



**HAL**  
open science

# Étude mathématique du problème de couplage océan-atmosphère incluant les échelles turbulentes

Charles Pelletier

► **To cite this version:**

Charles Pelletier. Étude mathématique du problème de couplage océan-atmosphère incluant les échelles turbulentes. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Communauté Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT: . tel-01717274v2

**HAL Id: tel-01717274**

**<https://inria.hal.science/tel-01717274v2>**

Submitted on 15 Mar 2018 (v2), last revised 18 Oct 2018 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES**

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Charles PELLETIER**

thèse dirigée par **Éric BLAYO** et encadrée par **Florian LEMARIÉ**,  
préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**

pour l'École Doctorale « **Mathématiques, Sciences et  
Technologies de l'Information, Informatique** »

## **Étude mathématique du problème de couplage océan- atmosphère incluant les échelles turbulentes**

soutenue publiquement le 15 février 2018 devant le jury composé  
de :

**M. Éric BLAYO**

Professeur, Université Grenoble-Alpes, Directeur de thèse

**M. Didier BRESCH**

Directeur de recherche, CNRS Délégation Alpes, Président

**M. Thomas DUBOS**

Professeur, École Polytechnique de Palaiseau, Rapporteur

**Mme Caroline JAPHET**

Maître de conférences, Université Paris 13, Invitée

**M. Florian LEMARIÉ**

Chargé de recherche, Inria Centre de Grenoble Rhône-Alpes, Encadrant

**M. Roger LEWANDOWSKI**

Professeur, Université Rennes 1, Rapporteur

**Mme Véronique MARTIN**

Maître de conférences, Université de Picardie Jules Verne,  
Examinatrice

**M. Jean-Luc REDELSPERGER**

Directeur de recherche, CNRS Délégation Bretagne Pays de Loire,  
Examineur





# Remerciements

Merci en premier lieu aux deux rapporteurs de cette thèse, Thomas Dubos et Roger Lewandowski, pour leurs lectures très attentives de mes travaux et les échanges enrichissants auxquels elles ont mené.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble de mon jury de thèse : Didier Bresch, Véronique Martin et Jean-Luc Redelsperger, pour avoir accepté d'en être examinateurs, et apporté leurs regards d'experts sur ce manuscrit. Merci également à Caroline Japhet de s'être penchée sur mes travaux et d'avoir contribué à ma soutenance *via* ses questions pertinentes.

Sincères remerciements à Suzan Tayar de s'être occupée des aspects administratifs liés à ma soutenance, et à Laurent Debreu pour sa générosité. Merci aussi à Anne Pierson et à Annie Simon pour leurs disponibilité, efficacité et gentillesse au cours de mon séjour au sein de la très belle équipe Airsea, que je salue au passage.

Je suis extrêmement reconnaissant envers mes deux directeurs de thèse, Éric et Florian, pour le temps, l'énergie et les efforts qu'ils m'ont consacré tout au long de ces trois années. Merci de m'avoir accordé la chance de travailler avec vous, je n'aurais pu espérer meilleur encadrement, que ce soit sur les plans scientifique ou humain.

Une dernière pensée envers toutes les personnes qui m'ont côtoyé et entouré au quotidien à Grenoble, ou de façon plus sporadique ailleurs. Vous m'avez bien plus aidé, apporté et inspiré que ce que je suis capable de laisser transparaître.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 De Navier-Stokes aux équations primitives océan-atmosphère incluant la turbulence</b>	<b>13</b>
1.1 Équations primitives non turbulentes	14
1.1.1 Équations de base	14
1.1.2 Quelques approximations	16
1.1.3 Système d'équations primitives	20
1.2 Échelles et turbulences	20
1.2.1 Séparation des échelles	21
1.2.2 Décomposition de Reynolds	21
1.2.3 Injection dans les équations primitives	23
1.2.4 Fermeture turbulente	24
<b>2 La couche limite de surface</b>	<b>29</b>
2.1 Considérations géométriques et découpage du domaine	30
2.1.1 Exclusion de la CLS dans le cadre fluide-structure	30
2.1.2 Adaptation au contexte océan-atmosphère	31
2.1.3 Autour de la notion de « surface »	34
2.1.4 Interactions entre la CLS et les modèles	35
2.1.5 Découpage de la CLS en sous-régions	38
2.2 Théorie de Monin-Obukhov	38
2.2.1 Loi du mur	40
2.2.2 Couche à flux constant	41
2.2.3 Échelles de friction	42
2.2.4 Construction de groupes sans dimension	42
2.2.5 Lien entre propriétés macroscopiques et échelles turbulentes	45
2.3 Conséquences de la théorie de Monin-Obukhov sur le modèle atmosphérique	46
2.3.1 Profils de solution	46
2.3.2 Sous-couches visqueuses	51
2.3.3 Conditions aux limites	55
2.4 La couche limite de surface océanique	57
2.4.1 Flux turbulents dans la CLS océanique	58
2.4.2 Échelles de friction océaniques et stratification	58
2.4.3 Profils de solution au sein de la CLSO-MO	60
2.4.4 Sous-couches visqueuses océaniques	62
2.5 Vers un système couplé océan-CLS-atmosphère	62
2.5.1 Bilan des paramétrisations introduites	63
2.5.2 Cohérence du couplage	65
2.5.3 Proposition de diagnostic des longueurs de rugosité océaniques	68

2.6	Conclusion partielle . . . . .	72
2.6.1	Quelques limitations et commentaires . . . . .	72
2.6.2	Comment complètement « fermer » les paramétrisations CLS? . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Formulations bulks</b>	<b>75</b>
3.1	Qu'est-ce qu'une formulation bulk? . . . . .	76
3.1.1	Formulation sous forme d'un problème non linéaire . . . . .	76
3.1.2	Algorithme de point fixe . . . . .	77
3.1.3	Équivalence avec des conditions aux limites « classiques » . . . . .	79
3.1.4	Critère d'arrêt et convergence . . . . .	81
3.2	Présentations de quelques formulations classiques . . . . .	81
3.2.1	Formulation CORE . . . . .	82
3.2.2	Formulation COARE . . . . .	82
3.2.3	Formulation ECMWF . . . . .	84
3.2.4	Comparaisons numériques . . . . .	84
3.3	Une méthode d'approximation explicite . . . . .	94
3.4	Incorporation de formulations bulk au sein d'algorithmes de couplage . . . . .	114
3.4.1	Ambiguïtés autour de la notion de surface . . . . .	114
3.4.2	Prise en compte de la SCV dans les formulations bulk . . . . .	117
3.4.3	Prise en compte de la couche limite de surface océanique . . . . .	126
3.5	Conclusion partielle . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Couplage de couches d'Ekman</b>	<b>135</b>
4.1	Introduction du problème . . . . .	137
4.1.1	Domaine d'étude . . . . .	137
4.1.2	Équations d'évolution dans les régions intra-modèles . . . . .	138
4.1.3	Condition de couplage cohérent . . . . .	141
4.1.4	Forme finale du problème de couches d'Ekman couplées . . . . .	143
4.2	Quelques cas stationnaires avec solutions monodomains littérales . . . . .	145
4.2.1	Objectifs . . . . .	145
4.2.2	Viscosités constantes . . . . .	146
4.2.3	Viscosités affines . . . . .	148
4.2.4	Viscosités polynomiales de degré 2 . . . . .	149
4.2.5	Viscosités polynomiales de degré 3 . . . . .	153
4.2.6	Comment exploiter ces résultats? . . . . .	156
4.3	Couplage cohérent de couches d'Ekman stationnaires . . . . .	156
4.3.1	Viscosités turbulentes indépendantes des $(u_a^*)$ . . . . .	157
4.3.2	Viscosités turbulentes dépendantes des $(u_\alpha^*)$ . . . . .	162
4.3.3	Impact de la cohérence du couplage sur la solution hors CLS . . . . .	164
4.4	Discussion sur l'extension au cas instationnaire . . . . .	170
4.4.1	Solutions monodomains . . . . .	171
4.4.2	Cohérence du couplage . . . . .	171
4.5	Conclusion partielle . . . . .	172
<b>5</b>	<b>Mise en œuvre numérique du couplage : analyse et optimisation de méthodes de Schwarz</b>	<b>173</b>
5.1	Position du problème et méthodes numériques standards . . . . .	174
5.1.1	Problème multiphysique . . . . .	174
5.1.2	Algorithmes de Schwarz : généralités . . . . .	176
5.1.3	Motivations derrière l'utilisation d'algorithmes de Schwarz . . . . .	179
5.2	Vers une méthode de couplage adaptée . . . . .	181

5.2.1	Couplage synchrone . . . . .	182
5.2.2	Couplage asynchrone . . . . .	185
5.2.3	Algorithmes de Schwarz à relaxation d'ondes . . . . .	189
5.3	Algorithmes OSWR et couplage océan-atmosphère . . . . .	196
5.3.1	La CLS, un « recouvrement négatif » ? . . . . .	197
5.3.2	Prise en compte de la non linéarité des équations primitives pour le couplage OA . . . . .	202
5.3.3	Caractère non-local des conditions de transmission physiques : formulations en flux explicites et semi-implicites . . . . .	205
5.4	Couplage de couches d'Ekman par algorithmes de Schwarz . . . . .	208
5.4.1	Absence de couches limites . . . . .	209
5.4.2	Inclusion de paramétrisations CLS . . . . .	216
5.5	Conclusion partielle . . . . .	218
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>221</b>
<b>A Détails sur les formulations bulks</b>		<b>225</b>
A.1	CORE . . . . .	225
A.1.1	Fonctionnement général . . . . .	225
A.1.2	Paramétrisation des coefficients de transfert neutres . . . . .	226
A.1.3	Lien entre l'état neutre et l'état stratifié . . . . .	227
A.1.4	Un commentaire important . . . . .	228
A.2	Coare . . . . .	228
A.2.1	Prise en compte de la stratification . . . . .	230
A.2.2	Paramétrisation des longueurs de rugosité . . . . .	231
A.2.3	Première estimation des échelles de friction . . . . .	231
A.2.4	Fonctionnement algorithmique . . . . .	232
A.3	ECMWF . . . . .	232
A.3.1	Nouvelle équation de fermeture . . . . .	234
A.3.2	Évaluation de la longueur d'Obukhov . . . . .	235
A.3.3	Paramétrisations des longueurs de rugosité . . . . .	235
A.3.4	Fonctions de stabilité . . . . .	235
A.3.5	Fonctionnement algorithmique . . . . .	236
<b>B Détails sur les solutions exactes de problèmes d'Ekman</b>		<b>239</b>
B.1	Viscosité quadratique . . . . .	239
B.2	Viscosité cubique . . . . .	242
B.3	Absence de force de Coriolis . . . . .	246
B.3.1	Solutions monodomaines . . . . .	247
B.3.2	Couplage de couches d'Ekman stationnaire en absence de force de Coriolis . . . . .	248
<b>C Optimisation d'algorithmes SWR pour le problème d'Ekman</b>		<b>251</b>
C.1	Solution exacte au problème de couches d'Ekman couplé . . . . .	251
C.2	Contraintes de la condition de compatibilité sur $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$ . . . . .	252
C.3	Solutions exactes du système d'erreur et taux de convergence . . . . .	254
C.3.1	Conditions de transmission Robin-Robin . . . . .	254
C.3.2	Conditions de transmission Dirichlet-Neumann . . . . .	255
<b>Bibliographie</b>		<b>257</b>



# Introduction

Les méthodes numériques utilisées pour modéliser l'océan et l'atmosphère ont été développées de façon séparée, et ce pour au moins deux raisons. La première raison est d'ordre scientifique : bien qu'étant régies par des systèmes d'équations relativement similaires, les dynamiques physiques de l'océan et de l'atmosphère sont suffisamment dissemblables l'une de l'autre pour que les traiter par des outils distincts soit nécessaire. La deuxième raison, plus prosaïque, est d'ordre communautaire : les modèles numériques de simulation de l'atmosphère puis, avec un décalage au départ de quelques décennies, de l'océan, ont été développés par des communautés scientifiques interagissant relativement peu entre elles, même si récemment, leur frontière a tendance à se faire de plus en plus poreuse, et leur décalage temporel à s'amincir. Il résulte de cette séparation qu'à notre connaissance, il n'existe pas de modèle unifié océan-atmosphère englobant ces deux milieux physiques, mais une multitude de modèles numériques en simulant l'un des deux.

Dans un premier temps, les modèles océan et atmosphère ont été utilisés de manière *forcée*, c'est à dire, en supposant que l'action d'un des deux milieux physiques sur l'autre est donnée, connue à l'avance, et inébranlable : cette hypothèse est relativement satisfaisante pour le développement séparé de modèles numériques océan et atmosphère dans un contexte météorologique, pour lequel les prévisions sont à courtes échéances. En revanche, elle ne saurait correspondre à la réalité physique, où l'interaction océan-atmosphère instaure une boucle de rétroaction entre ces deux milieux. L'une des raisons derrière la récente évolution communautaire susmentionnée est justement liée à la prise en compte, à partir de la fin des années 1980, de cette réalité physique : l'océan et l'atmosphère sont en interaction constante, et conséquemment, au sein des développements de modèles numériques, cet aspect doit aussi être présent (Li et Gao, 2008). Les dernières décennies ont ainsi vu se généraliser l'utilisation de modèles océan et atmosphère *couplés*, c'est à dire, utilisés de façon parallèle, et échangeant de l'information entre eux au cours des simulations numériques réalisées à échelles saisonnière ou climatologique, par exemple.

En dehors de toute considération propre soit à l'océan, soit à l'atmosphère, la question de la transcription numérique de leur couplage *en elle-même* pose des questions d'ordre mathématique, dont la principale est : comment proprement simuler l'océan et l'atmosphère, milieux physiques finement intriqués, en les traitant numériquement de façon séparée, réduisant leurs interactions à une superstructure d'« interface de couplage » ?

Les modèles numériques océan et atmosphère sont désormais suffisamment sophistiqués pour qu'une représentation numérique incorrecte de leur couplage en constitue une des carences significatives. En effet, des études préalables ont montré qu'un déséquilibre dans le couplage océan-atmosphère peut mener à des erreurs considérables dans les prédictions numériques, que ce soit dans les contextes météorologique ou climatologique. En météorologie, coupler numériquement de façon approximative l'océan et l'atmosphère se révèle problématique dans des

situations où leurs échanges physiques sont exceptionnellement intenses ; un exemple type de telles situations étant la formation de cyclone (Emanuel, 1986). En climatologie, cette mauvaise prise en compte se traduit par une lente et progressive « dérive numérique » des modèles (Neelin *et al.*, 1992), entraînant potentiellement ceux-ci à graduellement s'écarter de la réalité physique.

La nature très complexe des modèles numériques océan et atmosphère rend la question de leur couplage difficile à traiter mathématiquement. Chaque modèle est systématiquement divisé en deux sous-parties (pour un exemple récent, voir Donner *et al.*, 2011), dont la première est un *cœur dynamique*, contenant l'ensemble des mécanismes mathématiques (formulation continue des équations) et numériques (les schémas de discrétisation). En général, ce cœur dynamique bénéficie d'une robuste structure mathématique. La seconde sous-partie est constituée d'un ensemble de *paramétrisations physiques*, outils intervenant dans les formulations continues des modèles, dont l'objectif est de rendre compte d'effets *qui, de façon prévisible, échapperont au cœur dynamique*. À titre d'exemple, des phénomènes aussi variés que la couverture nuageuse (Sundqvist, 1988) ou l'effet des vagues (Fritts et Lu, 1993) sont paramétrisés.

À de rares exceptions près, les paramétrisations physiques ont été développées en dehors de tout cadre mathématique rigoureux, sans préoccupation quant à leur caractère bien posé ou à leur compatibilité avec les cœurs dynamiques, bien que la tendance actuelle soit à y remédier (Staniforth *et al.*, 2002). C'est donc essentiellement l'omniprésence des paramétrisations physiques, indispensables à la pertinence des modèles numériques océan et atmosphère, qui rend leur étude mathématique difficile ; cela constituera l'un des fils rouges de cette thèse.

Après une brève présentation des systèmes d'équations continues régissant la physique des deux milieux physiques au chapitre 1, les travaux entrepris dans cette thèse permettront d'isoler deux principales sources d'erreurs propres aux méthodes actuelles de couplage océan-atmosphère.

La première source d'erreurs concerne la formulation continue de la modélisation du voisinage immédiat de la surface océanique. Mettre en place de robustes méthodes de couplage pour le problème océan-atmosphère nécessite une bonne compréhension de la physique très particulière en jeu dans cette région, reposant sur une mosaïque de paramétrisations finement intriquées. Les paramétrisations nous intéressant ont pour but de rendre compte des effets macroscopiques des échelles turbulentes (de l'ordre de  $10^{-3}$  m), au sein de maillages numériques ayant comme dimensions caractéristiques le mètre (en météorologie), voire le kilomètre (en climatologie). Les chapitres 2 et 3 dissèquent, analysent et complètent les schémas de paramétrisations turbulentes, en y apposant un regard mathématique, s'intéressant en particulier à leur cohérence relative lorsqu'utilisés dans un contexte couplé. L'étude entreprise permettra de définir un ensemble de critères simples sous lesquels le couplage océan-atmosphère peut être considéré comme cohérent vis-à-vis des schémas de paramétrisations turbulentes. Cet ensemble de critères, qu'on appellera *conditions de couplage cohérent*, n'est en général pas respecté dans la mise en place de modèles couplés : cela constitue la première des deux sources d'erreurs susmentionnées, liée à la formulation *continue* du problème océan-atmosphère. Le chapitre 4 met en application les résultats obtenus aux chapitres précédents dans le cadre d'un cas test de couplage de « couches d'Ekman », dont la formulation est suffisamment simple pour que l'obtention de résultats mathématiques soit possible, tout en conservant certains aspects primordiaux du comportement turbulent de l'océan et de l'atmosphère au voisinage de leur interface commune. On évaluera alors quantitativement l'impact qu'a le respect des conditions de couplage cohérent sur le comportement de solutions de ce problème couplé, au niveau continu.

La seconde source d'erreurs mathématiques concernant le couplage est liée à la discrétisation

temporelle des deux modèles, et plus particulièrement à la méthode choisie pour échantillonner leurs échanges d'information. On montrera en particulier qu'il n'est pas possible de résoudre le problème couplé océan-atmosphère par résolutions séparées de deux sous-problèmes *échangeant de l'information une seule fois entre eux*. En d'autres termes, d'un point de vue algorithmique, les méthodes de couplage actuellement utilisées ne résolvent que partiellement le problème du couplage océan-atmosphère; après en avoir donné la justification, le chapitre 5 propose comme réponse à ce problème l'utilisation d'algorithmes itératifs dits « de Schwarz », issus de thématiques liées à la décomposition de domaine (Gander, 2006), et aujourd'hui étendus à des contextes multiphysiques (Keyes *et al.*, 2013). On expliquera aussi en quoi l'application de tels algorithmes à des modèles numériques océan et atmosphère physiquement réalistes constitue un défi considérable. L'ensemble des études menées aux chapitres précédents permettra alors d'isoler les spécificités du couplage océan-atmosphère rendant la résolution de ce problème ardue, par rapport à d'autres problèmes multiphysiques plus simples pour lesquels la mise en place de couplage satisfaisant est aujourd'hui bien étudiée et quasi-immédiate. Les concepts présentés dans ce dernier chapitre sont alors appliqués au problème d'Ekman, précédemment introduit.

Cette thèse se veut pluridisciplinaire, dans la mesure où son principal objectif est de poser un regard mathématique sur des objets numériques jusque-là peu étudiés sous cet angle, puisque développés et utilisés par les communautés scientifiques de la physique de l'atmosphère et de l'océan, avec lesquelles le mathématicien appliqué partage l'objectif *in fine* d'améliorer les prévisions météorologiques et climatologiques. Le renforcement de la structure mathématique des méthodes de couplage océan-atmosphère dans ses formulations continue et discrète est une étape indispensable à de telles améliorations.



# Chapitre 1

## De Navier-Stokes aux équations primitives océan-atmosphère incluant la turbulence

### Sommaire

---

1.1	Équations primitives non turbulentes . . . . .	14
1.1.1	Équations de base . . . . .	14
1.1.2	Quelques approximations . . . . .	16
1.1.3	Système d'équations primitives . . . . .	20
1.2	Échelles et turbulences . . . . .	20
1.2.1	Séparation des échelles . . . . .	21
1.2.2	Décomposition de Reynolds . . . . .	21
1.2.3	Injection dans les équations primitives . . . . .	23
1.2.4	Fermeture turbulente . . . . .	24

---

L'objectif de ce chapitre est d'introduire, au niveau continu, les équations qui servent de base à la modélisation des milieux atmosphère et océan. Bien que ces équations aient déjà largement été étudiées (citons [Lions \*et al.\* \(1993\)](#) comme référence mathématique, ou bien [Smagorinsky \(1963\)](#) comme article fondateur pour la modélisation numérique), il nous semble utile et important de brièvement rappeler les différentes étapes de construction menant à leur forme finale, plutôt que de considérer ces équations comme originelles.

Celles-ci présentent une structure globale commune : ce sont des systèmes d'équations issues de Navier-Stokes et d'équations classiques de la thermodynamique, écrits dans un référentiel adapté, auxquels sont ajoutées un certain nombre d'hypothèses dites « standards », qui permettent l'obtention d'un système d'équations simplifié, propre aux applications climatologiques et météorologiques. Il existe une certaine variété pour ce type de systèmes, appelées « équations primitives », dépendamment du choix des hypothèses étant retenues et exploitées. Le § 1.1 présente le chemin emprunté pour construire les équations primitives.

La modélisation des échelles dites turbulentes constitue, de façon générale, un problème de physique mathématique extrêmement vaste et complexe. Dans le contexte de la modélisation

d'un système de circulation océano-atmosphérique, cet aspect est indispensable, et source des principaux défis mathématiques posés par la modélisation numérique. Le § 1.2 présente la façon selon laquelle sont incorporées les échelles turbulentes dans les équations primitives.

## 1.1 Équations primitives non turbulentes

On cherche à modéliser les milieux atmosphérique et océanique, respectivement  $\Omega_a$  et  $\Omega_o$ . Les quantités d'intérêt physique, inconnues du système d'équations aux dérivées partielles à venir, sont les suivantes :

- ▶  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse d'un volume infinitésimal de fluide, exprimée en  $\text{m s}^{-1}$ . On sépare la vitesse horizontale  $\mathbf{u}_h$  et la vitesse verticale  $w$  puisque le problème n'est pas isotrope, et qu'on s'intéresse au transport d'énergie turbulente le long de la verticale ;
- ▶  $p$  est la pression, exprimée en  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$  ;
- ▶  $\rho$  est la masse volumique exprimée en  $\text{kg m}^{-3}$  ;
- ▶  $T$  est la température potentielle, exprimée en Kelvin.
- ▶  $S$  est la salinité de l'eau de mer, exprimée en  $\text{kg kg}^{-1}$  (kilogramme de sel par kilogramme d'eau), de telle sorte que dans un volume infinitésimal  $d\Omega$ , on ait une masse de sel  $dm_{sel} = \rho S d\Omega$
- ▶  $q$  est l'humidité de l'air ; elle correspond à la masse d'eau présente par unité de masse d'air. Elle est exprimée en  $\text{kg kg}^{-1}$ , à l'instar de la salinité.

À l'exception de  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ , toutes les grandeurs ci-dessus sont des scalaires positifs. On repère une date par  $t \in \mathbb{R}_+$ . Bien qu'un repère spatial sphérique semble plus adapté à la géométrie tridimensionnelle du problème océan-atmosphère, on supposera dans la suite qu'on se situe dans un repère cartésien  $(x, y, z)$ , approximation qui reste valable tant que les repères sont définis de façon locale, sur des étendues de taille limitée.

### 1.1.1 Équations de base

La première équation du système de Navier-Stokes modélise l'évolution de la quantité de mouvement d'un fluide, et fait intervenir les grandeurs  $\mathbf{U}$ ,  $p$  et  $\rho$ . Dans sa forme la plus générale, elle s'écrit ainsi :

$$\rho D_t \mathbf{U} = \mathbf{I} - \nabla p + \mathbf{G} + \mathbf{C} \quad (1.1)$$

Explicitons chacun des termes de l'équation (1.1) :

- ▶ Le terme

$$\rho D_t \mathbf{U} = \rho [\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}] \quad (1.2)$$

correspond à une dérivée lagrangienne, c'est à dire selon le mouvement du fluide, et inclut donc dérivée temporelle et advection.

- **I** représente les contraintes du fluide. On l'écrit en toute rigueur :

$$\mathbf{I} = \nabla \cdot \left( \nu^c \left[ \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \right] \right) \quad (1.3)$$

où  $\nu^c$  est la viscosité dynamique du milieu (air ou eau), qui, contrairement à d'autres viscosités qui seront introduites par la suite, est considérée comme constante dans chaque milieu.

- **G** représente la force de gravitation :

$$\mathbf{G} = \rho \mathbf{g} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{g}$  est le champ gravitationnel local.

- **C** représente les forces de Coriolis, dues à la rotation de la Terre. En appelant  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur rotation de la Terre, on a :

$$\mathbf{C} = -2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} \quad (1.5)$$

Ce terme peut se réécrire en fonction de  $\varphi$ , la colatitude du point considéré (qui est un angle) :

$$\mathbf{C} = -2\rho \omega (f_0(\varphi) \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} + h_0(\varphi) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{U}) \quad (1.6)$$

où  $f_0$  et  $h_0$  sont deux fonctions à valeurs dans  $[-1; 1]$ ,  $\mathbf{e}_z$  est un vecteur unitaire vertical, et  $\mathbf{e}_2$  un vecteur unitaire pointant vers l'est.

On ajoute à cette équation vectorielle cinq équations scalaires : un principe de conservation (pour la masse), trois équations de conservation-diffusion, et une équation d'état issue de la thermodynamique.

- (i) le principe de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\partial_t \rho + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.7)$$

Cette équation, couplée à (1.1), correspond au système d'équations de Navier-Stokes.

- (ii) la conservation de l'énergie thermique, combinée à un terme diffusif et à un terme source  $\mathcal{F}_T$  :

$$\rho c_p D_t T + \frac{T}{\rho} (\partial_T \rho) (D_t \rho) = \mathcal{K}_T^c \Delta T + \mathcal{F}_T \quad (1.8)$$

- (iii) la conservation-diffusion de la salinité (valable dans  $\Omega_o$ )

$$D_t(\rho S) = \mathcal{K}_S^c \Delta S \quad (1.9)$$

- (iv) la conservation-diffusion de l'humidité (valable dans  $\Omega_a$ ) :

$$D_t(\rho q) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) (\rho q) = \mathcal{K}_q^c \Delta q \quad (1.10)$$

- (v) une équation d'état, avec  $(\rho_i)_{i \in \{O, A\}}$  une fonction définie différemment dans  $\Omega_o$  et  $\Omega_a$  :

$$\rho = \rho_i(T, S, q, p) \quad (1.11)$$

À titre d'exemple, dans l'atmosphère, on utilise une loi des gaz parfaits.

où  $(\mathcal{K}_j^c)_{j \in \{T, S, q\}}$  sont respectivement les diffusivités thermique, saline et humide ; elles sont considérées comme constantes.

On obtient alors le système suivant, où sauf mention contraire, les équations sont valables dans  $\Omega_o \cup \Omega_a$ .

$$\rho D_t \mathbf{U} = \nabla \cdot \left( \nu^c \left[ \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \right] \right) - \nabla p + \rho \mathbf{g} - 2\rho\omega (f(\varphi) \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} + h(\varphi) \mathbf{e}_z \times \mathbf{U}) \quad (1.12a)$$

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.12b)$$

$$\rho c_p D_t T + \frac{T}{\rho} \rho c_p D_t T + \frac{T}{\rho} (\partial_T \rho) (D_t p) = \mathcal{K}_T^c \Delta T + \mathcal{F}_T \quad (1.12c)$$

$$\rho = \rho_\alpha(T, S, q, p), \quad \alpha \in \{O, A\} \quad (1.12d)$$

$$D_t(\rho S) = \mathcal{K}_S^c \Delta S, \quad \text{dans } \Omega_o \quad (1.12e)$$

$$D_t(\rho q) = \mathcal{K}_q^c \Delta q, \quad \text{dans } \Omega_a \quad (1.12f)$$

Dans (1.12), il y a un terme source dans l'équation pour  $T$ , mais pas dans celles pour  $S$  ou  $q$ , qui sont pourtant de même nature. Cela vient du fait que dans l'océan, la pénétration de rayonnement a des effets immédiats sur la température, *même en profondeur*. Par contre, en ce qui concerne l'humidité et la salinité, les termes sources (évaporation, précipitations) n'influent que sur les conditions de bord, il n'est pas nécessaire de les prendre en compte au sein des équations volumiques, auxquelles le système (1.12) se limite.

L'écriture des conditions aux bords, nécessaires à la fermeture de (1.12), sera traitée ultérieurement. En effet, les conditions de bord utilisées au sein des modèles océan-atmosphère étant intrinsèquement *turbulentes*, leur introduction à ce niveau de l'exposé serait prématurée. Il est donc manifeste que (1.12) est, pour l'instant, incomplet.

Le système (1.12) étant difficilement manipulable, on effectue quelques approximations afin d'obtenir ce qu'on appelle un système d'équations *primitives*, à partir de ces équations de bases.

## 1.1.2 Quelques approximations

Le système (1.12) est valable pour une très grande variété d'écoulements fluides. Puisque l'on s'intéresse ici à la modélisation de l'océan et de l'atmosphère, un certain nombre d'hypothèses et d'approximations peuvent être faites. Celles-ci permettent de grandement diminuer les coûts numériques inhérents à la simulation du système (1.12).

Ce paragraphe décrit un certain nombre d'approximations permettant de réécrire le système (1.12) sous une forme simplifiée.

### Simplification du tenseur de contrainte

Tout d'abord, intéressons-nous à l'équation de Navier-Stokes (1.12a). On suppose le fluide incompressible et on approxime  $\mathbf{I}$  ainsi :

$$\mathbf{I} \approx \nabla \cdot (v^c \nabla \mathbf{U}) \quad (1.13)$$

En outre, si l'on suppose que  $v^c$  est constante dans l'océan et dans l'atmosphère (avec deux valeurs pouvant bien entendu différer), les contraintes s'écrivent finalement :

$$\mathbf{I} \approx v^c \Delta \mathbf{U} \quad (1.14)$$

Dans toute la suite, on considérera que la forme (1.14) permet de bien exprimer  $\mathbf{I}$ .

### Champ gravitationnel

On suppose que le champ gravitationnel est parfaitement vertical, et constant, de sorte de  $\mathbf{G} = -\rho \|\mathbf{g}\| \mathbf{e}_z$ , avec  $\|\mathbf{g}\| = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ .

### Approximation traditionnelle

Dans l'expression du terme de Coriolis  $\mathbf{C}$ , on négligera le terme en  $h$  :

$$h_0(\varphi) \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} \ll f_0(\varphi) \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} \quad (1.15)$$

On écrira aussi simplement  $f_0$  au lieu de  $f_0(\varphi)$ . Cela constitue l'**approximation traditionnelle** :

$$\mathbf{C} \approx -\rho f \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} \quad (1.16)$$

où on a défini  $f := 2f_0\omega_z$ , où  $\omega_z$  est la composante verticale de la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$ . Il faut bien garder en tête que la grandeur  $f$  dépend de la latitude du point auquel on se situe : à titre d'exemple,  $|f_0| = 1$  aux pôles ( $\varphi \in \{0^\circ, 180^\circ\}$ ) et  $f_0 = 0$  à l'équateur ( $\varphi = 90^\circ$ ).

Les approximations introduites jusqu'à présent permettent de réécrire l'équation (1.12a) sous cette nouvelle forme plus maniable :

$$\rho D_t \mathbf{U} - v^c \Delta \mathbf{U} + \nabla p - \rho g \mathbf{e}_z - 2\rho f \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} = 0 \quad (1.17)$$

### Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq stipule que les variations de densité  $\rho$  sont très faibles, et oscillent autour de deux valeurs d'équilibre  $(\rho_{0,\alpha})_{\alpha \in \{o,a\}}$ , constantes distinctes. On supposera que les conclusions de ce sous-paragraphe sont valables pour  $\alpha \in \{o,a\}$ .

$$|\rho - \rho_{0,\alpha}| \ll \rho_{0,\alpha} \quad \alpha \in \{O, A\} \quad (1.18)$$

Dans toute la suite, que ce soit dans l'océan ou dans l'atmosphère, on notera :

$$\tilde{\rho} = \rho - \rho_{0,\alpha} \quad (1.19)$$

(1.18) permet de simplifier l'équation (1.12b), qui devient alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.20)$$

(1.20) est une équation d'incompressibilité pour le fluide. (1.18) permet aussi de simplifier (1.12c) :

$$D_t T = \mathcal{K}_T \Delta T + \mathcal{F}_T \quad (1.21)$$

où la constante  $\mathcal{K}_T := \mathcal{K}_T^c / (\rho_{0,\alpha} c_p)$  joue le rôle d'une diffusivité thermique effective.

L'équation (1.20) permet de modifier l'écriture de l'opération de dérivation totale  $D_t$  :

$$D_t X = \partial_t X + (\mathbf{U} \cdot \nabla) X = \partial_t X + \nabla \cdot (\mathbf{U} X) \quad (1.22)$$

pour une grandeur  $X$  quelconque, ce qui transforme l'écriture des équations (1.12e) et (1.12f), respectivement :

$$\partial_t S + \nabla \cdot (\mathbf{U} S) = \mathcal{K}_S \Delta S, \text{ dans } \Omega_o \quad (1.23a)$$

$$\partial_t q + \nabla \cdot (\mathbf{U} q) = \mathcal{K}_q \Delta q, \text{ dans } \Omega_a \quad (1.23b)$$

où, à l'image de (1.21), on a défini la diffusivité effective  $\mathcal{K}_s := \mathcal{K}_s^c / \rho_{0,\alpha}$ . Cette grandeur est constante.

L'approximation de Boussinesq stipule aussi qu'en effectuant la décomposition  $\rho = \rho_{0,\alpha} + \tilde{\rho}$  dans tout le système (1.12), les termes  $\tilde{\rho}$  ne sont comptabilisés que lorsque qu'ils sont couplés, par un produit, à l'accélération due au champ de pesanteur. (1.17) devient alors :

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nu_\alpha^m \Delta \mathbf{U} + \frac{\nabla \tilde{p}}{\rho_{0,\alpha}} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_{0,\alpha}} g \mathbf{e}_z - 2f \mathbf{e}_z \times \mathbf{U} = 0 \quad (1.24)$$

où  $\nu_\alpha^m = \nu^c / \rho_{0,\alpha}$  est, pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , une viscosité cinématique effective et constante, appelée viscosité moléculaire.  $\tilde{p}$  est une perturbation de pression autour d'un état d'équilibre hydrostatique pour un fluide de masse volumique  $\rho_{0,\alpha}$ . Elle est définie ainsi :

$$p = p_{0,\alpha} + \tilde{p} \quad (1.25a)$$

$$\partial_z p_{0,\alpha} = -\rho_{0,\alpha} g \quad (1.25b)$$

Cette nouvelle forme revient à considérer les termes de compressibilité négligeables (d'où la forme incompressible de (1.20)), sauf dans le terme de flottabilité, présent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant  $\mathbf{e}_z$ .

### Hypothèse hydrostatique

L'approximation hydrostatique stipule que le fluide considéré (eau ou air, selon le domaine) est à un état d'équilibre hydrostatique, les forces de pression compensant les forces gravitationnelles. À la différence des approximations et hypothèses introduites jusqu'à présent, qui sont utilisées dans l'intégralité des modèles de circulation globaux et régionaux, les modèles relevant l'hypothèse hydrostatique, pour y préférer une hypothèse moins forte, dite quasi-hydrostatique (Orlanski, 1981).

Cette hypothèse repose sur des considérations d'ordres de grandeurs propres aux trois nombres sans dimension suivants, appelés respectivement *rapport d'aspect*, *nombre de Froude* et *nombre de Rossby* :

$$\delta = H/L \quad \text{Fr} = U/(NH) \quad \text{Ro} = U/(2\omega_z L) \quad (1.26)$$

où

- ▶  $H$  et  $L$  sont des échelles de longueurs caractéristiques des variations de quantités d'intérêts, respectivement horizontale et verticale ;
- ▶  $U$  est une vitesse horizontale caractéristique ;
- ▶  $N = \sqrt{-(g/\rho_{0,\alpha})\partial_z \bar{\rho}}$  est la fréquence de Brunt-Väisälä, qui caractérise les oscillations verticales d'une colonne verticale d'air ou d'eau autour de l'état d'équilibre hydrostatique ;
- ▶  $\omega_z$  est la vitesse angulaire de la Terre.

Ces trois nombres caractérisent de façon relative les échelles suivantes :

- (i) rapport d'aspect : importance des variations de quantités d'intérêts entre les échelle horizontales et verticales ; valeurs typiques :  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  ;
- (ii) nombre de Froude : rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur ;
- (iii) nombre de Rossby : rapport entre les forces d'inertie du fluide, et celles dues à la rotation terrestre. Sa valeur varie entre  $10^{-2}$  et 1.

Les trois nombres introduits par (1.26) ne sont pas les mêmes dans l'océan ou dans l'atmosphère. Toutefois, on ne fera pas de distinction, puisque les considérations à venir seront valables dans les deux milieux.

L'hypothèse hydrostatique permet de simplifier l'écriture de l'équation de quantité de mouvement (1.24) suivant la verticale  $\mathbf{e}_z$ . En effet, si l'on considère que :

$$\delta^2 \text{Fr}^2 \ll 1 \quad \text{et} \quad \delta^2 \text{Ro}^2 \ll 1, \quad (1.27)$$

les deux premiers termes de l'équation (1.24), projetée sur  $\mathbf{e}_z$ , deviennent négligeables. On suppose aussi que les effets de la viscosité cinématique selon  $\mathbf{e}_z$  sont négligeables. On obtient alors l'équation d'équilibre hydrostatique vertical :

$$\partial_z \tilde{p} + \tilde{\rho} g = 0 \quad (1.28)$$

(1.28) est utilisée dans presque tous les modèles de simulations océaniques, et lorsqu'on s'intéresse aux grandes échelles de circulations atmosphériques, elle est aussi totalement justifiée. Cependant, il est de plus en plus commun, dans les modèles de simulations atmosphériques à échelles globales les plus récents (Tort et Dubos, 2014; Tort et al., 2015; Ullrich et al., 2017), de relever l'hypothèse hydrostatique pour lui préférer la moins restrictive hypothèse « quasi-hydrostatique » (Orlanski, 1981) :

$$\partial_z \tilde{p} + \tilde{\rho} g = -2\tilde{\rho} h(\omega_x v - \omega_y u) \quad (1.29)$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes de  $\mathbf{U}$  suivant respectivement  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  et  $(\omega_x, \omega_y)$  les deux premières composantes du vecteur de rotation terrestre  $\boldsymbol{\omega}$ . Nonobstant, l'hypothèse hydrostatique sera utilisée par la suite, puisqu'elle est encore largement répandue, surtout au sein de modèles globaux, et que les principaux apports de la présente thèse en sont indépendants.

### 1.1.3 Système d'équations primitives

On appelle  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  les trois composantes de  $\mathbf{U}$ . En prenant en compte les approximations décrites ci-dessus, on obtient le système d'équations primitives volumiques suivant, où sauf indication contraire, les équations sont valables dans  $\Omega_o \cup \Omega_a$ .

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{U}u) - \nu_\alpha^m \Delta u + (\partial_x p) / \rho_{0,\alpha} - 2\omega_z f v + 2h\omega_y w = 0 \quad (1.30a)$$

$$\partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{U}v) - \nu_\alpha^m \Delta v + (\partial_y p) / \rho_{0,\alpha} + 2\omega_z f u - 2h\omega_x w = 0 \quad (1.30b)$$

$$\partial_t w + \nabla \cdot (\mathbf{U}w) - \nu_\alpha^m \Delta w + (\partial_z \tilde{p}) / \rho_{0,\alpha} + (\tilde{\rho} / \rho_{0,\alpha}) g + 2h(\omega_x v - \omega_y u) = 0 \quad (1.30c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.30d)$$

$$\rho = \rho_i(T, S, q, p), \quad i \in \{O, A\} \quad (1.30e)$$

$$\partial_t T + \nabla \cdot (\mathbf{U}T) = \mathcal{K}_T \Delta T + \mathcal{F}_T \quad (1.30f)$$

$$\partial_t S + \nabla \cdot (\mathbf{U}S) = \mathcal{K}_S \Delta S \quad \text{dans } \Omega_o \quad (1.30g)$$

$$\partial_t q + \nabla \cdot (\mathbf{U}q) = \mathcal{K}_q \Delta q \quad \text{dans } \Omega_a \quad (1.30h)$$

Dans le système (1.30), on a fait l'approximation de Boussinesq. En outre, le terme en violet est négligé lorsqu'on impose l'hypothèse quasi-hydrostatique, et les termes en vert sont négligés lorsqu'on fait l'approximation traditionnelle; la combinaison de ces deux approximations constitue l'hypothèse hydrostatique pour (1.30c). Une discussion plus conséquente sur ces approximations et leurs implications physiques est faite dans [Gerkema et al. \(2008\)](#).

Dans la suite, on supposera que ces deux approximations sont valables, et donc on négligera les termes écrits en couleur dans (1.30). On obtient alors :

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{U}u) - \nu_\alpha^m \Delta u + (\partial_x p) / \rho_{0,\alpha} - 2\omega_z f v = 0 \quad (1.31a)$$

$$\partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{U}v) - \nu_\alpha^m \Delta v + (\partial_y p) / \rho_{0,\alpha} + 2\omega_z f u = 0 \quad (1.31b)$$

$$(\partial_z \tilde{p}) / \rho_{0,\alpha} + (\tilde{\rho} / \rho_{0,\alpha}) g = 0 \quad (1.31c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.31d)$$

$$\rho = \rho_i(T, S, q, p), \quad i \in \{O, A\} \quad (1.31e)$$

$$\partial_t T + \nabla \cdot (\mathbf{U}T) = \mathcal{K}_T \Delta T + \mathcal{F}_T \quad (1.31f)$$

$$\partial_t S + \nabla \cdot (\mathbf{U}S) = \mathcal{K}_S \Delta S \quad \text{dans } \Omega_o \quad (1.31g)$$

$$\partial_t q + \nabla \cdot (\mathbf{U}q) = \mathcal{K}_q \Delta q \quad \text{dans } \Omega_a \quad (1.31h)$$

Ce système est cohérent avec les équations de base du système océan-atmosphère telles qu'elles sont décrites par la littérature standard; par exemple, par [Garratt \(1992\)](#) pour l'atmosphère, et [Lewandowski \(1997\)](#) pour l'océan.

## 1.2 Échelles et turbulences

Considérons dorénavant que les modèles océaniques et atmosphériques sont régis par le système d'équations (1.31). Même à l'aide de toutes les approximations faites, ces équations ne sauraient être résolues numériquement telles qu'elles sont présentement écrites.

### 1.2.1 Séparation des échelles

Considérons une grandeur  $a \in (u, v, w, p, T, S, q)$  quelconque. On peut effectuer une décomposition de Fourier de cette grandeur suivant la direction  $x$  ainsi :

$$a(x, y, z, t) = \sum_{0 \leq k < k_c} a_k(y, z, t) \exp(ikx) + \sum_{k \geq k_c} a_k(y, z, t) \exp(ikx) \quad (1.32)$$

où les  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont les modes propres de  $a$  suivant la direction  $x$ , et  $k_c$  une fréquence spatiale critique définie ainsi :

$$k_c - 1 \leq \max_{\Omega_a \cup \Omega_o} \left( \frac{1}{2\delta_x} \right) < k_c \quad (1.33)$$

où  $\delta_x$  représente le pas, dans la direction  $x$ , de la grille de discrétisation utilisée. Ainsi, suivant cette direction, avec notre grille de calcul, on arrivera à bien représenter les modes présents dans la première somme de l'équation (1.32). Cependant, l'ensemble des modes correspondant à des valeurs  $k \geq k_c$  ne sera pas représenté par notre grille de calcul, puisque ceux-ci lui échappent même au sein de sa maille de plus petite taille. En outre, dans le cas où la grille présente des régions à pas plus grossiers, il est aussi possible que des modes pour lesquels  $k < k_c$  ne puissent être rendus.

Ces échelles de petites tailles sont appelées *échelles turbulentes*. Historiquement, on a défini les quantités turbulentes comme des quantités ne pouvant être reproduites « à l'identique » (avec toute l'imprécision qu'une telle formulation laisse sous entendre) en laboratoire.

Une définition plus mathématique consiste à dire qu'une quantité est dite turbulente lorsque son spectre de décomposition de Fourier présente des valeurs significatives sur une plage continue de fréquences  $]k_1; k_2[$  avec  $k_1 \ll k_2$ . Encore une fois, cette définition laisse une large place à l'interprétation, puisque l'inégalité large ne peut être définie que sur des critères qualitatifs et arbitraires. La figure 1.1 donne une idée des spectres spatiaux de grandeurs typiques.

De façon plus pragmatique, il est clair qu'une partie des évolutions temporelles échapperont aux grilles de calcul avec lesquelles on cherchera à les simuler. De fait, il est donc nécessaire de modéliser l'influence macroscopique qu'ont les échelles turbulentes en fonction des échelles « visibles ». C'est la raison pour laquelle la décomposition de Reynolds est introduite.

### 1.2.2 Décomposition de Reynolds

La décomposition de Reynolds consiste à décomposer chaque inconnue physique scalaire (et chaque composante des grandeurs vectorielles) en deux composantes :

$$a = \langle a \rangle + a' \quad (1.34)$$

- (i) une composante **moyenne**  $\langle a \rangle$ , qui correspond aux évolutions à grande échelle spatio-temporelles du système. On suppose que lorsqu'on simule numériquement le système (1.31) en le discrétisant, les résolutions qu'on utilise sont suffisamment bonnes pour pouvoir bien modéliser ces composantes moyennes. Cette composante correspond à la superposition des modes  $k < k_c$  dans (1.32).
- (ii) une composante **turbulente**  $a'$ , qui correspond à des tendances à plus courtes échelles spatio-temporelles. Elles correspondent à la superposition des modes  $k \geq k_c$  dans (1.32).

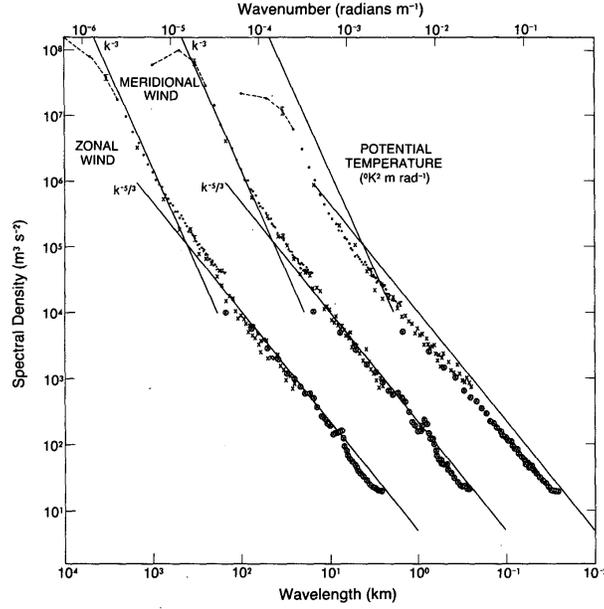


FIGURE 1.1 – Spectres de puissance de la variance de vents méridional et longitudinal, ainsi que de la température, au voisinage de la tropopause. Le nuage de points correspond à des mesures physiques (expérience GASP). Extrait de [Nastrom et Gage \(1985\)](#).

On exige que la décomposition de Reynolds satisfasse les conditions suivantes :

$$\langle a' \rangle = 0; \quad \langle \partial_t a \rangle = \partial_t \langle a \rangle; \quad \forall \alpha \in \{x, y, z\}, \quad \langle \partial_\alpha a \rangle = \partial_\alpha \langle a \rangle \quad (1.35)$$

En outre, on exige que l'opérateur de moyenne satisfasse deux propriétés supplémentaires :

- la propriété de *double moyenne* :

$$\langle \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle \quad (1.36)$$

- la propriété de *moyenne de produit* :

$$\langle \langle x \rangle y \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (1.37)$$

Les trois opérateurs de moyenne les plus classiques sont les suivants :

- la moyenne en temps :

$$\langle u \rangle^T = \frac{1}{T} \int_T u(\mathbf{x}, t) dt \quad (1.38)$$

où  $T \in \mathbb{R}_+$  est une période, correspondant en général au pas de discrétisation temporelle choisi dans le modèle.

- la moyenne en espace :

$$\langle u \rangle^E = \frac{1}{|E|} \int_E u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1.39)$$

où  $E \subset \Omega_o$  ou  $E \subset \Omega_a$  est un sous-domaine, la plupart du temps correspondant à une maille de la grille de discrétisation spatiale utilisée.

- dans le cas où  $u$  est initialisée à partir d'une variable aléatoire  $r$  de l'univers  $\Gamma$  (par exemple, si on ne connaît pas exactement l'état initial du système) :

$$\langle u \rangle^s = \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}, t, r) dr \quad (1.40)$$

ce qui correspond à une moyenne statistique de  $u$  vis à vis de  $r$ .

En théorie, comme cela est précisé dans [Mohammadi et Pironneau \(1994\)](#), seule la moyenne statistique (1.40) remplit naturellement les conditions (1.36) et (1.37). Dans la pratique, on supposera que la méthode choisie remplit l'ensemble des conditions listées ci-dessus : cela correspond à faire l'hypothèse d'ergodicité, qui suppose que les trois filtres présentés ci-dessus sont équivalents. Cette hypothèse supplémentaire nous permettra d'utiliser les propriétés algébriques de la décomposition de Reynolds afin de simplifier son inclusion dans les équations primitives. On suppose que l'ensemble des variables physique  $(\mathbf{U}, S, T, q)$  vérifient donc cette propriété d'ergodicité.

### 1.2.3 Injection dans les équations primitives

La prise en compte de la turbulence dans les modèles de circulation globale passe, dans un premier temps, par la réinjection de la décomposition de Reynolds dans le système (1.31), puis, dans un second temps, par une opération de moyennage, supposée vérifier l'hypothèse d'ergodicité, appliquée sur l'ensemble des membres de chaque équation. Cette opération en deux temps donne naissance à une nouvelle version du système d'équations primitives, incluant un certain nombre de termes pouvant être associés à des « ombres portées », effets macroscopiques de phénomènes microscopiques turbulents. À titre d'exemple, intéressons-nous à la décomposition de Reynolds appliquée à l'équation (1.31a), propre à la quantité de mouvement  $u$ .

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle u \rangle) - \nu_{\alpha}^m \Delta \langle u \rangle - f \langle v \rangle + \partial_x \langle \bar{p} \rangle / \rho_{0,\alpha} \\ + \langle \partial_t u' \rangle - \nu_{\alpha}^m \langle \Delta u' \rangle - f \langle v' \rangle + \partial_x \langle p' \rangle / \rho_{0,\alpha} \\ + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle u' + \mathbf{U}' \langle u \rangle) \\ + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' u' \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

La première ligne de (1.41) correspond à l'équation écrite pour les termes moyennés seulement, bien résolu par la grille. Intéressons-nous aux termes issus de la décomposition de Reynolds dans (1.41), écrits en couleurs, qui rendent compte des phénomènes sous-échelles. Étudions ce qu'il advient de ces termes lorsqu'on applique l'opérateur de moyenne sur l'ensemble de l'équation (1.41) :

- les termes écrits en noir restent inchangés ;
- les termes en **marron clair** sont nuls, conséquence directe de (1.35) ;
- les deux termes en **marron foncé** s'annulent aussi, conséquence de (1.37) : en effet, pour l'opérateur de moyenne, sous l'hypothèse d'ergodicité, les grandeurs déjà moyennées sont vues comme des constantes.

$$\langle \langle \mathbf{U} \rangle u' \rangle = \langle \mathbf{U} \rangle \langle u' \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{U}' \langle u \rangle \rangle = \langle \mathbf{U}' \rangle \langle u \rangle = 0 \quad (1.42)$$

- le terme en **orange**, lui, reste : c'est celui qui témoigne, à grande échelle, des phénomènes sous-échelles.

