.10
II.4	Arbres maximaux ayant au plus h sommets pendants.	II.14
II.5	Graphes fortement (p,q)-hamiltoniens.	II.18
II.6	Cas orienté.	II.21
II.7	Hamiltonisme de G et L(G).	II.25
	Bibliographie.	II.29-31

CHAPITRE III : Hypergraphe des circuits d'un graphe.

III.1	(Annexe B).	III.1
III.2	(Annexe C).	III.2
III.3	Nouveaux résultats.	III.3-6

CHAPITRE IV : Nombres de Ramsey pour les graphes orientés.

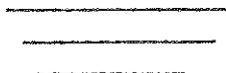
IV.1

CHAPITRE V : Hypergraphes r-parti h-complet .

V.1	Isomorphisme des hypergraphes h-parti complet.	V.1
V.2	Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet.	V.5
V.3	Nombre chromatique total du graphe r-parti complet.	V.5
	Bibliographie.	V.6

ANNEXES

<i>Annexe A</i> : Graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe	A1 - A10
<i>Annexe B</i> : Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux.	B1 - B21
<i>Annexe C</i> : The circuit hypergraph of a tournament.	C1 - C16
<i>Annexe D</i> : Some Ramsey numbers for directed graphs.	D1 - D9
<i>Annexe E</i> : Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet.	E1 - E20
<i>Annexe F</i> : Nombre chromatique total du graphe r-parti complet.	F1 - F7
<i>Annexe G</i> : l-graphes réguliers minimaux de girth donné.	G1 - G11



INTRODUCTION

La première partie de cette thèse (chap. I) traite d'une extension graphique de la théorie des configurations combinatoires. La théorie classique des configurations combinatoires (en anglais designs) fut élaborée vers 1925 pour les besoins de la statistique (plans d'expérience) avec les travaux de R.A. Fisher, puis s'est développée pour elle-même avec les travaux de R.C. Bose, R.H. Bruck, M. Hall, H. Hanani, D.K. Ray-Chaudhuri, H.J. Ryser, R.M. Wilson ... , qui utilisent la théorie des groupes, les géométries finies et la théorie des nombres.

Une configuration combinatoire classique, plus précisément une (n, k, λ) -configuration est définie comme une famille de parties à k éléments, d'un ensemble fini X à n éléments, telle que toute paire d'éléments de X appartienne à exactement λ parties. Le point de vue adopté ici est différent : plutôt que de considérer des parties de X , nous considérons des parties de $P_2(X)$ ou de $X \times X$. (On note par $P_2(X)$ l'ensemble des parties à 2 éléments de X). Plus exactement notons par λK_n le multigraphe complet (non orienté), de multiplicité λ , à n sommets : pour toute paire de sommets il existe λ arêtes ayant ces deux sommets comme extrémités (dans le cas $\lambda=1$ nous écrirons, suivant l'usage, K_n au lieu de $1K_n$) ; alors une (n, k, λ) -configuration est une partition des arêtes de λK_n en sous-graphes partiels complets à k sommets (graphes isomorphes à K_k). Plus généralement, G étant un graphe simple à k sommets, nous définissons une (n, k, λ) G -configuration comme une partition des arêtes de λK_n en sous-graphes partiels isomorphes à G . Dans le cas où G est le graphe complet K_k , on retrouve les configurations classiques. On a une définition analogue dans le cas où G est un 1-graphe (graphe orienté), une (n, k, λ) G -configuration est une partition des arcs de λK_n^* en sous-graphes partiels isomorphes à G ; λK_n^* désigne le λ -graphe complet symétrique orienté (pour tout couple de sommets (x, y) il existe λ arcs d'extrémité initiale x et terminale y).

Nous étudions ici le problème de l'existence des G -configurations ; exactement G étant donné ou la structure de G étant donnée (par exemple G est un cycle, circuit..) nous cherchons pour quelles valeurs de n, k, λ il existe une (n, k, λ) G -configuration. Par exemple nous montrons que si G est un circuit (orienté) de longueur 3, il existe une $(n, 3, 1)$ G -configuration pour $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n \neq 6$, répondant ainsi à une conjecture de C. Berge. Nous développons diverses méthodes, pour établir l'existence d'une G -configuration, certaines généralisant des méthodes utilisées dans la théorie des configurations classiques, d'autres nouvelles. Nous appliquons ces méthodes surtout au cas où G est un circuit.

Dans une deuxième partie (chap. II, III, IV) nous considérons divers problèmes concernant les cycles dans les graphes, certains problèmes ont été imaginés par nous-mêmes, d'autres posés en conjectures dans la littérature mathématique. Un problème non résolu de la théorie des graphes, dû à Hamilton (1859) est de trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien (cycle qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe) dans un graphe. Nous étudions dans le chapitre II diverses généralisations de la notion de cycles hamiltoniens, résolvant en particulier des conjectures de J.L. Jolivet (1974) et M. Las Vergnas (1972). Nous étudions aussi les cycles hamiltoniens du graphe représentatif des arêtes d'un graphe G (graphe dont les sommets représentent les arêtes de G , deux sommets étant adjacents, si les arêtes qu'ils représentent ont une extrémité commune), et nous caractérisons le graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe (Annexe A).

Un autre problème, qui se pose à la fois en théorie des comparaisons par paires (introduit par P. Slater) et en théorie des tournois (introduit par P. Erdős et J.W. Moon) est de déterminer le nombre minimum d'arcs qu'il faut supprimer dans un tournoi (ou dans un l -graphe antisymétrique) pour obtenir un l -graphe sans circuits. Nous considérons ce problème d'un point de vue "hypergraphe" et résolvons une conjecture de A. Kotzig (1972) en utilisant une méthode analogue à celle développée au chapitre I.

Nous résolvons aussi partiellement une conjecture de M. Behzad, G. Chartrand et C.E. Wall concernant les circuits de longueur minimum d'un graphe (Annexe G).

Dans une troisième partie (chap. V) nous étudions divers problèmes sur les hypergraphes q parti h -complet : hypergraphes dont l'ensemble des sommets X est l'union de q ensembles deux à deux disjoints, X_i ($1 \leq i \leq q$) de même cardinalité et dont les arêtes sont les parties E , à h éléments, de X , telles que $|E \cap X_i| \leq 1$ pour $1 \leq i \leq q$. Ces hypergraphes généralisent les graphes complets et biparti-complets. En particulier nous caractérisons les graphes représentatifs de ces hypergraphes dans le cas $q = h$, répondant ainsi à un problème de B. Grünbaum (1969) et nous résolvons une conjecture de R. Laskar et W. Hare (1972) concernant le nombre chromatique total du graphe q -parti complet.

Dans un article récent avec J.C. Meyer, nous avons montré que l'existence des configurations classiques (étudiées au chap. I) était reliée à la détermination de certains paramètres des hypergraphes q -parti h -complets [14].

Formellement, cette thèse comporte cinq chapitres. Les deux premiers sont formés essentiellement de résultats non publiés ou juste soumis pour publications et les trois derniers d'articles parus ou à paraître. Nous avons indiqué dans ces chapitres juste les résultats essentiels et éventuellement des compléments. Nous avons regroupé les articles en fin de la thèse sous forme d'annexes (A,B,C,D,E,F,G), de manière à être complet.

Nous indiquons maintenant les résultats principaux nouveaux, avec s'il y a lieu référence des articles où figurent ces résultats. Nous joignons à cet effet une liste de nos articles.

RESULTATS PRINCIPAUX NOUVEAUX

CHAP. I : Décomposition de K_n^* en k -circuits et G -configurations

Nous développons 3 méthodes pour résoudre le problème de l'existence d'une G -configuration :

. la première : "méthode des différences (orientées)" généralise la notion de familles à différences de la théorie des configurations classiques (I.2). Comme application nous montrons l'existence d'une $(n+1, n, 1) \vec{C}_n$ -configuration [11] et d'une $(2n, n, 1) \vec{C}_n$ -configuration. \vec{C}_n désigne le circuit orienté de longueur n .

. la deuxième méthode (paragraphe I.3) est une méthode de composition avec les graphes bipartis. Cette méthode est très efficace mais ne s'applique pas pour tous les graphes G . Elle nous permet de résoudre le problème de l'existence des $(n, k, \lambda) G$ -configurations lorsque G est un circuit (ou cycle) de longueur paire. (Une partie des résultats figure dans [11]), ou lorsque G est une chaîne (ou chemin). Dans ce dernier cas nous retrouvons des résultats déjà connus dans la littérature concernant l'existence de G -configurations où G est une chaîne (connu en anglais sous le nom d' "handcuffed designs"), nos preuves étant nettement plus courtes que celles connues et nous permettent d'obtenir de nouveaux résultats.

. la troisième méthode (paragraphe I.4) est une méthode de composition avec les produits lexicographiques (les résultats sont à paraître dans [13]). Nous obtenons ainsi une preuve de l'existence des $(n, 3, 1) \vec{C}_3$ -configurations pour $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n \neq 6$. Ce résultat qui démontre une conjecture de C. Berge (1972) a été montré indépendamment par R.H. Bruck d'une part et N.S. Mendelsohn d'autre part. Nous avons donné dans [7] une première preuve. (Nous la rappelons dans le paragraphe I.5). La preuve donnée en I.4. est la plus courte des quatre preuves existantes. Nous démontrons aussi qu'il existe une $(n, 5, 1) \vec{C}_5$ -configuration si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{5}$.

Enfin dans (I.6) nous étendons les méthodes aux problèmes de recouvrement et de "packings".

CHAP. II : Cycles hamiltoniens et généralisations

. En (II.2) nous améliorons des conditions suffisantes d'existence d'un cycle élémentaire de longueur $\geq c$, dues à L. Posa et J.A. Bondy.

. ces améliorations nous permettent en II.3 de résoudre une conjecture de J.L. Jolivet (1974) sur l'existence de cycles pseudo-hamiltoniens (cycles non élémentaires passant une fois au moins par chaque sommet).

. En II.4 nous résolvons une conjecture de M. Las Vergnas (1972) sur l'existence d'arbres maximaux ayant au plus h sommets pendants (résultat publié dans [3]).

. En II.6 nous donnons des résultats pour le cas des graphes orientés (une partie de ces résultats est parue dans [1]).

. En II.7 nous montrons que le carré du graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe admet des cycles de toute longueur (résultat obtenu avec P. Rosenstiehl [5]).

. Ceci nous a amené à caractériser les graphes représentatifs des arêtes d'un multigraphe. Dans l'article [4] (que nous donnons en annexe A), nous donnons avec J.C. Meyer des caractérisations en termes de cliques maximales et d'exclusion de sous-graphes.

CHAP. III : Hypergraphe des circuits d'un graphe

Les résultats de ce chapitre sont parus dans les articles [2] et [10] et constituent les annexes B et C respectivement.

Appelons $\tau(G)$ le nombre minimum d'arcs qu'il faut supprimer dans un 1-graphe G antisymétrique pour obtenir un graphe sans circuits et soit $f(n) = \max \tau(G)$ le maximum étant pris sur les 1-graphes antisymétriques à n sommets. Nous donnons divers résultats sur $f(n)$ et en particulier prouvons (dans l'annexe C) le théorème suivant conjecturé par A. Kotzig (1972) : pour $n \geq 10$, $f(n) > \pi(n)$ où

$\pi(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$ est le nombre maximum de cycles deux à deux arêtes disjointes de K_n .

CHAP. IV : Nombres de Ramsey pour les graphes orientés

Les résultats sont parus dans [9] et sont donnés en Annexe D.

G_1, \dots, G_k étant k graphes orientés, on appelle nombre de Ramsey $R(G_1, \dots, G_k)$ le plus petit entier n tel que pour toute partition (U_1, \dots, U_k) des arcs de K_n^* , il

existe un entier i tel que le graphe partiel engendré par U_i contienne G_i comme sous-graphe. Nous prouvons qu'un tel nombre est fini si au plus un G_i contient un circuit et dans ce cas nous donnons une borne supérieure. Nous déterminons $R(\overline{P}_{n_1}, \dots, \overline{P}_{n_{k-1}}, G)$ ou \overline{P}_{n_i} désigne un chemin à n_i arêtes et où G est un 1-graphe qui admet un circuit hamiltonien.

CHAP. V : Hypergraphes q-parti h-complets

En V.1 nous donnons une condition suffisante pour qu'un hypergraphe H soit fortement isomorphe à un hypergraphe h-parti complet ($q=h$).

Les résultats de V.2 sont parus dans [6] et sont donnés en annexe E. Nous caractérisons les graphes représentatifs des arêtes d'un hypergraphe h-parti complet. Ces caractérisations généralisent des résultats antérieurs de A.J. Hoffman, J.W. Moon et S.S. Shrikhande dans le cas $h=2$ et des résultats de R. Laskar, M. Aigner et A.R. Rao dans le cas $h=3$ ("cubic lattice graphs"). L'existence de caractérisation du type que nous donnons répond à une demande de Grünbaum (1969).

Les résultats de V.3 sont parus dans [8] et sont donnés en Annexe F. Nous déterminons le nombre chromatique total du graphe r-parti complet, résolvant ainsi une conjecture de R. Laskar et W. Hare (1972).

Enfin en annexe G (résultats parus dans [12]) nous prouvons certains cas d'une conjecture de M. Behzad, G. Chartrand et C.E. Wall (1970). Soit $f(r,g)$ le nombre minimum de sommets que peut avoir un 1-graphe G , r-régulier, de "maille" g (la maille est la longueur du plus petit circuit). Nous montrons que si $r=2$ et $r=3$ $f(r,g) = r(g-1)+1$.

- (1) Graphes orientés fortement k -connexes et graphes k -arc hamiltoniens, C.R. Acad. Sci. Paris, A, 271, 1970, 141-144.
- (2) Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuit maximaux, Math. Sci. Num., 37, 1972, 5-25.
- (3) Arbres maximaux ayant au plus h sommets pendants, C.R. Acad. Sci. Paris, A, 274, 1972, 1878-1881.
- (4) avec J.-C. MEYER : Graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe, J. Math. pures et appl., 52, 1973, 299-308.
- (5) avec P. ROSENSTIEHL : Pancyclisme du carré du graphe aux arêtes d'un graphe, Cahiers du C.W.R.O., Bruxelles, 15, 1973, 285-286.
- (6) Graphe représentatif de l'hypergraphe h -parti complet, Hypergraph Seminar, Proc. Coll. Columbus Ohio, 1972, (eds. C. Berge et D.K. Ray Chaudhuri), Springer Verlag, Lecture Notes 411, 1974, 34-53.
- (7) An application of the solution of Kirkman's Schoolgirl Problem : the decomposition of the symmetric oriented complete graph into 3-circuits, Discrete Mathematics, 8, 1974, 301-304.
- (8) Nombre chromatique total du graphe r -parti complet, J. London Math. Soc., 9, 1974,
- (9) Some Ramsey numbers for directed graphs, Discrete Mathematics, 9, 1974, 313-321.
- (10) The circuit hypergraph of a tournament, Proc. Coll. Math. Soc. János Bolyai Infinite and finite sets, Keszthely, Hongrie, 1973, 165-180.
- (11) avec V. FABER : Decomposition of K_n^* into k -circuits, à paraître.
- (12) 1-graphes réguliers minimaux de girth donnée, à paraître Proc. Journées franco belges sur les graphes et hypergraphes, Mai 1974.
- (13) The decomposition of K_n^* into k -circuits and balanced G -designs, à paraître Proc. 2nd. symposium on graph theory, Prague, Juin 1974.
- (14) avec J.-C. MEYER : Hypergraphes et configurations, à paraître Proc. Journées franco belges sur les graphes et hypergraphes, Mai 1974.

CHAPITRE I

DECOMPOSITION DE K_n^* EN k -CIRCUITS ET G - CONFIGURATIONS

1.1. Introduction

K_n désigne le graphe simple complet à n sommets : deux sommets quelconques sont joints par une arête et une seule.

K_n^* désigne le 1 graphe complet symétrique à n sommets : deux sommets quelconques sont joints par un arc et un seul.

Un k -cycle (resp. k -circuit) est un cycle (circuit) élémentaire de longueur k . Nous noterons un k -cycle (k -circuit) par la suite de ses sommets :

$(x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

Dans ce chapitre nous étudions essentiellement le problème suivant :
pour quelles valeurs de n peut-on partitionner les arcs de K_n^* en k -circuits,
c'est-à-dire pour quelles valeurs de n , K_n^* est-il décomposable en k -circuits 2 à 2 disjoints au sens des arcs. Dans la suite, lorsque nous emploierons l'expression : " K_n^* est décomposable en k -circuits" il sera sous entendu qu'ils sont 2 à 2 arc-disjoints. Une condition nécessaire est que le nombre d'arcs de K_n^* : $n(n-1)$ soit multiple de k , et que $n \geq k$.

(I. 1.1) Si K_n^* est décomposable en k -circuits, alors $n \geq k$ et $n(n-1) \equiv 0 \pmod{k}$.

Dans la suite nous montrerons que, pour les cas résolus, cette condition est presque toujours suffisante. Nous conjecturons que :

(I. 1.2) Conjecture. K_n^* ($n \geq k$) est décomposable en k -circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{k}$ excepté pour $n = 6, k = 3$; $n = 4 = k$; $n = 6 = k$.

Remarque : La conjecture I.1.2, dans le cas $k = 3$, a été proposée par C. Berge. Notre intérêt dans ce problème a pour origine cette conjecture et une fois que nous avons pu la résoudre (I.4 et I.5), des discussions avec V. Faber, qui s'intéressait au cas $k = 4$ pour des problèmes de graphes planaires et surfaces de genre plus élevé. Une partie des résultats ci-dessous a été obtenue en collaboration avec V. Faber ils seront signalés par la référence [B6]

Décomposition de K_n en k -cycles.

Le problème analogue concernant la décomposition de K_n en k -cycles (2 à 2 arêtes-disjoints) a été étudié par A. Kotzig [K2] et A. Rosa [R3, R4]. Les conditions nécessaires dans ce cas sont que :

- i) n soit impair : le degré de chaque sommet devant être pair.
- ii) $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2k}$ le nombre d'arêtes étant multiple de k .

A. Kotzig [K2] a montré que la condition est suffisante si $k \equiv 0 \pmod{4}$ et $n = 2pk + 1$; A. Rosa a montré qu'elle était suffisante si $k \equiv 2 \pmod{4}$ et $n = 2pk + 1$ dans [R4] ; et si k impair et $n = 2pk + 1$ ou $n = 2pk + k$ dans [R3].

G- configurations

Le problème de la décomposition de K_n^* (K_n) en k -circuits (k -cycles) est un cas particulier du problème de l'existence d'une G-configuration. (Nous donnons ici la définition en termes de graphes). λK_n (λK_n^*) désigne le multigraphe complet (λ -graphe complet symétrique) à n sommets : deux sommets quelconques sont joints par λ arêtes (arcs). G désignant un graphe simple (1-graphe) à k sommets, une (n, k, λ) G-configuration consiste en une partition des arêtes (arcs) de λK_n (λK_n^*) en sous graphes partiels isomorphes à G. Si de plus chaque sommet appartient au même nombre de sous graphes partiels nous dirons qu'on a une (n, k, λ) G-configuration équilibrée. Dans le cas où G est un graphe simple cette définition a été introduite par P. Hell et A. Rosa [H3] sous le nom de "balanced G-configuration".

Un cas important et très étudié est $G = K_k$, dans ce cas une (n, k, λ) K_k -configuration n'est autre qu'une (n, k, λ) -configuration (voir le cours de l'auteur [B4]) appelée aussi plan équilibré ou B.I.B.D (Balanced incomplete block designs) cf. M. Hall [H1]. Une définition équivalente d'une (n, k, λ) -configuration est : c'est un système de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments telle que toute paire d'éléments appartienne à exactement λ parties.

Notre problème correspond au cas où $G = \vec{C}_k$ (k -circuit). D'autres cas ont été étudiés dans la littérature en plus de $G = C_k$ (k -cycle).*

- G est une k -chaîne (chaîne ayant k sommets) sous le nom d'"handcuffed designs" par P. Hell et A. Rosa [H3] ; S.H.Y Hung et N.S. Mendelsohn [H8] ; J.F. Lawless [L1, L2].

- G est un graphe biparti : C. Huang et A. Rosa [H5] et C. Huang [H6].

- G est le tournoi transitif à 3 sommets S.H.Y Hung et N.S. Mendelsohn [H9]

Remarque : 1 dans les cas où $G = K_k$ ou G est un k -circuit (k -cycle) ou d'une manière générale si G est régulier ($d(x) = cte$) ou si G est un 1-graphe fortement régulier ($d^+(x) = d^-(x) = cte$) alors une (n, k, λ) G -configuration est équilibrée. Le paramètre r nombre de sous graphes partiels isomorphes à G , qui contiennent un sommet quelconque x est donné par $r = \lambda(n-1)/d$ où d est le degré (ou demi degré extérieur) d'un point quelconque de G .

2. G étant un graphe simple soit G^* le 1-graphe symétrique obtenu à partir de G en associant à chaque arête de G , $\{x, y\}$ les 2 arcs opposés (x, y) et (y, x) . On a alors

(I.1.3) : L'existence d'une (n, k, λ) G -configuration (équilibrée) est équivalente à l'existence d'une (n, k, λ) G^* -configuration (équilibrée).

Démonstration :- Il suffit d'associer à chaque sous graphe partiel de la décomposition de λK_n , isomorphe à G , le sous graphe partiel, de λK_n^* , symétrique, isomorphe à G^* et réciproquement.

*

D'autres résultats concernant le cas $G = C_k$ apparaissent dans [H7]

De même G étant un graphe simple, soit \vec{G} un 1-graphe antisymétrique obtenu à partir de G en orientant les arêtes de \vec{G} d'une certaine manière.

(I.1.4) Si \vec{G} est isomorphe à son opposé \overleftarrow{G} , alors l'existence d'une (n,k,λ) -configuration (équilibrée) entraîne l'existence d'une (n,k,λ) G -configuration (équilibrée).

Si \vec{G} est 1-graphe antisymétrique, soit G le graphe simple sous jacent c'est-à-dire obtenu en associant à l'arc (x,y) de \vec{G} l'arête $\{x,y\}$.

(I.1.5) L'existence d'une (n,k,λ) \vec{G} -configuration (équilibrée) entraîne l'existence d'une $(n,k,2\lambda)$ G -configuration (équilibrée).

Démonstration : A chaque sous graphe partiel de λK_n^* isomorphe à \vec{G} , associons le sous graphe partiel sous jacent, isomorphe à G , de $2\lambda K_n$ (car aux λ arcs opposés (xy) et (yx) de λK_n^* sont associés 2λ arêtes $\{xy\}$ de λK_n).

La réciproque de la proposition I.1.5 est fautive comme le montre l'exemple suivant : il existe une $(6,3,2)$ G -configuration avec $G = C_3 = K_3$ (résultat classique voir M.Hall [H1] P 291 n° 4), mais comme nous le verrons au I.2.22 il n'existe pas de $(6,3,1)$ \vec{G} -configuration avec $\vec{G} = \vec{C}_3$ (3-circuit).

Signalons enfin la proposition suivante évidente.

(I.1.6) : l'existence d'une (n,k,λ_1) G -configuration (équilibrée) et d'une (n,k,λ_2) G -configuration (équilibrée) l'existence d'une $(n,k,p\lambda_1+q\lambda_2)$ G -configuration (équilibrée).

Nous allons développer 3 méthodes pour résoudre notre problème. Ces méthodes s'appliquent aussi aux autres cas et nous permettront de trouver de nouveaux théorèmes ou d'obtenir de manière plus courte et plus unifiée des résultats connus. Pour ne pas alourdir l'exposé nous donnerons les démonstrations complètes pour les k -circuits et simplement les résultats (lorsque les démonstrations sont identiques) dans les autres cas.

I.2 Méthode des différences (orientées)

Nous allons donner un certain nombre de lemmes, basés sur la même idée. Ces lemmes nous permettront de construire des (n, k, λ) G -configurations ; nous appliquerons ces constructions essentiellement au cas où G est un k -circuit.

Dans ce paragraphe Γ désigne un groupe, non nécessairement abélien, noté additivement. Dans les exemples Γ sera $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le groupe des entiers relatifs modulo n . Si G est un l -graphe ayant pour sommets les éléments de Γ : $G = (\Gamma, U)$ et si $g \in \Gamma$, $G+g$ désigne le l -graphe ayant pour sommets les éléments de Γ et pour arcs les couples $(x+g, y+g)$ avec (x, y) arc de G . On définit de même $G+g$ pour un graphe simple.

(I.2.1) Lemme : Soit Γ un groupe d'ordre n , et soit $G_i = (\Gamma, U_i)$ ($i \in I$) une famille de l -graphes ayant pour sommets les éléments de Γ . A chaque arc $u = (x, y)$ de U_i ($i \in I$), associons l'élément de Γ : $d(u) = y-x$. Il y a équivalence entre :

(i) la famille $\{d(u) : u \in U_i, i \in I\}$ contient exactement λ éléments égaux à δ où δ est un élément de $\Gamma - \{0\}$.

(ii) Tout arc (x, y) de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $y-x = \delta$ apparaît exactement λ fois dans la famille $\{G_i+g : g \in \Gamma, i \in I\}$.

Démonstration : Soit (x, y) un arc de $\Gamma \times \Gamma$, tel que $y-x = \delta$. Il y a équivalence entre (x, y) est un arc de G_i+g et il existe un arc u de G_i vérifiant $d(u)=\delta$, d'où l'équivalence du lemme.

(I.2.2) Avec les notations du lemme il y a équivalence entre :

(i) les éléments de $\{d(u) : u \in U_i, i \in I\}$ sont tous distincts.

(ii) les l -graphes $\{G_i+g : g \in \Gamma, i \in I\}$ sont 2 à 2 arc disjoints.

C'est une conséquence du lemme avec $\lambda = 1$ et δ prenant successivement chaque valeur de l'ensemble $\{d(u) : u \in U_i, i \in I\}$.

Convention : dans la suite nous supposons que G est un graphe sans points isolés et nous dirons par abus de langage que G_i est isomorphe à G , si G_i moins ses points isolés est isomorphe à G .

(I.2.3) Avec les notations du lemme il y a équivalence entre :

(i) les 1-graphes G_i sont tous isomorphes à un 1-graphe G d'ordre k et la famille $\{d(u) : u \in U_i, i \in I\}$ contient tout élément de $\Gamma - \{0\}$ exactement λ fois.

(ii) les 1-graphes $\{G_i + g : g \in \Gamma, i \in I\}$ forment une (n, k, λ) G -configuration équilibrée.

[(ii) signifie qu'il existe une (n, k, λ) G -configuration consistant en la partition des arcs de λK_n^* , en sous graphes partiels, qui sont les $\{G_i + g : g \in \Gamma, i \in I\}$.]

La proposition (I.2.3) s'obtient en appliquant le lemme à chaque élément de $\Gamma - \{0\}$. La configuration est équilibrée par construction.

(I.2.4) Théorème : si n est impair, $n \geq 5$, K_n^* est décomposable en $(n-1)$ -circuit. c'est-à-dire il existe une $(n, n-1, 1) \vec{C}_{n-1}$ -configuration.

[Ce théorème figure dans [E6], mais la construction donnée ici est différente.]

Démonstration : Soit $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et \vec{C}_0 le $(n-1)$ -circuit :

$\vec{C}_0 = (\dots, \alpha, n-1-\alpha, \dots, \beta, n-2-\beta, \dots, 0)$ avec α et β entiers tels

que $0 \leq \alpha \leq [\frac{n}{4}] - 1$ et $[\frac{n}{4}] \leq \beta \leq [\frac{n}{2}] - 1$. Par $[x]$ on désigne la partie entière de x . On vérifie que \vec{C}_0 est bien $(n-1)$ -circuit et que

$\{d(u) : u \text{ arc de } \vec{C}_0\} = \Gamma - \{0\}$. On en déduit d'après (I.2.3) l'existence d'une $(n, n-1, 1) \vec{C}_{n-1}$ -configuration.

Exemples : $n = 5$ $\vec{C}_0 = (0, 4, 1, 2, 0)$ et la $(5, 4, 1) \vec{C}_4$ -configuration est formée par les 5 4-circuits $\vec{C}_0 + i = (i, 4+i, 1+i, 2+i, i)$ où $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

$n = 7$ $\vec{C}_0 = (0, 6, 1, 4, 2, 3, 0)$.

Cas non orienté.

On obtient des résultats analogues au cas orienté, à condition d'associer à chaque arête $e = \{x, y\}$, les deux éléments de $\Gamma : \pm d(e) = \pm(y-x)$. A titre d'exemple, nous donnons l'analogue de (I.2.3) ; la démonstration est identique à (I.2.3).

(I.2.5). Soit Γ un groupe d'ordre n , soit $G_i = (\Gamma, E_i)$ ($i \in I$) une famille de graphes simples, ayant pour sommets les éléments de Γ , et isomorphes à un graphe simple G d'ordre k . Il y a équivalence entre :

(i) La famille $\{ \underline{+d}(e) : e \in E_i, i \in I \}$ contient tout élément de $\Gamma - \{0\}$ exactement λ fois.

(ii) Les graphes simples $\{ G_i + g : g \in \Gamma, i \in I \}$ forment une (n, k, λ) G -configuration.

Remarques : 1. Dans le cas où $G = K_k$, on peut définir G_i par le sous ensemble de Γ , formé des sommets non isolés de G_i : $A_i = \{a_1^i \dots a_k^i\}$.

On a alors $F_i = \{a_j^i, a_{j'}^i\}, j \neq j', 1 \leq j, j' \leq k\}$. La famille

$\{ \underline{+d}(e) : e \in E_i, i \in I \}$ s'écrit alors $\{a_j^i - a_{j'}^i, j \neq j', 1 \leq j, j' \leq k\}$ et la condition (i) de (I.2.5) exprime que la famille de parties A_i est une (n, k, λ) famille à différences et (I.2.5) traduit l'équivalence entre l'existence d'une (n, k, λ) famille à différences et l'existence d'une (n, k, λ) -configuration (ou B.I.B.D). La notion de famille à différences et l'équivalence sont dues à R.C. Bose [B7] (voir par exemple les propositions 5.2 et 5.3 de [B4] ou M. Hall [H1]Th 11.1.2 et 15.3.1 et exemples des chapitres 11 et 15).

2. Dans le cas où $G = P_k$, la proposition (I.2.5) donne le théorème 1 de J.F. Lawless [L1]. Dans cet article l'utilisation de cette méthode permet de résoudre le problème de l'existence des $(n, k, \lambda)P_k$ -configuration pour $\lambda = 1$ et 2. (voir I.3.39, 45, 48).

Adjonction "d'un sommet ∞ ".

Dans certains cas on peut avoir besoin de laisser un (ou plusieurs) éléments invariants par Γ . Par exemple une décomposition de K_5^* en 4 5-circuits est : $C_g^* = (5, g, 3+g, 1+g, 2+g, 5)$ où $g \in \Gamma = Z/4Z$.

Chaque circuit peut s'écrire $\vec{c}_0 + g$ à condition de supposer $5 + g = 5$, c'est à dire 5 invariant par l'action de Γ . Un tel élément sera noté ∞ et on suppose que $\infty + g = \infty$, pour tout $g \in \Gamma$. On a :

(I.2.6) Lemme : Soit Γ un groupe d'ordre n et ∞ un élément tel que $\infty + g = \infty$ ($g \in \Gamma$). Soit $G_i = (\Gamma \cup \{\infty\}, U_i)$, $i \in I$, une famille de 1-graphes ayant pour sommets les éléments de $\Gamma \cup \{\infty\}$. Il y a équivalence entre :

(i) La famille $\{d(u) : u \in U_i \cap (\Gamma \times \Gamma), i \in I\}$ contient λ éléments égaux à δ , le nombre d'arcs (∞, x) où $x \in \Gamma$ est égal à μ , le nombre d'arcs (x', ∞) , $x' \in \Gamma$ est égal à γ .

(ii) Dans la famille $\{G_i + g : g \in \Gamma, i \in I\}$ tout arc (x, y) de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $y - x = \delta$ apparaît λ fois, tout arc (∞, g) avec $g \in \Gamma$ μ fois et tout arc (g, ∞) avec $g \in \Gamma$ γ fois.

Démonstration : Elle est identique à celle du lemme (I.2.1) en remarquant que si (∞, x) ou (x', ∞) est un arc de $G_i + g$, il existe un arc $(\infty, x-g)$ ou $(x'-g, \infty)$ dans U_i et réciproquement.

(I.2.7) Exemple $2K_6^*$ est décomposable en 4 -circuits.

Nous appliquons le lemme avec $\Gamma = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et les 1-graphes :

$\vec{c}_0 = (0, 1, 3, 2, 0)$ $\vec{c}_1 = (\infty, 0, 1, 3, \infty)$ $\vec{c}_2 = (\infty, 0, 4, 2, \infty)$
On a $\{d(u) : u \in (\vec{c}_0 \cup \vec{c}_1 \cup \vec{c}_2) \cap 2(\Gamma \times \Gamma) = 2(\Gamma - \{0\})$, 2 arcs $(\infty, 0)$, un arc $(3, \infty)$ et $(2, \infty)$. D'après (I.2.6) tout arc du $2K_6^*$ construit sur $\Gamma \cup \{\infty\}$ apparaît dans exactement deux des graphes : $\{\vec{c}_i + g : g \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, i = 0, 1, 2\}$.

(I.2.8) Théorème [B6]. Pour $k \geq 4$, K_{k+1}^* est décomposable en k -circuits (ou il existe une $(k+1, k, 1)$ \vec{c}_k -configuration).

Démonstration : Nous donnons ici la démonstration de [B6]. Dans le cas k pair, en posant $k = n-1$, on retrouve le théorème (I.2.4) avec une construction différente.

Cas 1 : k pair ≥ 4 . Soit $\Gamma = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et le k -circuit $\vec{c}_0 :$

$\vec{C}_0 = (\infty, \dots, \alpha, k-1-\alpha, \dots, \frac{k}{2} - 1, \infty)$
 $0 \leq \alpha \leq \frac{k}{2} - 2$. On a $\{d(u) : u \text{ arc de } \vec{C}_0 \cap (\Gamma \times \Gamma) = \Gamma - \{0\} - \{1\}$;
 un arc $(\infty, 0)$ et un arc $(\frac{k}{2} - 1, \infty)$. D'après le lemme (I.2.6) dans les
 1-graphes $(\vec{C}_0 + g, g \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ apparaissent exactement une fois tous les
 arcs u de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $d(u) \neq 0, 1$, les arcs (∞, g) et (g, ∞) où
 $g \in \Gamma$. Les seuls arcs du K_{k+1}^* construit sur $\Gamma \cup \{\infty\}$ non utilisés sont
 ceux de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $d(u) = 1$. Or ces arcs forment le k -circuit
 $\vec{C} = (0, 1, 2, \dots, k-1, 0)$. On vérifie qu'on a bien en tout $k+1$ k -circuits.
Cas 2 : k impair ≥ 5 . Soit $\Gamma = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et le k -circuit \vec{C}_0 :

$\vec{C}_0 = (\infty, \dots, \alpha, k-1-\alpha, \dots, \beta, k-2-\beta, \dots, \infty)$ où $0 \leq \alpha \leq [\frac{k}{4}] - 1$ et
 $[\frac{k}{4}] \leq \beta \leq [\frac{k}{2}] - 1$. On a un arc $(\infty, 0)$; un arc $([\frac{k}{2}], \infty)$ et
 $\{d(u) : u \in \vec{C}_0 \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = \Gamma - \{0\} - \{[\frac{k}{2}] + 1\}$. D'après (I.2.6)
 dans les 1-graphes $(\vec{C}_0 + g, g \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ apparaissent exactement une fois
 tous les arcs u de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $d(u) \neq 0, [\frac{k}{2}] + 1$; les arcs
 (∞, g) et (g, ∞) . Les arcs du K_{k+1}^* , construit sur $\Gamma \cup \{\infty\}$ non utilisés sont
 ceux de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $d(u) = [\frac{k}{2}] + 1$ et ces arcs forment le k -cir-
 cuit $\vec{C} = (\dots, j, [\frac{k}{2}] + 1 + j, \dots)$ avec $0 \leq j \leq [\frac{k}{2}]$.

On peut donner aussi les propositions analogues à (I.2.2) (I.2.3) et
 (I.2.5). A titre d'exemple donnons celle analogue à (I.2.5) :

(I.2.9). Soit Γ un groupe d'ordre n , ∞ un élément tel que $\infty + g = \infty$ et
 soient $G_i = \{\Gamma \cup \{\infty\}, E_i\}$ une famille de graphes simples isomorphes à
 un graphe simple G d'ordre k . Il y a équivalence entre :

(i) La famille $\{\underline{d}(e) : e \in E_i \cap (\Gamma \times \Gamma), i \in I\}$ contient tout élé-
 ment de $\Gamma - \{0\}$ exactement λ fois et la famille $\{E_i : i \in I\}$ contient λ
 arêtes $\{\infty, x\}$.

(ii) les graphes simples $\{ G_i + g : g \in \Gamma, i \in I \}$ forment une $(n+1, k, \lambda)$ G-configuration (pas forcément équilibrée).

Remarque : Dans le cas $G = K_k$ on retrouve la prop. 5.5 de [B4], voir aussi M. Hall [H1, chap. 15].

(I.2.10) Théorème : pour $k > 3$, il existe une $(k, k, 2)$ C_k -configuration.

Démonstration : posons $n = k-1$, soit $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et

si n pair : $C_0 = (\infty, \dots, \alpha, n-1-\alpha, \dots, \infty)$ avec $0 \leq \alpha \leq \frac{n}{2} - 1$

si n impair : $C_0 = (\infty, \dots, \beta, n-1-\beta, \dots, [\frac{n}{2}], \infty)$ avec $0 \leq \beta \leq [\frac{n}{2}] - 1$;

Les hypothèses de (i) de (I.2.9) sont vérifiées avec $\lambda = 2$, d'où le résultat.

Dans le cas n pair (k impair) le lemme (I.2.6) avec

$\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\vec{C}_0 = (\infty, \dots, \alpha, n-1-\alpha, \dots, \infty)$ où $0 \leq \alpha \leq \frac{n}{2} - 1$ donne :

(I.2.11) Théorème : si k est impair > 3 , il existe une $(k, k, 1)$ \vec{C}_k -

configuration. (Ce théorème est une conséquence par (I.1.4) de l'existence d'une $(k, k, 1)$ C_k -configuration pour k impair : voir C. Berge [B2, chap 11

Th. 3]. Nous reviendrons sur le problème de l'existence des $(k, k, 1)$

\vec{C}_k -configurations à la fin du paragraphe : I.2.24.)

"Sous groupes fixant G".

Nous dirons qu'un 1-graphe $G = (\Gamma, U)$ est fixé par l'élément g de Γ si $G + g$ est identique à G (en tant que 1-graphe). Nous dirons que G est fixé par un sous groupe de Γ , s'il est fixé par tout élément de ce sous groupe. Nous noterons par $\Gamma(G)$, l'ensemble des éléments de Γ fixant G ; $\Gamma(G)$ est aussi le plus grand sous groupe de Γ fixant G .

Exemple : Soit $\Gamma = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et G le 6-circuit $\vec{C} = (0, 1, 9, 5, 6, 4, 0)$.

$\vec{C} + 5 = (5, 6, 4, 0, 1, 9, 5)$ et $\vec{C} + g \neq \vec{C}$ pour $g \neq 0, 5$. Donc $\Gamma(\vec{C}) = \{0, 5\}$.

(I.2.12) Lemme : soit Γ un groupe d'ordre n , $G_i = (\Gamma, U_i)$ une famille de 1-graphes et soit $|\Gamma(G_i)|$ l'ordre du plus grand sous groupe fixant G_i .

Il y a équivalence entre :

(i) l'élément δ de $\Gamma - \{0\}$ apparaît $\lambda_i |\Gamma(G_i)|$ fois dans la famille $\{d(u) : u \in U_i\}$.

(ii) Tout arc (x,y) de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $y-x = \delta$ apparaît λ_i fois dans l'ensemble G_i^* formé des 1-graphes distincts de la famille $\{G_i + g : g \in \Gamma\}$.

Démonstration : Soit (x,y) un arc de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $y-x = \delta$. Si (x,y) est un arc de $G_i + g$, (x,y) est aussi un arc de $G_i + g + h$ pour tout h appartenant à $\Gamma(G_i)$ et réciproquement. Il y a donc équivalence entre :

- (x,y) apparaît λ_i fois dans l'ensemble G_i^* et - (x,y) apparaît $\lambda_i |\Gamma(G_i)|$ fois dans la famille $\{G_i + g : g \in \Gamma\}$ ou encore - il existe $\lambda_i |\Gamma(G_i)|$ arcs de U_i vérifiant $d(u) = \delta$.

Remarques : Si $\Gamma(G_i)$ se réduit au 0 de Γ on retrouve le lemme I.2.1.

Dans le cas non orienté et G_i isomorphe à K_k on retrouve la proposition 5.4 de [B4] où le théorème 15.3.1 de M. Hall [H1].

(I.2.13) Théorème : Il existe une $(6p+4, 4p+2, 1) \vec{C}_{4p+2}$ -configuration.

Démonstration : Soit $\Gamma = Z / (6p+4)Z$ et soient les $(4p+2)$ -circuits :

$$\vec{C}_0 = (\dots, \alpha, 6p+3-\alpha, \dots, 0) \text{ où } 0 \leq \alpha \leq 2p;$$

$$\vec{C}_1 = (0, \dots, \beta, 6p+4-\beta, \dots, 3p+2, \dots, \gamma, 6p+4-\gamma; \dots, 0) \text{ où}$$

$$1 \leq \beta \leq p \text{ et } 3p+3 \leq \gamma \leq 4p+2. \text{ On a } \Gamma(\vec{C}_0) = \{0\}; \Gamma(\vec{C}_1) = \{0, 3p+2\}.$$

Les éléments de Γ de la forme :

$$-2k : 1 \leq k \leq 2p \text{ apparaissent une fois comme } d(u) : u \in \vec{C}_0.$$

$$-2k : 2p+1 \leq k \leq 3p+1 \text{ deux fois comme } d(u) : u \in \vec{C}_1.$$

$$-2k+1 : 0 \leq k \leq p-1 \text{ deux fois comme } d(u) : u \in \vec{C}_1.$$

$$-2k+1 : p \leq k \leq 3p+1 \text{ une fois comme } d(u) : u \in \vec{C}_0.$$

D'après (I.2.12) on conclut que tout arc de $\Gamma \times \Gamma$ apparaît une fois exactement dans l'un des ensembles : $\{ \vec{C}_0 + g : g \in \Gamma \}$ ou l'ensemble des graphes distincts de la famille $\{ \vec{C}_1 + g : g \in \Gamma \}$. (On peut ici noter que cet ensemble est égal à $\{ \vec{C}_1 + h$ avec $h = 0, 1, \dots, 3p + 1 \}$.)

Exemple : $p = 1$; $\Gamma = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ $\vec{C}_0 = (0, 9, 1, 8, 2, 7, 0)$;
 $\vec{C}_1 = (0, 1, 9, 5, 6, 4, 0)$.

(I.2.14) : K_{15}^* est décomposable en 10-circuits.

Démonstration : Soit $\Gamma = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et les 10-circuits :

$$\vec{C}_0 = (0, 14, 1, 13, 2, 12, 3, 11, 5, 8, 0) \quad \Gamma(\vec{C}_0) = \{0\}$$

$$\vec{C}_1 = (0, 1, 6, 7, 12, 13, 3, 4, 9, 10, 0) \quad \Gamma(\vec{C}_1) = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$

$$\vec{C}_2 = (0, 11, 9, 5, 3, 14, 12, 8, 6, 2, 0) \quad \Gamma(\vec{C}_2) = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$

$$\{d(u) : u \in \vec{C}_0\} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14\}$$

$$\{d(u) : u \in \vec{C}_1\} = \{1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5\}$$

$$\{d(u) : u \in \vec{C}_2\} = \{11, 13, 11, 13, 11, 13, 11, 13, 11, 13\}.$$

On conclut d'après le lemme (I.2.12).

(I.2.15) : K_{21}^* est décomposable en 14-circuits.

Démonstration : on applique (I.2.12) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ et les 14-circuits :

$$\vec{C}_0 = (0, 3, 9, 18, 19, 10, 4, 1, 5, 13, 11, 16, 15, 7, 0) ; \Gamma(\vec{C}_0) = \{0\}.$$

$$\vec{C}_1 = (0, 2, 9, 11, 18, 20, 6, 8, 15, 17, 3, 5, 12, 14, 0)$$

$$\vec{C}_2 = (0, 10, 6, 16, 12, 1, 18, 7, 3, 13, 9, 19, 15, 4, 0)$$

$$\vec{C}_3 = (0, 11, 6, 17, 12, 2, 18, 8, 3, 14, 9, 20, 15, 5, 0)$$

$$\Gamma(\vec{C}_1) = \Gamma(\vec{C}_2) = \Gamma(\vec{C}_3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

Remarque : Le lemme (I.2.12) ne peut s'appliquer pour la construction d'une décomposition de K_9^* en 6-circuits. Néanmoins une $(9, 6, 1) \vec{C}_6$ -configuration existe (voir I.3.14). Ceci suggère donc la conjecture suivante.

(I.2.16) Conjecture : il existe une $(6p + 3, 4p + 2, 1)$ \vec{C}_{4p+2} -configuration.

On peut aussi donner des généralisations de (I.2.6) et (I.2.12) et des propositions analogues, en considérant à la fois des "sous groupes fixant G_i "

et "l'adjonction d'un point ∞ ". Nous nous contenterons d'illustrer ceci sur un exemple, les énoncés étant analogues à ceux de (I.2.6) et (I.2.12).

(I.2.17) Exemple : K_{16}^* est décomposable en 5-circuits.

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $\vec{C}_0 = (0, 1, 6, 13, 7, 0)$ $\vec{C}_1 = (0, 10, 6, 3, 1, 0)$

$\vec{C}_2 = (\infty, 0, 2, 6, 12, \infty)$ $\vec{C}_3 = (0, 3, 6, 9, 12, 0)$. On a

$\Gamma(\vec{C}_i) = \{0\}$ pour $i = 0, 1, 2$ et $\Gamma(\vec{C}_3) = \{0, 3, 6, 9, 12\}$.

$\{d(u) : u \in (\vec{C}_0 \cup \vec{C}_1 \cup \vec{C}_2) \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = \Gamma - \{0, 3\}$.

$\{d(u) : u \in \vec{C}_3\}$ contient $|\Gamma(\vec{C}_3)| = 5$ fois l'élément 3 de Γ , enfin on a un arc $(\infty, 0)$ et un arc $(12, \infty)$ dans \vec{C}_2 . Ceci entraîne que l'ensemble des circuits distincts des $\{\vec{C}_i + g : i = 0, 1, 2, 3 ; g \in \Gamma\}$ forme une $(16, 5, 1)$ \vec{C}_5 -configuration.

Adjonction de plusieurs "sommets ∞ " et décomposition de K_{2k}^* en k -circuits.

Au lieu d'ajouter comme en (I.2.6) un sommet ∞ , nous allons ajouter un ensemble de sommets $A_\infty = \{\infty_j, j \in J\}$. Nous avons le lemme suivant, de démonstration identique à (I.2.6), qui nous permettra de prouver la conjecture (I.1.2) pour $n = 2k$.

(I.2.18) Lemme : Soit Γ un groupe d'ordre n , $A_\infty = \{\infty_j, j \in J\}$ un ensemble de sommets tel que $\infty_j + g = \infty_j$ ($g \in \Gamma$). Soient $G_i = (\Gamma \cup A_\infty, U_i)$, $i \in I$, une famille de 1-graphes ayant pour sommets les éléments de $\Gamma \cup A_\infty$.

Il y a équivalence entre :

(i) la famille $\{d(u) : u \in U_i \cap (\Gamma \times \Gamma), i \in I\}$ contient λ éléments égaux à δ ; le nombre d'arcs (∞_j, x) , où $x \in \Gamma$, est égal à μ_j et le nombre d'arcs (x, ∞_j) , où $x \in \Gamma$, est égal à γ_j .

(ii) Dans la famille $\{ G_i + g : g \in \Gamma, i \in I \}$, tout arc (x, y) de $\Gamma \times \Gamma$ vérifiant $y - x = \delta$ apparaît λ fois, tout arc (∞_j, g) , avec $g \in \Gamma$, μ_j fois et tout arc (g, ∞_j) , $g \in \Gamma$, γ_j fois.

(I.2.19) Pour $p > 1$, K_{4p+2}^* est décomposable en $2p+1$ -circuits.

Démonstration : Nous allons appliquer (I.2.18) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$; les sommets de K_{4p+2}^* seront indexés $0, 1, \dots, 2p-1$ (éléments de Γ) et

$\infty_0, \infty_1, \dots, \infty_{2p+1}$, éléments de A_∞ . Les $2p+2$ sommets de A_∞ engendrent un sous graphe isomorphe à K_{2p+2}^* , qui peut être décomposé en $2p+1$ -circuits d'après le théorème I.2.8. Les arcs restants de $A_\infty \times \Gamma$, $\Gamma \times A_\infty$ et $\Gamma \times \Gamma$, peuvent être partitionnés dans les circuits $C + g, C' + g, C'' + g$ avec $g \in \Gamma$ et :

$$\vec{C} = (\infty_0, 0, \infty_1, 2p-1, \dots, \lambda, 2p-1-\lambda; \dots, p-1, \infty_0),$$

où $\lambda = 1, 2, \dots, p-2$ (ce qui suppose donc $p \geq 2$).

$$\vec{C}' = (0, \dots, \mu, \infty_{\mu+1}, \dots, 0),$$

$$\vec{C}'' = (0, \dots, 2p-\mu, \infty_{p+1+\mu}, \dots, 0),$$

où $\mu = 1, 2, \dots, p$.

$$\text{On a : } \{ d(u) : u \in \vec{C} \cap (\Gamma \times \Gamma) \} = \Gamma - \{ 0, 1, 2p-1 \};$$

$$\{ d(u) : u \in \vec{C}' \cap (\Gamma \times \Gamma) \} = \{1\}; \{ d(u) : u \in \vec{C}'' \cap (\Gamma \times \Gamma) \} = \{2p-1\}$$

donc d'après (I.2.18) tout arc de $\Gamma \times \Gamma$ apparaît exactement 1 fois. On a exactement un arc (∞_j, x) et (x', ∞_j) dans $\vec{C} \cup \vec{C}' \cup \vec{C}''$

(\vec{C} pour $j = 0, 1$; \vec{C}' pour $j = 2, \dots, p+1$; \vec{C}'' pour $j = p+2, \dots, 2p+1$)

donc d'après (I.2.18) tout arc de $A_\infty \times \Gamma$ et $\Gamma \times A_\infty$ apparaît exactement une fois.

Exemple : $p = 2$ $\Gamma = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. La décomposition de K_{10}^* en 5-circuits est donnée par les circuits suivants :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (\infty_0, 0, \infty_1, 3, 1, \infty_0) & , \vec{C} + 1 &= (\infty_0, 1, \infty_1, 0, 2, \infty_0) ; \\ \vec{C} + 2 &= (\infty_0, 2, \infty_1, 1, 3, \infty_0) & ; \vec{C} + 3 &= (\infty_0, 3, \infty_1, 2, 0, \infty_0) ; \\ \vec{C}' &= (0, 1, \infty_2, 2, \infty_3, 0) & ; \vec{C}' + 1 &= (1, 2, \infty_2, 3, \infty_3, 1) ; \\ \vec{C}' + 2 &= (2, 3, \infty_2, 0, \infty_3, 2) & ; \vec{C}' + 3 &= (3, 0, \infty_2, 1, \infty_3, 3) ; \\ \vec{C}'' &= (0, 3, \infty_4, 2, \infty_5, 0) & . \vec{C}'' + 1 &= (1, 0, \infty_4, 3, \infty_5, 1) ; \\ \vec{C}'' + 2 &= (2, 1, \infty_4, 0, \infty_5, 2) & ; \vec{C}'' + 3 &= (3, 2, \infty_4, 1, \infty_5, 3) . \end{aligned}$$

(I.2.20) : Pour $p > 2$, K_{4p}^* est décomposable en $2p -$ circuits.

Démonstration : Nous allons appliquer (I.2.18) avec

$\Gamma = \mathbb{Z}/(2p - 1)\mathbb{Z}$ et $A_\infty = \{\infty_0, \infty_1, \dots, \infty_{2p}\}$. Le sous graphe partiel engendré par les sommets de A_∞ est isomorphe à K_{2p+1}^* et peut-être décomposé en $2p -$

circuits d'après (I.2.8). Les arcs restants de $A_\infty \times \Gamma$, $\Gamma \times A_\infty$ et $\Gamma \times \Gamma$ peuvent être partitionnés dans les circuits $\vec{C} + g$, $\vec{C}' + g$, $\vec{C}'' + g$, avec $g \in \Gamma$:

$$\vec{C} = (\infty_0, 0, \infty_1, 2p - 2, \dots, \lambda, 2p - 2 - \lambda, \dots, \mu, 2p - 3 - \mu, \dots, \infty_0) \text{ avec } 1 \leq \lambda \leq \left\lfloor \frac{2p-1}{4} \right\rfloor - 1 \text{ et } \left\lfloor \frac{2p-1}{4} \right\rfloor \leq \mu \leq p - 2.$$

(Dans les cas $p = 3$ et $p = 4$ le paramètre λ n'intervient pas, le cas $p = 2$ ne rentre pas dans cette construction).

$$\vec{C}' = (0, 2p - 2, p - 1, \infty_2, \lambda', \infty_{\lambda'+2}, \dots, 0),$$

avec $1 \leq \lambda' \leq p - 2$.

$$\vec{C}'' = (\dots, \mu', \infty_{p+1+\mu'}, \dots, 0),$$

avec $0 \leq \mu' \leq p - 1$.

On vérifie que \vec{C} , \vec{C}' , \vec{C}'' sont bien des $2p$ -circuits (élémentaires). De plus

$$\{d(u) : u \in \vec{C} \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = \Gamma - \{0, 2p - 2, p\} \text{ et}$$

$$\{d(u) : u \in \vec{C}' \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = \{2p - 2, p\} \text{ avec } 2p - 2 \neq p, \text{ pour } p > 2 ;$$

donc d'après (I.2.18) tout arc de $\Gamma \times \Gamma$ apparaît exactement une fois dans

$$\vec{C} + g \text{ et } \vec{C}' + g, g \in \Gamma.$$

Enfin on a exactement un arc (∞_j, x) et un arc (x, ∞_j) dans $\vec{C} \cup \vec{C}' \cup \vec{C}''$ (\vec{C} pour $j = 0, 1$; \vec{C}' pour $j = 2, \dots, p$; \vec{C}'' pour $j = p + 1, \dots, 2p$) et donc d'après (I.2.18) tout arc de $A_\infty \times \Gamma$ et $\Gamma \times A_\infty$ apparaît exactement une fois.

Exemple : $p = 3$; $\Gamma = \mathbb{Z} / 5\mathbb{Z}$; $\vec{C} = (\infty_0, 0, \infty_1, 4, 1, 2, \infty_0)$

$\vec{C}' = (0, 4, 2, \infty_2, 1, \infty_3, 0)$ et $\vec{C}'' = (0, \infty_4, 1, \infty_5, 2, \infty_6, 0)$.

$p = 5$; $\Gamma = \mathbb{Z} / 9\mathbb{Z}$; $\vec{C} = (\infty_0, 0, \infty_1, 8, 1, 7, 2, 5, 3, 4, \infty_0)$

$\vec{C}' = (0, 8, 4, \infty_2, 1, \infty_3, 2, \infty_4, 3, \infty_5, 0)$ et

$\vec{C}'' : (0, \infty_6, 1, \infty_7, 2, \infty_8, 3, \infty_9, 4, \infty_{10}, 0)$.

Nous allons étudier directement ce qui se passe pour les deux cas ($k = 3$ et $k = 4$) non couverts par (I.2.19) et (I.2.20).

(I.2.21) ([B6]) : K_8^* est décomposable en 4 - circuits.

Démonstration : Nous donnons directement les 14 4-circuits de la décomposition, les sommets étant indexés de 1 à 8.

(1, 2, 3, 4, 1), (1, 4, 3, 2, 1), (5, 6, 7, 8, 5), (5, 8, 7, 6, 5), (1, 3, 7, 5, 1)

(2, 4, 8, 6, 2), (1, 6, 8, 3, 1), (5, 7, 4, 2, 5), (1, 5, 2, 6, 1), (3, 8, 4, 7, 3)

(1, 7, 2, 8, 1), (1, 8, 2, 7, 1), (3, 5, 4, 6, 3), (3, 6, 4, 5, 3).

(I.2.22) ([B3]) : K_6^* n'est pas décomposable en 3-circuits.

Démonstration : Supposons que les sommets soient indexés 1, 2, 3, 4, 5, 6 et qu'il existe une partition des arcs de K_6^* en 3-circuits. Le sommet 1 appartient à 5 3-circuits. On a deux possibilités.

Cas 1 : Aucun des 3-circuits contenant 1 n'est le symétrique (circuit obtenu en renversant l'orientation des arcs) d'un autre ; et à une indexation près des sommets 2, 3, 4, 5, 6, les 3-circuits contenant 1 sont : (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (1, 6, 2). Parmi les arcs contenant 2 et non rencontrés dans un des 3-circuits ci-dessus l'arc (2, 4) doit apparaître dans le 3-circuit (2, 4, 3) les arcs (4, 5) et (6, 2) ayant été rencontrés ; (2, 5) dans le 3-circuit (2, 5, 4) les arcs (5, 6) et (3, 2) ayant été rencontrés et (2, 6)

dans le 3-circuit (2, 6, 5). Il reste alors les 6 arcs (3, 5), (5, 3) ; (3, 6), (6, 3) et (4, 6), (6, 4) ne pouvant pas former deux 3-circuits.

Cas 2 : Il existe deux 3-circuits contenant 1, symétriques l'un de l'autre (il ne peut pas exister 4 3-circuits 2 à 2 symétriques contenant 1, sinon il resterait 2 arcs opposés d'extrémité 1 ne pouvant pas appartenir à un 3-circuit élémentaire par définition). A une indexation près des sommets 2, 3, 4, 5, 6, les 3-circuits contenant 1 sont (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 5), (1, 5, 6) et (1, 6, 4). Parmi les arcs contenant 2 et non rencontrés (2, 4) doit apparaître dans le 3-circuit (2, 4, 6), les arcs (4, 5) et (3, 2) ayant été rencontrés ; (2, 5) dans le 3-circuit (2, 5, 4), les arcs (5, 6) et (3, 2) ayant été rencontrés et (2, 6) dans le 3-circuit (2, 6, 5). Il reste alors les 6 arcs (3, 4); (4, 3) ; (3, 5), (5, 3) et (3, 6), (6, 3) ne pouvant pas former deux 3-circuits.

On peut résumer l'existence d'une décomposition de K_{2k}^* en k -circuits dans le théorème suivant, qui prouve la conjecture (I.1.2) pour $n = 2k$

(I.2.23) Théorème : Il existe une $(2k, k, 1) \vec{C}_k$ -configuration si et seulement si $k > 3$.

(I.2.24): Décomposition de K_n^* en circuits hamiltoniens.

Le problème de l'existence d'une décomposition de K_n en cycles hamiltoniens (existence d'une $(n, n, 1) \vec{C}_n$ -configuration) est classique et il est bien connu (voir C. Berge [B2 chap. 11, Th. 3] qu' une telle décomposition existe si et seulement si n est impair. Dans le cas orienté, on peut se demander pour quelles valeurs de n , il existe une $(n, n, 1) \vec{C}_n$ -configuration, c'est-à-dire une décomposition de K_n^* en circuits hamiltoniens (un circuit hamiltonien est un circuit élémentaire passant une fois et une seule fois par chaque sommet : voir chap. II). D'après (I.2.11) une telle décomposition

existe si n est impair. Pour $n = 4$ et $n = 6$ un examen de tous les cas possibles montre qu'une telle décomposition n'existe pas. Ceci explique que dans la conjecture (I.1.2) nous avons éliminé $n = 4 = k$ et $n = 6 = k$.

S. Banks [B1] a écrit un programme pour ordinateur, qui a confirmé ce résultat et exhibé pour $n = 8, 10, 12, 14$ une décomposition de K_n^* en circuits hamiltoniens. (dans [M1] il était affirmé par erreur, que pour $n = 8$ une telle décomposition n'existait pas). Une décomposition de K_8^* est donnée par les 7 8-circuits : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1), (1, 3, 2, 4, 6, 5, 8, 7, 1), (1, 4, 2, 5, 7, 3, 8, 6, 1) (1, 5, 2, 6, 8, 3, 7, 4, 1) (1, 6, 4, 7, 2, 8, 5, 3, 1) (1, 7, 6, 3, 5, 4, 8, 2, 1) (1, 8, 4, 3, 6, 2, 7, 5, 1). Avec une version améliorée de ce programme V. Faber (voir [B6]) a prouvé l'existence d'une telle décomposition pour $n = 16$ et 18.

Un problème équivalent à celui-ci est un problème dû à E.G. Straus : pour quelles valeurs de k , peut-on décomposer K_k^* en chemins hamiltoniens (existence d'une $(k, k, 1) \vec{P}_k$ -configuration), problème étudié par N.S Mendelsohn [M1], J. Denes et E. Torok [D1]. En effet l'existence d'une décomposition de K_n^* en circuits hamiltoniens est équivalente à l'existence d'une décomposition de K_{n-1}^* en chemins hamiltoniens, dont les extrémités initiales sont toutes différentes ainsi que les extrémités terminales (il suffit d'enlever ou d'ajouter un sommet). Dans [M1] N.S. Mendelsohn a montré qu'une décomposition de K_k^* en chemins hamiltoniens existait, s'il existait un groupe fini d'ordre k , noté multiplicativement, dont les éléments pouvaient être rangés g_1, g_2, \dots, g_k de sorte que les k produits partiels $g_1, \dots, g_1 g_2 \dots g_i, \dots, g_1 g_2 \dots g_k$ soient tous distincts. B. Gordon [G1] appelle de tels groupes "sequenceable" montre qu'un groupe abélien est "sequenceable" si et seulement si il contient un élément d'ordre 2. N.S. Mendelsohn [M1] a montré que le groupe non abélien d'ordre 21 était "sequenceable" et L.L Wang [W1] a montré, avec un programme pour ordinateur qu'il en était de même pour $k = 39, 55, 57$.

Ceci donne que K_n^* est décomposable en circuits hamiltoniens pour $n = 22, 40, 56, 58$ et nous permet d'énoncer la conjecture suivante cas particulier de la conjecture (I.1.2) :

(I.2.25 Conjecture. Pour $n \neq 4$ et $n \neq 6$ K_n^* est décomposable en circuits hamiltoniens. (La conjecture est vérifiée pour n impair, n pair ≤ 18 et $n = 22, 40, 56, 58$).

I.3 Méthode de composition avec les graphes bipartis.

$K_{m,n}$ désigne le graphe simple biparti-complet ayant pour ensemble de sommets $X \cup Y$, avec $|X| = m$, $|Y| = n$ et pour arêtes les paires $\{x, y\}$ avec $x \in X$, $y \in Y$.

$K_{m,n}^*$ désigne le 1-graphe biparti-complet symétrique ayant pour ensemble de sommets $X \cup Y$, avec $|X| = m$, $|Y| = n$ et pour arcs les couples (x, y) et (y, x) avec $x \in X$, $y \in Y$.

$\lambda K_{m,n}$ ($\lambda K_{m,n}^*$) désigne le multigraphe biparti-complet (λ -graphe biparti-complet symétrique) ayant pour ensemble de sommets $X \cup Y$, avec $|X| = m$, $|Y| = n$ et où deux sommets x et y sont reliés par λ arêtes (λ arcs de x vers y et de y vers x) si et seulement si $x \in X$ et $y \in Y$.

G désignant un graphe simple (1-graphe) à k sommets, une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G -configuration consiste en une partition des arêtes (arcs) de $\lambda K_{m,n}$ ($\lambda K_{m,n}^*$) en sous graphes partiels isomorphes à G . Si de plus chaque sommet appartient au même nombre de sous graphes partiels, nous dirons qu'on a une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G -configuration équilibrée.

Remarque : Une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G -configuration ne peut exister que si $K_{m,n}$ ($K_{m,n}^*$) admet G comme sous graphe partiel. Par exemple si $G = K_k$ (K_k^*) ou si G

est un cycle (circuit) impair l'existence d'une telle configuration est impossible. La méthode que nous allons développer (lemmes (I.3.1) et (I.3.2)) ne s'appliquera donc que dans certains cas, mais dans ces cas elle est très efficace.

(I.3.1) Lemme : S'il existe une (m, k, λ) G-configuration (équilibrée), une (n, k, λ) G-configuration (équilibrée) et une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G-configuration (équilibrée), alors il existe une $(m + n, k, \lambda)$ G-configuration (équilibrée).

Démonstration : Décomposons l'ensemble des sommets de λK_{m+n} (λK_{m+n}^*) en $X \cup Y$ avec $|X| = m$ et $|Y| = n$. Le lemme résulte du fait que λK_{m+n} (λK_{m+n}^*) est l'union des sous graphes partiels 2 à 2 arête (arc)-disjoints suivants : le multigraphe complet (λ -graphe complet symétrique) sur X , isomorphe à λK_m (λK_m^*) ; celui sur Y , isomorphe à λK_n (λK_n^*) et le multi-graphe biparti-complet (λ -graphe biparti-complet symétrique) sur X et Y , isomorphe à $\lambda K_{m,n}$ ($\lambda K_{m,n}^*$).

(I.3.2) Lemme : S'il existe une $(m + 1, k, \lambda)$ G-configuration (équilibrée), une $(n + 1, k, \lambda)$ G-configuration (équilibrée) et une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G-configuration (équilibrée) alors il existe une $(m + n + 1, k, \lambda)$ G-configuration (équilibrée).

Démonstration : Décomposons l'ensemble des sommets de λK_{m+n+1} (λK_{m+n+1}^*) en $X \cup Y \cup \{x_0\}$ avec $|X| = m$ et $|Y| = n$. Le lemme résulte du fait que λK_{m+n+1} (λK_{m+n+1}^*) est l'union des sous graphes partiels 2 à 2 arête (arc)-disjoints suivants : le multigraphe complet (λ -graphe complet symétrique) sur $X \cup \{x_0\}$ isomorphe à λK_{m+1} (λK_{m+1}^*) ; celui sur $Y \cup \{x_0\}$, isomorphe à λK_{n+1} (λK_{n+1}^*) et le multigraphe biparti-complet (λ -graphe biparti complet symétrique) sur X et Y , isomorphe à $\lambda K_{m,n}$ ($\lambda K_{m,n}^*$).

Décomposition de $K_{m,n}^*$ en $2p$ -circuits.

(I.3.3) Théorème [B6] : si $m \geq p$, $n \geq p$ et p divise m ou n , alors $K_{m,n}^*$ peut-être décomposé en $2p$ -circuits (c'est-à-dire il existe une $(\{m,n\}, 2p, 1) \vec{C}_{2p}$ -configuration.

Démonstration : Nous supposons que p divise m .

i) Pour $p \leq r \leq 2p - 1$, $K_{p,r}^*$ peut-être décomposé en $2p$ -circuits ; si on note les sommets de $K_{p,r}^*$ par $x_i : 0 \leq i \leq p - 1$ et $y_j : 0 \leq j \leq r - 1$ la décomposition est donnée par les r $2p$ -circuits

\vec{C}_j ($0 \leq j \leq r - 1$) où $\vec{C}_j = (x_0, y_j, \dots, x_i, y_{i+j}, \dots, x_{p-1}, y_{p-1+j}, x_0)$ avec $0 \leq i \leq p - 1$. (Les nombres qui apparaissent comme indices des y étant à prendre modulo r).

ii) $K_{p,n}^*$ peut-être décomposé en $2p$ -circuits pour tout $n \geq p$. En effet soit $n = qp + r$ avec $p \leq r \leq 2p - 1$. $K_{p,n}^*$ est l'union disjointe au sens des arcs de q graphes isomorphes à $K_{p,p}^*$ et d'un graphe isomorphe à $K_{p,r}^*$ et tous ces graphes sont décomposables en $2p$ -circuits d'après i).

iii) $K_{m,n}^*$ peut-être décomposé en $2p$ -circuits pour $m = \lambda p$ et $n \geq p$. En effet $K_{\lambda p, n}^*$ est l'union disjointe au sens des arcs de λ graphes isomorphes à $K_{p,n}^*$ et donc décomposables en $2p$ -circuits d'après ii).

Remarque : Une condition nécessaire pour décomposer $K_{m,n}^*$ en $2p$ -circuits, (pour $m \geq p$ et $n \geq p$) est que le nombre d'arcs de $K_{m,n}^*$ soit un multiple de $2p$, soit mn multiple de p . On peut donc poser la conjecture suivante, qui est vérifiée d'après I.3.3 si p est premier et que nous avons vérifié pour $p = 4, 6$.

(I.3.4) Conjecture [B6] : $K_{m,n}^*$ peut être décomposé en $2p$ -circuits si et seulement si $m \geq p$, $n \geq p$, et p divise mn .

Décomposition de K_n^* en $2p$ -circuits.

(I.3.5) Théorème [B6] : K_{2pq+1}^* est décomposable en $2p$ -circuits pour q entier > 1 . (Il existe une $(2pq+1, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration.

Démonstration : (par induction). Le théorème est vrai pour $q = 1$ d'après I.2.4 (ou I.2.8). Supposons le vrai pour q et appliquons le lemme (I.3.2) avec $m = 2pq$, $n = 2p$ et $G = \vec{C}_{2p}$: il existe bien une $(2pq+1, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration (hypothèse d'induction) une $(2p+1, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration (I.2.4) et une $(\{2pq, 2p\}, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration d'après I.3.3 car p divise $m = 2pq$. Donc d'après (I.3.2) il existe une $(2p(q+1)+1, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration.

(I.3.6) Corollaire [B6] : Si n est un nombre premier, $n > 2p$ alors K_n^* est décomposable en $2p$ -circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2p}$.

Démonstration : La condition est nécessaire d'après I.1.1 ; comme n est premier et impair car $n \neq 2$, $2p$ divise $n-1$ et donc $n = 2pq+1$ et la condition est suffisante d'après I.3.5.

(I.3.7) Remarque : Ce corollaire est un cas particulier de la proposition suivante due à B. Hartnell et M. Milgram [H2] : si n est une puissance de nombre premier et si k divise $(n-1)$ alors K_n^* est décomposable en k -circuits.

(I.3.8) Théorème [B6] : Si $K_{n_0}^*$ est décomposable en $2p$ -circuits, alors $K_{n_0+2pq}^*$ est décomposable en $2p$ -circuits pour q entier > 0 .

Démonstration : On applique le lemme (I.3.2) avec $m = 2pq$; $n = n_0 - 1$ et $G = \vec{C}_{2p}$; il existe une $(n_0, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration par hypothèse, une $(2pq+1, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration d'après I.3.5 et une $(\{2pq, n_0 - 1\}, 2p, 1)$ \vec{C}_{2p} -configuration d'après I.3.3.

(I.3.9) Théorème : K_{2pq}^* est décomposable en $2p$ -circuits pour q entier > 2 .

Démonstration : Le théorème est vérifié pour $q = 2$ d'après I.2.23. Pour $q > 2$ il se déduit de (I.3.8) avec $n_0 = 4p$.

(I.3.10) : Si $k = 2^\alpha$ (α entier ≥ 2), si $n > k$ et $n(n-1) \equiv 0 \pmod{k}$ alors K_n^* est décomposable en k -circuits. (ceci signifie que pour $k = 2^\alpha$ la conjecture I.1.2 est vérifiée excepté peut-être pour $n = k$.)

Démonstration : En effet si $k = 2^\alpha$, la condition $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2^\alpha}$ se réduit à $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{2^\alpha}$ soit en posant $2^\alpha = 2^p$ à $n = 2^p q$ ou $n = 2^p q + 1$ et (I.2.10) se déduit de (I.3.5) et (I.3.9).

Remarque : Le cas $n = k$ a été étudié en I.2.24,25. Le fait qu'il n'existe pas de décomposition de K_4^* en circuits hamiltoniens et qu'il existe une décomposition de K_8^* et K_{16}^* en circuits hamiltoniens nous donne d'après I.3.10 la proposition.

(I.3.11) [B6] : K_n^* est décomposable en :

4-circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$ et $n > 4$.

8-circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{8}$ et $n \geq 8$.

16-circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{16}$ et $n > 16$.

(I.3.12) Remarque : Le théorème (I.3.8) montre que pour vérifier la conjecture I.3.2 pour $k = 2^p$ et $n \geq n_0$, il suffit de la vérifier pour tout n , $n_0 \leq n < n_0 + 2^p$, et tel que $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2^p}$. Nous allons appliquer ceci pour $2^p = 6, 10, 12, 14$.

(I.3.13) [B6] : K_n^* est décomposable en 6-circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{6}$ et $n > 6$.

Démonstration : Pour $n = 6$ une telle décomposition n'existe pas. Pour montrer (I.3.13), il faut donc d'après la remarque ci-dessus montrer que K_n^* est décomposable en 6-circuits pour $n = 7, 9, 10, 12$. Pour $n = 7$ c'est une conséquence de (I.2.4), pour $n = 10$ de (I.2.13), pour $n = 12$ de (I.2.20). Dans le cas $n = 9$ une décomposition a été exhibée dans [B6]. Nous allons déduire ce cas du lemme suivant d'après I.1.4.

(I.3.14) Lemme : K_9 est décomposable en 6-cycles.

Démonstration : Les sommets étant labellés de 0 à 8 la décomposition est donnée par les 6 6-cycles : (0,1,5,2,4,3,0) ; (0,2,1,3,5,4,0) ; (0,5,6,7,1,8,0) ; (0,6,1,4,8,7,0) ; (2,3,6,8,5,7,2) ; (2,6,4,7,3,8,2).

(I.3.15) : Pour $k = 10, 12, 14$ K_n^* est décomposable en k -circuits si et seulement si $n(n-1) \equiv 0 \pmod{k}$ et $n \geq k$.

Démonstration : D'après la remarque I.3.12 il suffit de vérifier le théorème pour : (nous indiquons entre parenthèses le lemme utilisé).