(1.41) se simplifie alors pour donner :

$$\partial_t \langle u \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle u \rangle) - \nu_\alpha^m \Delta \langle u \rangle - f \langle v \rangle + \partial_x \langle p \rangle / \rho_{0,\alpha} + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' u' \rangle = 0 \quad (1.43)$$

En répétant ce procédé permettant d'obtenir (1.43) à partir de (1.31a) sur l'ensemble des équations du système (1.31), on obtient le système suivant :

$$\partial_t \langle u \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle u \rangle) - \nu_\alpha^m \Delta \langle u \rangle - f \langle v \rangle + \partial_x \langle p \rangle / \rho_{0,\alpha} + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' u' \rangle = 0 \quad (1.44a)$$

$$\partial_t \langle v \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle v \rangle) - \nu_\alpha^m \Delta \langle v \rangle + f \langle u \rangle + \partial_y \langle p \rangle / \rho_{0,\alpha} + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' v' \rangle = 0 \quad (1.44b)$$

$$\partial_z \langle p \rangle + \langle \tilde{\rho} \rangle g = 0 \quad (1.44c)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U} \rangle = 0 \quad (1.44d)$$

$$\langle \tilde{\rho} \rangle = \rho(T, S, p, q) - \rho_{0,\alpha} \quad (1.44e)$$

$$\partial_t \langle T \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle T \rangle) - \mathcal{K}_T \Delta \langle T \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' T' \rangle = \mathcal{F}_T \quad (1.44f)$$

$$\partial_t \langle S \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle S \rangle) - \mathcal{K}_S \Delta \langle S \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' S' \rangle = 0 \text{ dans } \Omega_o \quad (1.44g)$$

$$\partial_t \langle q \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle q \rangle) - \mathcal{K}_q \Delta \langle q \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' q' \rangle = 0 \text{ dans } \Omega_a \quad (1.44h)$$

La nouveauté du système (1.44) par rapport au système (1.31) est l'apparition de termes dus à la turbulence, écrits en orange. Ces termes représentent des dynamiques ne pouvant pas être prises en compte par la grille de calcul ; cependant, il n'est pas envisageable de négliger ces termes qui jouent un rôle central, notamment dans la description de la dynamique de part et d'autre de la surface de l'océan.

Dans les modèles numériques, ces termes turbulents sont *paramétrisés*, c'est-à-dire qu'ils sont exprimés en fonction des termes à grande échelle, afin de pouvoir être évalués et pris en compte. Ces paramétrisations turbulentes sont spécifiques à la modélisation du système océan-atmosphère, y sont d'une importance prépondérante (à la fois sur les plans théorique et numérique), et sont source de difficultés mathématiques.

## 1.2.4 Fermeture turbulente

Les schémas de paramétrisations turbulentes peuvent aussi être vus comme des schémas de *fermetures* turbulentes ; cette dénomination explicite le rôle mathématique joué par celles-ci, qui est de rajouter des équations au système (1.44), afin d'atteindre l'équilibre entre nombre d'équations et d'inconnues.

### Tenseur de Reynolds

Les fermetures turbulentes ont d'abord été introduites pour les termes de turbulences liées aux équations d'évolution de quantité de mouvement (1.44a) et (1.44b). Reynolds (1895) introduit le *tenseur de Reynolds*  $\underline{\mathcal{R}}$  ainsi :

$$\underline{\mathcal{R}} := - \begin{bmatrix} \langle u'^2 \rangle & \langle u'v' \rangle & \langle u'w' \rangle \\ \langle v'u' \rangle & \langle v'^2 \rangle & \langle v'w' \rangle \\ \langle w'u' \rangle & \langle w'v' \rangle & \langle w'^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Ce tenseur symétrique d'ordre 2 et de dimension 3 n'introduit aucune hypothèse supplémentaire : en revanche, il contient tous les termes nécessaires à la modélisation à la représentation grande échelle des phénomènes turbulents propres à l'évolution de la quantité de mouvement. C'est la paramétrisation des différentes composantes du tenseur  $\underline{\mathcal{R}}$  qui se fait au prix d'hypothèses supplémentaires.

Ce formalisme, sous forme de tenseur, permet de réécrire les équations de quantités de mouvement horizontales du système (1.44) :

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{U}u) - \nu_\alpha^m \Delta u - fv + \partial_x p / \rho_{0,\alpha} - \sum_{\beta \in \{x,y,z\}} \partial_\beta \underline{\mathcal{R}}_{\beta,x} = 0 \quad (1.46a)$$

$$\partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{U}v) - \nu_\alpha^m \Delta v + fu + \partial_y p / \rho_{0,\alpha} - \sum_{\beta \in \{x,y,z\}} \partial_\beta \underline{\mathcal{R}}_{\beta,y} = 0 \quad (1.46b)$$

### Hypothèse de Reynolds

L'hypothèse de Reynolds propose une forme pour la modélisation des 6 coefficients de  $\underline{\mathcal{R}}$ . Dans sa forme la plus générale, elle s'écrit :

$$\underline{\mathcal{R}} = \underline{\mathcal{R}} \left( \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \right) \quad (1.47)$$

ce qui signifie que  $\underline{\mathcal{R}}$  ne dépend de l'état physique du système qu'au travers du tenseur  $\underline{\mathcal{T}} := (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$ . Il existe un grand nombre de modèles rentrant dans le formalisme (1.47). Avant d'en expliciter certains, introduisons deux quantités d'intérêt pour la modélisation de la turbulence :

- L'énergie cinétique turbulente  $k$ , définie par :

$$k := \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle^{1/2} = \frac{\langle \|\mathbf{U}'\|_2 \rangle}{2} \quad (1.48)$$

Celle-ci quantifie l'énergie cinétique dont disposent les échelles turbulentes.

- Le taux de dissipation d'énergie turbulente  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon := \nu_\alpha^m \left\langle \left\| \nabla \mathbf{U}' + (\nabla \mathbf{U}')^T \right\|^2 \right\rangle \quad (1.49)$$

où  $\nu_\alpha^m$  est la viscosité cinématique introduite dans (1.24). Cette grandeur quantifie la cascade d'énergie des échelles turbulentes vers les échelles macroscopiques.

Dans Mohammadi et Pironneau (1994) (où la non-stratification est supposée), il est mathématiquement prouvé qu'en prenant comme hypothèse (1.47) et en se plaçant dans  $\mathbb{R}^3$ , la seule forme possible pour l'expression de  $\underline{\mathcal{R}}$  permettant d'assurer certaines propriétés mathématiques de conservation (par translation, transformation galiléenne ou rotation du repère dans lequel on les écrit) à vérifier par les équations de Navier-Stokes est la suivante :

$$\underline{\mathcal{R}} = a \underline{\underline{I}}_3 + b \underline{\underline{T}} + c \underline{\underline{T}}^2 \quad (1.50)$$

où  $(a, b, c)$  sont trois fonctions scalaires et  $\underline{\underline{I}}_3$  le tenseur identité.

**Modèle  $k - \varepsilon$** 

Le modèle  $k - \varepsilon$  correspond à un choix pour  $(a, b, c)$  tels que décrits par (1.50). Celui-ci prescrit :

$$\underline{\mathcal{R}} = -\frac{2}{3}kI_3 + \left( v_\alpha^m + c_\kappa \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \underline{\mathcal{T}} \quad (1.51)$$

où  $c_\kappa$  est une constante sans dimension, supposée donnée par des observations.

(1.51) revient à faire les 2 hypothèses suivantes :

(i)  $(a, b, c)$  de (1.50) ne dépendent que de  $(k, \varepsilon, \underline{\mathcal{T}})$

(ii)  $c = 0$  et  $(a, b)$  sont donnés par (1.51)

Bien entendu, ci-dessus (ii)  $\Rightarrow$  (i). Toutefois, dans la hiérarchie des hypothèses faites par les concepteurs de fermetures turbulentes, le choix des paramètres régissant les trois fonctions  $(a, b, c)$  préempte naturellement sur le choix des fonctions en elles-mêmes.

La formulation  $k - \varepsilon$  a le mérite d'être définie avec un formalisme et des arguments mathématiques rigoureux, liés à l'invariance des équations de Navier-Stokes par des transformations « de cadre ». Cela dit, la légitimité de (1.51) repose sur des hypothèses physiques (notamment l'isotropie parfaite) qui ne sont pas vérifiées pour ce qui nous intéresse. En outre, la plupart des modèles utilisant des fermetures  $k - \varepsilon$  les cantonnent à la propagation verticale ; ainsi, seules les composantes  $\partial_z$  des gradients seront traitées avec le formalisme (1.51). Aucun argument mathématique ne justifie la validité de fermetures  $k - \varepsilon$  « partielles », car non isotropes (Umlauf et Burchard, 2003). C'est pourquoi nous préférons dans la suite étudier un autre type de formulation, certes plus empirique, mais plus fréquemment rencontrée dans les modèles numériques.

**Hypothèse de Boussinesq : introduction de viscosités turbulentes**

Boussinesq (1897) observe expérimentalement que l'écoulement des « tourbillons » (ce qu'on appellerait aujourd'hui la partie turbulente de l'écoulement) est colinéaire au gradient de la vitesse macroscopique  $\mathbf{U}$ . C'est sur cette *hypothèse de Boussinesq* (à ne pas confondre avec l'approximation de Boussinesq dont il a été précédemment été question) que la quasi-intégralité des modèles de turbulence ont été construits, puis implémentés numériquement. Dans le contexte qui nous intéresse, il semblerait que cette hypothèse de colinéarité soit plutôt justifiée ; c'est pourquoi nous l'adoptons.

En utilisant un formalisme mathématique mis au goût du jour, l'hypothèse de Boussinesq consiste à supposer que :

$$\langle \mathbf{U}'_\beta \mathbf{U}'_\gamma \rangle \propto \partial_\gamma \langle \mathbf{U}_\beta \rangle \quad (1.52)$$

ce qui constitue une forme particulière de l'hypothèse de Reynolds (1.47). La question centrale est désormais de trouver le coefficient scalaire de proportionnalité dans (1.52).

Dans le cadre de fermetures de Reynolds classiques, ces coefficients de proportionnalités prennent le nom de *viscosités turbulentes*. Ces grandeurs jouent le rôle de viscosité pour le transport turbulent de quantité de mouvement. Nos problèmes étant isotropes en  $(x, y)$ , on distinguera deux viscosités turbulentes,  $\nu_h^t$  et  $\nu_v^t$ , respectivement horizontale et verticale. Celles-ci sont définies ainsi :

$$\langle \mathbf{u}'_h : \mathbf{u}'_h \rangle = -\nu_h^t \nabla_h \langle \mathbf{u}_h \rangle \quad (1.53a)$$

$$\langle w' \mathbf{u}'_h \rangle = -\nu_v^t \partial_z \langle \mathbf{u}_h \rangle \quad (1.53b)$$

### Diffusivités turbulentes

Jusqu'à présent, notre étude des schémas de paramétrisations turbulentes n'ont mis en jeu que la propagation de turbulence pour la quantité de mouvement ; or, (1.44) fait aussi intervenir des termes de transport turbulent de quantités scalaires (température, humidité, salinité). La prise en compte de ces termes se fait en extrapolant le résultat (1.53) aux quantités scalaires, en adaptant la sémantique ; là où, pour les quantités de mouvement, on parlait de *viscosités* turbulentes, on parlera désormais de *diffusivités* turbulentes.

Chaque grandeur scalaire présentant un terme de transport turbulent dispose ainsi d'une paire de diffusivités turbulentes, toujours en opérant une distinction entre transports horizontal et vertical. Par analogie avec (1.53), celles-ci sont définies ainsi :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_h' T' \rangle &= -\mathcal{K}_{T,h}^t \nabla_h \langle T \rangle & \langle w' T' \rangle &= -\mathcal{K}_{T,v}^t \partial_z \langle T \rangle \\
\langle \mathbf{u}_h' S' \rangle &= -\mathcal{K}_{S,h}^t \nabla_h \langle S \rangle & \langle w' S' \rangle &= -\mathcal{K}_{S,v}^t \partial_z \langle S \rangle \\
\langle \mathbf{u}_h' q' \rangle &= -\mathcal{K}_{q,h}^t \nabla_h \langle q \rangle & \langle w' q' \rangle &= -\mathcal{K}_{q,v}^t \partial_z \langle q \rangle
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Notons que si l'établissement de viscosités turbulentes pouvait s'inscrire dans le cadre d'une théorie mathématique robuste, formalisée à l'aide du tenseur de Reynolds, celui des diffusivités turbulentes ne bénéficie pas de la même légitimité théorique. Toutefois, (1.54) permet, d'un point de vue numérique, une relativement bonne prise en compte des effets de la turbulence sur les quantités scalaires d'intérêt. Ainsi, l'extrapolation de (1.53) à (1.54), théoriquement commode puisque instaurant une certaine forme de symétrie dans la gestion de la turbulence au sein des modèles numériques, est justifiée *de facto* par ses bonnes propriétés numériques.

### Forme finale des équations primitives avec fermeture de Reynolds

Désormais, on omettra d'explicitier l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$ , puisqu'il est présent dans chaque terme de chaque équation. En reprenant l'ensemble des hypothèses et simplifications décrites dans ce paragraphe, on obtient cette forme finale d'équations primitives incluant les effets dus aux échelles turbulentes :

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{U}u) - \nu_\alpha^m \Delta u - f v - \partial_z (\nu_\alpha^t \partial_z u) - \nabla_h \cdot (\nu_h^t \nabla_h u) + \partial_x \tilde{p} / \rho_{0,\alpha} = 0 \tag{1.55a}$$

$$\partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{U}v) - \nu_\alpha^m \Delta v + f u - \partial_z (\nu_\alpha^t \partial_z v) - \nabla_h \cdot (\nu_h^t \nabla_h v) + \partial_y \tilde{p} / \rho_{0,\alpha} = 0 \tag{1.55b}$$

$$\partial_z \tilde{p} + \tilde{\rho} g = 0 \tag{1.55c}$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \tag{1.55d}$$

$$\tilde{\rho} = \rho(T, S, p, q) - \rho_{0,\alpha} \tag{1.55e}$$

$$\partial_t T + \nabla \cdot (\mathbf{U}T) - \mathcal{K}_T \partial_{zz}^2 T - \partial_z (\mathcal{K}_{T,v}^t \partial_z T) - \nabla_h \cdot (\mathcal{K}_{T,h}^t \nabla_h T) = \mathcal{F}_T \tag{1.55f}$$

$$\partial_t S + \nabla \cdot (\mathbf{U}S) - \mathcal{K}_S \partial_{zz}^2 S - \partial_z (\mathcal{K}_{S,v}^t \partial_z S) - \nabla_h \cdot (\mathcal{K}_{S,h}^t \nabla_h S) = 0 \tag{1.55g}$$

$$\partial_t q + \nabla \cdot (\mathbf{U}q) - \mathcal{K}_q \partial_{zz}^2 q - \partial_z (\mathcal{K}_{q,v}^t \partial_z q) - \nabla_h \cdot (\mathcal{K}_{q,h}^t \nabla_h q) = 0 \tag{1.55h}$$

où toutes les équations sont valables dans  $\Omega_o \cup \Omega_a$ , à l'exception de (1.55g) et (1.55h) qui ne sont valables que dans l'océan et l'atmosphère, respectivement.

## Aspects lacunaires

Le système (1.55) fera désormais office de système de référence dans les autres chapitres. Ce système est incomplet, et ce sur au moins deux points non négligeables :

- (i) il lui manque ses conditions aux limites (à l'image de son aïeul non-turbulent (1.12))
- (ii) le calcul de la viscosité et des diffusivités turbulentes, supposées rendre compte des effets macroscopiques des échelles turbulentes, n'a pas été précisé.

Ces deux aspects n'ont pour l'instant pas été éclaircis parce que leur traitement est intrinsèquement lié à la paramétrisation spécifique à une région n'étant pas traitée par les modèles numériques *via* (1.55), appelée couche limite de surface. Il est donc nécessaire de plus particulièrement s'intéresser à cette région.

# Chapitre 2

## La couche limite de surface

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Considérations géométriques et découpage du domaine</b>	<b>30</b>
2.1.1	Exclusion de la CLS dans le cadre fluide-structure	30
2.1.2	Adaptation au contexte océan-atmosphère	31
2.1.3	Autour de la notion de « surface »	34
2.1.4	Interactions entre la CLS et les modèles	35
2.1.5	Découpage de la CLS en sous-régions	38
<b>2.2</b>	<b>Théorie de Monin-Obukhov</b>	<b>38</b>
2.2.1	Loi du mur	40
2.2.2	Couche à flux constant	41
2.2.3	Échelles de friction	42
2.2.4	Construction de groupes sans dimension	42
2.2.5	Lien entre propriétés macroscopiques et échelles turbulentes	45
<b>2.3</b>	<b>Conséquences de la théorie de Monin-Obukhov sur le modèle atmosphérique</b>	<b>46</b>
2.3.1	Profils de solution	46
2.3.2	Sous-couches visqueuses	51
2.3.3	Conditions aux limites	55
<b>2.4</b>	<b>La couche limite de surface océanique</b>	<b>57</b>
2.4.1	Flux turbulents dans la CLS océanique	58
2.4.2	Échelles de friction océaniques et stratification	58
2.4.3	Profils de solution au sein de la CLSO-MO	60
2.4.4	Sous-couches visqueuses océaniques	62
<b>2.5</b>	<b>Vers un système couplé océan-CLS-atmosphère</b>	<b>62</b>
2.5.1	Bilan des paramétrisations introduites	63
2.5.2	Cohérence du couplage	65
2.5.3	Proposition de diagnostic des longueurs de rugosité océaniques	68
<b>2.6</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>72</b>
2.6.1	Quelques limitations et commentaires	72
2.6.2	Comment complètement « fermer » les paramétrisations CLS?	73

---

La modélisation de l'air humide et de l'eau salée de part et d'autre de la surface de l'océan entre dans le cadre plus global de la modélisation de *couches limites*. De façon générale, ces régions

sont caractérisées par de très forts gradients, les solutions  $y$  étant définies par des profils type « loi du mur », dépendant de façon logarithmique de la distance à l'interface. Par conséquent, ces régions ne pourraient être traitées numériquement que si l'on disposait d'une discrétisation verticale extrêmement fine, ce qui dans notre contexte est prohibitif en terme de coûts de calcul.

Ce chapitre a pour objectif de présenter de la manière la plus claire possible, au sens mathématique, un ensemble de formulations numériques spécifiques à la modélisation de la couche limite de surface (ci-après CLS), et développées par la communauté des sciences du climat et de l'océan. Celles-ci correspondent aux lois empiriques évoquées ci-dessus, permettant d'obtenir les profils de solutions dans ce que la figure 2.1 dénotait  $\Omega_{cl}$ . Par conséquent, aux yeux du lecteur non spécialiste de ce domaine, ce chapitre introduit un grand nombre de formulations inusuelles. Bien que pouvant paraître fastidieuse, nous estimons que la présentation exhaustive des paramétrisations propres à la CLS est un prérequis nécessaire à la compréhension du problème de couplage océan-atmosphère.

En guise d'introduction, le § 2.1 traite des aspects de nature géométrique, et propres au découpage du domaine au voisinage de la CLS. Le § 2.2 introduit l'outil théorique utilisé pour mener à bien la paramétrisation d'une partie de la CLS atmosphérique, appelé la théorie de Monin-Obukhov. Le § 2.3 en montre les conséquences sur les paramétrisations jouant sur le modèle atmosphère. Le § 2.4 étend cette théorie à la couche limite de surface océanique, entre autres par symétrie. Enfin, le § 2.5 récapitule les paramétrisations CLS introduites, et précise la notion de cohérence du couplage océan-CLS-atmosphère.

## 2.1 Considérations géométriques et découpage du domaine

Avant de traiter en soi la modélisation de la CLS à partir du § 2.2, cette section a pour but de présenter la géométrie de cette région, ainsi que la stratégie employée pour la traiter. Tout d'abord, le § 2.1.1 présente une stratégie classique de découpage du domaine mise en place pour traiter les couches limites ; le § 2.1.2 adapte cette stratégie au contexte océan-atmosphère. Ensuite, le § 2.1.3 se focalise sur la notion de surface, qui n'est pas triviale dans notre contexte. Le § 2.1.4 présente les moyens par lesquels la CLS interagit avec les modèles numériques propres à l'océan et à l'atmosphère. Enfin, la § 2.1.5 décrit de façon détaillée la structure interne de la CLS, et le découpage géométrique qu'on en fera pour la modéliser ultérieurement.

### 2.1.1 Exclusion de la CLS dans le cadre fluide-structure

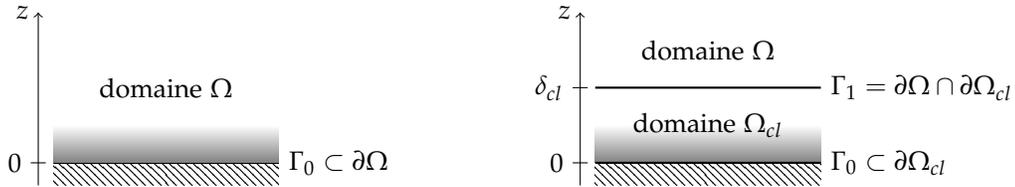
Nous avons vu en introduction de chapitre que le traitement numérique par discrétisation de la CLS nécessiterait un coût de calcul prohibitif. Cette sous-section présente une stratégie mise en place pour contourner ce problème ; nous la présentons ici dans son cadre historique fluide-structure. Le § 2.1.2 présentera une adaptation de cette stratégie au cas océan-atmosphère.

L'idée derrière cette stratégie est d'exclure la couche limite du domaine de calcul en décalant légèrement le bord du domaine depuis l'interface jusqu'à un niveau où les gradients verticaux peuvent être traités par la grille de calcul (Mohammadi *et al.*, 1998). La figure 2.1 représente schématiquement les deux configurations possibles.

Lorsqu'on utilise la stratégie schématisée par la figure 2.1b, la région « couche limite » est exclue du domaine de calcul  $\Omega$  ; elle constitue un nouveau sous-domaine  $\Omega_{cl}$ , sur lequel les solutions sont extrapolées à partir de lois empiriques, plutôt que traitées numériquement. Cette straté-

gie permet d'éviter d'avoir à discrétiser le voisinage immédiat de l'interface, au prix de deux nouveaux aspects à prendre en considération :

- (q1) Comment dimensionner le paramètre  $\delta_{cl}$  ?
- (q2) Quelle condition de bord appliquer sur  $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \partial\Omega_{cl}$  de façon à ce que le raccord entre domaine de calcul  $\Omega$  et domaine de couche limite  $\Omega_{cl}$  soit transparent, c'est à dire que le découpage artificiel introduit soit sans impact sur la solution ?



(a) Couche limite incluse dans le domaine; l'interface physique  $\Gamma_0$  est sur le bord du domaine  $\Omega$ .

(b) Couche limite exclue du domaine de calcul, découpé de façon adaptée : le bord du domaine a été décalé de  $\delta_{cl}$ , ce qui définit un nouveau domaine de couche limite  $\Omega_{cl}$ .  $\Gamma_0$ , interface physique, est contenue dans  $\partial\Omega_{cl}$ .  $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \partial\Omega_{cl}$  est l'interface (non physique) entre domaine de calcul et domaine couche limite.

FIGURE 2.1 – Deux stratégies différentes pour traiter un domaine de calcul au voisinage d'une couche limite due à la présence d'une interface plate définie par  $z = 0$ .  $\Omega$  est le domaine de calcul. Les régions hachurées correspondent à la structure, c'est à dire à une région située hors domaine. Les dégradés gris-blanc représentent la région où les gradients sont potentiellement très élevés, et où la résolution numérique est à proscrire.

## 2.1.2 Adaptation au contexte océan-atmosphère

Le contexte de la modélisation océan-atmosphère correspond à une interaction fluide-fluide, présentant donc une couche limite de surface bilatérale, suivant le milieu considéré. Par rapport à de classiques couches limites type « fluide-structure », telles que représentées sur la figure 2.1, la couche limite de surface océan-atmosphère présente de très forts gradients de solutions des deux côtés de l'interface  $z = 0$ .

La CLS est définie comme une tranche délimitée par deux coupes à  $z$  constant,  $z_o^1$  et  $z_a^1$  tels que  $z_o^1 < 0 < z_a^1$ . Dans les modèles numériques, ces deux hauteurs ( $z_o^1, z_a^1$ ) correspondent aux niveaux verticaux des centres des mailles les plus proches de la surface de l'océan, respectivement pour l'océan et l'atmosphère. Lorsqu'on se rapproche de la surface de l'océan, on sait que les profils de solution prendront des formes de type « loi du mur », qui, du fait que le nombre de Reynolds  $y$  est très élevé, ne pourraient être traitées numériquement que si l'on dispose d'une discrétisation verticale extrêmement fine lorsque  $|z| \rightarrow 0$ .

Dans leur architecture classique, les modèles numériques considèrent que les régions  $z \in ]z_o^1; 0[$  et  $z \in ]0; z_a^1[$  sont strictement incluses dans leur première maille respective. Cela correspond à mettre en place la stratégie de la figure 2.1a pour deux couches limites l'une au-dessus de l'autre. Rappelons qu'on sait *a priori* qu'intrinsèquement, lorsqu'on discrétisera, au moins une

partie de la physique ne pourra pas bien être représentée, faute de résolution verticale suffisante. Les mécanismes classiques de couplage océan-atmosphère s'articulent quasi-systématiquement ainsi :

- (i) le modèle océan transmet des « valeurs de surface » (en réalité, les valeurs au centre de sa première maille) au modèle atmosphère ;
- (ii) à partir de ces informations, le modèle atmosphère, qui contient un module de paramétrisations de flux turbulents, calcule ces flux ;
- (iii) le modèle atmosphère se prescrit à lui-même ces flux, et les transmet au modèle océan.

En quelque sorte, la paramétrisation de la couche limite est traitée par le modèle atmosphérique, qui ensuite en transmet les effets au modèle océan. La couche limite, ne pouvant être traitée numériquement par discrétisation de (1.55), n'est prise en compte que par compensation en injectant des flux turbulents dans la première maille de chaque sous-modèle.

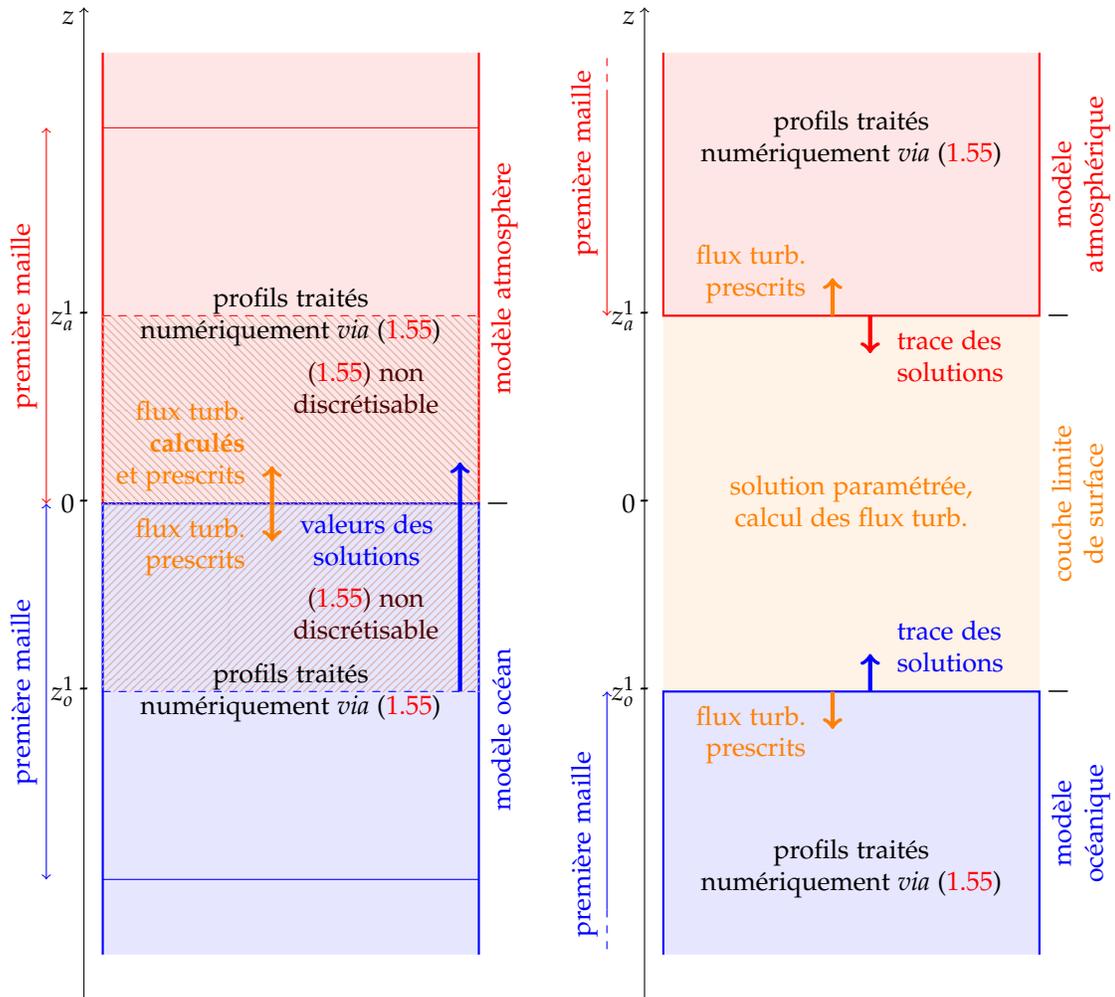
Mettre en place une stratégie comme celle indiquée sur la figure 2.1b revient à considérer que les lignes  $z = z_o^1$  et  $z = z_a^1$  définissent les nouvelles frontières géométriques des domaines océan et atmosphère, au voisinage de la surface. Les  $(z_\alpha^1)_{\alpha \in \{o,a\}}$  sont choisis de façon à ce qu'on ait la garantie que dès que  $|z| \geq |z_\alpha^1|$ , le modèle peut traiter numériquement (1.55). On aura typiquement  $z_o^1 \approx -1$  m et  $z_a^1 \approx 10$  m. Ce sont donc des considérations numériques qui façonnent la géométrie des domaines.

Ce choix a pour conséquence la création d'une « zone tampon » entre les deux sous-modèles ; elle correspond à la couche limite de surface. On peut voir cette région comme un troisième sous-modèle, bien moins vaste et complexe que les modèles océan et atmosphère. Au sein de ce modèle de CLS, on sait que la simulation numérique des équations primitives est vouée à l'échec ; c'est pourquoi les solutions y sont paramétrisées. Enfin, le modèle CLS échange avec les modèles océan et atmosphère : il reçoit les valeurs de surface des deux domaines classiques, puis leur transmet les flux turbulents qu'il a lui-même calculés. Contrairement à l'approche classique, ce n'est donc plus le modèle atmosphère qui gère le calcul de flux turbulent.

Nous pensons que cette stratégie offre plusieurs avantages, nommément :

- (i) Le domaine de chaque sous-modèle correspond effectivement à la région où les équations (1.55) sont valables et peuvent être traitées numériquement, ce qui n'était pas le cas auparavant.
- (ii) Fondamentalement, les traitements des couches limites de surface océanique et atmosphérique devraient se faire de façons analogues ; la nouvelle approche rétablit une forme de symétrie qui était rompue lorsque le modèle atmosphère seul s'en chargeait.
- (iii) Comme nous le verrons au § 2.1.3, la surface de l'océan peut présenter une géométrie complexe, par exemple *via* des effets dus aux vagues. Cette nouvelle stratégie permet d'outrepasser ce problème ; en fixant les  $(z_\alpha^1)$  suffisamment loin de la surface de l'océan, on sait que les frontières des domaines océan et atmosphère seront fixes, et donc que la géométrie éventuellement complexe de la surface de l'océan ne devra être prise en compte que par le modèle de couche limite.

La figure 2.2 peut être vue comme une adaptation de la figure 2.1 dans le cadre du couplage océan-atmosphère.



(a) Stratégie usuelle : les premières mailles de chaque sous-modèle se rendent jusqu'à la surface de l'océan. Le modèle océan envoie de l'information (la trace des solutions) au modèle atmosphère, qui ensuite calcule les flux turbulents qu'il se prescrit à lui-même. Ces mêmes flux turbulents sont par la suite prescrits au modèle océan. Dans chaque sous-modèle, la région hachurée correspond à une région pour laquelle la simulation numérique des équations primitives (1.55) n'est pas appropriée.

(b) Nouvelle stratégie : les premières mailles de chaque sous-domaine commencent à partir des niveaux ( $z_a^1$ ). Les modèles atmosphère et océan envoient les traces de leurs solutions à un troisième sous-modèle propre à la couche limite, au sein duquel les solutions sont paramétrisées. Ce modèle de couche limite calcule les flux turbulents, qui sont ensuite prescrits aux deux sous-modèles océan et atmosphère.

FIGURE 2.2 – Représentations schématiques des stratégies pour le découpage géométrique des domaines au voisinage de la surface de l'océan. (a) correspond à la stratégie classiquement utilisée ; (b), à la nouvelle stratégie, où seules des régions pour lesquelles (1.55) peut être résolu de façon satisfaisante sont incluses dans chaque sous-domaine.

### 2.1.3 Autour de la notion de « surface »

Tout au long de notre étude, on supposera que la surface de l’océan présente une géométrie parfaitement plate, et se comporte comme un « toit rigide ». Ceci est une hypothèse lourde et restrictive. En effet, la surface de l’océan est plutôt décrite par une surface libre, qu’on peut paramétriser à l’aide d’une fonction  $\eta : (x, y) \mapsto \eta(x, y)$ , comme indiqué sur la figure 2.3.

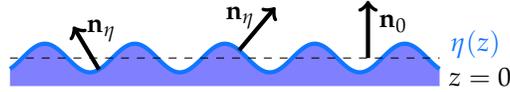


FIGURE 2.3 – Représentation de l’océan comme surface libre.

Comme le montre la figure 2.3, si la surface de l’océan est paramétrisée par la fonction  $\eta$ , alors son vecteur normal (orienté vers l’atmosphère) est donné par :

$$\mathbf{n}_\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2 + (\partial_y \eta)^2}} \begin{pmatrix} \partial_x \eta \\ \partial_y \eta \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

L’approximation de toit rigide revient à supposer  $\eta(x, y) = 0$  partout, et donc à considérer que le vecteur normal est parfaitement vertical, i.e.  $\mathbf{n}_\eta = \mathbf{n}_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$ .

Nous verrons au § 2.1.4 que cette hypothèse permet de simplifier l’écriture des conditions aux limites des équations primitives.

#### Effets de vagues

La formation de vagues agit aussi sur la géométrie de la surface de l’océan, et est l’une des principales conséquences physiques qu’a l’action de l’atmosphère, *via* la transmission de quantité de mouvement, sur l’océan.

Les dernières années ont ainsi vu se développer, à raison, des modèles couplés océan-*vagues*-atmosphère (par exemple, Doyle, 1995; Chen *et al.*, 2007). La principale raison pour laquelle nous avons préféré négliger l’ensemble des aspects liés à la présence de vagues est qu’à notre connaissance, il n’existe pas de formalisme mathématique unifié au sein duquel se développent les modèles de vague, contrairement, à titre d’exemple, aux paramétrisations de la propagation de la turbulence verticale. Par conséquent, il est très difficile de mener à bien une étude mathématique du couplage océan-*vagues*-atmosphère qui soit facilement modulable, et ait donc valeur d’universalité.

Nous avons conscience du caractère limitant de cette hypothèse. Plutôt que de se placer « en pointe » du développement des paramétrisations actuelles, nous préférons considérer des cas simplifiés, certes moins réalistes physiquement, mais pour lesquels il est possible d’obtenir des résultats mathématiques au niveau continu. Ces résultats peuvent servir de bases à des modèles plus élaborés, qui incorporeraient une plus grande variété de phénomènes physiques, à commencer par les vagues.

Une autre courte discussion autour de la notion de la surface sera amorcée au § 3.4.1, après avoir introduit un certain nombre de notions éclairant ce problème d’une nouvelle lumière.

### L'hypothèse de surface plate est-elle réellement utile ?

Un commentaire s'impose : l'un des objectifs motivant la séparation de la couche limite de surface (cf. figure 2.1b) des domaines de calcul était de ne pas gérer la géométrie éventuellement complexe de la surface océanique. L'hypothèse de surface plate et rigide peut donc sembler superflue, puisqu'il suffit de définir les frontières artificielles comme étant horizontales et plates pour que les normales aux domaines de calcul en  $(z_\alpha^1)_{\alpha \in \{0,a\}}$ , utilisées dans (2.2), soient parfaitement verticales, et ce peu importe la géométrie physique de la surface de l'océan.

Cette hypothèse se révèle néanmoins nécessaire et pertinente pour les deux raisons suivantes :

- (1) Les modèles de circulation océaniques incluent typiquement des termes non locaux au sein des discrétisations des équations primitives, dépendant de la géométrie de la surface de l'océan. Autrement dit, cette géométrie a une influence sur le comportement de l'océan en dehors de la simple transmission de conditions à la limite en  $z = z_0^1$ .
- (2) Les conclusions de notre étude ont vocation à rester vraies dans le cas asymptotique où la couche limite de surface serait intégralement traitée par les modèles numériques, c'est à dire où l'on disposerait d'une discrétisation verticale infiniment fine pour  $|z| \rightarrow 0$ . Si l'océan n'est pas supposé plat, alors lorsque les domaines  $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \{0,a\}}$  entreraient en intersection avec la surface  $\eta(x, y)$  (cf. figure 2.3), des effets de croisement entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds  $\underline{\mathcal{R}}$ , incluant la propagation horizontale de la turbulence, devraient être pris en compte. En particulier, (2.3) prendrait une forme beaucoup plus complexe, dépendant de  $\nabla_h \eta$  et de  $v_{h,\alpha}^t$ . Cela dépasse le cadre de notre étude.

### 2.1.4 Interactions entre la CLS et les modèles

Il existe au moins deux bonnes raisons de s'intéresser à la paramétrisation de la solution dans la CLS. Tout d'abord, d'un point de vue théorique, il est souhaitable de développer des paramétrisations CLS qui soient cohérentes avec le comportement de la solution à l'extérieur de celle-ci, correspondant au système (1.55) discrétisé sur les grilles de calcul. Ensuite, d'un point de vue plus pragmatique, les conditions aux limites imposées aux modèles océan et atmosphère au niveau de la « surface » sont prescrites sous forme de flux en  $z_0^1$  et  $z_a^1$ , respectivement ; ce sont des grandeurs issues des paramétrisations CLS qui permettent de dimensionner ces flux.

On peut écrire les conditions aux limites pour la quantité de mouvement ainsi :

$$\underline{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{n}_0 = - \begin{bmatrix} \langle u'^2 \rangle & \langle u'v' \rangle & \langle u'w' \rangle \\ \langle v'u' \rangle & \langle v'^2 \rangle & \langle v'w' \rangle \\ \langle w'u' \rangle & \langle w'v' \rangle & \langle w'^2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_\alpha} \quad z = z_\alpha^1, \alpha \in \{0, a\} \quad (2.2)$$

où  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$  est un flux turbulent, appelé *flux de tension de vent*. C'est l'une des grandeurs paramétrisées par les schémas de CLS, qui est ensuite transmise aux modèles océan et atmosphère.

Dans le cadre général, le membre de gauche de (2.2) s'écrit  $\underline{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{n}_\eta$ , où  $\mathbf{n}_\eta$  est un vecteur normal au bord du domaine. Notre stratégie de découpage des domaines, exposée aux § 2.1.1 et 2.1.2, implique  $\mathbf{n}_\eta = \mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_z$ . L'écriture de (2.2) en est grandement simplifiée, puisqu'elle ne contiendra

alors que des termes verticaux<sup>1</sup> :

$$v_{v,\alpha}^t \nabla_h \mathbf{u}_h = \boldsymbol{\tau}_h \quad (2.3a)$$

$$v_{v,\alpha}^t \partial_z w = \tau_z \quad (2.3b)$$

où  $\alpha \in \{0, a\}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_h = (\tau_x, \tau_y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{u}_h = (u, v)$  est la vitesse horizontale.

Au voisinage de la CLS, il est courant de supposer les composantes moyennes de toutes les grandeurs physiques comme étant horizontalement homogènes, i.e. d'injecter dans (1.55)  $\partial_x = \partial_y = 0$  (Oboukhov, 1962). Combinée à d'autres hypothèses, l'homogénéité horizontale implique de nouvelles simplifications :

- (i) l'hypothèse hydrostatique implique  $w = 0$  dans le voisinage de la CLS (cf. (1.55d));
- (ii) l'hypothèse de surface plate permet de s'abstenir d'avoir à paramétrer les viscosités et diffusivités turbulentes horizontales :  $(v_{h,\alpha}^t)$  et  $(\mathcal{K}_{X,h}^t)$ .

Par conséquent, on considérera dans la suite que les viscosités et diffusivités turbulentes seront verticales uniquement, et on omettra l'indice  $v$ .

### Hypothèse d'horizontalité sur les quantités d'intérêt et notation complexe conséquente

Dans toute la suite, on supposera que dans tous les domaines de calcul, on aura  $w = 0$ . Cela revient à supposer qu'au voisinage de l'interface, les quantités de mouvement sont horizontales; cette hypothèse est classique et universellement acceptée. En exploitant cette hypothèse dans (2.3b), on obtient  $\tau_z = 0$ ; on peut conséquemment associer  $\boldsymbol{\tau}$  à  $\boldsymbol{\tau}_h$ , et considérer que le flux de tension de vent est lui aussi horizontal.

De façon générale, dans toute la suite, on ne s'intéressera qu'aux composantes horizontales de la quantité de mouvement. On écrira les vecteurs horizontaux sous forme complexe :

$$u_h = u + iv \quad (2.4a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_x + i\tau_y \quad (2.4b)$$

où  $(u_h, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{C}^2$  sont les représentations complexes du couple de vecteurs  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\tau}) \in (\mathbb{R}^2)^2$ .  $i \in \mathbb{C}$  est l'unité imaginaire, de module 1 et d'argument  $\pi/2$ .

### Bilan des conditions aux limites en $(z_\alpha^1)$

Les autres conditions aux limites (en partie turbulentes), pour les grandeurs scalaires  $\theta$ ,  $q$  et  $S$ , s'obtiennent de façon analogue à ce qui a été mené pour la quantité de mouvement. En particulier, les normales aux domaines étant parfaitement verticales, seules les diffusivités turbulentes verticales (qu'on notera aussi dans la suite sans indice  $v$ ) seront prises en compte dans la suite.

Les conditions aux limites complètes s'écrivent ainsi :

$$v_a^t \partial_z u_h \Big|_{z_\alpha^1} = \tau / \rho_a \quad (2.5a)$$

1. Si  $\mathbf{n}_\eta$  n'était pas aligné avec la direction verticale, alors (2.2) inclurait aussi des effets turbulents horizontaux, dépendamment de la géométrie du bord du domaine, cf. la figure 2.3.

$$\mathcal{K}_{T,a}^t \partial_z \theta \Big|_{z_a^1} = (Q_{sol} + Q_{l\uparrow} + Q_{l\downarrow} + Q_{IR} + Q_H + Q_L) / \rho_a c_p^a \quad (2.5b)$$

$$\mathcal{K}_{q,a}^t \partial_z q \Big|_{z_a^1} = Q_L / (\rho_a \Lambda) \quad (2.5c)$$

$$v_o^t \partial_z u_h \Big|_{z_o^1} = \tau / \rho_o \quad (2.5d)$$

$$\mathcal{K}_{T,o}^t \partial_z \theta \Big|_{z_o^1} = (Q_{IR} + Q_L + Q_H) / \rho_o c_p^o \quad (2.5e)$$

$$\mathcal{K}_{S,o}^t \partial_z S \Big|_{z_o^1} = S(E - P - R) \quad (2.5f)$$

où :

- ▶  $(Q_H, Q_L) \in \mathbb{R}^2$  sont les flux turbulents de chaleur sensible et latente, respectivement. À l'instar de  $\tau$ , ceux-ci sont calculés à partir des données issues des paramétrisations CLS.
- ▶  $(v_\alpha^t)_{\alpha \in \{a,o\}}$  sont des viscosités,  $(\mathcal{K}_{\theta,\alpha}^t)_{\alpha \in \{a,o\}}$  des diffusivités thermiques,  $\mathcal{K}_{q,a}^t$  une diffusivité humide et  $\mathcal{K}_{s,o}^t$  une diffusivité saline. Rappelons que toutes ces grandeurs correspondent à la propagation *verticale* de la turbulence, telle que (1.53) et (1.54) l'a définie. Ces grandeurs, de nature turbulente, sont conditionnées par les paramétrisations CLS.
- ▶  $Q_{sol}$ ,  $Q_{l\uparrow}$ ,  $Q_{l\downarrow}$  et  $Q_{IR}$  représentent des flux de chaleur (respectivement solaire, radiatif ascendant, radiatif descendant, infrarouge), provenant de l'extérieur, supposés constants et connus.
- ▶  $E$ ,  $P$  et  $R$  sont des flux d'eau douce, respectivement d'évaporation, de précipitation et de sources supplémentaires (estuariens, etc.).
- ▶ Pour chaque fluide considéré  $\alpha \in \{o,a\}$ ,  $\rho_\alpha$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ] est la masse volumique et  $c_p^\alpha$  [ $\text{J K}^{-1}$ ], la capacité thermique.  $\Lambda$  [ $\text{J kg}^{-1}$ ] est l'enthalpie de fusion (ou chaleur latente d'évaporation) de l'eau. On suppose ces 5 grandeurs constantes et connues.

Il est possible de réécrire le système (2.5) sous une forme alternative, explicitant l'équilibre des flux (turbulents et non-turbulents) entre les composantes océan et atmosphère :

$$\rho_a v_a^t \partial_z u_h \Big|_{z_a^1} = \rho_o v_o^t \partial_z u_h \Big|_{z_o^1} \quad (2.6a)$$

$$\rho_a c_p^a \mathcal{K}_{T,a}^t \partial_z \theta \Big|_{z_a^1} - Q_\odot = \rho_o c_p^o \mathcal{K}_{T,o}^t \partial_z \theta \Big|_{z_o^1} \quad (2.6b)$$

$$\mathcal{K}_{q,a}^t \partial_z q \Big|_{z_a^1} = \frac{\mathcal{K}_{S,o}^t \partial_z S}{S} \Big|_{z_o^1} + P + R \quad (2.6c)$$

où, dans (2.6b),  $Q_\odot = Q_{sol} + Q_{l\uparrow} + Q_{l\downarrow}$  correspond au flux de chaleur reçu par l'atmosphère mais non absorbé par l'océan. (2.5) met bien en exergue le couplage qui existe entre les modèles numériques et les schémas de paramétrisations CLS ; (2.6) en est une écriture alternative, mettant plutôt en exergue le couplage entre les modèles numériques entre eux.

L'objectif de ce chapitre est de formaliser les paramétrisations CLS de façon à ce que le système océan-CLS-atmosphère soit cohérent. Pour cela, une condition nécessaire et simple à vérifier est que les flux turbulents et radiatifs définis par (2.5) soient les mêmes dans les deux sous-modèles.

C'est ce qui couramment implanté dans les modèles actuels.

Une condition nettement plus restrictive, et nécessaire à la cohérence du système couplé océan-atmosphère, est de faire en sorte que l'ensemble des profils de solutions dans la CLS joue le rôle d'une « zone tampon » entre les deux sous-modèles. On exige des profils de solution qu'ils soient réguliers sur l'ensemble de la colonne verticale 1D, c'est à dire, à l'interface océan-atmosphère  $z = 0$  (située dans la CLS), mais aussi aux interfaces entre CLS et modèles océan et atmosphère, respectivement en  $z_o^1$  et  $z_a^1$ . Cela correspond au point (q2) soulevé au § 2.1.1, lors de l'introduction de la nouvelle stratégie de découpage du domaine. Mathématiquement, cette condition plus restrictive correspond à faire en sorte que le CLS permette un raccord régulier des solutions entre modèles océan et atmosphère.

Il s'agit donc de considérer les paramétrisations CLS comme un bloc qui s'insérerait au sein d'un ensemble plus vaste. Pour ce faire, il est nécessaire de définir de façon rigoureuse un système de paramétrisations couvrant l'ensemble de la CLS, en garantissant une solution de régularité  $\mathcal{C}^1$  sur l'ensemble de la colonne verticale. Ce chapitre vise donc, à l'aune de cet objectif, à analyser les paramétrisations CLS, afin d'y mettre en évidence des critères souhaitables. À notre connaissance, il n'existe pas de travaux antérieurs dont les objectifs soient les mêmes.

### 2.1.5 Découpage de la CLS en sous-régions

Au cours de notre étude, on divisera la CLS en 4 sous-parties, correspondant à autant de jeux de paramétrisations distincts. Au voisinage immédiat de la surface de l'océan, à des distances de l'ordre de  $10^{-4}$  m, on distinguera deux « sous-couches visqueuses », océanique et atmosphérique, ci-après respectivement notées SCVO et SCVA. De façon analogue, un peu plus à l'extérieur, on distinguera deux CLS « Monin-Obukhov » (du nom de la théorie à l'origine de la paramétrisation de cette région), notées CLSO-MO et CLSA-MO.

Dans la couche limite de surface « Monin Obukhov », ce sont les effets dus à la turbulence qui dominant ; on suppose même que *ces effets seuls conditionnent le comportement des solutions*. En se rapprochant de la surface, les viscosité et diffusivités turbulentes diminuent linéairement ; on arrive à une distance critique de la surface où les effets dus aux viscosité et diffusivités moléculaires ne peuvent plus être négligés, puisqu'ils sont aussi, voire plus importants que ceux dus à la turbulence pure.

La figure 2.4 offre une représentation de la CLS comme zone tampon entre les deux sous-modèles, en mettant en exergue les échanges entre les différentes composantes et le découpage intra-CLS.

## 2.2 Théorie de Monin-Obukhov

La théorie de quasi-similitude de Monin-Obukhov a été mise au point au milieu du siècle dernier (Monin et Obukhov, 1954). C'est encore aujourd'hui l'outil théorique central utilisé dans la modélisation de la CLS. On peut trouver une riche rétrospective historique des développements et ajustements successifs faits à cette théorie dans un article de Foken (2006).

Dans cette section, on s'intéressera uniquement à une sous-partie de la CLS atmosphérique uniquement, où la théorie de Monin-Obukhov s'applique. L'extension à l'ensemble de la CLS sera vue dans les sections suivantes (notamment au § 2.4). Le § 2.2.1 présente la « loi de mur », qui peut en un sens être considérée comme un prémisses de la théorie de Monin-Obukhov. Les

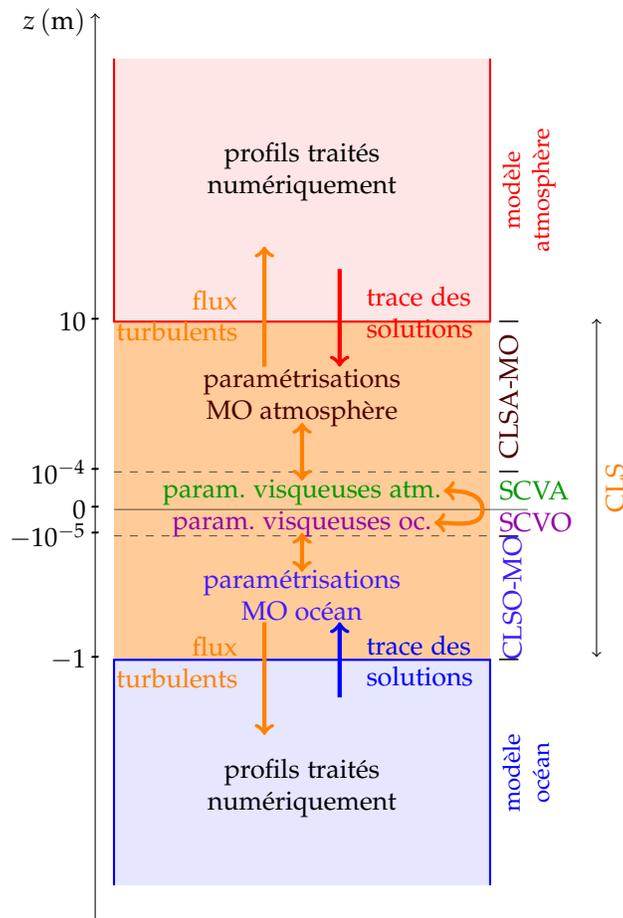


FIGURE 2.4 – Représentation schématique de la géométrie du problème 1D. Les deux modèles sont séparés par une couche limite de surface, elle-même sous-découpée en 4 parties : CLSA-MO, SCVA, SCVO et CLSO-MO. Chaque subdivision de la CLS présente un jeu de paramétrisations différentes, qui sont imbriquées les unes aux autres. Les échanges entre modèles et CLS se font *via* les flux turbulents (CLS  $\rightarrow$  modèle) et la transmission des traces des solutions (modèle  $\rightarrow$  CLS). Cette figure étant principalement à but didactique, les échelles n'y sont pas respectées.

§ 2.2.2 à 2.2.4 présentent plus spécifiquement la théorie en soi. Le § 2.2.5 en donne quelques conséquences sur les profils de solution au sein de la CLS atmosphérique.

### 2.2.1 Loi du mur

Dans cette sous-section uniquement, on supposera qu'on s'intéresse à un fluide non stratifié, pour lequel des lois « paroi » peuvent s'appliquer. Dans les sous-sections suivantes, on rajoutera une hypothèse de stratification du fluide ; c'est alors qu'on introduira proprement la théorie de Monin-Obukhov, qui peut être vue comme une extension de lois de type « paroi » au cas d'un fluide stratifié.