- $k = 10$: $n = 10$ (I.2.24,25 ; $n = 11$ (I.2.4) ; $n = 15$ (I.2.14) $n = 16$ (I.2.13)
- $k = 14$: $n = 14$ (I.2.24,25 ; $n = 15$ (I.2.4) ; $n = 21$ (I.2.15) $n = 22$ (I.2.13)
- $k = 12$: $n = 12$ (I.2.24,25 ; $n = 13$ (I.2.4) ; $n = 16$ et $n = 21$.

Pour $n = 16$ la décomposition s'obtient en appliquant les lemmes I.2.6 et I.2.12 avec $\Gamma = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et :

$$\vec{C}_0 = (0,1,3,2,5,6,8,7,10,11,13,12,0) \quad \Gamma(\vec{C}_0) = \{0,5,10\}.$$

$$\vec{C}_1 = (\infty,0,4,2,7,3,9,6,13,8,1,10,\infty).$$

On a $\{d(u) : u \in \vec{C}_0 \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = 5$ fois $\{1,2,3,14\}$. On a

$\{d(u) : u \in \vec{C}_1 \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = \Gamma - \{0,1,2,3,14\}$, un arc $(\infty,0)$ et un arc $(10,\infty)$.

L'ensemble des circuits distincts de $\{\vec{C}_i + g : i = 0,1 ; g \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}\}$ forme bien une $(16,12,1)$ \vec{C}_{12} -configuration.

Pour $n = 21$ on applique (I.2.12) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ et

$$\vec{C}_0 = (0,1,3,6,14,15,17,20,7,8,10,13,0) \quad \Gamma(\vec{C}_0) = (0,7,14)$$

$$\vec{C}_1 = (0,4,9,15,7,11,16,1,14,18,2,8,0) \quad \Gamma(\vec{C}_1) = (0,7,14)$$

$$\vec{C}_2 = (0,9,16,5,17,7,1,15,10,6,3,2,0)$$

$\{d(u) : u \in (\vec{C}_0 \cup \vec{C}_1) \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = 3$ fois $\{1,2,3,4,5,6,8,13\}$

$\{d(u) : u \in \vec{C}_2 \cap (\Gamma \times \Gamma)\} = \Gamma - \{0,1,2,3,4,5,6,8,13\}$. L'ensemble des circuits distincts de $\{\vec{C}_i + g : i = 0,1,2 ; g \in \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}\}$ forme donc une $(21,12,1)$ \vec{C}_{12} -configuration.

(I.3.16) En résumé la conjecture I.1.2 est vérifiée pour k pair $4 \leq k \leq 16$.

Existence des $(n, 2p, \lambda) \vec{C}_{2p}$ -configurations.

La méthode utilisée pour décomposer K_n^* en $2p$ -circuits s'étend aisément au cas de λK_n^* . Nous nous contenterons d'illustrer cette méthode pour $2p = 4, 6, 8$ (avec $\lambda \geq 2$).

(I.3.17) Théorème : Pour $\lambda \geq 2$ et $2p = 4, 6, 8$ il existe une $(n, 2p, \lambda) \vec{C}_{2p}$ -configuration si et seulement si $\lambda n(n-1) \equiv 0 \pmod{2p}$, excepté pour λ impair, $2p=n=4$.

Démonstration : D'après I.1.6, à n fixé, il suffit d'établir le théorème pour la plus petite valeur de λ telle que $\lambda n(n-1) \equiv 0 \pmod{2p}$. D'autre part on a comme en I.3.8 que si $\lambda K_{n_0}^*$ est décomposable en $2p$ -circuits, alors $\lambda K_{n_0+2pq}^*$ est décomposable en $2p$ -circuits pour q entier ≥ 0 . On peut donc se limiter à λ fixé aux valeurs de n_0 telles que $2p \leq n_0 < 4p$ et $\lambda n_0(n_0-1) \equiv 0 \pmod{2p}$. En utilisant les résultats obtenus pour $\lambda = 1$ il reste à vérifier : (nous indiquons entre parenthèses le lemme utilisé).

Cas $2p = 4$: $\lambda = 2, n = 4$: (I.2.10) ; $\lambda = 2, n = 6$: (I.2.7) ; $\lambda = 2, n = 7$:

(I.2.3) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $\vec{C}_0 = (0, 1, 3, 6, 0)$, $\vec{C}_1 = (0, 4, 2, 1, 0)$, $\vec{C}_2 = (0, 2, 5, 3, 0)$ ou (I.3.2) avec $m+1 = 4 = n+1$ et en remarquant que $2K_{3,3}^*$ est l'union de 3 graphes $K_{2,3}^*$. Le cas $n=4$, λ impair est un corollaire de I.3.32.

Cas $2p = 6$: $\lambda = 2, n = 6$ (I.2.10) ; $\lambda = 3, n = 8$: (I.2.6) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\vec{C}_0 = (0, 6, 1, 4, 2, 3, 0)$ $\vec{C}_1 = (\infty, 0, 6, 1, 4, 2, \infty)$ $\vec{C}_2 = (\infty, 2, 3, 0, 6, 1, \infty)$

$\vec{C}_3 = (\infty, 1, 4, 2, 3, 0, \infty)$; $\lambda = 3, n = 11$: (I.3.2) avec $m+1 = 6 = n+1$ et en remarquant que $3K_{5,5}^*$ est l'union de 5 graphes $K_{3,5}^*$ et donc décomposable en 6-circuits

$\lambda = 3, n = 6$: (I.2.6) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\vec{C}_0 = (\infty, 0, 1, 3, 4, 2, \infty)$ $\vec{C}_1 = (\infty, 0, 1, 3, 2, 4, \infty)$

$\vec{C}_2 = (\infty, 0, 3, 2, 1, 4, \infty)$.

Cas $2p = 8$: $\lambda = 2n = 12$: (I.2.6) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$,

$$\vec{C}_0 = (0, 10, 1, 9, 2, 3, 6, 4, 0) \quad \vec{C}_1 = (\infty, 0, 5, 6, 8, 4, 7, 2, \infty) \quad \vec{C}_2 = (\infty, 0, 5, 4, 8, 3, 1, 9, \infty);$$

$\lambda = 2n = 13$: (I.2.3) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ $\vec{C}_0 = (0, 1, 12, 2, 11, 4, 8, 3, 0)$

$$\vec{C}_1 = (0, 12, 1, 11, 2, 7, 3, 6, 0) \quad \vec{C}_2 = (0, 1, 8, 3, 5, 10, 9, 7, 0);$$

$\lambda = 4n = 10$: (I.2.6) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ $\vec{C}_0 = (0, 8, 1, 7, 2, 5, 3, 4, 0)$

$$\vec{C}_1 = (\infty, 0, 8, 1, 7, 2, 5, 3, \infty) \quad \vec{C}_2 = (\infty, 3, 4, 0, 8, 1, 7, 2, \infty) \quad \vec{C}_3 = (\infty, 2, 5, 3, 4, 0, 8, 1, \infty)$$

$$\vec{C}_4 = (\infty, 1, 7, 2, 5, 3, 4, 0, \infty);$$

$\lambda = 4n = 11$: (I.2.3) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ et 3 fois $\vec{C}_0 = (0, 10, 1, 9, 2, 3, 6, 4, 0)$

$$\vec{C}_1 = (0, 1, 8, 6, 9, 4, 10, 5, 0) \quad \vec{C}_2 = (0, 5, 10, 4, 9, 6, 8, 7, 0);$$

$\lambda = 4n = 14$: (I.2.6) avec $\Gamma = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et $\vec{C}_0 = (0, 1, 12, 2, 11, 4, 8, 3, 0)$

$$\vec{C}_1 = (0, 12, 1, 11, 2, 7, 3, 6, 0) \quad \vec{C}_2 = (0, 1, 8, 3, 5, 10, 9, 7, 0)$$

$$\vec{C}_3 = (\infty, 0, 1, 12, 2, 11, 4, 8, \infty) \quad \vec{C}_4 = (\infty, 8, 3, 0, 12, 1, 11, 2, \infty)$$

$$\vec{C}_5 = (\infty; 2, 7, 3, 6, 0, 1, 8, \infty) \quad \vec{C}_6 = (\infty, 8, 3, 5, 10, 9, 7, 0, \infty);$$

$\lambda = 4n = 15$: (I.3.2) avec $m+1 = 8 = n+1$ et en remarquant que $4K_{7,7}^*$ est l'union de 7 graphes $K_{4,7}^*$ et donc est décomposable en 8-circuits.

Existence des $(n, 2p, \lambda)$ C_{2p} -configurations.

La méthode s'applique aussi au cas des cycles (non orientés) de longueur paire. Une condition nécessaire d'existence est que le nombre d'arêtes de λK_n soit un multiple de $2p$ et que le degré d'un sommet de λK_n soit pair soit :

$$(i) \quad \lambda n(n-1) \equiv 0 \pmod{4p}$$

$$(ii) \quad \lambda (n-1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Nous nous limiterons aux cas $2p = 4, 6, 8$, pour lesquels nous montrerons que ces conditions sont aussi suffisantes. (les cas $2p = 4$ et $2p = 6$ ont été établis aussi dans [H5] et [H7], mais avec des méthodes du type I.2 et les preuves

données ici sont plus courtes). Néanmoins nous donnerons les lemmes dans le cas général.

(I.3.18) Lemme : Si p est pair $K_{p,2r}$ est décomposable en $2p$ -cycles pour $2r \geq p$.

Démonstration : Si on note les sommets de $K_{p,2r}$ respectivement par x_i : $0 \leq i \leq p-1$ et y_j : $0 \leq j \leq 2r-1$, la décomposition est donnée par les r $2p$ -cycles C_j ($0 \leq j \leq r-1$) où :

$$C_j = (\dots, x_i, y_{2j+i}, \dots, x_0)$$
 avec $0 \leq i \leq p-1$ et où les indices des y sont à prendre modulo $2r$.

(I.3.19) Lemme : Si p est impair $K_{2p,4r}$ est décomposable en $2p$ -cycles pour $4r > p$.

Démonstration : Si on note les sommets de $K_{2p,4r}$ par x_i et x'_i avec $0 \leq i \leq p-1$ d'une part et y_j , $0 \leq j \leq 4r-1$ d'autre part, la décomposition est donnée par les $4r$ $2p$ -cycles : C_j, C'_j, C''_j, C'''_j où $0 \leq j \leq r-1$ et où

$$C_j = (x_0, y_{4j}, \dots, x_i, y_{4j+i}, \dots, x_{p-1}, y_{4j-2}, x_0)$$

$$C'_j = (x_0, y_{4j+1}, \dots, x'_i, y_{4j+i+1}, \dots, x'_{p-1}, y_{4j-1}, x_0)$$

$$C''_j = (x'_0, y_{4j+2}, \dots, x_i, y_{4j+i+2}, \dots, x_{p-1}, y_{4j}, x'_0)$$

$$C'''_j = (x'_0, y_{4j+3}, \dots, x'_i, y_{4j+i+3}, \dots, x'_{p-1}, y_{4j+1}, x'_0)$$
 avec $1 \leq i \leq p-2$ et où les indices des y sont à prendre modulo $4r$.

Remarque : La construction donnée en I.3.19 est assez compliquée il serait intéressant d'en avoir une plus simple, en particulier une qui donnerait une décomposition de $K_{2p,2r}$ avec $2r > p$ et p impair. Plus généralement on peut poser la conjecture suivante :

(I.3.20) Conjecture : $K_{m,n}$ peut-être décomposé en $2p$ -cycles si m et n sont pairs, $m \geq p, n \geq p$ et si $2p$ divise mn .

(I.3.21) Théorème [K_2, R_4] : K_{4pq+1} est décomposable en $2p$ -cycles.

Démonstration : Nous renvoyons à [K2, R4] en remarquant que les démonstrations peuvent être simplifiées : en effet il suffit de prouver le théorème pour $q = 1$, le cas général s'en déduit par induction et application des lemmes I.3.2, I.3.18, I.3.19.

(I.3.22) : Si K_{n_0+1} est décomposable en $2p$ -cycles, alors $K_{n_0+4pq+1}$ est décomposable en $2p$ -cycles.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme I.3.2 avec $m+1 = 4pq+1$; $n+1 = n_0+1$; K_{4pq+1} est décomposable en $2p$ -cycles d'après I.3.21, K_{n_0+1} par hypothèse et K_{4pq, n_0} comme union (arête disjointe) de K_{2p, n_0} décomposables d'après I.3.18 ou I.3.19 et parce que n_0+1 vérifie (i) et (ii) soit $(n_0+1) n_0 \equiv 0 \pmod{4p}$ et n_0 pair donc n_0 est multiple de 4.

I.3.23 Théorème : Pour $2p = 4, 6, 8$ il existe une $(n, 2p, \lambda) C_{2p}$ -configuration si et seulement si $n > 2p$ et (i) $\lambda n (n-1) \equiv 0 \pmod{4p}$.

$$(ii) \quad \lambda (n-1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Démonstration : Nous utiliserons les 3 résultats suivants :

- d'après I.1.6, à n fixé il suffit d'établir le théorème pour la plus petite valeur de λ vérifiant (i) et (ii).

- d'après I.3.22, à λ fixé, on peut se limiter aux valeurs de n vérifiant (i) et (ii) et $2p \leq n < 6p$.

-d'après I.1.5 s'il existe une $(n, 2p, \lambda) \vec{C}_{2p}$ -configuration, il existe une $(n, 2p, 2\lambda) C_{2p}$ -configuration. Nous utiliserons donc les résultats de I.3.16 et I.3.17.

Il reste donc à vérifier :

$$2p = 4, \lambda = 1, n = 9 : (I.3.21).$$

$$2p = 4, \lambda = 2, n = 4 \text{ (cas d'exception de I.3.11)} : (I.2.10).$$

$$2p = 6, \lambda = 1, n = 9 (I.3.14).$$

$$2p = 6, \lambda = 1, n = 13 (I.3.21).$$

$2p = 6, \lambda = 2, n = 6$ (cas d'exception de I.3.13) : (I.2.10).

$2p = 6, \lambda = 3, n = 17$, (I.3.2) avec $m+1 = 9 = n+1$ et en remarquant que

$3K_{8,8}$ est l'union (arête disjointe) de quatre $K_{6,8}$ décomposables en 6-cycles d'après I.3.19.

$2p = 8, \lambda = 1, n = 17$ (I.3.21).

Existence des $(n, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configurations (équilibrées)

Rappelons que \vec{P}_k désigne un chemin (orienté) ayant k sommets donc de longueur $k-1$.

(I.3.24) : S'il existe une $(n, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configuration alors $n \geq k$ et $\lambda n(n-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$. S'il existe une $(n, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée alors $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$ et $n \geq k$.

Démonstration : S'il existe une décomposition de λK_n^* en chemins ayant k sommets, le nombre de ces chemins $b = \lambda n(n-1)/(k-1)$ doit être entier d'où la congruence. Si de plus la \vec{P}_k -configuration est équilibrée, chaque sommet de λK_n^* appartient au même nombre de chemins $r = b k/n = \lambda k(n-1)/(k-1)$ qui doit être un entier. Or $k-1$ est premier avec k (car $k \geq 3$) d'où la deuxième congruence.

Les lemmes suivants nous montrent que la méthode de composition avec les graphes bipartis s'applique très bien et permettent d'étudier dans quels cas les conditions nécessaires de I.3.24 sont suffisantes pour l'existence d'une \vec{P}_k -configuration (équilibrée).

(I.3.25) Lemme : Si $m \geq k-1, n \geq k-1$ et $k-1$ divise m il existe une $((m, n), k, 1) \vec{P}_k$ -configuration.

Démonstration : D'après I.3.3, il existe avec les hypothèses ci-dessus une $((m, n), 2(k-1), 1) \vec{C}_{2(k-1)}$ -configuration. En coupant chaque circuit de longueur $2(k-1)$ en deux chemins arc-disjoints de longueur $k-1$, on obtient le lemme ci-dessus.

(I.3.26) Lemme : il existe une $((k-1, k-1), k, 1) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée

Démonstration : L'idée consiste aussi à utiliser la décomposition obtenue en I.3.3, mais il faut couper les circuits de longueur $2(k-1)$ de manière régulière. Une autre méthode de construction sera développée en I.3.42

Cas 1 : $k-1 = 2p$: La décomposition de $K_{2p, 2p}^*$ est donnée par les $4p$ chemins suivants de longueur $2p$ et tels que chaque sommet de $K_{2p, 2p}^*$ appartienne au même nombre de chemins:

$P_i, P_{p+i}, P'_i, P'_{p+i}$ avec $0 \leq i \leq p-1$ et où

$$P_i = (\dots, x_{i+j}, y_{2i+j}, \dots, x_{p+i}) \quad 0 \leq j \leq p-1$$

$$P_{p+i} = (\dots, x_{p+i+j}, y_{p+2i+j}, \dots, x_i) \quad 0 \leq j \leq p-1$$

$$P'_i = (\dots, y_{i+1+j}, x_j, \dots, y_{i+p+1}) \quad 0 \leq j \leq p-1$$

$$P'_{p+i} = (\dots, y_{i+p+1+j}, x_{p+j}, \dots, y_{i+1}) \quad 0 \leq j \leq p-1$$

(les indices sont à considérer modulo $2p$).

Cas 2 : $k-1 = 2p-1$: la décomposition de $K_{2p-1, 2p-1}^*$ est donnée par les $4p-2$

chemins P_i et P'_i avec $0 \leq i \leq 2p-2$ et où

$$P_i = (\dots, x_{i+j}, y_{2i+j}, \dots) \quad 0 \leq j \leq p-1$$

$$P'_i = (\dots, y_{2i+j}, x_{i+1+j}, \dots) \quad p-1 \leq j \leq 2p-2$$

(les indices sont à considérer modulo $2p-1$).

I.3.27 Théorème S'il existe une $(k, k, 1) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée, alors il existe une $(q(k-1)+1, k, 1) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée.

Démonstration : (par induction). Supposons le théorème vrai pour q , alors d'après I.3.2 appliqué avec $G = \vec{P}_k, m+1 = k, n+1 = q(k-1)+1$, il existe une $((q+1)(k-1)+1, k, 1) \vec{P}_k$ -configuration. Pour montrer qu'elle est équilibrée il nous faut revenir à la démonstration de I.3.2. Soit $m+1 = k, n+1 = q(k-1)+1$ et soit $X \cup Y = \{x_0\}$ l'ensemble des sommets de K_{m+n+1}^* avec $|X| = m, |Y| = n$.

D'après les hypothèses il existe une $(k, k, 1) \vec{P}_k$ -configuration sur $X \cup \{x_0\}$ et une $(n+1, k, 1) \vec{P}_k$ -configuration sur $Y \cup \{x_0\}$. $K_{m,n}^*$ est décomposable en chemins à k sommets comme union arc disjointe de $q K_{k-1, k-1}^*$ décomposables d'après I.3.26. On obtient ainsi une décomposition de K_{m+n+1}^* en chemins à k sommets

vérifiant : un sommet x de X appartient à k chemins de la \vec{P}_k -configuration sur $X \setminus \{x_0\}$ et à qk chemins de la décomposition de $K_{m,n}^*$ donc en tout à $(q+1)k$ chemins. De même un sommet y de Y appartient à qk chemins de la \vec{P}_k -configuration sur $Y \setminus \{x_0\}$ et à k chemins de la décomposition de $K_{m,n}^*$, donc à $(q+1)k$ chemins. Enfin x_0 appartient aussi à $(q+1)k$ chemins. La configuration est donc bien équilibrée.

(I.3.28) Toute $(k, k, 1)$ \vec{P}_k -configuration est équilibrée et existe si et seulement si il existe une $(k+1, k+1, 1)$ \vec{C}_{k+1} -configuration.

Démonstration : Dans une décomposition de K_k^* en chemins hamiltoniens tout sommet appartient au même nombre de chemins, à savoir k . La $(k, k, 1)$ \vec{P}_k -configuration est donc équilibrée. Enfin l'équivalence n'est qu'une reformulation de l'équivalence entre l'existence d'une décomposition de K_k^* en chemins hamiltoniens et de K_{k+1}^* en circuits hamiltoniens (voir I.2.24, I.2.25.)

En utilisant les résultats de I.2.24,25 nous avons.

(I.3.29) : Pour k pair ou k impair vérifiant $k = 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 39, 55, 57$, il existe une $(n, k, 1)$ \vec{P}_k -configuration équilibrée si et seulement si $n = q(k-1) + 1$ avec $q \geq 1$.

(I.3.30) : Pour $k = 3, 5$ il existe une $(n, k, 1)$ \vec{P}_k -configuration si et seulement si $n = q(k-1) + 1$ avec $q \geq 2$. (Il en existe en particulier une équilibrée).

Démonstration : Pour $n = k$ une telle configuration n'existe pas comme nous l'avons vu en I.2.24. Pour $n = 2k-1$ on obtient une $(2k-1, k, 1)$ \vec{P}_k -configuration en coupant les circuits en deux chemins arc-disjoints d'une $(2k-1, 2k-2, 1)$ \vec{C}_{2k-2} -configuration qui existe d'après I.2.4 : on a ainsi pour $k = 3, n = 5$ les 10 chemins à 3 sommets : $(i, 4+i, 1+i)$ et $(1+i, 2+i, i)$ avec $0 \leq i \leq 5$ et pour $k = 5, n = 9$ les chemins $(i, 8+i, 1+i, 7+i, 2+i)$ $(2+i, 5+i, 3+i, 4+i, i)$ avec $0 \leq i \leq 9$ et les configurations sont bien équilibrées. Pour $k = 3, n = 7$ on obtient une $(7, 3, 1)$ \vec{P}_3 -configuration équilibrée en appliquant I.2.3 avec $\Gamma = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\vec{P}_0 = (0, 1, 3)$, $\vec{P}_1 = (0, 3, 1)$, $\vec{P}_2 = (0, 4, 3)$. Pour $k = 5, n = 13$ on a une $(13, 5, 1)$ \vec{P}_5 configuration avec I.2.3 et $\Gamma = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $\vec{P}_0 = (0, 1, 3, 6, 10)$, $\vec{P}_1 = (0, 5, 11, 6, 2)$, $\vec{P}_2 = (0, 7, 4, 2, 1)$. Le cas général $n = q(k-1)+1, q \geq 2$, se montre par induction, comme I.3.27, sauf que supposant la proposition vraie pour q on montre qu'elle est vraie pour $q+2$ avec I.3.2 et $m+1 = 2k-1, n+1 = q(k-1)+1$.

La même méthode s'applique au cas des \vec{P}_k -configurations non forcément équilibrées et au cas $\lambda \geq 2$. Nous laissons au lecteur le soin d'établir les résultats correspondants. A titre d'exemple nous donnons les lemmes utiles pour l'existence des $(n, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configurations équilibrées avec $\lambda \geq 2$ et résolvons les cas $k = 3, 4, 5, 6$.

(I.3.31) Lemme : Pour $\lambda \geq 2$, il existe une $(k, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée si $k \lambda$ est pair.

Démonstration : Si k est pair une $(k, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée existe pour $\lambda = 1$ (I.3.29) et donc d'après I.1.6 pour tout λ . Si k est impair et λ pair, il suffit d'après I.1.6 de le montrer pour $\lambda = 2$ et ceci est une conséquence de I.3.48.

(I.3.32) : Pour λ impair il n'existe pas de $(3, 3, \lambda) \vec{P}_3$ -configuration.

Démonstration : Soit 0, 1, 2 les sommets de λK_3^* . L'arc 01 ne peut apparaître que dans les chemins (012) et (201) : supposons qu'il apparaisse λ_1 fois dans (0,1,2) et λ_2 fois dans (2,0,1) on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. L'arc 12 apparaît alors λ_2 fois dans (120) et l'arc 20 apparaît donc $2\lambda_2$ fois nombre différent de λ impair d'où la contradiction.

(I.3.33) : Pour $\lambda \geq 2$, $k = 3, 4, 5, 6$ il existe une $(n, k, \lambda) \vec{P}_k$ -configuration équilibrée et seulement si $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$ excepté $k = 3 = n, \lambda$ impair.

Démonstration : Pour $k = 4, 6$ la proposition est un corollaire de I.3.40. pour $k = 3, 5$ nous indiquons seulement les constructions pour les valeurs minimales de λ et n , non étudiées en I.3.30 ou I.3.31. Le cas général se déduit par application de I.1.6 ou par induction comme I.3.27. Nous indiquons les chemins de bases, le lemme utilisé étant I.2.3 avec $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$k = 3, \lambda = 2, n = 4$: (0,1,2) ; 2 fois (0,2,1)

$k = 5, \lambda = 2, n = 7$: (0,4,3,2,6) ; 2 fois (0,1,3,6,4)

$\lambda = 3, n = 5$: (0,1,3,4,2) ; (0,2,4,3,1) ; (0,1,4,3,2).

$\lambda = 4, n = 6$: (0,5,4,3,2) ; 4 fois (0,2,5,3,4)

$n = 8$: 4 fois (0,2,6,4,1) ; (0,1,2,3,4) ; (0,3,6,1,4) ; (0,7,6,5,4).

Existence des (n, k, λ) P_k -configurations (équilibrées).

Rappelons que P_k désigne une chaîne (non orientée) ayant k sommets, donc de longueur $k-1$. Nous nous limiterons aux P_k -configurations équilibrées : les résultats s'étendent aisément au cas des P_k -configurations non équilibrées. Les P_k -configurations équilibrées ont été étudiées sous le nom d'"handcuffed designs" ([H3, H8L1, L2]).

(I.3.34) S'il existe une (n, k, λ) P_k -configuration équilibrée alors $\lambda k(n-1) \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$ et $n \geq k$.

Démonstration : Le nombre de chaînes dans une décomposition de λK_n en chaînes de longueur $k-1$: $b = \lambda n(n-1)/2(k-1)$ doit être un entier. D'autre part la configuration étant équilibrée le nombre r de chaînes auxquelles appartient un sommet de λK_n doit être entier : or $b k = n r$ d'où $r = \lambda k(n-1)/2(k-1)$. Supposons $\lambda k(n-1) \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$ alors r est entier. Si k est pair, $k-1$ étant premier avec k , ($k \geq 3$) la condition se réduit à $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$ et b est entier, car $n(n-1)$ est pair. Si k est impair $2(k-1)$ est premier avec k et divise donc $\lambda(n-1)$ et b est entier.

(I.3.35) Conjecture [L1] : La condition $\lambda k(n-1) \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$ est suffisante pour l'existence d'une (n, k, λ) P_k -configuration équilibrée.

Dans [H8, L1, L2] la conjecture est prouvée pour $\lambda = 1, 2$, $k = 3, 4$, $n = p^\alpha$, (p premier impair) et pour $\{n = 2^x$ et $\lambda(n-1)/k-1$ pair}. Les démonstrations utilisent surtout les méthodes de construction développées en I.2. Nous allons montrer que la méthode de composition avec les graphes bipartis simplifie les démonstrations et nous permet de résoudre de nouveaux cas.

(I.3.36) Si k est pair, si $m > k/2$ et $\lambda m \equiv 0 \pmod{k-1}$

alors il existe une décomposition de $\lambda K_{m, k-1}$ en chaînes à k sommets. De plus si $X \cup Y$ est l'ensemble des sommets de $\lambda K_{m, k-1}$ avec $|X| = m$, $|Y| = k-1$, tout sommet de X appartient à $\lambda k/2$ chaînes et tout sommet de Y à $\lambda m k/2(k-1)$ chaînes.

Démonstration : La décomposition cherchée de $\lambda K_{m,k-1}$ est donnée par les λm chaînes, P_i , $0 \leq i \leq \lambda m - 1$, à k sommets où $P_i = (\dots, x_{i+j}, y_{i-j}, \dots)$ avec $0 \leq j \leq k/2 - 1$ et où les indices des x sont à considérer modulo m et ceux des y modulo $k-1$. Les vérifications des propriétés énoncées se font en remarquant que le sommet x_i est relié à $y_{i+\alpha m}$ ($0 \leq \alpha \leq \lambda - 1$) dans $P_{i+\alpha m}$ et aux sommets $y_{i-2h-1+\alpha m}$ et $y_{i-2h+\alpha m}$ dans $P_{i+h+\alpha m}$ (avec $0 \leq \alpha \leq \lambda - 1$ ou $1 \leq \alpha \leq \lambda$ suivant que $i-h \geq 0$ ou < 0).

(I.3.37) Si k est pair, il existe une $(k, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée.

Ceci n'est qu'une reformulation pour $\lambda=1$ du fait que pour k pair, K_k est décomposable en chaînes hamiltoniennes (I.2.11 ou [P2, chap 11]). Le cas λ quelconque se déduit par application de I.1.6. Remarquons que toute $(k, k, \lambda) P_k$ -configuration est équilibrée, un sommet appartenant à toutes les chaînes.

(I.3.38) Théorème : Si k est pair et s'il existe une $(n_0, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée, alors il existe une $(n_0 + q(k-1), k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée.

Démonstration : (par induction sur q). Supposons le théorème vrai pour q . Soit $m = n_0 - 1 + q(k-1)$ et soit $X \cup Y \cup \{x_0\}$ une partition des sommets de λK_{m+k} avec $|X| = m$ et $|Y| = k-1$. D'après I.3.37 il existe une $(k, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée sur le λK_k engendré par $Y \cup \{x_0\}$. D'après l'hypothèse d'induction, il existe une $(m+1, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée sur le λK_{m+1} engendré par $X \cup \{x_0\}$; donc d'après I.3.34 on a $\lambda km \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$, soit comme k est pair $\lambda m \equiv 0 \pmod{k-1}$. Les hypothèses de I.3.36 sont satisfaites et il existe une décomposition du $\lambda K_{m,k-1}$ sur $X \cup Y$ en chaînes à k sommets. D'après I.3.2 on a donc une $(m+k, k, \lambda) P_k$ -configuration. Il reste à vérifier que cette configuration est équilibrée : ceci résulte du fait que tout sommet appartient à $\lambda k(m+k-1)/2(k-1)$ chaînes : en effet un sommet de X appartient à $\lambda km/2(k-1)$ chaînes du K_{m+1} sur $X \cup \{x_0\}$ et à $\lambda k/2$ chaînes du $K_{m,k-1}$ d'après I.3.36 ; de même un sommet de Y appartient à $\lambda k/2$ chaînes du K_k sur $Y \cup \{x_0\}$ et à $\lambda km/2(k-1)$ chaînes du $K_{m,k-1}$ et x_0 appartient à $\lambda km/2(k-1)$ chaînes du K_{m+1} et $\lambda k/2$ chaînes du K_k .

I.3.39 Corollaire ([HE, L1]) : Si k est pair et $\lambda = 2^\alpha$ (α entier ≥ 0) il existe une (n, k, λ) P_k -configuration équilibrée si et seulement si $n-1 \equiv 0 \pmod{k-1}$.

I.3.40 : Pour $k = 4, 6$ il existe une (n, k, λ) P_k -configuration équilibrée si et seulement si $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$.

Démonstration : La condition est nécessaire d'après I.3.34. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de le montrer pour les valeurs de λ minimales d'après I.1.6 et de n comprises entre k et $2k-2$ d'après I.3.38. Compte tenu de I.3.39 il reste :

$k = 4, \lambda = 3, n = 5$: (I.2.5) avec $\Gamma = Z/5Z$ et $(0, 1, 3, 2)$ $(0, 2, 3, 1)$; $n = 6$: (I.2.9) avec $\Gamma = Z/5Z$ et $(0, 1, 2, 3)$ $(\infty, 0, 2, 4)$ $(0, \infty, 2, 4)$.

$k = 6, \lambda = 5, n = 7$: (I.2.5) avec $\Gamma = Z/7Z$ et $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ $(0, 2, 6, 1, 5, 3)$ $(0, 3, 1, 4, 2, 5)$; $n = 8$ (I.2.9) avec $\Gamma = Z/7Z$ et $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ $(\infty, 0, 2, 6, 1, 5)$ $(0, \infty, 4, 2, 5, 1)$ $(0, \infty, 5, 3, 1, 4)$; $n = 9$ (I.2.5) avec $\Gamma = Z/9Z$ et $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$, $(0, 4, 8, 3, 7, 2)$, $(0, 3, 1, 4, 2, 5)$, $(0, 2, 8, 6, 3, 1)$; $n = 10$ (I.2.9) avec $\Gamma = Z/9Z$ et $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ $(0, 4, 8, 3, 7, 2)$ $(\infty, 0, 3, 1, 4, 2)$ $(0, \infty, 2, 8, 6, 3)$ $(0, \infty, 3, 6, 8, 1)$.

Remarque : On peut résoudre sans difficulté les valeurs suivantes paires de k , on peut comparer la démonstration avec celle de [L2] concernant $k = 4$.

(I.3.41) : Si k est impair, si $m > (k+1)/2$ et $\lambda m \equiv 0 \pmod{k-1}$ alors il existe une décomposition de $\lambda K_{2m, 2(k-1)}$ en chaînes à k sommets. De plus si $X \cup Y$ est l'ensemble des sommets de $\lambda K_{2m, 2(k-1)}$ avec $|X| = 2m$, $|Y| = 2(k-1)$, tout sommet de X appartient à λk chaînes et tout sommet de Y à $\lambda mk/(k-1)$ chaînes.

Démonstration : L'idée consiste à utiliser la même décomposition qu'en I.3.36, mais les chaînes commençant et finissant dans le même ensemble (soit X , soit Y) il faut en choisir la moitié commençant dans X et l'autre moitié dans Y .

Labellons les points de X : x_i et x'_i avec $0 \leq i \leq m-1$ et ceux de Y : y_j et y'_j avec $0 \leq j \leq k-2$. La décomposition cherchée est donnée par les $4 \lambda m$ chaînes ; P_i, P'_i, P''_i, P'''_i avec $0 \leq i \leq \lambda m-1$ et où les indices des x sont à considérer modulo m et ceux des y modulo $k-1$;

$$\begin{aligned}
 P_i &= (\dots, x_{i+j}, y_{i-j}, \dots, x_{i+(k-1)/2}) & 0 \leq j \leq (k-3)/2 \\
 P'_i &= (\dots, x'_{i+j}, y'_{i-j}, \dots, x'_{i+(k-1)/2}) & 0 \leq j \leq (k-3)/2 \\
 P''_i &= (\dots, y_{i+j}, x'_{i-j}, \dots, y_{i+(k-1)/2}) & 0 \leq j \leq (k-3)/2 \\
 P'''_i &= (\dots, y'_{i+j}, x_{i-j}, \dots, y'_{i+(k-1)/2}) & 0 \leq j \leq (k-3)/2.
 \end{aligned}$$

(I.3.42) : Si $m > (k+1)/2$ et $\lambda m \equiv 0 \pmod{k-1}$ il existe une décomposition de $2 \lambda K_{m,k-1}$ en chaînes à k sommets et de plus tout sommet de $2 \lambda K_{m,k-1}$ appartient à $\lambda k(m+k-1)/(k-1)$ chaînes. (k est supposé impair).

Démonstration : La décomposition cherchée est donnée par les $2 \lambda m$ chaînes P_i et P'_i avec $0 \leq i \leq \lambda m - 1$ et où

$$\begin{aligned}
 P_i &= (\dots, x_{i+j}, y_{i-j}, \dots, x_{i+(k-1)/2}) & 0 \leq j \leq (k-3)/2 \\
 P'_i &= (\dots, y_{i+j}, x_{i-j}, \dots, y_{i+(k-1)/2}) & 0 \leq j \leq (k-3)/2
 \end{aligned}$$

(les indices des x sont à considérer modulo m et ceux des y modulo $k-1$). On aurait pu aussi obtenir une décomposition à partir de I.3.26.

Remarque : Si k est pair, on peut par la même méthode trouver une décomposition de $2 \lambda K_{m,k-1}$: on peut aussi déduire une telle décomposition de I.3.26.

(I.3.43) : Il existe une $(2k-1, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée.

Démonstration : Si k est pair, une telle configuration existe d'après (I.3.37,38). si k impair il suffit de la construire pour $\lambda = 1$, le cas général se déduisant par I.1.6. Pour $\lambda = 1$ on l'obtient par application de I.2.5 avec

$$P = (0, \dots, i, 2k-1-i, \dots) \text{ avec } 1 \leq i \leq (k-1)/2 \text{ et } \Gamma = Z/(2k-1) Z.$$

(I.3.44) : S'il existe une $(n_0, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée il existe une $(n_0 + 2q(k-1), k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée.

Démonstration : Le cas k pair est résolu en I.3.38 : pour le cas k impair la démonstration se fait par induction sur q exactement comme en I.3.38 avec $m = n_0 - 1 + 2q(k-1)$ et $n = 2k-1$ et en utilisant I.3.41. On montre que tout sommet de λK_{m+2k-1} appartient à $\lambda k(m+k-1)/(k-1)$ chaînes.

(I.3.45) Corollaire [HS, L1] : Il existe une $(n, k, 1) P_k$ -configuration équilibrée, avec k impair, si et seulement si $n-1 \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$.

(I.3.46) Pour $k = 3, 5$ il existe une $(n, k, \lambda) P_k$ -configuration équilibrée si et seulement si $\lambda(n-1) \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$.

Démonstration : Si λ est impair la condition se réduit pour $k = 3, 5$ à $(n-1) \equiv 0 \pmod{2(k-1)}$ et une $(n, k, \lambda) P_k$ -configuration existe d'après I.3.44 et I.1.6. Si λ est pair on déduit l'existence d'une $(n, k, \lambda) P_k$ -configuration de celle d'une $(n, k, \lambda/2) \vec{P}_k$ -configuration d'après I.1.5 et I.3.33.

(I.3.47) : S'il existe une $(n_0, k, 2\lambda) P_k$ -configuration équilibrée il existe une $(n_0 + q(k-1), k, 2\lambda) P_k$ -configuration équilibrée.

Démonstration : Elle se fait par induction sur q comme en I.3.38 (ou I.3.27) en utilisant la décomposition de $2\lambda K_{m, k-1}$ de I.3.42.

(I.3.48) Corollaire [H8, L1] : Il existe une $(n, k, 2) P_k$ -configuration équilibrée si et seulement si $n-1 \equiv 0 \pmod{k-1}$

Démonstration : Le cas k pair est traité en I.3.39. Si k impair il suffit d'après I.1.6 et I.3.47 d'exhiber une $(k, k, 2) P_k$ -configuration équilibrée : on l'obtient en appliquant I.2.5 avec $\Gamma = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et $P = (0, \dots, i, k-i, \dots)$ avec $1 \leq i \leq (k-1)/2$.

Remarque : Nous avons appliqué la méthode de composition avec les graphes bipartis au cas des circuits (cycles) de longueur paire, au cas des chaînes (chemins). Nous laissons au lecteur le soin de l'appliquer à d'autres graphes G par exemple étoiles, graphes bipartis.....

I.4 Méthode de composition avec les produits lexicographiques.

Nous développons dans ce paragraphe une autre méthode de composition utilisant les produits lexicographiques, moins efficace que celle développée en I.3, mais qui a l'avantage de s'appliquer pour toutes les G -configurations. Nous donnons les lemmes dans le cas général et étudions plus particulièrement les cas $G = K_k$ et surtout $G = \vec{C}_k$. La méthode nous permettra de démontrer la conjecture I.1.2 pour $k = 3$ et $k = 5$. (Les résultats de ce paragraphe paraîtront en anglais dans [B7]).

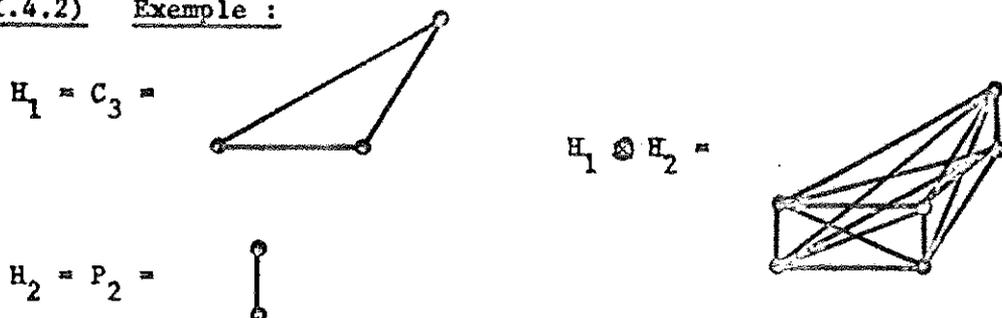
(I.4.1) Définition : Produit lexicographique :

Soient $H_1 = (X_1, E_1)$ et $H_2 = (X_2, E_2)$ deux graphes (resp. graphes orientés) on appelle produit lexicographique de H_1 par H_2 et on note $H_1 \otimes H_2$, le graphe (graphe orienté) ayant pour ensemble de sommets le produit cartésien $X_1 \times X_2$ et où (x_1, x_2) est relié à (y_1, y_2) si et seulement si :

- soit $\{x_1, y_1\}$ est une arête (arc) de H_1 .
- soit $x_1 = y_1$ et $\{x_2, y_2\}$ est une arête (arc) de H_2 .

$H_1 \otimes H_2$ est aussi appelé composition de H_1 par H_2 . On peut considérer que $H_1 \otimes H_2$ est obtenu en remplaçant chaque sommet de H_1 par une copie de H_2 .

(I.4.2) Exemple :



(I.4.3) Notations : Nous dirons qu'un graphe H peut-être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G , si on peut partitionner les arêtes (arcs) de H en sous graphes partiels isomorphes à G . S_n désigne le graphe (1-graphe) formé de n sommets isolés.

(I.4.4) Lemme : Si H_1, H_2 et $G \times S_n$ (où n désigne le nombre de sommets de H_2) peuvent être décomposés en sous graphes partiels isomorphes à G , alors $H_1 \otimes H_2$ peut-être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G .

Démonstration : Soit m le nombre de sommets de H_1 et n celui de H_2 . $H_1 \otimes H_2$ est l'union arête (arc)-disjointe de $H_1 \otimes S_n$ et de $S_m \otimes H_2$. $S_m \otimes H_2$ est l'union de m copies de H_2 , deux à deux arête (arc)-disjointes et peut donc être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G (car H_2 est décomposable). $H_1 \otimes S_n$ peut être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à $G \times S_n$ (d'après l'hypothèse de décomposition de H_1) et chacun de ces sous graphes partiels isomorphes à $G \times S_n$ est décomposable en sous graphes partiels isomorphes à G .

(I.4.5) : S'il existe une (m, k, λ) G -configuration, une (n, k, λ) G -configuration et si $G \otimes S_n$ peut être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G , alors il existe une $(mn, k, \lambda)G$ -configuration.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme 1 avec $H_1 = \lambda K_m^*$ (ou $H_1 = \lambda K_m^*$) et $H_2 = \lambda K_n^*$ (ou λK_n^*).

Pour pouvoir appliquer I.4.4 ou I.4.5 il faut donc étudier sous quelles conditions $G \otimes S_n$ est décomposable en sous graphes partiels isomorphes à G . Nous allons montrer que pour $G = P_k, \vec{P}_k, C_k, \vec{C}_k$, cette décomposition est toujours possible ; par contre dans le cas $G = K_k$ cette décomposition est liée à l'existence de tableaux orthogonaux

(I.4.6) Définition : ([H_1 , chap 13] ou [B4]). Un tableau orthogonal (orthogonal array) OA (n, k) est un tableau à k lignes, n^2 colonnes, dont les éléments notés

$a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n^2$) appartiennent à un ensemble E , avec $|E| = n$ et tel que : $\forall i, i' \{ (a_{i,j}, a_{i',j}) : 1 \leq j \leq n^2 \} = E \times E$.

(comme $|E \times E| = n^2$, pour vérifier la condition d'orthogonalité ci dessus il suffit de vérifier que pour 2 lignes quelconques i, i' les couples $(a_{i,j}, a_{i',j})$ sont tous distincts ou que tout élément de $E \times E$ apparaît au moins une fois comme couple

$(a_{i,j}, a_{i',j})$.

(I.4.7) : Remarque Il est bien connu qu'un tableau orthogonal OA (n,k) existe si et seulement si il existe k-2 carrés latins orthogonaux d'ordre n. On peut donc utiliser tous les résultats connus sur les carrés latins orthogonaux (voir Wilson [W3] par exemple).

(I.4.8) $K_k \otimes S_n$ peut être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à K_k si et seulement si il existe un tableau orthogonal OA (n,k).

Démonstration : (Elle est voisine de la démonstration de l'équivalence des tableaux orthogonaux et des "transversal designs" * (voir [B 10] ou [W2,W3], les "blocs des transversal designs" jouant le rôle des sous graphes de la décomposition).

Supposons qu'il existe un tableau orthogonal OA(n,k) et identifions les éléments de S_n et ceux de E (éléments du OA(n,k)). Les sommets de $K_k \otimes S_n$ sont donc labellés (i,e) avec $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq e \leq n$; les arêtes de $K_k \otimes S_n$ sont les paires $\{(i,e), (i',e')\}$ avec $i \neq i'$. A chaque colonne j du tableau orthogonal associons le sous graphe complet G_j de $K_k \otimes S_n$, construit sur les sommets $(i, a_{i,j})$ avec $1 \leq i \leq k$. G_j est bien isomorphe à K_k . Soit $\{(i,e), (i', e')\}$ avec $i \neq i'$, une arête de $K_k \otimes S_n$; elle appartient à G_j si $a_{i,j} = e$ et $a_{i',j} = e'$; or d'après la condition d'orthogonalité de la définition de OA (n,k) ces équations admettent une solution unique en j. Donc toute arête de $K_k \otimes S_n$ appartient à un et un seul G_j , c'est-à-dire $K_k \otimes S_n$ est décomposable en K_k .

Réciproquement supposons qu'il existe une décomposition de $K_k \otimes S_n$ en n^2 sous graphes partiels G_j isomorphes à K_k . Si (i,e) et (i', e') sont deux sommets d'un G_j alors $i \neq i'$, l'arête $\{(i, e), (i', e')\}$ devant être dans G_j . Comme G_j à k sommets, on peut écrire ses sommets $(i, a_{i,j})$ avec $1 \leq i \leq k$. A la décomposition de $K_k \otimes S_n$ associons le tableau à k lignes et n^2 colonnes, où l'élément de la ligne i et de la colonne j est $a_{i,j}$ défini ci dessus. Toute arête de $K_k \otimes S_n$ apparaissant dans un et un seul G_j on a bien la condition d'orthogonalité du tableau.

* Pour une étude récente des transversal designs voir Henani [H 10].

(I.4.9) : Théorème (R.C. Bose et S.S. Shrikhande [B9]) : S'il existe une $(m,k,\lambda)K_k$ -configuration, une $(n,k,\lambda)K_k$ -configuration et un tableau orthogonal OA (n,k) ; alors il existe une $(mn,k,\lambda)K_k$ -configuration :

Démonstration : Corollaire immédiat de I.4.5 et I.4.8.

(I.4.10) : T_k désignant un tournoi à k sommets : s'il existe une $(m,k,\lambda)T_k$ -configuration, une $(n,k,\lambda)T_k$ -configuration et un tableau orthogonal OA (n,k) ; alors il existe une $(mn,k,\lambda)T_k$ -configuration.

Démonstration : Il suffit de montrer que $T_k \otimes S_n$ est décomposable en sous graphes partiels isomorphes à T_k . La démonstration est identique à I.4.8 T_k s'obtenant à partir de K_k en fixant une certaine orientation aux arêtes de K_k .

(I.4.11) : $C_k \otimes S_n$ (resp. $\vec{C}_k \otimes S_n$) est décomposable en k -cycles (resp. k -circuits).

Démonstration : La proposition est prouvée dans [B5] (voir chap.3) pour les k -circuits. La démonstration est identique pour les cycles et les circuits (un k -circuit s'obtenant à partir d'un k -cycle en orientant correctement les arêtes). Nous donnons ici celle pour les cycles. Comme le nombre d'arêtes de $C_k \otimes S_n$ est $k n^2$, il suffit d'exhiber n^2 k -cycles 2 à 2 arêtes disjoints. Considérons les éléments de C_k comme ceux de Z/kZ et ceux de S_n comme ceux de Z/nZ . On vérifie que les n^2 k -cycles $C_{j,\alpha}$ de $C_k \otimes S_n$ où $j \in Z/nZ$ et $\alpha \in Z/nZ$ sont bien 2 à 2 arêtes disjoints :
 $C_{j,\alpha} = (\dots, (i, j+i\alpha), \dots, (k-1, \alpha), (0, j))$ où $0 \leq i \leq k-2$.

(I.4.12) : Si H_1 et H_2 sont décomposables en k -cycles (resp. k -circuits) alors $H_1 \times H_2$ est aussi décomposable en k -cycles (resp. k -circuits). En particulier s'il existe une $(m,k,\lambda)C_k$ -configuration et une $(n,k,\lambda)C_k$ -configuration alors il existe une $(mn,k,\lambda)C_k$ -configuration. S'il existe une $(m,k,\lambda)\vec{C}_k$ -configuration et une $(n,k,\lambda)\vec{C}_k$ -configuration, alors il existe une $(mn,k,\lambda)\vec{C}_k$ -configuration.

Démonstration : Corollaire immédiat de I.4.5 et I.4.11.

(I.4.13) : $P_k \times S_n$ (resp. $\vec{P}_k \times S_n$) est décomposable en k-chaînes (resp. k-chemins).

Démonstration : La démonstration est identique pour les chaînes et chemins. Nous donnons ici celle pour les chaînes. Si on considère les éléments de $P_k(S_n)$ comme ceux de Z/kZ (Z/nZ) la décomposition de $P_k \times S_n$ est donnée par les n^2 k-chaînes

$C_{j,\alpha}$ où $j \in Z/nZ$ et $\alpha \in Z/nZ$: $C_{j,\alpha} = (\dots, (i, j+i\alpha), \dots)$ avec $0 \leq i \leq k-1$.

(I.4.14) : S'il existe une (m,k,λ) P_k -configuration (\vec{P}_k -configuration) et une

(mn, k, λ) P_k -configuration (\vec{P}_k -configuration), il existe une (mn, k, λ) P_k -configuration

(\vec{P}_k -configuration) : Corollaire de I.4.5 et I.4.13.

(I.4.15) : (P. Hell et A. Rosa [H3] ; J.F Lawless [L2] : S'il existe une $(m,k,\lambda)P_k$ -configuration équilibrée, une $(n,k,\lambda)P_k$ -configuration équilibrée, alors il existe une $(mn,k,\lambda)P_k$ -configuration équilibrée.

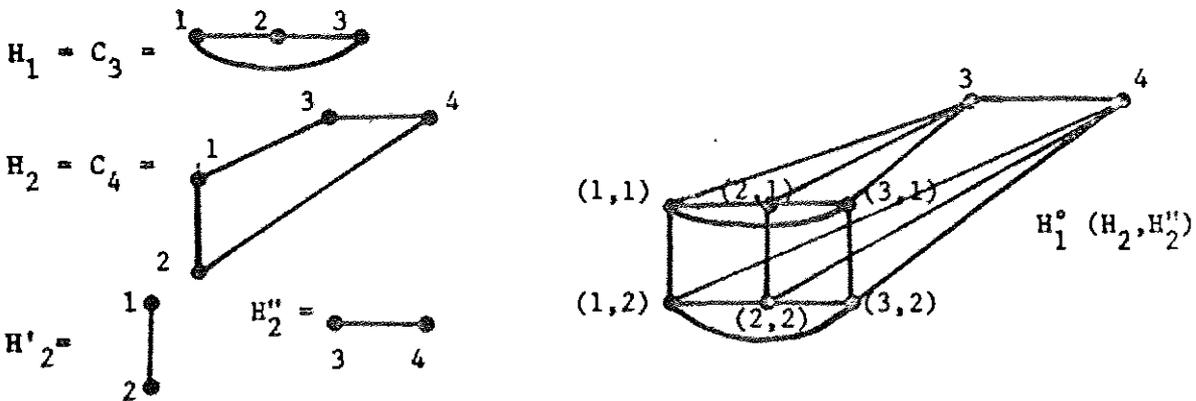
Démonstration : Il suffit dans la construction de I.4.4 ou I.4.5 de montrer que tout sommet de $\lambda K_m \times \lambda K_n$ apparaît dans le même nombre de k-chaînes. Soit (α, β) un sommet quelconque : d'après la construction de I.4.13 si α appartient à un k-chaîne P_k de la décomposition de λK_m , (α, β) appartient à n k-chaînes de $P_k \times S_n$. Comme α appartient à $\lambda k (m-1)/2 (k-1)$ chaînes, (α, β) appartient à $\lambda k n (m-1)/2 (k-1)$ chaînes de la décomposition de $\lambda K_m \times S_n$. D'autre part (α, β) appartient à $\lambda k (n-1)/2 (k-1)$ chaînes du graphe engendré par les (α, i) avec $0 \leq i \leq n-1$, isomorphe à λK_n . Donc (α, β) appartient en tout au nombre constant $\lambda k (mn-1)/2 (k-1)$ chaînes de $\lambda K_m \times \lambda K_n = \lambda K_{mn}$.

Nous allons maintenant considérer une généralisation du produit lexicographique, que nous avons introduite dans [B5] et qui va nous permettre d'obtenir de nouveaux théorèmes de composition. Cette généralisation consiste à identifier dans $H_1 \times H_2$, h points de chaque copie de H_2 . La définition exacte est :

(I.4.16) : Définition : soient m, n, h trois entiers. Soient $H_1 = (X_1, E_1)$ et $H_2 = (X_2' \cup X_2'', E_2)$ deux graphes (graphes orientés) avec $|X_1| = m$, $|X_2'| = n$ et $|X_2''| = h$. Soient H_2' et H_2'' les sous graphes de H_2 engendrés respectivement par X_2' et X_2'' . On définit un graphe (graphe orienté)

- $H_1^o (H_2, H_2'')$ ayant pour sommets les éléments de $(X_1 \times X_2') \cup X_2''$,
- un sommet (x_1, x_2) de $X_1 \times X_2'$ étant relié au sommet (y_1, y_2) de $X_1 \times X_2'$ si et seulement si : soit $\{x_1, y_1\}$ est une arête (arc) de H_1 soit $x_1 = y_1$ et $\{x_2, y_2\}$ est une arête (arc) de H_2' .
 - un sommet (x_1, x_2) de $X_1 \times X_2'$ étant relié au sommet z de X_2'' si et seulement si $\{x_2, z\}$ est une arête (arc) de H_2 .
 - deux sommets z et z' de X_2'' étant reliés si et seulement si $\{z, z'\}$ est une arête (arc) de H_2'' .

Exemple :



(I.4.17) : Remarques : Dans le cas $h = 0$ on retrouve le produit lexicographique. Dans le cas général $H_1^o (H_2, H_2'')$ est l'union des graphes arête (arc)-disjoints : $H_1 \times S_n$, p copies de $H_2 - H_2''$ (graphe obtenu à partir de H_2 en enlevant les arêtes (arcs) de H_2'') et H_2'' ; dans le cas $h = 1$, H_2'' se réduit à 1 sommet x et $H_1^o (H_2, \{x\})$ est l'union de $H_1 \times S_n$ et de p copies de H_2 arêtes (arc)-disjoints.

En utilisant la remarque I.4.17 on obtient exactement comme dans le lemme I.4.4 :

(I.4.18) Lemme : Si $H_1, H_2, G \times S_n$ (où n est le nombre de sommets de H_2') et $H_2 - H_2''$ (graphe partiel obtenu en enlevant de H_2 les arêtes ou arcs de H_2'') peuvent être décomposés en sous graphes partiels isomorphes à G , alors $H_1^o (H_2, H_2'')$ peut aussi être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G .

(I.4.19) Lemme : Si $H_1, H_2, G \times S_n$ (où $n+1$ est le nombre de sommets de H_2) peuvent être décomposés en sous graphes partiels isomorphes à G , alors $H_1^o (H_2, \{x\})$ est aussi décomposable en sous graphes partiels isomorphes à G .

En prenant $H_1 = \lambda K_m$ (ou λK_m^*) ; $H_2 = \lambda K_{n+h}$ (λK_{n+h}^*), $H_2' \simeq \lambda K_n$ (λK_n^*) et donc

$H_2'' \simeq \lambda K_h$ (λK_h^*) et en désignant par $\lambda K_{n+h} - \lambda K_h$ ($\lambda K_{n+h}^* - \lambda K_h^*$) le graphe obtenu en otant de λK_{n+h} (λK_{n+h}^*) les arêtes (arcs) d'un λK_h (λK_h^*) on obtient :

(I.4.20) : S'il existe une (m, k, λ) G-configuration, une (h, k, λ) G-configuration et si $G \times S_n$ et $\lambda K_{n+h} - \lambda K_h$ (ou $\lambda K_{n+h}^* - \lambda K_h^*$) peuvent être décomposés en sous graphes partiels isomorphes à G alors il existe une $(mn+h, k, \lambda)$ G-configuration.

(I.4.21) : S'il existe une (m, k, λ) G-configuration, une $(n+1, k, \lambda)$ G-configuration et si $G \times S_n$ peut-être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G , alors il existe une $(mn+1, k, \lambda)$ G-configuration.

Dans le cas $G = K_k$ nous obtenons avec I.4.8 des résultats sur les (n, k, λ) -configurations (ou B.I.B.D).

(I.4.22) : S'il existe une (m, k, λ) -configuration, une (h, k, λ) -configuration un tableau orthogonal OA (n, k) et si $\lambda K_{n+h} - \lambda K_h$ est décomposable en sous graphes partiels isomorphes à K_k , alors il existe une $(mn+h, k, \lambda)$ -configuration.

(I.4.23) (R.C. Bose et S.S Shrikhande [B9]) : s'il existe une (m, k, λ) -configuration, une $(n+1, k, \lambda)$ -configuration et un tableau orthogonal OA (n, k) , alors il existe une $(mn+1, k, \lambda)$ -configuration.

(I.4.24) : S'il existe une (m, k, λ) -configuration, une $(n+k, k, \lambda)$ configuration, un tableau orthogonal OA (n, k) , alors il existe une $(mn+k, k, \lambda)$ -configuration*

Démonstration : Il suffit d'appliquer I.4.22 avec $h = k$; il existe toujours une (k, k, λ) configuration et l'existence d'une décomposition de $K_{n+k} - K_k$ en sous graphes partiels isomorphes à K_k est équivalente à l'existence d'une $(n+k, k, \lambda)$ configuration en prenant pour K_k une des parties (blocs) de la configuration.

Exemples : On obtient ainsi les configurations suivantes, connues par les travaux d'Hanani (voir M. Hall [H_1 ; 15.5]), mais qui n'étaient pas obtenues dans [B9] : il existe une $(232, 4, 1)$ -configuration avec $m = 4$, $n = 57$, $k = 4$; et une $(285, 5, 1)$ -configuration avec $m = 5$, $n = 56$, $k = 5$.

Dans les cas $G = C_k, \vec{C}_k, P_k, \vec{P}_k$ nous obtenons en utilisant I.4.12 et I.4.13 :

(I.4.25) : Soit $G = C_k$, ou $\vec{C}_k, P_k, \vec{P}_k$ S'il existe une (m, k, λ) G -configuration, une (h, k, λ) G -configuration et si $\lambda K_{n+h} - \lambda K_h$ (ou $\lambda K_{n+h}^* - \lambda K_h^*$) peut-être décomposé en sousgraphes partiels isomorphes à G , alors il existe une $(mn+h, k, \lambda)$ G -configuration.

(I.4.26) : Soit $G = C_k$, ou \vec{C}_k , ou P_k , ou \vec{P}_k . S'il existe une (m, k, λ) G -configuration et une $(n+1, k, \lambda)$ G -configuration, alors il existe une $(mn+1, k, \lambda)$ G -configuration.

Décomposition de K_n^* en 3-circuits.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le cas $k = 3$ de la conjecture I.1.2 ; c'est-à-dire de résoudre le problème de la décomposition de K_n^* en 3-circuits. Nous avons donné une solution complètement différente dans [B3] (voir I.5) ; ce problème a été résolu aussi indépendamment par N.S. Mendelsohn [M2] et par R.H. Bruck [B11]. La preuve donnée ici est la plus simple des quatre preuves existantes. Pour les besoins de l'induction, nous prouvons un théorème un peu plus fort.

Remarque : Dans [B2] G. Ringel et W.T. Youngs ont montré que pour $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$ il existe un plongement de K_n dans une surface de genre $(n-3)(n-4)/12$, où chaque face est un triangle. Le théorème est donc prouvé par ce résultat pour $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$.

(I.4.27) : Soit n un entier $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n \neq 4, 6$. Il existe une décomposition de K_n^* en 3-circuits, contenant deux 3-circuits opposés (c'est-à-dire un sous graphe partiel isomorphe à K_3^*). Pour $n = 4$ il existe une décomposition de K_4^* en 3-circuits et pour $n = 6$, il n'existe pas de décomposition de K_6^* en 3-circuits.

Démonstration : (par induction sur n). Le théorème est vrai pour $n = 3$, $n = 4$ (analogue de I.2.8 avec les circuits : $(3,0,1,3)$; $(3,1,2,3)$; $(3,2,0,3)$; $(0,2,1,0)$). Pour $n = 6$ il n'existe pas de décomposition (I.2.22). Pour $n = 13$, on obtient une telle décomposition à partir d'une $(13,3,1)$ -configuration et de I.1.6. Pour $n = 16$ et 18 on peut vérifier le théorème soit par construction directe, soit en utilisant la démonstration de I.5.3 avec la solution du problème de Kirkman seulement pour 15 (pour $n = 16$, c'est aussi un corollaire d'un résultat de B. Hartnell et M. Milgram [H2].)

Supposons n_0 entier, $n_0 \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et supposons le théorème démontré pour $n < n_0$ ($n \neq 4, 6$) et $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$.

Cas 1 : $n_0 = 3t$ avec $t \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n_0 \neq 18$. Le théorème résulte de I.4.12 avec $m = 3$, $n = t$ et en remarquant que si K_m^* contient un K_3^* , alors K_{mn}^* aussi contient un K_3^* .

Cas 2 : $n_0 = 3t+1$ avec $t \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n_0 \neq 13$. Le théorème résulte pour $n \neq 19$ de I.4.26 avec $m = t$, $n = 3$ ($n+1 = 4$). Si $n = 19$ ($t = 6$) le théorème résulte de I.4.26 avec $m = 9$, $n = 2$ ($n+1 = 3$).

Cas 3 : $n_0 = 9k+7 = 3(3k+2)+1$ et $n_0 \neq 16$: Le théorème résulte de I.4.26 avec $m = 3$ et $n = 3k+2$ ($n+1 = 3k+3$).

Cas 4 : $n_0 = 9k+6 = 3(3k+1)+3$ et $n_0 \neq 6$: Le théorème résulte de I.4.25 avec $m = 3$, $h = 3$, $n = 3k+1$, $n+h = 3k+4$.

(I.4.28) remarques : Une méthode analogue a été utilisée par A.J.W Hilton [H4] pour obtenir une démonstration de l'existence des $(n,3,1)$ -configuration ou triplets de Steiner. Le théorème donne en corollaire une nouvelle classe de $(n,3,2)$ -configurations. Si on veut prouver seulement l'existence de $(n,3,2)$ -configuration, ou l'existence de $(n,3,1)$ TT_3 -configuration, où TT_3 désigne le tournoi transitif

à 3 sommets la méthode de démonstration est identique à celle de I.4.27 mais plus simple car de telles configurations existent pour $n = 6$ (voir I.4.29). On peut aussi appliquer la méthode pour l'existence de $(n,3,1) P_3$ -configurations ou $(n,3,1) \vec{P}_3$ -configurations.

(I.4.29) (S.H.Y. Hung et N.S. Mendelsohn [H9] : Il existe une $(n,3,1) TT_3$ -configuration si et seulement si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$.

Démonstration : (par induction). Le théorème se vérifie facilement pour $n = 3,4,6$. Soit n_0 entier $n_0 \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$. Supposons le théorème vrai pour $n < n_0$, avec $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$.

- $n_0 = 3t$, $t \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$: I.4.10 avec $m = 3$, $n = t$.

- $n_0 = 3t+1$, $t \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$: I.4.21 avec $m = t$, $n = 3(n+1 = 4)$.

- $n_0 = 9k+7 = 3(3k+2)+1$: I.4.21 avec $m = 3$, $n = 3k+2$ ($n+1 = 3k+3$).

- $n_0 = 18p+6 = 6(3p+1)$: I.4.10 avec $m = 6$, $n = 3p+1$.

- $n_0 = 18p+15 = 2(9p+7) + 1$: I.4.21 avec $m = 9p+7$, $n = 2$, $n+1 = 3$.

(Il faut remarquer qu'il existe un tableau orthogonal $OA(n,3)$ pour $n \geq 2$).

Décomposition de K_n^* en 5-circuits.

(I.4.30) : Théorème : K_n^* peut-être décomposé en 5-circuits (c'est-à-dire il existe une $(n,5,1) \vec{C}_5$ -configuration) si et seulement si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{5}$.

Démonstration : Pour démontrer ce théorème on utilise les propositions I.4.12, I.4.26, I.4.25, réénoncés ci-dessous : A,B,C et certains lemmes notés D_i dont les preuves utilisent les méthodes de I.2.

A : Si K_m^* et K_n^* sont décomposables en 5-circuits, K_{mn}^* l'est aussi.

B : Si K_m^* et K_{n+1}^* sont décomposables en 5-circuits, K_{mn+1}^* l'est aussi,

C : Si K_m^* , K_n^* et $K_{n+h}^* - K_h^*$ sont décomposables en 5-circuits, K_{mn+h}^* l'est aussi.

D : Il existe une décomposition en 5-circuits de :

$D_1 : K_5^*$; $D_2 : K_6^*$; $D_3 : K_{10}^* - K_5^*$; $D_4 : K_{10}^* - K_6^*$; $D_5 : K_{11}^* - K_5^*$

$D_6 : K_{11}^* - K_6^*$; $D_7 : K_{15}^*$; $D_8 : K_{16}^* - K_{10}^*$; $D_9 : K_{16}^* - K_6^*$;

$$D_{10} : K_{20}^* - K_{10}^* ; D_{11} : K_{40}^* - K_{20}^* ; D_{12} : K_{45}^* - K_{15}^* .$$

Démonstration des lemmes D_i :

D_1 est un cas particulier de I.2.11, D_2 de I.2.8 et D_4 de I.2.19 (donné en exemple).

Pour démontrer les autres lemmes nous labellerons les éléments de K_h^* ; ∞_k où $0 \leq k \leq h-1$ et les sommets restants de K_{n+h}^* avec les éléments d'un groupe Γ . Pour D_3 la décomposition est donnée par les 14 circuits :

$(i, i-1, \infty_0, i+1, \infty_1, i)$ avec $0 \leq i \leq 4$,
 $(0, 3, 1, 4, 2, 0)$, $(0, 1, \infty_2, 2, 4, 0)$, $(1, 2, \infty_3, 0, \infty_4, 1)$, $(2, 3, \infty_3, 4, \infty_4, 2)$, $(3, 4, \infty_2, 0, \infty_3, 3)$,
 $(1, 3, \infty_2, 4, \infty_3, 1)$, $(3, 0, \infty_2, 1, \infty_4, 3)$, $(4, 1, \infty_3, 2, \infty_4, 4)$, $(0, 2, \infty_2, 3, \infty_4, 0)$.

Pour D_5 , D_6 , D_8 les décompositions cherchées de $K_{n+h}^* - K_h^*$ s'obtiennent en appliquant le lemme I.2.18 avec $A_\infty = \{\infty_k : 0 \leq k \leq h-1\}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les circuits de

base :

pour D_5 : ($h = 5$, $n = 6$) : $(0, 1, \infty_0, 5, 2, 0)$; $(0, 2, \infty_1, 1, \infty_2, 0)$; $(0, 5, \infty_3, 1, \infty_4, 0)$

pour D_6 : ($h = 6$, $n = 5$) : $(0, 1, \infty_0, 2, \infty_1, 0)$; $(0, 4, \infty_2, 1, \infty_3, 0)$; $(0, 2, \infty_4, 1, \infty_5, 0)$

et $(0, 3, 1, 4, 2, 0)$ invariant pour Γ .

pour D_8 : ($h = 10$, $n = 6$) : $(0, 1, \infty_0, 2, \infty_1, 0)$; $(0, 2, \infty_2, 1, \infty_3, 0)$; $(0, 3, \infty_4, 1, \infty_5, 0)$

$(0, 4, \infty_6, 1, \infty_7, 0)$; $(0, 5, \infty_8, 1, \infty_9, 0)$.

D_7 peut se démontrer par construction directe ou en répartissant les sommets de K_{15}^* en 3 sous ensembles disjoints X, Y, Z avec $|X| = |Y| = |Z| = 5$; K_{15}^* est alors l'union des sous graphes arc-disjoints, isomorphes à $K_{10}^* \cdot K_5^*$ et donc décomposables en 5-circuits d'après D_3 , engendrés par $(XUY) \cdot X$; $(YDZ) \cdot Y$; $(ZUX) \cdot Z$.

D_9 se déduit de D_8 et D_6 .

Pour D_{10} , D_{11} , D_{12} labellons les sommets de K_h^* par $A_\infty = \{\infty_k : 0 \leq k \leq h-1\}$ et ceux restants comme éléments de $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ avec $n = 5p$. Les p sous-graphes engendrés par les sommets $\{(i_0, j)$ avec $j \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ sont isomorphes à K_5^* et donc décomposables en 5-circuits. Les arcs restants de $K_{n+h}^* - K_h^*$ peuvent être décomposés en 5-circuits en appliquant I.2.18 avec A_∞ , $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et les circuits de base pour

pour D_{10} : ($p=2$) : $((0, 0), (1, \alpha), \infty_{2\alpha}, (0, 1), \infty_{2\alpha+1}, (0, 0))$ avec $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$.

pour D_{11} : ($p=4$) : $((0, 0), (1, 0), \infty_0, (3, 0), (2, 0), (0, 0))$

$((0, 0), (1, 1), \infty_1, (3; 3), (2, 4), (0, 0))$; et les 9 circuits

$((0, 0), (\alpha, \beta), \infty_{2\alpha+6(\beta-2)}, (0, 1), \infty_{2\alpha+1+6(\beta-2)}, (0, 0))$ avec $\alpha=1, 2, 3$ et $\beta=2, 3, 4$.

pour D_{12} : ($p=6$) : $((0,0) (1,\alpha), \infty_\alpha, (3,0), (2,\alpha) (0,0))$ avec $\alpha=0,1,2,3,4$

$((0,0), (2,0), \infty_5, (2,2), (4,3), (0,0))$: $((0,0), (2,3), \infty_6, (1,1),$

$(3,0) (0,0))$ et $((0,0), (3,\beta), \infty_{5+2\beta}, (0,1), \infty_{6+2\beta}, (0,0))$ avec

$\beta = 1, 2, 3, 4.$

Démonstration du théorème (par induction).

Le théorème est vrai pour $n = 5$ (D_1) ; $n = 6$ (D_2) ; $n = 10$ (D_3 ou D_4) ; $n = 11$ (D_5 ou D_6), $n = 15$ (D_7), $n = 16$ (D_8 ou D_9 , voir aussi I.2.17) $n = 20$ (D_{10}) : Soit n_0 un entier, avec $n_0 \equiv 0$ ou $1 \pmod{5}$ et supposons le théorème vrai pour tout $n < n_0$ avec $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{5}$. Nous distinguons divers cas suivant la valeur de n_0 et dépendant des congruences modulo 300. Nous indiquons dans chaque cas les lemmes utilisés avec les valeurs de m et n .

Cas 1 : $n_0 = 10t+1$ $t \geq 2$.

1.a	$t = 2p$ ($p \geq 1$)	$n_0 = 20p+1$	B : $m=5p$, $n = 4$
1.b	$t = 3p$ ($p \geq 1$)	$n_0 = 30p+1$	B : $m=6$, $n = 5p$.
1.c	$t = 3p+1$ ($p \geq 1$)	$n_0 = 30p+11$	C, D_5 : $m=5p+1$, $n = 6$, $h=5$.
1.d	il reste $t \equiv 5 \pmod{6}$		
	$t = 30k + 5$	$n_0 = 300k + 51$	B : $m = 60k+10$, $n=5$.
	$t = 30k + 11$	$n_0 = 300k + 111$	B : $m = 30k+11$, $n = 10$.
	$t = 30k + 17$	$n_0 = 300k + 171$	E : $m = 5$, $n = 60k + 34$.
	$t = 30k + 23$	$n_0 = 300k + 231$	B : $m = 60k + 46$, $n = 5$.
	$t = 30k + 29$	$n_0 = 300k + 291$	B : $m = 10$, $n = 30k + 29$.

Cas 2 : $n_0 = 10t+5$ $t \geq 2$.

2.a	$t = 2p$ ($p \geq 1$)	$n_0 = 20p+5$	R : $m = 5p+1$, $n = 4$
2.b	$t = 3p$ ($p \geq 1$)	$n_0 = 30p+5$	C, D_5 : $m = 5p$, $n = 6$, $h=5$
2.c	$t = 3p+2$	$n_0 = 30p+25$	B : $m = 6$, $n = 5p+4$.
2.d	il reste $t \equiv 1 \pmod{6}$		
	$t = 30k+1$	$n_0 = 300k+15$	A : $m = 15$, $n = 20k+1$.
	$t = 30k+7$	$n_0 = 300k+75$	A : $m = 15$, $n = 20k+5$.
	$t = 30k+13$	$n_0 = 300k+135$	C, D_3 : $m = 60k+26$, $n=5$, $h=5$.
	$t = 30k+19$	$n_0 = 300k+195$	C, D_{12} : $m=10k+6$, $n=30$, $h=15$.
	$t = 30k+25$	$n_0 = 300k+255$	A : $m=5$, $n=60k+51$.

Cas 3 : $n_o = 10t + 6$ $t \geq 2$.

3.a	$t = 2p$ ($p \geq 1$)	$n_o = 20p+6$	$C, D_4 : m = 5p, n = 4, h = 6$
3.b	$t = 3p$ ($p \geq 1$)	$n_o = 30p+6$	A : $m = 6, n = 5p+1$
3.c	$t = 3p+1$ ($p \geq 1$)	$n_o = 30p+16$	$C, D_8 : m = 5p+1, n = 6, h=10$.
3.d	il reste $t \equiv 5 \pmod{6}$.		
	$t = 30k+5$	$n_o = 300k+56$	B : $m=60k+11, n=5$.
	$t = 30k+11$	$n_o = 300k+116$	$C, D_9 : m=30k+11, n=10, h=6$.
	$t = 30k+17$	$n_o = 300k+176$	B : $m=60k+35, n=5$.
	$t = 30k+23$	$n_o = 300k+236$	$C, D_6 : m=60k+46, n=5, h=6$.
	$t = 30k+29$	$n_o = 300k+296$	B : $m=5, n=60k+59$.