Supposons qu'on cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\partial_i U - \partial_z (\nu \partial_z U) = 0 \quad z \in ]0; z_1[ \quad (2.7a)$$

$$w|_{z=0^+} = 0 \quad (2.7b)$$

où  $U : (x, y, z, t) \mapsto U(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $w$  est la composante suivant  $z$  de  $U$ ,  $\nu > 0$  est une viscosité turbulente,  $\nu \xrightarrow{z \rightarrow 0^+} 0$ . On néglige ici la force de Coriolis, ce qui, au voisinage immédiat de l'interface, est une hypothèse raisonnable. Dans ce cas, on peut montrer que la direction de la vitesse horizontale  $u_h$  reste constante, et à une rotation près, on peut supposer que  $u_h = (u, v)$  est aligné avec la direction  $x$  de notre repère, ce qui correspond à  $u_h \in \mathbb{R}$ , en utilisant la notation complexe (2.4b).

On définit deux échelles de friction constantes ainsi :

$$u_0^* = \sqrt{\nu \partial_z |U_h|} \Big|_{z=0^+} \quad (2.8a)$$

$$z_0^* = \frac{\nu}{u_0^*} \quad (2.8b)$$

où  $U_h$  est défini par :

$$U_h(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_h(x, y, z, t) dt \quad (2.9)$$

$u_0^*$  et  $z_0^*$  sont des échelles de friction, respectivement de vitesse et de longueur. Celles-ci permettent d'adimensionner le problème au voisinage de l'interface ; posons  $z^+ = z/z_0^*$  et  $u^+ = u/u_0^*$ . La théorie mène à :

$$u = \frac{u_0^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0^*} \right) + \beta \quad 20 \leq \frac{z}{z_0^*} \leq 100 \quad (2.10a)$$

$$u = u_0^* \frac{z}{z_0^*} \quad 0 \leq \frac{z}{z_0^*} < 20 \quad (2.10b)$$

où  $\kappa = 0.4$  est une constante universelle appelée constante de von Kármán, et  $\beta = 5.5$  assure une bonne connection en  $z^+ = 20$ . (2.10) est un système de paramétrisation de la solution au voisinage de  $z = 0$  : (2.10a) correspond à une couche logarithmique ; (2.10b), à une couche visqueuse se raccordant avec une condition  $u(z = 0) = 0$ . Les deux définitions des régions d'intérêt sont obtenues par expériences en laboratoire.

Typiquement, dans le cadre d'une simple loi du mur, on cherchera à exclure du domaine de discrétisation la région où (2.10b) s'applique, en définissant comme nouvelle frontière inférieure du domaine  $z = z_{1/2}$  où  $z_{1/2} > 20 z_0^*$  sera toujours vérifiée. Ainsi, l'épaisseur de la région exclue

du domaine dépend de l'état turbulent du fluide au voisinage de la structure ; en particulier, cette épaisseur peut donc évoluer en fonction du temps et de la position dans l'espace.

Afin d'obtenir le caractère bien posé du système (2.7), en prenant en compte le découpage artificiel du domaine de calcul, on pose la condition aux limites suivantes en  $z = z_{1/2}$  (Pares, 1988) :

$$w = 0 \quad (2.11a)$$

$$\frac{u_h}{u_0^*} - \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0^*} \right) + \beta = 0 \quad (2.11b)$$

On obtient ainsi relativement rapidement des profils de solution au voisinage de l'interface. Comme déjà discuté auparavant, le contexte océan-atmosphère apporte deux principales difficultés : d'une part, on considère un fluide stratifié ; d'autre part, il existe deux couches limites, océanique et atmosphérique, de part et d'autre de l'interface<sup>2</sup>.

L'étude à venir peut être vue comme une extension du modèle de couche limite succinctement présenté dans cette sous-section. La présence de stratification rend impossible l'adimensionnement et la paramétrisation de solutions de façon aussi simple que (2.10) ; il faudra entre autres définir d'autres échelles de friction, qui rendront compte de l'influence de la stratification sur les profils des solutions.

### 2.2.2 Couche à flux constant

À partir de maintenant, on se replace dans le contexte de la modélisation de l'atmosphère (nous rappelons que le cas océanique sera traité au § 2.4), avec un fluide stratifié. La théorie de Monin-Obukhov permet d'évaluer les flux turbulents au sein de la couche limite de surface. L'une de ses hypothèses fondatrices stipule que les trois flux turbulents suivants sont indépendants de  $z$  au sein de la couche limite de surface :

$$\tau = -\rho_a \langle w' u_h' \rangle \quad (2.12a)$$

$$Q_H = -\rho_a c_p^a \langle w' \theta' \rangle \quad (2.12b)$$

$$Q_L = -\rho_a \Lambda \langle w' q' \rangle \quad (2.12c)$$

Rappelons que les flux  $\tau \in \mathbb{C}$ , et  $(Q_H, Q_L) \in \mathbb{R}^2$  sont appelés respectivement flux de tension de vent (ou plutôt, sa représentation complexe), de chaleur sensible et de chaleur latente. Dans (2.12),  $\rho_a$  [ $\text{kg m}^{-3}$ ] est la masse volumique de l'air,  $c_p^a$  [ $\text{J K}^{-1}$ ] sa capacité thermique,  $\Lambda$  [ $\text{J kg}^{-1}$ ] l'enthalpie de fusion (ou chaleur latente d'évaporation) de l'eau. Toutes ces grandeurs sont supposées constantes et connues. Ainsi, l'hypothèse de base de la théorie de Monin-Obukhov suppose que l'ensemble des composantes turbulentes présentes dans (2.12) sont constantes au sein de la CLS atmosphérique.

Dans (2.12b),  $\theta$  est la température potentielle, c'est à dire la température qu'aurait un volume infinitésimal d'air s'il était adiabatiquement transformé vers une pression de référence. Dans un contexte météorologique, elle est définie par :

$$\theta = T \left( \frac{P_0}{P} \right)^\gamma \quad (2.13)$$

où  $P_0$  est le niveau de pression de référence,  $P$  la pression, et  $\gamma \approx 2/7$ .

2. Cela implique, entre autres, qu'on n'impose plus toujours  $u(z=0) = 0$ , comme pour le couplage avec un solide inerte.

### 2.2.3 Échelles de friction

On introduit trois grandeurs « étoilées », scalaires positifs, aussi appelées *échelles de friction* :  $(u_a^*, \theta_a^*, q_a^*)$ , ayant respectivement les dimensions d'une vitesse, d'une température et d'une humidité. Celles-ci sont définies par le système suivant :

$$|\langle w' u'_h \rangle| = (u_a^*)^2 \quad (2.14a)$$

$$\langle w' \theta' \rangle = u_a^* \theta_a^* \quad (2.14b)$$

$$\langle w' q' \rangle = u_a^* q_a^* \quad (2.14c)$$

La détermination des échelles de friction est unique si on suppose les composantes turbulentes issues de la décomposition de Reynolds, membres de gauche de (2.14), connues. Ces trois échelles de friction peuvent être vues comme une généralisation à des cas stratifiés de l'échelle unique  $u_0^*$ , définie par (2.8a).

Dans le contexte d'une simple loi du mur, une seule échelle permettrait de dimensionner les profils de solution au voisinage de l'interface. Dans le cas d'un fluide stratifié, ce sont trois profils de solution qui sont à paramétriser : on a donc besoin d'autant d'échelles de friction afin de les dimensionner. L'une des principales difficultés apportées par la stratification, qui différencie notre cas d'une hypothétique « triple loi du mur », est que les échelles de friction définies par la théorie de Monin-Obukhov sont interdépendantes.

Les échelles de friction permettent aussi de réécrire les termes turbulents de (2.12) :

$$|\tau| = \rho_a (u_a^*)^2 \quad (2.15a)$$

$$Q_H = \rho_a c_p^a u_a^* \theta_a^* \quad (2.15b)$$

$$Q_L = \rho_a \Lambda u_a^* q_a^* \quad (2.15c)$$

L'hypothèse de couche à flux constant implique que ces échelles sont aussi constantes sur la CLS. La détermination de leurs valeurs sera traitée au chapitre 3. Pour l'instant, nous ne nous intéresserons pas à cet aspect, et considérerons ces grandeurs connues.

### 2.2.4 Construction de groupes sans dimension

L'un des autres fondements de la théorie de Monin-Obukhov est le théorème suivant :

**Théorème.**  *$\pi$ -Buckingham (Buckingham, 1914).*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathcal{Q} = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$  un ensemble de  $n$  quantités physiques dimensionnées. Notons  $k \in \mathbb{N}^*$  le nombre de dimensions physiques distinctes et irréductibles présentes dans  $\mathcal{Q}$ . Soit une équation physique faisant intervenir les grandeurs de  $\mathcal{Q}$ , qu'on formalise ainsi :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (2.16)$$

Alors, il est possible de construire, à partir de  $\mathcal{Q}$ , un groupe  $\Pi$  de  $p = n - k$  grandeurs adimensionnées, appelées  $\pi$ -groupes et notées  $(\pi_j)_{1 \leq j \leq p}$ , telle que (2.16) puisse être réécrite sous la forme :

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0 \quad (2.17)$$

En outre, il est possible de construire  $\Pi$  de façon à avoir :

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \pi_j = \prod_{i=1}^n q_i^{a_{j,i}} \quad \text{où } (a_{j,i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Q}^n \quad (2.18)$$

L'étape suivante à la théorie de MO est la construction de tels  $\pi$ -groupes, qui ont la propriété d'être sans dimension physique. Il s'agit de trouver, parmi les variables physiques, les grandeurs pertinentes pour la modélisation de cette région. Les échelles de friction, ayant été introduites en § 2.2.3 dans le but de créer des échelles à dimensions physiques rendant compte des effets turbulents, seront mises à contribution pour l'établissement de ces  $\pi$ -groupes.

Dans le cas où il y a absence de stratification (i.e.,  $\theta$  et  $q$  sont constants dans la CLS), le premier groupe sans dimension est le suivant :

$$\pi_u^N = \frac{z |\partial_z u_h|}{u_a^*} \quad (2.19)$$

Toujours sous l'hypothèse d'une absence de stratification, ce groupe sans dimension peut-être considéré comme constant (Tennekes, 1973), de valeur  $\kappa^{-1}$ , inverse de la constante de von Kármán, déjà introduite au § 2.2.1. Si la valeur de  $\kappa$  a pu par le passé faire débat,  $\kappa \approx 0.40$  semble désormais faire consensus au sein de la communauté (Högström, 1996).

L'une des caractéristiques les plus spécifiques à la CLS, par rapport, à titre d'exemple, à une « simple » couche logarithmique, est qu'elle présente une stratification par un gradient de température potentielle virtuelle  $\theta_v$ , échelle de température prenant en compte l'état de pression et d'humidité de l'air, définie par :

$$\theta_v(z) = \theta(z) \left( 1 + \frac{q(z)}{q_0} \right) \quad (2.20)$$

où  $q_0 \approx 0.61 \text{ kg kg}^{-1}$  est l'humidité spécifique de l'air à saturation.

Il s'agit alors de construire une quantité physique pertinente pour la description de l'effet de la stratification ; celle-ci passe par la longueur d'Obukhov :

$$L_O^a = \frac{(u_a^*)^2}{g\kappa \left[ \frac{\theta_a^*}{\theta_v(z_a^*)} + \frac{q_a^*}{q(z_a^*) + q_0} \right]} \quad (2.21)$$

où  $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$  est le champ de pesanteur.  $L_O^a$  peut aussi être vue, de façon équivalente, ainsi :

$$L_O^a = \frac{(u_a^*)^3}{\kappa \mathcal{B}_a} \quad (2.22)$$

où  $\mathcal{B}_a [\text{m}^2 \text{ s}^{-3}]$  est un flux de flottabilité atmosphérique, caractérisant l'effet de la poussée d'Archimède sur un volume infinitésimal d'air :

$$\mathcal{B}_a = g u_a^* \left[ \frac{\theta_a^*}{\theta_v(z)} + \frac{q_a^*}{q(z) + q_0} \right] \quad (2.23)$$

Des travaux pionniers (Obukhov, 1946) ont montré que (2.21) définit la seule grandeur physique ayant la dimension d'une longueur, capable de rendre compte des effets de la stratification de la CLS.  $L_O^a$  sera considérée dans la suite comme une échelle constante. Cela revient à supposer que lorsqu'on se déplace le long de la verticale, les valeurs des échelles de friction s'ajustent pour que  $\partial_z L_O^a = 0$ . Pour l'instant, on ne peut pas juger du caractère licite de cette hypothèse, puisqu'on se penchera sur les mécanismes permettant de déterminer les valeurs des échelles de friction au chapitre 3 seulement ; alors, on s'intéressera à la validité numérique d'une telle hypothèse (cf. p.120).

La construction d'un second groupe sans dimension, en  $z = z_a^1$ , est alors immédiate :

$$\pi_s = \zeta_a = \frac{z_a^1}{L_O^a(z_a^1)} = g \frac{\kappa z_a^1}{u_a^{*2}} \left[ \frac{\theta_a^*}{\theta_v} + \frac{q_a^*}{q + q_0} \right] \quad (2.24)$$

$\zeta_a$  est appelé *paramètre de stabilité*. Il permet de distinguer trois régimes de stratification :

- ▶ le régime instable, lorsque  $\zeta_a < 0$ . Dans ce cas, la colonne est stratifiée par un gradient de température potentielle virtuelle, et des processus de convection se déclenchent pour ramener la colonne vers un équilibre hydrostatique.
- ▶ le régime neutre, lorsque  $\zeta_a = 0$ . Ce cas correspond à une absence de stratification : la température potentielle virtuelle est constante le long de l'axe  $z$ .
- ▶ le régime stable, lorsque  $\zeta_a > 0$ . Dans ce cas, la colonne est stratifiée de façon « stable » (i.e., cohérente avec l'équilibre hydrostatique) par un gradient de température potentielle virtuelle.

La figure 2.5 offre une représentation du paramètre de stabilité  $\zeta_a$  sous différentes configurations physiques. Elle montre que le paramètre de stabilité est du signe du différentiel de température, et que de façon générale, sa valeur absolue peut prendre des valeurs élevées en situation de cisaillement de vents faible.

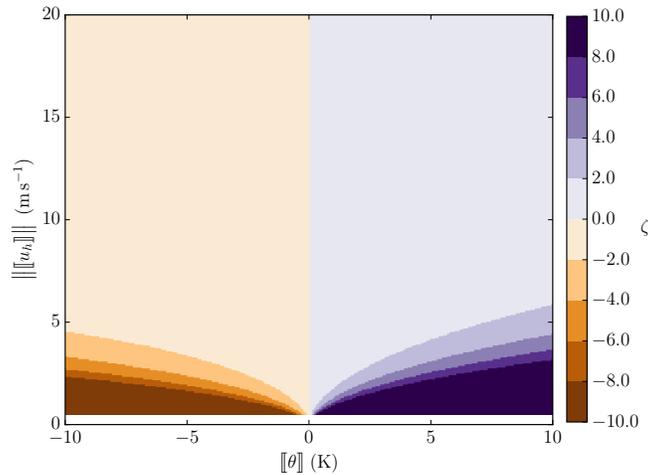


FIGURE 2.5 –  $\zeta_a$  pour des valeurs typiques de paramètres physiques au voisinage de l'interface. Ici, on a fixé  $z_a^1 = 10$  m,  $\theta(z_a^1) = 300$  K,  $q(z_a^1) = q_s = 10^{-2}$  kg kg<sup>-1</sup> et  $\theta_\tau = 0$ . Nous verrons au chapitre 3 que la connaissance de  $u_h$  et de  $\theta$  aux niveaux  $z = 0$  et  $z = z_a^1$  est nécessaire à la détermination de  $\zeta_a$ . Ci-dessus, on considère que  $u_h \in \mathbb{R}$ , c'est à dire que la vitesse horizontale est toujours alignée avec la direction  $\mathbf{e}_x$ . On fait varier  $\|[u_h]\| = |u(z_a^1) - u(0)|$  entre 0.5 et 20 m s<sup>-1</sup>, et  $[\theta] = \theta(z_a^1) - T_\zeta$  entre -10 et +10 K.

Le groupe (2.19) s'adapte à la présence de stratification ainsi :

$$\pi_u = \frac{L_O^a |\partial_z u_h|}{u_a^*} \quad (2.25)$$

### 2.2.5 Lien entre propriétés macroscopiques et échelles turbulentes

L'analyse dimensionnelle, appliquée à la CLS, prédit qu'on peut reconstruire des groupes adimensionnés de façon à ce qu'ils puissent tous être réduits à des fonctions de  $\zeta(z) = \frac{z}{L_O^a}$  uniquement. C'est la raison pour laquelle on parle de « théorie de quasi-similarité » : quel que soit l'état de la CLS, la structure présente toujours le même type de dépendance au paramètre de stabilité  $\zeta(z)$  (Large, 2006). À partir de  $z$ ,  $L_O^a$ , et des échelles de friction, il est donc possible d'exprimer les gradients de quantités physiques d'intérêt :

$$\kappa \frac{z \partial_z |u_h|}{u_a^*} = \phi_m \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \quad z \in \left] z_u^{a,r}; z_a^1 \right[ \quad (2.26a)$$

$$\kappa \frac{z \partial_z \theta}{\theta_a^*} = \phi_h \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \quad z \in \left] z_\theta^{a,r}; z_a^1 \right[ \quad (2.26b)$$

$$\kappa \frac{z \partial_z q}{q_a^*} = \phi_h \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \quad z \in \left] z_q^{a,r}; z_a^1 \right[ \quad (2.26c)$$

où on a introduit les *longueurs de rugosité*,  $(z_u^{a,r}, z_\theta^{a,r}, z_q^{a,r}) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ , qui définissent les hauteurs limites jusqu'auxquelles la théorie de Monin-Obukhov sera considérée comme valable<sup>3</sup>. En effet, comme pour la loi du mur, l'intégration des groupes sans dimension (2.26) présente une singularité lorsque  $z \searrow 0$ , et ne peut donc pas se prolonger indéfiniment jusqu'à la surface. Les longueurs de rugosité jouent donc, mathématiquement, un rôle de constantes d'intégration.

Les interprétations quant à leurs significations physiques, en particulier au-dessus de l'océan, sont multiples et pas nécessairement inter-compatibles. Avant de s'y intéresser de plus près au § 2.3.2, on considérera dans le présent chapitre que les longueurs de rugosité atmosphériques sont connues. Les méthodes pour déterminer les longueurs de rugosité et les échelles de friction, grandeurs intrinsèquement imbriquées, seront traitées au chapitre 3.

Dans (2.26), les fonctions  $(\phi_m, \phi_h)$  sont appelées *fonctions de stabilité*. Elles rendent compte de l'effet de la stratification sur la structure de la CLS. Dans le cas d'une stratification neutre, on aura  $[\theta_a^* = q_a^* = 0] \Rightarrow [L_O^a \rightarrow +\infty] \Rightarrow [\zeta_a = 0]$ . On impose  $\phi_m(0) = 1$ . C'est pourquoi on a ajouté  $\kappa$  dans les membres de gauche de (2.26) : cela permet de normaliser  $(\phi_x)_{x \in \{m,h\}}$  à 1 dans le cas neutre. Le fait qu'il n'existe qu'une fonction de stabilité  $\phi_h$  pour deux grandeurs distinctes,  $\theta$  et  $q$ , est une hypothèse supplémentaire, et universellement admise.

Seuls les comportements asymptotiques (par exemple,  $|\zeta_a| \rightarrow \infty$ ) peuvent être prédits par la théorie. Pour les configurations plus usuelles, la détermination de  $(\phi_m, \phi_h)$  passe donc nécessairement par des calibrages de modèles sur des valeurs expérimentales (Garratt, 1992, p. 50). C'est pourquoi il existe une certaine variété de choix possibles pour ce couple de fonctions. Businger et al. (1971) en a proposé une première forme, par la suite enrichie pour donner cette forme qu'on peut considérer comme étant de référence actuellement (Högström, 1988) :

$$\phi_h(\zeta_a) = \phi_m(\zeta_a) = 1 + 5\zeta_a \quad \zeta_a \geq 0 \quad (2.27a)$$

$$\phi_h(\zeta_a) = (\phi_m(\zeta_a))^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - 16\zeta_a}} \quad \zeta_a < 0 \quad (2.27b)$$

Une autre forme propose un régime différent en condition fortement instable, reposant sur un certain nombre d'arguments physiques liés à la « limite convective » (Large et al., 1994) :

$$\phi_m(\zeta_a) = \phi_h(\zeta_a) = 1 + 5\zeta_a \quad \zeta_a \geq 0 \quad (2.28a)$$

3. Une discussion plus élaborée à propos de cette assertion sera entreprise au § 3.4.1.

$$\phi_m(\zeta_a) = (1 - 16\zeta_a)^{-1/4} \quad \zeta_{a,m} \leq \zeta_a < 0 \quad (2.28b)$$

$$\phi_m(\zeta_a) = (a_m - c_m\zeta_a)^{-1/3} \quad \zeta_a < \zeta_{a,m} \quad (2.28c)$$

$$\phi_h(\zeta_a) = (1 - 16\zeta_a)^{-1/2} \quad \zeta_{a,s} \leq \zeta_a < 0 \quad (2.28d)$$

$$\phi_h(\zeta_a) = (a_h - c_h\zeta_a)^{-1/3} \quad \zeta_a < \zeta_{a,s} \quad (2.28e)$$

où  $(\zeta_{a,m}, \zeta_{a,s})$  sont des paramètres de stabilité constants, assurant la transition vers la limite convective. L'ensemble des constantes introduites dans (2.28) permettant d'associer régularité mathématique et réalisme physique pour  $(\phi_m, \phi_h)$  est :

$$\begin{array}{lll} \zeta_{a,m} = -0.2 & c_m = 8.38 & a_m = 1.26 \\ \zeta_{a,h} = -1 & c_h = 98.96 & a_h = -28.86 \end{array} \quad (2.29)$$

La figure 2.6 donne une représentation graphique de la forme décrite par (2.28).

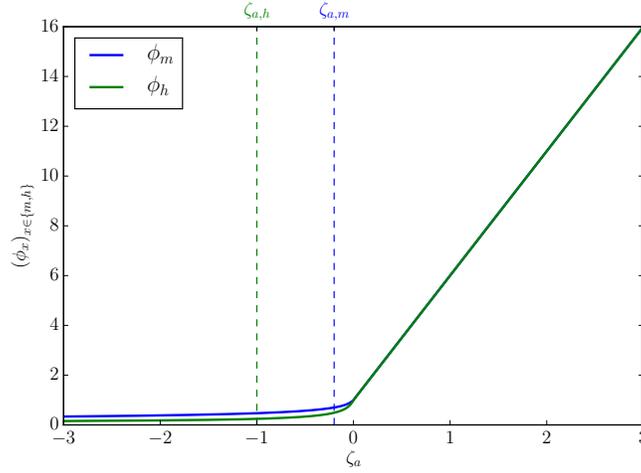


FIGURE 2.6 –  $(\phi_x)_{x \in \{m,h\}}$  telles que décrites par (2.28).

## 2.3 Conséquences de la théorie de Monin-Obukhov sur le modèle atmosphérique

Dans cette section, on exposera comment la théorie de Monin-Obukhov s'applique pour modéliser le comportement de la solution dans la CLS atmosphérique. Historiquement, le formalisme de la théorie de Monin-Obukhov s'est en effet appliqué uniquement à la partie atmosphérique de la CLS, délaissant sa voisine océanique. C'est la raison pour laquelle on se focalise, dans un premier temps, sur cette restriction de la CLS entière. La section suivante, en se fondant sur la modélisation de la couche limite de surface atmosphérique (CLSA), s'intéressera alors à une extension de la modélisation de la CLS, prenant en compte entre autres sa partie océanique.

### 2.3.1 Profils de solution

On obtient les profils de solution dans la CLS en intégrant verticalement (2.26). Pour obtenir les profils vectoriels complets, il est nécessaire d'orienter (2.26a) afin d'obtenir  $u_h$  et non  $|u_h|$  seule.

Pour cela, on suppose aussi que  $\partial_z u_h$  est constamment aligné avec le flux turbulent  $\tau$ , dont on note l'argument complexe  $\theta_\tau \in [0; 2\pi[$ , de sorte que  $\tau = |\tau| e^{i\theta_\tau}$ . Cette hypothèse sur la direction de la tension de vent est cohérente avec le reste de la théorie de Monin-Obukhov, qui a d'abord été écrite dans un cas unidimensionnel. Généraliser à un cas bidimensionnel revient simplement à considérer que le gradient de  $u_h$  est aligné avec le vecteur  $\tau$ .

L'intégration donne alors (Paulson, 1970) :

$$\forall z \in ]z_u^{a,r}, z_a^1[, u_h(z) = u_h(z_a^1) - \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \right] e^{i\theta_\tau} \quad (2.30a)$$

$$\forall z \in ]z_\theta^{a,r}, z_a^1[, \theta(z) = \theta(z_a^1) - \frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \right] \quad (2.30b)$$

$$\forall z \in ]z_q^{a,r}, z_a^1[, q(z) = q(z_a^1) - \frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \right] \quad (2.30c)$$

où les  $(\psi_m, \psi_h)$  caractérisent l'écart de la solution sous régime stratifié par rapport à un profil non stratifié. Ils sont obtenus par intégration de (2.30) entre la surface et le niveau  $z$  :

$$\psi_x \left( \frac{z}{L_O^a} \right) = \int_0^z \frac{1 - \phi_x(z/L_O^a)}{z} dz = \int_0^{\frac{z}{L_O^a}} \frac{1 - \phi_x(\zeta')}{\zeta'} d\zeta' \quad x \in \{m, h\} \quad (2.31)$$

Pour la forme (2.27),  $(\psi_m, \psi_h)$  valent :

$$\psi_m(\zeta_a) = \psi_s(\zeta_a) = -5\zeta_a \quad \zeta_a > 0 \quad (2.32a)$$

$$\psi_m(\zeta_a) = 2\ln \left( \frac{1+Y}{2} \right) + \ln \left( \frac{1+Y^2}{2} \right) - 2\text{Arctan}(Y) + \frac{\pi}{2} \quad \zeta_a < 0 \quad (2.32b)$$

$$\psi_s(\zeta_a) = 2\ln \left( \frac{1+Y^2}{2} \right) \quad \zeta_a < 0 \quad (2.32c)$$

où  $Y = (1 - 16\zeta_a)^{1/4}$ . Une représentation numérique de ces formes est visible en figure 2.7.

En un sens, le profil de vitesse (2.30a) s'apparente au profil type « loi du mur » tel que décrit par (2.10), à deux différences près :

- (i) La constante  $\beta$ , utilisée pour le raccord entre « régions visqueuse » et région logarithmique, n'est pas présente dans (2.30a).
- (ii) L'effet de la stratification est pris en compte via les termes  $(\phi_x)_{x \in \{m, h\}}$ .

La remarque (i) n'est pas anodine : les lois du mur « simples », telle que présentées au § 2.2.1, sont construites de façon à ce que les profils logarithmiques se raccordent avec des profils linéaires dans la sous-couche visqueuse. En revanche, comme le montrent les domaines de validité des profils (2.30), la théorie de Monin-Obukhov ne s'intéresse pas au problème du raccord des profils qu'elle décrit avec d'autres profils valables dans la région visqueuse.

Pour l'instant, on pourra se contenter d'une définition historique et dans notre contexte quelque peu tautologique des longueurs de rugosité : celles-ci définissent les altitudes auxquelles les profils (2.30) atteindraient les valeurs dites de surface, si l'hypothèse de couche à flux constant est valable. On verra plus tard que ce sont ces valeurs de surface qui sont utilisées pour calculer les échelles  $(u_a^*, \theta_a^*, q_a^*)$ . (2.30) peut alors se reformuler, de façon équivalente, ainsi :

$$\forall z \in ]z_u^{a,r}, z_a^1[, u_h(z) = \underbrace{u_h(z_u^{a,r})}_{u_s} + \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m(\zeta_a) \right] e^{i\theta_\tau} \quad (2.33a)$$

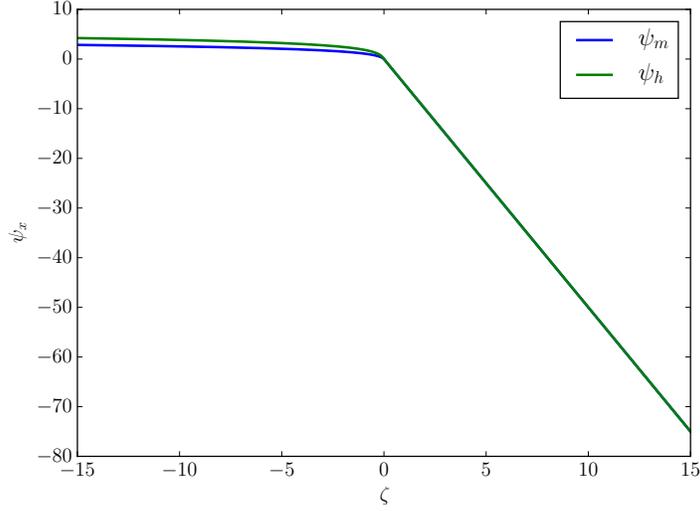


FIGURE 2.7 – Représentation des intégrales des fonctions de stabilité ( $\psi_m, \psi_h$ ) telles que données par (2.32). On a ici limité  $|\zeta_a| \leq 15$ ; à titre de comparaison, il est fréquent, dans des implémentations numériques classiques, d'imposer  $|\zeta_a| \leq 10$  en ramenant  $\zeta_a$  vers  $\pm 10$  pour des jeux de paramètres ( $u_a^*, \theta_a^*, q_a^*$ ) qui le feraient sortir de cet intervalle.

$$\forall z \in ]z_\theta^{a,r}, z_a^1[, \theta(z) = \underbrace{\theta(z_\theta^{a,r})}_{\theta_s} + \frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) \right] \quad (2.33b)$$

$$\forall z \in ]z_q^{a,r}, z_a^1[, q(z) = \underbrace{q(z_q^{a,r})}_{q_s} + \frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_q^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) \right] \quad (2.33c)$$

(2.33) correspond à la forme habituelle des profils de solution tels que décrits par la littérature. Elle contient une approximation : l'intégration de la partie « logarithmique » du groupe sans dimension est faite jusqu'aux longueurs de rugosité seulement, tandis que l'intégration de la partie due à la stratification est bel et bien réalisée jusqu'à  $z = 0$ . Sinon, les équations feraient aussi intervenir des termes de la forme  $\psi_y(z_x^{a,r}/L_O^a)$ , en plus des  $\psi_y(\zeta_a)$ . Une discussion autour de cette ambiguïté est abordée au § 3.4.2, à la page 123 : l'ambiguïté relevée ici correspond à l'approximation (3.28a), et est appréciée numériquement sur la figure 3.17.

Si les valeurs des longueurs de rugosité sont cohérentes avec celles des échelles de friction, alors (2.30) et (2.33) sont équivalents; nous verrons, toujours au chapitre 3, que les méthodes existantes garantissent toujours cette condition de cohérence. (2.30) et (2.33) correspondent tous deux à l'intégration de (2.26), respectivement sur  $]z; z_a^1[$  et sur  $]z_x^{a,r}; z[, x \in \{u, \theta, q\}$ .

Enfin, une remarque nous semble importante : les profils CLS (2.30), ou (2.33), sont compatibles avec les conditions aux limites (2.5) si et seulement si :

$$v_a^t(z_a^1) = \kappa u_a^* z_a^1 \phi_m \left( \frac{z_a^1}{L_O^a} \right) \quad (2.34a)$$

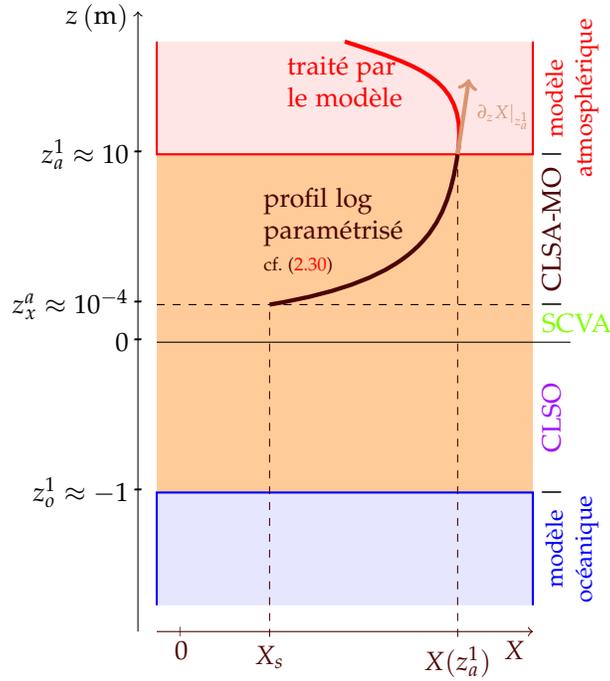


FIGURE 2.8 – Représentation schématique de la CLS entière et des profils de solution en découlant, pour une grandeur scalaire réelle  $X \in \{\Re(u_h), \Im(u_h), \theta, q\}$ . La courbe sépia représente une forme typique du profil de solution dans la CLSA-MO (2.30) et au sein des premiers niveaux verticaux du modèle atmosphérique. L'axe des abscisses gradue les valeurs pour  $X$ , l'axe des ordonnées correspondant à la cote  $z$ . Le vecteur marron clair représente la transmission d'une condition aux limites turbulentes en  $z_a^1$ , de type (2.47). Le schéma ci-dessus correspond à une situation de cohérence entre l'échelle de friction paramétrisant d'une part le profil de solution dans la CLS, et d'autre part la condition aux limites ; graphiquement, cela se manifeste par le fait que la solution est de régularité  $\mathcal{C}^1$  en  $z_a^1$ , et donc que le flux  $\partial_z X|_{z_a^1}$  soit tangent au profil de solution.

$$\mathcal{K}_{T,a}^t(z_a^1) = \kappa z_a^1 \frac{Q_{sol} + Q_{I\uparrow} + Q_{I\downarrow} + Q_{IR} + Q_H + Q_L}{\rho_a c_p^a \theta_a^*} \phi_h \left( \frac{z_a^1}{L_O^a} \right) \quad (2.34b)$$

$$\mathcal{K}_{T,a}^t(z_a^1) = \kappa z_a^1 u_a^* \phi_h \left( \frac{z_a^1}{L_O^a} \right) \quad (2.34c)$$

(2.34) est obtenu en injectant les groupes invariants (2.26), fondements de la théorie de Monin-Obukhov, dans les conditions de transmission (2.5). (2.34) correspond à imposer la continuité des gradients en  $z_a^1$ , à l'interface entre la CLS et le modèle atmosphérique.

Concernant (2.34a), utiliser  $v_a^t(z_a^1) = \kappa u_a^* z_a^1$ , comme cela est quasi-systématiquement fait dans les modèles actuels, ne permet d'être cohérent avec la théorie de Monin-Obukhov que dans le cas non-stratifié, pour lequel  $\phi_m(z_a^1/L_O^a) = 1$ . Dans le cas général, le raccord entre profils CLS et conditions aux limites du modèle atmosphère n'est donc pas assuré pour la vitesse  $u_h$ . Enfin, (2.34b) et (2.34c) sont encore moins bien assurés, puisqu'en général, on considère que  $\mathcal{K}_{T,a}^t = \mathcal{K}_{q,a}^t = \text{Pr } v_a^t$ , où Pr est le nombre de Prandtl, souvent supposé constant.

### Bilan partiel

La figure 2.8 représente une vision schématique des zones traitées par les paramétrisations CLS standards, c'est à dire celles qui ont été introduites dans les paragraphes précédents. Ce schéma met en exergue deux limitations quant à la paramétrisation de la CLS dite globale, incluant à la fois l'océan et l'atmosphère :

- (1) Seuls les intervalles  $[z_x^{a,r}; z_a^1]$ ,  $x \in \{u, \theta, q\}$ , appelés « CLS atmosphérique Monin-Obukhov » (CLSA-MO), sont couverts par un jeu de paramétrisations bien répandu. Or, par définition, la CLS est une région non traitée par les modèles numériques ; par conséquent, si l'objectif des paramétrisations CLS est de « combler ce vide » (ce qui est souhaitable), alors elles ne constituent pour l'instant qu'une réponse partielle. En particulier, les intervalles  $]0; z_x^{a,r}[$ , pour  $x \in \{u, \theta, q\}$ , ne sont pas couverts ; c'est l'objet du § 2.3.2.
- (2) L'extrapolation de profils de solution type Monin-Obukhov ne peut se faire que jusqu'à un triplet de hauteurs non-nulles, les longueurs de rugosité  $(z_x)_{x \in \{u, \theta, q\}}$ . Cela ne pose pas nécessairement de problème dans le cas d'un couplage solide-fluide, cas typique où l'on retrouve des profils logarithmiques types « loi du mur », sur lequel se calque la théorie de Monin-Obukhov. Dans le contexte océan-atmosphère, les profils de solution traversent l'interface physique  $z = 0$ , au lieu d'y être butés ; or, en l'état de l'art actuel, ceux-ci présentent une singularité en  $z_x^{a,r}$ . Conséquemment, les valeurs dites « de surface » (correspondant à  $z = 0$ ) des solutions sont en réalité les valeurs prévues en  $z_x^{a,r} > 0$  par la théorie de Monin-Obukhov. Il semble naturel que les profils CLS présentent une certaine symétrie par rapport à l'interface, dans la mesure où les hypothèses physiques desquelles les paramétrisations découlent devraient être valables quel que soit le fluide considéré (dans notre cas, air humide et eau salée). Cet argument constitue une autre raison pour laquelle étendre leurs paramétrisations dans les sous-couches visqueuses, afin d'atteindre effectivement la surface  $z = 0$ , ne peut pas être réduit à une question cosmétique.

### 2.3.2 Sous-couches visqueuses

Au dessus de l'océan, les longueurs de rugosité sont de l'ordre de  $10^{-4}$  m. Comme dit précédemment, elles correspondent à la hauteur à laquelle les profils de solution atteignent leur valeur de surface utilisée dans le calcul des échelles de friction (qui sera traité dans un chapitre ultérieur), si l'hypothèse de couche à flux constant était valable jusqu'à la surface. Cependant, cette hypothèse n'est plus valable en dessous des longueurs de rugosité; c'est la raison pour laquelle il n'est pas possible de traiter cette région à l'aide de la théorie MO.

Il est nécessaire de souligner que dans une vaste majorité d'études météorologiques de la CLS, les SCV sont purement et simplement négligées; on les considère trop fines pour que les solutions y évoluent de façon significative. Cela ne nous semble pas satisfaisant, puisque la théorie MO prescrit justement de très forts gradients aux niveaux des interfaces entre CLSA-MO et SCVA.

#### Définition et géométrie

La région comprise entre la surface de l'océan et la longueur de rugosité est comprise dans ce qu'on appelle la *sous-couche visqueuse* (ci-après, SCV). Puisqu'il existe trois longueurs de rugosité éventuellement distinctes, il existe autant de sous-couches visqueuses, propres aux trois quantités d'intérêt  $(u, \theta, q)$ .

Dans la couche limite de surface dite MO, ce sont les effets dus à la turbulence qui dominent; on suppose même que *ces effets seuls conditionnent le comportement des solutions*. En se rapprochant de la surface, les viscosité et diffusivités turbulentes diminuent linéairement; on peut définir une altitude critique où les effets dus aux viscosité et diffusivités moléculaires ne peuvent plus être négligés, puisqu'ils sont aussi, voire plus, importants que ceux dus à la turbulence pure. Cette altitude critique définit la frontière en dessous de laquelle l'hypothèse de couche à flux constant, fondamentale pour la théorie MO, n'est plus valable.

Pour l'instant, on supposera que pour chaque quantité d'intérêt, la longueur de rugosité définit la borne inférieure de la région de validité de la théorie MO. En toute rigueur, il est nécessaire de définir une autre cote  $z_* > z_x^{a,r}$  à partir de laquelle l'hypothèse de couche à flux constant n'est plus valable. Cela impliquerait toutefois que l'intégration de (2.26) n'est valable que jusqu'à  $z_*$ , et non  $z_x^{a,r}$ . Or, effectuer cette intégration jusqu'aux longueurs de rugosité est une pratique quasi-universelle dans la communauté climat. C'est pour cette raison que dans le contexte océan-atmosphère, on assimile les longueurs de rugosité aux frontières supérieures de leurs sous-couches visqueuses respectives.

#### Paramétrisations SCVA

Les paramétrisations des sous-couches visqueuses constituent un champ de recherche très dynamique (Fairall *et al.*, 1996a; Castro *et al.*, 2003), notamment en ce qui concerne la sous-couche visqueuse de température. Cela peut s'expliquer par les deux raisons suivantes :

- (i) Une grande partie des mesures de température « de surface » de l'océan faites en campagne maritime sont réalisées à quelques centimètres, voire mètres, de profondeur. De façon parallèle, il est aussi possible d'obtenir des mesures de la même quantité par imagerie satellite, en s'intéressant au rayonnement infrarouge. Ces deux types de mesure ne donnant pas les mêmes résultats (Paulson et Simpson, 1981), il s'est révélé nécessaire d'extrapoler ces températures jusqu'à la surface. Ces manipulations sont d'autant plus importantes que c'est cette fameuse

« température de surface », tachée d'ambiguïté (voir le § 3.4.1), qui permet de calibrer les flux turbulents au sein des modèles. Dans la littérature, on parle en général de « température de peau » (*skin sea surface temperature*) pour l'évaluation de la température de surface à partir de la « température bulk », mesurée un peu plus en profondeur.

- (ii) Les erreurs sur les mesures de température de surface sont parmi celles qui entraînent le plus de biais dans l'estimation des flux (Donlon *et al.*, 2002), provoquant ainsi une dérive numérique des modèles.

Pour le présent exposé, on choisira des paramétrisations SCV très simples par rapport à ce qui existe dans la littérature actuelle propres aux CLS en général. Malgré cela, et bien que les paramétrisations SCVA qu'on utilise soient rudimentaires, et que cela puisse ressembler à une limitation au sein de notre étude, il faut se rappeler que le simple fait de *considérer* les SCV, d'y paramétrer les solutions, et de les lier aux profils CLSA-MO, est déjà en soi un aspect novateur.

Un exemple de paramétrisation SCV analytiquement simple est (Liu *et al.*, 1979) :

$$u_h(z) = u_h(z_u^{a,r}) - \delta u_a^{scv} \left[ \exp\left(\frac{z_u^{a,r} - z}{z_u^{scv,a}}\right) - 1 \right], \quad z \in ]0; z_u^{a,r}[ \quad (2.35a)$$

$$\theta(z) = \theta(z_\theta^{a,r}) - \delta\theta_a^{scv} \left[ \exp\left(\frac{z_\theta^{a,r} - z}{z_\theta^{scv,a}}\right) - 1 \right], \quad z \in ]0; z_\theta^{a,r}[ \quad (2.35b)$$

$$q(z) = q(z_q^{a,r}) - \delta q_a^{scv} \left[ \exp\left(\frac{z_q^{a,r} - z}{z_q^{scv,a}}\right) - 1 \right], \quad z \in ]0; z_q^{a,r}[ \quad (2.35c)$$

Ces profils sous formes d'exponentielles ont été justifiés par une campagne de mesure pionnière (Khundzhua *et Andreev*, 1974). (2.35) introduit trois nouvelles longueurs caractéristiques,  $(z_x^{scv,a})_{x \in \{u, \theta, q\}}$ . Celles-ci sont définies à l'aide d'un temps  $t_a^*$ , équivalent à la durée moyenne du temps de contact d'une parcelle de fluide avec la surface, dans la sous-couche visqueuse :

$$z_u^{scv,a} = \sqrt{\nu_m^a t_a^*} \quad (2.36a)$$

$$z_\theta^{scv,a} = \sqrt{\mathcal{K}_{T,m}^a t_a^*} \quad (2.36b)$$

$$z_q^{scv,a} = \sqrt{\mathcal{K}_{q,m}^a t_a^*} \quad (2.36c)$$

où  $\nu_m^a$  est la viscosité cinématique moléculaire de l'air, et  $(\mathcal{K}_{x,m}^a)_{x \in \{\theta, q\}}$  ses diffusivités moléculaires thermique et humide. Ces trois grandeurs sont constantes et connues. Le temps  $t_a^*$  est évalué ainsi :

$$t_a^* = G \sqrt{\frac{\nu_m^a z_u^{a,r}}{(u_a^*)^3}} \quad (2.37)$$

où  $G$  est une constante de proportionnalité sans dimension. Liu *et al.* (1979) suggère  $G \approx 9,3$ . La présence de  $u_a^*$ , échelle caractéristique des paramétrisations dans la CLSA-MO, dans le membre de droite de (2.37) n'est pas anodine. Elle instaure un *mécanisme de couplage* entre les paramétrisations SCVA et CLSA-MO, qui vient s'ajouter à la nécessité de raccord  $\mathcal{C}^1$  entre celles-ci.

(2.35) introduit aussi trois échelles  $(\delta u_a^{scv}, \delta\theta_a^{scv}, \delta q_a^{scv})$ . On définit celles-ci de façon à assurer la continuité du gradient de  $(u_h, \theta, q)$  au niveau de leurs longueurs de rugosité respectives, avec les

profils logarithmiques (2.30). On obtient ainsi :

$$\delta u_a^{scv} = \frac{z_u^{scv,a}}{z_u^{a,r}} \frac{u_a^*}{\kappa} \phi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) e^{i\theta_\tau} \quad (2.38a)$$

$$\delta \theta_a^{scv} = \frac{z_\theta^{scv,a}}{z_\theta^{a,r}} \frac{\theta_a^*}{\kappa} \phi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) \quad (2.38b)$$

$$\delta q_a^{scv} = \frac{z_q^{scv,a}}{z_q^{a,r}} \frac{q_a^*}{\kappa} \phi_h \left( \frac{z_q^{a,r}}{L_O^a} \right) \quad (2.38c)$$

### Nouveau formalisme pour les paramétrisations SCVA : définition d'échelles de longueurs

Le formalisme des paramétrisations de SCV qu'on vient introduire est très différent de celui des CLSA-MO, ce qui complique davantage la modélisation exhaustive de la CLS. Pour limiter ce problème, nous proposons ici une nouvelle écriture alternative pour les paramétrisations SCVA, qui permet d'écrire les équations fondamentales des deux schémas de paramétrisations (CLSA-MO et SCVA) sous une forme commune, inspirée de (2.26).

On étendra la paramétrisation de la CLSA-MO aux SCV par les moyens de ce qu'on appellera les *coordonnées visqueuses*  $(\ell_x^a)_{x \in \{u, \theta, q\}} : z \mapsto \ell_x^a(z) > 0$ . Celles-ci sont des fonctions de la variable  $z$ , sur lesquelles on impose les conditions suivantes :

(i) Régularité  $\mathcal{C}^1$  et stricte positivité :

$$\forall x \in \{u, \theta, q\}, \ell_x^a \in \mathcal{C}^1([0; z_x^{a,r}], \mathbb{R}_+^*) \quad (2.39)$$

(ii)  $\ell_x^a$  se raccorde de façon  $\mathcal{C}^1$  avec la fonction identité en  $(z_x^{a,r})$ , ie :

$$\ell_x^a(z_x^{a,r}) = z_x^{a,r} \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (2.40a)$$

$$\partial_z \ell_x^a|_{z_x^{a,r}} = 1 \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (2.40b)$$

(iii) Stricte croissance :

$$\forall z \in [0; z_x^{a,r}], \partial_z \ell_x^a > 0 \quad (2.41)$$

Les conditions énoncées ci-dessus font des  $(\ell_x^a)$  des  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes : par conséquent, on peut voir les coordonnées visqueuses comme autant de changements de la variable physique  $z$ .

On cherche à généraliser l'équation (2.26) d'évolution des gradients aux SCV en y substituant  $(\ell_x^a(z))$  à  $z$ . Pour cela, une hypothèse supplémentaire est nécessaire. En effet, au-dessus des longueurs de rugosité, on pouvait avoir une information sur la stratification *via*  $z/L_O^a$ . Or, les SCV sont justement des régions où  $L_O^a$ , la longueur d'Obukhov, n'est plus pertinente en tant qu'échelle. Par conséquent, dans les SCV, évaluer  $\phi_x(z/L_O^a)$  ou  $\phi_x(\ell_x^a(z)/L_O^a)$  n'a aucune raison d'être pertinent. A minima, on supposera que l'état de stratification des SCV est constant et est égal à la stratification à son bord supérieur, là on elles se raccordent avec la CLSA « Monin-Obukhov ». Cette hypothèse est sans doute perfectible, mais il faut rappeler dans ce type de contexte, le simple fait de *considérer l'existence de la SCV est une nouveauté*. On obtient alors les invariants suivants :

$$\kappa \frac{\ell_u^a}{u_a^*} \frac{\partial z}{\partial \ell_u^a} \frac{\partial u_h}{\partial z} e^{-i\tau_\theta} = \phi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) \quad z \in ]0; z_u^{a,r}[ \quad (2.42a)$$

$$\kappa \frac{\ell_\theta^a}{\theta_a^*} \frac{\partial z}{\partial \ell_\theta^a} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \phi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) \quad z \in ]0; z_\theta^{a,r}[ \quad (2.42b)$$

$$\kappa \frac{\ell_q^a}{q_a^*} \frac{\partial z}{\partial \ell_q^a} \frac{\partial q}{\partial z} = \phi_h \left( \frac{z_q^{a,r}}{L_O^a} \right) \quad z \in ]0; z_q^{a,r}[ \quad (2.42c)$$

En prolongeant les fonctions  $(\ell_x^a)$  par la fonction identité au-dessus de  $(z_x^{a,r})$ , de façon  $C^1$  vu les contraintes imposées sur ces échelles de longueur, alors la paramétrisation de la CLS atmosphérique entière, incluant la CLSA-MO et la SCVA, s'écrit en intégrant (2.42), *modulo* la prise en compte *a minima* de la stratification des SCV décrites ci-dessus. Les hypothèses faites sur  $(\ell_x^a)$  garantissent que  $z \mapsto \ell_x^a(z)$  est un changement de variable licite pour intégrer (2.42) dans les SCVA.

En toute rigueur, on aura alors les profils suivants :

$$\forall z \in ]0; z_u^{a,r}[ , u_h(z) = u_h(z_a^1) - \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m(\zeta_a) + \psi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \phi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{z_a^1} \right) \int_{\ell_u^a(z)}^{z_u^{a,r}} \frac{d\ell'}{\ell'} \right] e^{i\theta\tau} \quad (2.43a)$$

$$\forall z \in ]0; z_\theta^{a,r}[ , \theta(z) = \theta(z_a^1) - \frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) + \psi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) + \phi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) \int_{\ell_\theta^a(z)}^{z_\theta^{a,r}} \frac{d\ell'}{\ell'} \right] \quad (2.43b)$$

$$\forall z \in ]0; z_q^{a,r}[ , q(z) = q(z_a^1) - \frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_q^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) + \psi_h \left( \frac{z_q^{a,r}}{L_O^a} \right) + \phi_h \left( \frac{z_q^{a,r}}{L_O^a} \right) \int_{\ell_q^a(z)}^{z_q^{a,r}} \frac{d\ell'}{\ell'} \right] \quad (2.43c)$$

Dans toute la suite, on simplifiera davantage la prise en compte de la stratification de la SCV, en faisant les hypothèses suivantes :

$$\phi_y \left( \frac{z_x^{a,r}}{L_O^a} \right) = 1 \quad x \in \{u, \theta, q\}, y \in \{m, h\} \quad (2.44a)$$

$$\psi_y \left( \frac{z_x^{a,r}}{L_O^a} \right) = 0 \quad x \in \{u, \theta, q\}, y \in \{m, h\} \quad (2.44b)$$

Encore une fois, étudier la validité numérique de cette hypothèse est prématuré; cela sera fait plus tard, après avoir introduit d'autres outils, au chapitre 3 (page 123). (2.44) revient à complètement négliger les effets de stratification dans les SCV; si cette hypothèse peut certes paraître brutale, il convient une nouvelle fois de répéter que la simple considération des SCV constitue déjà une nouveauté, et qu'à notre connaissance, la littérature sur ce sujet est inexistante.

En injectant (2.44) dans (2.43), et en faisant le changement de variable  $z \mapsto \ell_x^a(z)$  dans les intégrales, on obtient les profils suivant, au sein des SCVA :

$$\forall z \in ]0; z_u^{a,r}[ , u_h(z) = u_h(z_a^1) - \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m(\zeta_a) - \ln \left( \frac{z_u^{a,r}}{\ell_u^a(z)} \right) \right] e^{i\theta\tau} \quad (2.45a)$$

$$\forall z \in ]0; z_\theta^{a,r}[ , \theta(z) = \theta(z_a^1) - \frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) + \ln \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{\ell_\theta^a(z)} \right) \right] \quad (2.45b)$$

$$\forall z \in ]0; z_q^{a,r}[ , q(z) = q(z_a^1) - \frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_q^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) + \ln \left( \frac{z_q^{a,r}}{\ell_q^a(z)} \right) \right] \quad (2.45c)$$

Ainsi, on ramènera chaque schéma de paramétrisations des SCV à un choix de triplet de changements de coordonnée  $(\ell_x^a)_{x \in \{u, \theta, q\}}$ .