Cas 4 : $n_o = 10t + 10$ $t \geq 2$.

4.d	$t = 2p$ ($p \geq 1$)	$n_o = 20p+10$	$C, D_4 : m=5p+1, n=4, h=6$
4.b	$t = 3p$ ($p \geq 1$)	$n_o = 30p+10$	$C, D_8 : m=5p, n=6, h=10$.
4.c	$t = 3p+2$	$n_o = 30p+30$	A : $m=6, n=5p+5$
4.d	il reste $t \equiv 1 \pmod{6}$		
	$t = 30k+1$	$n_o = 300k+20$	A : $m=20, n=15k+1$.
	$t = 30k+7$	$n_o = 300k+80$	A : $m=5, n=60k+16$.
	$t = 30k+13$	$n_o = 300k+140$	$C, D_{11} : m=15k+6, n=20, h=20$.
	$t = 30k+19$	$n_o = 300k+200$	A : $m=5, n=60k+40$.
	$t = 30k+25$	$n_o = 300k+260$	A : $m=10, n=30k+26$

(I.4.31) : Remarque : On peut aussi songer à une méthode de composition qui utilise non pas les graphes bipartis, ni les produits lexicographiques (avec graphes k -parti), mais les graphes tripartis. Dans le cas des circuits de longueur impaire une telle méthode est possible et est plus efficace que celle de composition avec les produits lexicographiques. On peut ainsi montrer que K_n^* est décomposable en k -circuits si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{k}$ avec k impair (si k est impair et premier, la conjecture I.1.2 est ainsi résolue). Les résultats et démonstrations paraîtront dans un article de D. Soiteau. Pour n assez grand ceci est un corollaire d'un théorème de [W2] qui dit que si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{k}$ et $n > C(k)$ alors K_n peut-être décomposé en sous graphe dis-joints isomorphes à K_k ou K_{k+1} .

(I.5) : Décomposition de K_n^* en 3-circuits.

Nous nous proposons ici de donner une autre preuve de I.4.27, preuve qui est parue dans [B3] et qui utilise les définitions et résultats suivants.

(I.5.1) : Définition : Une (n,k,λ) G-configuration est dite résoluble si on peut partitionner l'ensemble des sous graphes partiels isomorphes à G (de la partition des arêtes de K_n ou arcs de K_n^*) en classes de sorte que tout sommet de K_n (K_n^*) apparaisse dans exactement un sous graphe partiel de chaque classe. Dans le cas $G = K_3$, le problème de l'existence d'une $(n,3,1)$ -configuration résoluble (connue aussi sous le nom de "problème des écolières" de Kirkman) a été résolu par D.K. Ray-Chaudhuri et R.M. Wilson [R1].

(I.5.2) Théorème [R1]. Il existe une $(n,3,1)$ -configuration résoluble si et seulement si $n \equiv 3 \pmod{6}$.

(I.5.3) Théorème : K_n^* peut-être décomposé en 3-circuits si et seulement si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n \neq 6$.

Démonstration : Si $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$ le théorème est une conséquence de l'existence de $(n,3,1)$ -configuration (ou triples de Steiner). Si $n = 6t+3$ d'après I.5.2 il existe une partition des arcs de K_{6t+3}^* en $2(2t+1)$ classes formées de $(2t+1)$ 3-circuits 2^2 à 2 disjoints au sens des sommets. Si $n = 6t+4$, soit x_0 un sommet quelconque de K_n^* le 1-graphe $K_n^* - \{x_0\}$ est isomorphe à K_{6t+3}^* , soit une partition des arcs de $K_n^* - \{x_0\}$ du type ci-dessus et soient $C_i = (x_i, y_i, z_i)$, $1 \leq i \leq 2t+1$, les 3-circuits d'une classe de la partition. On obtient une partition de K_n^* en considérant :

i) les $3(2t+1)$ 3-circuits de la forme (x_0, x_i, y_i) , (x_0, y_i, z_i) et (x_0, z_i, x_i) pour $1 \leq i \leq 2t+1$.

ii) les $(2t+1)(2t+1)$ 3-circuits de la partition des arcs de $K_n^* - \{x_0\}$ autres que les C_i ($1 \leq i \leq 2t+1$).

Si $n = 6t+6$ avec $t \geq 1$. Soient x_0, y_0, z_0 trois sommets distincts de K_n^* ; le 1-graphe $K_n^* - \{x_0, y_0, z_0\}$ obtenu en enlevant les sommets x_0, y_0, z_0 est isomorphe à K_{6t+3}^*

soit une partition des arcs de $K_n^* - \{x_0, y_0, z_0\}$ (obtenu dans le cas $6t+3$) et soit $C_i = (x_i, y_i, z_i)$, $C'_j = (x'_j, y'_j, z'_j)$ et $C''_k = (x''_k, y''_k, z''_k)$ où $1 \leq i \leq 2t+1$, $1 \leq j \leq 2t+1$, $1 \leq k \leq 2t+1$ les 3-circuits de 3 classes de la partition. (La partition comprend au moins 3 classes si $2(3t+1) \geq 3$ soit $t \geq 1$). On obtient une partition de K_n^* en considérant :

- (i) les 2 3-circuits (x_0, y_0, z_0) et (x_0, z_0, y_0)
- (ii) les $3(2t+1)$ 3-circuits de la forme (x_0, x_i, y_i) , (x_0, y_i, z_i) et (x_0, z_i, x_i) pour $0 \leq i \leq 2t+1$
- (iii) les $3(2t+1)$ 3-circuits de la forme (y_0, x'_j, y'_j) , (y_0, y'_j, z'_j) et (y_0, z'_j, x'_j)
- (iv) les $3(2t+1)$ 3-circuits de la forme (z_0, x''_k, y''_k) , (z_0, y''_k, z''_k) et (z_0, z''_k, x''_k) ,
- (v) les $(6t-1)(2t+1)$ 3-circuits de la partition des arcs de $K_n^* - \{x_0, y_0, z_0\}$ autres que les C_i, C'_j, C''_k ($1 \leq i \leq 2t+1, 1 \leq j \leq 2t+1, 1 \leq k \leq 2t+1$.)

Dans le cas $n = 6$ on a vu (I.2.22) que K_6^* n'était pas décomposable.

Remarque : On pourrait par la même méthode établir le cas $n = 6t+7$ ($t > 1$), sans utiliser l'existence d'une $(6t+7, 3, 1)$ -configuration.

(I.6) : Problèmes de recouvrement et de pavage.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de montrer qu'on peut généraliser les méthodes précédentes pour étudier les :

1.6.1 problèmes de recouvrement (coverings) des arêtes de λK_n (ou arcs de λK_n^*) par des graphes isomorphes à G ; le problème est de déterminer le nombre de recouvrement $\rho(\lambda K_n, G)$ ou $\rho(\lambda K_n^*, G)$ c'est-à-dire tels que : toute arête de λK_n (arc de λK_n^*) appartient à au moins un graphe du recouvrement.

(I.6.2) : problèmes de pavage (packings) des arêtes de λK_n (ou arcs de λK_n^*) avec des graphes isomorphes à G ; le problème est de déterminer le nombre de pavage $v(\lambda K_n, G)$ ou $v(\lambda K_n^*, G)$ nombre maximum de graphes isomorphes à G , 2 à 2 arêtes (arcs) disjoints c'est-à-dire tels que toute arête de λK_n (arc de λK_n^*) appartient à au plus un graphe du pavage.

(I.6.3) : On a $\rho(\lambda K_n, G) = \nu(\lambda K_n, G)$ si et seulement si il existe une (n, k, λ) G-configuration.

Démonstration : En effet dans une (n, k, λ) G-configuration, toute arête de λK_n (arc de λK_n^*) appartient à exactement un graphe isomorphe à G.

(I.6.4) : Dans le cas $G = K_k$, ces problèmes ont été très étudiés dans la littérature (voir par exemple pour les problèmes de recouvrement l'article de W.H. Mills [M3]). Un cas entièrement résolu est celui où $G = K_3$ (voir [F1, G2, K1, S1, S2]).

(I.6.5) : G étant donné, considérons l'hypergraphe simple H(G) dont les sommets représentent les arêtes de K_n (ou arcs de K_n^*) et dont les hyper-arêtes sont les sous graphes partiels de K_n (K_n^*) isomorphes à G. $\rho(K_n, G)$ n'est autre que le nombre de recouvrement de H(G) (nombre minimum d'hyperarêtes de H(G) qui recouvrent les sommets de H(G) et $\nu(K_n, G)$ n'est autre que la cardinalité maximum d'un couplage de H(G) (nombre maximum d'hyperarêtes 2 à 2 disjointes de H(G)).

Les lemmes et propositions obtenues dans les paragraphes précédents se généralisent : nous allons en donner quelques exemples et appliquer ceci au cas où G est un k-circuit (une étude différente de l'hypergraphe des circuits d'un graphe, la longueur n'étant plus fixée, sera faite au chapitre III de la thèse).

(I.6.6) : La généralisation de I.1.6, s'écrit :

$$\rho(\lambda K_n, G) \leq \lambda \rho(K_n, G) \quad \text{et} \quad \nu(\lambda K_n, G) \geq \lambda \nu(K_n, G)$$

On n'a pas toujours égalité, on a vu en I.3.23 ou I.2.10 qu'il existe une $(4, 4, 2)$ C_4 -configuration, soit $\rho(2K_4, C_4) = \nu(2K_4, C_4) = 3$ mais $\rho(K_4, C_4) = 2$ (un recouvrement est donné par les 4-cycles $(0, 1, 2, 3, 0)$ et $(0, 2, 1, 3, 0)$) et $\nu(K_4, C_4) = 1$.

Les généralisations de I.3.1 et I.3.2 s'écrivent :

(I.6.7) : Soit $G = (X, E)$ un graphe ; s'il existe une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G -configuration alors

$$\rho(\lambda K_{m+n}, G) \leq \rho(\lambda K_m, G) + \rho(\lambda K_n, G) + \lambda mn/|E|$$

$$\rho(\lambda K_{m+n}^*, G) \leq \rho(\lambda K_m^*, G) + \rho(\lambda K_n^*, G) + 2 \lambda mn/|E|$$

$$v(\lambda K_{m+n}, G) \geq v(\lambda K_m, G) + v(\lambda K_n, G) + \lambda mn/|E|$$

$$v(\lambda K_{m+n}^*, G) \geq v(\lambda K_m^*, G) + v(\lambda K_n^*, G) + 2 \lambda mn/|E|.$$

(I.6.8) : Soit $G = (X, E)$ un graphe s'il existe une $(\{m, n\}, k, \lambda)$ G -configuration,

$$\text{alors } \rho(\lambda K_{m+n+1}, G) \leq \rho(\lambda K_{m+1}, G) + \rho(\lambda K_{n+1}, G) + \lambda mn/|E|$$

$$\rho(\lambda K_{m+n+1}^*, G) \leq \rho(\lambda K_{m+1}^*, G) + \rho(\lambda K_{n+1}^*, G) + 2 \lambda mn/|E|$$

$$v(\lambda K_{m+n+1}, G) \geq v(\lambda K_{m+1}, G) + v(\lambda K_{n+1}, G) + \lambda mn/|E|$$

$$v(\lambda K_{m+n+1}^*, G) \geq v(\lambda K_{m+1}^*, G) + v(\lambda K_{n+1}^*, G) + 2 \lambda mn/|E|.$$

Remarque : On peut aussi généraliser en utilisant des recouvrements ou pavages du graphe biparti complet.

Nous allons comme application déterminer $\rho(K_n^*, C_4)$, $v(K_n^*, C_4)$ puis

$\rho(K_n, C_4)$ et $v(K_n, C_4)$. Nous laissons au lecteur le soin d'établir les résultats analogues pour $\lambda > 1$, et \vec{C}_{2p} ou C_{2p} .

(I.6.9) : Théorème : $\rho(K_4^*, \vec{C}_4) = 4$ et $\rho(K_n^*, \vec{C}_4) = [n(n-1)/4]^*$ pour $n > 4$

($[x]^*$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x). $v(K_4^*, \vec{C}_4) = 2$ et

$v(K_n^*, \vec{C}_4) = [n(n-1)/4]$ pour $n > 4$.

Démonstration : On a toujours $\rho(K_n^*, \vec{C}_k) \geq [n(n-1)/k]^*$ et $v(K_n^*, \vec{C}_k) \leq [n(n-1)/k]$.

Si $n = 4$ on a vu en I.2.24 qu'il n'existe pas de $(4, 4, 1)$ \vec{C}_4 -configuration, donc

$\rho(K_4^*, \vec{C}_4) \geq 4$ et $v(K_4^*, \vec{C}_4) \leq 2$. $\rho(K_4^*, \vec{C}_4) = 4$ d'après I.6.6 et $\rho(K_4, C_4) = 2$

de même $v(K_4^*, \vec{C}_4) = 2$ d'après I.6.6 et $v(K_4, C_4) = 1$.

Si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$, $n \neq 4$, le théorème est un cas particulier de I.3.11.

Si $n \equiv 2$ ou $3 \pmod{4}$ ($n > 4$), on montre le théorème par induction par exemple

supposons $\rho(K_{4q+2}^*, \vec{C}_4) = [(4q+2)(4q+1)/4]^* = 4q^2 + 3q + 1$; d'après I.6.8 avec

$m = 4q+1$, $(m+1) = 4q+2$ et $n = 4$, $n+1 = 5$.

$$\rho(K_{4q+6}^*, \vec{C}_4) \leq \rho(K_{4q+2}^*, \vec{C}_4) + \rho(K_5^*, \vec{C}_4) + 2(4q+1)$$

$$= 4q^2 + 11q + 8 = 4(q+1)^2 + 3(q+1) + 1 = [(4q+6)(4q+5)/4]^*$$

On traite de même le cas $n \equiv 3 \pmod{4}$ et la détermination de $v(K_n^*, C_4)$. Il reste juste à vérifier la première valeur de l'induction $q = 1$. Pour $n = 6$ un recouvrement de K_6^* est donné par les 8 4-circuits : $(\infty, i, i+1, i+4, \infty)$ avec $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $(0, 2, 4, 1, 0)$, $(0, 4, 3, 2, 0)$ et $(0, 2, 1, 3, 0)$. Pour $n = 7$ un recouvrement de K_7^* est donné par les 11 4-circuits : $(\infty, i, 3+i, 1+i, \infty)$ avec $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $(0, 1, 3, 4, 0)$, $(1, 2, 4, 5, 1)$, $(2, 3, 5, 0, 2)$, $(0, 5, 4, 3, 0)$ et $(3, 2, 1, 0, 3)$. Pour $n = 6$ un pavage de K_6^* est donné par les 7 4-circuits : $(0, 1, 3, 2, 0)$, $(0, 2, 4, 3, 0)$, $(0, 3, 1, 5, 0)$, $(0, 4, 2, 1, 0)$, $(0, 5, 1, 4, 0)$, $(1, 2, 5, 4, 1)$ et $(2, 3, 4, 5, 2)$ et pour $n = 7$ on a un pavage de K_7^* avec les 10 4-circuits : $(0, 1, 3, 4, 0)$, $(1, 2, 4, 5, 1)$, $(2, 3, 5, 0, 2)$, $(0, 5, 4, 3, 0)$, $(3, 2, 1, 0, 3)$, $(6, 3, 1, 4, 6)$, $(6, 0, 4, 2, 6)$, $(6, 2, 5, 3, 6)$, $(6, 5, 2, 0, 6)$, $(6, 4, 1, 5, 6)$

(I.6.10) Théorème : Si n est pair : $\rho(K_n, C_4) = \lfloor n^2/8 \rfloor^*$ et $v(K_n, C_4) = n(n-2)/8$.
 si n est impair $\rho(K_n, C_4) = \lfloor n(n-1)/8 \rfloor^* + \epsilon(n)$ avec $\epsilon(n) = 1$ si $n \equiv 3 \pmod{8}$
 et $\epsilon(n) = 0$ sinon ; $v(K_n, C_4) = \lfloor n(n-1)/8 \rfloor - \epsilon'(n)$ avec $\epsilon'(n) = 1$ si $n \equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$ et $\epsilon'(n) = 0$ sinon.

Démonstration : Si n est pair, un sommet quelconque appartient à au moins $n/2$ cycles d'un recouvrement et à au plus $(n-2)/2$ cycles d'un pavage. On a donc $\rho(K_n, C_4) \geq \lfloor n^2/8 \rfloor^*$ et $v(K_n, C_4) \leq n(n-2)/8$, qui est un entier. On montre les égalités par induction en utilisant I.6.7. Par exemple on vérifie que $v(K_4, C_4) = 1$ et $v(K_6, C_4) = 3$ (on a les trois 4-cycles arête disjoints $(0, 1, 2, 3, 0)$, $(0, 2, 4, 5, 0)$ et $(1, 4, 3, 5, 1)$). Supposons que $v(K_n, C_4) = n(n-2)/8$ alors d'après I.6.7 :

$$v(K_{n+4}, C_4) \geq v(K_n, C_4) + v(K_4, C_4) + n = n(n-2)/8 + 1 + n = (n+4)(n+2)/8.$$

Si n est impair remarquons que si les cycles d'un recouvrement contiennent deux fois la même arête, alors soit ils la contiennent trois fois, soit ils contiennent deux fois deux autres arêtes : en effet un sommet appartient à un nombre pair d'arêtes dans le recouvrement. Donc $4(\rho(K_n, C_4) - n(n-1)/8) \neq 1$ et donc si $n \equiv 3 \pmod{8}$, alors $\rho(K_n, C_4) \geq \lfloor n(n-1)/8 \rfloor^* + 1$. De même si une arête n'est pas

utilisée dans les cycles d'un pavage, au moins deux autres arêtes ne sont pas utilisées donc $4 \left(\lfloor n(n-1)/8 \rfloor - v(K_n, C_4) \right) \neq 1, 2$ et donc si $n \equiv 5$ ou $7 \pmod{8}$ $v(K_n, C_4) \leq \lfloor n(n-1)/8 \rfloor - 1$. On montre les égalités en utilisant I.6.8 avec $m+1=9$. On vérifie le théorème pour $n=3, 5, 7, 9$: pour $n=3$ on a $\rho(K_3, C_4) = 2$ et $v(K_3, C_4) = 0$; pour $n=5$ $\rho(K_5, C_4) = 3$: on a un recouvrement avec $(0, 1, 2, 3, 0)$ $(0, 2, 3, 4, 0)$ $(1, 3, 2, 4, 1)$; $v(K_5, C_4) = 1$; pour $n=7$ $\rho(K_7, C_4) = 6$: on a un recouvrement avec : $(4, 0, 2, 5, 4)$, $(6, 0, 1, 3, 6)$, $(6, 1, 2, 4, 6)$, $(6, 2, 3, 5, 6)$, $(3, 4, 5, 0, 3)$, $(4, 1, 5, 0, 4)$; $v(K_7, C_4) \geq v(K_3, C_4) + v(K_4, C_4) + 3$ d'après I.6.7 donc $v(K_7, C_4) \geq 4$ et $v(K_7, C_4) = 4$. Pour $n=9$ on a $\rho(K_9, C_4) = 9$ d'après I.3.21.

On peut aussi étendre les méthodes développées en I.4 et I.5. On obtient par exemple les généralisations suivantes de I.4.5 et I.4.21.

(I.6.11) : Si $G \otimes S_n$ peut-être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G alors :

$$\begin{aligned} \rho(K_{mn}, G) &\leq m \rho(K_n, G) + n^2 \rho(K_m, G) \\ \rho(K_{mn+1}, G) &\leq m \rho(K_{n+1}, G) + n^2 \rho(K_m, G) \\ v(K_{mn}, G) &\geq m v(K_n, G) + n^2 v(K_m, G) \\ v(K_{mn+1}, G) &\geq m v(K_{n+1}, G) + n^2 v(K_m, G). \end{aligned}$$

Remarque : On peut dans les deuxièmes membres des inégalités intervertir m et n et choisir le meilleur majorant (ou minorant). On a les mêmes résultats en orienté.

(I.6.12) : Si $G \otimes S_n$ peut-être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G alors : $\rho(K_{mn+2}, G) \leq m \rho(K_{n+2}, G) + n^2 \rho(K_m, G)$.

Démonstration : Analogue à celle de I.4.21 en considérant le graphe K_{mn+2} comme $K_m^o(K_n, K_2)$ (voir la définition en I.4.16).

(I.6.13) : Si $G \otimes S_n$ peut-être décomposé en sous graphes partiels isomorphes à G , et s'il existe un pavage de $K_{n+2} (K_{n+2}^*)$ avec $v(K_{n+2}, G) (v(K_{n+2}^*, G))$ sous-graphes isomorphes à G et tel qu'une arête n'appartienne à aucun des sous graphes du pavage (ou 2 arcs opposés) alors $v(K_{mn+2}, G) \geq m v(K_{n+2}, G) + n^2 v(K_m, G)$.

Démonstration : Considérons K_{mn+2} comme $K_m^\circ (K_n, K_2)$ où $H_2 = K_2$ est formé de l'arête non utilisée dans un pavage de K_{n+2} . Alors on a un pavage de K_{mn+2} en considérant les m pavages des sous graphes engendré par $H_2 \simeq K_{n+2}$ et les $n^2 \vee (K_m, G)$ sous graphes isomorphes à G d'un pavage de $K_m \otimes S_n$.

Nous allons appliquer ces résultats au cas $G = \vec{C}_3$

(I.6.14) Théorème : Si $n \neq 6$, $v(K_n^*, \vec{C}_3) = [n(n-1)/3]$ et $v(K_6^*, \vec{C}_3) = 8$.

Si $n \neq 6$, $\rho(K_n^*, \vec{C}_3) = [n(n-1)/3]^* + \varepsilon(n)$ où $\varepsilon(n) = 1$ si $n \equiv 2 \pmod{3}$ et $\varepsilon(n) = 0$ sinon ; $\rho(K_6^*, \vec{C}_3) = 12$.

Démonstration : Nous poserons pour simplifier l'écriture $\rho(n) = \rho(K_n^*, \vec{C}_3)$ et $v(n) = v(K_n^*, \vec{C}_3)$.

Si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ et $n \neq 6$ on a d'après I.4.27 ou I.5.3 $\rho(n) = v(n) = n(n-1)/3$.

On a $v(n) \leq [n(n-1)/3]$.

Supposons qu'il existe un arc (x,y) appartenant à au moins deux 3-circuits d'un recouvrement, alors soit cet arc appartient à au moins trois 3-circuits du recouvrement, soit il existe au moins deux autres arcs appartenant à au moins deux 3-circuits du recouvrement : en effet on doit avoir dans le multigraphe engendré par les 3-circuits du recouvrement $d^+(x) = d^-(x)$. On a donc $(\rho(n) - n(n-1)/3) \neq 1/3$ et donc si $n \equiv 2 \pmod{3}$ $\rho(n) > [n(n-1)/3]^* = n(n-1)/3 + 1/3$. De même on a d'après I.2.22 $\rho(6) \neq 10$. On ne peut avoir $\rho(6) = 11$, sinon on aurait (pour respecter l'égalité des demi-degrés dans le multigraphe engendré par les 3-circuits d'un recouvrement de K_6^*) trois arcs utilisés dans le recouvrement, formant un 3-circuit ; en enlevant ce 3-circuit on obtiendrait une décomposition de K_6^* en 3-circuits contrairement à I.2.22. Donc $\rho(6) \geq 12$. On montre de même que $v(6) \leq 8$. On a $v(6) = 8$ en considérant les 8 3-circuits disjoints de K_6^* : $(0,1,2,0)$, $(0,2,3,0)$, $(0,3,4,0)$, $(0,4,5,0)$, $(0,5,1,0)$, $(1,3,2,1)$, $(1,4,3,1)$, $(1,5,4,1)$ et $\rho(6) = 12$ en considérant un recouvrement de K_6^* formé des 8 circuits précédents plus les 4 3-circuits $(2,4,5,2)$ $(2,5,3,2)$ $(3,5,0,3)$, $(4,2,0,4)$.

Nous allons montrer que si $n \equiv 2 \pmod{3}$: $n = 3t+2$ alors

$$\rho(n) = \lfloor n(n-1)/3 \rfloor + 1 = 3t^2 + 3t + 2 \text{ et } \nu(n) = \lfloor n(n-1)/3 \rfloor = 3t^2 + 3t.$$

D'après I.6.12 en orienté avec $G = \vec{C}_3$ on a : $\rho(3t+2) \leq 3\rho(t+2) + t^2\rho(3)$

Si $t \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$ avec $t \neq 4$, d'après I.4.27, comme $t+2 \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$

avec $t+2 \neq 6$ on a $\rho(t+2) = (t+2)(t+1)/3$; $\rho(3) = 2$ donc

$$\rho(3t+2) \leq (t+2)(t+1) + 2t^2 = 3t^2 + 3t + 2. \text{ Nous allons montrer que dans ce cas}$$

($t \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$, $t \neq 4$) on peut déduire du recouvrement un pavage de K_n^*

avec $\lfloor n(n-1)/3 \rfloor$ 3-circuits. En effet dans la démonstration de I.6.12 soit

$K_{3t+2}^* = H_1^0 (H_2, H_2'')$ où $H_1 = \vec{C}_3$, $H_2 = K_{t+2}^*$ et $H_2'' = K_2^*$. D'après I.4.27, si

$t+2 \neq 4$, H_2 contient un K_3^* ; soit x, y, z , les sommets de K_3^* . Prenons

pour H_2'' le K_2^* engendré par (x, y) . Dans le recouvrement de K_{3t+2}^* les arcs

(x, y) et (y, x) apparaissent dans les 3-circuits (x, y, z_1, x) , (y, x, z_1, y) ,

(x, y, z_2, x) , (y, x, z_2, y) , (x, y, z_3, x) , (y, x, z_3, y) en notant par z_i le point

(z, i) de $H_1^0 (H_2, H_2'')$ (voir figure) et seul les arcs (x, y) et (y, x) sont

utilisés deux fois. On peut supposer que (z_1, z_2, z_3, z_1) et (z_1, z_3, z_2, z_1)

sont deux 3-circuits de la décomposition de $\vec{C}_3 \otimes S_n$. Enlevons du recouvre-

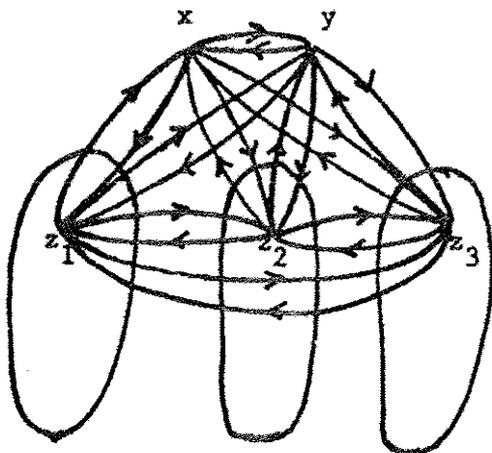
ment de K_{3t+2}^* les 6 3-circuits contenant (x, y) et (y, x) et les 2 3-circuits

(z_1, z_2, z_3, z_1) et (z_1, z_3, z_2, z_1) et rajoutons les 6 3-circuits (x, z_1, z_2, x) ,

(x, z_2, z_3, x) , (x, z_3, z_1, x) , (y, z_1, z_3, y) , (y, z_3, z_2, y) , (y, z_2, z_1, y) .

On obtient ainsi un pavage de K_{3t+2}^* avec $\rho(n)-2$ 3-circuits soit $\lfloor n(n-1)/3 \rfloor$

3-circuits. On a donc bien $\nu(n) = \lfloor n(n-1)/3 \rfloor$.



$$H_1^0 (H_2, H_2'') \text{ avec } H_1 = \vec{C}_3,$$

$$H_2 = K_{t+2}^*,$$

$$H_2'' = K_2^* \text{ sur } x, y.$$

Si $t+2 = 4$ on obtient $v(8) = \rho(8)-2 = 18$ de la même manière en considérant que (x,y) apparaît dans les 3-circuits (x,y,z_1,x) (x,y,z_2,x) (x,y,z_3,x) et (y,x) apparaît dans les 3-circuits (y,x,t_1,y) (y,x,t_2,y) (y,x,t_3,y) . Le pavage de K_8^* est donné alors par les 3-circuits : (x,z_i,t_i,x) , (y,t_i,z_i,y) puis (x,t_i,z_{i+1},x) et (y,z_i,t_{i+1},y) avec $i = 1,2,3$ puis (z_1,z_2,z_3,z_1) , (z_1,z_3,z_2,z_1) , (z_1,t_3,t_2,z_1) , (t_1,t_2,t_3,t_1) , (t_1,z_3,t_2,t_1) et (t_1,t_3,z_2,t_1) .

Il reste donc les cas $t \equiv 0 \pmod{3}$ et $t = 4$. Nous allons montrer qu'alors $v(3t+2) = 3t^2 + 3t$. Dans un pavage avec $v(3t+2)$ 3-circuits on aura seulement 2 arcs opposés n'appartenant à aucun 3-circuit. On recouvre aisément ces 2 arcs par deux 3-circuits d'où $\rho(n) \leq v(n) + 2$ dans ce cas. On a $v(5) = 6$ un pavage de K_5^* est donné par les 6 circuits : $(0,2,3,0)$ $(0,3,4,0)$ $(0,4,2,0)$ $(1,3,2,1)$ $(1,4,3,1)$ $(1,2,4,1)$. D'après I.6.13 appliqué avec $m = 4$ et $n = 3$ et $G = \vec{C}_3$ (le pavage de K_5^* ne contenant pas 2 arcs opposés (01) et (10)) on a $v(14) \geq 4 v(5) + 9 v(4) = 60$. Donc $v(14) = 60$ et $\rho(14) = 62$. Supposons maintenant $t \equiv 0 \pmod{3}$ c'est-à-dire $t+2 \equiv 2 \pmod{3}$; d'après I.6.13 appliqué avec $G = \vec{C}_3$, $m=3$, $n=t$, $v(3t+2) \geq v(t+2) + t^2 v(3)$; si on suppose par induction le résultat vrai pour $t+2$ (le résultat est vrai pour 5) on a $v(3t+2) \geq 3 [(t+2)(t+1)/3] + 2t^2 = 3t^2 + 3t$, et donc $v(3t+2) = 3t^2 + 3t$.

(I.6.15) : Remarques : 1. On peut montrer le théorème I.6.14 par la méthode de I.5.3 en enlevant de K_n^* 2 ou 5 points pour se ramener à K_{6t+3}^* (excepté si $n = 8$). La démonstration est plus simple, mais a l'inconvénient d'utiliser le théorème I.5.2.

2. Le théorème donne pour $n \neq 6$ les valeurs de $\rho(2K_n, C_3)$ et $v(2K_n, C_3)$; pour $n = 6$ l'existence d'une $(6,3,2) C_3$ -configuration entraîne $\rho(2K_6, C_3) = v(2K_6, C_3) = 10$. Les valeurs de $v(2K_n, C_3)$ ont été obtenues par R.K.Guy [G2].

3. La même méthode permet de retrouver les résultats connus sur $\rho(K_n, K_3)$: [F₁] et $v(K_n, K_3)$ [K1, S1, S2]. Nous donnons ici une démonstration plus courte de :

(I.6.16) Théorème : [K1, S1, S2] : $v(K_n, K_3) = \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor - \epsilon(n)$ où $\epsilon(n) = 1$ si $n \equiv 5 \pmod{6}$ et $\epsilon(n) = 0$ sinon.

Démonstration : Si $n \equiv 1$ ou $3 \pmod{6}$ ceci est une conséquence de l'existence des $(n, 3, 1)$ configurations (ou triplets de Steiner) . Si $n \equiv 0$ ou $2 \pmod{6}$ on obtient un pavage de K_n en enlevant un sommet de K_{n+1} et les triplets contenant ce sommet dans une $(n+1, 3, 1)$ configuration. J. Spencer [S2] a montré que le cas $n \equiv 5 \pmod{6}$ se déduisait du cas $n \equiv 4 \pmod{6}$. Supposons donc $n \equiv 4 \pmod{6}$: $n = 6t+4$; d'après I.6.11 $v(K_{6t+4}, K_3) \geq 3 v(K_{2t+2}, K_3) + (2t+1)^2$, on vérifie en supposant le théorème vrai pour $2t+2$ que le théorème est vrai pour $6t+4$.

(I.6.17) Remarque : Par la même méthode nous avons obtenu un certain nombre de résultats sur $v(K_n, K_4)$.

Conclusion : Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés exclusivement à des problèmes d'existence de G -configurations. Lorsque le problème d'existence est résolu, on peut s'intéresser à savoir, pour des paramètres données ~~combien~~ il y a de telles configurations non isomorphes et s'il existe des constructions permettant de les obtenir les unes à partir des autres.

BIBLIOGRAPHIE

- B.1. S.BANKES : A computer program to decompose the complete directed graph into spanning cycles. Manuscript.
- B.2. C.BERGE : Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1970.
- B.3. J.C.BERMOND : An application of the solution of Kirkman's schoolgirl problem : the décomposition of the symmetric oriented complete graph into 3-circuits, Discrete Math 8 ,1974, 301-304.
- B.4. J-C.BERMOND et D. SOTTEAU : (n,k,λ) -configurations. Cours de 3ème cycle.
- B.5. J-C.BERMOND : The circuit hypergraph of a tournament, à paraître Proc. Coll. Keszthely (juin 1973).
- B.6. J-C.BERMOND et V. FABER : Décomposition of the complete directed graph into k-circuits, soumis au J. Comb. Theory.
- B.7. J-C.BERMOND : Decomposition of K_n^* into k-circuits and balanced G-designs, à paraître Proc. Coll. Prague (juin 1974).
- B.8. R.C. BOSE : On the construction of balanced incomplete block designq, Ann Eugenics 9 ,1939, 353-399.
- B.9. R.C. BOSE et S. S. SHRIKHANDE : On the composition of balanced incomplete block designs, Canadian J. Math. 12, 1960, 177-188.
- B.10. R.C. BOSE et S.S. SHRIKHANDE : On the construction of sets of mutually orthogonal latin squares and the falsity of a conjecture of Euler, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 1960, 191-209.
- B.11. R.H. BRUCK : Existence of the A-maps of A. K Dewney and N. Robertson, manuscript.
- D.1. J. DÉNES et E.TOROK : Groups and graphs, Combinatorial Theory and its applications (eds.P.Erdős, A.Renyi, V.T. Sós) North Holland 1970, 257-289.
- F.1. M.K. FORT et G.A. HEDLUNG : Minimal covering of pairs by triples, Pacific J. Math 8, 1958, 709-719.
- G.1. B.GORDON : Sequences in groups with distinct partial products, Pacific J.Math 11, 1961, 1309-1313.

- G.2. R.K.GUY : A problem of Zaankiewicz, Theory of graphs, (ed. P.Erdős et G. Katona), Akademiai Kiadó, Budapest, 1967, 119-150.
- H.1. M. HALL : Combinatorial theory, Blaisdell, Waltham, Mass.1967.
- H.2. B.HARTNELL et M. MILGRAM: Decomposition of K_p , for p a prime into k -circuits, à paraître Proc. journées franco-belges sur les graphes et hypergraphes, Paris, Mai 1974.
- H.3. P.HELL et A.ROSA : Graph decompositions, handcuffed prisoners and balanced p -designs Discrete Mathematics, 2, 1972, 229-252.
- H.4. A.J.W. HILTON : A simplification of Moore's proof of the existence of Steiner triple systems, J.Comb. Theory, 13 A, 1972, 422-425.
- H.5. C.HUANG et A. ROSA : On the existence of balanced bipartite designs, Utilitas Mathematica 4, 1973, 55-75.
- H.6. C. HUANG : On the existence of balanced bipartite designs II, Discrete Math 9, 1974, 147-160.
- H.7. C.HUANG et A.ROSA: On balanced circuit designs, à paraître.
- H.8. S.H.Y HUNG ' et N.S. MENDELSON : Handcuffed designs cité dans [L1].
- H.9. S.H.Y. HUNG et N.S. MENDELSON : Directed triple systems, J. Comb, Theory, 16 A, 1974, 76-86.
- H.10 H. HANANI : On transversal designs, Combinatorics (ed.M.HALL Jr. et J.H. VAN LINT), Math, Centre Tracts 55, Amsterdam, 1974, 42-52.
- K.1. J.G.KALBLEISCH et R.G. STANTON : Maximal and minimal coverings of $(k-1)$ -tuples by k -tuples, pacific J. Math. 26, 1968, 131-140.
- K.2. A.KOTZIG : On the decomposition of complete graphs into $4k$ -gons (en russe) Mat. Fyz. Casop.15 (1965) 229-233.
- L.1 J.F. LAWLESS : On the construction of handcuffed designs, J.Comb. Theory 16 A, 1974, 76-86.
- L.2. J.F. LAWLESS : Further results concerning the existence of handcuffed designs, Aequationes Mathematicae, 11, 1974, 97-106.

- M.1. N.S. MENDELSON : Hamiltonian decomposition of the complete directed n -graph, Theory of Graphs, (eds. P. Erdős, G. Katona), Akademiai Kiado Budapest, 1968, 237-241.
- M.2. N.S. MENDELSON : A natural generalisation of Steiner triple systems, Computers in number theory, (eds. A.O.L. Atkin et B.J. Birch) Academic Press, New York, 1971, 323-339.
- M.3. W.H. MILLS : Covering problems, à paraître.
- R.1. D.K. RAY-CHAUDHURI et R.M. WILSON : Solution of Kirkman's schoolgirl problem, Proc. Symposia in Pure Math, Combinatorics, Vol. 19 A.M.S, Providence R.I, 1971, 187-203.
- R.2. G. RINGEL et J.W.T. YOUNGS : Solution of the colouring problem Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 60, 1968, 438-445.
- R.3. A. ROSA : On the cyclic decompositions of the complete graph into polygons with odd number of edges' (Slovaque avec résumé en anglais) Casop. Mat. 91, 1966, 53-63.
- R.4. A. ROSA : On cyclic decompositions of the complete graph into $(4m+2)$ -gons, Mat. Fyz. Ca s opis. Sav. 16, 1966, 349-353.
- S.1. J. SCHÖNHEIM : On the number of mutually disjoint triples in Steiner systems and related maximal packing and minimal covering systems, Recent progress in Combinatorics, (ed. W.T. Tutte) Academic Press, 1968, 311-318.
- S.2. J. SPENCER : Maximal consistent families of triples, J. Comb. Theory 5, 1968, 1-8.
- W.1. L.L. WANG : A test for the sequencing of a class of finite groups with two generators, Notices of the A.M.S, 20, 1973, A 632.
- W.2. R.M. WILSON : An existence theory for pairwise balanced designs, I, II J. Comb. Theory, 13 A, 1972, 220-273.
- W.3. R.M. WILSON : Concerning the number of mutually orthogonal latin squares, Discrete Math, 9, 1974, 181-198.
- W.4. R.M. WILSON : Constructions and uses of pairwise balanced designs, Combinatorics I, (ed. M. HALL Jr. et J.M. Van Lint,) Math Centre tracts 55, Amsterdam, 1974, 18-41.

C H A P I T R E II

CYCLES HAMILTONIENS ET GENERALISATIONS.

II.1. Rappels sur l'existence de cycles hamiltoniens.

Dans la suite $G = (X, E)$ désigne un graphe simple (sans boucles, ni arêtes multiples), ayant n sommets : $|X| = n$, avec $n \geq 3$. Un cycle (chaîne) hamiltonien de G est un cycle élémentaire (chaîne élémentaire) de longueur n , c'est à dire un cycle (chaîne) passant une fois et une seule par chaque sommet.

De nombreuses conditions suffisantes d'existence d'un cycle hamiltonien ont été établies (voir [B1]). Nous en rappelons ici certaines, portant essentiellement sur les degrés des sommets du graphe. Nous notons par $d(x)$ le degré du sommet x .

$G = (X, E)$ admet un cycle hamiltonien si :

(II.1.1) : (Dirac [D1]) : $d(x) \geq \frac{n}{2}$ pour tout x de X .

(II.1.2) : (Ore [O1]) : $d(x) + d(y) \geq n$ pour tous sommets x et y de X non adjacents (c'est à dire $\{x, y\} \notin E$).

(II.1.3) : (Posa [P1]) : $|\{x : d(x) \leq j\}| < j$ pour $j < \frac{n-1}{2}$
et (pour n impair) $|\{x : d(x) \leq \frac{n-1}{2}\}| \leq \frac{n-1}{2}$.

(II.1.4) : (Bondy [B6]) : les sommets de G étant indexés de sorte que $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$ on a :

$$j < k, d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq n.$$

(II.1.5) : (Chvatal [C2]) : les sommets de G étant indexés de sorte que $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$ on a :

$$d(x_j) \leq j < \frac{n}{2} \Rightarrow d(x_{n-j}) \geq n - j.$$

(II.1.6) (Las Vergnas [L1]) : $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ étant une indexation quelconque des sommets de G on a :

$$\left. \begin{array}{l} j < k, k \geq n-j, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq n$$

Remarque : Les conditions II.1.α sont rangées de sorte que si G vérifie II.1.α, il vérifie II.1.β pour $1 \leq \alpha \leq \beta \leq 6$.

Tous ces théorèmes se déduisent du résultat suivant du à Bondy et Chvatal [B9] pour lequel nous avons besoin d'une définition :

G étant un graphe à n sommets, on appelle k -fermeture de G, notée $C_k(G)$, le graphe H, à n sommets, ayant le plus petit nombre d'arêtes, contenant G comme graphe partiel et tel que $d_H(x) + d_H(y) < k$ pour tous sommets x et y non adjacents dans H.

(II.1.7) (Bondy et Chvatal [B9]) : Soit G un graphe à n sommets, si la n -fermeture $C_n(G)$ admet un cycle hamiltonien, alors G admet un cycle hamiltonien.

Signalons enfin une dernière condition :

(II.1.8) (Erdős-Chvatal [C3]) : Si G est un graphe h -connexe, dont le nombre de stabilité $\alpha(G)$ vérifie $\alpha(G) \leq h$, alors G admet un cycle hamiltonien.

Dans la suite nous nous proposons :

a) d'obtenir, en affaiblissant les hypothèses ci-dessus, des conditions suffisantes d'existence d'un cycle élémentaire de longueur $\geq c$ (II.2), d'un cycle non élémentaire de longueur n (II.3), d'une chaîne élémentaire de longueur $\geq c$ (II.2), d'arbres ayant au plus h sommets pendants (II.4).

b) d'obtenir avec des hypothèses plus fortes, des conditions assurant l'existence de cycles hamiltoniens ayant des propriétés supplémentaires (II.5 et II.6 en orienté).

c) d'étudier les propriétés d'hamiltonisme de $L(G)$, graphe représentatif des arêtes de G, (II.7), dont nous donnons diverses caractérisations obtenues avec Meyer [B4] (II.8).

II.2. Cycles élémentaires de longueur $\geq c$.

(II.2.1.) Théorème : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que :

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(d(x_j); d(x_k)) \geq c$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 1$.

Démonstration : Supposons que le théorème soit faux pour une valeur n et soit $G = (X, E)$ un graphe à n sommets, vérifiant l'hypothèse et pas la conclusion, et ayant le plus grand nombre d'arêtes possible. G n'est pas complet. Soient x_j et x_k deux sommets non adjacents de G avec $j < k$ tels que :

i) il existe entre x_j et x_k une chaîne ayant la plus grande longueur possible ℓ .

ii) $j + k$ ait la plus grande valeur possible parmi les couples de points vérifiant i).

Le graphe obtenu en ajoutant à G l'arête $\{x_j, x_k\}$ vérifie les hypothèses du théorème et d'après la maximalité de E contient un cycle de longueur $\geq c + 1$. Donc la longueur de la chaîne entre x_j et x_k vérifie $\ell \geq c$.

Soit $P(x_j, x_k) = \{x_j = y_1, y_2, \dots, y_{\ell-1}, y_{\ell} = x_k\}$ la chaîne entre x_j et x_k .

Soit $J = \{y_i : y_i \in P(x_j, x_k) \text{ et } \{x_j, y_{i+1}\} \in E\}$,

et $K = \{y_i : y_i \in P(x_j, x_k) \text{ et } \{y_{i-1}, x_k\} \in E\}$.

On a $|J| = d(x_j)$: en effet x_j ne peut pas être relié à un point $z \notin P(x_j, x_k)$, sinon on aurait entre z et x_k une chaîne de longueur $> \ell$ et $\{z, x_k\} \in E$ (sinon on aurait un cycle de longueur $> \ell + 1 \geq c + 1$) d'où une contradiction avec i). D'autre part si $y_i \in J$:

$\{y_i, y_{i-1}, \dots, y_1 = x_j, y_{i+1}, \dots, y_{\ell-1}, y_{\ell} = x_k\}$ est une chaîne de longueur ℓ ; donc $\{y_i, x_k\} \notin E$ sinon on aurait un cycle de longueur $\ell + 1 \geq c + 1$; donc d'après la maximalité de $j + k$ (ii) on a indice de $y_i \leq j$ (l'égalité ayant lieu seulement pour y_1) et donc $|J|$ points d'indice $\leq j$, d'où $|J| = d(x_j) \leq j$. De même $|K| = d(x_k)$ et les points de K , ainsi que x_j , ont un indice $\leq k$, d'où $|K| + 1 = d(x_k) + 1 \leq k$. Les conditions de l'hypothèse sont vérifiées ; d'où soit $d(x_j) \geq c$ soit $d(x_k) \geq c$ x_j (resp. x_k) étant reliés aux seuls points de $P(x_j, x_k)$ on obtient dans chacun des cas un cycle de longueur $\geq c + 1$ d'où une contradiction.

(II.2.2) Corollaire (Posa [P2]) : Soit G un graphe tel que :

$|\{x : d(x) \leq j\}| \leq j$ pour $0 \leq j \leq c-1$ ($c \geq 2$), alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 1$.

Démonstration : Indexons les sommets de sorte que : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$.

La condition du corollaire signifie que $d(x_{j+1}) \geq j+1$ pour $0 \leq j \leq c-1$ et donc pour $j \geq c$ $d(x_j) \geq d(x_c) \geq c$. Les hypothèses de II.2.1. sont donc bien vérifiées.

(II.2.3) : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que :

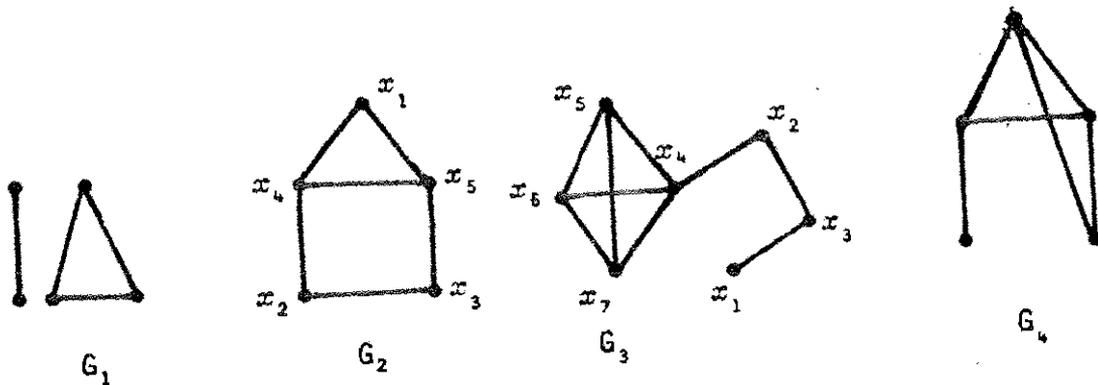
$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq \min(2c-1, n).$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c+1$.

Démonstration : Si $2c-1 \geq n$, la proposition est un corollaire de II.1.6 (G admet dans ce cas un cycle hamiltonien). Si $2c-1 < n$, la proposition est un corollaire de II.2.1, car $d(x_j) + d(x_k) \geq 2c-1 \Rightarrow \max(d(x_j), d(x_k)) \geq c$.

(II.2.4) Corollaire (Woodall [W2]). Soit G un graphe à n sommets et soit $c < n$. Si $d(x) + d(y) \geq \min(2c-1, n)$ pour tous sommets x et y non adjacents, alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c+1$.

(II.2.5) Remarques : Il existe des graphes vérifiant les hypothèses de II.2.4 (et donc II.2.3.), mais pas celles de II.2.2.: exemple G_1 avec $c = 2$. Par contre on peut montrer que tout graphe connexe vérifiant les hypothèses de II.2.4 vérifie celles de II.2.2. Il existe des graphes connexes vérifiant les hypothèses de II.2.3 mais pas celles de II.2.1 ni II.2.2 : exemple G_2 avec $c = 4$ (G_2 vérifie aussi les hypothèses de II.2.1 avec $c = 3$, mais pas celles de II.2.2). Il existe des graphes vérifiant les hypothèses de II.2.1. mais pas celles de II.2.2. ni de II.2.3 : exemple G_3 avec $c = 3$. Enfin, il existe des graphes vérifiant les hypothèses de II.2.2. mais pas celles de II.2.3.: exemple G_4 avec $c = 3$ [Pour d'autres implications entre diverses conditions du même type, voir Skupien [S1].



Il serait intéressant d'améliorer les théorèmes II.2.1. et II.2.3. pour obtenir des théorèmes analogues à II.1.6. Nous proposons la conjecture suivante :

(II.2.6.) Conjecture : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \quad k \geq \min(2c-1, n) - j, \\ \{x_j, x_k\} \notin E, \quad d(x_j) \leq j, \quad d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(d(x_j), d(x_k)) \geq c.$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 1$.

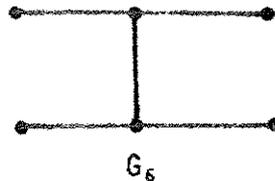
Si elle est vraie la conjecture II.2.6. entraînerait la conjecture II.2.7, qui généralise II.1.6. et II.2.3.

(II.2.7) Conjecture : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \quad k \geq \min(2c-1, n) - j, \\ \{x_j, x_k\} \notin E, \quad d(x_j) \leq j, \quad d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq \min(2c-1, n)$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 1$.

(II.2.8) Remarques : On peut songer à d'autres conjectures possibles, par exemple dans II.2.6 mettre : $k \geq n - j$: une telle conjecture est fausse comme le montre par exemple pour $c = 2$ le graphe G_5 . On peut aussi songer à mettre $d(x_j) \leq j - n + c + 1$ et $d(x_k) \leq k - n - c$ au lieu de $d(x_j) \leq j$ et $d(x_k) \leq k - 1$: cette conjecture est aussi fausse comme le montre le graphe G_6 pour $c = 2$.



Par contre la conjecture suivante serait intéressante pour II.3.9.

(II.2.9) Conjecture : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j-1, d(x_k) \leq k-2 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq \min(2c-1, n)$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c+1$.

Cas G 2-connexe.

Nous nous proposons ici de donner un théorème analogue à II.2.3., qui généralise les théorèmes suivants :

(II.2.10) Dirac [D1] - Soit $n \geq 2c \geq 4$ - Soit G un graphe 2-connexe, à n sommets, tel que $d(x) \geq c$ pour tout sommet x .

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq 2c$.

(II.2.11) Posa [P2]. Soit $n \geq 2c \geq 4$. Soit G un graphe 2-connexe, à n sommets, tel que pour $1 \leq j \leq c-1$ on ait $|\{x : d(x) \leq j\}| \leq j-1$. Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq 2c$.

(II.2.12) Bondy [B7] : Soit G un graphe 2-connexe, dont les sommets sont indexés de sorte que : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$.

Si $d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k$ ($j \neq k$) $\Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c$.

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c$.
(c est supposé $\leq n$).

(II.2.13) Théorème : Soit G un graphe 2-connexe et soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c \leq n$. Supposons que :

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c.$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c$.

Démonstration : Elle est très voisine de celle de Bondy[B7]. Nous utiliserons le lemme suivant démontré implicitement dans Bondy :

Lemme (Bondy [B7]) : Soit G un graphe 2-connexe, s'il existe une chaîne P

entre x_j et x_k de longueur $\ell \geq c - 1$ et si $d_p(x_j) + d_p(x_k) \geq c$, alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c$. [$d_p(x)$ signifie le degré de x dans le sous graphe engendré par P].

Supposons le théorème II.2.13 faux pour une valeur de n et soit $G=(X,E)$ un graphe 2-connexe, à n sommets, vérifiant l'hypothèse, mais pas la conclusion et ayant le plus grand nombre d'arêtes possible. G n'est pas complet. Soient x_j et x_k , deux sommets non adjacents de G , avec $j < k$, tels que :

i) il existe entre x_j et x_k une chaîne ayant la plus grande longueur possible ℓ .

ii) $j + k$ ait la plus grande valeur possible parmi les couples de points vérifiant i).

Le graphe obtenu en ajoutant à G l'arête $\{x_j, x_k\}$, vérifie les hypothèses et d'après la maximalité de E il contient un cycle de longueur $\geq c$, donc $\ell \geq c - 1$.

Soit $P = \{x_j = y_1, y_2, \dots, y_{\ell-1}, y_{\ell} = x_k\}$ la chaîne entre x_j et x_k . En utilisant les ensembles J et K définis dans la démonstration de II.2.1. on montre exactement comme en II.2.1. que $d(x_j) \leq j$, $d(x_k) \leq k - 1$ et que $d_p(x_j) = d(x_j)$ et $d_p(x_k) = d(x_k)$. On a donc par l'hypothèse $d_p(x_j) + d_p(x_k) = d(x_j) + d(x_k) \geq c$ et donc d'après le lemme un cycle de longueur $\geq c$, d'où une contradiction.

(II.2.14) Corollaire : Soit G un graphe 2-connexe à n sommets et soit $c \leq n$. Si $d(x) + d(y) \geq c$, pour tous sommets x et y non adjacents, alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c$.

(II.2.15) Remarque : Contrairement à ce qui se passe pour les cycles hamiltoniens, il existe des graphes G vérifiant les hypothèses de II.2.14, mais ne vérifiant pas celles de II.2.11. Une famille est donnée par les graphes formés d'un graphe complet à j sommets K_j , d'un graphe complet à $n - j$ sommets K_{n-j} et de j arêtes reliant les j sommets de K_j à j sommets de K_{n-j} . Ces graphes vérifient II.2.14 pour $n \geq c + 1$, mais pas II.2.11 pour $j \leq \left\lfloor \frac{c-1}{2} \right\rfloor$. Le graphe G_7 correspond au cas $j = 2$ $c = 6$.

 G_7

La conjecture suivante est une généralisation possible de II.1.6.

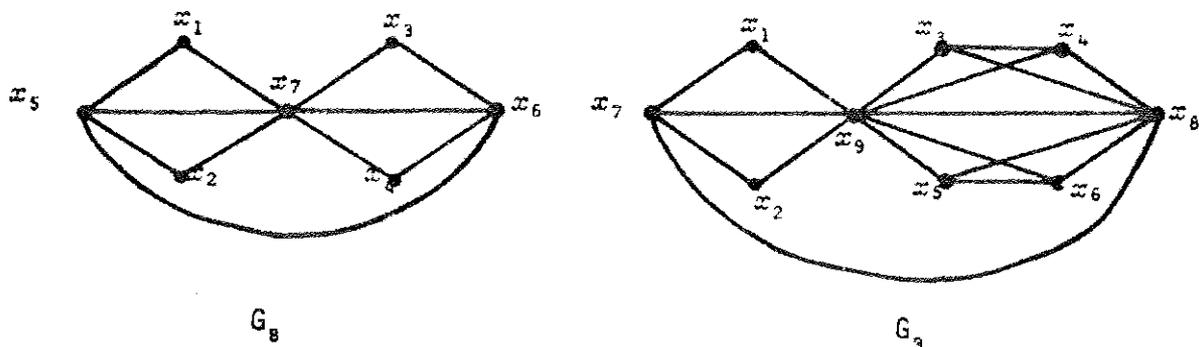
(II.2.16) Conjecture : Soit G un graphe 2-connexe, soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c \leq n$. Supposons que :

$$\left. \begin{array}{l} j < k, k \geq c - j, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c.$$

Alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c$.

(II.2.17) Remarques : On ne peut pas mettre l'hypothèse $k \geq n - j$ comme le montre le graphe G_8 , pour $c = 6$, (les sommets étant indexés par la suite de leurs degrés). Woodall [W2] a conjecturé que si G est 2 connexe et si $|\{x : d(x) \leq j\}| \leq j + n - c - 1$ pour $j < \frac{c-1}{2}$ et si

$|\{x : d(x) \leq \frac{c-1}{2}\}| \leq n - \frac{c-1}{2}$ alors G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c$. Cette conjecture généraliserait le résultat de Posa II.2.11. On peut songer à une conjecture plus forte avec par exemple comme hypothèse : G 2-connexe et : $j < k, d(x_j) \leq j + c - n, d(x_k) \leq k + c - n - 1, \{x_j, x_k\} \notin E \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c$. Le graphe G_9 où les sommets sont indexés par la suite des degrés montre qu'une telle généralisation est fautive avec $n = 9, c = 7$:



Le théorème suivant est un raffinement du théorème II.2.1., ses corollaires nous seront utiles en II.3.

(II.2.18) Théorème : Soit G' un graphe 2-connexe, à $n+1$ sommets et soit G le graphe obtenu en enlevant un sommet de G' . Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que :

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(d(x_j), d(x_k)) \geq c$$

(les degrés sont ceux dans le graphe G).

Alors G' contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 2$.

Démonstration : Le début est identique à II.2.1. Supposons le théorème faux pour une valeur n et soit $G' = (X \cup a, E')$ un graphe à $n + 1$ sommets vérifiant l'hypothèse et pas la conclusion et ayant le plus grand nombre d'arêtes possibles. Soit G le sous graphe obtenu en enlevant le sommet a de G' (et les arêtes incidentes à a). G n'est pas complet, sinon G' étant 2-connexe, a serait relié à deux sommets de G et G' contiendrait un cycle hamiltonien de longueur $n + 1 \geq c + 2$. Soient x_j et x_k deux sommets non adjacents de G choisis comme en II.2.1. Comme en II.2.1. on montre que x_j et x_k vérifient les conditions de l'hypothèse et donc $\max(d(x_j), d(x_k)) \geq c$. Si $\max(d(x_j), d(x_k)) = c + 1$, on obtient un cycle de longueur $c + 2$. Supposons donc que ce maximum vaut c et est atteint par x_j : soit $d(x_j) = c$. x_j est alors relié aux points $y_i : 2 \leq i \leq c + 1$ de $P(x_j, x_k)$, sinon on aurait un cycle de longueur $\geq c + 2$. G' étant 2-connexe, il existe dans G' deux chaînes disjointes au sens des sommets reliant les ensembles :

$\{y_i : 1 \leq i \leq c\}$ et $\{y_i : c + 2 \leq i \leq \ell\}$. (Remarquons $y_\ell = x_k$ étant différent de y_{c+1} le deuxième ensemble n'est pas vide). L'une de ces chaînes au moins ne contient pas le sommet y_{c+1} . Soit $P'(y_p, y_q)$ la sous chaîne d'extrémités y_p, y_q où $1 \leq p \leq c$ et $c + 2 \leq q \leq \ell$ et où les sommets intérieurs n'appartiennent pas à $P(x_j, x_k)$. Alors

$(y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, P'(y_p, y_q), y_{q-1}, \dots, y_{p+1}, y_1)$ est un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 2$, d'où la contradiction.

On obtient comme corollaires les théorèmes analogues à II.2.2, II.2.3, II.2.4. Nous donnons ici ceux qui nous seront utiles en II.3.

(II.2.19) Corollaire : Soit G' un graphe 2-connexe à $n+1$ sommets et soit G le graphe obtenu en enlevant un sommet, et soit $c < n$. Si $|\{x: d(x) \leq j\}| \leq j$ pour $0 \leq j \leq c-1$, (les degrés étant pris dans G), alors G' contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 2$.

(II.2.20) Corollaire : Soit G' un graphe 2-connexe, à $n+1$ sommets et soit G le graphe obtenu en enlevant un sommet et soit $c < n$. Si $d(x) + d(y) \geq 2c - 1$ pour tous sommets x et y non adjacents de G (les degrés étant pris dans G) alors G' contient un cycle élémentaire de longueur $\geq c + 2$.

(II.2.21) Conjecture : Posa [P2] a montré que si G est un graphe tel que $|\{x: d(x) \leq j\}| < j$ pour $1 \leq j \leq \frac{k-1}{2}$ alors les sommets de G peuvent être couverts par moins de $n + 1 - 2k$ cycles élémentaires 2 à 2 disjoints (au sens des sommets). On peut donc conjecturer qu'avec les hypothèses de II.2.3,

les sommets de G peuvent être couverts par moins de $n + 1 - (2c-1)$ cycles élémentaires 2 à 2 disjoints au sens des sommets. (la conjecture est vraie si G est 2-connexe d'après II.2.13). Le problème analogue de couverture des sommets par des chaînes a été résolu par Skupien [S1].

Chaînes de longueur $\geq c$.

Les théorèmes obtenus sur les cycles nous permettent d'établir des résultats sur les chaînes de longueur $\geq c$ en appliquant le type de raisonnement suivant : Soit G un graphe et G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet adjacent à tous les sommets de G . Si les hypothèses faites sur G impliquent que G' vérifient les hypothèses d'un théorème II.2.i avec $c+2$, alors G' contient un cycle de longueur $\geq c+2$ et donc G contient une chaîne de longueur $\geq c$. Remarquons de plus que si G est connexe G' est 2-connexe. On obtient ainsi à partir de II.2.13 le théorème :

(II.2.22) Théorème : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c \leq n-1$. Si

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j-1, d(x_k) \leq k-2 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c.$$

Alors G contient une chaîne élémentaire de longueur $\geq c$.

II.3. Cycles pseudo-hamiltoniens.

(II.3.1.) Définitions : Suivant Jolivet [J1 et J2] on appelle cycle pseudo-hamiltonien d'un graphe G connexe, un cycle de G passant une fois par chaque sommet. Si ce cycle n'est pas hamiltonien, alors il n'est pas élémentaire.

On note $\delta(G)$ le plus petit entier k tel que G possède un cycle pseudo-hamiltonien de longueur $n+k$.

Si G admet un cycle hamiltonien, alors $\delta(G) = 0$.

Le but de ce paragraphe est d'étendre aux cycles pseudo-hamiltoniens les théorèmes d'Ore (II.1.2) et de Posa (II.1.3), démontrant ainsi des conjectures de Jolivet [J1]. Dans la suite G désigne un graphe connexe. Nous utiliserons

les deux lemmes suivants dus à Jolivet [J1].

(II.3.2) : Lemma : Si G admet un cycle élémentaire de longueur c, alors $\delta(G) \leq n - c$.

(II.3.3) Lemma : Si G admet deux cycles élémentaires, de longueur c_1 et c_2 ayant au plus un sommet en commun, alors : $\delta(G) \leq n + 2 - (c_1 + c_2)$.

(Dans [J1] ce lemme est démontré pour 2 cycles disjoints, la même démonstration montrent que si les 2 cycles ont un sommet commun, alors $\delta(G) \leq n + 1 - (c_1 + c_2)$.)

(II.3.4) : Soit G un graphe 2-connexé et soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c \leq n$. Si :

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c.$$

Alors $\delta(G) \leq n - c$.

Démonstration : C'est une conséquence de II.2.13 et II.3.2.

(II.3.5) : Définitions : Un bloc d'un graphe G est un sous graphe 2-connexé, maximal, de G. Un point d'articulation d'un graphe G connexe est un sommet dont la suppression disconnecte G. Un bloc terminal de G est un bloc contenant un seul point d'articulation de G. Si G n'est pas 2-connexé, il est connu que G possède au moins 2 blocs terminaux.

(II.3.6) Théorème : Soit G un graphe connexe à n sommets et soit $c \leq n$. Supposons que :

$$|\{x : d(x) \leq j\}| \leq j - 1 \quad \text{pour } 0 \leq j < \frac{c-1}{2} \quad \text{et}$$

$$|\{x : d(x) \leq \frac{c-1}{2}\}| \leq \frac{c-1}{2} \quad (\text{si } c \text{ impair}).$$

Alors $\delta(G) \leq n - c$.

Démonstration : Si G est 2 connexe, le théorème est un corollaire de II.3.4. Supposons donc que G n'est pas 2-connexé.

Cas 1 : $c = 2p$.

i) Tout bloc terminal a au moins $p + 1$ éléments.

En effet, soit B un bloc terminal, b l'unique point d'articulation de G appartenant à B . Supposons $|B| \leq p$, $|B| = j + 1$ avec $j \leq p - 1$. Si $x \in B - b$, x n'est relié à aucun point de $G - B$, (B étant bloc terminal), donc on a : $d(x) = d_B(x) \leq j$ et comme $|B - b| = j$ on a $|\{x : d(x) \leq j\}| \geq j$ pour $j \leq p-1 < \frac{c-1}{2}$, contrairement à l'hypothèse.

ii) Tout bloc terminal contient un cycle élémentaire de longueur $\geq p + 1$.

En effet si $x \in B - b$, $d_{B-b}(x) \geq d(x) - 1$ car x est relié en dehors de $B - b$, au plus à b . Le sous graphe engendré par $B - b$ vérifie donc : $|\{x : d_{B-b}(x) \leq j\}| \leq j$ pour $0 \leq j \leq p - 2$, d'après l'hypothèse. On peut appliquer (II.2.19.) avec $G' = B$, $G = B - b$ et $c = p-1$; on en conclut qu'il existe dans B un cycle de longueur $\geq p+1$. G ayant au moins 2 blocs terminaux (qui ont au plus un point commun), G contient donc deux cycles ayant au plus un point commun de longueur $\geq p + 1$. D'après (II.3.3) $\Delta(G) \leq n + 2 - 2(p + 1) = n - 2p = n - c$.

Cas 2 : $c = 2p - 1$.

Comme dans le cas 1, on montre que tout bloc terminal a au moins p éléments (on peut avoir un bloc terminal à p éléments car $|\{x : d(x) \leq p-1\}| = p-1$). Le graphe G vérifie $|\{x : d(x) \leq j\}| \leq j$ pour $0 \leq j \leq p - 1$, donc d'après II.2.2., G contient un cycle élémentaire C de longueur $\geq p + 1$. Ce cycle est inclus dans un bloc. Soit B un bloc terminal ne contenant pas C (il en existe au moins un, G contenant 2 blocs terminaux). Comme $d_B(x) = d(x)$ pour tout x de B , excepté b , on a $|\{x : d_B(x) \leq j\}| \leq j$ pour $0 \leq j \leq p - 2$. Donc d'après II.2.2. B contient un cycle longueur $\geq p$. (Remarquons que si $|B| \geq p + 1$, on aurait comme dans le cas 1 avec II.2.19 un cycle de longueur $\geq p + 1$ inclus dans B). G contient donc 2 cycles C et C' , ayant au plus un point commun et de longueur $c \geq p + 1$ et $c' \geq p$. D'après II.3.3 $\Delta(G) \leq n + 2 - (2p + 1) = n - (2p - 1) = n - (2p-1) = n - c$.

(II.3.7) Théorème : Soit G un graphe connexe à n sommets et soit $c \leq n$. Si $d(x) + d(y) \geq c$ pour tous sommets x et y non adjacents, alors $\Delta(G) \leq n - c$.

Démonstration : Si G est 2-connexe, le théorème est un corollaire de II.3.4. Supposons donc que G n'est pas 2-connexe.

Supposons le théorème faux et soit c la plus petite valeur pour laquelle il est faux. Parmi les graphes ne vérifiant pas le théorème pour c , soit G

un graphe ayant le minimum de sommets n . (On a $n \geq c + 1$, le théorème étant vrai pour $n = c$ II.12). Supposons que G contienne un bloc terminal B , qui soit hamiltonien; soit b l'unique point d'articulation de G dans B et soit $P = B - b$. On a $|B| < c$, sinon G aurait un cycle de longueur $\geq c$ et d'après II.3.2. : $\delta(G) \leq n - c$. On a $\delta(G) \leq \delta(G-P) + 1$: en effet soit C un cycle pseudo-hamiltonien de $G-P$ de longueur $|G-P| + \delta(G-P)$ et soit C' un cycle hamiltonien de B , alors $C \cup C'$ est un cycle pseudo-hamiltonien de G de longueur $|G| + 1 + \delta(G-P)$ d'où $\delta(G) \leq \delta(G-P) + 1$. Posons $|P| = k$, donc $|B| = k + 1 < c$. Si $x \in P$, $d(x) = d_B(x) \leq k$ (B étant bloc terminal). Si $x \in P$ et $y \in G - B$, x et y sont non adjacents, car B est bloc terminal; donc d'après l'hypothèse $d(x) + d(y) \geq c$. Donc $d_{G-P}(y) = d(y) \geq c - k$. Si y et $z \in G - B$, on a : $d_{G-P}(y) + d_{G-P}(z) \geq 2(c - k)$. Enfin, G étant connexe, $d_{G-P}(b) \geq 1$ et par suite si $y \in G - B$, $d_{G-P}(y) + d_{G-P}(b) \geq c + 1 - k$. Comme $c > k + 1$ on déduit que $2(c - k) > c + 1 - k$ et par suite : $d_{G-P}(y) + d_{G-P}(z) \geq c + 1 - k$ pour tous sommets y et z de $G - P$. Le sous-graphe engendré par $G - P$ vérifie donc les hypothèses du théorème avec $c' = c + 1 - k \leq c$ et $n' = |G - P| = n - k < n$. D'après la minimalité de c et de n , $\delta(G-P) \leq n' - c' = n - c - 1$. Donc comme $\delta(G) \leq \delta(G-P) + 1$ on a $\delta(G) \leq n - c$, d'où une contradiction.

Soit B un bloc terminal, $P = B - b$ ne peut pas être un sous graphe complet, sinon B serait hamiltonien. Il existe donc dans P deux points non adjacents x et y et d'après l'hypothèse $d(x) + d(y) \geq c$. Si $x \in P$, $d_p(x) \geq d(x) - 1$ (x est relié au plus à b dans $G - P$); donc $d_p(x) + d_p(y) \geq c - 2$. Soit $p = \lfloor \frac{c+1}{2} \rfloor$. On a $|P| \geq p + 1$: en effet si $|P| \leq p$ on aurait $d_p(y) \leq p - 2$ car x et y ne sont pas adjacents et donc $d_p(x) + d_p(y) \leq 2p - 4 < c - 2$, ce qui est impossible. Le sous graphe engendré par P vérifie donc les hypothèses de II.2.20 avec $G = P$, $G' = B$ et $c = p - 1$. G contenant au moins 2 blocs terminaux, contient 2 cycles (élémentaires) de longueur $\geq p + 1$, ayant au plus un point en commun donc d'après II.3.3. $\delta(G) \leq n + 2 - 2(p + 1) = n - 2p \leq n - c$. (Remarquons que l'hypothèse de minimalité de c et de n (induction déguisée) ne sert que pour éliminer le cas où B étant bloc terminal, $P = B - b$ est un sous graphe complet avec $|P| < p$)

(II.3.8) Remarque : Comme nous l'avons vu en II.2.15 on peut trouver des familles de graphes vérifiant les hypothèses de II.3.7 et pas celles de II.3.6 dès que $c < n$. Il est bien connu que pour $c = n$, il existe des graphes vérifiant les hypothèses de II.3.6 (alias II.1.3), mais pas celles de II.3.7 (alias II.1.2). Il est facile d'exhiber des familles de graphes vérifiant les

les hypothèses de II.3.6 mais pas celles de II.3.7 pour $5 < c < n$: par exemple les graphes formés d'un graphe complet à $n - 2$ sommets et de deux sommets non adjacents de degré 2 et 3. Il serait donc intéressant de trouver un théorème contenant à la fois II.3.6 et II.3.7 d'où la conjecture :

(II.3.9) Conjecture : Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une indexation quelconque des sommets de G et soit $c < n$. Supposons que

$$\left. \begin{array}{l} j < k, \{x_j, x_k\} \notin E \\ d(x_j) \leq j, d(x_k) \leq k-1 \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq c.$$

Alors $\delta(G) \leq n - c$.

Remarque : On peut montrer par des méthodes analogues à II.3.6 et II.3.7 que la conjecture est vérifiée, si la conjecture II.2.9 l'est.

II.4 - Arbres maximaux ayant au plus h sommets pendants.

Les résultats de ce paragraphe sont parus dans [B2]. Dans ce qui suit, on suppose que G est connexe et l'on s'intéresse aux arbres maximaux du graphe G, ayant au plus h sommets pendants (sommets de degré 1) avec h entier $h \geq 2$. Dans le cas $h = 2$ un arbre maximal à deux sommets pendants est une chaîne hamiltonienne du graphe. On a donc une généralisation des chaînes hamiltoniennes. Les résultats que nous allons donner sont valables pour $h \geq 2$. Néanmoins ils sont valables pour le cas $h = 1$ à condition d'interpréter "un arbre maximal à 1 sommet pendent" comme un cycle hamiltonien.

Dans la suite nous supposerons que les sommets de G sont indexés de sorte que $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \dots \leq d(x_n)$ et nous poserons $d_i = d(x_i)$

Nous utiliserons le théorème suivant du à Las Vergnas (voir chap. 4, §2 de [L1] ou proposition 2 de [L2]). Dans le cas $h = 1$, on retrouve avec l'interprétation ci-dessus II.1.4.

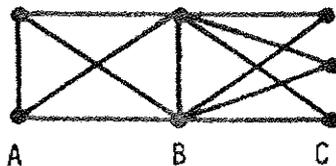
(II.4.1) Théorème (Las Vergnas) : Soit $d_i, 1 \leq i \leq n$, la suite des degrés rangés par ordre non décroissant d'un graphe G. Si :

$$j < k, d_j \leq j + 1 - h, d_k \leq k - h \Rightarrow d_j + d_k \geq n + 1 - h$$

Alors G admet un arbre maximal ayant au plus h sommets pendants.

(II.4.2) Grappe $G(n,p,h)$: Nous désignerons par $G(n,p,h)$ le graphe dont l'ensemble des sommets X est l'union de trois ensembles A, B, C , non vides, deux à deux disjoints avec $|A| = n - 2p + h - 1$, $|B| = p - h + 1$, $|C| = p$ et où une arête appartient à $G(n,p,h)$ si elle a au moins une extrémité dans B ou ses deux extrémités dans A . On peut dire aussi que $G(n,p,h)$ est formé d'un graphe complet à $n - p$ sommets, dont $p - h + 1$ sont reliés à tous les éléments d'un stable à p éléments. On a : $d(x) = n - p - 1$ si $x \in A$; $d(x) = n - 1$ si $x \in B$; $d(x) = p - h + 1$ si $x \in C$. La suite des degrés de $G(n,p,h)$ est donc $d_i = p - h + 1$ pour $1 \leq i \leq p$; $d_i = n - p - 1$ pour $p + 1 \leq i \leq n - p + h - 1$; $d_i = n - 1$ pour $n - p + h \leq i \leq n - 1$. Enfin $G(n,p,h)$ a un nombre d'arêtes $E(n,p,h) = p(p-h+1) + \binom{n-p}{2} = 1/2(n^2 - (2p+1)n + p(3p - 2h+3))$.