À titre d'exemple, en terme de coordonnées visqueuses, la paramétrisation (2.35) correspond à :

$$\forall z \in ]0; z_x^{a,r}[, \ell_x^a(z) = z_x^{a,r} \exp \left[ -\kappa \frac{\delta x_a^{scv}}{x_a^*} \exp \left( \frac{z}{z_x^{scv, a, \bar{a}}} \right) \frac{1}{\phi_x(\zeta_a)} \frac{z_x^{a,r} - z}{z_x^{scv, a, \bar{a}}} \right] \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (2.46)$$

### Bilan et perspectives sur les paramétrisations SCVA

Les paramétrisations des SCVA sont formalisées *via* l'équation (2.42), en choisissant un schéma de paramétrisation définissant de nouvelles coordonnées  $(\ell_x^a)_{x \in \{u, \theta, q\}}$ . Celles-ci doivent être construites de façon à ce que les profils définis par (2.42) soient de régularité  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; z_a^1[$ .

C'est entre autres par ce mécanisme que les paramétrisations CLSA-MO et SCVA s'équilibrent et échangent de l'information, bien qu'on a aussi vu que ces deux jeux de paramétrisations pouvaient être imbriqués par d'autres moyens que cette connection, comme par exemple *via* la présence de  $u_a^*$  dans (2.37). La figure 2.9 est une version mise à jour de la figure 2.8, incorporant cette fois-ci une paramétrisation SCVA arbitraire.

L'incorporation de paramétrisations SCV plus complexes au sein des routines de couplage océan-atmosphère sera sans doute entreprise à l'avenir. Néanmoins, nous estimons que l'incorporation de paramétrisations de vagues à la surface de l'océan est sans doute prioritaire. Les dimensions verticales typiques d'une vague sont de l'ordre du mètre, plusieurs ordres de grandeur au-dessus des dimensions des SCV dans le cas d'une surface océanique plate, et ont *a priori* un effet conséquent sur les flux. Comme expliqué en début de chapitre, nous avons préféré dans un premier temps écarter toute paramétrisation de vagues.

### 2.3.3 Conditions aux limites

Comme indiqué au § 2.1.4, c'est au travers de conditions aux limites (partiellement turbulentes) que la modélisation de la CLS transmet de l'information au le modèle atmosphérique. Les conditions aux limites prescrites au modèle atmosphérique en  $z_a^1$  sont les suivantes :

$$v^t \partial_z u_h \Big|_{z_a^1} = \tau / \rho_a \quad (2.47a)$$

$$\mathcal{K}_\theta^t \partial_z \theta \Big|_{z_a^1} = \frac{Q_{sol} + Q_{l\uparrow} + Q_{l\downarrow} + Q_{IR} + Q_H + Q_L}{\rho_a c_p^a} \quad (2.47b)$$

$$\mathcal{K}_q^t \partial_z q \Big|_{z_a^1} = \frac{Q_L}{\rho_a \Lambda} \quad (2.47c)$$

où  $Q_{sol}$ ,  $Q_{l\uparrow}$ ,  $Q_{l\downarrow}$  et  $Q_{IR}$  représentent d'autres flux de chaleurs (respectivement solaire, radiatif ascendant, radiatif descendant, infrarouge), provenant de l'extérieur, supposés constants et connus<sup>4</sup>.

Dans (2.47),  $\tau$ ,  $Q_H$  et  $Q_L$  sont respectivement les flux de tension de vent (ou plutôt, sa représentation plongée dans C), de chaleur sensible et de chaleur latente : ces trois grandeurs sont

4. En toute rigueur, cela n'est pas vrai pour  $Q_{l\uparrow}$ , évalué à l'aide d'une loi de corps noir utilisant la « température de peau », qui devrait elle-même être calculée *via* les échelles de friction. Nous négligerons cet aspect en supposant  $Q_{l\uparrow}$  connu indépendamment de toute paramétrisation turbulente.

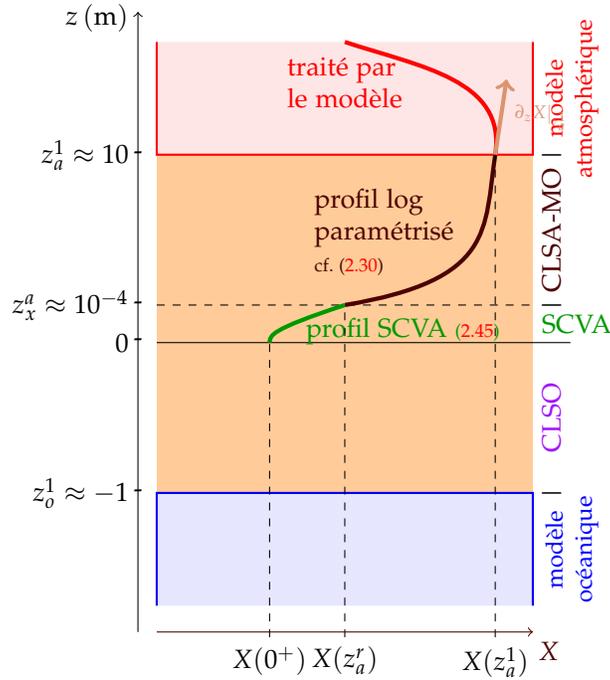


FIGURE 2.9 – Représentation schématique de la CLS entière et des profils de solution en découlant, pour une grandeur scalaire réelle  $X \in \{\Re(u_h), \Im(u_h), \theta, q\}$ . La courbe en vert, rajoutée par rapport à la figure 2.8, représente une forme arbitraire de profil de solution dans la SCVA issue d'un choix de coordonnées visqueuses ( $\ell_x^a$ ) donnant la forme (2.45). Sur le schéma ci-dessus, l'échelle de friction paramétrisant les profils de solution dans la CLS est bien cohérente avec entre la SCVA et la CLSA-MO et entre la CLSA-MO et le modèle atmosphérique; cela se manifeste par le fait que les différentes paramétrisations se raccordent avec une régularité  $\mathcal{C}^1$ , et que le flux turbulent imposé au modèle atmosphère corresponde au gradient de la solution CLSA-MO en  $z = z_a^1$ .

issues de la paramétrisation CLS *via* (2.15). Le membre de droite de (2.47c) est en fait un flux d'évaporation.  $\nu^t$ ,  $\mathcal{K}_\theta^t$  et  $\mathcal{K}_q^t$  sont respectivement la viscosité et les diffusivités thermique et humide turbulentes. Elles sont aussi issues de paramétrisations turbulentes; comme on le verra dans un chapitre ultérieur, il existe un certain nombre de méthodes pour les déterminer, surtout en dehors de la CLS.

La prise en compte des conditions aux limites (2.47) ne nécessite que la connaissance de ces viscosité et diffusivités turbulentes au bord de la CLS, en  $z = z_a^1$ . Imposer la continuité du gradient  $\partial_z u_h$  entre le profil CLS (2.30a) et la CL (2.47a) donne cette valeur locale pour  $\nu_a^t$ , cf. (2.34) :

$$\forall z \approx z_a^1, \nu_a^t(u_a^*, z, L_O^a) = \kappa u_a^* z \phi_m \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \quad (2.48)$$

Rappelons qu'à notre connaissance, (2.48) n'est *jamais* utilisée telle quelle : on suppose systématiquement  $\phi_m(z/L_O^a) = 1$ , ce qui revient à négliger les effets de la stratification pour la viscosité turbulente. Cette dernière approximation implique en particulier que les profils de vitesse décrits par la théorie de Monin-Obukhov dans une CLS stratifiée ne se raccordent pas de façon  $C^1$  avec la solution numérique en  $z = z_a^1$ , dont le comportement est conditionné par (2.47a).

De façon similaire, les diffusivités turbulentes thermique et humide sont en générales prises égales, et sont évaluées à partir de  $\nu_a^t$  par l'intermédiaire du *nombre de Prandtl*  $Pr$  :

$$\mathcal{K}_{\theta,a}^t = \mathcal{K}_{q,a}^t = Pr^{-1} \nu_a^t \quad (2.49)$$

où  $Pr$ , nombre sans dimension, est soit constant, soit lui aussi paramétrisé. Bien que la forme (2.49) ne permette pas non plus de raccorder régulièrement les profils de température et d'humidité en  $z = z_a^1$ , c'est cette forme qui est la plus répandue.

Le couplage entre la paramétrisation de la CLS atmosphérique et le modèle atmosphérique se fait *via* l'imposition des conditions (2.47). En effet, les flux turbulents y sont paramétrisés à l'aide des échelles de friction, comme le montre (2.15); or, ces dernières permettent également de dimensionner les profils de solution dans la CLS atmosphérique, sur l'intervalle  $]0; z_a^1[$ .

## 2.4 La couche limite de surface océanique

La section précédente a présenté la théorie de Monin-Obukhov pour en déduire les profils de solution au sein de la CLSA-MO, région où cette théorie est valable. On a aussi défini, avec un formalisme similaire, des schémas de paramétrisations pour les sous-couches visqueuses atmosphériques, où la théorie MO ne s'applique pas. Pour l'instant, les paramétrisations que nous avons introduites permettent de dessiner des profils de solution jusqu'à la surface de l'océan, qui se situe en dehors de la grille de calcul du modèle océan.

Cette section a pour objectif d'étendre les résultats obtenus précédemment à l'ensemble de la CLS : il s'agit donc d'étendre les schémas de paramétrisations à sa partie océanique,  $z \in [z_o^1; 0]$ . L'objectif final est que le système océan-CLS-atmosphère puisse constituer un continuum. En d'autres termes, on exigera des paramétrisations CLS qu'elles aient le moins d'impact possible sur les modèles par rapport à un cas asymptotique idéal, où elle serait intégralement traitée numériquement, de façon satisfaisante.

### 2.4.1 Flux turbulents dans la CLS océanique

La modélisation de la CLS océanique repose sur les mêmes hypothèses que pour la couche limite atmosphérique. On suppose notamment que la décomposition de Reynolds, puis l'hypothèse de fermeture correspondante permettent d'obtenir des flux turbulents dans la CLS :

$$\langle w' u_h' \rangle = -v_o^t \partial_z u_h \quad (2.50a)$$

$$\langle w' \theta' \rangle = -\mathcal{K}_{T,o}^t \partial_z \theta \quad (2.50b)$$

$$\langle w' S' \rangle = -\mathcal{K}_{S,o}^t \partial_z S \quad (2.50c)$$

où on a introduit la viscosité turbulente  $v_o^t$ , ainsi que les diffusivités turbulentes thermique et saline, respectivement  $\mathcal{K}_{T,o}^t$  et  $\mathcal{K}_{S,o}^t$ .

Comme indiqué au § 2.1.4, les flux prescrits à l'océan au voisinage de la surface sont (Barnier, 1998) :

$$v_o^t \partial_z u_h \Big|_{z_o^1} = \frac{\tau}{\rho_o} \quad (2.51a)$$

$$\mathcal{K}_{T,o}^t \partial_z \theta \Big|_{z_o^1} = \frac{Q_{IR} + Q_L + Q_H}{\rho_o c_p^o} \quad (2.51b)$$

$$\mathcal{K}_{S,o}^t \partial_z S \Big|_{z_o^1} = S(E - P - R) \quad (2.51c)$$

où  $\rho_o$  est la masse volumique de l'eau ( $\rho_o \approx 10^3 \rho_a$ ) et  $c_p^o$  sa capacité thermique, supposées connues.  $\tau$ ,  $Q_L$  et  $Q_H$  sont les trois flux turbulents déjà introduits pour la modélisation de la CLS atmosphérique (2.12). (2.51c) est une condition aux limites sur la salinité :  $E$  est un flux d'évaporation,  $P$  est un flux de précipitation (supposé connu),  $R$  un éventuel flux d'eau douce supplémentaire (par exemple dû à un estuaire de fleuve ou à la fonte de glace).

La forme (2.51c) comme condition au bord pour la salinité n'est pas strictement conservative. En d'autres mots, elle ne garantit pas que la quantité de sel présente dans l'océan soit constante, ce qui est pourtant physiquement le cas. D'autres formulations ont été développées (par exemple Rouillet et Madec, 2000) pour pallier ce problème. Bien que celles-ci soient plus satisfaisantes, elles incluent aussi un certain nombre d'aspects complexes (par exemple, le fait de ne plus considérer la surface de l'océan comme plate et rigide) qui rendent leur manipulation délicate. Ainsi, pour des raisons de simplicité, on utilisera bien la condition à la limite (2.51c).

### 2.4.2 Échelles de friction océaniques et stratification

À l'instar de la CLS atmosphérique, la modélisation d'une partie de la CLS océanique, notée CLSO-MO, se fait à l'aide de l'hypothèse fondatrice de couche à flux turbulents constants. Ceux-ci sont définis par l'intermédiaire d'échelles de friction, grandeurs ayant les dimensions physiques des variables qu'on cherche à paramétrer ; ici, il s'agit de la vitesse  $u_h$ , de la température potentielle  $\theta$  et de la salinité  $S$ . Par analogie avec (2.14), on écrit alors :

$$(u_o^*)^2 e^{i\theta\tau} = -\langle w' u_h' \rangle \quad (2.52a)$$

$$u_o^* \theta_o^* = -\langle w' \theta' \rangle \quad (2.52b)$$

$$u_o^* s_o^* = -\langle w' S' \rangle \quad (2.52c)$$

où  $\theta_\tau$  est toujours l'argument complexe de la tension de vent  $\tau$ . Ces nouvelles échelles de friction peuvent aussi décrire les conditions de flux imposées au modèle océan. En réinjectant (2.52) dans (2.50), combiné à (2.51), on obtient :

$$v_o^t \partial_z u_h \Big|_{z_o^1} = (u_o^*)^2 e^{i\theta_\tau} \quad (2.53a)$$

$$\mathcal{K}_{T,o}^t \partial_z \theta \Big|_{z_o^1} = u_o^* \theta_o^* \quad (2.53b)$$

$$\mathcal{K}_{S,o}^t \partial_z S \Big|_{z_o^1} = u_o^* s_o^* \quad (2.53c)$$

Supposer que les flux turbulents soient les mêmes dans la CLSA-MO et dans la CLSO-MO<sup>5</sup> permet alors d'obtenir les échelles de friction océaniques à partir, entre autres, de leur contrepartie atmosphérique. On obtient :

$$u_o^* = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o}} u_a^* \quad (2.54a)$$

$$\theta_o^* = \frac{Q_{IR}}{\rho_o c_p^o u_o^*} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o} \frac{c_p^a}{c_p^o}} \theta_a^* + \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o} \frac{\Lambda}{c_p^o}} q_a^* \quad (2.54b)$$

$$s_o^* = S \frac{E - P - R}{u_o^*} \quad (2.54c)$$

De façon analogue à la CLS atmosphérique (2.23), on peut définir un flux de flottabilité au sein de la CLS océanique, qui peut être exprimé à partir des échelles de friction (Large, 1998) :

$$\mathcal{B}_o = -g u_o^* \left[ \frac{\theta_o^*}{\theta_0} - \frac{s_o^*}{s_o} \right] \quad (2.55)$$

$\mathcal{B}_o$  s'exprime en  $m^2 s^{-3}$ .  $\theta_0$  et  $s_o$  sont des échelles constantes de référence, respectivement de température et de salinité.

Toujours de façon analogue à l'atmosphère, on peut alors définir une longueur d'Obukhov océanique par l'intermédiaire du flux de flottabilité :

$$L_O^o = \frac{(u_o^*)^3}{\kappa \mathcal{B}_o} = - \frac{(u_o^*)^2}{\kappa g \left[ \frac{\theta_o^*}{\theta_0} - \frac{s_o^*}{s_o} \right]} \quad (2.56)$$

où il y a un changement de signe par rapport à (2.21), correspondant au fait que contrairement à l'atmosphère, le champ gravitationnel est désormais orienté dans le sens des  $|z|$  décroissant.  $\kappa \approx 0.4$  est toujours la constante sans dimension de von Kármán. La longueur d'Obukhov permet alors de définir un *paramètre de stabilité océanique*, rendant compte de l'état de stratification de la couche limite de surface océanique :

$$\zeta_o = \frac{|z_o^1|}{L_O^o} = g \frac{\kappa z_o^1}{(u_o^*)^2} \left[ \frac{\theta_o^*}{\theta_0} - \frac{s_o^*}{s_o} \right] \quad (2.57)$$

Notons qu'en un sens, la stabilité est « inversée » dans le CLSO par rapport à la CLSA, puisque  $\zeta_o$  sera de signe contraire à  $L_O^o$ . Cela provient du fait que bien que la CLSO puisse être considérée comme symétrique à la CLSA par rapport à l'interface, le champ gravitationnel y sera toujours invariablement orienté vers le bas. En un sens, les effets de la stratification sont renversés.

---

5. Une discussion autour de cette hypothèse en entreprise en fin de sous-section, à la page 61.

Par analogie à (2.26), les groupes invariants sont décrits ainsi dans la CLSO :

$$\kappa \frac{z \partial_z |u_h|}{u_o^*} = \phi_m \left( \frac{-z}{L_o^o} \right) \quad z \in ]z_o^1; z_u^{o,r} [ \quad (2.58a)$$

$$\kappa \frac{z \partial_z \theta}{\theta_o^*} = \phi_h \left( \frac{-z}{L_o^o} \right) \quad z \in ]z_o^1; z_\theta^{a,r} [ \quad (2.58b)$$

$$\kappa \frac{z \partial_z s}{s_o^*} = \phi_h \left( \frac{-z}{L_o^o} \right) \quad z \in ]z_o^1; z_s^{o,r} [ \quad (2.58c)$$

où la principale différence par rapport à (2.26) est que dans les membres de gauche de (2.58), on a remplacé  $z \leftrightarrow |z|$ ; en effet, ce terme provient du formalisme type loi du mur, et correspond à la *distance* (positive) entre l'interface  $z = 0$  et le niveau  $z$ . Ainsi, dans la CLSO, où  $z \leq 0$ , il convient de considérer  $|z| = -z$ . Ces changements sont invisibles par annulation des deux signes « - » des membres de gauche de (2.58). En revanche, la prise en compte de la stratification se fait bien en considérant  $|z| = -z$ .

Le triplet  $(z_u^{o,r}, z_\theta^{o,r}, z_s^{o,r}) \in (\mathbb{R}_-^*)^3$  est un ensemble de longueurs (algébriques, et toutes strictement négatives) de rugosité. Sa définition la plus mathématique est la même que celle donnée pour la composante atmosphérique : ces longueurs représentent le niveau jusqu'auquel la théorie de Monin Obukhov est supposée valable dans la CLSO.

Considérer les mêmes fonctions de stabilité  $(\phi_x)_{x \in \{m,h\}}$  dans l'océan et dans l'atmosphère revient à affirmer que la théorie de Monin-Obukhov est valable quelle que soit le fluide stratifié considéré (dans notre cas, respectivement eau et air), du moment que les échelles de friction sur lesquelles elle se base soient bien dimensionnées et pertinentes.

### 2.4.3 Profils de solution au sein de la CLSO-MO

De façon analogue à la CLSA-MO, on peut obtenir des profils de solution dans la CLSO-MO par intégration des groupes sans dimension (2.58) :

$$\forall z \in ]z_o^1; z_u^{o,r} [, u_h(z) = u_h(z_o^1) + \frac{u_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z} \right) + \psi_m(\zeta_o) - \psi_m \left( -\frac{z}{L_o^o} \right) \right] e^{i\theta\tau} \quad (2.59a)$$

$$\forall z \in ]z_o^1; z_\theta^{o,r} [, \theta(z) = \theta(z_o^1) + \frac{\theta_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z} \right) + \psi_h(\zeta_o) - \psi_h \left( -\frac{z}{L_o^o} \right) \right] \quad (2.59b)$$

$$\forall z \in ]z_o^1; z_s^{o,r} [, s(z) = s(z_o^1) + \frac{s_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z} \right) + \psi_h(\zeta_o) - \psi_h \left( -\frac{z}{L_o^o} \right) \right] \quad (2.59c)$$

Sous cette forme, les longueurs de rugosité océaniques  $(z_x^{o,r})_{x \in \{u,\theta,s\}}$  peuvent être vues comme autant de constantes d'intégration, définissant la profondeur à laquelle les différentes variables atteindraient leurs valeurs « de surface » respectives, en supposant que l'hypothèse de couche à flux constant soit valable jusqu'à celles-ci.

(2.59) repose aussi sur le couple de fonctions  $(\psi_m, \psi_h)$ , intégrales des fonctions de stabilité  $(\phi_m, \phi_h)$ , de façon analogue à la modélisation de la CLS atmosphérique.

On distinguera deux façons rudimentaires de calculer les longueurs de rugosité océaniques. La première façon est simplement d'imposer les mêmes longueurs de rugosité que dans l'atmosphère, au signe près :

$$z_x^{o,r} = -z_x^{a,r} \quad x \in \{u, \theta, q/s\} \quad (2.60)$$

La seconde méthode consiste à appliquer le même facteur d'échelles entre les longueurs de rugosité qu'entre les échelles de friction :

$$z_x^{o,r} = -\frac{x_o^*}{x^*} z_x^{a,r} \quad (2.61)$$

Ces deux méthodes ne sont pas satisfaisantes, dans la mesure où elles ne reposent sur aucun argument physique. En outre, il semble au mieux « audacieux » de lier une longueur de rugosité d'humidité à une longueur de rugosité saline.

Ces limitations sont dues à l'état de l'art actuel de la modélisation de la CLS océanique. Dans l'atmosphère, les longueurs de rugosité sont paramétrisées en fonction des échelles de friction, ce qui permet de fermer le système. Dans les modèles océaniques, la CLS n'est que rarement paramétrisée, et encore moins *via* un formalisme hérité de la théorie de Monin-Obukhov. L'une des composantes qui manquent à la paramétrisation CLS est donc une fermeture pour les longueurs de rugosité océaniques. Étant donné ce manque, nous proposerons dans la suite, au § 2.5.3, une méthode pour déterminer les longueurs de rugosité océaniques en utilisant uniquement des arguments de régularité mathématique des profils de solution au franchissement de la surface de l'océan.

Enfin, soulignons qu'à l'image de (2.34), il est possible d'écrire un système imposant des conditions à  $v_o$ ,  $\mathcal{K}_{T,o}^t$  et  $\mathcal{K}_{s,o}^t$  en  $z = z_o^1$ , pour que les profils de la CLSO (2.59) soient cohérents avec les conditions aux limites imposées au modèle atmosphère, extraites de (2.5). Comme pour l'interface CLSA-atmosphère, ces conditions ne sont en général pas vérifiées : cela signifie qu'imposer des conditions aux limites extraites de (2.5) brise la continuité des gradients des solutions à l'interface entre CLSO et modèle océan.

#### Une remarque sur l'hypothèse de couche à flux constants

L'une des hypothèses de base de la théorie de Monin-Obukhov est que les flux turbulents soient constants dans la CLS *entière*, de part et d'autre de la surface de l'océan. À notre avis, cette hypothèse est difficilement compatible avec la présence de sous-couches visqueuses. En effet, par définition, dans ces régions, *l'hypothèse de couche à flux constant est relevée*. Il n'y a donc aucune raison pour que dans la CLSO « Monin Obukhov », les flux soient les mêmes que dans la CLSA-MO, puisque leur caractère constant de  $z$  a d'ores et déjà été brisé *avant de franchir la surface*, au sein des SCVA (et il est aussi brisé de façon symétrique dans les SCVO).

À titre d'exemple, pour la norme du flux de tension de vent,  $|\tau|$ , prendre en compte cette « rupture » du caractère constant donnerait :

$$\rho_a (u_a^*)^2 - \delta_{SCVA} |\tau| = \rho_o (u_o^*)^2 - \delta_{SCVO} |\tau| \quad (2.62)$$

où les  $\delta_{SCV\alpha} |\tau|$ , pour  $\alpha \in \{O, A\}$ , représentent les quantités de flux de tension de vent que les sous-couches visqueuses absorbent de part et d'autre de l'interface : ces grandeurs quantifient donc l'écart entre une hypothèse de flux de constant sur la CLS en intégralité, et une hypothèse réduite pour laquelle le flux ne serait constant que sur la CLS excluant les SCV, et donc éventuellement distinct entre la partie océan et atmosphère.

En particulier, (2.62) impliquerait des modifications dans l'équation (2.54a), permettant de diagnostiquer directement  $u_o^*$  à partir de  $u_a^*$  : celle-ci prendrait alors en compte l'action des SCV sur

le flux  $\tau$ . L'hypothèse de couche intégralement à flux constant revient à supposer  $\delta_{SCV\alpha} |\tau| = 0$  pour  $\alpha \in \{O, A\}$ . Puisqu'elle est très répandue dans la littérature, celle-ci sera conservée dans la suite de l'exposé, et ce malgré les réserves exprimées ci-dessus. Relever cette hypothèse nécessiterait de disposer de schémas de paramétrisations pour les grandeurs  $(\delta_{SCV\alpha} |\tau|)_{\alpha \in \{o, a\}}$ .

Reprendre le même raisonnement pour les deux autres flux turbulents,  $Q_H$  et  $Q_L$ , amènerait à aussi reconsidérer les diagnostics de  $\theta_o^*$  et de  $s_o^*$ .

#### 2.4.4 Sous-couches visqueuses océaniques

À l'instar de la CLSA, dans la CLSO, au voisinage immédiat de la surface, la théorie de Monin-Obukhov n'est plus valable, puisque les phénomènes de diffusions moléculaires prennent le dessus sur leur contrepartie turbulente.

La modélisation des sous-couches visqueuses océaniques sera faite de façon analogue à ce qui a précédemment été présenté pour l'atmosphère (voir § 2.3.2). Celle-ci passe donc par l'établissement de coordonnées visqueuses océaniques  $(\ell_x^o)_{x \in \{u, \theta, s\}}$ , se raccordant de façon  $\mathcal{C}^1$  avec  $-\text{Id}$  en  $z_x^{o,r}$ , et strictement décroissantes, telles qu'on puisse écrire :

$$\kappa \frac{\ell_u^o}{u_o^*} \frac{\partial z}{\partial \ell_u^o} \frac{\partial u_h}{\partial z} = \phi_m \left( -\frac{z_u^{o,r}}{L_O^o} \right) e^{i\tau\theta} \quad \forall z \in ]z_u^{o,r}; 0[ \quad (2.63a)$$

$$\kappa \frac{\ell_\theta^o}{\theta_o^*} \frac{\partial z}{\partial \ell_\theta^o} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \phi_h \left( -\frac{z_\theta^{o,r}}{L_O^o} \right) \quad \forall z \in ]z_\theta^{o,r}; 0[ \quad (2.63b)$$

$$\kappa \frac{\ell_s^o}{s_o^*} \frac{\partial z}{\partial \ell_s^o} \frac{\partial s}{\partial z} = \phi_h \left( -\frac{z_s^{o,r}}{L_O^o} \right) \quad \forall z \in ]z_s^{o,r}; 0[ \quad (2.63c)$$

où on fait la même approximation que dans les SCVA, à savoir de supposer que l'état de stratification de la SCVO est indépendant de  $z$ , et est égal à celui au bord inférieur des SCVO. De façon analogue au traitement des SCVA, on pousse cette hypothèse jusqu'à considérer que dans la SCVO, les groupes sans dimension sont égaux à 1 (cf. (2.44)). L'intégration donne alors les formes suivantes, analogues à (2.45) :

$$\forall z \in ]z_u^{o,r}; 0[, \quad u_h(z) = u_h(z_o^1) + \frac{u_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_u^{o,r}} \right) + \psi_m(\zeta_o) + \ln \left( \frac{-z_u^{o,r}}{\ell_u^o(z)} \right) \right] e^{i\theta\tau} \quad (2.64a)$$

$$\forall z \in ]z_\theta^{o,r}; 0[, \quad \theta(z) = \theta(z_o^1) + \frac{\theta_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_\theta^{o,r}} \right) + \psi_h(\zeta_o) + \ln \left( \frac{-z_\theta^{o,r}}{\ell_\theta^o(z)} \right) \right] \quad (2.64b)$$

$$\forall z \in ]z_s^{o,r}; 0[, \quad S(z) = S(z_o^1) + \frac{s_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_s^{o,r}} \right) + \psi_h(\zeta_o) + \ln \left( \frac{-z_s^{o,r}}{\ell_s^o(z)} \right) \right] \quad (2.64c)$$

### 2.5 Vers un système couplé océan-CLS-atmosphère

L'objectif des § 2.3 et § 2.4 était de présenter une modélisation complète de la couche limite de surface océan-atmosphère. Celle-ci permet d'obtenir des profils pour les quantités d'intérêt au sein de la CLS. La paramétrisation des CLS présentée ici, bien que rudimentaire, fait intervenir un certain nombre de paramétrisations imbriquées les unes dans les autres.

### 2.5.1 Bilan des paramétrisations introduites

Le système (2.65) ci-dessous recense l'ensemble des profils de solution dans la CLS, en fonction de nombreuses grandeurs issues de paramétrisations. Les sous-équations de (2.65a) à (2.65f) correspondent aux régions où la théorie de Monin-Obukhov s'applique. Les sous-équations de (2.65g) à (2.65l) correspondent aux sous-couches visqueuses ; elles utilisent les valeurs des profils de solution aux niveaux des longueurs de rugosité, extraites des équations (2.65a) à (2.65f) aux niveaux adéquats.

$$\forall z \in [z_u^{a,r}, z_a^1[, u_h(z) = u_h(z_a^1) - \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z} \right) - \psi_m(\zeta_a) + \psi_m \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \right] e^{i\theta_\tau} \quad (2.65a)$$

$$\forall z \in [z_\theta^{a,r}, z_a^1[, \theta(z) = \theta(z_a^1) - \frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z} \right) - \psi_h(\zeta_a) + \psi_h \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \right] \quad (2.65b)$$

$$\forall z \in [z_q^{a,r}, z_a^1[, q(z) = q(z_a^1) - \frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z} \right) - \psi_h(\zeta_a) + \psi_h \left( \frac{z}{L_O^a} \right) \right] \quad (2.65c)$$

$$\forall z \in ]z_o^1, z_u^{o,r}], u_h(z) = u_h(z_o^1) + \frac{u_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z} \right) + \psi_m(\zeta_o) - \psi_m \left( -\frac{z}{L_O^o} \right) \right] e^{i\theta_\tau} \quad (2.65d)$$

$$\forall z \in ]z_o^1, z_\theta^{o,r}], \theta(z) = \theta(z_o^1) + \frac{\theta_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z} \right) + \psi_h(\zeta_o) - \psi_h \left( -\frac{z}{L_O^o} \right) \right] \quad (2.65e)$$

$$\forall z \in ]z_o^1, z_s^{o,r}], s(z) = s(z_o^1) + \frac{s_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z} \right) + \psi_h(\zeta_o) - \psi_h \left( -\frac{z}{L_O^o} \right) \right] \quad (2.65f)$$

$$\forall z \in ]0; z_u^{a,r}[, u_h(z) = u_h(z_u^{a,r}) - \frac{u_a^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z_u^{a,r}}{\ell_u^a(z)} \right) e^{i\theta_\tau} \quad (2.65g)$$

$$\forall z \in ]0; z_\theta^{a,r}[, \theta(z) = \theta(z_\theta^{a,r}) - \frac{\theta_a^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{\ell_\theta^a(z)} \right) \quad (2.65h)$$

$$\forall z \in ]0; z_q^{a,r}[, q(z) = q(z_q^{a,r}) - \frac{q_a^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z_q^{a,r}}{\ell_q^a(z)} \right) \quad (2.65i)$$

$$\forall z \in ]z_u^{o,r}; 0[, u_h(z) = u_h(z_u^{o,r}) + \frac{u_o^*}{\kappa} \ln \left( \frac{-z_u^{o,r}}{\ell_u^o(z)} \right) \quad (2.65j)$$

$$\forall z \in ]z_\theta^{o,r}; 0[, \theta(z) = \theta(z_\theta^{o,r}) + \frac{\theta_o^*}{\kappa} \ln \left( \frac{-z_\theta^{o,r}}{\ell_\theta^o(z)} \right) \quad (2.65k)$$

$$\forall z \in ]z_s^{o,r}; 0[, S(z) = S(z_s^{o,r}) + \frac{s_o^*}{\kappa} \ln \left( \frac{-z_s^{o,r}}{\ell_s^o(z)} \right) \quad (2.65l)$$

L'ensemble du système (2.65) est aussi résumé symboliquement sur la figure 2.10 ci-dessous.

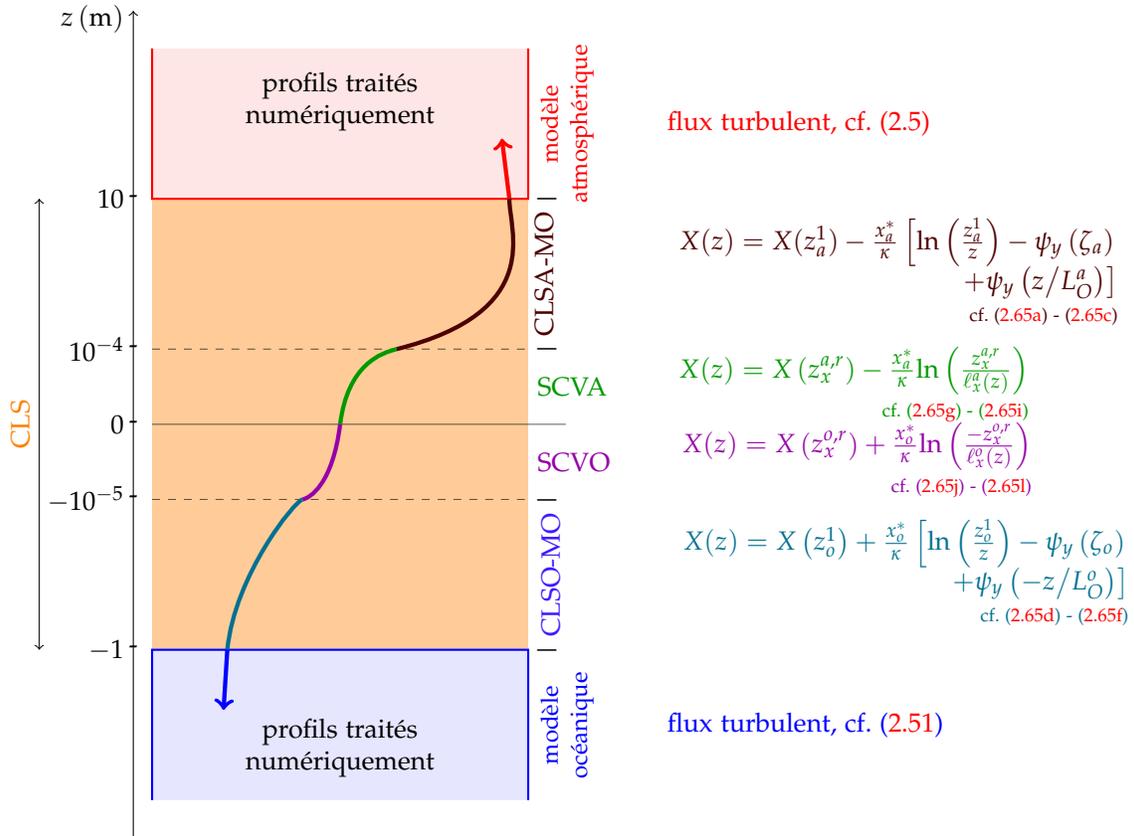


FIGURE 2.10 – Représentation schématique des différentes paramétrisations de la couche limite de surface. Ici,  $X \in \{u_h, \theta\}$ ,  $y = m$  dans  $X = u_h$  et  $y = h$  quand  $X = \theta$ . Le cas de  $q$  et de  $S$  est plus singulier, puisque ces variables n'étant définies que d'un seul côté de l'interface, elles n'ont pas vocation à la « traverser ».

Il est possible de reconstruire l'ensemble des profils paramétrisés par (2.65) par la seule connaissance de :

- (i) les quatre échelles de friction  $(u_a^*, \theta_a^*, q_a^*, s_o^*)$  ;
- (ii) les longueurs de rugosité  $(z_u^{a,r}, z_u^{o,r}, z_\theta^{a,r}, z_\theta^{o,r}, z_q^{a,r}, z_s^{o,r})$  ;
- (iii) la direction du flux de tension de vent  $\theta_\tau$ .

La liste ci-dessus contient 10 degrés de liberté. De façon générale, on considérera toujours que  $\theta_\tau = \text{Arg} \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right)$ . En outre, le § 2.5.3 proposera une méthode pour déterminer les longueurs de rugosité océaniques  $(z_x^{o,r})$  à partir d'autres paramètres. On verra au chapitre 3 comment déterminer les 6 degrés de liberté restant parmi ceux listés ci-dessus. Bien entendu, les valeurs des solutions aux niveaux  $z_o^1$  et  $z_a^1$  ; i.e.,  $u_h(z_o^1)$ ,  $\theta(z_o^1)$ ,  $s(z_o^1)$ ,  $u_h(z_a^1)$ ,  $\theta(z_a^1)$ ,  $q(z_a^1)$ , extraites des modèles océan et atmosphère, sont aussi nécessaires pour raccorder les paramétrisations CLS aux modèles.

Le tableau 2.1 a pour but de recenser l'ensemble des imbrications de paramétrisations, à partir des grandeurs « de base » listées ci-dessus, si l'on suppose qu'on utilise des paramétrisations SCV issues de Liu *et al.* (1979).

## 2.5.2 Cohérence du couplage

Dans le cadre d'un couplage « classique », où les deux sous-domaines échangent des flux par une interface commune *via* des conditions de bords classiques, on considère que le couplage est cohérent si les flux vus par chacun des sous-modèles sont les mêmes.

Dans le cadre du couplage océan-atmosphère, les procédés d'échanges de flux sont plus complexes. Les échanges entre les deux sous-modèles se font *via* les conditions de bord (2.47) et (2.51), prescrites respectivement à l'atmosphère et à l'océan. Nous avons vu que l'égalité des flux turbulents sur l'ensemble de la CLS était une des hypothèses de base de la modélisation de cette région ; c'est celle qui permet de diagnostiquer les échelles de friction océaniques à partir des atmosphériques (voir (2.54)). Ainsi, l'égalité des flux turbulents en  $z_a^1$  et en  $z_o^1$  n'est pas une condition contraignante pour juger du caractère cohérent du couplage océan-atmosphère : par la nature même des paramétrisations, on sait qu'au niveau continu, cette condition sera *toujours* vérifiée.

Il est donc nécessaire d'établir une condition de cohérence du couplage océan-atmosphère prenant en compte les particularités qu'apportent les paramétrisations de la CLS. Celles-ci permettent, d'une part, de « remonter » ( $z \nearrow$ ) dans l'océan, depuis  $z_o^1$  jusqu'à la surface, et d'autre part, de « descendre » ( $z \searrow$ ) dans l'atmosphère, depuis  $z_a^1$  jusqu'à la surface. Prenons  $u_h$  comme exemple. Dans l'océan, (2.65d) puis (2.65j) permettent de remonter depuis  $z_o^1$  vers la surface ; dans l'atmosphère, (2.65a) puis (2.65g) permettent de descendre depuis  $z_a^1$  jusqu'à la surface.

Il est donc possible d'obtenir deux valeurs de surface pour la grandeur  $u_h$  : l'une obtenue en remontant depuis l'océan, l'autre en descendant depuis l'atmosphère. En généralisant ce procédé à l'ensemble des grandeurs paramétrisées dans la CLS, on obtient les valeurs de surface suivantes :

$$u_h(0^+) = u_h(z_a^1) - \overbrace{\frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m(\zeta_a) \right]}^{\text{CLSA-MO}} e^{i\theta_\tau} - \overbrace{\frac{u_a^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z_u^{a,r}}{\ell_u^a(0)} \right)}^{\text{SCVA}} e^{i\theta_\tau} \quad (2.66a)$$

Nom	Région	Dépendances directes	Équation
$u_h$	$[z_u^{a,r}; z_a^1[$	$u_a^*, L_O^a, \theta_\tau, u_h(z_a^1)$	(2.30a), p.47
	$]0; z_u^{a,r}[$	$u_h(z_u^{a,r}), \ell_u^a, \theta_\tau$	(2.45a), p.54
	$]z_o^1; z_u^{o,r}[$	$u_o^*, L_O^o, \theta_\tau, u_h(z_o^1)$	(2.59a), p.60
	$]z_u^{o,r}; 0[$	$u_h(z_u^{o,r}), \ell_u^o, \theta_\tau$	(2.64a), p.62
$\theta$	$[z_\theta^{a,r}; z_a^1[$	$\theta_a^*, L_O^a, \theta(z_a^1)$	(2.30b), p.47
	$]0; z_\theta^{a,r}[$	$\theta(z_\theta^{a,r}), \ell_\theta^a$	(2.45b), p.54
	$]z_o^1; z_u^{o,r}[$	$\theta_o^*, L_O^o, \theta(z_o^1)$	(2.59b), p.60
	$]z_u^{o,r}; 0[$	$\theta(z_\theta^{o,r}), \ell_\theta^o$	(2.64b), p.62
$q$	$[z_q^{a,r}; z_a^1[$	$q_a^*, L_O^a, q(z_a^1)$	(2.30c), p.47
	$]0; z_q^{a,r}[$	$q(z_q^{a,r}), \ell_q^a$	(2.45c), p.54
$s$	$]z_o^1; z_s^{o,r}[$	$s_o^*, L_O^o, s(z_o^1)$	(2.59c), p.60
	$]z_s^{o,r}; 0[$	$s(z_s^{o,r}), \ell_s^o$	(2.64c), p.62
$L_O^a$	$]z_m^{a,r}; z_a^1[$	$u_a^*, \theta_a^*, q_a^*, \theta(z_a^1), q(z_a^1)$	(2.24), p.44
$L_O^o$	$]z_o^1; z_m^{o,r}[$	$u_o^*, \theta_o^*, s_o^*$	(2.57), p.59

TABLEAU 2.1 – Imbrication des différentes paramétrisations permettant d’obtenir les profils de solution au sein des couches limites de surface océanique et atmosphérique. Les régions d’intérêt des longueurs d’Obukhov  $L_o^\alpha$  sont délimitées par les  $z_m^{\alpha,r}$  tels que  $|z_m^{\alpha,r}| = \max_{x \in \{u, \theta, q/s\}} |z_x^{a,r}|$ .

$$u_h(0^-) = u_h(z_o^1) + \underbrace{\frac{u_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_u^{o,r}} \right) + \psi_m(\zeta_o) \right]}_{\text{CLSO-MO}} e^{i\theta\tau} + \underbrace{\frac{u_o^*}{\kappa} \ln \left( \frac{-z_u^{o,r}}{\ell_u^o(0)} \right)}_{\text{SCVO}} e^{i\theta\tau} \quad (2.66b)$$

$$\theta(0^+) = \theta(z_a^1) - \underbrace{\frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) \right]}_{\text{CLSA-MO}} - \underbrace{\frac{\theta_a^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{\ell_\theta^a(0)} \right)}_{\text{SCVA}} \quad (2.66c)$$

$$\theta(0^-) = \theta(z_o^1) + \underbrace{\frac{\theta_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_\theta^{o,r}} \right) + \psi_h(\zeta_o) \right]}_{\text{CLSO-MO}} + \underbrace{\frac{\theta_o^*}{\kappa} \ln \left( \frac{-z_\theta^{o,r}}{\ell_\theta^o(0)} \right)}_{\text{SCVO}} \quad (2.66d)$$

$$q(0^+) = q(z_a^1) - \underbrace{\frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_q^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) \right]}_{\text{CLSA-MO}} - \underbrace{\frac{q_a^*}{\kappa} \ln \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{\ell_q^a(0)} \right)}_{\text{SCVA}} \quad (2.66e)$$

$$S(0^-) = S(z_o^1) + \underbrace{\frac{s_o^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_s^{o,r}} \right) + \psi_h(\zeta_o) \right]}_{\text{CLSO-MO}} + \underbrace{\frac{s_o^*}{\kappa} \ln \left( \frac{-z_s^{o,r}}{\ell_s^o(0)} \right)}_{\text{SCVO}} \quad (2.66f)$$

Le système (2.66) nous permet d'énoncer un ensemble de conditions de cohérence entre le couplage océan-atmosphère et la paramétrisation de la couche limite de surface. Ces quatre conditions devront intervenir quand on fermera le système en fixant les 10 degrés de liberté énoncés ci-dessus.

Le couplage océan-atmosphère est cohérent avec les paramétrisations de couches limites de surface si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$$u_h(0^+) = u_h(0^-) \quad (2.67a)$$

$$\theta(0^+) = \theta(0^-) \quad (2.67b)$$

$$q(0^+) = q_{sat}(\theta(0^+)) \quad (2.67c)$$

$$S(0^-) = S_{surf} \quad (2.67d)$$

$q_{sat} : \theta \mapsto q_{sat}(\theta)$  est une fonction empirique permettant de générer une humidité de saturation à partir d'une température. Une forme simple et toujours relativement fréquente est la suivante :

$$q_{sat}(\theta) = q_{sat}^0 \exp \left( -\frac{\theta_{sat}^0}{\theta} \right) \quad (2.68)$$

où  $q_{sat}^0 \approx 5,3 \times 10^5 \text{ kg kg}^{-1}$  et  $\theta_{sat}^0 \approx 5,1 \times 10^3 \text{ K}$ . Ces échelles constantes, obtenues par réglages de paramétrisations, n'ont pas d'interprétation physique : il ne faut donc pas s'étonner de leurs ordres de grandeur. La figure 2.11 illustre des valeurs de  $q_{sat}$  pour des plages réalistes de températures.

(2.67d) est en quelque sorte équivalent à (2.67c); on cherche à connecter la salinité de surface à un schéma de paramétrisation. À notre connaissance, il n'existe pas de formulation aussi simple

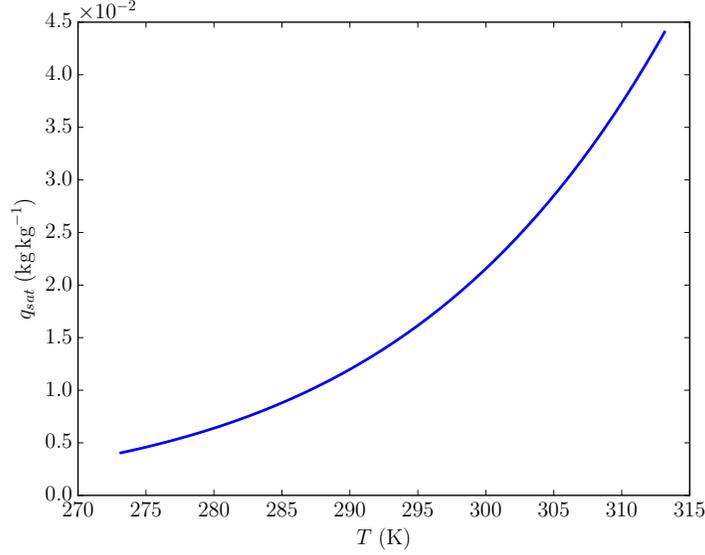


FIGURE 2.11 –  $q_{sat}$  comme fonction de  $\theta$  telle que donné par (2.68).

et explicite que (2.68) pour la salinité de surface, pour laquelle les mesures sont difficiles (Boutin *et al.*, 2004). À titre d'exemple, Delcroix *et al.* (1996) propose un modèle de cette forme, dans un régime stationnaire (i.e.  $\partial_t S_{surf} = 0$ ) :

$$S_{surf} = \frac{-hA}{P - E} \quad (2.69)$$

où  $h \approx -30$  m est une profondeur de couche limite,  $A$  représente l'advection saline,  $P$  et  $E$  sont toujours respectivement les flux moyens de précipitations et d'évaporation.

La figure 2.12 donne une représentation schématique des profils de solution à la traversée de la CLS, en distinguant deux profils, selon que la condition (2.67) soit satisfaite ou non.

### 2.5.3 Proposition de diagnostic des longueurs de rugosité océaniques

Comme vu au § 2.4.3, la détermination des longueurs de rugosité océaniques, dans le cas d'absence de vague, est un problème relativement mal connu. Des arguments de régularité mathématique peuvent aussi motiver un certain choix de paramétrisations de ces longueurs de rugosité océaniques. En effet, la condition de cohérence (2.67) correspond à imposer une régularité  $\mathcal{C}^0$  des profils de  $u_h$  et de  $\theta$  en  $z = 0$ . Une possibilité pour paramétriser les longueurs de rugosité  $(z_x^{o,r})_{x \in \{u, \theta\}}$  est de les définir de façon à ce que  $u_h$  et  $\theta$  soient aussi de régularité  $\mathcal{C}^1$ , c'est à dire que leurs gradients y soient aussi continus.

Cette condition s'exprime simplement en fonction des coordonnées visqueuses  $(\ell_x^\alpha)_{x \in \{u, \theta\}, \alpha \in \{o, a\}}$  :

$$\frac{\ell_u^o(0)}{\ell_u^a(0)} = \frac{u_o^*}{u_a^*} \quad (2.70a)$$

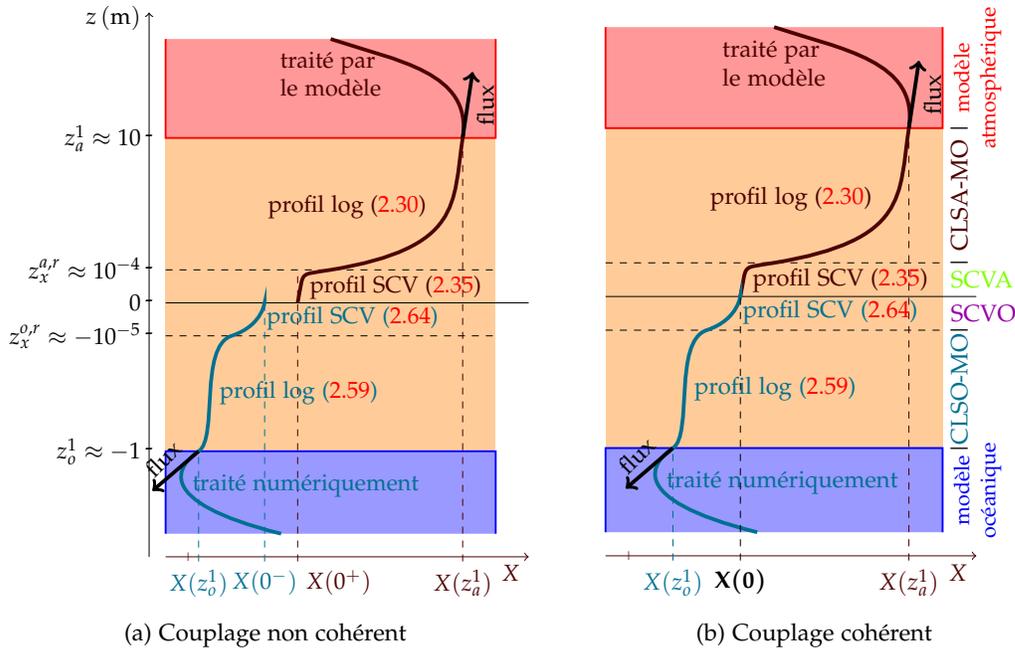


FIGURE 2.12 – Représentations schématiques de la CLS entière et des profils de solution en découlant, pour une grandeur scalaire réelle  $X \in \{\mathcal{R}(u_h), \mathcal{S}(u_h), T\}$ . La courbe *sépia* représente une forme typique du profil de solution dans la CLSA, en incluant la paramétrisation SCVA (2.35), le profil logarithmique (2.30), et une partie traitée numériquement, forcée par un flux turbulent dessiné en *marron clair*. De la même façon, la courbe *bleu marine* représente une forme typique de profil de solution dans la CLSO, en y incluant les paramétrisations SCVO (2.64), un profil logarithmique type (2.59) ainsi qu’une partie traitée numériquement par la modèle océanique, forcée par un flux turbulent dessiné en *ocre*. Sur (a), la paramétrisation des CLS n’est pas cohérente, puisque l’extrapolation de la solution donne deux valeurs « de surface » différentes, de part et d’autres de la surface de l’océan (ie.,  $X(0^-) \neq X(0^+)$ ). En revanche, sur (b), la paramétrisation est bien cohérente, puisque les profils de solution se raccordent bien en  $z = 0$  : on a  $X(0^-) = X(0^+) = X(0)$  ; en d’autres termes, la condition de cohérence (2.67) y est satisfaite.

$$\frac{\ell_\theta^0(0)}{\ell_\theta^a(0)} = \frac{\theta_0^*}{\theta_a^*} \quad (2.70b)$$

(2.70) ne fait pas directement intervenir les longueurs de rugosité; cependant, les échelles de longueurs ( $\ell_x^\alpha$ ) étant directement liées aux longueurs de rugosité, on peut voir (2.70) comme un ensemble de contraintes supplémentaires permettant de fixer  $(z_x^{0,r})_{x \in \{u, \theta\}}$  en fonction de  $(z_x^{a,r})_{x \in \{u, \theta\}}$ .

### Exemple avec la paramétrisation Liu *et al.* (1979) de la SCVA

Si l'on utilise l'exemple de paramétrisations SCV utilisé précédemment (Liu *et al.*, 1979), on obtient :

$$\frac{u_a^*}{\kappa z_u^{a,r}} \exp \left[ \left( \frac{u_a^* z_u^{a,r}}{v_m^a} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{G}} \right] = \frac{u_0^*}{\kappa (-z_u^{0,r})} \exp \left[ \left( \frac{u_0^* (-z_u^{0,r})}{v_m^0} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{G}} \right] \quad (2.71a)$$

$$\frac{\theta_a^*}{\kappa z_\theta^{a,r}} \exp \left[ \frac{(u_a^*)^{3/4} z_\theta^{a,r}}{(z_u^{a,r} v_m^a)^{1/4} \sqrt{\mathcal{K}_{T,m}^a}} \frac{1}{\sqrt{G}} \right] = \frac{\theta_0^*}{-\kappa z_\theta^{0,r}} \exp \left[ \frac{(u_0^*)^{3/4} (-z_\theta^{0,r})}{(-z_u^{0,r} v_m^0)^{1/4} \sqrt{\mathcal{K}_{T,m}^0}} \frac{1}{\sqrt{G}} \right] \quad (2.71b)$$

Pour trouver  $(z_u^{0,r}, z_\theta^{0,r})$ , on résout d'abord (2.71a). La résolution analytique est possible, bien qu'un peu fastidieuse :

$$z_u^{0,r} = -\sqrt{G} \frac{v_m^0}{u_0^*} X^{4/3} \quad (2.72)$$

$$\text{avec } X = -\frac{4}{3} W_{-1} \left( -\frac{3}{4} Y^{-3/4} \right) \quad \text{et} \quad Y = G^{2/3} \frac{v_m^0 u_a^*}{(u_0^*)^2} \exp \left[ \left( \frac{u_a^* z_u^{a,r}}{v_m^a} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{G}} \right]$$

$W_{-1}$  est la branche  $-1$  de la fonction de Lambert, qui est définie comme solution de l'équation  $W_{-1}(z) \exp(W_{-1}(z)) = z$ . Vu la forme de  $X$  dans (2.72), et à l'aide de quelques résultats d'analyse sur cette fonction (Corless *et al.*, 1996), on a l'équivalence suivante :

$$z_u^{0,r} \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow 0 < Y < \left( \frac{3e}{4} \right)^{4/3} \quad (2.73a)$$

$$z_u^{0,r} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow Y > \left( \frac{3e}{4} \right)^{4/3} \quad (2.73b)$$

Ainsi, puisque  $Y > 0$ , (2.72) n'a de sens que si la condition de droite de (2.73a) est vérifiée. Sinon, on obtient une longueur de rugosité complexe non réelle, ce qui est évidemment exclu.

Si l'on suppose que  $z_u^{0,r}$  a été déterminée, on peut alors s'attaquer à  $z_\theta^{0,r}$ . De façon similaire, on obtient :

$$z_\theta^{0,r} = -\sqrt{G} \frac{(-z_u^{0,r} v_m^0)^{1/4} \sqrt{\mathcal{K}_{T,m}^0}}{(u_0^*)^{3/4}} X' \quad (2.74)$$

$$\text{avec } X' = -W_{-1} \left( -\frac{1}{Y'} \right) \quad \text{et} \quad Y' = \sqrt{G} \frac{\theta_a^*}{\theta_0^*} \frac{(-z_u^{0,r} v_m^0)^{1/4} \sqrt{\mathcal{K}_{T,m}^0}}{(u_0^*)^{3/4}} \frac{1}{z_\theta^{a,r}} \exp \left[ \frac{(u_a^*)^{3/4} z_\theta^{a,r}}{(z_u^{a,r} v_m^a)^{1/4} \sqrt{\mathcal{K}_{T,m}^a}} \frac{1}{\sqrt{G}} \right]$$

Avec les mêmes justifications que pour  $z_u^{0,r}$ , on obtient l'équivalence suivante :

$$z_\theta^{0,r} \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow Y' > e \quad (2.75a)$$

$$z_{\theta}^{o,r} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 < Y' < e \quad (2.75b)$$

### Formes simplifiées pour les paramétrisations SCV, inspirées de la loi de mur

Dans le contexte de la loi du mur, des profils linéaires de solution étaient prescrits dans la sous-couche visqueuse, cf. (2.10b). Supposer des profils de solution affines dans la SCVA semble donc tentant. Cela donnerait des profils constants, pour les coordonnées visqueuses :

$$\ell_x^{a,r}(z) = z_x^{a,r} \quad z \in ]0; z_x^{a,r}[ , x \in \{u_h, \theta\} \quad (2.76)$$

ce qui n'est pas acceptable, puisque cette forme de  $\ell_x^a$  se raccorde de façon  $\mathcal{C}^0$ , et non  $\mathcal{C}^1$ , à la fonction identité. En outre, les  $\ell_x^a$  décrits par (2.76) ne sont pas strictement monotones, et ne peuvent donc pas définir de changement de variable.

Une façon simple d'adapter les profils de solution dans la SCV pour obtenir des profils ressemblant à ceux obtenus dans le cadre d'une loi du mur est de définir les  $\ell_x^a$  tels que :

(i)  $\ell_x^a$  soit de régularité  $\mathcal{C}^1$  en  $z_x^{a,r}$

(ii) Les saut de solution au travers de la SCVA,  $[[x]]_0^{z_x^{a,r}}$ , sont les mêmes que si  $\ell_x^{a,r}$  avaient pris la forme (2.76);  $[[x]]_0^{z_x^{a,r}} = \frac{x_a^*}{\kappa}$ .

Cela définit 3 contraintes ; une façon simple de les satisfaire est de définir les ( $\ell_x^a$ ) comme des polynômes de degré 2 de la variable  $z$ . On obtient alors :

$$\ell_x^a(z) = \frac{z^2}{e z_x^{a,r}} + \left(1 - \frac{2}{e}\right) z + \frac{z_x^{a,r}}{e} \quad z \in ]0; z_x^{a,r}[ , x \in \{u, \theta\} \quad (2.77)$$

On peut montrer qu'avec cette forme, on aura sur la SCVA  $\partial_z \ell_x^a \geq 1 - 2/e > 0$ , et donc qu'on a bien défini un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Les profils de solutions sont alors donnés par simple application de (2.30) :

$$|x|(z) = x \left( \frac{z}{z_a^1} \right) - \frac{x_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_x^{a,r}} \right) - \psi_m(\zeta_a) + \ln \left( \frac{z_x^{a,r}}{\frac{z^2}{e z_x^{a,r}} + \left(1 - \frac{2}{e}\right) z + \frac{z_x^{a,r}}{e}} \right) \right] \quad (2.78)$$

On obtient, en particulier :

$$\partial_z |x| (0^+) = \frac{x_a^*}{z_x^{a,r}} \frac{e-2}{\kappa} \quad x \in \{u_h, \theta\} \quad (2.79)$$

On peut mener toute cette étude sur la CLSO et obtenir les mêmes conclusions, aux changements de signes près (les ( $\ell_x^o$ ) se raccordant à  $-\text{Id}$ ) :

$$\partial_z |x| (0^-) = -\frac{x_o^*}{z_x^{o,r}} \frac{e-2}{\kappa} \quad x \in \{u_h, \theta\} \quad (2.80)$$

Ainsi, en utilisant ce formalisme pour la paramétrisation des SCVA, imposer que les solutions soient de régularité  $\mathcal{C}^1$  à l'interface revient à choisir  $z_x^{o,r}$  définis par (2.60)<sup>6</sup>.

Une dernière remarque s'impose : avec ce formalisme, pour les grandeurs « transverses » (i.e.,  $u_h$  et  $\theta$ ), le couple de fonctions ( $\ell_x^o, \ell_x^a$ ) n'a aucune raison de se raccorder de façon régulière en  $z = 0$  ; en revanche, elles sont bien dimensionnées de façon à ce que les *profils de variables physiques traversant l'interface qu'elles définissent*,  $u_h$  et  $\theta$ , soient continûment dérivables en  $z = 0$ .

6. Cela permet de vérifier la continuité des gradients à l'interface. La continuité des valeurs sera garantie par le dimensionnement des échelles de friction, comme on le verra au chapitre suivant.

## 2.6 Conclusion partielle

Maintenant qu'une forme de modélisation CLS a été introduite, cette section a pour objectif de donner quelques limitations, commentaires et aspects sur lesquels des développements pourraient se concentrer.

### 2.6.1 Quelques limitations et commentaires

Les aspects suivants, propres à la modélisation de la CLS, restent à notre avis perfectibles.

- (1) La détermination des longueurs de rugosité océaniques à partir des longueurs de rugosité atmosphériques a été justifiée par la régularité mathématique seule, sans préoccupations liées à la physique. Il faudrait plutôt développer des paramétrisations propres au milieu océanique, même dans le cas où la présence de vagues est négligée. *A priori*, ce type de paramétrisations aurait vocation à se développer *via* des arguments physiques, liés notamment à des résultats issus de simulations numériques directes, pour lesquelles toutes les échelles (y compris turbulentes) pourraient être représentées par la grille de calcul. En particulier, contrairement aux paramétrisations présentées au § 2.5.3, on verra un cas au chapitre 5 où imposer  $\partial_z u_h(0^+) = \lambda_u \partial_z u_h(0^-)$ , où  $\lambda_u \neq 1$ , est plus viable physiquement<sup>7</sup>. Cela concerne davantage le développement de nouvelle physique, et dépasse le cadre des travaux de la présente thèse.
- (2) Au sein des sous-couches visqueuses, pour le vent horizontal  $u_h$ , on considère toujours que le gradient  $\partial_z u_h$  est aligné avec  $\tau$ . Cela est prescrit par la théorie de similitude de Monin-Obukhov, qui justement, n'est pas valable dans les sous-couches visqueuses. Ainsi, supposer  $\partial_z u_h$  aligné avec  $\tau$  au sein des SCV constitue une hypothèse supplémentaire, puisqu'il n'y a aucune raison pour que les processus moléculaires y régnant ne modifient pas la direction de  $\partial_z u_h$ .
- (3) De façon générale, les paramétrisations des SCV qu'on a introduites (sous forme d'exponentielles) sont très rudimentaires et peu utilisées. La physique des sous-couches visqueuses est en général très riche et incorpore de nombreux effets ici ignorés, faisant l'objet d'une littérature florissante. Bien que nous en soyons conscients, incorporer certains de ses effets a pour conséquence de grandement complexifier la structure mathématique de la modélisation des SCV. Ce sont donc des arguments de simplicité et d'élégance mathématique qui ont justifié ce choix ; bien entendu, une des perspectives de développements les plus évidentes serait d'utiliser des paramétrisations SCV plus réalistes, surtout si celles-ci ont un impact significatif sur le calcul des flux.
- (4) L'effet dû à la présence de vagues a complètement été négligé au sein de notre étude, alors qu'il joue évidemment un rôle, notamment sur l'échange de quantité de mouvement entre océan et atmosphère. Encore une fois, ce sont des préoccupations mathématiques qui ont justifié ce choix. Contrairement à la gestion de la turbulence due à une interface, qui est bien décrite par un socle théorique unifié (la théorie

---

7. Adapter les résultats du § 2.5.3 à cette contrainte alternative ne pose pas de difficultés.

de Monin-Obukhov), la prise en compte de vagues au sein de modèles numériques est plus empirique, notamment parce qu'elle fait intervenir des processus physiques très complexes. Tant qu'il n'existera pas de structures mathématiques communes aux modèles de vagues, les prendre en compte au sein de routines de couplage sera peu productif, puisque les conclusions obtenues ne seront valables que pour *le* modèle de vagues considéré ; or, ceux-ci évoluent rapidement. Le socle théorique de Monin-Obukhov est confortable en ce qu'il est partagé par la quasi-totalité des schémas de paramétrisations de calcul de flux turbulents.

- (5) Imposer une cohérence entre les profils CLS et les sous-modèles océan et atmosphère revient à imposer, en  $z = z_a^1$ , des valeurs pour les viscosités et diffusivités turbulentes. Pour l'atmosphère, ces conditions sont données par (2.34), qui ne sont en général pas vérifiées. Nous estimons cet aspect particulièrement problématique : cela signifie que la continuité des gradients des profils n'est pas assurée à l'interface entre paramétrisations CLS et modèles numériques. Imposer cette continuité impliquerait soit de radicalement refonder les méthodes pour paramétriser les viscosités et diffusivités turbulentes aux voisinages immédiats des interfaces CLS-modèles, soit de paramétriser la CLS par des méthodes autres que la théorie de Monin-Obukhov, ce qui nous semble dépasser le cadre de cette thèse.

### 2.6.2 Comment complètement « fermer » les paramétrisations CLS ?

Il est ainsi possible, au prix d'un certain nombre d'hypothèses, de générer une paramétrisation réaliste et cohérente de la CLS entière à l'aide de variables provenant de chacun des modèles numériques, de la direction de la tension de vent, ainsi que de deux jeux d'échelles dont on n'a pas explicité la détermination : les longueurs de rugosité et les échelles de friction.

On verra dans le chapitre suivant que les longueurs de rugosité atmosphériques sont typiquement diagnostiquées à partir des échelles de friction atmosphérique. On a déjà précisé au § 2.4.4 que les longueurs de rugosité océaniques pouvaient être diagnostiquées à partir de leurs contreparties atmosphériques. En outre, on peut aussi exprimer les échelles de friction océaniques à partir des mêmes échelles atmosphériques et de données extérieures, comme (2.54) le stipule.

Par conséquent, la détermination des échelles de friction atmosphériques permet, par cascade, de déduire l'ensemble des paramètres permettant de prolonger les solutions au sein de la couche limite de surface, atmosphérique comme océanique. Cette détermination repose sur la résolution d'un problème non-linéaire, qu'on appelle le plus souvent « problème bulk ». Celui-ci fait l'objet du chapitre 3.



# Chapitre 3

## Formulations bulks

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Qu'est-ce qu'une formulation bulk ?</b>	<b>76</b>
3.1.1	Formulation sous forme d'un problème non linéaire	76
3.1.2	Algorithme de point fixe	77
3.1.3	Équivalence avec des conditions aux limites « classiques »	79
3.1.4	Critère d'arrêt et convergence	81
<b>3.2</b>	<b>Présentations de quelques formulations classiques</b>	<b>81</b>
3.2.1	Formulation CORE	82
3.2.2	Formulation COARE	82
3.2.3	Formulation ECMWF	84
3.2.4	Comparaisons numériques	84
<b>3.3</b>	<b>Une méthode d'approximation explicite</b>	<b>94</b>
<b>3.4</b>	<b>Incorporation de formulations bulk au sein d'algorithmes de couplage</b>	<b>114</b>
3.4.1	Ambiguïtés autour de la notion de surface	114
3.4.2	Prise en compte de la SCV dans les formulations bulk	117
3.4.3	Prise en compte de la couche limite de surface océanique	126
<b>3.5</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>132</b>

---

La transmission d'information entre les modèles océan et atmosphère s'effectue sous la forme d'un échange de flux turbulents et radiatifs. On a vu au chapitre 2 que ceux-ci sont calculés à partir d'échelles de friction. Les formulations bulk sont des paramétrisations sous maille dont le rôle est de déterminer les échelles de friction atmosphériques à partir de valeurs dites de surface et de valeurs prises au bord inférieur<sup>1</sup> du modèle atmosphérique. En un sens, elles constituent le nœud permettant d'effectuer la transmission d'information entre les modèles océan et atmosphère, et de rendre compte des effets turbulents dus à la présence d'une interface.

L'objectif de ce chapitre est, dans un premier temps au § 3.1, de présenter de façon générale les formulations bulk, en en dégageant un formalisme mathématique commun. Dans un second temps, le § 3.2 décrit plus en détail trois versions très utilisées de ces formulations. Ensuite, au § 3.3, on propose une méthode d'approximation visant à montrer qu'il est possible de substituer à ces formulations des méthodes plus directes et maniables mathématiquement. Enfin, le

---

1. Qui, vu les conclusions du § 2.1, n'est pas la surface océanique.

§ 3.4 détaillera comment l'inclusion de l'ensemble de la couche limite de surface modifie les formulations bulk, et permet de les apparenter à des algorithmes de couplage.

### 3.1 Qu'est-ce qu'une formulation bulk ?

On a vu lors du chapitre précédent que les paramétrisations des couches limites de surface pouvaient être entièrement déterminées à partir des échelles de friction et des longueurs de rugosité atmosphériques. Les formulations bulk permettent de fermer les paramétrisations CLS, c'est à dire de déterminer ces dernières inconnues desquelles découle l'ensemble des paramétrisations rendant compte de la présence d'une interface océan-atmosphère.

#### 3.1.1 Formulation sous forme d'un problème non linéaire

Les formulations bulks proposent, dans un premier temps, de paramétriser les longueurs de rugosité atmosphériques par les échelles de friction (Smith, 1988), i.e. :

$$z_x^{a,r} = z_x^{a,r} (u_a^*, \theta_a^*, q_a^*), \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (3.1)$$

Ainsi, (3.1) réduit davantage le nombre de paramètres régissant les profils de solution dans les CLS, ainsi que les flux turbulents prescrits au modèle atmosphère ; seules les échelles de friction atmosphériques,  $\mathbf{x}_a^* := (u_a^*, \theta_a^*, q_a^*) \in \mathbb{R}_+^3$ , restent à déterminer. Les formulations bulk correspondent à un système d'équations non linéaires, le plus souvent résolu par un algorithme itératif de point fixe. Ce système, issu de l'intégration des groupes sans dimension (2.26), est le suivant :

$$C_D := \frac{(u_a^*)^2}{|\llbracket u_h \rrbracket|^2} = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}(\mathbf{x}_a^*)} \right) - \psi_m(\zeta_a(\mathbf{x}_a^*)) \right]^2} \quad (3.2a)$$

$$C_H := \frac{u_a^* \theta_a^*}{|\llbracket u_h \rrbracket| |\llbracket \theta \rrbracket|} = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}(\mathbf{x}_a^*)} \right) - \psi_m(\zeta_a(\mathbf{x}_a^*)) \right] \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_\theta^{a,r}(\mathbf{x}_a^*)} \right) - \psi_h(\zeta_a(\mathbf{x}_a^*)) \right]} \quad (3.2b)$$

$$C_E := \frac{u_a^* q_a^*}{|\llbracket u_h \rrbracket| |\llbracket q \rrbracket|} = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}(\mathbf{x}_a^*)} \right) - \psi_m(\zeta_a(\mathbf{x}_a^*)) \right] \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_q^{a,r}(\mathbf{x}_a^*)} \right) - \psi_h(\zeta_a(\mathbf{x}_a^*)) \right]} \quad (3.2c)$$

Ce système définit un jeu de *coefficients de transfert*  $(C_X)_{X \in \{D,H,E\}}$ , intermédiaires de calculs utilisés pour déterminer  $\mathbf{x}_a^*$ . On a aussi introduit  $(\llbracket u_h \rrbracket, \llbracket \theta \rrbracket, \llbracket q \rrbracket)$ , sauts de quantités d'intérêt entre des niveaux très proches de la surface, qu'on appellera niveaux « bulk » (correspondant à l'indice  $s_b$  dans les formules suivantes), et le bord inférieur du modèle atmosphère :

$$\llbracket u_h \rrbracket = u_h \left( z_a^1 \right) - u_{h,s_b} \quad (3.3a)$$

$$\llbracket \theta \rrbracket = \theta \left( z_a^1 \right) - \theta_{s_b} \quad (3.3b)$$

$$\llbracket q \rrbracket = q \left( z_a^1 \right) - q_{s_b} \quad (3.3c)$$

Les informations contenues dans les membres de droite du système (3.3) sont supposées connues ; elles sont prescrites en entrée des formulations bulks.

**Remarque sur la notion de surface**

On considérera que le niveau de surface bulk  $s_b$  est le niveau de surface de l’océan, c’est à dire le niveau auquel les données de surface sont fournies. Le § 3.4.1 contient une discussion plus élaborée sur la nécessité de distinguer niveau surface bulk et le niveau  $z = 0$  m.

Le système (3.2) correspond à des formulations bulk usuelles telles qu’elles sont utilisées de façon très répandue dans les modèles numériques. Ce type de formulations ne prend en compte qu’une des 4 sous-divisions de la CLS (la CLSA-MO), telles que définies par le § 2.1.5. En d’autres termes, les formulations découlant de (3.2) ne voient ni les sous-couches visqueuses, ni la partie océanique de la couche limite de surface.

Il y a une ambiguïté dans l’écriture de (3.2), résidant dans les termes de sauts de solution, dont les cotes de référence ne sont pas données. Cette ambiguïté doit pour l’instant être conservée ; nous verrons plus tard que c’est précisément en s’intéressant à des formulations bulk couvrant l’ensemble de la CLS (ce qui est une nouveauté par rapport à l’état de l’art) qu’elle sera levée.

**3.1.2 Algorithme de point fixe**

Les formulations bulk modernes reposent sur un algorithme itératif de type « point fixe » afin de déterminer les coefficients de transfert. L’algorithme 3.1 décrit le fonctionnement global d’un algorithme bulk basique ; la figure 3.1 en donne une vision schématique. Ces descriptions donnent une idée de la structure globale itérative des algorithmes bulk en général ; comme on le verra au § 3.2, les versions utilisées aujourd’hui sont certes plus sophistiquées, mais elles s’inscrivent toujours dans un cadre similaire à celui présenté ci-dessous.

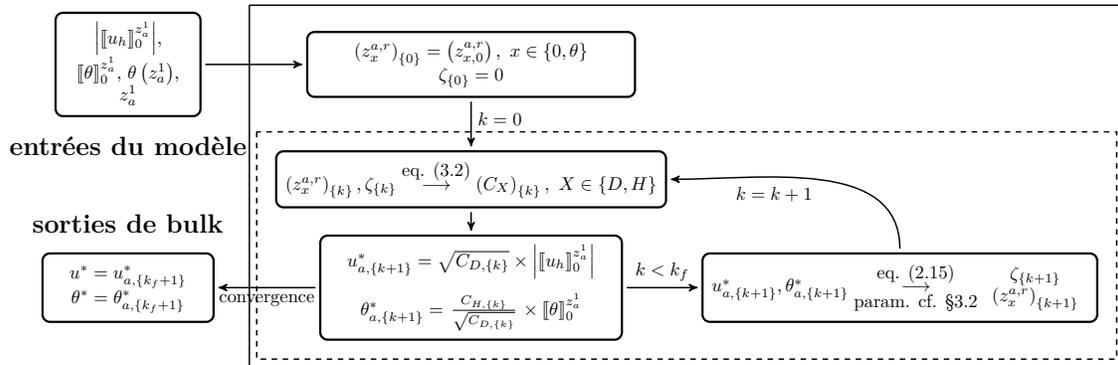


FIGURE 3.1 – Représentation schématique d’un algorithme bulk itératif de base. L’indice  $\{k\}$  dénote les itérations de point fixe. L’algorithme complet peut être vu comme une boîte noire, ci-dessus dessinée en traits continus. La boîte dessinée en trait pointillés correspond à la boucle itérative incluse dans algorithme 3.1 (cf. étapes (1) à (4)). Par souci de lisibilité, on a supposé qu’on était en atmosphère parfaitement sèche, et donc omis les quantités  $q$ ,  $q_a^*$ , et le coefficient  $C_E$ .

**Caractère bien posé**

À notre connaissance, il n’existe aucune étude exhaustive s’intéressant au caractère bien posé de l’algorithme de point fixe pour les problèmes bulk. Toutes les formulations bulk reposent sur le même fonctionnement sous forme d’un algorithme de point fixe. C’est entre autres par

(0) **Initialisation** : on fixe les longueurs de rugosité  $(z_{x,\{0\}}^{a,r})_{x \in \{u,\theta,q\}}$  à des valeurs arbitraires. On fixe  $\zeta_{a,\{0\}} = 0$ , ce qui correspond à une stratification neutre, c'est à dire à un profil de température potentielle virtuelle constante sur la CLS. On pose  $k = 0$ .

(1) **Itération**  $\{k\}$  : on calcule les coefficients de transfert ainsi :

$$\sqrt{C_{D,\{k\}}} = \frac{\kappa}{\left[ \ln \left( \frac{z_{\theta}^1}{z_{\theta,\{k\}}^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \zeta_{a,\{k\}} \right) \right]} \quad (3.4a)$$

$$C_{H,\{k\}} = \frac{\kappa \sqrt{C_{D,\{k\}}}}{\left[ \ln \left( \frac{z_{\theta}^1}{z_{\theta,\{k\}}^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \zeta_{a,\{k\}} \right) \right]} \quad (3.4b)$$

$$C_{E,\{k\}} = \frac{\kappa \sqrt{C_{D,\{k\}}}}{\left[ \ln \left( \frac{z_{\theta}^1}{z_{q,\{k\}}^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \zeta_{a,\{k\}} \right) \right]} \quad (3.4c)$$

(2) On réévalue les échelles de friction :

$$u_{a,\{k+1\}}^* = \sqrt{C_{D,\{k\}}} \|u_h\| \quad (3.5a)$$

$$\theta_{a,\{k+1\}}^* = \frac{C_{H,\{k\}}}{\sqrt{C_{D,\{k\}}}} \|\theta\| \quad (3.5b)$$

$$q_{a,\{k+1\}}^* = \frac{C_{E,\{k\}}}{\sqrt{C_{D,\{k\}}}} \|q\| \quad (3.5c)$$

(3) On met à jour les longueurs de rugosité et le paramètre de stabilité :

$$z_{x,\{k+1\}}^{a,r} = z_x^{a,r} \left( \mathbf{x}_{\{k+1\}}^a \right), \quad x \in \{u,\theta,q\} \quad (3.6a)$$

$$\zeta_{a,\{k+1\}} = \zeta_a \left( \mathbf{x}_{\{k+1\}}^a \right), \quad \text{cf. (2.24)} \quad (3.6b)$$

(4) Si le critère de convergence<sup>a</sup> est atteint, on pose  $\mathbf{x}_a^* = \mathbf{x}_{a,\{k+1\}}^*$ . Sinon, on pose  $k = k + 1$  et on revient au point (1) de cet algorithme.

<sup>a</sup>. Les bulk classiques utilisent typiquement un simple nombre d'itérations fixé à l'avance comme critère de convergence. Nous verrons plus tard au § 3.1.4 un critère d'arrêt plus significatif.

ALGORITHME 3.1 – Algorithme bulk de base. L'indice  $\{k\}$  dénote les itérations de point fixe.

leurs méthodes d'initialisations que les algorithmes bulks diffèrent les uns des autres. De façon générale, la convergence d'un algorithme de point fixe est liée (entre autres) à son initialisation; ainsi, obtenir des résultats universels sur le caractère bien posé des algorithmes bulk est ardu. Pagowski (2006) s'intéresse à la convergence d'algorithmes bulk reposant sur des méthodes itératives de type Newton-Raphson, montrant que celle-ci est garantie *seulement si un intervalle de solution convergée acceptable est préalablement spécifié*. Mahrt *et al.* (1996) (ou encore, dans un autre contexte, Dhungel *et al.*, 2016) soulignent que le choix d'algorithme itératif a des conséquences directes sur l'estimation des flux turbulents.

Bien que dans notre contexte, les flux de surface soient quasi-systématiquement évalués à l'aide d'algorithmes itératifs, il nous semble pertinent de mentionner qu'il existe aussi des travaux visant à s'en affranchir, en évaluant les échelles de friction par des formulations directes. Deux exemples précurseurs sont Kondo (1975) et Louis (1979), dont les travaux sont aujourd'hui encore exploités, soit directement (par exemple, dans le modèle LMDZ5, cf. Hourdin *et al.*, 2015), ou encore comme méthode d'initialisation pour des algorithmes itératifs (Fairall *et al.*, 2002). Byun (1990) propose une méthode directe et exacte pour évaluer les échelles de friction dans le cas où les 3 longueurs de rugosité ( $z_u^{a,r}$ ,  $z_\theta^{a,r}$ ,  $z_q^{a,r}$ ) sont égales, ce qui revient à supposer la même chose sur les coefficients de transfert. Des travaux complémentaires sont venus étendre le domaine d'application de cette méthode pour des cas où  $z_\theta^{a,r}/z_u^{a,r} \neq 1$  (Launiainen, 1995; Guillo-teau, 1998), sans jamais être exhaustifs.

Le fait que la plupart des travaux s'intéressant de façon théorique aux propriétés de convergence des algorithmes bulk finissent par en proposer des formulations non itératives, tend à souligner que s'assurer de la convergence des algorithmes itératifs bulk est un problème difficile.

### 3.1.3 Équivalence avec des conditions aux limites « classiques »

Cette sous-section a pour objectif de comparer les conditions aux limites de type bulk avec les conditions dites « classiques », comme les conditions de Dirichlet ou Neumann. Prenons l'exemple de la condition imposée sur la vitesse horizontale :

$$v_a^t \partial_z u_h \left( z_a^1 \right) = (u_a^*)^2 \quad (3.7)$$

où  $v_a^t$  est une viscosité turbulente. L'écriture (3.7) est quelque peu trompeuse, puisqu'elle pourrait faire croire que la condition imposée à  $u_h$  est une simple condition de Neumann. Cela n'est vrai que si l'échelle  $u_a^*$  est indépendante de la solution  $u_h$ , c'est à dire si les flux turbulents sont forcés comme données extérieures au modèle atmosphère. L'objectif premier des formulations bulk étant justement de déterminer une méthode permettant d'évaluer les flux turbulents à la surface de l'océan en prenant en compte l'état de l'atmosphère (et, dans un cas couplé, celui de l'océan), caractériser (3.7) comme des conditions de type Neumann est une erreur.

Si dans (3.7), on réinjecte  $v_a^t = \kappa u_a^* z$ , forme de paramétrisation de  $v_a^t$  faisant unanimité au niveau des CLS, on obtient la condition suivante :

$$\partial_z u_h \left( z_a^1 \right) = \frac{u_a^*}{\kappa z_a^1} \quad (3.8)$$

La condition (3.8) est non linéaire, puisqu'elle repose sur  $u_a^*$ , qui est obtenu *via* les formulations bulk. Si l'algorithme bulk a atteint convergence, alors  $u_a^*$  est défini de façon à satisfaire :

$$\partial_z u_h = \frac{u_a^*}{\kappa z} \phi_m \left( \frac{z}{L_O^a} \right), z \in \left] z_u^{a,r}; z_a^1 \right[ \quad (3.9a)$$

$$u_h(z_a^1) = u_{h,z_a^1} \quad (3.9b)$$

$$u_h(z_u^{a,r}) = u_{h,S_b} \quad (3.9c)$$

Dans (3.9), les échelles de friction sont « triplement présentes » : dans le membre de droite de (3.9a), à la fois directement et dans la longueur d'Obukhov  $L_O^a$  ; dans le membre de gauche de (3.9c), dans  $z_u^{a,r}$ , qui est diagnostiqué à partir de  $u_a^*$ .

(3.9) met en exergue le résultat suivant : si l'on devait comparer les conditions de type « bulks » à une condition classique, on pourrait dire que *les formulations bulk sont toujours équivalentes à une condition de Dirichlet en  $z_u^{a,r}$  (juste au-dessus de la surface), modulo le fait que sur la CLSA-MO, les profils soient donnés par la théorie de Monin-Obukhov.* Cette comparaison est cohérente avec la théorie des couches limites de type loi de paroi, où la condition Dirichlet est  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  au niveau de l'interface,  $\mathbf{u}$  étant la vitesse, et  $\mathbf{n}$  la normale.

### Adaptation des formulations bulk à une donnée de surface sous forme de gradient

On pourrait aussi imaginer des jeux de formulations bulk alternatives, qui ne reposeraient plus sur la transmission de *valeurs de surface*, mais de *gradients de surface*  $(g_{s,x})_{x \in \{u, \theta, q\}}$ . Le problème bulk change de nature ; il ne s'agit plus de trouver le jeu d'échelles  $(\mathbf{x}_a^*)$  tel que les profils MO raccordent les valeurs de surface-bulk. Il s'agit désormais de faire en sorte que :

- (i) pour  $x \in \{u, \theta, q\}$ , sur  $]z_x^{a,r}; z_a^1[$ , la variable  $x$  soit régie par la théorie de la similitude, cf. (2.26).
- (ii) les solutions vérifient :

$$\partial_z x(z_x^{a,r}) = g_{s,x}, \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (3.10)$$

La structure de l'algorithme bulk est donc changée. On cherche désormais un jeu d'échelles de friction qui vérifie :

$$\frac{x_a^*}{\kappa z_u^{a,r}} \phi_x \left( \frac{z_x^{a,r}}{L_O^a} \right) = g_{s,x}, \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (3.11)$$

Une façon d'adapter les algorithmes de point fixe à ce type de formulation bulk alternative serait d'adapter la mise à jour des échelles de friction de cette façon :

$$\frac{1}{L_{O,\{k\}}^a} = g \frac{\kappa}{(u_{a,\{k\}}^*)^2} \left[ \frac{\theta_{a,\{k\}}^*}{\theta_v} + \frac{q_{a,\{k\}}^*}{q + q_0} \right] \quad (3.12a)$$

$$z_{x,\{k\}}^{a,r} = z_x^{a,r} (\mathbf{x}_{a,\{k\}}^*) \quad (3.12b)$$

$$u_{a,\{k+1\}}^* = \frac{\kappa z_{m,\{k\}}^{a,r}}{\phi_m(z_u^{a,r} / \text{middle} / L_{O,\{k\}}^a)} g_{s,m} \quad (3.12c)$$

$$\theta_{a,\{k+1\}}^* = \frac{\kappa z_{\theta,\{k\}}^{a,r}}{\phi_\theta(z_\theta^{a,r} / \text{middle} / L_{O,\{k\}}^a)} g_{s,\theta} \quad (3.12d)$$

$$q_{a,\{k+1\}}^* = \frac{\kappa z_{q,\{k\}}^{a,r}}{\phi_h \left( z_q^{a,r} / \text{middle} / L_{O,\{k\}}^a \right)} \mathcal{G}_{s,q} \quad (3.12e)$$

$$k \leftrightarrow k + 1 \quad (3.12f)$$

où le membre de droite de (3.12b) symbolise la fonction diagnostiquant les longueurs de rugosité à partir des échelles de friction.

### 3.1.4 Critère d'arrêt et convergence

On peut imposer un critère d'arrêt plus significatif qu'un simple nombre d'itérations fixé à l'avance. À titre d'exemple, on peut utiliser celui-ci :

$$k + 1 = n_{it}^{max} \quad \text{ou} \quad \max_{x \in \{u, \theta, q\}} \frac{|x_{a,\{k+1\}}^* - x_{a,\{k\}}^*|}{|x_{a,\{k\}}^*|} < r_{tol} \quad (3.13)$$

qui permet, en fonction de  $r_{tol}$ , d'examiner la vitesse de convergence de l'algorithme.

## 3.2 Présentations de quelques formulations classiques

La section précédente a introduit le formalisme général permettant de décrire les formulations bulk classiques. Il existe cependant des degrés de liberté par lesquels les formulations bulks classiques se distinguent entre elles. Par exemple :

- (i) la dépendance des longueurs de rugosité ( $z_x^{a,r}$ ) aux échelles de friction atmosphérique ( $x_a^*$ );
- (ii) la forme des fonctions de stabilités ( $\phi_x$ ) (et, conséquemment, de leur forme intégrale ( $\psi_x$ ));
- (iii) la prise en compte (ou non) de certains effets physiques auxiliaires, dont on verra des exemples dans cette section.

Cette section a pour objectif de présenter les trois formulations bulks « classiques » suivantes :

- ▶ la formulation *Common Ocean Reference Experiments* (CORE, cf. [Large, 2006](#))
- ▶ la formulation *Coupled Ocean–Atmosphere Response Experiment* (COARE) ([Fairall et al., 1996b, 2002](#)), développée spécifiquement pour un cas test concernant cette région ([Webster et Lukas, 1992](#));
- ▶ la formulation *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF, cf. [ECMWF, 2016](#)).

Les § 3.2.1, § 3.2.2 et § 3.2.3 présentent ces trois formulations dans leurs grandes lignes. Un exposé plus minutieux du fonctionnement interne de chacune de ces formulations est disponible en annexe A. Le § 3.2.4 offre un comparatif numérique de ces différentes formulations. Nous verrons que ces routines, extrêmement sophistiquées, sont entachées d'incertitudes numériques.

### 3.2.1 Formulation CORE

La formulation CORE (Large, 2006) a été développée pour répondre à l'expérience d'assimilation de données GODAE (Bell *et al.*, 2009), et au rapport subséquent WGASF (2000), qui pose un certain nombre de contraintes sur les flux turbulents utilisés pour forcer l'océan. Cette formulation a vocation à être globale (c'est à dire, couvrir l'ensemble des surfaces océaniques du globe terrestre), et permettre d'obtenir des flux turbulents réalistes à partir de données *in situ*, en temps réel.

Cette formulation propose un schéma de paramétrisation pour exprimer les longueurs de rugosité en fonction de « coefficients de transfert neutres ». L'annexe A.1 donne davantage de détails sur le fonctionnement de l'algorithme CORE.

Nous verrons plus tard que l'une des principales caractéristiques de la formulation CORE est que la fonction donnant le coefficient  $C_H$  est mathématiquement irrégulière (elle est discontinue) par rapport à l'une de ses variables physiques d'entrée.

### 3.2.2 Formulation COARE

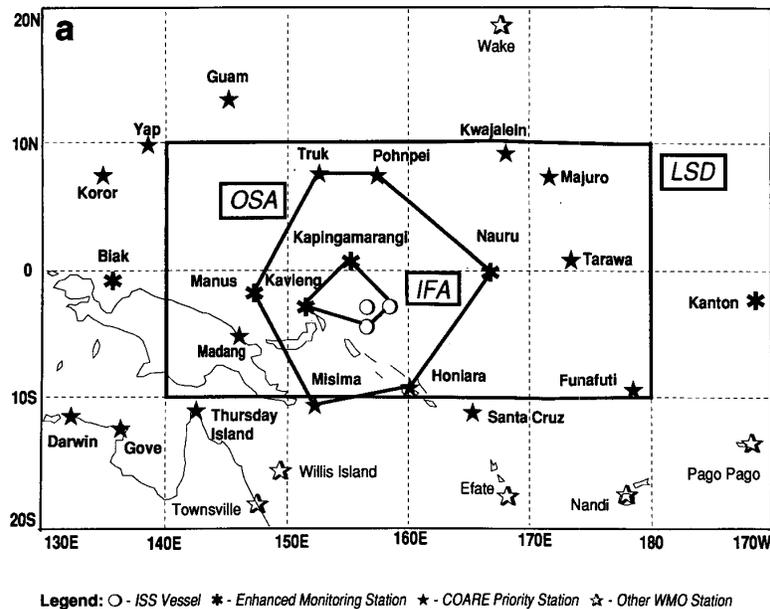


FIGURE 3.2 – Carte représentant les points de mesure de la de la campagne TOGA, au nord-est de la Papouasie-Nouvelle-Guinée. Les différentes régions encadrées correspondent à *Large-scale domain*, *Outer sounding array* et *Intensive flux array* (cette dernière région correspondant à la période intensive, objet de la campagne COARE). Extrait de Webster et Lukas (1992).

La formulation COARE a été développée dans les années 1990 (Fairall *et al.*, 1996b), puis mise à jour plus récemment (Fairall *et al.*, 2002), afin de mieux rendre compte des flux turbulents dans les situations de vent faible. Elle a notamment été motivée par la modélisation d'une région spécifique, sujette à la campagne de mesure TOGA (voir Webster et Lukas, 1992, et la figure 3.2). Vis à vis de la formulation CORE, la formulation COARE présente quelques nouveautés de taille, en ordre décroissant d'importance (de façon subjective) :

- (1) Elle incorpore des effets de *rafales*, permettant de « gonfler » le vent dans des situations de vent faible. Cet ajout permet une meilleure prise en compte du régime de « convection libre », qui correspond à une situation où ce sont des effets thermodynamiques qui régissent l'évolution de la quantité de mouvement.
- (2) Un soin particulier est apporté à l'initialisation de l'algorithme itératif utilisé, afin de réduire le nombre d'itérations nécessaire à la convergence.
- (3) De nouvelles fonctions de stabilité  $(\psi_m, \psi_h)$  sont préférées à celles décrites par (2.27).

### Prise en compte de l'effet de rafale

La formulation COARE introduit l'effet de rafale *via* la grandeur  $u_g$ , appelée vitesse de rafale.  $u_g$  représente des vents convectifs dont les échelles spatiales horizontales sont trop petites pour être perçues par la grille de calcul. Cette échelle de rafale est paramétrisée par les échelles de friction. L'équation de fermeture de la formulation bulk diffère légèrement du système classique (3.2); pour l'écrire, on utilisera l'échelle de vent *gonflée* définie ainsi :

$$\mathcal{U} = \sqrt{\left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right|^2 + u_g^2} \quad (3.14)$$

La fermeture du système bulk pour la formulation COARE s'écrit alors :

$$(u_a^*)^2 = C_D \mathcal{U}^2 \quad (3.15a)$$

$$u_a^* \theta_a^* = C_H \mathcal{U} \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (3.15b)$$

$$u_a^* q_a^* = C_E \mathcal{U} \llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (3.15c)$$

qui diffère de la fermeture classique, où  $\mathcal{U}$  serait substituée par  $\left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a} \right|$ . On retrouve la fermeture classique dans le cas où  $u_g = 0$ . L'échelle  $u_g$  est paramétrisée par le schéma suivant (Godfrey et Beljaars, 1991) :

$$u_g = \begin{cases} \beta (B_f z_i)^{1/3} & \text{si } B_f > 0 \\ 0.2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

où :

$$B_f = -\frac{g}{\theta(z_a^1)} u_a^* \left[ \theta_a^* + \theta(z_a^1) \frac{q_a^*}{q_0} \right] \quad (3.17)$$

avec :

- ▶  $z_i$  la hauteur de la couche limite convective, qui est soit considérée constante (typiquement,  $z_i = 600\text{m}$ ), soit directement fournie par le modèle atmosphère;
- ▶  $\beta = 1.2$  une constante.

L'annexe A.2 donne plus de détails sur le fonctionnement de la formulation COARE.

### 3.2.3 Formulation ECMWF

Le centre européen de prévisions météorologiques à moyen terme ECMWF a développé son propre schéma de formulations bulk (ECMWF, 2016). Bien qu'il s'inspire de la formulation COARE, il s'en différencie sur certains points :

- (1) L'équation de fermeture (3.2) prend une forme légèrement différente. En effet, la formulation ECMWF repose sur une intégration des profils de solution sur l'intervalle  $]z_x^{a,r}; z_x^{a,r} + z_a^1[$ .
- (2) Le paramètre de stabilité  $\zeta_a$  est évalué différemment, via un diagnostic de la longueur d'Obukhov, faisant intervenir le *nombre de Richardson bulk*.
- (3) Les longueurs de rugosité  $z_\theta^{a,r}$  et  $z_q^{a,r}$  sont différentes, ce qui permet  $C_H \neq C_E$ .
- (4) Les fonctions de stabilité  $(\phi_m, \phi_h)$  prennent de nouvelles formes.

Les spécificités techniques de la formulation ECMWF vis à vis des autres formulations sont données en annexe A.3.

### 3.2.4 Comparaisons numériques

Cette partie a pour objectif d'effectuer un certain nombre de comparaisons numériques entre les trois formulations bulks introduites jusqu'à présent, afin d'appréhender concrètement les différences auxquelles le choix de l'une par rapport aux autres peut mener.

Pour ce faire, on a réalisé un grand nombre d'expériences numériques sur des formulations bulk, en les utilisant telles qu'elles sont codées dans le package `aerobulk` (Brodeau *et al.*, 2017), dont l'objectif est précisément la comparaison de formulations bulk.

Les choix suivants ont été faits, et ce pour l'ensemble des résultats numériques présentés ci-dessous :

$$z_a^1 = 10 \text{ m} \quad (3.18a)$$

$$\theta(z_a^1) = 300 \text{ K} \quad (3.18b)$$

$$q(z_a^1) = 0 \text{ kg kg}^{-1} \quad (3.18c)$$

$$P(z_a^1) = 1.008 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (3.18d)$$

$$r_{tol} = 10^{-4} \quad (3.18e)$$

#### Valeurs des coefficients de transfert

La figure 3.3 compare les coefficients neutres tels qu'obtenus *via* les trois formulations. On y remarque en premier plan que la formulation CORE, à l'état neutre, se distingue nettement des deux autres formulations dans des situations de vent faible ; cela est dû à l'absence de paramétrisation d'effets de rafale dans cette formulation.

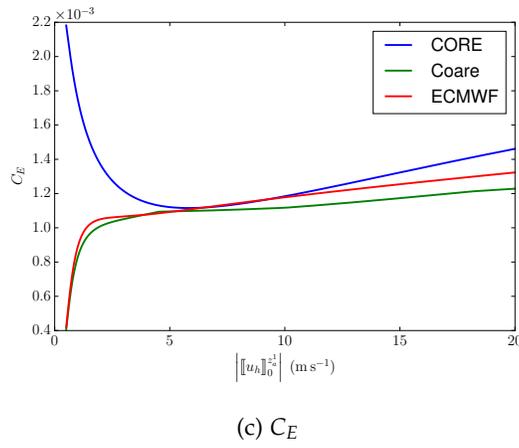
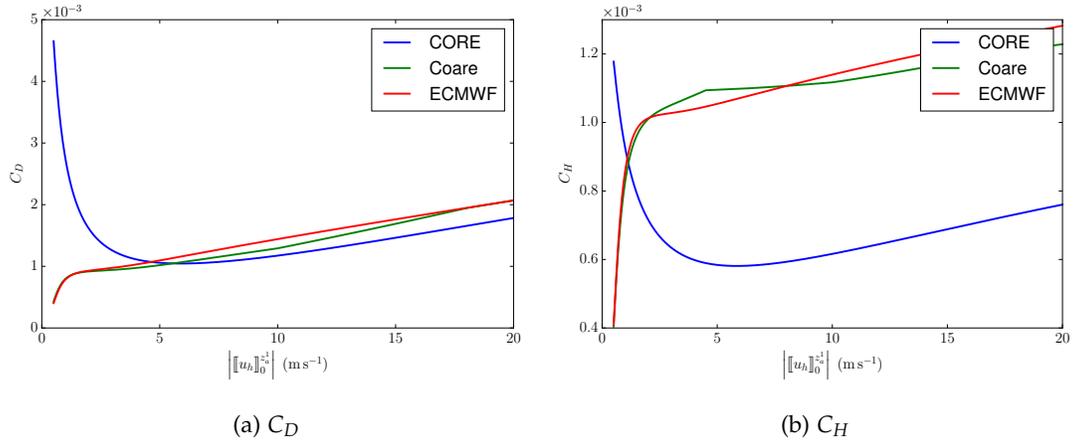


FIGURE 3.3 –  $(C_X)_{X \in \{D,H,E\}}$  en condition neutre, pour les trois formulations de référence.

Les figures 3.4 à 3.6 représentent ces coefficients sous différents régimes de stabilité ; on constate encore une fois que les formulations COARE et ECMWF sont semblables, vis à vis de la formulation CORE.

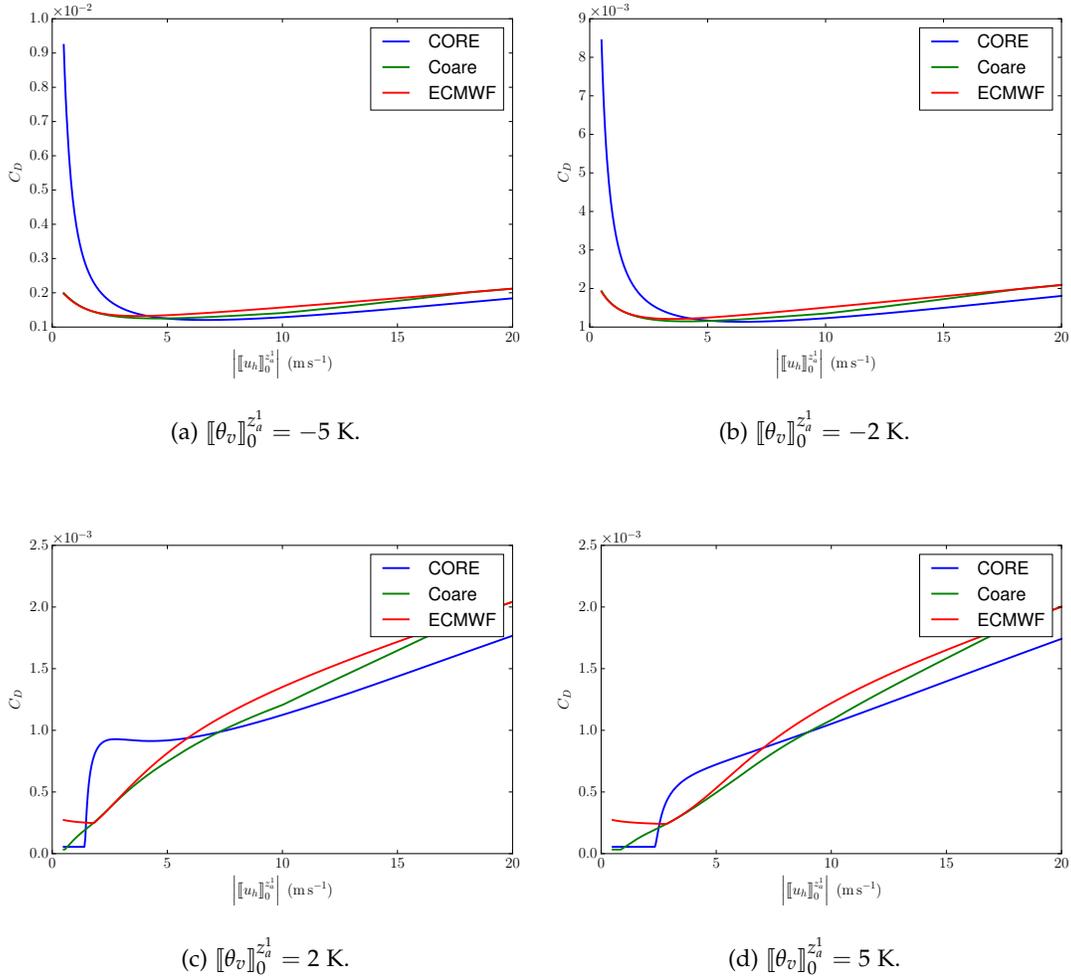


FIGURE 3.4 –  $C_D$  pour différents régimes de stabilité.

La figure 3.7 met en exergue l'irrégularité mathématique de la formulation CORE pour le coefficient  $C_H$ .

Les figures 3.8 à 3.10 représentent les coefficients de transfert pour les trois formulations sur un plan  $(\| \theta \|_0^{z_a^1}, \| u_h \|_0^{z_a^1})$ . On y constate encore une fois l'irrégularité du coefficient  $C_H$  tel que calculé par la formulation CORE, sur la figure 3.9a.

La figure 3.11 confirme que les formulations COARE et ECMWF sont relativement similaires, alors que la formulation CORE s'en distingue nettement. Cela s'explique par le fait que la formulation CORE a été développée pour des modèles globaux à basse résolution dont les grilles sont suffisamment grossières pour que les situations de vents faibles à l'échelle d'une maille soient

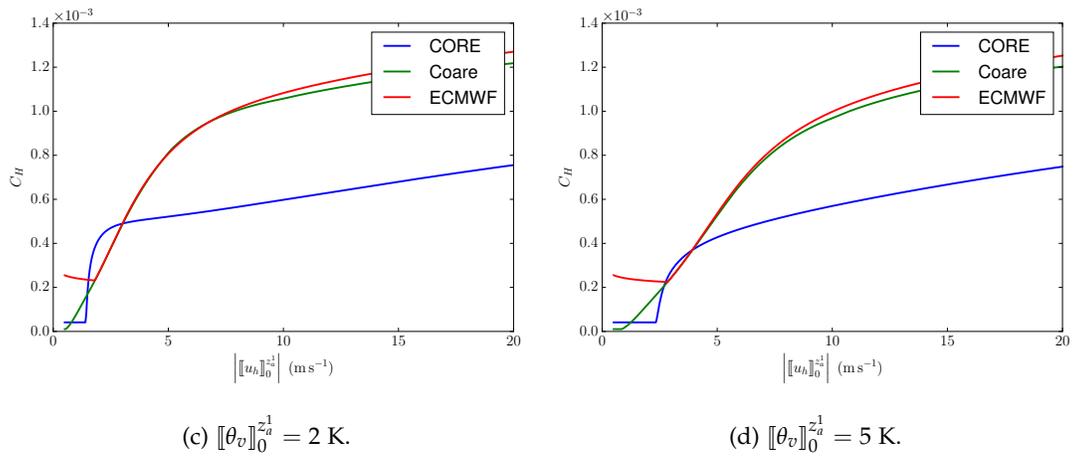
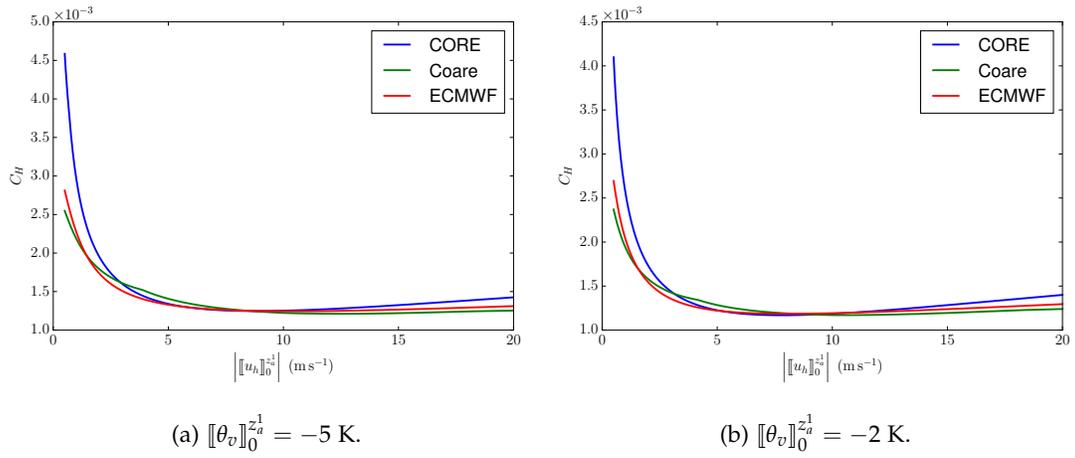
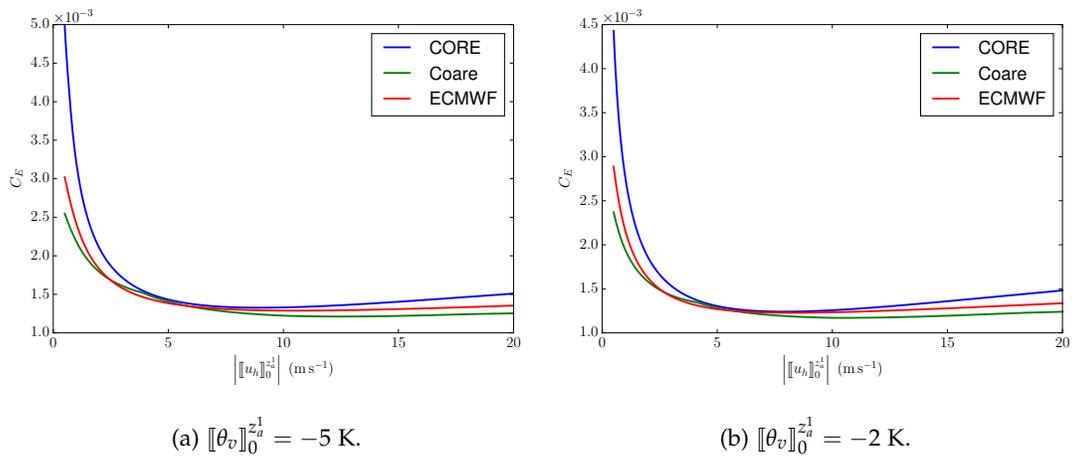


FIGURE 3.5 –  $C_H$  pour différents régimes de stabilité.