Exemple : $G(7,3,2)$:



(II.4.3) Remarques : $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ entraînent que : $h \leq p \leq 1/2(n+h-2)$ et donc en particulier $n \geq h + 2$. Enfin, $G(n,p,h)$ est le seul graphe ayant la suite de degrés ci-dessus, et cette suite de degrés ne vérifie pas les hypothèses de II.4.1. On a de plus que :

(II.4.4) : $G(n,p,h)$ ne contient pas d'arbres maximaux ayant moins de $h + 1$ sommets pendants.

Démonstration : Dans un arbre maximal de $G(n,p,h)$, on a au plus $|B| - 1$ sommets de C , qui sont de degré > 1 , donc au moins h sommets de C qui sont pendants. S'il existe un arbre maximal avec exactement h sommets de C , qui soient pendants, alors deux sommets quelconques de B sont reliés par une chaîne de l'arbre incluse dans $B \cup C$. Il existe alors un sommet de A , qui est pendent dans l'arbre, sinon il existerait deux sommets de B reliés par une chaîne de l'arbre incluse dans $A \cup B$ et contenant au moins un sommet de A , cette chaîne formerait avec celle incluse dans $B \cup C$ un cycle ce qui est impossible dans un arbre. Tout arbre maximal de $G(n,p,h)$ a donc au moins $h + 1$ sommets pendants ; on peut d'ailleurs aisément en construire un ayant $h + 1$ sommets pendants.

(II.4.5) Remarque : Les graphes $G(n,p,h)$ sont maximaux en ce sens que l'adjonction d'une arête quelconque entraîne l'existence d'un arbre maximal à h sommets pendants dans le graphe obtenu.

Dans la suite nous nous proposons de démontrer une conjecture de Las Vergnas [L1, p.115] concernant le nombre maximum d'arêtes que peut avoir un graphe G ne contenant pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants ou ce qui revient au même déterminer la meilleure fonction $f(n, h)$ tel que tout graphe avec m arêtes, $m > f(n, h)$ admette un arbre maximal ayant au plus h sommets pendants. Nous nous proposons de plus de caractériser les graphes extrémaux.

(II.4.6) Tout graphe connexe à n sommets n'ayant pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants ($n \geq h + 2$) a un nombre d'arêtes

$$m \leq \sup_{h \leq p \leq (n+h-2)/2} E(n, p, h)$$

où $E(n, p, h) = p(p-h+1) + \binom{n-p}{2}$, et cette borne est la meilleure possible.

Démonstration : Si G n'a pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants, il existe d'après II.4.1 deux indices j et k , $j < k$, tels que $d_j \leq j + 1 - h$, $d_k \leq k - h$ et $d_j + d_k \leq n - h$. Soit p le plus petit indice j tel que $d_j \leq j + 1 - h$, alors $d_p = p + 1 - h$ (car $p > 1$). G étant connexe $d_p \geq 1$, soit $p \geq h$. Enfin $d_p \leq d_k$ et $d_p + d_k \leq n - h \Rightarrow d_p \leq (n - h) / 2$, soit $p \leq (n + h - 2) / 2$. Le graphe G a au plus $p(p - h + 1) + \binom{n - p}{2} = E(n, p, h)$ arêtes car on a p sommets de degré $\leq p - h + 1$. La borne $E(n, p, h)$ est atteinte pour les graphes $G(n, p, h)$.

(II.4.7) Remarque : Parmi les graphes vérifiant $d_p = p + 1 - h$ et ayant le nombre maximum d'arêtes : $E(n, p, h)$, seul $G(n, p, h)$ n'admet pas d'arbre maximal à moins de $h + 1$ sommets pendants. En effet, un tel graphe est formé d'un stable à p éléments et d'un graphe complet à $n - p$ éléments avec $p(p + 1 - h)$ arêtes entre ; ce graphe admet un arbre maximal à moins de h sommets pendants, sauf si les arêtes entre le stable et le sous graphe complet relient les p sommets du stable à $p + 1 - h$ sommets du sous graphe complet ; c'est à dire si le graphe est isomorphe à $G(n, p, h)$.

(II.4.8) Théorème : Tout graphe connexe $G = (X, E)$ avec $|X| = n$ et $|E| = m$ admet un arbre maximal ayant au plus h sommets pendants si $m > f(n, h)$ où

$$\begin{aligned} f(n, h) &= n - 2 && \text{pour } n \leq h + 1 \\ f(n, h) &= E(n, \lfloor (n+h-2)/2 \rfloor, h) && \text{pour } h + 2 \leq n \leq 5h - 2 \\ f(n, h) &= E(n, h, h) && \text{pour } n > 5h - 2 \end{aligned}$$

où $E(n, p, h) = p(p-h+1) + \binom{n-p}{2}$

Démonstration : Si $n \leq h + 1$, tout graphe connexe admet un arbre maximal à au plus $n - 1$ sommets pendants et donc $m > n - 2$. Si $n \geq h + 2$, on a d'après II.4.4. et II.4.6 :

$f(n, h) = \sup_{h \leq p \leq (n+h-2)/2} E(n, p, h)$. Les valeurs données dans le théorème s'obtiennent en déterminant les valeurs de p pour lesquelles le maximum est atteint. Nous renvoyons le lecteur à [B2] pour le détail des calculs.

(II.4.9) Théorème : La fonction $f(n, h)$ de II.4.8 est la meilleure possible, en ce sens que pour tout n et pour tout h , il existe au moins un graphe ayant $f(n, h)$ arêtes et pas d'arbre maximal à moins de $h+1$ sommets pendants. Pour $n \geq h + 2$ les graphes extrémaux sont :

- pour $h + 2 \leq n \leq 5h - 2$: les seuls $G(n, [(n+h-2)/2], h)$; avec pour $n = 5h - 3$ en plus $G(5h - 3, h, h)$.
- pour $n > 5h - 2$: les seuls $G(n, h, h)$; avec pour $n = 5h$ en plus $G(5h, 3h - 1, h)$.

Démonstration : Nous renvoyons le lecteur à [B2] en remarquant que d'après (II.4.7.) les graphes extrémaux sont à rechercher parmi les graphes $G(n, p, h)$.

II.4.10) Corollaire (Ore [O1]) : Si G a m arêtes avec $m > (n^2 - 3n + 4)/2$ alors G admet un cycle hamiltonien .

II.4.11. Corollaire (Bondy [B8]) : Les seuls graphes non hamiltoniens ayant $(n^2 - 3n + 4)/2$ arêtes sont les $G(n, 1, 1)$ avec pour $n = 5$ en plus $G(5, 2, 1)$.

Démonstration : II.4.10 et II.4.11 se déduisent de II.4.8 et II.4.9, en prenant $h = 1$ (et en appliquant l'interprétation du début de ce paragraphe) et en remarquant que $n \geq 3$ correspond au cas $n > 5h - 2$.

Dans le cas $h = 2$, on obtient les résultats suivants : II.4.12 apparaît sous la forme II.4.6 dans Erdős [E1] .

II.4.12 : (Erdős [E1]) : Si G a n sommets, $n \geq 4$ et m arêtes, $m > g(n)$ où $g(n) = (n^2 - 5n + 10)/2$ si $n = 4, 5$ et $n \geq 9$; $g(6) = 9$; $g(7) = 12$; $g(8) = 18$:. Alors G admet une chaîne hamiltonienne.

II.4.13 : Les seuls graphes ayant $q(n)$ arêtes et sans chaîne hamiltonienne
sont : pour $n = 4, 5, 9$ et $n \geq 11$: $G(n, 2, 2)$;
 pour $n = 6$: $G(6, 3, 2)$; pour $n = 7$: $G(7, 3, 2)$ et $G(7, 2, 2)$;
 pour $n = 8$: $G(8, 4, 2)$; pour $n = 10$: $G(10, 2, 2)$ et $G(10, 5, 2)$.

II.4.14 : Remarque : Si on impose que dans le graphe G , tous les points aient un degré $\geq k$, les résultats ci-dessus demeurent valables, à condition de supposer $p \geq h + k - 1$ (au lieu de $p \geq h$) . Dans le cas $h = 1$ et $k = 2$ on retrouve des résultats d'Erdős [E1] .

II.5 - Graphes fortement (p, q) -hamiltoniens.

De nombreuses généralisations concernant les graphes hamiltoniens ayant des propriétés supplémentaires ont été introduites. Elles se trouvent rassemblées dans la notion de graphe fortement (p, q) -hamiltoniens, due à Skupien et Wojda [S3]. Nous nous proposons ici d'étudier les généralisations de II.1.8.

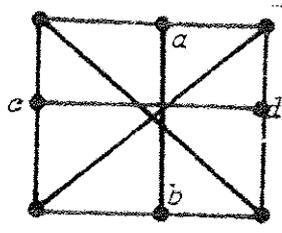
(II.5.1) Définitions : (Skupien et Wojda [S3]) : Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, G est dit fortement q -arête hamiltonien, si pour tout système S de chaînes élémentaires du graphe complet construit sur X , 2 à 2 disjointes (au sens des sommets), de longueur totale q , le graphe $G' = (X, E \cup S)$ admet un cycle hamiltonien contenant S .

Si S est inclus dans E , on retrouve la notion de graphe q -arête hamiltonien (Posa [P2]) ; si S est une chaîne élémentaire de G , la notion de graphe q -chaîne hamiltonien (Kronk [K1]) . Enfin la notion de graphe fortement 1-arête hamiltonien coïncide avec celle de graphe hamilton connecté (Ore [O2]) .

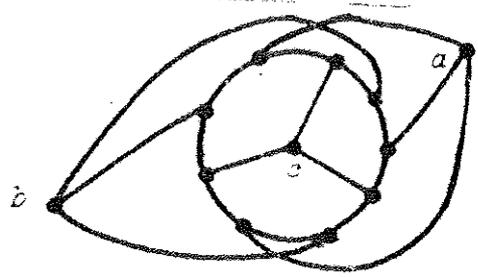
G est dit fortement (p, q) hamiltonien, si le graphe obtenu en supprimant n points de G , $0 \leq n \leq p$, est fortement q -arête hamiltonien. Dans le cas $q = 0$, on retrouve la notion de graphe p -hamiltonien (Chartrand, Kapoor, Lick [C1]). Dans le cas $q = 1$ on retrouve la notion de graphe $(p+1)$ -hamilton connecté (de Lick [L3]) .

(II.5.2) Remarques : Pour une étude plus détaillée, nous renvoyons à l'article de Skupien et Wojda [S3] et Wojda [W1] . En particulier, il y est prouvé les généralisations des théorèmes II.1.1. à II.1.6. Signalons deux remarques concernant les relations entre ces diverses généralisations : il est clair

que tout graphe fortement q -arête hamiltonien est q -arête hamiltonien et tout graphe q -arête hamiltonien est q -chaîne hamiltonien. Par contre, il existe des graphes q -arête hamiltoniens non fortement 1 -arête hamiltoniens : par exemple le cycle C_{q+1} . Il existe aussi des graphes $2q$ -chaîne hamiltoniens (avec $q \geq 1$), non 2 -arête hamiltonien : par exemple le graphe G_{10} pour $q = 1$ ou sa généralisation en remplaçant les arêtes par des chaînes de longueur q ; G_{10} n'admet pas de cycle hamiltonien contenant les arêtes $\{a,b\}$ et $\{c,\bar{a}\}$. (Voir aussi Kronk [K1]). Il existe des graphes fortement q -arête hamiltonien, non q -hamiltoniens (Wojda [W1]). D'autre part L. Danzer et T. Zamfirescu ont exhibé des graphes 1 -hamiltonien non hamilton-connecté (fortement 1 -arête hamiltonien) : le graphe G_{11} , du à Zamfirescu, ne contient pas de chaîne hamiltonienne entre a et b ; le graphe $G_{11} + 1$ -arête $\{ab\}$ n'est pas 1 -arête hamiltonien.



G_{10}



G_{11}

Dans la suite nous nous proposons d'étudier la conjecture suivante, généralisation de II.1.8 ; $\alpha(G)$ désigne le nombre de stabilité du graphe G , nombre maximum de sommets de G , 2 à 2 non adjacents.

(II.5.3) Conjecture : Soient h, p, q , trois entiers tels que $p + q \leq h + 1$. Si G est un graphe h -connexe, et si $\alpha(G) \leq h - p - q$, alors G est fortement (p, q) hamiltonien. La conjecture est démontrée pour $p = q = 0$: II.1.8, théorème de Chvatal et Erdős [C3] ; pour $p = 0, q = 1, 2$, Berge [B1 édition anglaise].

(II.5.4) Si la conjecture II.5.3 est vraie pour $(0, q)$, alors elle est vraie pour (p, q) .

Démonstration : Il suffit de remarquer que si G est h -connexe, et si $\alpha(G) \leq h - p - q$, le graphe G' obtenu en enlevant r points, $0 \leq r \leq p$, est $(h-r)$ connexe et $\alpha(G') \leq h - p - q \leq h - r - q$

(II.5.5) Corollaire : Si G est h -connexe et $\alpha(G) \leq h - p$, alors G est p -hamiltonien.

(II.5.6) : Si G est h -connexe et $\alpha(G) \leq h - q$, alors tout système S de chaînes élémentaires, du graphe complet construit sur X , 2 à 2 sommets disjointes, de longueur totale q , inclus dans un cycle élémentaire de $G' = (X, E \cup S)$ est inclus dans un cycle hamiltonien de G' .

Démonstration : Elle est identique à celle de Chvatal. et Erdős [C3] ou à celle de Berge [B1 édition anglaise] .

(II.5.7) : Pour démontrer la conjecture II.5.3 il suffit de démontrer :

(II.5.8) : Conjecture : Si G est h -connexe et $\alpha(G) \leq h - q$, alors tout couplage de cardinal q (ensemble de q arêtes 2 à 2 disjointes) est inclus dans un cycle élémentaire de G .

Démonstration (de II.5.7) : D'après II.5.4 on peut supposer $p = 0$: soit S un système de q' ($q' \leq q$) chaînes élémentaires, du graphe complet sur X , 2 à 2 sommet-disjointes, de longueur totale q . Soit G'' le graphe obtenu à partir de $G' = (X, E \cup S)$ en remplaçant chaque chaîne de S par une arête, c'est à dire en supprimant dans G' les $q - q'$ points intérieurs des chaînes de S . G'' est $(h - q + q')$ connexe et vérifie $\alpha(G'') \leq h - q$; si la conjecture (II.5.8) est vérifiée, le couplage S' formé des q' arêtes remplaçant les chaînes de S est inclus dans un cycle élémentaire de G'' et par suite S est inclus dans un cycle élémentaire de G' et donc d'après II.5.6. dans un cycle hamiltonien.

(II.5.9) Remarque : La démonstration ci-dessus montre (avec $q' = 1$) que si G est connexe et $\alpha(G) \leq h - q$ alors G est q chaîne hamiltonien.

La conjecture II.5.8. est impliquée par la conjecture suivante due à Lovász [L4] .

(II.5.10) Conjecture : (Lovász[L4]) : Si G est h -connexe et $h+1$ arête connexe, alors tout couplage de cardinal h est inclus dans un cycle élémentaire de G . Lovász a prouvé cette conjecture pour $h = 3$, donc la conjecture II.5.3 est vraie pour $q = 3$. On en déduit aussi

(II.5.11) : Si G est h -connexe et si $\alpha(G) \leq 3$, tout couplage de cardinal q , avec $q \leq (h + 2)/2$ est inclus dans un cycle élémentaire de G .

Démonstration : Soit S un ensemble de q arêtes 2 à 2 disjointes ; comme $\alpha(G) \leq 3$, il existe dans G trois chaînes ne contenant que les extrémités des arêtes de S et donc de longueur totale $\leq 2q - 3$. En appliquant le résultat de Lovász, une démonstration identique à II.5.7, montre que 3 chaînes de longueur totale ℓ sont incluses dans un cycle élémentaire d'un graphe h -connexe si $\ell \leq h + 1$. Donc ici si $2q - 3 \leq h + 1$ soit $q \leq (h+2)/2$ les 3 chaînes et donc S , sont incluses dans un cycle élémentaire de G .

(II.5.12) : Corollaire : La conjecture II.5.3. est prouvée pour $p = 0$
 $q \leq (h+2)/2$ et $\alpha(G) \leq 3$, soit par exemple $p = 0$ et $h = 6, q = 4; h = 7$
 $q = 4; h = 8, q = 5$.

Remarque : En rassemblant les résultats précédents et en étudiant directement le cas $h = 7, q = 5$, nous pouvons prouver la conjecture II.5.3 si $h \leq 7$.

II.6.- Cas orienté :

Dans ce paragraphe $G=(X,U)$ désigne un 1-graphe ; on note par $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$) le demi-degré extérieur (intérieur) de x .

$G = (X,U)$ admet un circuit hamiltonien si :

(II.6.1) : (Meyniel [M2]) : G est fortement connexe et pour toute paire de sommets non adjacents x et y ($(x,y) \notin U$ et $(y,x) \notin U$) on a : $d^+(x) + d^-(x) + d^+(y) + d^-(y) \geq 2n - 1$.

(II.6.2) : (Woodall [W2]) : pour tout couple de sommets x et y tels que $(x,y) \notin U$ on a : $d^+(x) + d^-(y) \geq n$.

(II.6.3) : (Ghouïla Hourï [G1]) : G est fortement connexe et pour tout sommet x on a $d^+(x) + d^-(x) \geq n$.

(II.6.4) : (énoncé par Nash Williams [N1]) : pour tout sommet x on a : $d^+(x) \geq n/2$ et $d^-(x) \geq n/2$.

Les théorèmes ci-dessus correspondent aux généralisations de II.1.1. et II.1.2. . En ce qui concerne l'existence de circuits (orientés) élémentaires

de longueur $\geq c$, on a les résultats suivants.

(II.6.5) : (Woodall[W2]) : Si $d^+(x) \geq c$ pour tout sommet x de G , alors G contient un circuit élémentaire de longueur $\geq c + 1$.

(II.6.6) : (Woodall[W2]) : Si $d^+(x) + d^-(y) \geq 2c - 1$, pour tout couple de sommets x, y tel que $(x, y) \notin U$; alors G contient un circuit élémentaire de longueur $\geq c + 1$.

(II.6.7) : (Ghouila-Houri [G1]) : Pour tout $c \geq 6$ il existe des 1-graphes G fortement 2-connexes, vérifiant $d^+(x) + d^-(x) \geq c$ pour tout sommet x de G et ne contenant pas de circuits de longueur ≥ 7 .

Les théorèmes ci-dessus et les résultats obtenus dans le cas non orienté avec G 2-connexe (II.2.10 et II.2.14) suggèrent les conjectures suivantes :

(II.6.8) Conjecture : Si $G = (X, U)$ est un 1-graphe à n sommets, fortement 2-connexe et si $d^+(x) + d^-(y) \geq c$, (avec $c \leq n$), pour tout couple de sommets x et y tels que : $(x, y) \notin U$, alors G contient un circuit élémentaire de longueur $\geq c$.

(II.6.9) Conjecture : Si $G = (X, U)$ est un 1-graphe à n sommets, fortement 2-connexe et si $d^+(x) \geq c$ pour tout sommet x de G , (avec $c \leq n$) alors G contient un circuit élémentaire de longueur $\geq 2c$.

(II.6.10) Remarque : Rappelons qu'un 1-graphe est dit fortement k -connexe ($k < |X|$), s'il est fortement connexe et s'il le reste après suppression de $k - 1$ sommets quelconques. Dans [B3] nous avons obtenu le théorème suivant, qui a été généralisé depuis par Las Vergnas [L1].

(II.6.11): Théorème : Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe à n sommets, dont les demi-degrés sont rangés de sorte que :

$$d^+_1 \leq d^+_2 \leq \dots \leq d^+_n \quad \text{et} \quad d^-_1 \leq d^-_2 \leq \dots \leq d^-_n. \quad \text{Soit } k \text{ un entier : } k < n.$$

$$\text{Si } d^+_j \geq j + k - 1 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n - 1 - d^-_{\lfloor (n-k+2)/2 \rfloor}$$

$$d^-_j \geq j + k - 1 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n - 1 - d^+_{\lfloor (n-k+2)/2 \rfloor}$$

alors G est fortement k -connexe.

Démonstration : La démonstration utilise le lemme suivant : Si G' est un 1-graphe, non fortement connexe, il existe dans G' deux composantes fortement connexes C_α et C_β (avec $C_\alpha \neq C_\beta$) telles que : $d^+(x) \leq |C_\alpha| - 1$ pour tout x de C_α et $d^-(y) \leq |C_\beta| - 1$ pour tout y de C_β . En effet, considérons le 1-graphe G^* associé à G' dont les sommets représentent les composantes fortement connexes de G' et où il y a un arc de c_i vers c_j dans G^* , s'il existe dans G' un arc entre C_i et C_j (c_i est le sommet représentant la composante C_i). Si G' n'est pas fortement connexe alors G^* est sans circuits et contient donc un sommet c_α de demi degré extérieur 0 et un sommet c_β de demi degré intérieur 0.

Nous allons montrer que tout ensemble S d'articulation de G (ensemble de sommets dont la suppression disconnecte fortement G) vérifie $|S| \geq k$. Soit G' le graphe obtenu en enlevant les sommets de S , G' n'est pas fortement connexe ; soient C_α et C_β les composantes fortement connexes de G' définies dans le lemme ci-dessus. Posons $j = \min(|C_\alpha|, |C_\beta|)$ et supposons par exemple que $j = |C_\alpha|$. On a $j \leq (n-s)/2$. Pour tout sommet x de C_α : $d^+(x) \leq j-1+s$. Comme $|C_\alpha| = j$ on en déduit $d^+_j \leq j-1+s$. Donc d'après l'hypothèse on a soit $s \geq k$; soit $j > n-1-d^-_{[(n-k+2)/2]}$. Supposons qu'on soit dans le deuxième cas. Les $n-s-j$ points de $X-S-C_\alpha$ ont un demi-degré intérieur $\leq n-1-j$, donc $d^-_{n-s-j} \leq n-1-j$ et donc $d^-_{n-s-j} < d^-_{[(n-k+2)/2]}$ soit $n-s-j \leq (n-k)/2$. Comme $j \leq (n-s)/2$ il vient $s \geq k$.

(II.6.12) Remarques : Le théorème II.6.11. est analogue à un résultat de Bondy [B6] qui a été généralisé par Las Vergnas [L1]. On obtient comme corollaires du théorème II.6.11. divers résultats (voir [B3]), en particulier que si G vérifie $|\{x : d^+(x) \leq j\}| \leq j-1$ et $|\{x : d^-(x) \leq j\}| \leq j-1$ pour $j \leq (n-1)/2$ (hypothèses de la conjecture de Nash Williams [N1, par exemple] concernant l'extension du théorème de Posa : II.1.3 au cas orienté), G est fortement 2-connexe.

(II.6.13) Définitions : Généralisant II.5 nous dirons qu'un 1-graphe $G = (X, U)$ est fortement q -arc hamiltonien, si pour tout système S de chemins élémentaires du 1-graphe complet symétrique construit sur X , 2 à 2 sommet-disjoints, de longueur totale q , le graphe $G' = (X, U \cup S)$ admet un circuit hamiltonien contenant S . Dans le cas où S est inclus dans U , on retrouve la notion de graphe q -arc hamiltonien introduite dans [B3]. Enfin G est dit fortement (p, q) hamiltonien, si le 1-graphe obtenu en supprimant r points de G , $0 \leq r \leq p$, est fortement q -arc hamiltonien.

(II.6.14) : Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe, à n sommets. Si pour tout couple de sommets x, y tel que $(x, y) \notin U$ on a : $d^+(x) + d^-(y) \geq n+p+q$ alors G est fortement (p, q) hamiltonien.

Démonstration : Nous allons montrer le théorème pour $p = 0$; le cas général s'en déduit en remarquant que si on enlève κ points de G , $0 \leq \kappa \leq p$, le 1-graphe obtenu G' a $n' = n - \kappa$ points et vérifie : pour tout couple de sommets x, y avec $(x, y) \notin U$ $d^+_{G'}(x) + d^-_{G'}(y) \geq n+p+q-2\kappa \geq n' + q$ et est bien fortement q -arc hamiltonien, si le théorème est démontré pour $p = 0$. Supposons donc $p = 0$ et nous allons montrer le théorème par induction sur q ; le théorème est vrai pour $q = 0$ d'après II.6.2. Supposons le vrai pour $q' < q$ et soit S un système de chemins élémentaires comme défini en II.6.13. Soit $\mu_0 = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ un chemin de ce système de longueur k ; soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ et soit H le 1-graphe obtenu à partir de $G' = (X, U \cup S)$ en supprimant A , en rajoutant un sommet auxiliaire a et un arc (x, a) si $x \in X - A$ avec (x, a_0) arc de G' et un arc (a, y) si $y \in X - A$, avec (a_k, y) arc de G' . H contient $n-k$ sommets. Si $x \neq a$ on a : $d^+_H(x) \geq d^+(x) - k$ et $d^-_H(x) \geq d^-(x) - k$. Enfin $d^+_H(a) \geq d^+(a_k) - k$ et $d^-_H(a) \geq d^-(a_0) - k$. Donc si x et y sont deux sommets de H , et si (x, y) n'est pas un arc de H , (x, y) n'est pas arc de G' si $x \neq a$ et $y \neq a$; si $x = a$ (a, y) n'est pas arc de H si (a_k, y) n'est pas arc de G' ; si $y = a$ (x, a) n'est pas arc de H si (x, a_0) n'est pas arc de G' . D'après l'hypothèse du théorème on a $d^+_H(x) + d^-_H(y) \geq n+q-2k$ pour tout couple de sommets x, y de H , avec (x, y) n'est pas un arc de H . H vérifie donc l'hypothèse du théorème avec $n' = n - k$ et $q' = q - k$; d'après l'hypothèse d'induction H admet un circuit hamiltonien contenant $S - \mu_0$ (de longueur $q' = n - k$) et donc G' admet un circuit hamiltonien contenant S .

(II.6.15) Corollaire [B3] : Soit $G = (X, U)$ un 1-graphe à n sommets. Si pour tout sommet x : $d^+(x) \geq (n+q)/2$ et $d^-(x) \geq (n+q)/2$ alors G est fortement q -arc hamiltonien.

(II.6.16) Remarque : Il n'est pas possible d'étendre de la même manière les théorèmes II.6.1 et II.6.3 ; comme l'a montré Ghouila-Houri [G1, p.324] : en effet il existe des 1-graphes G fortement 2-connexe, vérifiant $d^+(x) + d^-(x) \geq n+1$ et contenant des arcs n'appartenant à aucun circuit hamiltonien.

II.7. Hamiltonisme de G et $L(G)$

II.7.1. Définition : G étant un multigraphe, on appelle graphe représentatif des arêtes de G et on note $L(G)$ le graphe simple dont les sommets représentent les arêtes de G , deux sommets étant adjacents s'ils représentent des arêtes de G adjacentes.

II.7.2. Dans [B4] nous avons caractérisé avec J.C.Meyer les $L(G)$ lorsque G est un multigraphe (voir la démonstration en annexe de ce chapitre). Cette caractérisation a été obtenue indépendamment par Hemminger [H2]. Pour des caractérisations d'autres types de graphes représentatifs des arêtes d'un multigraphe voir l'article de Marczyk et Skupien [M1].

II.7.3. Définition : G étant un graphe simple, on appelle carré de G et on note G^2 , le graphe simple dont les sommets sont ceux de G et où deux sommets sont adjacents si leur distance dans G est ≤ 2 . Le problème de caractériser les graphes dont le carré est hamiltonien semble difficile. Neuman [N3] a caractérisé les arbres dont le carré est hamiltonien, Fleischner [F1] a prouvé que si G est 2-connexe, son carré est hamiltonien. Rosenstiehl [R1 ou R2] a prouvé que si G est un multigraphe connexe, il existe une permutation circulaire de ses arêtes telle que toute arête et son image dans la permutation y ont, soit une extrémité commune, soit une extrémité commune avec une même troisième : d'où :

II.7.4. (Rosenstiehl (voir [B5]) : Si G est un multigraphe connexe, $[L(G)]^2$ est hamiltonien.

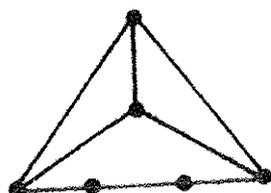
II.7.5. Remarque : La démonstration montre que $[L(G)]^2$ est 1-arête hamiltonien et aussi 1-hamiltonien. Dans [B5] nous avons prouvé avec Rosenstiehl que :

II.7.6. [B5] : Si G est un multigraphe connexe, alors $[L(G)]^2$ est pancyclique (admet des cycles élémentaires de toute longueur).

Démonstration : Nous renvoyons le lecteur à [B5].

II.7.7. Remarque : Le fait que $[L(G)]^2$ est hamiltonien a été trouvé indépendamment par Nebesky [N2] qui a aussi prouvé que $L(G^2)$ est hamiltonien.

(II.7.8) Dans la suite G désigne un graphe simple ; il est connu que si G est hamiltonien, alors $L(G)$ est hamiltonien (voir par exemple Sedlacek [S1]) Zamfirescu [Z1] a prouvé que si G est hamiltonien, alors $L(G)$ est 1-arête hamiltonien. Par contre Zamfirescu a exhibé des graphes 1-arête hamiltonien et tel que $L(G)$ ne soit pas 2 arête hamiltonien : par exemple G_{12}

 G_{12}

Nous nous proposons d'étudier la conjecture :

(II.7.9) Conjecture : Si G est k -hamiltonien, alors $L(G)$ est k -hamiltonien.

(II.7.10) Théorème : La conjecture est vraie pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Démonstration : Dire que $L(G)$ est k -hamiltonien revient à dire que pour tout ensemble F d'arêtes de G , avec $|F| \leq k$, le graphe $L(G')$ où $G' = (X, E-F)$ est hamiltonien. Nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 1 : Soit $G = (X, E)$ un graphe, F un ensemble d'arêtes de G , $G' = (X, E-F)$; $L(G')$ est hamiltonien si (et seulement si) il existe dans G un cycle simple C (les sommets peuvent être répétés mais pas les arêtes), ne contenant aucune arête de F ($|C \cap e| \leq 1$ pour tout e de F) et tel que toute arête de $E - F$ rencontre ce cycle en au moins un point ($|C \cap e| \geq 1$ pour tout e de $E - F$).

Démonstration : Soit $C = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$ le cycle simple défini dans le lemme 1. Répartissons l'arête e de $E-F-C$ en classe S_i si elle admet x_i comme extrémité et si elle n'a pas été classée dans $S_{i'}$, avec $i' < i$. Alors le cycle : $(S_1, \{x_1, x_2\}, \dots, S_i, \{x_i, x_{i+1}\}, \dots, S_p, \{x_p, x_1\})$ est un cycle hamiltonien de $L(G')$. On peut démontrer que la condition est nécessaire exactement comme dans Harary et Nash-Williams [H1, p.706].

Lemme 2 : Soit $G = (X, E)$ un graphe k -hamiltonien, F un ensemble d'arêtes de G , et soit $G' = (X, E-F)$. S'il existe dans G' un stable S rencontrant toutes les arêtes de F ($|S \cap e| \geq 1$ si $e \in F$), alors $L(G')$ est hamiltonien.

Démonstration : Choisissons un ensemble stable ayant la propriété ci-dessus, de cardinal minimum, alors $|S| \leq k$. Le graphe G obtenu en enlevant S admet un cycle hamiltonien, car G est k -hamiltonien. S rencontrant toute arête de F , C ne contient aucune arête de F . Toute arête de $E-F$ a au plus une extrémité dans S (car S stable) et donc au moins une extrémité dans $X-S$ soit dans C . Le lemme 2 résulte du lemme 1.

Lemme 3 : Soit C un cycle simple d'un graphe $G = (X, E)$ ne rencontrant aucune arête d'un ensemble F d'arêtes. Soit $e = \{x, y\}$ une arête de C . S'il existe un sommet z de X , avec $\{x, z\} \in E-F-C$ et $\{y, z\} \in E-F-C$; alors le cycle C' obtenu en supprimant dans C l'arête $\{x, y\}$ et en rajoutant les arêtes $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ est un cycle simple ne rencontrant aucune arête de $F \cup e$.

Démonstration du théorème : Soit $F = \{e_i\} \ 1 \leq i \leq k$ un ensemble de k arêtes de G , avec $0 \leq k \leq 3$. Nous allons montrer que dans chaque cas $L(G')$ où $G' = (X, E-F)$ est hamiltonien : nous indiquerons le lemme utilisé avec indication du cycle simple C pour le lemme 1, du stable S pour le lemme 2, du cycle simple C , de l'arête e , et du sommet z pour le lemme 3 : dans ce cas le cycle simple C' obtenu satisfait les hypothèses du lemme 1.

$k = 0$ (résultat classique) : lemme 1 avec C cycle hamiltonien de G

$k = 1$: lemme 2 avec S formé d'une extrémité de e_1 .

$k = 2$: - $e_1 \cap e_2 = \{x\}$: lemme 2 avec x .

- $e_1 \cap e_2 = \emptyset$; soit $e_1 = \{x_1, y_1\}$ et $e_2 = \{x_2, y_2\}$. Le graphe obtenu en enlevant le sommet x_1 de G admet un cycle hamiltonien C . Si $e_2 \notin C$: lemme 1 avec C . Soit $e_2 \in C$:

si $\{x_1, x_2\} \notin E$ (ou $\{x_1, y_2\} \notin E$) : lemme 2 avec $S = \{x_1, x_2\}$ (ou $S = \{x_1, y_2\}$) ;

si $\{x_1, x_2\} \in E$ et $\{x_1, y_2\} \in E$: lemme 3 avec C, e_2 , et x_1 .

$k = 3$: - $e_1 \cap e_2 \cap e_3 = \{x\}$: lemme 2 avec x .

- $e_1 \cap e_2 = \{x\}, e_1 \cap e_3 = \{y\}$: lemme 2 avec $\{x, y\}$

- $e_1 \cap e_2 = \{x\}, e_1 \cap e_3 = \emptyset, e_2 \cap e_3 = \emptyset$: raisonnement identique au cas $k = 2$ appliqué à $G-x$.

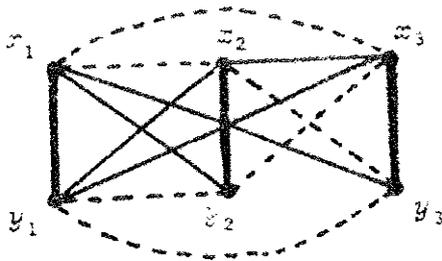
Les autres cas où au moins 2 arêtes s'intersectent se ramènent à ceux-là par réindexation des arêtes. Supposons donc :

$$\underline{e_i \cap e_j = \emptyset \text{ pour } 1 \leq i < j \leq 3 \text{ et posons } e_i = \{x_i, y_i\}}$$

Si $\{x_1, x_2\} \in E$ et $\{x_1, y_2\} \in E$: soit $G' = (X, E - e_1 - e_3)$; d'après le cas $k = 2$ $L(G')$ est hamiltonien, soit C le cycle simple de G associé ne contenant pas e_1 et e_3 et rencontrant toute arête de $E - e_1 - e_3$; on conclut d'après le lemme 3 avec C, e_2, x_1 . On traite de manière analogue (avec réindexation) les cas où $\{x_2, x_3\} \in E$ et $\{x_2, y_j\} \in E$ ainsi que $\{x_i, y_j\} \in E$ et $\{x_j, y_j\} \in E$.

Nous supposons dans la suite de tel cas exclus. Quitte à réindexer les sommets nous supposons que $\{x_1, x_2\} \notin E$ et $\{x_1, x_3\} \notin E$.

Si $\{x_2, x_3\} \notin E$: lemme 2 avec $\{x_1, x_2, x_3\}$. Donc supposons $\{x_2, x_3\} \in E$ ce qui entraîne que $\{x_2, y_3\} \notin E$ et $\{x_3, y_2\} \notin E$.



Si $\{x_1, y_3\} \notin E$ (resp. $\{x_1, y_2\} \notin E$) : lemme 2 avec $\{x_1, x_2, y_3\}$ (resp. $\{x_1, x_3, y_2\}$). Supposons donc $\{x_1, y_3\} \in E$ et $\{x_1, y_2\} \in E$, ce qui entraîne $\{y_1, y_2\} \notin E$ et $\{y_1, y_3\} \notin E$.

Si $\{y_1, x_2\} \notin E$ (resp. $\{y_1, x_3\} \notin E$) : lemme 2 avec $\{y_1, x_2, y_3\}$ (resp. $\{y_1, y_2, x_3\}$). Supposons donc $\{y_1, x_2\} \in E$ et $\{y_1, x_3\} \in E$.