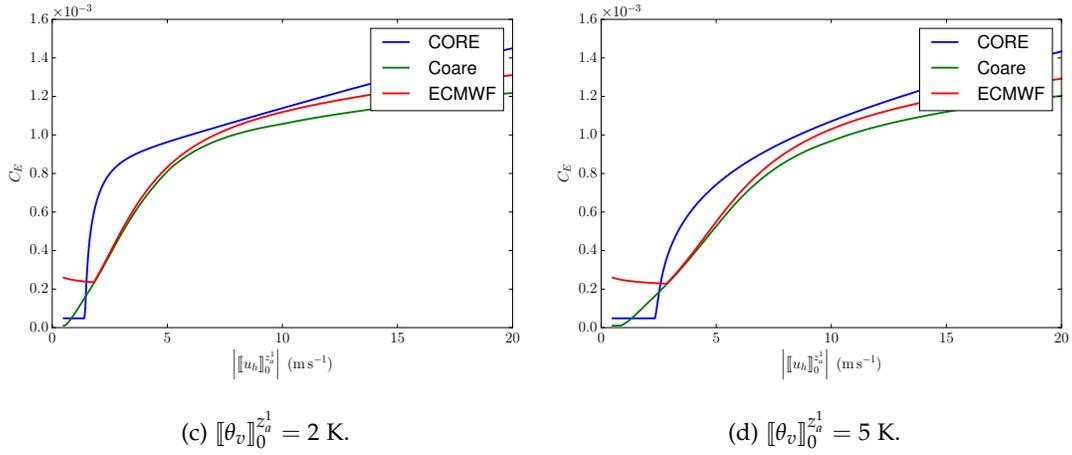


FIGURE 3.6 –  $C_E$  pour différents régimes de stabilité.

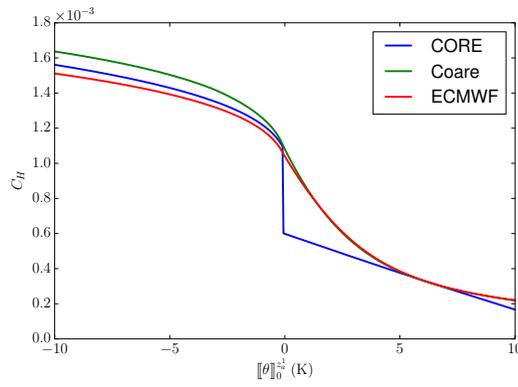
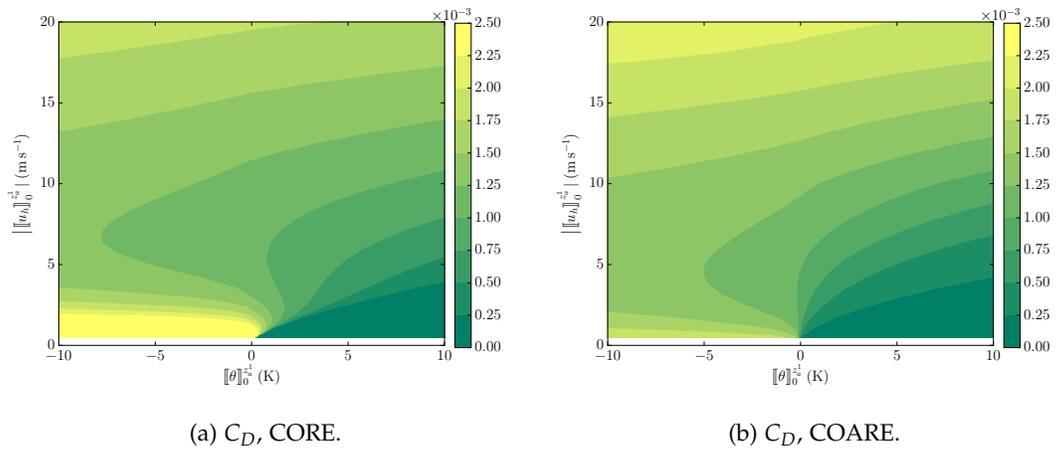
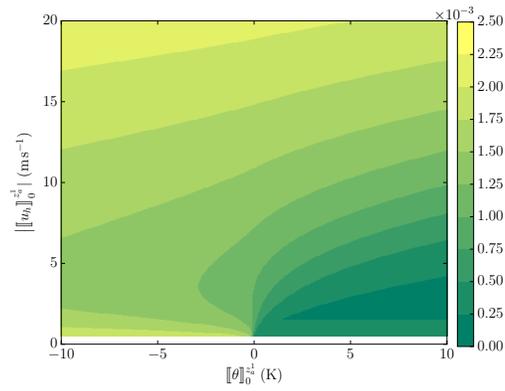


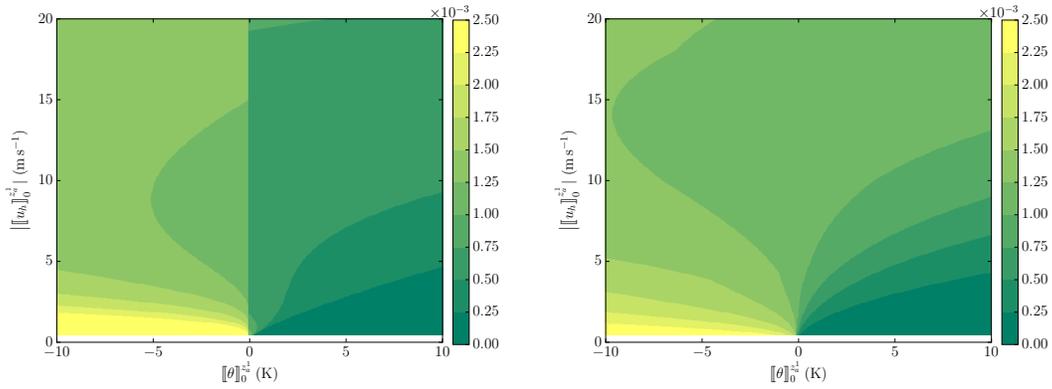
FIGURE 3.7 – Illustration du caractère irrégulier du coefficient  $C_H$  par rapport à la variable d'entrée  $[\theta]_0^{z_a^1}$ , pour la formulation CORE.





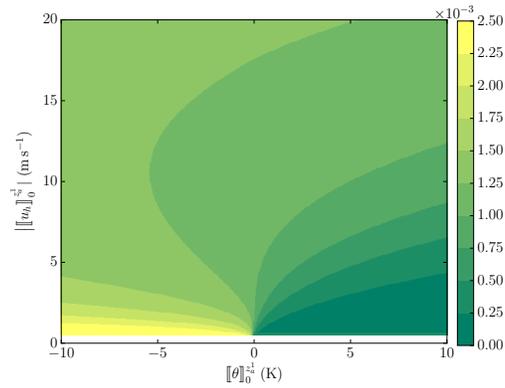
(c)  $C_D$ , ECMWF.

FIGURE 3.8 – Cartes de couleur pour le coefficient  $C_D$  et les trois formulations de référence.



(a)  $C_H$ , CORE.

(b)  $C_H$ , COARE.



(c)  $C_H$ , ECMWF.

FIGURE 3.9 – Cartes de couleur pour le coefficient  $C_H$  et les trois formulations de référence.

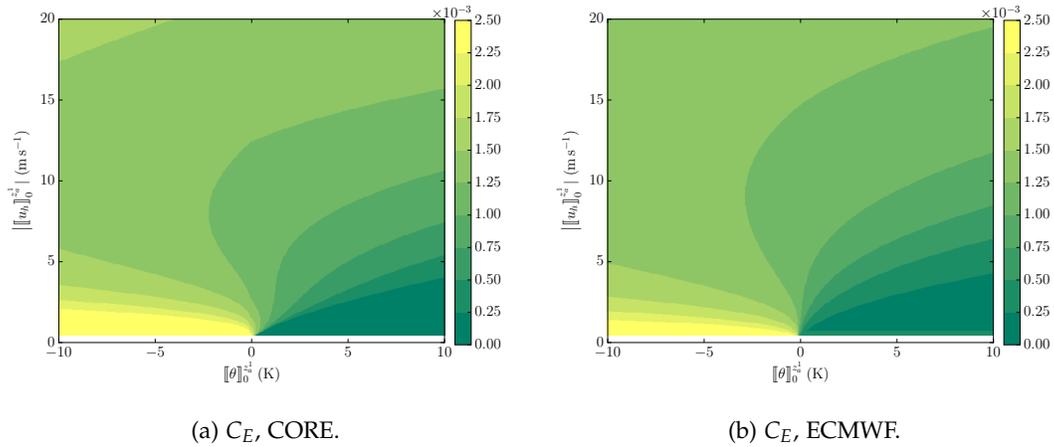
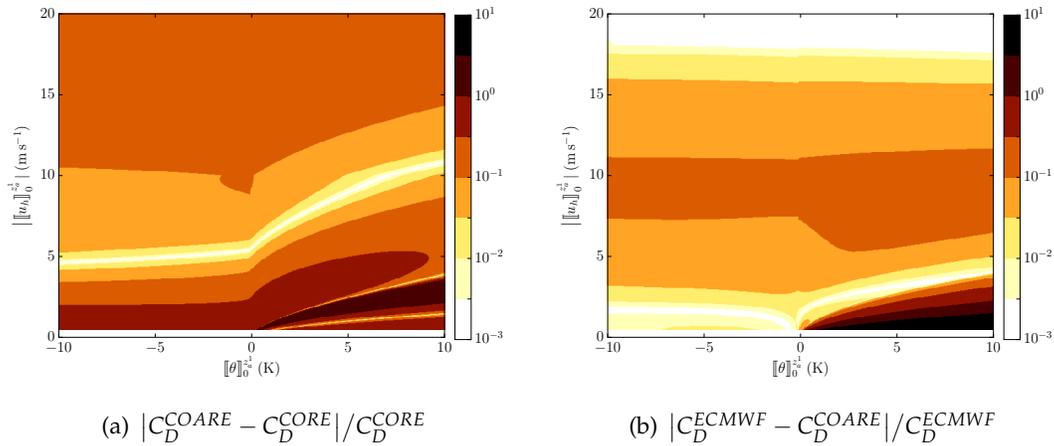


FIGURE 3.10 – Cartes de couleur pour le coefficient  $C_E$  et les trois formulations de référence. On rappelle que pour la formulation COARE,  $C_E = C_H$ .

rare. Comme expliqué au § 3.2.2, la formulation COARE a été calibrée pour le cas test TOGA, se caractérisant par des vents très faibles. Enfin, la formulation ECMWF, inspirée de COARE, a été développée pour être implémentée au sein de simulations numériques à haute résolution, où les situations de vents faibles peuvent être perçues par les grilles de calcul. Les trois formulations répondent ainsi à différents objectifs. Il n'est donc pas nécessairement pertinent de chercher à les hiérarchiser entre elles, en se fondant sur des arguments numériques, et donc quantitatifs.



### Vitesses de convergence

La figure 3.12 présente quelques résultats numériques sur les vitesses de convergence des algorithmes présentés ci-dessus. Elle invite à tirer les conclusions suivantes :

- (i) La vitesse de convergence de l'algorithme CORE est globalement bien plus mauvaise que pour les algorithmes COARE et ECMWF. En contrepartie, il faut souligner que si la première itération de ces 2 formulations permet effectivement de grandement diminuer le nombre d'itérations, elle est en elle-même numériquement coûteuse. Des profilages

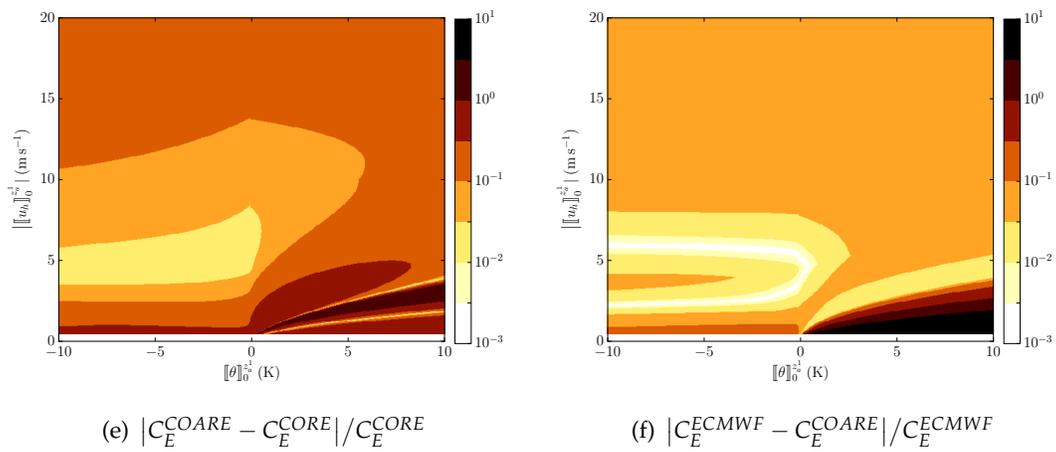
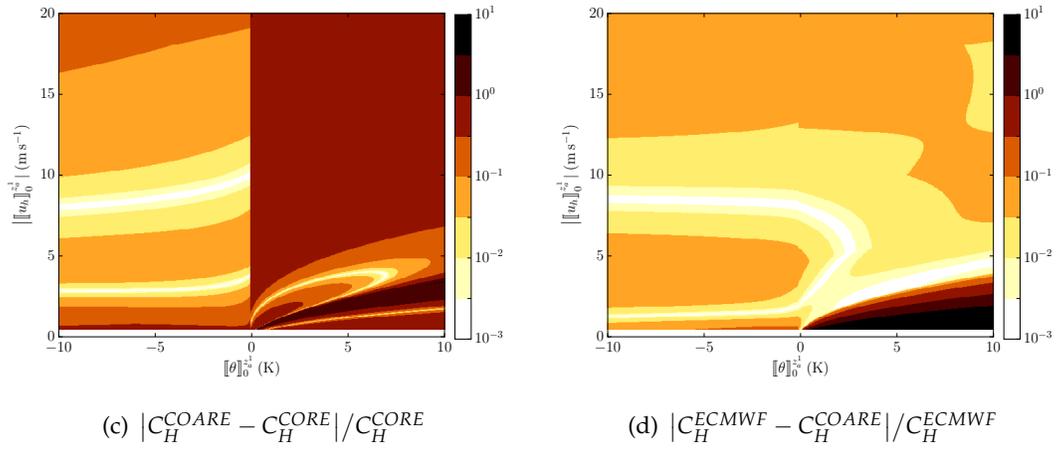
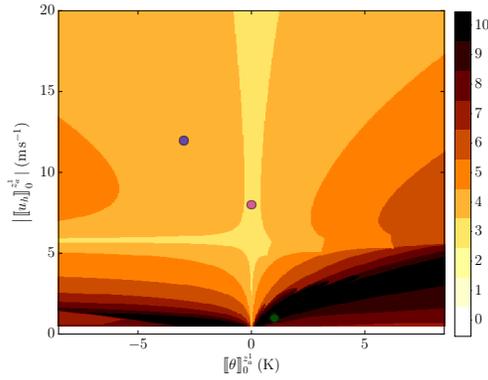
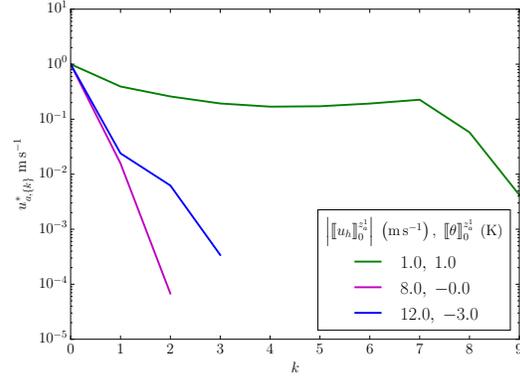


FIGURE 3.11 – Différences numériques relatives entre différentes formulations.



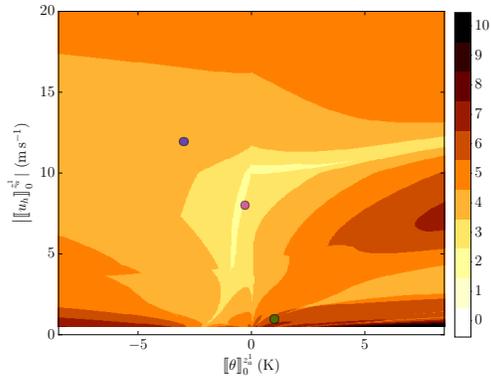
(a) CORE : nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt.



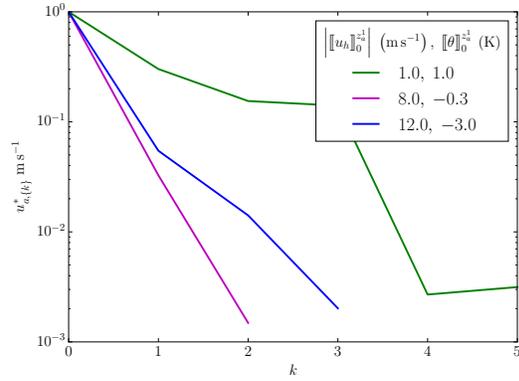
(b) Trois échantillons d'évolutions du critère d'arrêt issus de (a) (les points y sont repérés avec le même code couleur).

de code (Pelletier *et al.*, 2018) ont montré que le coût numérique d'une itération de la formulation CORE correspondait en moyenne à la moitié de celui des formulations COARE ou ECMWF.

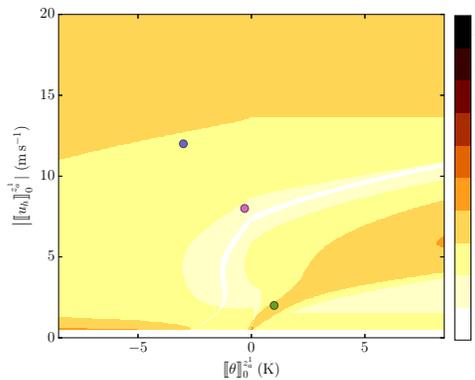
- (ii) La convergence de l'algorithme CORE est fortement dépendante de l'état physique de la CLS. Pour des vents faibles, et surtout en condition stable, cet algorithme ne converge pas. En pratique, dans les modèles numériques, cet algorithme fournit alors des valeurs de coefficients de transfert obtenues après un nombre maximal d'itérations fixé à l'avance par l'utilisateur, mais sans aucune garantie de pertinence des résultats.
- (iii) De façon globale, la convergence des algorithmes s'améliore sous des régimes de vents soutenus,  $\left| [u_h]_0^{z_a^1} \right| \geq 6 - 7 \text{ m s}^{-1}$ , et de stabilité proches de la neutralité,  $\left| [\theta]_0^{z_a^1} \right| \leq 1 - 2 \text{ K}$ .



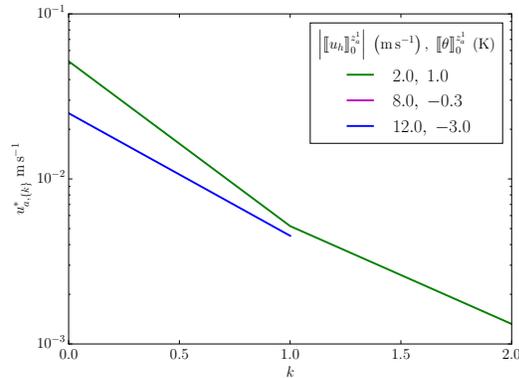
(c) COARE : nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt.



(d) Trois échantillons d'évolutions du critère d'arrêt issus de (c) (les points y sont repérés avec le même code couleur).



(e) ECMWF : nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt.



(f) Trois échantillons d'évolutions du critère d'arrêt issus de (e) (les points y sont repérés avec le même code couleur).

FIGURE 3.12 – Étude numérique sur la convergence des algorithmes bulks classiques ; (a)-(b) correspondent à CORE, (c)-(d) à COARE-(e)-(f) à ECMWF. Le critère d'arrêt est défini par (3.13) avec  $n_{it}^{max} = 10$  et  $r_{tol} = 10^{-3}$ . Pour chaque formulation, on représente sur une carte de couleur le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre ce critère d'arrêt, pour trois échantillons d'évolution du test d'arrêt, au fil des itérations.

### 3.3 Une méthode d'approximation explicite

On a vu précédemment que la structure des formulations bulk, telles qu'elles existent actuellement, est relativement complexe ; or, c'est au travers de ces formulations que sont obtenues les échelles de friction, à partir desquelles les flux turbulents prescrits aux modèles océan et atmosphère sont évalués. D'un point de vue mathématique, les échelles de friction sont solutions d'un système d'équations non linéaires dont le caractère bien-posé n'a pour l'instant pas été montré. En outre, les formulations bulks classiques (par exemple, celles présentées à la section précédente) présentent des irrégularités mathématiques : elles sont discontinues (et non différentiables) par rapport aux variables d'entrées extraites des modèles (par exemple,  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}$  ou  $\llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1}$ ). Il est donc très épineux d'étudier mathématiquement le problème de couplage océan-atmosphère sans préalablement simplifier la structure de ces formulations bulk.

Dans ce contexte, cette section présente une méthodologie construite afin de développer des formulations mathématiquement explicites et régulières qui pourraient, au sein de notre étude mathématique du couplage océan-atmosphère, se substituer aux formulations bulk. *Il nous semble essentiel d'insister sur le fait que les motivations derrière cette étude ne sont pas de remplacer les formulations bulks dans les modèles numériques.* Son objectif est plutôt de montrer qu'avec une précision numérique acceptable, pour l'étude mathématique du couplage océan-atmosphère, on pourra les assimiler à des fonctions mathématiquement explicites et régulières de données extraites des modèles. Nous pensons que cela pourra faciliter l'étude du problème de couplage OA par la communauté mathématique, en y ôtant l'une des principales difficultés formelles que sont les manipulations sur les formulations bulk. En outre, d'un point de vue numérique, l'utilisation de telles formulations explicites rendrait sans doute plus simple l'implémentation de schémas de discrétisations adaptés aux formes des solutions dans la CLS.

Cette méthodologie a fait l'objet d'un article accepté en décembre 2017 ([Pelletier et al., 2018](#)). Nous le reproduisons ici. Nos contributions sont les suivantes :

- ▶ brève présentation des formulations bulks classiques, et mise en exergue de quelques points délicats dans leurs formulations (discontinuités, non-différentiabilités, etc.) ;
- ▶ analyse de sensibilité des formulations bulk par rapport aux variables d'entrées issues des modèles, afin de cerner les variables les plus influentes sur les coefficients de transfert ;
- ▶ construction de formulations mathématiquement explicites et régulières, pondérées par les fréquences d'occurrence issues de la réanalyse ERA-Interim ([Dee et al., 2011](#))
- ▶ comparaison numérique de ces formulations explicites avec les formulations classiques, itératives, y compris au sein du modèle atmosphérique LMDZ-1D.

# Sensitivity analysis and metamodels for the bulk parameterization of turbulent air-sea fluxes

C. Pelletier\*, F. Lemarié, and E. Blayo

Univ. Grenoble Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP<sup>†</sup>, LJK, 38000 Grenoble, France

<sup>†</sup> Institut of Engineering Univ. Grenoble Alpes

December 2017

## Abstract

State-of-the-art climate models rely on bulk formulae arising from the Monin-Obukhov semi-empirical theory to estimate turbulent air-sea fluxes. The mathematical structure of those formulae implies several difficulties when trying to study the numerical properties of coupling algorithms used for practical applications. This paper introduces a methodology for building physically realistic approximations of existing bulk formulae that would also satisfy suitable mathematical properties (explicit character, regularity, differentiability). This is achieved by applying the Sobol' method to compute sensitivity indices in order to reduce the number of inputs and derive a simple metamodel for the parameterization of turbulent air-sea fluxes. Numerical results show excellent agreement between our approximations and the standard bulk formulae. In particular, single column simulations using the TOGA-Coare experiment within the LMDZ atmospheric model show negligible changes in numerical results.

## 1 Introduction

### 1.1 Context

Owing to advances in computational power and in the understanding of key physical processes, most global and regional climate models routinely include a dynamical coupling between several earth system compartments (e.g., atmosphere, waves, ocean and/or sea-ice, etc). Historically confined to long-term climatic applications, coupled models are now also increasingly used for shorter seasonal forecasts or to study extreme events (e.g. tropical cyclones). Despite the level of physical refinement of these models, the representation of coupling loops remains a fundamental issue which raises several challenges of physical and numerical nature. At a physical level, existing interfacial turbulent flux parameterizations (a.k.a. bulk formulations) must be adapted to include formerly neglected processes (e.g. Bao et al., 2000; Andreas et al., 2010; Edson et al., 2013; Kudryavtsev et al., 2014). At a numerical level, the stability and the mathematical consistency of the coupling (i.e. the fact that the coupling method provides the solution to the correct coupled problem) must be carefully studied. Indeed, recent studies by Connors and Ganis (2011), Lemarié et al. (2015) or Beljaars et al. (2017) have clearly identified various numerical issues in existing practices (e.g. stability issues in atmosphere-ice coupling, lack of phasing of the diurnal cycle in air-sea coupling in climate models, etc). Those issues arise from the use of ad hoc coupling algorithms which may lead to imperfect coupling.

---

\*Corresponding author: [charles.pelletier@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:charles.pelletier@univ-grenoble-alpes.fr)  
Laboratoire LJK - Bâtiment IMAG, Université Grenoble Alpes, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9, France.

In this context, our final objective is to study more systematically the numerical properties of coupling algorithms used for practical applications to clarify their merits and flaws and establish more robust methods. This task is not straightforward since the continuous form of the interfacial turbulent flux parameterizations is extremely complicated and defined empirically, making it tedious to conduct thorough numerical analysis of the coupling. A first step toward our objective is thus to derive a metamodel representative of the behavior of the full parameterization but with a mathematical form that is both easy to manipulate and differentiable.

Such metamodel could also be useful to enable the differentiation of interface conditions for variational data assimilation methods or to investigate more systematically physics-dynamics coupling issues (Janiskov *et al.*, 1999; Gross *et al.*, 2017).

## 1.2 Bulk parameterization of turbulent air-sea fluxes

We will consider the case of the ocean-atmosphere coupling in the remaining. Note, however, that the proposed methodology can be applied to any type of coupling occurring through bulk formulae. Our understanding of the turbulence in the atmospheric surface layer is based on the Monin-Obukhov (MO) semi-empirical theory (Monin and Obukhov, 1954) which is a generalization of the classical law of the wall to stratified conditions. The MO theory predicts that the mean (in the sense of the usual Reynolds decomposition) horizontal wind  $\mathbf{u}_h = (u, v)$ , potential temperature  $\theta$  and humidity  $q$  at a given altitude  $z_a > 0$  within the atmospheric surface layer is given by

$$\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a} = \frac{u_*}{\kappa} \{ \ln(z_a/z_m) - \psi_m(z_a/L(u_*, \theta_*, q_*)) \} \mathbf{e}_\tau \quad (1a)$$

$$\llbracket \theta \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} = \frac{\theta_*}{\kappa} \{ \ln(z_a/z_\theta) - \psi_h(z_a/L(u_*, \theta_*, q_*)) \} \quad (1b)$$

$$\llbracket q \rrbracket_{z_q}^{z_a} = \frac{q_*}{\kappa} \{ \ln(z_a/z_q) - \psi_h(z_a/L(u_*, \theta_*, q_*)) \} \quad (1c)$$

where  $\llbracket X \rrbracket_{z_1}^{z_2} = X(z_2) - X(z_1)$  is the difference of a variable between two vertical levels,  $\mathbf{z}_{\text{rgh}} = (z_m, z_\theta, z_q)$  is a set of “roughness lengths”,  $\psi_m$  and  $\psi_h$  are so-called stability functions for momentum and scalars (e.g. Högström, 1988),  $\kappa$  is the von Kármán constant, and  $\mathbf{e}_\tau$  is the unit vector in the direction of  $\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a}$ . In (1) the three “star variables” ( $u_*, \theta_*, q_*$ ) and the Obukhov length  $L$  are turbulent scales arising from a dimensional analysis (Monin and Obukhov, 1954). The star variables are directly related to the turbulent components of ocean-atmosphere fluxes, namely the wind stress vector  $\boldsymbol{\tau}$ , the sensible heat flux  $Q_H$  and the latent heat flux  $Q_L$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_a u_*^2 \mathbf{e}_\tau \quad (2a)$$

$$Q_H = \rho_a c_p u_* \theta_* \quad (2b)$$

$$Q_L = \rho_a \Lambda u_* q_* \quad (2c)$$

with  $\rho_a$  the air density in the surface layer,  $c_p$  the specific heat of air,  $\Lambda$  the latent heat of vaporization, and  $\mathbf{e}_\tau$  the unit vector in the direction of  $\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a}$ . The determination of ( $u_*, \theta_*, q_*$ ) requires solving (1), once an adequate closure assumption is made for  $\mathbf{z}_{\text{rgh}}$ . Since  $L$  is a function of the star variables, and the stability functions are nonlinear, this system is nonlinear and can be solved by fixed point iterations. Direct methods (e.g. Kondo, 1975; Louis, 1979) also existed prior to iterative ones, but they tend to be progressively abandoned in modern models. It is worth noting at this point that relatively large uncertainties (20 – 30%) still persist within turbulent air-sea fluxes parameterizations (hereafter, bulk formulae, e.g. Brodeau *et al.*, 2017).

In (1), several choices exist for the stability functions, which are calibrated empirically by fitting independent measurements, and several approaches are possible to estimate  $\mathbf{z}_{\text{rgh}}$ , thus leading to appreciable differences between bulk formulations. Moreover, the iterative resolution of the nonlinear system

has been rather poorly studied in terms of uniqueness of its solution and of numerical convergence (see [Pagowski, 2006](#), for a counter example). Since earth system models are configured with increasingly higher resolution, it is expected that more and more significant departures from the neutrally-stratified case will be present in numerical simulations, potentially requiring numerous iterations to obtain the solution of (1).

### 1.3 Outline of the paper

Our objective is to present a step by step methodology to derive a direct formulation of air-sea turbulent fluxes. On top of mitigating the burden of an iterative resolution of the nonlinear system (1) and allowing an adequate treatment for asymptotics (e.g., in the case of very strong winds), the main objective is to derive a formulation that would be differentiable and make tractable the study of mathematical and numerical aspects of multiphysics coupling methods used within earth system models. It should be clear that our ambition is not to improve the physical content of current bulk formulae but to show that classical bulk formulae can be approximated by regular, explicit functions with acceptable numerical accuracy. Our approximations are not meant to be implemented within existing models; their main objective is to show that for the mathematical study of the air-sea coupled problem, considering bulk formulae as explicit, differentiable functions of physical inputs is numerically viable. Our work is similar to that of [Kara et al. \(2005\)](#), except that we have taken into account 3 referent bulk formulae, and built approximations that are continuous and differentiable.

The paper is organized as follows. In Section 2 the procedure to numerically solve the nonlinear system arising from the MO theory is described and three widely used bulk formulae are introduced. Then, in Section 3, we proceed to a sensitivity analysis of those three bulk formulae with respect to their inputs, to reduce the parameter space by keeping only the input variables that have been considered sufficiently influent. Thanks to this analysis based on Sobol' indices, the derivation of a metamodel is presented in Section 4 as well as numerical results with a single-column atmospheric model to illustrate that the use of a metamodel for estimating the turbulent air-sea fluxes does not significantly modify the physical results. Finally, in Section 5 we summarize our findings and conclude.

## 2 Numerical evaluation of interfacial turbulent fluxes

The determination of turbulent fluxes can be formalized as a multivariate non-linear problem which is solved via fixed point iterations. Numerical difficulties associated with this resolution are emphasized.

### 2.1 Bulk formulae

As said earlier, the turbulent components of the air-sea fluxes are directly computed from the star variables ( $u_*, \theta_*, q_*$ ) which are commonly related to transfer coefficients for momentum, heat and moisture ( $C_D, C_H, C_E$ ) by

$$u_*^2 = C_D \left\| \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a} \right\| \left( \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a} \cdot \mathbf{e}_\tau \right) \quad (3a)$$

$$u_* \theta_* = C_H \left\| \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} \right\| \llbracket \theta \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} \quad (3b)$$

$$u_* q_* = C_E \left\| \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_q}^{z_a} \right\| \llbracket q \rrbracket_{z_q}^{z_a} \quad (3c)$$

In theory, the terms  $\llbracket X \rrbracket_{z_X}^{z_a}$  in (1) and (3) should be obtained from extrapolating each variable from the shallowest ocean level to its roughness length, which is located above the ocean surface. In practice,

most numerical models neglect extrapolating in the ocean and consider solution profiles to be constant in the oceanic surface layer and the atmospheric viscous sublayer, therefore using solely the difference between the quantities at the height of the lowest model level in the atmosphere (typically around 10 m) and at the depth of the shallowest model level in the ocean ( $\sim 1$  m). In (3a), setting  $\mathbf{e}_\tau = \mathbf{e}_{\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a}}$  yields  $u_*^2 = C_D \|\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a}\|^2$ . By identification we easily get that

$$C_D(z_a) = \kappa^2 \{\ln(z_a/z_m) - \psi_m(\zeta(z_a))\}^{-2} \quad (4a)$$

$$C_H(z_a) = \kappa \sqrt{C_D(z_a)} \{\ln(z_a/z_\theta) - \psi_s(\zeta(z_a))\}^{-1} \quad (4b)$$

$$C_E(z_a) = \kappa \sqrt{C_D(z_a)} \{\ln(z_a/z_q) - \psi_s(\zeta(z_a))\}^{-1} \quad (4c)$$

where the stability parameter  $\zeta$  has been introduced

$$\zeta(z_a) = \frac{z_a}{L(u_*, \theta_*, q_*)} = g \frac{\kappa z_a}{u_*^2} \left[ \frac{\theta_*}{\theta_v(z_a)} + \frac{q_*}{q(z_a) + q_0} \right] \quad (5)$$

with  $\theta_v = \theta(1 + q/q_0)$  the virtual potential temperature and  $q_0$  the constant saturation humidity.  $\zeta$  is a dimensionless parameter characterizing the fluid stratification due to the density gradient in a given air column:  $\zeta$  and  $\llbracket \theta_v \rrbracket_{z_0}^{z_a}$  are both 0 under neutral stratification,  $(\zeta, \llbracket \theta_v \rrbracket_{z_0}^{z_a}) > 0$  under stable stratification and  $(\zeta, \llbracket \theta_v \rrbracket_{z_0}^{z_a}) < 0$  under unstable one. Once the macroscopic variables  $\llbracket u \rrbracket_{z_0}^{z_a}$ ,  $\llbracket \theta \rrbracket_{z_0}^{z_a}$ ,  $\llbracket q \rrbracket_{z_0}^{z_a}$ ,  $\theta_v(z_a)$ , and  $q(z_a)$  are known<sup>1</sup>, an additional closure hypothesis is needed since we get six unknowns (i.e.  $u_*$ ,  $\theta_*$ ,  $q_*$ , and  $z_{\text{rgh}}$ ) for only three equations (1). There are generally two strategies employed to overcome this issue:

- (i) Express the roughness lengths  $z_{\text{rgh}}$  in terms of  $u_*$  (e.g. [Smith, 1988](#); [Beljaars, 1995](#))
- (ii) Use empirically defined neutral transfer coefficients  $C_D^N$ ,  $C_H^N$  and  $C_E^N$  (e.g. [Large, 2006](#)).

These two strategies are formally equivalent since roughness lengths and neutral transfer coefficients can directly be diagnosed from one another, by assuming neutral stratification at a fixed height  $z_N$ :

$$C_D(z_N) = C_D^N = \kappa^2 \{\ln(z_N/z_m)\}^{-2} \quad (6a)$$

$$C_H(z_N) = C_H^N = \kappa^2 \{\ln(z_N/z_m) \ln(z_N/z_\theta)\}^{-1} \quad (6b)$$

$$C_E(z_N) = C_E^N = \kappa^2 \{\ln(z_N/z_m) \ln(z_N/z_q)\}^{-1} \quad (6c)$$

## 2.2 Fixed-point problem

All bulk formulae can be formalized as multivariable fixed point problems. Indeed, injecting (3), combined with (5), into (4) yields

$$\llbracket u_* / \|\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_0}^{z_a} \|^2 \rrbracket = C_D(u_*, \theta_*, q_*) \quad (7a)$$

$$\llbracket u_* \theta_* \rrbracket / \llbracket \|\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_0}^{z_a} \|\llbracket \theta \rrbracket_{z_0}^{z_a} \rrbracket = C_H(u_*, \theta_*, q_*) \quad (7b)$$

Attempts to analytically solve (7) have not been successful yet. Therefore, the ‘‘bulk problem’’ is generally solved using an iterative fixed point algorithm for determining the scales  $(u_*, \theta_*, q_*)$  that

<sup>1</sup>Throughout this study we assume that the atmospheric variables  $\mathbf{u}_h$ ,  $\theta$ , and  $q$  are available at a common altitude  $z_a$ , which is always the case when considering the coupling between the ocean and the atmosphere. The case where the atmospheric variables are not at the same altitude requires additional shifts in the vertical during the computation of the star variables, see [Large \(2006\)](#)

are consistent with (7). Figure 1 displays a schematic representation of such algorithms. While their convergence has been studied numerically (see Pagowski, 2006), it has yet to be proved mathematically.

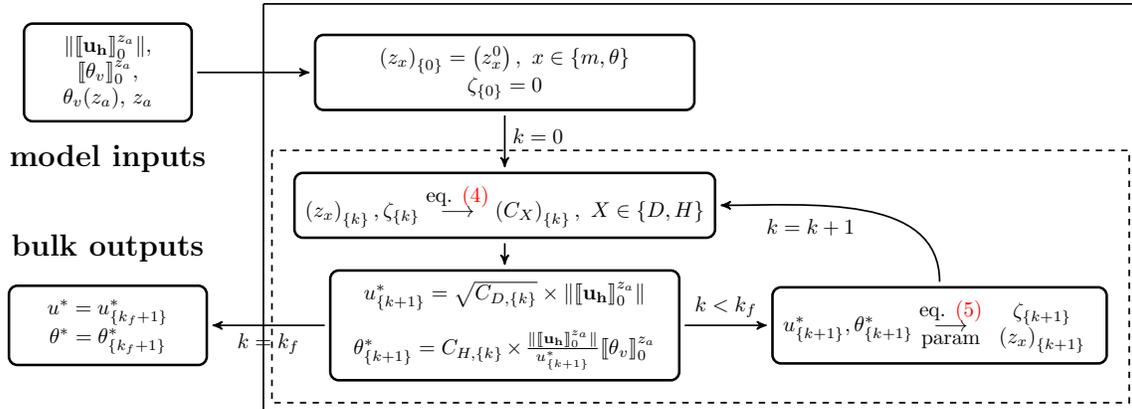


Figure 1: Bulk formulae seen as iterative algorithms. The plain line bounding box contains the bulk process in its entirety. The dashed bounding box contains the iterative loop nested within bulk formulae,  $k$  denoting the iteration index; for any iterated variable  $X$ ,  $X_{\{k\}}$  denotes its  $k^{\text{th}}$  iteration.  $(z_x)$  is the set of roughness lengths, which are initialised by a set of constant, predefined lengths named  $(z_x^0)$ . For the sake of conciseness, the air moisture has been neglected; including it would keep the structure similar. Described above is a bulk algorithm relying on the roughness lengths parameterization (eg: Coare, ECMWF).

### 2.3 Specificities of three different bulk formula

Three bulk formulae will be used to numerically illustrate our approach. It should be emphasized that these bulk formulae have been developed with different constraints in mind (e.g. by prioritizing accuracy for typical conditions over the ocean rather than land surfaces, etc) and using different datasets. This translates into bulk formulae presenting non-negligible differences under certain conditions, as shown in Figure 2.

Table 1 lists some criteria by which the three considered bulk formulae differ. The NCAR-developed

	CORE	Coare (3.0)	ECMWF
gus.	no	yes	yes
$z_0$	diagnosed from $C_x^N$ (see (6))	Smith (1988)	Smith (1988)
$C_x^N$	Large (2006)	unnecessary	unnecessary
$\psi_x$	Högström (1988)	Grachev et al. (2000)	Högström (1988)

Table 1: Main differences among studied bulk formulations. “gus.” stands for gustiness.

CORE formulation significantly differs from the other two formulations in that it directly fits the neutral transfer coefficient. Coare and ECMWF formulations are very similar, both using roughness-lengths following Smith (1988) and incorporating gustiness effects (Godfrey and Beljaars, 1991). This latter feature is responsible for the relative similarity between Coare and ECMWF formulations under weak

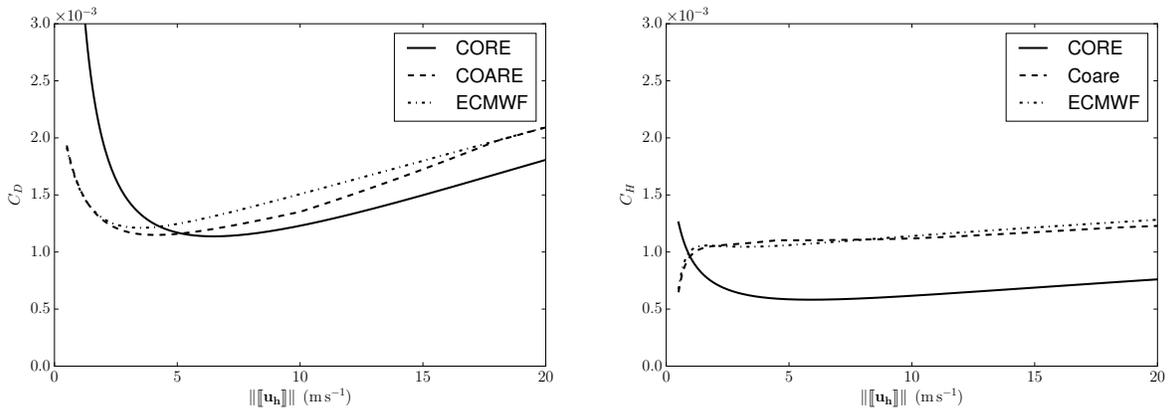


Figure 2: Comparison between different bulk algorithm output. Left panel:  $C_D$  under unstable condition.  $\|\theta\| = -2$  K. Right panel:  $C_H$  under neutral condition.  $\|\theta\| = 0$  K.

wind configurations. For other wind configurations, the main numerical differences between Coare and ECMWF are due to their different choice of stability functions ( $\psi_m, \psi_h$ ). Since the ECMWF formulation is also designed to be used over land surfaces, the formulation of exchange coefficients slightly differs<sup>2</sup> from (4) to avoid singularities when  $z_m$  becomes large compared to  $z_a$ . However, for typical situations over the ocean this difference in the formulation of exchange coefficients is not expected to be significant.

## 2.4 Numerical delicacies associated to bulk formulae

Some numerical difficulties specific to the bulk formulae are presented. First of all, using iterative algorithms implies setting a stopping criteria. Although they tend to become rarer, there still subsists models where the iterative process is arbitrarily stopped after a constant number of iterations (typically between 2 and 5 iterations, e.g. Hourdin *et al.*, 2006; Brodeau *et al.*, 2017). If the maximum number of iterations is too small to converge, the turbulent fluxes thus computed may be inconsistent with MO theory. Although this tends to become less and less frequent, some numerical models still carry one single iteration; Figure 3 shows the error made on the transfer coefficients when doing so.

Second, some bulk formulae have mathematical irregularities in the sense that their outputs (most notably,  $C_H$  and  $C_E$ ) are discontinuous with respect to their model inputs. For instance, in the CORE algorithm, the neutral heat transfer coefficient is expressed as follows:

$$C_H^N = \chi \left( \|\theta_v\|_{z_\theta}^{z_N} \right) \times C_D^N \quad (8)$$

where  $\chi$  is a piecewise constant function, discontinuous at  $\|\theta_v\|_{z_\theta}^{z_N} = 0$ .

Another common practice is to impose a minimal critical value to wind speed norm to avoid a “blow up” when the wind is too low: this translates into a discontinuity in the gradient of the bulk formula with respect to this input. From a functional analysis perspective,  $C_1$ -regularity of the boundary value

<sup>2</sup>To avoid singularities in logarithmic profiles it is customary for atmospheric models to replace  $z_a$  by  $z_a + z_m$  when building the non-dimensional groups in the surface-layer theory. With this modification, instead of (4a) the drag coefficient would be  $C_D = \kappa^2 \left\{ \ln \left( \frac{z_a + z_m}{z_m} \right) - \psi_m(\zeta(z_a + z_m)) + \psi_m(\zeta(z_m)) \right\}^{-2}$ , same modifications apply to  $C_H$  and  $C_E$ .

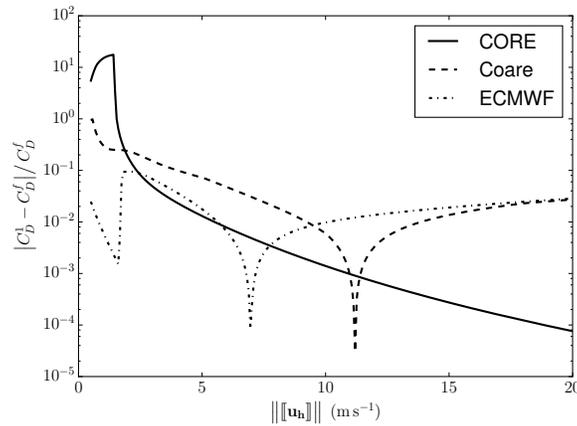


Figure 3: Relative error for  $C_D$  computation between the first and 20th bulk iteration, where the bulks are assumed to be converged. It should be noted that the CORE bulk has an oscillatory behavior when being iterated a significant number of times, never properly converging for certain physical configurations, including the one shown above, for weak wind. Here,  $[\theta] = 2$  K and  $[q] = 0$ .

with respect to the problem data is a desirable property for guaranteeing mathematical well-posedness. Hence, for proper air-sea coupling, such irregularities must be avoided. At last, the implementation of bulk formulations systematically involves setting up a certain number of thresholds, for avoiding numerical “pits” where the iterative algorithm might have a divergent nature. Generally speaking, bulk formulations uncertainties increase with decreasing wind speed norm.  $|\zeta| \rightarrow \infty$  corresponds to weak wind configurations; in CORE and Coare algorithms,  $|\zeta|$  is bounded from above (respectively by 10 and 50) for avoiding  $|\zeta| \gg 1$ , which stability functions have not been tuned for.

## 2.5 Assets of an explicit bulk formulae

Hereafter, “explicit bulk formula” will refer to a bulk formula that would behave as an explicit “black-box” functional, taking as input solely macroscopic model variables. These can be formalized as classical, mathematically explicit functions:

$$\left( z_a, \|\mathbf{u}_h\|_{z_0}^{z_a}, [\theta]_{z_0}^{z_a}, [q]_{z_0}^{z_a}, q(z_a), \theta(z_a), \dots \right) \mapsto (C_D, C_H, C_E) \quad (9)$$

where the input variables are yet to be determined. Using explicit approximations of bulk formulae would have several advantages:

1. Iterative bulk formulae are generally non-differentiable and may thus be responsible for the development and persistence of discontinuities in model variables (and their derivatives). A mathematically differentiable form would escape those issues.
2. An explicit bulk formulae allows to avoid a cumbersome iterative process which can be sometimes costly given the complexity of stability functions and the uncertainty on the convergence of the iterative process.
3. The proper asymptotics can be more easily enforced if they are not properly taken into account in the original bulk formulation (e.g. the Coare formulation was mostly conceived for weak wind configurations)
4. Several iterative bulk formulae could be approximated by explicit forms with the same mathematical structure (the only difference would be in the values of some coefficients) which would allow more modularity for their implementation and analysis.

5. Simplification of the mathematical structure of bulk formulae would greatly facilitate the numerical study of coupling algorithms.

From this list, it must be clear that those arguments are primarily motivated by practical and numerical considerations. Since the physical content of the iterative bulk formulae is kept unchanged, the same amount of bias and uncertainty is to be expected in explicit ones. We will now investigate the building of such explicit numerical approximations. To do so, the first obstacle is that the bulk formulae use a lot of model input variables. The next paragraph introduces a mathematical tool that allows to reduce the number of inputs.

### 3 Sensitivity analysis

The main aim of sensitivity analysis is to determine which model inputs are the most influential on its outputs. We will apply such an analysis on the bulk formulae, formalized in the same way as (9). The first step for doing so is to determine which model inputs should be taken into consideration, which, given the complex and intertwined nature of bulk formulations, is not as obvious as it might seem. Our choice is described in Table 2.

Name	Description	Typical range
$z_a$	first-level height	[1; 20] m
$[[\mathbf{u}_h]]_{z_o}^{z_a}$	speed jump	[0.5; 25] m s <sup>-1</sup>
$[[\theta_v]]_{z_o}^{z_a}$	virtual potential temperature jump	[-10; 10] K
$[[q]]_{z_o}^{z_a}$	moisture jump	[0; 10 <sup>-2</sup> ] kg kg <sup>-1</sup>
$\theta_v(z_a)$	first-level virtual potential temperature	[270; 320] K
$q(z_a)$	first-level moisture	[0; 2 10 <sup>-2</sup> ] kg kg <sup>-1</sup>
$P_1$	first-level pressure	10 <sup>5</sup> Pa $\pm \sim$ 0.1%

Table 2: Choice of input variables for the sensitivity analysis of all bulk formulae.

#### 3.1 Sobol' indices

We will suppose that our model has  $n \in \mathbb{N}^*$  inputs, considered as random variables and denoted  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ , and that it has one sole output, called  $Y$ . In our bulk formulae,  $(X_i)_i$  would be the variables listed in Table 2 and  $Y$  one of the three transfert coefficients,  $(C_x)_{x \in \{D, H, E\}}$ . Since standard Sobol' index (Sobol, 1993) computation methods require the independence of input variables, we will assume this hypothesis to be true. While this is not the case when extracting Table 2 variables from atmosphere models, our preliminary sensitivity analysis will be carried out using independently generated input variables. Forthcoming numerical results will show that this choice leads to efficient approximations, even within models concealing correlated variables. Moreover, there is inchoative literature on Sobol' indices with correlated inputs (e.g. Chastaing *et al.*, 2014).

We aim at evaluating, for each  $1 \leq j \leq n$ , the influence of  $X_j$  on  $Y$ . This is done through computing the conditional expectation  $E(Y|X_j = x_j)$ , which is the mean value of  $Y$  over the distribution of  $(X_i)_{i \neq j}$ , with  $X_j$  set to a particular value  $x_j$ . Therefore,  $Z_j = E(Y|X_j)$  can be seen as a random variable, now considering the variations of  $X_j$ . The variance of  $Z_j$  quantifies the influence of  $X_j$  on the dispersion

of  $Y$ , which is precisely what we are looking for. The first-order Sobol' indices are thus defined as follows:

$$\forall j = 1, \dots, n, S_j^1 = \frac{\text{Var}(E(Y|X_j))}{\text{Var}(Y)} \quad (10)$$

where it should be clear that  $E(Y|X_j)$  is a mean computation for  $Y$  over  $n - 1$  inputs (all besides  $X_j$ ), and the upper variance computation is therefore done for the sole  $X_j$  variable. The normative division by  $\text{Var}(Y)$  guarantees that  $S_j^1 \in [0; 1]$ .

$S_j^1$  quantifies the influence of  $X_j$  taken alone on  $Y$ ; first-order Sobol' indices do not take into account cross-effects between input variables, meaning that, for example, all terms due to  $X_j X_k$  ( $k \neq j$ ) on  $Y$  are not taken into account by first-order Sobol' indices. Information about these effects are contained within higher-order Sobol' indices (in the former example, by the second-order Sobol' index  $S_{j,k}^2$ ). For each input  $X_j$ , there also exists a total Sobol' index, which is the sum of any-order Sobol' indices that include this variable. Naturally, the sum of total Sobol' indices is higher than 1, as cross-effects will be accounted for several times.

### 3.2 Numerical protocol

This paragraph aims at presenting the numerical protocol that will be used in order to carry the sensitivity analysis, which relies on the computation of Sobol' indices through the `sensitivity` package for R (Iooss *et al.*, 2015).

The protocol is as follows:

1. Compute an estimate of the probability density function of all variable inputs from Table 2 from the ERA-Interim re-analysis (Dee *et al.*, 2011); data from years 2000 and 2006 have been used.
2. Extract means and standard deviations from all considered variables.
3. Simulate a large number of model inputs as independent random variables, using Gaussian density functions (log-normal laws are used for positive inputs) with the previously computed means and standard deviations.
4. Compute all three bulk formulae outputs (the star variables) for each model input.
5. With the `sensitivity` package, using a method derived from Tissot and Prieur (2015), compute an estimate of the first and total Sobol' indices of each input variable, for each bulk formulation.

Figure 4 shows the distribution of the first two input variables, as obtained from ERA-Interim data reanalysis. Direct data from both years 2000 and 2006, which are climatologically standard in that they contain few extreme events, have been used. The dashed line density functions drawn in Figure 4 correspond to the density functions that will be used for the computing of Sobol' indices.

### 3.3 Results and interpretation

Figure 5 shows numerical results obtained on Sobol' indices. While some numerical models diagnose  $q_s$ , the sea-level air moisture, from the sea-surface temperature and the first-level pressure in order to evaluate  $\llbracket q \rrbracket_0^{z_0}$ , we have considered this jump to be a "raw input" for the bulk formulae. This does not impact the legitimacy of our study, as what we are interested in are the sole bulk formulae, not other numerical treatments done prior to it.

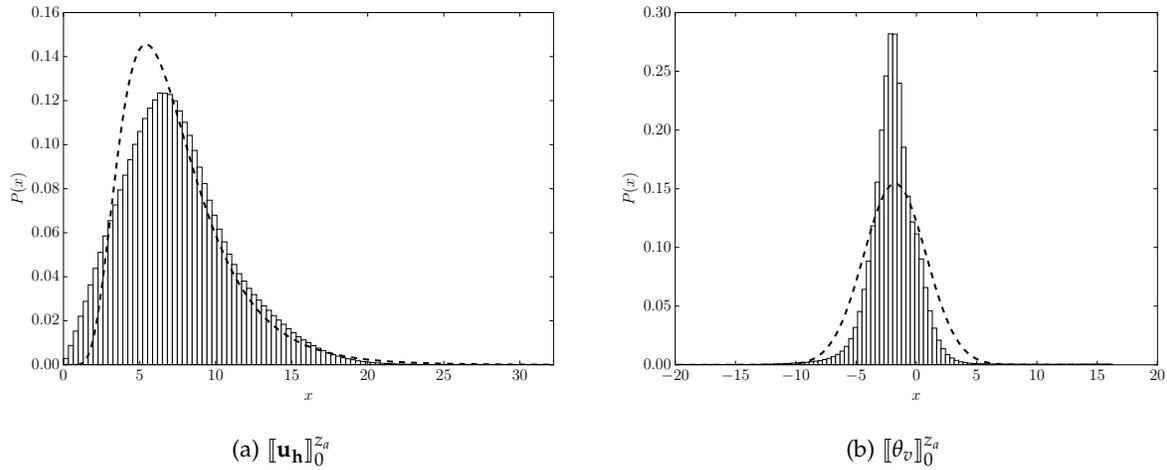


Figure 4: Normalized statistical distribution of some input variables as extracted from ERA-Interim data reanalysis (bar diagrams), and the log-normal (a) and Gaussian (b) distribution with same mean and variance.

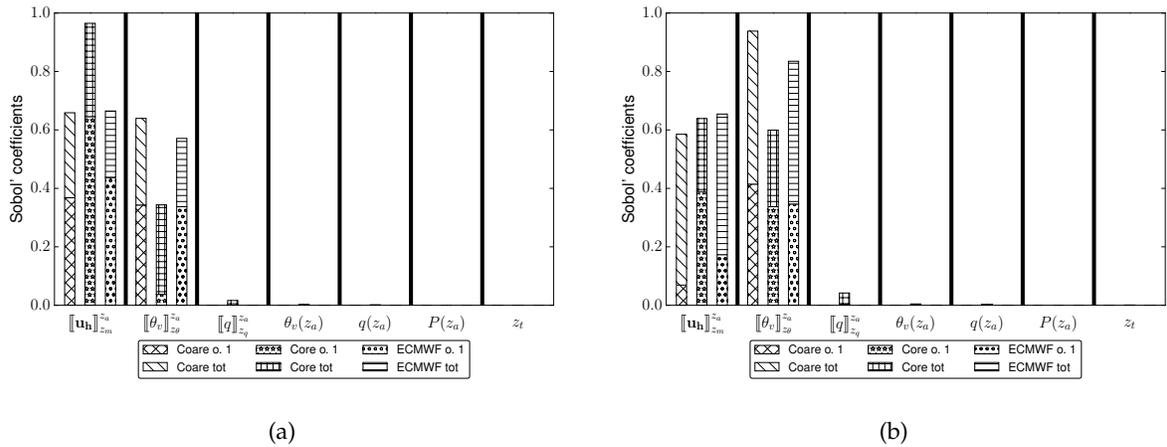


Figure 5: Sobol' indices evaluation for the 7 inputs from Table 2. (a) represents the Sobol' indices for  $C_D$ ; (b), for  $C_H$ . In each diagram, each rectangle contains the Sobol' indices for one given variable. The hatch pattern distinguishes, for each input and each output, which combination of bulk (Coare, CORE or ECMWF) and index order (first or total) has been represented. For instance, the first-order Sobol' index for  $[[\mathbf{u}_h]]_{z_m}^{z_a}$  in the CORE algorithm is roughly 0.65, and its total order is roughly 0.95.

Results clearly show that there are two important inputs for the bulk formulae:  $\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a}$  and  $\llbracket \theta_v \rrbracket_{z_\theta}^{z_a}$ . To some extent,  $\llbracket q \rrbracket_{z_q}^{z_a}$  can also be considered as influential, yet, judging by the numerical results, its influence should be much weaker than the two other aforementioned variables. All four other input variables are much less influential. Sobol' indices for  $C_E$  are not shown; they are very similar to  $C_H$  (indeed, in a few bulk formulae, both these coefficients are equal).

Therefore, our explicit approximations will incorporate two input variables, taking form as such:

$$\left( \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a}, \llbracket \theta_v \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} \right) \mapsto \widetilde{C}_X, \quad X \in \{D, H, E\} \quad (11)$$

It should be noted that while humidity is not shown in (11), part of its effect on transfer coefficients will be rendered through using  $\theta_v$  instead on  $\theta$ . Moreover, while humidity is not explicitly used for computing  $C_E$ , latent heat flux computation would still require  $\llbracket q \rrbracket_{z_q}^{z_a}$ .

## 4 Technical aspects and numerical results

Here we describe how our fit has been technically established. In particular, the asymptotic regimes are discussed as well as the numerical strategy for fitting a given bulk formulae. Finally, numerical results comparing our approximations with the standard bulk formulae are shown.

### 4.1 Asymptotic regime

As discussed earlier, proper asymptotic behavior for low wind speed regime is already built-in within iterative bulk formulae. On the other hand, the standard formulations generally do not represent the saturation of drag coefficients observed at very high winds. Such saturation has been shown using in situ data (e.g. Powell *et al.*, 2003) and justified theoretically by Bye and Jenkins (2006). Therefore, we decided to impose this asymptotic behavior for extreme input variables and to ensure that the transition to this asymptotic regime is done in a mathematically regular way. Note that our methodology is flexible enough to implement any other type of behavior for high wind conditions since the values of exchange coefficients in this case is still matter of debate.

### 4.2 Mathematical form

As shown in figure 6, our fitting formulations are based on regionwise polynomial approximations. The regions are defined as follows:

- (i) two ‘‘main’’ regions that account for over 93% of possible input configurations found in the ERA-Interim reanalysis. These two regions are defined by  $1.5 \leq \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a} \llbracket \text{m s}^{-1} \rrbracket \leq 18$ , and either  $-7.5 \leq \llbracket \theta_v \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} \leq -0.1$  or  $0.1 \leq \llbracket \theta_v \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} \leq 7.5$  [K]. Unstable and stable configurations have been separated in order to achieve better numerical accuracy. In each of these two regions, the approximation is a 2-variable,  $n_d$ -degree polynomial ( $(n_d + 1)(n_d + 2)/2$  degrees of freedom each), with  $n_d$  a constant parameter to be set by the user. Sensitivity to  $n_d$  is discussed below.
- (ii) a buffer zone in between those two regions, defined as a polynomial to ensure  $\mathcal{C}_1$  regularity at the connection, and also to ensure that the neutral case is accurately approximated.
- (iii) four 1-dimensional fits for  $\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a} = 0.5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_{z_m}^{z_a} = 20 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\llbracket \theta_v \rrbracket_{z_\theta}^{z_a} = \pm 10 \text{ K}$  (solid black lines in figure 6). Those particular values define the boundary between the region where the bulk formulae are fitted and the asymptotic regime.

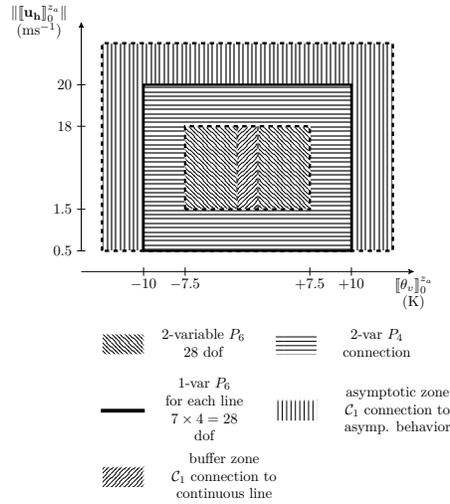


Figure 6: Approximation strategy depending on the physical configurations.

- (iv) a buffer zone whose main purpose is to ensure smooth transition between the main region and the 1D-fits described in (iii). For instance, weak wind configurations will be accounted for by computing  $C_X \left( 0.5 \text{ m s}^{-1}, \|\theta_v\|_0^{z_a} \right)$  and  $C_X \left( 1.5 \text{ m s}^{-1}, \|\theta_v\|_0^{z_a} \right)$ , and then connecting these two values *via* a  $C^1$  connection over the  $\|\mathbf{u}_h\|_{z_m}^{z_a}$  variable.
- (v) asymptotic behaviors for input values outside of these input configurations:
- for  $\|\mathbf{u}_h\|_{z_m}^{z_a} > 20 \text{ ms}^{-1}$ , impose exponentially increasing  $C_X$ , saturating at  $2.5 \times 10^{-3}$ . Exponentials have been used because they can easily simulate saturation regime, however, other mathematical forms could have been chosen.
  - for  $\|\theta_v\|_{z_\theta}^{z_a} > 10 \text{ K}$ , impose  $C_X = C_X(\pm 10\text{K})$ , which is consistent with the saturation of  $\zeta$  that is imposed in all iterative bulk formulae.

The iterative bulk formulae of reference have been computed using the `aerobulk`<sup>3</sup> package (Brodeau et al., 2017) which gathers CORE, Coare and ECMWF algorithms in a common computational framework. This package is increasingly used for ocean-only global simulations and has been treated here as a “black box”.

### 4.3 Numerical accuracy

The numerical accuracy of our approximation has been tested over  $0.5 \text{ m s}^{-1} \leq \|\mathbf{u}_h\|_{z_m}^{z_a} \leq 20 \text{ ms}^{-1}$  and  $-10 \text{ K} \leq \|\theta_v\|_{z_\theta}^{z_a} \leq +10 \text{ K}$ . Figure 7 shows the relative error between two classical bulk algorithms (CORE and ECMWF) and their respective explicit approximations, choosing  $n_d = 6$  for the 2-variable polynomial region as described by Figure 6.

Numerical results show that our fits have excellent accuracy over the most frequent physical configurations, which was expected by construction. Moreover, while not being as good, numerical accuracy is also satisfying over rare physical configurations. We believe this can be explained by the fact that over a 1D bounding-box, extreme values are very accurately fitted, and that the “buffer zones” (as shown

<sup>3</sup><https://brodeau.github.io/aerobulk/>

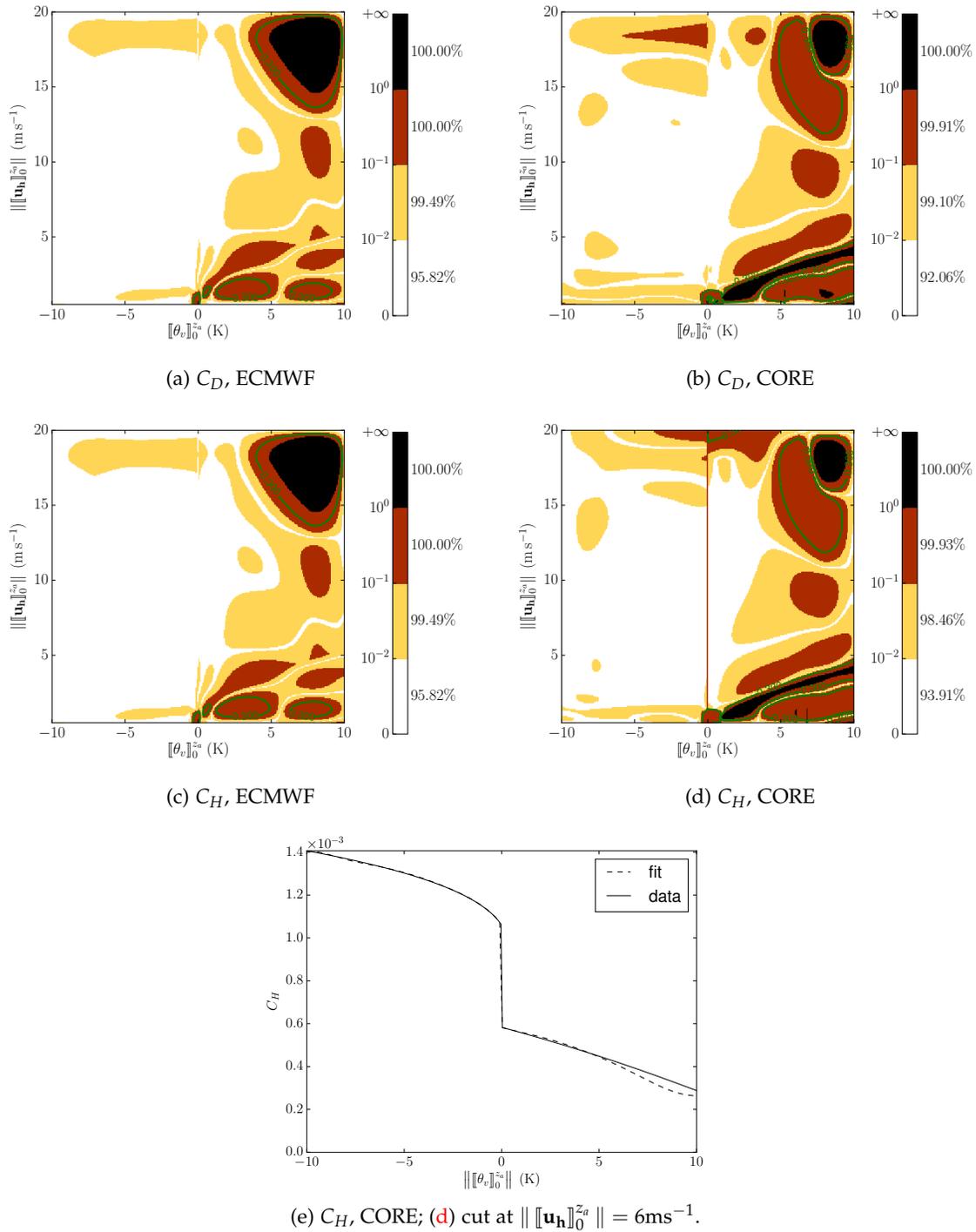


Figure 7: Numerical relative error of our approximations with regards to their respective bulk formulae. The percentages given on the right hand side of the colorbar are the part of ERA-Interim bulk inputs for which the numerical output error is less than the color’s upper boundary (eg: in (a), the numerical relative error on  $C_D$  is less than  $10^{-2}$  for 96.84% of the ERA Interim data inputs). The typical margin of error for bulk formulae is on the order of 30%; in our fitting routines, such errors are attained for extremely rare input configurations, and small wind (especially for the CORE algorithm, which is less mathematically regular).

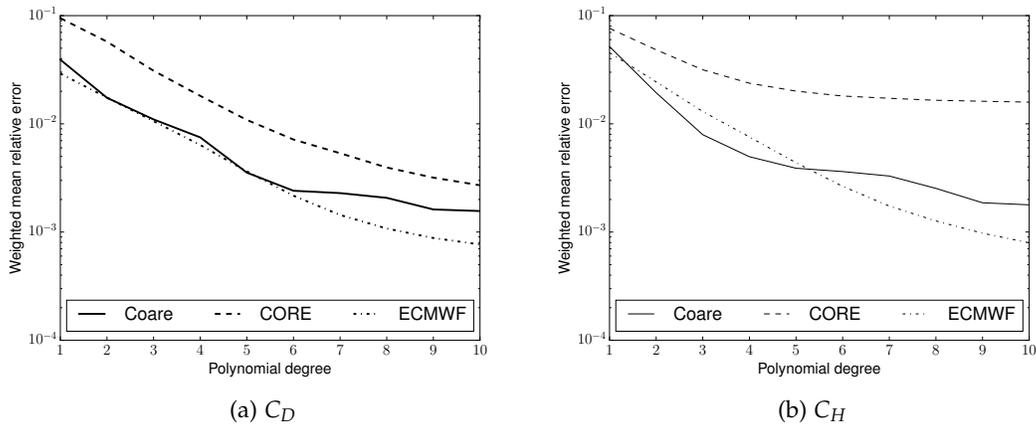


Figure 8: Relative error between the classical bulk formulae and our approximations. Results have been averaged over  $0.5\text{m s}^{-1} \leq \|\mathbf{u}_h\|_0^{z_a} \leq 20\text{m s}^{-1}$  and  $-10\text{K} \leq \|\theta_v\|_0^{z_a} \leq +10\text{K}$ , weighted by the ERA-Interim input occurrences.

in Figure 6) tend to nudge our fit back to these values.

As expected, less accuracy is obtained for weak-wind configurations over stable stratification. Classical bulk formulations have very large uncertainties over these regions, which translate into irregularities in their mathematical formulation. Considering our explicit approximation is by nature regular, such errors are to be expected. The transition between unstable and stable configurations has large errors for the heat coefficient of the CORE algorithm (see Figure 7e). This is because we try to approximate a mathematically discontinuous function (at  $\|\theta_v\|_{z_\theta}^{z_a} = 0$ ) with a regular one.

Tests have also been carried out for assessing how accurate our fitting routines are with respect to the degree of the 2-variable polynomial approximation. Figure 8 shows numerical results. As expected, the numerical accuracy increases with increasing degree. The CORE formulation, which is the least mathematically regular, has the largest error. The Coare and ECMWF formulations present similar errors, although the ECMWF one tends to show steadier increase in accuracy over large degrees. This can be explained by the complexity of stability functions in Coare which is more difficult to approximate using polynomials. Generally speaking, our numerical approximations show satisfying levels of accuracy, even for relatively small polynomial degrees. The computational cost of the 6-degree polynomial approximation corresponds to the one of 1 iteration of the CORE algorithm and of half an iteration of the Coare and ECMWF formulations (it is thus 10 times faster if we consider 5 iterations of those two algorithms).

#### 4.4 Numerical test: the TOGA experiment

Our numerical approximations have been implemented within the single-column version of the LMDZ atmospheric model. We have used the default TOGA-Coare configuration of the 2014 trunk version of the 1D version of the LMDZ model (Hourdin *et al.*, 2006), only changing the drag coefficients computation routines. The TOGA-Coare test case (Webster and Lukas, 1992) was used to test the validity of our approximations against standard bulk formulae. This test case is characterized by weak winds ( $\|\mathbf{u}_h\|_{z_m}^{z_a} \approx 2\text{ m s}^{-1}$ ) and unstable conditions ( $\|\theta_v\|_{z_\theta}^{z_a} \approx -3\text{ K}$ ). Table 3 shows some numerical results from the LMDZ model using the non-iterative Louis (1979) formulation (the default option in LMDZ), two iterative bulk formulae of reference (Coare and CORE) and their explicit approximations

for  $n_d = 2$  and  $n_d = 6$ .

Reference		Coare			CORE		
Comparison		LMDZ	Fit		LMDZ	Fit	
			$n_d = 2$	$n_d = 6$		$n_d = 2$	$n_d = 6$
$\delta u_*$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	Mean	1.13e-02	-9.00e-03	-7.56e-03	1.39e-02	-1.92e-03	1.90e-03
	S.D.	5.89e-03	4.09e-03	2.63e-03	8.89e-03	5.83e-03	1.50e-03
	Max.	2.03e-02	1.78e-02	1.44e-02	2.45e-02	1.22e-02	5.22e-03
$\delta T_1$ (K)	Mean	7.35e-06	-2.72e-06	-8.05e-07	4.59e-06	1.58e-06	1.23e-06
	S.D.	1.00e-04	2.46e-05	1.11e-04	1.13e-04	3.37e-05	2.94e-05
	Max.	9.39e-04	1.61e-04	1.00e-03	1.01e-03	3.77e-04	2.17e-04
$\delta q_1$ ( $\text{kg kg}^{-1}$ )	Mean	3.87e-03	-1.35e-03	3.46e-03	2.74e-03	1.95e-03	1.43e-03
	S.D.	9.81e-02	1.23e-02	1.05e-01	1.01e-01	3.30e-02	1.80e-02
	Max.	9.18e-01	7.98e-02	9.98e-01	9.28e-01	2.42e-01	1.37e-01
$\delta \ \mathbf{u}_h(10 \text{ m})\ $ ( $\text{m s}^{-1}$ )	Mean	-8.09e-04	-1.42e-04	7.63e-04	-9.75e-04	-2.10e-04	2.46e-05
	S.D.	1.05e-02	4.05e-03	1.06e-02	1.11e-02	6.11e-03	4.06e-03
	Max.	1.33e-01	6.26e-02	1.31e-01	1.47e-01	8.02e-02	6.14e-02

Table 3: Statistics for the physical variables  $u_*$ ,  $T_1$ ,  $q_1$  and  $\|\mathbf{u}_h(10 \text{ m})\|$  during a 30-day TOGA-Coare simulation carried with the LMDZ 1D model. For each variables, we show the mean, standard deviation and maximum values of the absolute errors between a referent formulation (Coare or CORE) and either the LMDZ formulation, either our explicit approximations for  $d = 2$  and  $d = 6$ .

Several remarks can be drawn from Table 3:

1. The impact of using fitted formulations instead of the referring bulk formula is at worst of the order of the uncertainty of bulk formulae itself. The difference between the outputs of a given iterative formulation and its fitted one in is smaller than the difference between the LMDZ default [Louis \(1979\)](#) formulation and the Coare and CORE iterative formulations.
2. While being very satisfying, the numerical accuracy displayed in Table 3 is not as good as what Figure 7 shows. We believe that this is due to the influence of the air moisture which is only taken into account via the virtual potential temperature in our approximations.
3. For physically realistic test cases, increasing the polynomial degree does not enhance accuracy as significantly as expected from the conclusions drawn from Figure 8a and Figure 8b.

## 5 Conclusion and perspectives

### 5.1 Sum up

Standard bulk formulae used in ocean-atmosphere coupled models have been introduced from a mathematical point of view in Section 2 along with critical comments on their numerical properties. This motivated the derivation of simple explicit approximations via polynomial functions based on the same physical principles as the original formulae. Section 3 describes a sensitivity analysis of the bulk problem thanks to Sobol’ indices, which has led to the proper building of a simple numerical approximation in Section 4. Numerical results, showing satisfying accuracy, have been presented in two different ways: first, considering bulk algorithms as a stand-alone “black boxes” (see Figure 7), second, considering their interactions with a single column atmospheric model (see Table 3).

## 5.2 Limitations

Aspects of the present study leave room for further improvement, as listed below.

1. Although the numerical accuracy of our approximations is globally very good for most of the physical configurations, situations for which there are significant differences between our approximations and the approximated iterative bulk formula might be of great importance when being incorporated into a GCM. However, our numerical results with the TOGA Coare test case have shown that our approximations are overall robust.
2. Recent bulk formulation developments aim at more and more accounting for sea state in general and wave characteristics in particular (see [Mueller and Veron 2008](#), [Donelan et al. 1993](#)). While the work presented above has ignored this source of information, our methodology is flexible enough to incorporate additional input parameters. Of course, each time a new bulk formulation or a new input parameter is considered the sensitivity analysis must be repeated since the sensitivity of the outputs to the inputs can be different.
3. The choice of the physical inputs (i.e. the velocity jump and the virtual potential temperature jump) for our approximations has been done in a somewhat “non-physical” way via a sensitivity analysis. However, other more thermodynamically meaningful variables could have been considered, eg. the moist entropy potential temperature  $\theta_s$  ([Marquet, 2011](#)). Choosing  $\theta_v$  as an appropriate temperature scale was done for the sake of simplicity since the standard bulk formulae considered here use  $\theta_v$  to diagnose stability. Once again, building approximations similar to those presented above for alternative bulk formulae using a different temperature scale is possible. For example, additional tests that have been carried out using  $\|[\theta_v]_{z_\theta}^{z_a} / \| [u_h]_{z_m}^{z_a} \|^2$ , which is proportional to the bulk Richardson number, as a second input (instead of  $\theta_v$ ) gave very similar results to those presented above. However with this choice the assumptions behind the Sobol’ analysis are no longer satisfied since input parameters are intrinsically correlated.
4. The LMDZ implementation of the TOGA-Coare 1D testcase used in Section 4.4 does not seem to be as sensitive to turbulent fluxes as expected. This could be explained by lateral forcing terms constraining the physics of a 1D column.

## 5.3 Perspectives

The FORTRAN90 routines used to derive the approximations presented in this study are available upon request. Our main motivation for building these approximations was to express complicated iterative bulk formulae with mathematically much simpler and differentiable forms. Since the physical principles behind our approximations are the same as the bulk formulae we should expect the same amount of bias and uncertainties, unless non-differentiabilities in the standard bulk formulation are more harmful than they are thought to be. On a wider perspective, we believe that having a mathematically explicit form representative of the behavior of bulk formulae is a strong requirement for the numerical study by applied mathematicians of coupling algorithms used in earth system models. Nowadays there is a serious gap between the type of coupled problems that can be thoroughly analyzed from a mathematical point of view, and the level of complexity reached by realistic coupled models including physical parameterizations. In our opinion the reduction of this gap may require the development of new mathematical tools, but more surely requires the derivation of convenient mathematical formulations mimicking the behavior of the full physical parameterizations as closely as possible.

Some aspects of the present work may also be useful for the calibration of bulk formulae with measurements. First, in current practices all available data have the same weight when trying to fit them,

the use of PDFs as done in Section 3 could improve the quality of the fit for particular physical configurations. Second, assuming that sufficient data are available, application of the sensitivity analysis (through Sobol' indices) on turbulent flux measurements could be done. It could then be interesting to compare the Sobol' indices obtained from bulk formulations with the ones obtained from measurements. Any significant mismatch between the two would indicate that the bulk formulations do not properly represent the influence of physical inputs on the value of turbulent fluxes.

## Acknowledgements

The authors would like to thank the anonymous reviewers for their valuable input, which has considerably helped improve this paper. The authors acknowledge the support of the French national research agency (ANR) through contract ANR-16-CE01-0007. F. Lemarié acknowledges the support of Mercator-Océan through PPR SIMBAD and CMEMS ALBATROS projects.

## References

- Andreas, E. L., Horst, T. W., Grachev, A. A., Persson, P. O. G., Fairall, C. W., Guest, P. S., and Jordan, R. E. (2010). Parametrizing turbulent exchange over summer sea ice and the marginal ice zone. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 136:927–943.
- Bao, J., Wilczak, J., Choi, J., and Kantha, L. (2000). Numerical simulations of air-sea interaction under high wind conditions using a coupled model: A study of hurricane development. *Mon. Weather Rev.*, 128(7):2190–2210.
- Beljaars, A., Dutra, E., Balsamo, G., and Lemarié, F. (2017). On the numerical stability of surface-atmosphere coupling in weather and climate models. *Geosc. Model Dev.*, 10(2):977–989.
- Beljaars, A. C. M. (1995). The parametrization of surface fluxes in large-scale models under free convection. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 121(522):255–270.
- Brodeau, L., Barnier, B., Gulev, S. K., and Woods, C. (2017). Climatologically significant effects of some approximations in the bulk parameterizations of turbulent air-sea fluxes. *J. of Phys. Oceanogr.*, 47(1):5–28.
- Bye, J. A. and Jenkins, A. D. (2006). Drag coefficient reduction at very high wind speeds. *J. of Geophys. Res.*, 111(C3).
- Chastaing, G., Prieur, C., and Gamboa, F. (2014). Generalized Sobol sensitivity indices for dependent variables: numerical methods. *J. Stat. Comp. Simu.*, pages 1–28.
- Connors, J. and Ganis, B. (2011). Stability of algorithms for a two domain natural convection problem and observed model uncertainty. *Comp. Geosc.*, 15(3):509–527.
- Dee, D., Uppala, S., Simmons, A., Berrisford, P., Poli, P., Kobayashi, S., Andrae, U., Balmaseda, M., Balsamo, G., Bauer, P., et al. (2011). The ERA-Interim reanalysis: Configuration and performance of the data assimilation system. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 137(656):553–597.
- Donelan, M. A., Dobson, F. W., Smith, S. D., and Anderson, R. J. (1993). On the dependence of sea surface roughness on wave development. *J. of Phys. Oceanogr.*, 23(9):2143–2149.
- Edson, J. B., Jampana, V., Weller, R. A., Bigorre, S. P., Plueddemann, A. J., Fairall, C. W., Miller, S. D., Mahrt, L., Vickers, D., and Hershbach, H. (2013). On the exchange of momentum over the open ocean. *J. of Phys. Oceanogr.*, 43(8):1589–1610.

- Godfrey, J. S. and Beljaars, A. C. M. (1991). On the turbulent fluxes of buoyancy, heat and moisture at the air-sea interface at low wind speeds. *J. of Geophys. Res. : Oceans*, 96(C12):22043–22048.
- Grachev, A., Fairall, C., and Bradley, E. (2000). Convective profile constants revisited. *blm*, 94(3):495–515.
- Gross, M., Wan, H., Rasch, P. J., Caldwell, P. M., Williamson, D. L., Klocke, D., Jablonowski, C., Thatcher, D. R., Wood, N., Cullen, M., Beare, B., Willett, M., Lemarié, F., Blayo, E., Malardel, S., Termonia, P., Gassmann, A., Lauritzen, P. H., Johansen, H., Zarzycki, C. M., Sakaguchi, K., and Leung, R. (2017). Recent progress and review of Physics Dynamics Coupling in geophysical models. submitted to *Reviews of Geophysics*.
- Högström, U. (1988). Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface layer: a re-evaluation. *Boundary-layer Meteorol.*, 42:55–78.
- Hourdin, F., Musat, I., Bony, S., Braconnot, P., Codron, F., Dufresne, J.-L., Fairhead, L., Filiberti, M.-A., Friedlingstein, P., Grandpeix, J.-Y., Krinner, G., Levan, P., Li, Z.-X., and Lott, F. (2006). The LMDZ4 general circulation model: climate performance and sensitivity to parametrized physics with emphasis on tropical convection. *Climate Dynamics*, 19:3445–3482.
- Iooss, B. et al. (2015). Package ‘sensitivity’. Technical report, The Comprehensive R Archive Network.
- Janiskov, M., Thépaut, J.-N., and Geleyn, J.-F. (1999). Simplified and regular physical parameterizations for incremental four-dimensional variational assimilation. *Mon. Weather Rev.*, 127(1):26–45.
- Kara, A. B., Hurlburt, H. E., and Wallcraft, A. J. (2005). Stability-dependent exchange coefficients for air-sea fluxes. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 22(7):1080–1094.
- Kondo, J. (1975). Air-sea bulk transfer coefficients in diabatic conditions. *Boundary-layer Meteorol.*, 9(1):91–112.
- Kudryavtsev, V., Chapron, B., and Makin, V. (2014). Impact of wind waves on the air-sea fluxes: A coupled model. *J. of Geophys. Res.*, 119(2):1217–1236.
- Large, W. B. (2006). Surface fluxes for practitioners of global ocean data assimilation. In Chassignet, E. P. and Verron, J., editors, *Ocean Weather Forecasting. An Integrated View of Oceanography*, chapter 9, pages 229–270. Springer.
- Lemarié, F., Blayo, E., and Debreu, L. (2015). Analysis of ocean-atmosphere coupling algorithms: Consistency and stability. *Procedia Computer Science*, 51(0):2066 – 2075.
- Louis, J.-F. (1979). A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. *Boundary-layer Meteorol.*, 17(2):187–202.
- Marquet, P. (2011). Definition of a moist entropy potential temperature: application to fire-i data flights. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 137(656):768–791.
- Monin, A. and Obukhov, A. (1954). Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere. *Contrib. Geophys. Inst. Acad. Sciences, USSR*, 1(163):e187.
- Mueller, J. A. and Veron, F. (2008). Nonlinear formulation of the bulk surface stress over breaking waves: Feedback mechanisms from air-flow separation. *Boundary-layer Meteorol.*, 130(1):117.
- Pagowski, M. (2006). An iterative solution of fluxprofile relationships in the surface layer for regional model applications. *Atmosph. Env.*, 40(35):6892 – 6897.
- Powell, M. D., Vickery, P. J., and Reinhold, T. A. (2003). Reduced drag coefficient for high wind speeds in tropical cyclones. *Nature*, 422(6929):279–283.

- Smith, S. D. (1988). Coefficients for sea surface wind stress, heat flux, and wind profiles as a function of wind speed and temperature. *J. of Geophys. Res.*, 93(C12):15467–15472.
- Sobol, I. M. (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Math. Model. and Comp. Experiments*, 1(4):407–414.
- Tissot, J.-Y. and Prieur, C. (2015). A randomized orthogonal array-based procedure for the estimation of first-and second-order Sobol' indices. *J. Stat. Comp. Simu.*, 85(7):1358–1381.
- Webster, P. J. and Lukas, R. (1992). Toga coare: The coupled oceanatmosphere response experiment. *Bulletin Amer. Meteorol. Soc.*, 73(9):1377–1416.

### 3.4 Incorporation de formulations bulk au sein d’algorithmes de couplage

Maintenant que les paramétrisations CLS ont été introduites (voir le chapitre 2), et que les formulations bulk ont été présentées, cette section a pour objectif d’incorporer les formulations bulk au sein d’algorithmes de couplage. Plus précisément, on cherche à exploiter les routines de formulations bulk dans le but d’obtenir des profils de solution océan-CLS-atmosphère cohérents, à l’image de ce qui a été décrit par la condition (2.67), et schématisé par la figure 2.12b. À la fin du chapitre 2, seule l’énonciation d’une condition de cohérence était possible. Le travail entrepris au cours du présent chapitre est une étape intermédiaire indispensable afin de définir des mécanismes permettant d’atteindre cette condition.

Telles qu’elles ont été présentées jusqu’à présent, les formulations bulk classiques permettent d’éliminer les 6 degrés de liberté (longueurs de rugosité et échelles de friction atmosphériques) restant dans le problème de fermeture des paramétrisations CLS. Ces formulations classiques reposaient en particulier sur la connaissance de valeurs dites « de surface » pour les quantités d’intérêt. Naturellement, la surface de l’océan n’étant pas couverte par les domaines de calculs, dans les faits, ces valeurs de surface sont inconnues ; elles doivent être elles aussi extrapolées à partir des paramétrisations CLS.

Il n’y a aucune raison pour que les formulations bulks classiques mènent à des profils CLS vérifiant la condition de cohérence (2.67). Le but de cette section est de définir des algorithmes de couplage, inspirés des algorithmes bulk et s’y substituant, dont l’objectif est l’obtention d’échelles de friction atmosphériques à partir desquelles l’ensemble des degrés de liberté paramétrisant la CLS puissent être générés, et de façon à ce que les profils paramétrisés en conséquence vérifient la condition de cohérence (2.67).

Les conditions de cohérence du couplage sont liées aux paramétrisations présentes dans la CLS, qui peuvent être générées à partir des échelles de friction atmosphériques seules. Les formulations bulk constituant l’outil numérique permettant l’obtention de ces échelles, elles seront alors fortement impliquées dans la mise en place de couplage cohérent.

Le § 3.4.1 s’intéresse à la notion de surface, et apporte un certain nombre de précisions quant à la distinction entre la surface de l’océan et le niveau appelé de « surface bulk ». Le § 3.4.2 s’intéresse à l’incorporation des paramétrisations SCVA au sein des algorithmes bulk ; enfin, le § 3.4.3, à celle de la CLSO (incluant la CLSO-MO et la SCVO). Ces incorporations incrémentales ont pour but de définir un nouveau type d’algorithmes, incluant l’ensemble des paramétrisations CLS.

#### 3.4.1 Ambiguïtés autour de la notion de surface

Dans la littérature,  $(u_{h,S_b}, \theta_{S_b}, q_{S_b})$  sont quasi-systématiquement considérées comme des *valeurs de surface*, c’est à dire comme étant les valeurs des variables  $u_h, \theta, q$  au niveau  $z = 0$ . L’ensemble de nos travaux reposant sur l’hypothèse que la surface de l’océan est plate et rigide, physiquement, la notion de surface ne fait pas débat.

Cette dénomination présente cependant quelques ambiguïtés, d’où notre préférence pour qualifier ces valeurs comme étant de *surface bulk*. En effet, le système de fermeture (3.2) correspond à l’intégration de groupes sans dimension issue de la théorie des similitudes de Monin-Obukhov.

Une autre façon d'écrire (3.2) est :

$$|u_h(z_a^1) - u_{h,S_b}| = \frac{u_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m(\zeta_a) \right] = \frac{u_a^*}{\kappa} \int_{z_u^{a,r}}^{z_a^1} \frac{\phi_m(z/L_O^a)}{z} dz \quad (3.19a)$$

$$\theta(z_a^1) - \theta_{S_b} = \frac{\theta_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) \right] = \frac{\theta_a^*}{\kappa} \int_{z_\theta^{a,r}}^{z_a^1} \frac{\phi_h(z/L_O^a)}{z} dz \quad (3.19b)$$

$$q(z_a^1) - q_{S_b} = \frac{q_a^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_q^{a,r}} \right) - \psi_h(\zeta_a) \right] = \frac{q_a^*}{\kappa} \int_{z_q^{a,r}}^{z_a^1} \frac{\phi_h(z/L_O^a)}{z} dz \quad (3.19c)$$

où  $L_O^a$  est la longueur d'Obukhov atmosphérique, définie par (2.22). (3.19) met en exergue le fait que la fermeture du problème bulk correspond à déterminer les échelles de friction atmosphériques qui dimensionneraient les profils de solutions issus de la théorie de Monin-Obukhov de façon à ce qu'en les intégrant de  $z_a^1$  vers la surface ( $z \searrow 0$ ), ils atteignent leurs valeurs de « surface bulk » aux niveaux de leurs longueurs de rugosité respectives. Cela se traduit simplement par :

$$u_{h,S_b} = u_h(z_u^{a,r}) \quad (3.20a)$$

$$\theta_{S_b} = \theta(z_\theta^{a,r}) \quad (3.20b)$$

$$q_{S_b} = q(z_q^{a,r}) \quad (3.20c)$$

Ainsi, si l'on suppose que la théorie de Monin-Obukhov est valable pour chacune des quantités d'intérêt sur  $]z_x^{a,r}; z_a^1[$ , alors les formulations bulk sont définies de façon à ce que les valeurs de surface bulk ne soient pas les valeurs à la surface, mais les valeurs aux longueurs de rugosité respectives.

Dans la littérature, les valeurs de surface bulk sont très souvent assimilées à des valeurs de surface. Si la théorie de Monin-Obukhov est bien valable jusqu'à  $z_x^{a,r}$ , alors cette assimilation est une erreur. Cela correspondrait à supposer que les solutions sont constantes sur leurs sous-couches visqueuses, ce qui, entre autres, briserait la continuité de leurs gradients aux niveaux des longueurs de rugosité. C'est ce qu'on appellera dans la suite « cas 1 ».

Cependant, on peut aussi considérer un « cas 2 », pour lequel le domaine de validité de la théorie de Monin-Obukhov ne se rend pas jusqu'au niveau des longueurs de rugosité, mais jusqu'à un autre niveau,  $z_x^{a,MO} > z_x^{a,r}$   $x \in \{u, \theta, q\}$ .  $z_x^{a,MO}$  correspond à l'altitude minimale jusqu'à laquelle les phénomènes moléculaires peuvent être négligés ; physiquement, cela correspond à étendre la sous-couche visqueuse de la quantité  $X$  sur l'intervalle  $]0; z_x^{a,MO}[ \supseteq ]0; z_x^{a,r}[$ .

Dans ce cas, il est alors possible, en prenant en compte les schémas de paramétrisations SCV, de définir les formulations bulks de façon à ce que les valeurs de surface bulk correspondent effectivement aux valeurs de surface  $z = 0$ . Toutefois, entreprendre cette démarche revient à supposer que même sur l'intervalle  $]z_x^{a,r}; z_a^1[$ , les profils ne sont pas donnés par la théorie de Monin-Obukhov.

Le dilemme entre ces deux cas peut se synthétiser ainsi :

- (Cas 1) La théorie de Monin-Obukhov donne les profils de solution sur les intervalles  $]z_x^{a,r}; z_a^1[$ . En contrepartie, la prise en compte (et donc, la paramétrisation) des SCV est nécessaire, puisque les profils type Monin-Obukhov ne peuvent pas permettre de trouver la valeur de surface.

(Cas 2) La théorie de Monin-Obukhov n'est vérifiée que sur un intervalle plus petit que  $]z_x^{a,r}; z_a^1[$ . Par conséquent, les profils de solution sont inconnus sur la CLSA. En revanche, on sait qu'ils sont définis de façon à ce que leur valeur de surface correspond à la valeur d'un profil *fictif*, que donnerait la théorie de Monin-Obukhov, pris en  $z = z_x^{a,r} > 0$ .

La figure 3.13 offre une représentation schématique de profils de solution dans les deux cas décrits ci-dessus.

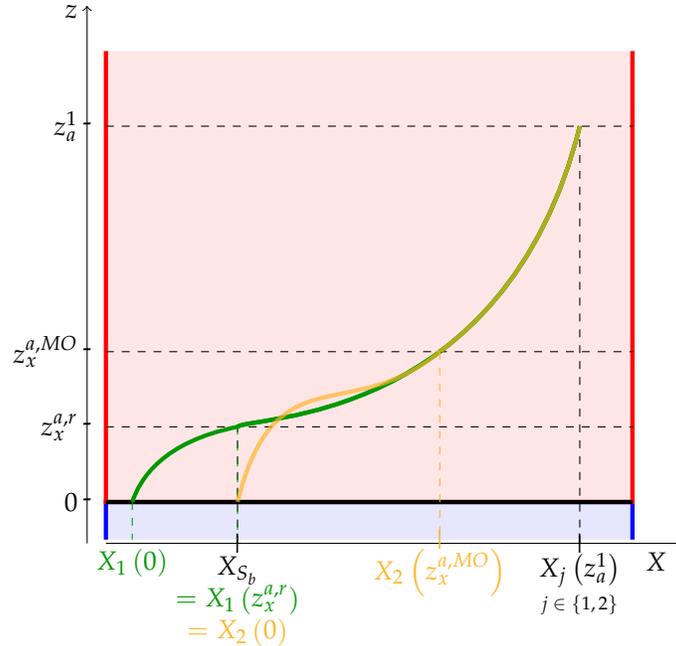


FIGURE 3.13 – Représentation schématique des deux stratégies pour dessiner le profil d'une quantité d'intérêt  $X$  sur la CLSA. Les deux profils sont les mêmes pour  $z \in ]z_x^{a,MO}; z_a^1[$ . Le profil  $X_1$ , dessiné en **vert opaque**, correspond à la configuration couramment utilisée, pour laquelle le domaine de validité de la théorie MO descend jusqu'au niveau de la longueur de rugosité. Par conséquent, la réelle valeur de surface est différente de la valeur de surface bulk (i.e.,  $X_1(0) \neq X_{S_b}$ ), et dépend de la façon avec laquelle la SCV est paramétrisée. Le profil  $X_2$ , dessiné en **ocre transparent**, correspond au cas où l'on suppose que la SCV n'est plus délimitée par la longueur de rugosité, mais par  $z_x^{a,MO}$ . Dans ce cas, il est possible de paramétriser la SCV de façon à ce que  $X_{S_b} = X_2(0)$ . Le schéma ci-dessus utilise des échelles arbitraires et n'est qu'à vocation didactique.

Dans la suite, on se placera dans le cas 1, c'est à dire qu'on supposera que la théorie MO est valable jusqu'aux longueurs de rugosité, et donc que la valeur de « surface bulk » n'est pas égale à la valeur de surface. Nous tenons à préciser que cette démarche *ne constitue qu'un choix* pour prolonger l'exposé.

Sa principale motivation est qu'il permet de voir la prise en compte des SCV comme une extension spatiale des paramétrisations issues de Monin-Obukhov ; le choix contraire, qui est *a priori* plus justifié, est beaucoup plus engageant, puisqu'il implique de changer les schémas de para-

métrisation dans la CLS « Monin-Obukhov » et de déterminer les  $(z_x^{a,MO})$  à l'aide de nouveaux schémas de paramétrisations.

### 3.4.2 Prise en compte de la SCV dans les formulations bulk

Les formulations bulk classiques nécessitent les valeurs des solutions en  $z = z_a^r$  pour pouvoir être implémentées. En d'autres termes, dans (3.2), pour les formulation bulk classiques, les sauts sont pris entre  $z = z_x^{a,r}$  et  $z = z_a^1$ , ce qui constitue un non-sens (et correspond à l'ambiguïté soulevée à la fin du § 3.1.1), puisque ce sont précisément les formulations bulk qui permettent de déterminer les niveaux  $(z_x^{a,r})$ . Les formulations bulk classiques ignorent les sous-couches visqueuses ; cette sous-section a vocation à les y inclure, et par conséquent, à lever l'ambiguïté autour de la notion de saut et de surface.

On suppose que l'information fournie à la formulation bulk est  $X(0)$ , où  $X \in \{u, \theta, q\}$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'adapter les formulations bulk en vue d'obtenir un triplet de rugosité permettant d'extrapoler les solutions de  $z_a^1$  jusqu'à  $z = 0$ , incluant donc la paramétrisation de sous-couche visqueuse.

Une façon alternative pour mettre en œuvre la même chose serait d'extrapoler la solution de  $z = 0$  jusqu'à sa longueur de rugosité  $z_x^{a,r}$ , puis d'appliquer la formulation bulk « classique » en considérant  $X_{S,b} = X(z_x^{a,r})$ . Puisque la paramétrisation des SCV est imbriqué dans celle des CLS, cette méthode n'est pas souhaitable. La stratégie adoptée intègre les paramétrisations SCV au sein des formulations bulk, mettant à jour la valeur  $X_{S_b}$  à chaque itération bulk.

L'équation de fermeture classique des formulations bulk<sup>2</sup> se traduit par :

$$\frac{x_a^*}{\llbracket x \rrbracket_{z_x^{a,r}}^{z_a^1}} = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_a^1}{z_x^{a,r}}\right) - \psi_y(\zeta_a)} \quad (3.21)$$

où on utilise toujours  $y = m$  quand  $x = u$  et  $y = h$  quand  $x \in \{\theta, q\}$ .

(3.21) correspond à l'intégration du groupe sans dimension  $\frac{\phi_x(z/L_0^a)}{z}$  sur l'intervalle  $]0; z_a^1[$ . La fonction de stabilité  $\phi_x$  est bien intégrée de 0 à  $z_a^1$  (cf. Paulson, 1970), mais la partie en  $1/z$  n'est intégrée qu'à partir de  $z_x^{a,r}$ . Il ne s'agit pas donc mathématiquement d'une véritable intégration du groupe sans dimension (2.26).

Négliger la présence d'une SCV revient à supposer  $X(0) = X(z_x^{a,r})$ , et donc à considérer  $\llbracket X \rrbracket_{z_x^{a,r}}^{z_a^1} = \llbracket X \rrbracket_0^{z_a^1}$  dans (3.21). En un sens, cela est plutôt « confortable », puisque rappelons que  $z_x^{a,r}$  étant elle-même donnée par les formulations bulk, il n'est pas concevable de donner en entrée des formulations la valeur  $\llbracket x \rrbracket_{z_x^{a,r}}^{z_a^1}$ .

La même équation incluant les SCV utilise la coordonnée visqueuse  $\ell_x^a$  (cf. § 2.3.2). On aura alors :

2. À l'exception notable de la formulation ECMWF, cf. (A.28).

$$\begin{aligned} \frac{x_a^*}{[[x]]_0^{z_a^1}} &= \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_a^1}{\ell_x^a(0)}\right) - \psi_x(\zeta_a)} \\ &= \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_a^1}{z_x^{a,r}}\right) + \ln\left(\frac{z_x^{a,r}}{\ell_x^a(0)}\right) - \psi_x(\zeta_a)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le terme additionnel dans (3.22) réduit la valeur de  $x_a^*$  par rapport aux formulations classiques où les SCV sont négligées. Cette réduction permet d'obtenir une valeur de  $x_a^*$  dimensionnant à la fois les profils MO et les profils SCV de façon à ce que ces paramétrisations atteignent bien la valeur de surface en  $z = 0$ , incluant la traversée de la SCV.

### Un exemple numérique : bulk adaptée à la paramétrisation SCV Liu *et al.* (1979)

On a vu au chapitre 2 un exemple de paramétrisation SCV rudimentaire, issue de Liu *et al.* (1979). Celle-ci préconisait la forme suivante pour  $(\ell_x^{a,r})$  (cf. (2.46)) :

$$\forall z \in ]0; z_x^{a,r}[ , \ell_x^a(z) = \ell_x^a(z_x^{a,r}) \exp\left[-\kappa \frac{\delta x_a^{scv}}{x_a^*} \exp\left(\frac{z}{z_x^{scv,a}}\right) \frac{1}{\phi_x(\zeta_a)} \frac{z_x^{a,r} - z}{z_x^{scv,a}}\right] \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (3.23)$$

où les  $(\delta x_a^{scv})$  sont donnés par (2.38) et  $z_x^{scv,a}$  par (2.36). On obtient ainsi les valeurs suivantes pour  $\ell_x^a(0)$  :

$$\ell_x^a(0) = z_x^{a,r} \exp\left[-\kappa \frac{\delta x_a^{scv,a}}{x_a^*} \frac{1}{\phi_x(\zeta_a)} \frac{z_x^{a,r}}{z_x^{scv,a}}\right] \quad (3.24)$$

Si les paramètres SCVA  $(\delta x_a^{scv})$  et  $z_x^{scv,a}$  sont donnés de façon à obtenir une connection  $\mathcal{C}^1$  avec les profils CLSA-MO en  $z_x^{a,r}$  (i.e., sont bien donnés par (2.38) et (2.36)), alors (3.24) se réduit à cette simple forme :

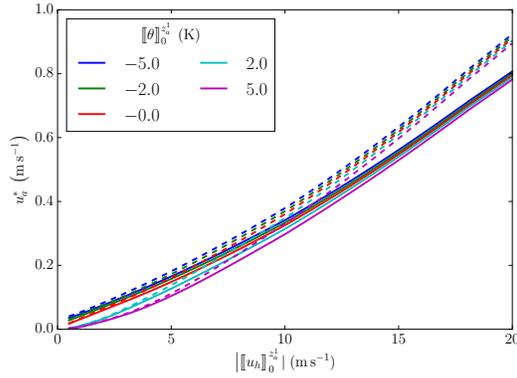
$$\ell_x^a(0) = \frac{z_x^{a,r}}{e} \quad (3.25)$$

On obtient alors cette nouvelle équation de fermeture pour les formulations bulk :

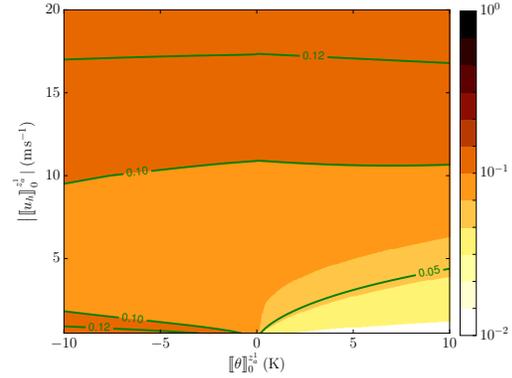
$$\frac{x_{a,ws cv}^*}{[[x]]_0^{z_a^1}} = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_a^1}{z_x^{a,r}}\right) + 1 - \psi_x(\zeta_a)} \quad (3.26)$$

Ce qui diffère de la fermeture classique des formulations par le terme +1 au dénominateur du membre de droite de (3.26). Naturellement, les valeurs des échelles de friction s'en voient modifiées.