Mais alors $G - \{x_1, x_2, x_3\}$ étant hamiltonien il existe dans G un cycle ne contenant pas e_1, e_2, e_3 et rencontrant toute arête de $E - F$ sauf $x_2 x_3$. Le cycle $C' = C \cup (y_1, x_2, x_3, y_1)$ satisfait aux hypothèses du lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

- B1. C.BERGE : Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970 (édition anglaise, North Holland, Amsterdam, 1973).
- B2. J.C.BERMOND : Arbres maximaux ayant au plus \bar{n} sommets pendants, C.R.A.S, Ser A, 274, 1972, 1878-1881.
- B3. J.C.BERMOND : Graphes orientés fortement k-connexes et graphes k-arc hamiltoniens, C.R.A.S, Ser A, 1970, 141-144.
- B4. J.C.BERMOND et J.C.MEYER : Graphe représentatif des arêtes d'un multigraphe, J.Math. pures et applic., 52, 1973, 299-308.
- B5. J.C.BERMOND et P.ROSENSTIEHL : Pancyclisme du carré du graphe aux arêtes d'un graphe, Cahiers du C.E.R.O, Bruxelles, 15, 1973, 285-286.
- B6. J.A. BONDY : Properties of graphs with constraints on degrees, Studia Sci. Math. Hung. 4, 1969, 473-475.
- B7. J.A. BONDY : Large cycles in graphs, Discrete Math., 1, 1972, 121-132.
- B8. J.A. BONDY : Variations on the hamiltonian theme, Canad. Math. Bull., 15, 1972, 57-62.
- B9. J.A. BONDY et V. CHVÁTAL : A method in graph theory à paraître.
- C1. G. CHARTRAND, S.F. KAPOOR, D.R. LICK : n hamiltonian graphs, J. Comb. Theory, 9, 1970, 308-312.
- C2. V. CHVÁTAL : On hamilton ideals, J.Comb. Theory, B12, 1972, 163-168.
- C3. V. CHVÁTAL et P. ERDŐS : A note on hamilton circuits, Discrete Math. 2 1972, 111-113.
- D1. G.A.DIRAC : Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math Soc., 3, 1952, 69-81.
- E1. P.ERDŐS : Remarks on a paper of Posa, Magyar Tud Akad Mat. Kutató Int. Közl, 7, 1962, 227-228.
- F1. H.FLEISCHNER : The square of every two-connected graph is hamiltonian, J. Comb. Theory, 16B, 1974, 29-34.

- C1. A. GHOUILA-HOURI : Flots et tensions dans un graphe, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup, 81, 1964, 317-327.
- H1. F. HARARY et C. St. J.A. NASH-WILLIAMS : On eulerian and hamiltonian graphs and line graphs, Canad Math Bull, 8, 1965, 701-709.
- H2. R.L. HEMMINGER : Characterization of the line graph of a multigraph, à paraître Proc. London Math. Soc.
- J1. J.L. JOLIVET : Thèse Paris VI à paraître.
- J2. J.L. JOLIVET : On hamiltonian pseudo-cycles à paraître dans Proc. Conf. Boca-Raton, 1974.
- K1. H.V. KRONK : Variation on a theorem of Posa, Many facets in Graph Theory, (ed G. Chartrand, S.F. Kapoor), Lect. Notes. Math 110, Springer Verlag, 1969, 193-197.
- L1. M. LAS VERGNAS : Problèmes de couplage et problèmes hamiltoniens en théorie des graphes, Thèse, Paris VI, 1972.
- L2. M. LAS VERGNAS : Sur une propriété des arbres maximaux dans un graphe, C.R.A.S. Ser A, 272, 1971, 1297-1300.
- L3. D.R. LICK : n hamiltonian connected graphs, Duke Math. J. 37, 1970, 387-392.
- L4. L. LOVÁSZ : Problem 5, Period. Math. Hung., 4, 1974, 82.
- M1. A. MARCZYK et Z. SKUPHEN : Characterizing line graphs of general graphs, Bull. Acad. Pol. Sci, 22, 1974, 235-241.
- M2. H. MEYNIEL : Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté, J. Comb. Theory, 14B, 1973, 137-147.
- N1. C. St. J.A. NASH-WILLIAMS : Hamilton circuits in graphs and digraphs, Many facets in graph theory, (ed. G. Chartrand, S.F. Kapoor) Lect. Notes Math. 110, Springer Verlag, 1969, 237-243.
- N2. L. NEBESKY : On the line graph of the square and the square of the line graph of a connected graph, Časopis Pěst Math, 98, 1973, 285-287.
- N3. F. NEUMAN : On a certain ordering of the vertices of a tree, Časopis Pěst Math. 89 (1964), 323-339.

- O1. O. ORE : Arc coverings of graphs, Ann Math Pura Appl. 55, 1961, 315-321.
- O2. O. ORE : Hamilton connected graphs, J. Math. Pures et appl. 42, 1963, 21-27.
- P1. L. POSA : A theorem concerning hamilton lines, Magyar tud. Akad. Mat Kulato Int. Közl, 7, 1962, 225-226.
- P2. L. POSA : On the circuits of finite graphs, Magyar tud. Akad. Mat. Kutato Int. Közl, 1963, 355-361.
- R1. P. ROSENSTIEHL : Labyrinthologie mathematique, Math Sci.hum, 33 1971, 5-32.
- R2. P. ROSENSTIEHL : Les mots de labyrinthe, cahiers du C.E.R.O, Bruxelles, 15, 1973, 245-252.
- S1. J.SEDLACEK : Some properties of interchange graphs, Theory of graphs and its applications, (ed. M. Fiedler), Academic Press, 1964, 145-150.
- S2. Z. SKUPIEN : Hamiltonian circuits and path covering of vertices in graphs, a paraître Colloq. Math.
- S3. Z. SKUPIEN et A.P. WOJDA : On highly hamiltonian graphs, Bull. Acad. Pol. Sci, 22, 1974, 463-471.
- W1. A.P. WOJDA : On highly hamiltonian graphs, à paraître
- W2. D.R. WOODALL : Sufficient conditions for circuits in graphs, Proc. London Math Soc 24, 1972, 739-755.
- Z1. T. ZAMFIRESCU : On k-path hamiltonian graphs and line graphs, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 46, 1971, 385-389.

HYPERGRAPHE DES CIRCUITS D'UN GRAPHE.

III.1. (Annexe B)

Les résultats de ce paragraphe sont dans l'article donné en Annexe B : "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", *Math. Sci. Hum.* 37, 1972, 5-25.

III.1.1. Le problème considéré intervient à la fois en théorie des comparaisons par paires (introduit par P. Slater) et en théorie des tournois (introduit par P. Erdős et J. W. Moon) : ils'agit de déterminer dans un tournoi et plus généralement dans un 1-graphe antisymétrique, le nombre minimum $\tau(G)^*$ d'arcs qu'il faut supprimer (ou dont il faut changer l'orientation) pour obtenir un 1-graphe sans circuits. Considérons l'hypergraphe des circuits de G, hypergraphe dont les sommets représentent les arêtes de G et dont les arêtes représentent les circuits (élémentaires) de G; le problème consiste alors à déterminer le nombre de transversalité de cet hypergraphe (rappelons que le nombre de transversalité d'un hypergraphe est la cardinalité minimum d'un ensemble de sommets qui rencontre toutes les arêtes de l'hypergraphe). Nous nous intéressons surtout à la détermination de $f(n)$ où :

$f(n) = \max \tau(G)$, le maximum étant pris sur les graphes antisymétriques G à n sommets (on peut se limiter aux tournois à n sommets). Dans l'article donné en Annexe B, nous faisons une synthèse des résultats connus en 1972 sur $f(n)$ et donnons de nouveaux majorants et minorants de $f(n)$ ainsi que les valeurs de $f(10)$ et de $f(11)$. En particulier nous montrons :

III.1.2 : $f(n) \geq \pi(n)$ où $\pi(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$ est le nombre maximum de cycles deux à deux arêtes-disjoints de K_n .

III.1.3 : $f(10) = 15$; $f(11) = 20$.

* $\tau(G)$ est le nombre minimum d'arcs à supprimer (ou à changer d'orientation) pour obtenir un 1-graphe sans circuits.

III.2. (Annexe C)

Les résultats de ce paragraphe sont dans l'article donné en Annexe C : "The circuit hypergraph of a tournament" Proc. International Colloquium on finite and infinite sets Keszthely, Juin 1973, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, 10, 165-180.

Dans cet article nous donnons divers résultats sur $\tau(G)$, lorsque G est le produit lexicographique de deux 1-graphes (ou une généralisation de ce produit). Nous en déduisons de nouveaux minorants pour $f(n)$ et en particulier nous résolvons dans cet article presque complètement une conjecture de A.Kotzig ; depuis la rédaction de cet article nous avons achevé de prouver cette conjecture, d'où :

III.2.1 Théorème : Si $n \geq 10$, $f(n) > \pi(n)$ où $\pi(n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$.

Démonstration : Dans l'article (Annexe C), nous avons montré en utilisant des méthodes de composition avec les produits lexicographiques et leurs généralisations (méthodes analogues à celles utilisées au chapitre I.4.), que pour prouver le théorème, il suffit de vérifier que pour $10 \leq n \leq 29$, $f(n) > \pi(n)$, avec de plus si $n \equiv 4 \pmod{6}$ $f(n) > \pi(n) + 1$ [voir proposition 10 et corollaire, Annexe C 11-12]. Dans l'article, nous avons fait cette vérification pour $10 \leq n \leq 19$ et $26 \leq n \leq 29$ (pour $13 \leq n \leq 19$, ceci a été fait à l'aide d'un programme pour ordinateur écrit par Y. Kodratoff). Depuis nous avons fini la vérification en utilisant un programme différent qui donne seulement un encadrement de $\tau(G)$. [Les méthodes utilisées et résultat font l'objet d'un article écrit avec Y. Kodratoff : "Une heuristique pour le calcul de l'indice de transitivité d'un tournoi", à paraître]. Nous donnons ici les tournois utilisés et les résultats obtenus.

Désignons par $Q(n)$ le tournoi à n sommets des résidus quadratiques : le sommet i est relié au sommet j par un arc de i vers j , si et seulement si $j-i$ est congru à un carré modulo n . Un tel tournoi existe si $n = p^\alpha$ où p est un nombre premier congru à 3 modulo 4. Dans un tel tournoi tous les sommets (et paires de sommets) jouent le même rôle (c.a.d. les tournois obtenus en enlevant 1 (resp. 2) sommets sont isomorphes). Soit $Q(23)$ et soient T_{22} (resp. T_{21}) le tournoi obtenu en enlevant 1 (resp. 2) sommets de $Q(23)$. Nous avons obtenu : $69 \leq \tau(T_{21}) \leq 71$; d'où $79 \leq \tau(T_{22}) \leq 81$ et $90 \leq \tau(Q(23)) \leq 92$. Donc $f(22) \geq 79 > 74 = \pi(22)+1$ et $f(23) \geq 90 > 84 = \pi(23)$.

Dans $Q(43)$, considérons le sous tournoi à 21 sommets, engendré par les sommets reliés au sommet 1 par un arc d'extrémité terminale 1. Soit T_{21} ce tournoi, nous avons obtenu $\tau(T_{21}) = 72$; donc $f(21) \geq 72 > 70 = \pi(21)$.

Enfin pour $n = 25$, nous avons utilisé le tournoi suivant du à A.Astié [A1], ayant un groupe d'automorphisme de rang maximum. L'ensemble des sommets est formé des couples (i,j) avec $0 \leq i \leq 4$; $0 \leq j \leq 4$; le sommet (i,j) est relié au sommet (i',j') par un arc d'extrémité initiale (i,j) si et seulement si $(i-i',j-j')$ appartient à S , où $S = \{ (0,1), (0,2), (1,0), (2,0), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) \}$ Soit T_{25} ce tournoi; tous les sommets jouent le même rôle; soit T_{24} le tournoi obtenu en enlevant un sommet quelconque de T_{25} . Nous avons obtenu : $91 \leq \tau(T_{24}) \leq 103$ et donc $103 \leq \tau(T_{25}) \leq 115$. Donc $f(25) \geq 103 > 100 = \pi(25)$ et $f(24) \geq 91 > 88 = \pi(24)$. (résultat meilleur que le corollaire du théorème 8 ,Annexe C, p. C 12).

III.2.2. Remarque : Le théorème III.2.1. dit que pour $n \geq 10$, il existe un tournoi dont l'hypergraphe des circuits H vérifie $\tau(H) > \nu(H)$. Ce résultat est à rapprocher du résultat suivant du a , Lucchessi et D.H.Younger [L1] : l'hypergraphe H' des cocircuits d'un 1-graphe vérifie $\tau(H') = \nu(H')$. (Le problème de l'égalité ou non de $\tau(H)$ et $\nu(H)$ pour l'hypergraphe des circuits d'un tournoi, auquel répond le théorème III.2.1., a été aussi posé par D.H.Younger).

III.3. Nouveaux résultats .

-J.Hardouin Duparc [H1] a prouvé que :

III.3.1. (J.Hardouin Duparc): $f(12) = 22$; $f(13) = 28$; $31 \leq f(14) \leq 32$;
 $38 \leq f(15) \leq 39$; $f(18) \leq 58$; $f(19) \leq 67$; $f(20) \leq 73$; $f(21) \leq 83$; $f(22) \leq 91$;
 $f(23) \leq 102$. Il a aussi déterminé la structure des tournois d' indice $f(n)$ pour $8 \leq n \leq 11$.

C.Thomassen [T1] a prouvé la conjecture 2 de l'article donné en Annexe C p. C5 ou 169, (conjecture donnée pour les tournois dans l'article donné en annexe B p.B12 ou 16) ;

III.3.2. (C.Thomassen) : $\tau(G \times H) = p\tau(H) + q^2\tau(G)$ où p est le nombre de sommets de G et q celui de H .

Avec III.3.2. on obtient au lieu des théorèmes 1,3,4,6,8, de l'annexe C, de nouveaux théorèmes en remplaçant $\pi(p)$ par $f(p)$: par exemple les théorèmes 1 et 4 s'écrivent:

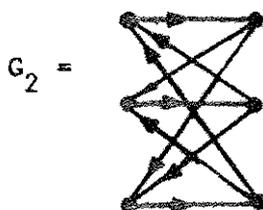
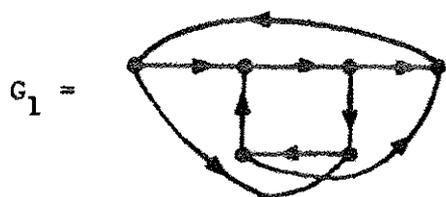
$$\text{III.3.3. : } f(pq) \geq pf(q) + q^2f(p)$$

$$\text{III.3.4. : } f(pq+1) \geq pf(q+1) + q^2f(p).$$

Exemples: Avec $p = 11$ et $q = 2$ on obtient $f(22) \geq 80$ et $f(23) \geq 91$ (résultats meilleurs que ceux obtenus en III.2.1.). Avec $p = 13$ (en utilisant $f(13) = 28$, voir III.3.1.) et $q = 2$ on obtient $f(26) \geq 112$ et $f(27) \geq 125$ (résultats meilleurs que ceux donnés dans l'article en Annexe C p.C11 et C12).

III.3.5. : C.Thomassen [T2] a montré que pour $n \geq 5$, $f(3n) \geq 3f(n) + n^2 + 1$, ce qui entraîne d'après le tableau p. C7 (ou 171) Annexe C que $f(3n) > \pi(3n)$ pour $n \geq 5$ et $n \equiv 0,1,2,3 \pmod{6}$. Un raisonnement analogue à celui de C. Thomassen montre que pour $n \geq 5$, $f(3n+1) \geq 3f(n+1) + n^2 + 1$ et donc d'après le tableau p C10 (ou 174) Annexe C on a $f(3n+1) > \pi(3n+1)$ pour $n \geq 5$ et $n \equiv 0,1,2,5 \pmod{6}$. Ces résultats permettent de prouver III.2.1. pour $n = 16,18,19,21,22,24,25, \dots$.

III.3.6. : F.Sterboul [S1] a montré que la conjecture 3 ,Annexe C, p C5 (ou 169) était fautive avec le contre exemple suivant $q = 2$ et $G = G_1$ (voir figure). Nous avons auparavant montré que $v(G \times H) = q^2 v(G) + pv(H)$ pour $H = \downarrow$ et $G = G_2$ (voir figure).



Dans le tableau suivant nous rassemblons les résultats obtenus en III.2 et III.3 concernant $f(n)$ pour $12 \leq n \leq 25$; ce tableau remplace le 2^{ème} tableau de l'Annexe B ,p. B19(ou 23). Pour $n \leq 11$ voir les valeurs de $f(n)$ dans l'annexe B.

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\pi(n)$	20	26	28	35	37	45	48	57	60	70	73	84	88	100
minorant de $f(n)$	22	28	31	36	40	47	55	64	64	72	80	91	91	103
majorant de $f(n)$	22	28	32	39	44	52	58	67	73	83	91	102	110	122

BIBLIOGRAPHIE

- A1. A.ASTIE : Communication personnelle 5 / 1974.
- H1. J. HARDOUIN DUPARC : Lettres 9 / 1974 et 11 / 1974 et séminaire à l'université de Bordeaux I .
- L1. LUCHESSI et D.H.YOUNGER : Minimax theorem for directed graphs, à paraître.
- S1 F. STERBOUL : Communication personnelle 12 / 1974 .
- T1 C.THOMASSEN : Transversals of circuits in the lexicographic product of directed graphs, à paraître Math. Sci. Hum.
- T2 C.THOMASSEN : On a tournament problem of D.H.Younger, manuscript, et lettres 11 / 1974 et 1 / 1975.

NOMBRES DE RAMSEY POUR LES GRAPHES ORIENTES

Les résultats de ce paragraphe sont parus dans l'article donné en Annexe D : "Some Ramsey numbers for directed graphs" , *Discrete Math.* 9 , 1974 , 313-321.

Etant donnés k 1-graphes G_1, G_2, \dots, G_k , le nombre de Ramsey généralisé $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ est le plus petit entier n tel que pour toute partition (U_1, U_2, \dots, U_k) des arcs de K_n^* , il existe un entier i , tel que le graphe partiel engendré par U_i contienne G_i comme sous graphe. Nous prouvons essentiellement les deux théorèmes suivants :

Théorème : Soient G_i ($1 \leq i \leq k$) des 1-graphes, $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ existe si et seulement si au plus un G_i contient un circuit. (tous les graphes, sauf peut-être un doivent être sans circuit).

Théorème : Soit G un 1-graphe hamiltonien à p sommets et soit \vec{P}_{n_i} le chemin de longueur n_i * alors : $R(\vec{P}_{n_1}, \vec{P}_{n_2}, \dots, \vec{P}_{n_{k-1}}, G) = n_1 n_2 \dots n_{k-1} (p-1) + 1$.

* Remarque : dans le chap. I on note par P_{n_i} le chemin à n_i sommets (de longueur $n_i - 1$).

CHAPITRE V

HYPERGRAPHES r-parti h-complet.V.1. Isomorphisme des hypergraphes h-parti complet.

V.1.1. Définitions : On appelle hypergraphe h-parti complet et on note K_{n_1, \dots, n_h}^h , un hypergraphe simple formé en considérant h ensembles X_k ($1 \leq k \leq h$), deux à deux disjoints, avec $|X_k| = n_k$; les sommets de K_{n_1, \dots, n_h}^h sont les éléments de $X = \cup X_k$ et les arêtes les parties E_i de X vérifiant $|E_i| = h$ et $|E_i \cap X_k| = 1$ pour tout k. Soient $H = (E_i / i \in M)$ et $H' = (F_i / i \in M)$ deux hypergraphes notés par leur famille d'arêtes ; on dit que H et H' sont isomorphes et on note $H \cong H'$ s'il existe une bijection de $X = \cup E_i$ sur $Y = \cup F_i$ qui envoie biunivoquement la famille des arêtes de H sur celle de H'. On dit que H et H' sont fortement isomorphes et on note $H \cong H'$ s'il existe une bijection f de X sur Y telle que $f(E_i) = F_i$ pour tout i de M (cette bijection préserve l'indice des arêtes).

Nous nous proposons de donner une condition suffisante pour qu'un hypergraphe soit fortement isomorphe à K_{n_1, \dots, n_h}^h . Ce théorème est une conséquence d'un résultat plus fort concernant les hypergraphes dont les arêtes sont les bases d'un matroïde, établi par W.H. Cunningham [C3, C4], C.A. Holzmann, P.G. Norton et M.D. Tobey [H1], et S.B. Maurer [M1]. Nous donnons ici une preuve directe indépendante du résultat ci-dessus, et suivant les idées développées dans [B1] et [F1]. Pour d'autres résultats sur les hypergraphes fortement isomorphes voir [B2] et [F2].

V.1.2. Théorème : Soit $H = (E_i / i \in M)$ un hypergraphe isomorphe à K_{n_1, \dots, n_h}^h et soit α_1 le nombre des n_i égaux à 1. Supposons que :

$$(1) \quad \min\{n_i \mid n_i > 2\} > \alpha_1 + 2.$$

Soit $H' = (F_i / i \in M)$ un hypergraphe vérifiant : (2) $|E_i \cap E_j| = |F_i \cap F_j|$ pour tous i, j de M.

Alors H' est fortement isomorphe à H.

Lemme 1 : Soient H et H' deux hypergraphes vérifiant les hypothèses du théorème.

Soient E_{i_1} et E_{i_2} deux arêtes de H , telles que si $A = E_{i_1} \cap E_{i_2}$, $|A| = h-1$. Soit

$B = F_{i_1} \cap F_{i_2}$. Alors on a : (3) $E_i \supset A \Rightarrow F_i \supset B$.

Démonstration : Pour la commodité de l'écriture posons $E_{i_1} = E_1 = A+x_1$; $E_{i_2} = E_2 = A+x_2$,

avec $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_1$. Donc $A \cap X_1 = \emptyset$ et $|A \cap X_k| = 1$ pour $2 \leq k \leq h$. Soit

$F_1 = B+y_1$ et $F_2 = B+y_2$. On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe

$E_3 \supset A$ avec $F_3 \not\supset B$. Posons $E_3 = A+x_3$ avec $x_3 \in X_1$.

Soit $I_0 = \{ i : i > 2 \text{ et } E_i \supset A \}$

On a $|I_0| = |X_1| - 2$ et comme $|X_1| \geq 3$ (X_1 contient x_1, x_2, x_3) on a d'après (1) :

$|X_1| > \alpha_1 + 2$ d'où $|I_0| > \alpha_1$.

Nous allons montrer que $|I_0| \leq \alpha_1$, d'où la contradiction.

- D'abord montrons que si $i \in I_0$, $F_i \not\supset B$. En effet si $i \in I_0$, d'après (2) :

$|F_i \cap F_1| = |E_i \cap E_1| = h-1$ et $|F_i \cap F_2| = |E_i \cap E_2| = h-1$. Comme $F_3 \not\supset B$,

$F_3 = B - b_3 + y_1 + y_2$ avec $b_3 \in B$. Supposons qu'il existe un indice i de I_0 tel que

$F_i \supset B$; $|F_i \cap F_1| = h-1$ entraîne que $F_i \not\supset y_1$; de même $F_i \not\supset y_2$ donc :

$|F_i \cap F_3| = h-2$ en contradiction avec $|F_i \cap F_3| = |E_i \cap E_3| = h-1$ d'après (2).

Donc $F_i \not\supset B$ pour tout i de I_0 et $F_i = B - b_i + y_1 + y_2$ avec $b_i \in B$.

-D'après la définition de α_1 , il existe une partie A' , vérifiant $|A'| = h-1$,

$A' \cap X_1 = \emptyset$ et $|A' \cap X_k| = 1$ pour $2 \leq k \leq h$ et telle que $|A' \cap A| = \alpha_1$. Soit E'_1

l'arête de H définie par $E'_1 = A' + x_1$. On a : $|E'_1 \cap E_1| = \alpha_1 + 1$ et $|E'_1 \cap E_i| = \alpha_1$

pour $i = 2$ et $i \in I_0$. Si $i \in I_0$, alors $b_i \in F'_1$: en effet s'il existe un indice

i de I_0 avec $b_i \notin F'_1$, comme $F_i + b_i \supset F_1$ il vient en utilisant (2) :

$\alpha_1 = |F'_1 \cap F_i| = |F'_1 \cap (F_i + b_i)| \geq |F'_1 \cap F_1| = \alpha_1 + 1$ ce qui est impossible.

- $y_1 \in F'_1$: sinon si $y_1 \notin F'_1$, comme $F_1 - y_1 \subset F_2$ on aurait :

$\alpha_1 + 1 = |F'_1 \cap F_1| = |F'_1 \cap (F_1 - y_1)| \leq |F'_1 \cap F_2| = \alpha_1$ impossible.

- Comme $y_1 \in F'_1$ et $y_1 \notin B$: $|F'_1 \cap B| = \alpha_1$. Or $F'_1 \cap B$ contient les b_i pour $i \in I_0$

donc $|F'_1 \cap B| \geq |I_0|$, soit $|I_0| \leq \alpha_1$.

Lemme 2 : Soient H et H' deux hypergraphes vérifiant les hypothèses du théorème :

alors $|\bigcup_{i \in M} F_i| = |\bigcup_{i \in M} E_i| = \alpha_1$.

Démonstration : Soit $C = \bigcup_{i \in M} E_i$, d'après la définition de α_1 , $|C| = \alpha_1$ et sauf le cas trivial où H est réduit à une arête, il existe deux arêtes E_{i_1} et E_{i_2} telles $C = E_{i_1} \cap E_{i_2}$. Supposons pour la commodité d'écriture $E_{i_1} = E_1$ et $E_{i_2} = E_2$; soit $C = E_1 \cap E_2$. Soit $D = F_1 \cap F_2$; d'après (2) $|D| = \alpha_1$. Supposons que $|\bigcup_{i \in M} F_i| \neq \alpha_1$ comme $|F_1 \cap F_2| = \alpha_1$ on a $|\bigcup_{i \in M} F_i| < \alpha_1$ et $\bigcup_{i \in M} F_i \neq D$.

Parmi les arêtes de F_1 ne contenant pas D, soit F_3 une arête telle que :

$|F_3 \cap F_1| + |F_3 \cap F_2|$ soit maximum. Posons $|F_3 \cap D| = \alpha < \alpha_1$. Nous allons montrer que $E_3 \not\subset E_1 \cup E_2$: en effet supposons que $E_3 \subset E_1 \cup E_2$, alors :

$$|E_3 \cap E_1| + |E_3 \cap E_2| = h + \alpha_1. \text{ Or } |F_3| = |F_3 \cap F_1| + |F_3 \cap F_2| - |F_3 \cap D| \\ = |E_3 \cap E_1| + |E_3 \cap E_2| - \alpha ; \text{ soit :}$$

$h = |F_3| = h + \alpha_1 - \alpha > h$, ce qui est impossible. Il existe donc x_3 avec $x_3 \in E_3$

et $x_3 \notin E_1 \cup E_2$. Posons $A = E_3 - x_3$ et $E'_1 = A + x_1$ et $E'_2 = A + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Si on pose $B = F'_1 \cap F'_2$ le lemme 1 appliqué avec E'_1 et E'_2 donne $B \subset F_3$.

Posons $F_3 = B + y_3$ et $F'_1 = B + y_1$; d'après (2) $|F'_1 \cap F_1| = |F_3 \cap F_1| + 1$;

$$|F'_1 \cap F_2| = |F_3 \cap F_2| ; |F'_2 \cap F_1| = |F_3 \cap F_1| \text{ et } |F'_2 \cap F_2| = |F_3 \cap F_2| + 1.$$

$y_3 \notin F_2$: en effet supposons $y_3 \in F_2$, comme $y_3 \notin F'_2$ (car $F'_2 \neq F_3$) on en déduit $|F'_2 \cap F_2| \leq |F_3 \cap F_2|$ ce qui est impossible.

$y_1 \notin F_2$: sinon de $F'_1 = F_3 - y_3 + y_1$ on tire $|F'_1 \cap F_2| = |F_3 \cap F_2| + 1$, ce qui est impossible. Donc $y_1 \notin D$ et comme $F_3 \not\subset D$, $F'_1 \not\subset D$. Mais

$|F'_1 \cap F_1| + |F'_1 \cap F_2| = |F_3 \cap F_1| + |F_3 \cap F_2| + 1$ et on aboutit à une contradiction avec la maximalité de $|F_3 \cap F_1| + |F_3 \cap F_2|$.

Démonstration du théorème : Nous allons exhiber la bijection f qui va réaliser l'isomorphisme fort. D'après le lemme 2 nous pouvons définir une bijection f_1 de $C = \bigcup_{i \in M} E_i$ sur $D = \bigcup_{i \in M} F_i$. Soit $x \in X - C$, il existe deux arêtes qu'on appelle E_1 et E_2 telles que $E_1 \cap E_2 = C + x$. On a $F_1 \cap F_2 \supset D$ et $|F_1 \cap F_2| = \alpha_1 + 1$

(d'après (2)) ; soit donc y défini par $y = \{F_1 \cap F_2\} - D$. Nous allons montrer que :

(4) : si $x \in E_1$ alors $y \in F_1$: en effet supposons qu'il existe E_3 avec $x \in E_3$ et $y \notin F_3$. Soit x' un point appartenant au même ensemble X_k que x et $x' \neq x$ (un tel x' existe car $x \notin C$) et soit $E_3' = E_3 - x + x'$. D'après (2) :

$|F_3' \cap F_1| = |F_3 \cap F_1| - 1$ et $|F_3' \cap F_2| = |F_3 \cap F_2| - 1$; soit $y_1 \in F_3 \cap F_1$ et $y_1 \notin F_3'$ et soit $y_2 \in F_3 \cap F_2$ et $y_2 \notin F_3'$. Comme $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = D$ et que $D \subset F_3'$, $y_1 \neq y_2$ et donc $|F_3 \cap F_3'| \leq h - 2$ contrairement à $|F_3 \cap F_3'| = |E_3 \cap E_3'| = h - 1$ d'après (2).

On peut donc définir une application f_2 de $X - C$ sur $Y - D$ par $f_2(x) = y$. Soit f l'application définie par f_1 sur C et par f_2 sur $X - C$.

f est injective : en effet f_1 est injective ; il suffit de montrer que f_2 est injective.

Soient x et x' deux points de $X - C$; il existe deux arêtes E_x et $E_{x'}$, telles que : $E_x \cap E_{x'} = C$; $x \in E_x$; $x' \in E_{x'}$. D'après (4) $f(x) \in F_x - D$ et $f(x') \in F_{x'} - D$. Or $|F_x \cap F_{x'}| = |E_x \cap E_{x'}| = |C| = |D|$ et $F_x \cap F_{x'} \supset D$, donc $F_x \cap F_{x'} = D$ et donc $f(x) \neq f(x')$.

f est bijective : soit $y \in Y = \cup F_i$ et $y \notin f(\cup E_i) = f(X)$. y appartient à au moins un F_i , mais ce F_i contient déjà les h éléments de $f(E_i)$ d'après (4). On aurait $|F_i| > h$, contrairement à $|F_i| = |E_i| = h$ d'après (2).

Enfin $F_i \supset f(E_i)$ et $|F_i| = |E_i| = |f(E_i)|$, donc $F_i = f(E_i)$ et f est bien un isomorphisme fort. C.Q.F.D.

V.1.3. Remarques : Les lemmes 1 et 2 ne servent que si $\alpha_1 > 0$; si $\alpha_1 = 0$ on retrouve un résultat de C. Berge [B1].

Le théorème V.1.2. est le meilleur possible en ce sens que pour tout α_1 et tout $h > \alpha_1$, il existe un hypergraphe H isomorphe à K_{n_1, \dots, n_h}^h ne vérifiant pas (1) et un hypergraphe H' vérifiant (2) et non fortement isomorphe à H .

Si $h = \alpha_1 + 1$ il suffit de considérer $H_0 = K_{1, \dots, 1, \alpha_1+2}^{\alpha_1+1}$, avec donc $n_k = 1$ pour $1 \leq k \leq h-1 (= \alpha_1)$ et $n_h = \alpha_1 + 2$; et $H_0' = K_{\alpha_1+2}^{\alpha_1+1}$, hypergraphe formé des parties

à α_1+1 éléments d'un ensemble à α_1+2 éléments. On a bien $|F_i \cap F_j| = h - 1 = |E_i \cap E_j|$ or H_0' n'est pas isomorphe à H_0 .

Dans le cas général, $h > \alpha_1 + 1$, soit $H = (E_i / i \in M)$ avec $H \approx K_{n_1, \dots, n_h}^h$ où $n_k = 1$ pour $1 \leq k \leq \alpha_1$ et $n_{\alpha_1+1} = \alpha_1 + 2$ et n_k est quelconque pour $k \geq \alpha_1 + 2$. Soit $X_0 = \bigcup_{k \leq \alpha_1+1} X_k$ et $X_1 = X - X_0$. Le sous hypergraphe simple de H construit sur X_0 en ne gardant que les arêtes distinctes est isomorphe à H_0 ; soit E_{i_0} l'arête associée à $E_i \cap X_0$. On définit un hypergraphe $H' = (F_i / i \in M)$ construit sur $Y_0 \cup Y_1$ avec $|Y_0| = \alpha_1 + 2$ et $|Y_1| = |X_1|$ de la manière suivante : à l'arête E_i de H on associe l'arête F_i de H' : $F_i = F_{i_0} \cup F_{i_1}$ où F_{i_0} est l'arête de l'hypergraphe H'_0 associé à H_0 comme dans le cas $h = \alpha_1 + 1$ et où $F_{i_1} = f(E_i \cap X_1)$ où f est une bijection de X_1 sur Y_1 . H' vérifie bien (2) et n'est pas isomorphe à H .

V.2. Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet.

Les résultats de ce paragraphe sont dans l'article donné en annexe E : "Graphe représentatif de l'hypergraphe h-parti complet" *Hypergraph Seminar* (eds. C. Berge et D.K. Ray-Chaudhuri), *Lecture Notes 411, Springer Verlag, 1974, 34-53*.

Dans cet article nous donnons diverses caractérisations de $L_{h-1}(K_{h \times n}^h)$ où $L_{h-1}(H)$, H étant un hypergraphe, désigne le graphe simple dont les sommets représentent les arêtes de H , deux sommets étant reliés si et seulement si les arêtes qu'ils représentent ont une intersection de cardinalité $\geq h - 1$; $K_{h \times n}^h$ désigne l'hypergraphe h-parti complet défini en V.1 lorsque $n_k = n$ pour tout k .

Pour les résultats nous renvoyons le lecteur à l'article donné en Annexe E. Deux références sont à ajouter à la liste donnée : C.R. Cook [C1, C2]; dans le premier article l'auteur donne une construction analogue au théorème D de l'annexe E, dans le cas $h = 3$; dans le deuxième article l'auteur donne une caractérisation de $L_{h-1}(K_{h \times n}^h)$ différente des notres.

V.3. Nombre chromatique total du graphe r-parti complet.

Les résultats de ce paragraphe sont dans l'article donné en Annexe F : "Nombre chromatique total du graphe r-parti complet" *J. London Math. Soc.*, 9, 1974, 279-285.

Dans cet article nous montrons que si $K_{r \times n}$ désigne le graphe r -parti complet (abréviation pour $K_{r \times n}^2$), son nombre chromatique total (nombre minimum d'ensembles indépendants de sommets et d'arêtes) vérifie :

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 2 \text{ si } r = 2 \text{ ou si } r \text{ est pair et } n \text{ impair .}$$

$$t(K_{r \times n}) = n(r-1) + 1 \text{ si } r \text{ est impair ou si } r \text{ est pair, } r \neq 2, \text{ et } n \text{ pair .}$$

Nous répondons ainsi à une conjecture de R. Laskar et W.Hare .

Bibliographie

- B1. C. BERGE : Une condition pour qu'un hypergraphe soit fortement isomorphe à un hypergraphe complet ou multiparti, C.R.Acad.Sci.Paris, 274, 1972, 1783-1786
- B2. C.BERGE : Introduction à la théorie des hypergraphes, Presses de l'université de Montréal, Montréal, 1973 .
- C1. C.R.COOK : A note on the exceptional graph of the cubic lattice graph characterization, J. Combinatorial Theory 14, 1973, 132-136 .
- C2. C.R.COOK : Two characterizations of interchange graphs of complete m -partite graphs, Discrete Math., 8, 1974, 305-312.
- C3. W.H.CUNNINGHAM : On theorems of Berge and Fournier, Hypergraph Seminar, (eds. C.Berge et D.K.Ray-Chaudhuri) Lecture Notes in Math. 411, Springer, 1974, 67-74.
- C4. W.H.CUNNINGHAM : The matroids of a basis graph, manuscript.
- F1. J-C. FOURNIER : Sur les isomorphismes d' hypergraphes, C.R.Acad.Sci. Paris, 274, 1972, 1612-1614.
- F2. J-C. FOURNIER : Une condition pour qu'un hypergraphe ou son complémentaire soit isomorphe à un hypergraphe complet, Hypergraph Seminar, (eds. C.Berge et D.K.Ray-Chaudhuri), Lecture Notes in Math., Springer, 411, 1974, 95-98.
- H1. C.A.HOLZMANN, P.G.NORTON et M.D.TOBEY : A graphical representation of matroids S.I.A.M. J. Appl. Math., 25, 1973, 618-627 .
- M1. S.B. MAURER : Matroid basis graph , Ph. D. Thesis, Princeton University .