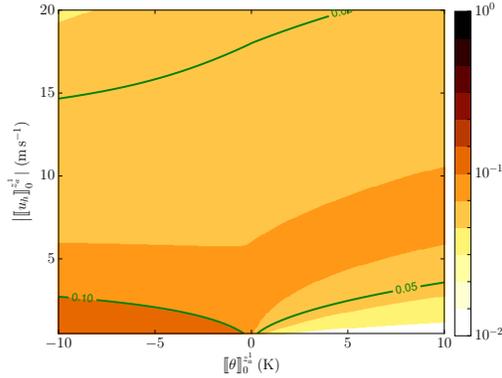
La figure 3.14 montre l'impact sur  $u_a^*$  qu'a la prise en compte des SCV selon le mode décrit par (3.26), par rapport à une formulation bulk classique. On remarque que bien que celui-ci soit réduit, il est néanmoins perceptible, notamment sur la variable  $u_a^*$  dans des cas de vents forts (cf. la figure 3.14b). La figure 3.15 représente un certain nombre de profils de solutions issus de la formulation COARE, suivant que l'on y inclue ou non un schéma de paramétrisation SCVA ; on constate que cette incorporation, théoriquement nécessaire, peut aussi avoir des répercussions numériques non négligeables.



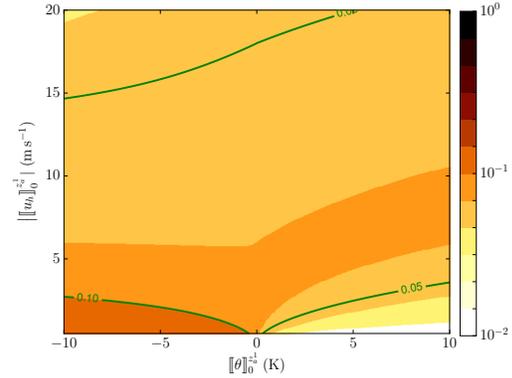
(a)  $u_{a,wscv}^*$  avec prise en compte de la SCV (nouvelle formulation (3.26), dessin en traits pleins) ou  $u_a^*$ , sans prise en compte de la SCV (ancienne formulation (3.2), dessin en traits pointillés).



(b)  $\frac{|u_{a,wscv}^* - u_a^*|}{u_a^*}$



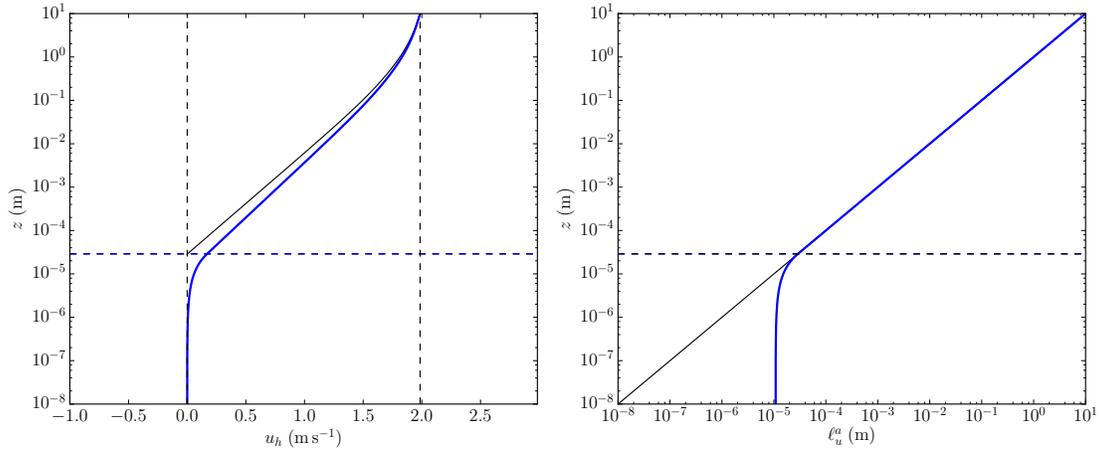
(c)  $\frac{|\theta_{a,wscv}^* - \theta_a^*|}{|\theta_a^*|}$



(d)  $\frac{|q_{a,wscv}^* - q_a^*|}{q_a^*}$

FIGURE 3.14 – Étude numérique de l'impact de la prise en compte de la paramétrisation SCV (2.35) sur les formulations bulks, en substituant l'équation de fermeture classique (3.2) par (3.26).

(a) représente  $u_a^*$  comme fonction de  $\|u_h\|_0^z$ , selon que l'on prenne ou non en compte la SCV, pour quelques valeurs de  $[[\theta]]_0^z$ . Les trois cartes de couleurs (b), (c) et (d) représentent les erreurs relatives entre les échelles de friction (respectivement  $u_a^*$ ,  $\theta_a^*$  et  $q_a^*$ ) selon que la SCV ait été prise en compte dans la formulation bulk ou non.



$$(a) \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right| = 2 \text{ m s}^{-1}, \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} = -5 \text{ K}.$$

À l'observation de la figure 3.14, se rappeler que les flux turbulents prescrits aux modèles sont proportionnels à des produits de deux échelles de friction permet de tirer la conclusion que l'incorporation de paramétrisations SCVA ne peut pas toujours être assimilée à une préoccupation purement théorique.

La figure 3.15 représente un certain nombre de profils de solutions paramétrisées sur la CLSA, selon que la SCV y ait été prise en compte ou non. On remarque que la prise en compte de la SCV au sein des bulks permet bien d'obtenir des échelles de friction convergées pour lesquelles les profils de solution sont réguliers, et ce jusqu'à la surface. On note aussi, comme l'avait déjà montré la figure 3.13, qu'en se plaçant dans le cas où la théorie MO est supposée valable jusqu'aux longueurs de rugosité, alors la valeur de surface  $z = 0$  de la solution incluant la SCV n'est pas égale à sa valeur en  $z_x^{a,r}$ .

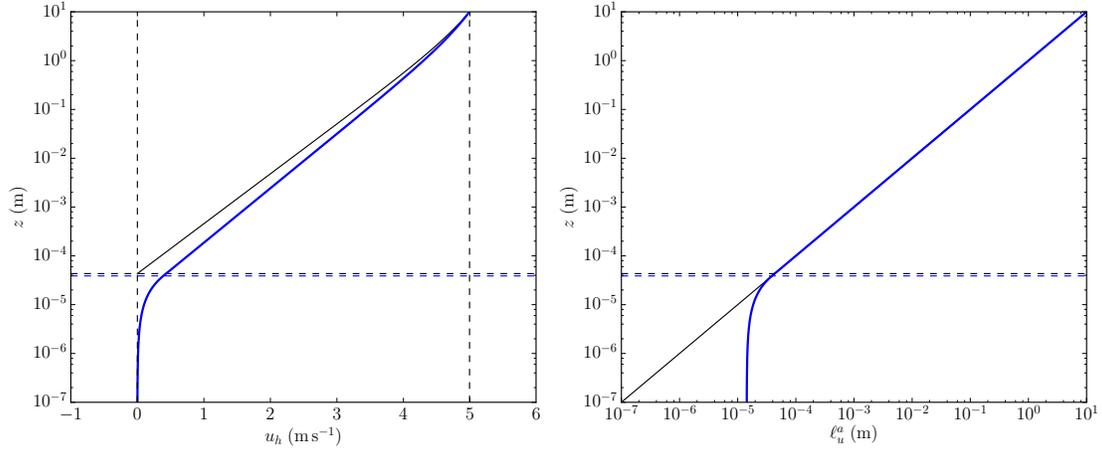
### Commentaire sur le caractère constant de $L_O^a$ par rapport à $z$

La longueur d'Obukhov,  $L_O^a$ , introduite au chapitre 2, a été supposée constante, et caractérisée comme étant l'échelle de longueur permettant la prise en compte de la stratification de la CLS. La forme (2.21) suggère que  $L_O^a$  dépend de  $z_a^1$ , niveau inférieur du sous-domaine océan.

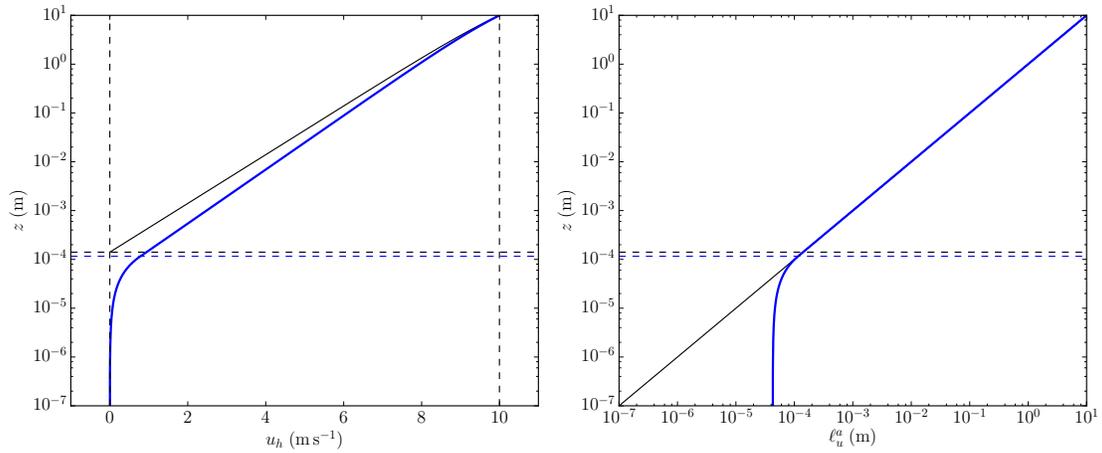
En toute rigueur, la longueur d'Obukhov devrait être la même quel que soit le niveau où on se situe, tant qu'on se situe dans la région de validité de la théorie de Monin-Obukhov. La vérification de cette hypothèse nécessiterait de connaître les formulations bulk, mécanismes de détermination des échelles de friction; elle ne pouvait donc pas être entreprise au chapitre 2. Cela étant maintenant possible, le test suivant a été mené :

- (i) Pour des valeurs de  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}$  et  $\llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1}$  données (on suppose qu'on se place en atmosphère sèche), et au niveau de référence  $z_a^1 = 10 \text{ m}$ , on calcule les échelles de friction; on peut alors en déduire  $L_O^a$ .
- (ii) À partir de ces valeurs, on en déduit les profils de solution pour des hauteurs  $z_a^2$  autour de  $z_a^1$ , où la théorie de Monin-Obukhov est supposée valable : typiquement,  $z_a^2 \in ]2 \text{ m}; 40 \text{ m}[$ .

3.4. INCORPORATION DE FORMULATIONS BULK AU SEIN D'ALGORITHMES DE COUPLAGE121



(b)  $\left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right| = 5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} = -2 \text{ K}$ .



(c)  $\left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right| = 10 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} = +2 \text{ K}$ .

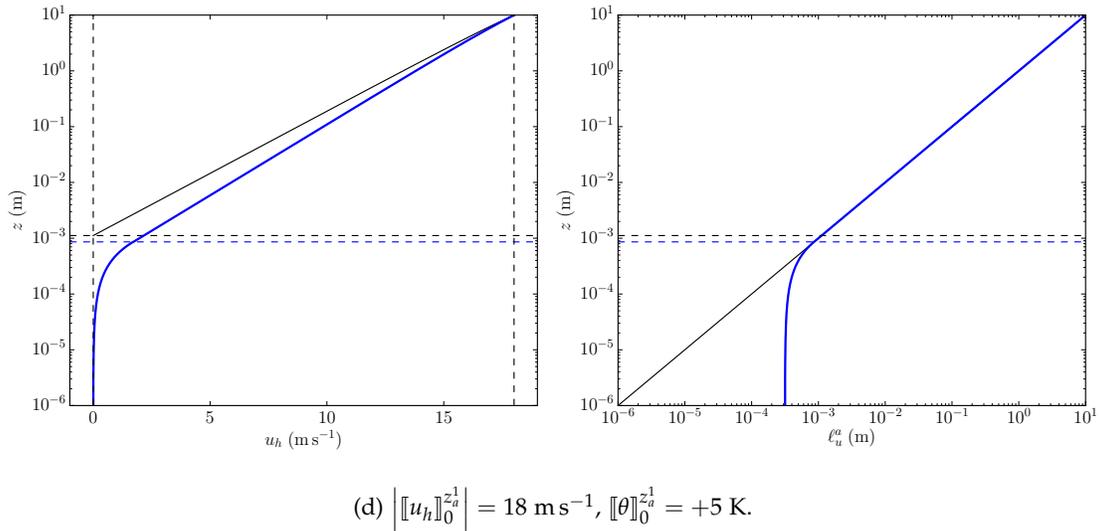
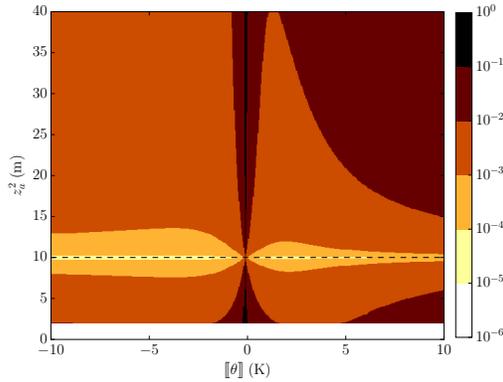


FIGURE 3.15 – Profils de solution sur la CLS (i.e., de 0 à  $z_a^1 = 10$  m), pour  $u_h$ , en ayant fixé l’angle  $\theta_\tau = 0^\circ$  et la vitesse de courant de surface  $u_h(0^+) = 0 \text{ m s}^{-1}$ , pour différentes valeurs de  $\left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right|$  et de  $\llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1}$ , selon que la paramétrisation SCV ait été incluse ou pas. Chaque sous-figure correspond à un couple  $\left( \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right|, \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \right)$  différent, et comporte deux cadrans : dans le cadran de gauche, on représente  $u_h$  sans paramétrisation SCV (trait noir fin), et celle avec une paramétrisation SCV (2.35) (trait bleu grossier). Sur le cadran de droite, on représente la fonction  $l_u^a$  (prolongée par l’identité en dehors de la SCV) en trait bleu, et la fonction identité en trait noir fin. Les traits pointillés horizontaux donnent les niveaux des longueurs de rugosité, suivant qu’on ait pris en compte ou non la SCV, toujours en suivant le même code de couleur.

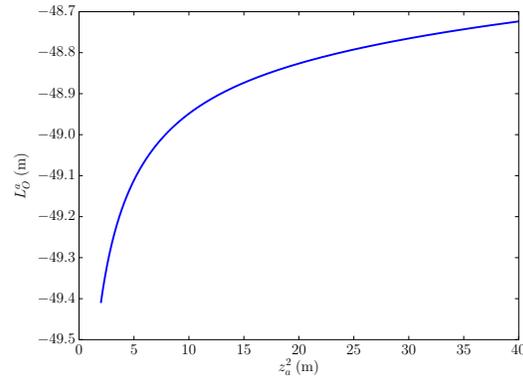
- (iii) On recalcule, à l'aide d'une formulation bulk, les échelles de friction et la longueur d'Obukhov atmosphérique, à chaque altitude  $z_a^2$ . Ces grandeurs devraient être constantes de  $z$ .

La figure 3.16 présente les résultats numériques obtenus, pour de nombreuses valeurs de  $[\theta]_0^{z_a^1}$  et  $[u_h]_0^{z_a^1} = 6 \text{ ms}^{-1}$ , en utilisant la formulation COARE. On y représente les erreurs pour les ré-évaluations de la longueur d'Obukhov, ainsi que des échelles de friction  $u_a^*$  et  $\theta_a^*$ , à des niveaux d'altitude différents, selon le procédé décrit ci-dessus.

On y constate que ces grandeurs présentent des variations de l'ordre de quelques pourcents lorsqu'elles sont ré-évaluées à différentes altitudes. Bien que cet ordre de grandeur soit petit par rapport, par exemple, aux erreurs de mesures de flux turbulents, ces différences suivant l'altitude signifient qu'au niveau continu, la formulation bulk utilisée n'est pas rigoureusement cohérente avec les hypothèses de base de la théorie de Monin-Obukhov. Les mêmes conclusions sont valables en utilisant les autres formulations bulk classiques.



(a) Erreur relative sur  $L_O^a$ .



(b)  $L_O^a$  en fonction de  $z$  pour  $[\theta]_0^{z_a^1} = -2 \text{ K}$ .

### Commentaire sur la prise en compte de la stratification dans les SCV

En toute rigueur, si l'on considère que l'équation de fermeture des formulations bulk est une intégration entre  $z_x^{a,r}$  et  $z_a^1$ , on devrait avoir :

$$\frac{x_a^*}{[\text{X}]_{z_x^{a,r}}^{z_a^1}} = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_a^1}{z_x^{a,r}}\right) - \underbrace{\int_{z_x^{a,r}}^{z_a^1} \frac{1 - \phi_x(z/L_O^a)}{z} dz}_{=\psi_x(\zeta_a) - \psi_x\left(\zeta_a \frac{z_x^{a,r}}{z_a^1}\right)}} \quad (3.27a)$$

$$\frac{x_a^*}{[\text{X}]_0^{z_x^{a,r}}} = \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_x^{a,r}}{\ell_x(0)}\right) - \underbrace{\int_0^{z_x^{a,r}} \frac{1 - \phi_x(z/L_O^a)}{z} dz}_{=\psi_x\left(\zeta_a \frac{z_x^{a,r}}{z_a^1}\right)}} \quad (3.27b)$$

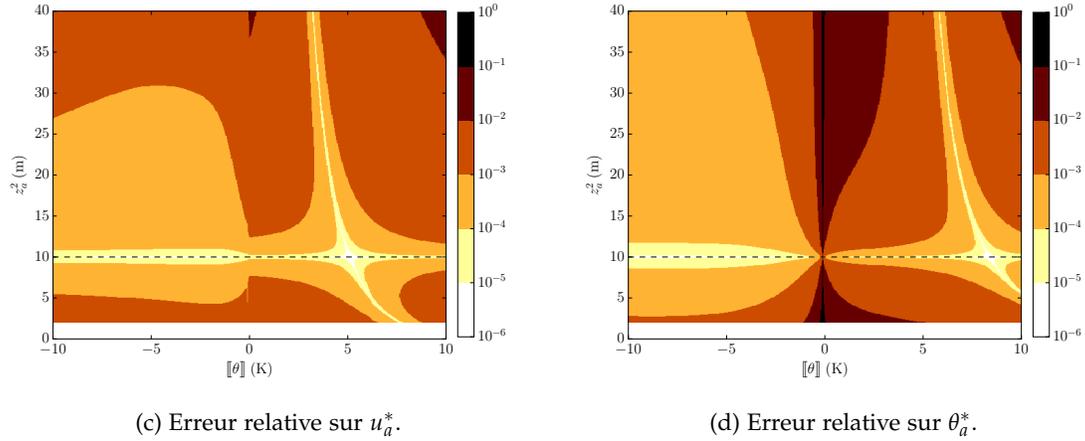


FIGURE 3.16 – Test concernant le caractère constant de la longueur d’Obukhov par rapport à  $z$ . Les carets de couleur représentent les erreurs relatives par rapport à la référence prise à  $z_a^1 = 10$  m. Si la formulation bulk utilisée était rigoureusement cohérente avec la théorie de Monin-Obukhov, alors cette erreur devrait être nulle, et, sur (b), la grandeur  $L_O^a$  constante.

(3.27a) correspond à une équation de fermeture sur la CLSA-MO ; l’équation de fermeture de la formulation ECMWF est explicitée de cette manière. Cela est dû au fait qu’elle est conçue pour être valable même lorsque  $z_x^{a,r} \lesssim z_a^1$  (typiquement, au-dessus de surfaces continentales). Dans le cas d’une surface océanique, on aura toujours  $z_x^{a,r} \ll z_a^1$ . La prise en compte de la stabilité dans les SCV repose sur l’approximation suivante :

$$\frac{x_a^*}{[\mathbb{X}]_{z_x^{a,r}}^{z_a^1}} \approx \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_a^1}{z_x^{a,r}}\right) - \underbrace{\int_0^{z_a^1} \frac{1 - \phi_x(z/L_O^a)}{z} dz}_{=\psi_x(\zeta_a)}} \quad (3.28a)$$

$$\frac{x_a^*}{[\mathbb{X}]_0^{z_x^{a,r}}} \approx \frac{\kappa}{\ln\left(\frac{z_x^{a,r}}{\ell_x(0)}\right)} \quad (3.28b)$$

Écrire (3.28) au lieu de (3.27) implique (sans être équivalent à) l’approximation suivante :

$$\forall z \in ]0; z_x^{a,r}[ , \phi_x\left(\frac{z}{L_O^a}\right) \approx 1 \quad (3.29)$$

La figure 3.17 apprécie la validité numérique des approximations (3.28) et (3.29). On remarque que si (3.29) est universellement très bien vérifiée, (3.28), elle, n’est pas forcément justifiée pour des régimes très légèrement stables. Cela provient du fait que lorsque  $\theta_a^* \rightarrow 0^+$ , on aura  $L_O^a \rightarrow 0^+$ , jusqu’à arriver à un point où  $z_x^{a,r} \lesssim L_O^a$ , et donc où  $|\psi_x(z_x^{a,r})| \ll 1$ . Le cas symétrique  $\theta_a^* \rightarrow 0^-$  pose moins de problème ; cela est lié à la forme des fonctions des fonctions ( $\psi_x$ ) en régime instable, qui est moins sensible qu’en régime stable.

Implicitement, on a supposé l’approximation (3.28) valable lors de l’élaboration de la théorie de Monin-Obukhov, en intégrant dans l’atmosphère les parties des groupes sans dimension en  $1/z$  sur l’intervalle  $]z_x^{a,r}; z_a^1[$ , mais leur partie rendant compte de la stratification sur  $]0; z_a^1[$ , cf. la remarque faite après l’introduction de (2.33).

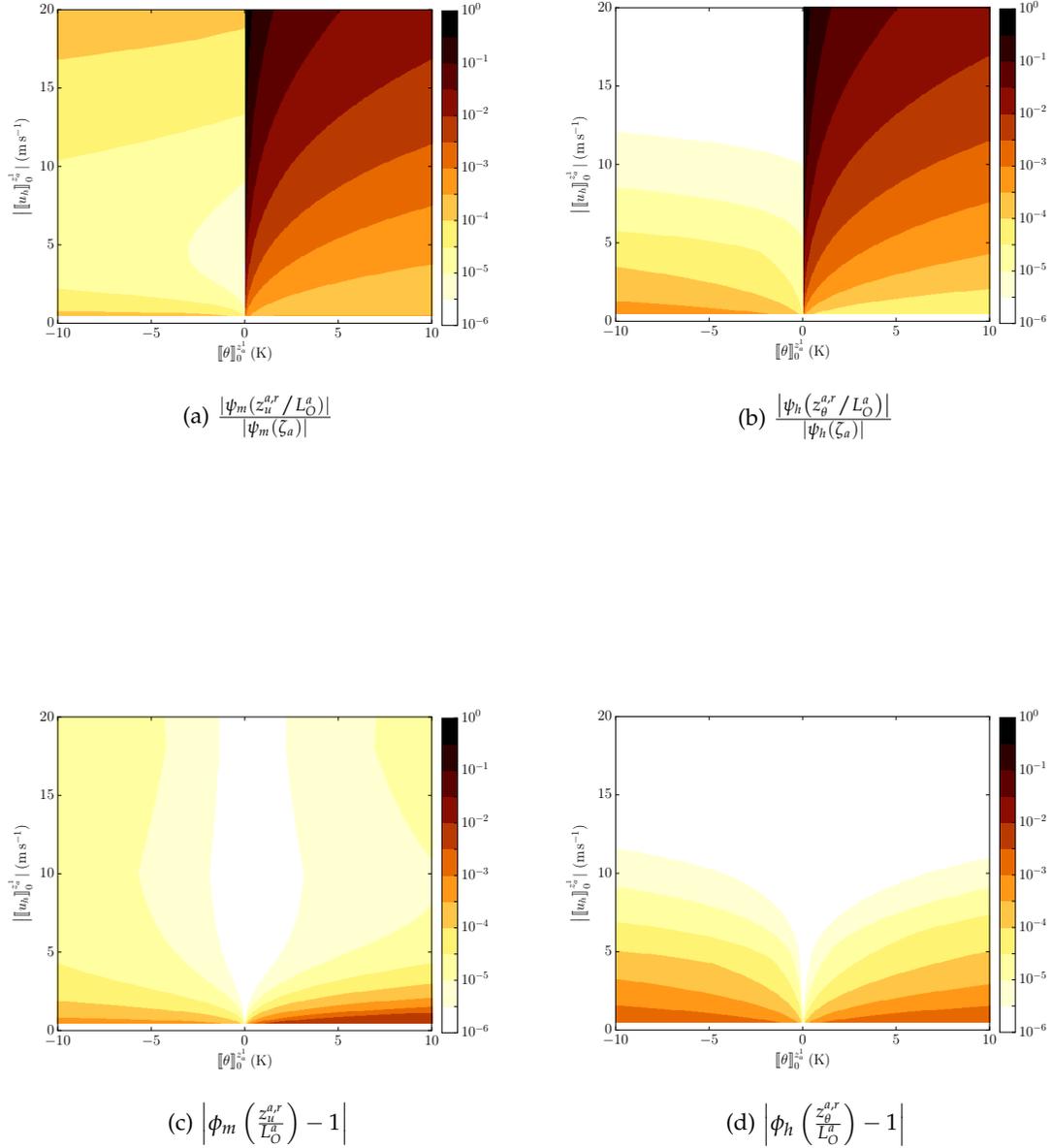


FIGURE 3.17 – Étude de validité numérique des hypothèses (3.28) et (3.29), pour la formulation COARE. Ici, on a fixé  $z_a^1 = 10$  m,  $q(z_a^1) = 0$  kg kg<sup>-1</sup>,  $\llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1} = 0$  kg kg<sup>-1</sup> et  $\theta(z_a^1) = 300$  K. (a) et (b) testent la validité de (3.28a) comme approximation de (3.27a), tandis que (c) et (d) testent la validité de (3.29).

### 3.4.3 Prise en compte de la couche limite de surface océanique

L'objectif de cette sous-section est d'ajouter encore un nouvel aspect jusqu'à maintenant absent des formulations bulk : la paramétrisation de la CLSO. En effet, les formulations bulks sont conçues comme des boîtes noires auxquelles on fournirait des valeurs de surface pour les grandeurs  $u_h$ ,  $\theta$  et  $q$ . En réalité, ces valeurs de surface ne sont pas connues des modèles, puisque le niveau vertical  $z = 0$  n'est traité par aucun des deux modèles. Dans un contexte de couplage de modèle océan-atmosphère, on n'a accès qu'aux valeurs des solutions au niveau  $z_o^1 < 0$ , le moins profond du modèle océan, typiquement  $z_o^1 \approx -1$  m.

Il s'agit donc, en s'inspirant de la sous-section précédente, d'encore adapter les formulations bulk existantes, afin de leur permettre, à partir d'informations au niveau  $z_o^1$ , de paramétriser les profils de solutions dans la CLSO jusqu'à la surface, par le biais d'échelles de friction océanique. Les valeurs de surface seront ensuite utilisées dans les formulations bulk atmosphériques, incluant la prise en compte de la SCVA, pour la détermination des échelles de friction atmosphériques.

On sera donc amenés à désormais parler de formulations bulks *transversales*, parce qu'elles permettront de paramétriser les solutions de part et d'autre de la surface de l'océan  $z = 0$ . Le fonctionnement global des algorithmes bulk transversaux est décrit par l'algorithme 3.2, et schématisé par la figure 3.18.

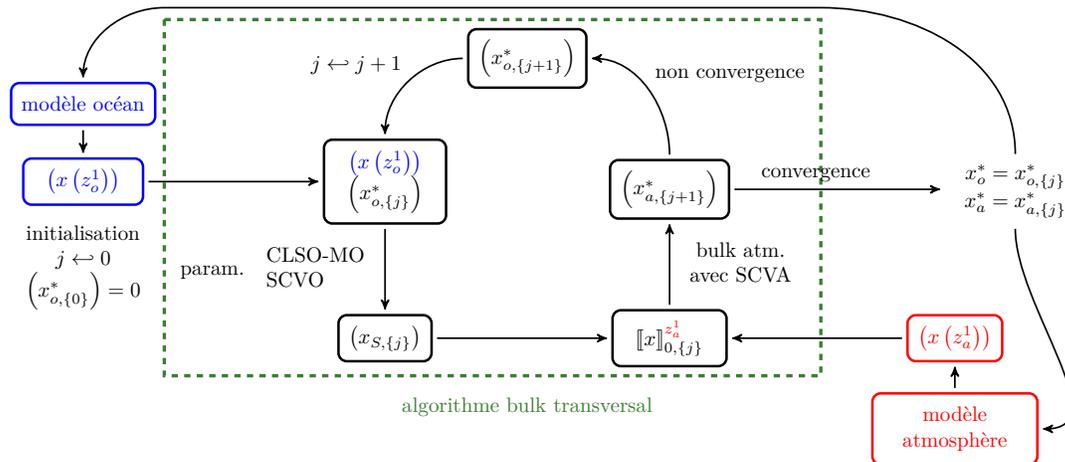


FIGURE 3.18 – Représentation schématique d'un algorithme bulk transversal. Ce coupleur, de nature itérative, et dont le fonctionnement est décrit plus en détail par l'algorithme 3.2, est délimité par le marquage vert. Les modèles océan et atmosphère fournissent respectivement  $x(z_o^1)$  et  $x(z_a^1)$  à l'algorithme bulk transversal. Dans l'océan, on a  $x \in \{u_h, \theta, s\}$ ; dans l'atmosphère,  $x \in \{u_h, \theta, q\}$ . Une fois que l'algorithme bulk transversal a convergé, celui-ci fournit les échelles de friction océaniques et atmosphériques aux modèles idoines.

La figure 3.19 présente l'impact de la prise en compte de paramétrisations CLSO : elle compare les échelles de friction obtenues, entre un algorithme bulk incluant les SCVA (tel que décrit au § 3.4.2) et un algorithme incluant aussi la CLSO. Ces résultats ont été obtenus en utilisant l'algorithme bulk COARE, auquel on a ajouté des modules d'inclusion des SCVA et de la CLSO.

(0) **Initialisation** : on suppose dans un premier temps  $x_{o,\{0\}}^* = 0$  et  $z_{o,\{0\}}^{o,r} = z_o^1$ <sup>a</sup> pour  $x \in \{u, \theta, q\}$ . On pose aussi  $\zeta_{o,\{0\}} = 0$ . On effectue le premier diagnostic des longueurs de rugosité et du paramètre de stabilité atmosphérique avec exactement le même protocole que pour une formulation bulk classique. On obtient alors un triplet  $(z_{x,\{0\}}^{a,r})_{x \in \{u, \theta, q\}} \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ , ainsi que  $\zeta_{a,\{j\}} \in \mathbb{R}$ . On pose  $j = 0$ .

(1) **Itération**  $\{j\}$ .  $(x_{o,\{j\}}^*)$ ,  $(z_{x,\{j\}}^{o,r})$  et  $\zeta_{o,\{j\}}$  permettent de paramétrer les solutions dans la CLSO (comprenant une partie CLSO-MO et une partie SCVO, cf. figure 2.4), et donc d'obtenir des valeurs de surface  $(x_{S,\{j\}}^o)_{x \in \{u, \theta, q\}}$ , en intégrant de  $z_o^1$  à  $z = 0$ <sup>b</sup>, cf. (2.66) :

$$x_{S,\{j\}}^o = x(z_o^1) + \frac{x_{o,\{j\}}^*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_{x,\{j\}}^{o,r}} \right) + \psi_y(\zeta_{o,\{j\}}) + 1 \right] \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (3.30)$$

où  $y = m$  quand  $x = u$  et  $y = h$  quand  $x \in \{\theta, q\}$ , et on a supposé que les SCVO étaient paramétrisées de façon à ce que  $\ell_x^o(0) = -z_x^{o,r}/e$ .

(2) On met à jour les échelles de friction atmosphériques à l'aide d'une formulation bulk incluant la SCVA, ainsi :

$$x_{a,\{j+1\}}^* = \frac{\kappa}{\ln(z_a^1/z_{x,\{j\}}^{a,r}) - \psi_y(\zeta_{a,\{j\}}) + 1} (x(z_a^1) - x_{S,\{j\}}^o) \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (3.31)$$

où  $y = m$  quand  $x = u$  et  $y = h$  quand  $x \in \{\theta, q\}$ . On a fait la même hypothèse sur les paramétrisations SCVA que pour les SCVO (cf. (3.30)), qui se traduit par le terme « +1 » au dénominateur.

(3) On met à jour le paramètre de stabilité atmosphérique  $\zeta_{a,\{j+1\}} = \zeta_a(x_{a,\{j+1\}}^*)$  et les longueurs de rugosité atmosphériques  $z_{x,\{j+1\}}^{a,r} = z_x^{a,r}(u_{a,\{j+1\}}^*)$ .

(4) On met à jour les échelles de friction océaniques en utilisant la conservation des flux à travers l'interface, cf. (2.54) :

$$u_o^* = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o}} u_a^* \quad (3.32a)$$

$$\theta_o^* = \frac{Q_{IR}}{\rho_o c_p^o u_o^*} + \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o}} \frac{c_p^a}{c_p^o} \theta_a^* + \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o}} \frac{\Lambda}{c_p^o} q_a^* \quad (3.32b)$$

$$s_o^* = S \frac{E - P - R}{u_o^*} \quad (3.32c)$$

(5) On met à jour en conséquence le paramètre de stabilité et les longueurs de rugosité océaniques. On obtient donc  $\zeta_{o,\{j+1\}}$  et  $x_{o,\{j+1\}}^*$ .

a. Puisque  $x_{o,\{0\}}^* = 0$ , la valeur initiale des longueurs de rugosité océanique est sans importance.

b. Le fait qu'à l'initialisation, les échelles de friction océaniques soient nulles, implique qu'à la première itération seulement,  $x_{S,\{0\}} = x(z_o^1)$ . Dans les routines de couplage classiques, cela est toujours considéré comme vrai.

- (6) **Critère d'arrêt** : on vérifie l'accord des solutions extrapolées par les profils CLS à la surface, de part et d'autre de l'interface. Cela peut se faire en comparant les  $x_{S,\{j\}}$ , calculés en (3.30), avec les  $x_{S,\{j+1\}}^a$ , calculés ainsi :

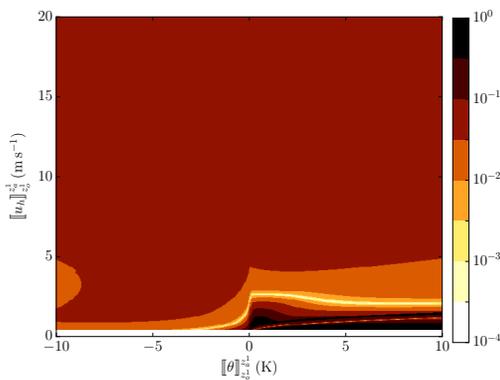
$$x_{S,\{j+1\}}^a = x\left(z_a^1\right) - \frac{x_{a,\{j+1\}}^*}{\kappa} \left[ \ln\left(\frac{z_a^1}{z_{x,\{j+1\}}^a}\right) + \psi_y\left(\zeta_{a,\{j+1\}}\right) + 1 \right] \quad x \in \{u_h, \theta, q\} \quad (3.33)$$

Le critère d'arrêt est ainsi le suivant :

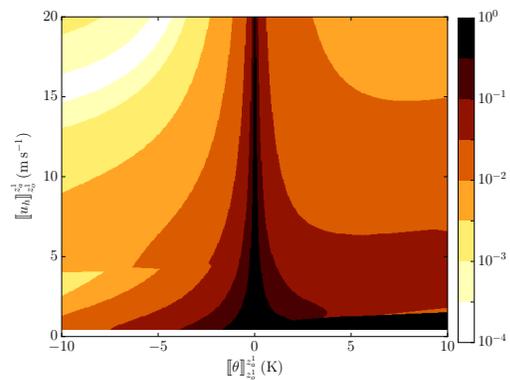
$$\max_{x \in \{u_h, \theta\}} \left\| x_{S,\{j+1\}}^a - x_{S,\{j\}}^o \right\| \stackrel{?}{\leq} r_{tol} \quad (3.34)$$

S'il est vérifié, l'algorithme est terminé. Sinon, on passe à l'itération suivante en posant  $j \leftrightarrow j + 1$ , et on revient à l'étape (1).

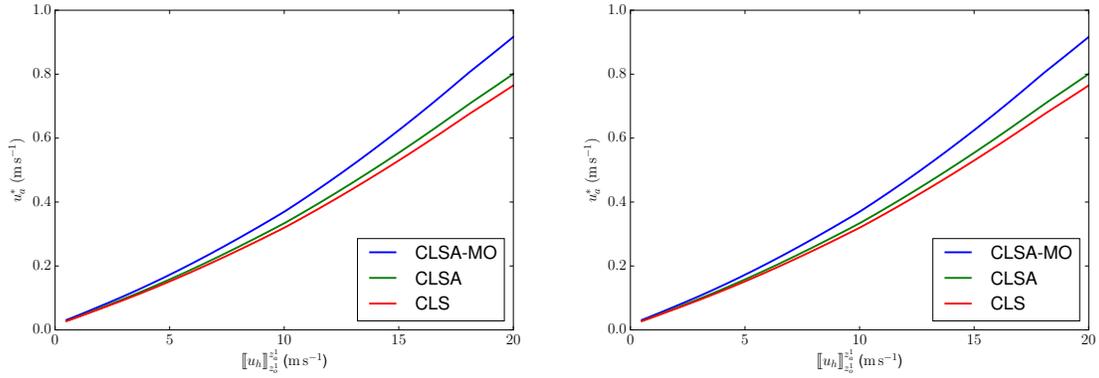
ALGORITHME 3.2 – Algorithme de couplage bulk transversal de base. L'indice  $\{j\}$  dénote les itérations de couplage.



(a) Erreur relative sur  $u_a^*$ .



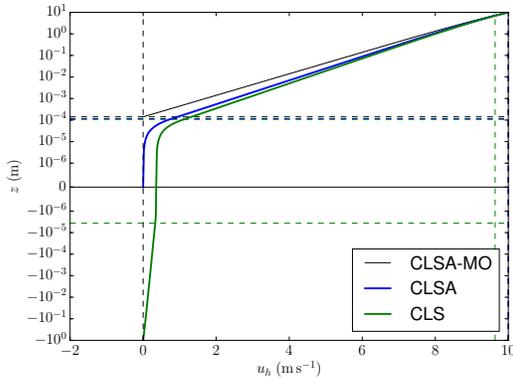
(b) Erreur relative sur  $\theta_a^*$ .



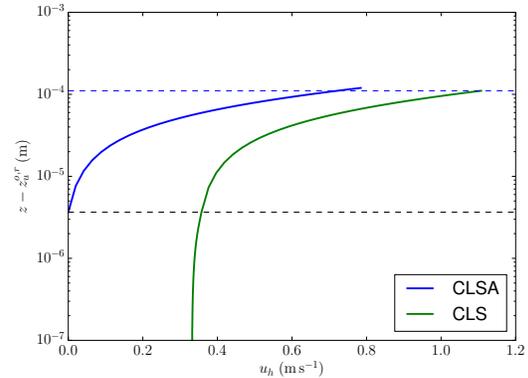
(c) Échelle de friction  $u_a^*$  en fonction de  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ , pour  $\llbracket \theta \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1} = -2$  K, suivant les modules ajoutés à l'algorithme bulk classique (SCVA, CLSO).

(d) Échelle de friction  $\theta_a^*$  en fonction de  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ , pour  $\llbracket \theta \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1} = -2$  K, suivant les modules ajoutés à l'algorithme bulk classique (SCVA, CLSO).

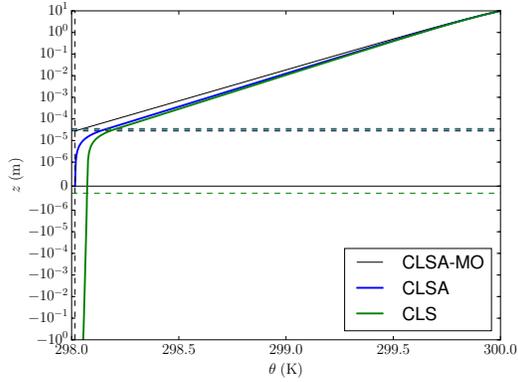
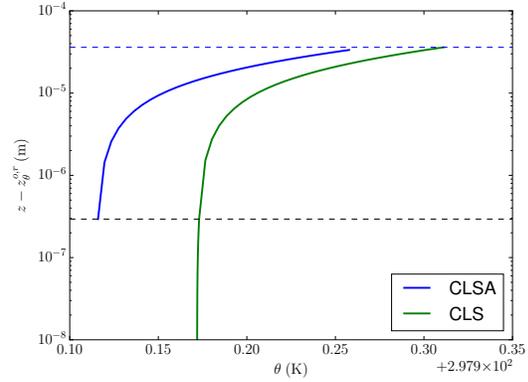
FIGURE 3.19 – Différences sur les calculs des échelles de friction entre algorithmes bulk « intégraux » (i.e., incluant la CLSO), algorithmes « CLSA complète » (c'est à dire, incluant les SCVA), et algorithmes classiques (ne comprenant que la CLSA-MO). Ici, on a utilisé comme algorithme de base la formulation COARE, à laquelle on a rajouté des modules pour rendre compte de la SCVA, puis de la CLSO. Les cartes (a) et (b) donnent les erreurs relatives sur  $u_a^*$  et  $\theta_a^*$  en fonction des paramètres d'entrée  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$  et  $\llbracket \theta \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ . Les courbes dessinées sur (c) et (d) comparent directement les valeurs des échelles de friction, en faisant une coupe à  $\llbracket \theta \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1} = -2$  K.



(a)  $u_h$  sur l'intégralité de la CLS, selon les stratégies.



(b) Zoom de (a) au niveau des sous-couches visqueuses. L'axe des ordonnées est en échelle logarithmique et correspond à  $z - z_u^{o,r}$ ; la surface de l'océan,  $z = 0$ , est représentée par la ligne horizontale et pointillée.

(c)  $\theta$  sur l'intégralité de la CLS, selon les stratégies.

(d) Zoom de (c) au niveau des sous-couches visqueuses.

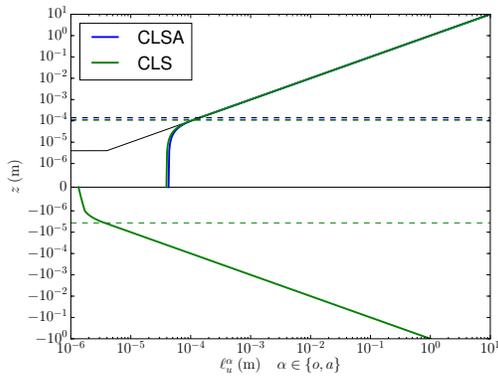
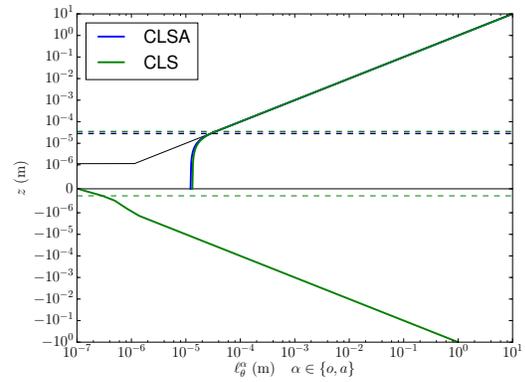
(e)  $(\ell_u^\alpha)_{\alpha \in \{o,a\}}$  sur l'intégralité de la CLS, selon les stratégies.(f)  $(\ell_\theta^\alpha)_{\alpha \in \{o,a\}}$  sur l'intégralité de la CLS, selon les stratégies.

FIGURE 3.20 – (a) et (c) représentent des profils de solution pour  $u_h$  et  $\theta$ , suivant que la CLSO ait été incluse dans la formulation bulk ou non. (b) et (d) sont des zooms autour des SCV, permettant de bien constater que la paramétrisation « intégrale », incluant la CLSO, est faite de façon à ce que les profils traversent l'interface de façon régulière. (e) et (f) montrent que comme ce à quoi on s'attendait, les coordonnées visqueuses,  $\ell_x^\alpha$ , ne sont pas régulières au franchissement de l'interface.

On a, en outre, utilisé les paramètres numériques suivants :

$$\begin{aligned} z_a^1 &= 10 \text{ m} \\ Q_{IR} &= 40 \text{ W m}^{-2} \quad z_o^1 = -1 \text{ m} \end{aligned} \quad (3.35)$$

où prescrire une valeur pour  $Q_{IR}$  est nécessaire au calcul de  $\theta_o^*$ , cf. (3.32b). On a choisi cette valeur puisqu'elle correspond à une valeur moyenne pour le cas test TOGA-COARE, comme le montre la figure 3.21.

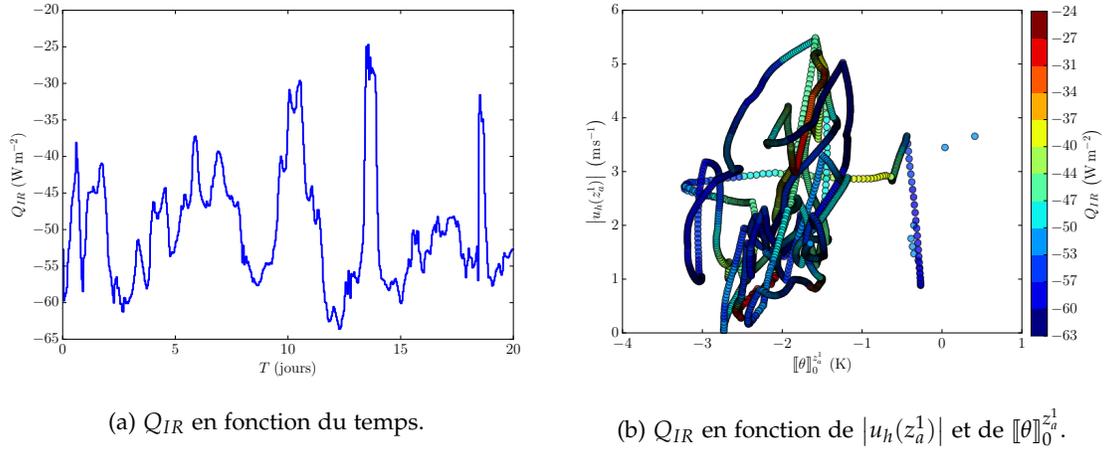


FIGURE 3.21 – Flux  $Q_{IR}$  perçu par l'atmosphère (et donc extrait de l'océan) lors d'une simulation du cas test TOGA-COARE par le code LMDZ5. On a ici utilisé la formulation bulk par défaut du code LMDZ5, inspirée de Louis (1979), puisque c'est avec cette formulation que ce code a été réglé. L'unique objectif de cette rapide étude numérique est d'avoir un ordre de grandeur pour fixer  $Q_{IR}$  dans (3.35). Puisque ce modèle numérique suppose implicitement  $u_h(0) = 0$ , on a ici été contraints d'utiliser comme échelle de vitesse  $|u_h(z_a^1)|$ , et non  $[[u_h]]_0^{z_a^1}$ .

L'observation de la figure 3.20 apporte les conclusions suivantes :

- (i) En terme d'échelles de friction, la prise en compte de la CLSO entraîne des différences de l'ordre de la dizaine de pourcent par rapport à des algorithmes bulk type SCVA.
- (ii) Comme le montrent les profils de solution dessinés de la figure 3.20, utiliser les paramétrisations CLSO et SCV introduites permet d'obtenir des profils de solution régulier sur toute la CLS, et en particulier au franchissement de l'interface.
- (iii) Comme c'est souvent le cas pour la paramétrisation de la CLS, les régimes stables à vent faibles présentent les plus grandes disparités numériques entre prise en compte ou non des SCV et/ou de la CLSO.

Ce dernier point est cependant à nuancer : pour des vents très faible, c'est principalement le flux infrarouge  $Q_{IR}$  qui joue un rôle dans l'impact qu'a la CLSO sur l'algorithme bulk, comme le montre la figure 3.22. Cependant, l'observation de la figure 3.21b montre qu'il ne semble pas y avoir de corrélation directe entre  $Q_{IR}$  et l'état de la solution au voisinage de l'interface ; ainsi, les cas problématiques où  $Q_{IR}$  est non négligeable et les vents faibles, sont effectivement réalisés.

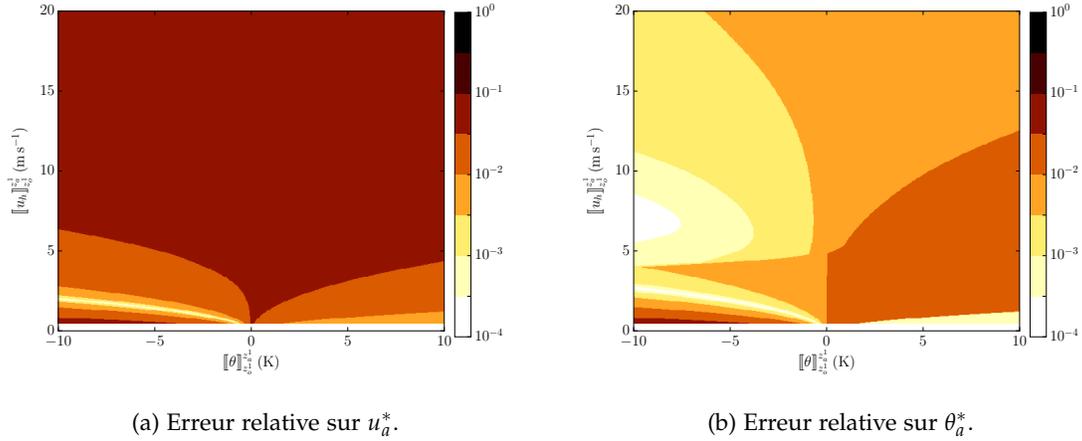


FIGURE 3.22 – Erreurs relatives sur  $u_a^*$  et  $\theta_a^*$  en refaisant exactement la même expérience numérique que pour les figures 3.19a et 3.19b en imposant  $Q_{IR} = 0 \text{ W m}^{-2}$  au lieu de  $40 \text{ W m}^{-2}$ . On constate que les grandes disparités en régime de vents faibles, de stratification stable et de stratification quasi-neutre, ne sont plus présentes.

### 3.5 Conclusion partielle

Au chapitre 2, l'étude des paramétrisations CLS comportait certaines ambiguïtés, notamment autour des niveaux dits « de surface », ou de la prise en compte de la stratification dans les SCV. Celles-ci ne pouvaient être levées sans étudier, au présent chapitre, les façons avec lesquelles étaient construites les formulations bulk, qui jouent le rôle de schémas de fermeture des paramétrisations CLS.

L'essence des deux chapitres précédents tient en une phrase : *telles qu'elles sont utilisées aujourd'hui, les paramétrisations CLS et leur fermeture, les formulations bulk, font implicitement une approximation en ne prenant en compte qu'une partie de CLS atmosphérique : celle qu'on a appelée « CLSA-MO », situé au-dessus des longueurs de rugosité.* Développer des paramétrisations CLS intégrales, c'est à dire, couvrant l'intégralité de cette région, nécessite naturellement des ajustements sur leurs fermetures, les formulations bulk, puisque celles-ci ont historiquement été développées dans le cadre de cette approximation « CLSA-MO seule ».

Bien qu'elle ait été traitée dans ce chapitre, la question de la validité numérique de cette approximation est, à notre avis, secondaire. Il est nécessaire d'acter qu'au niveau continu, tant que cette approximation sera faite, la CLS ne pourra pas être perçue comme une extension des sous-modèles océan et atmosphère, les connectant de façon cohérente.

Faire cette approximation peut bien entendu se révéler numériquement licite, comme le montrent les nombreux résultats obtenus par simulations réalisées dans son cadre. Il faut aussi garder à l'esprit que depuis plusieurs décennies, les formulations bulk de référence ont été développées dans le cadre de cette approximation ; par conséquent, certains des réglages effectués ont pu jouer un rôle de compensation. L'essentiel est de rappeler qu'en terme de couplage océan-atmosphère, d'un point de vue théorique, *les paramétrisations CLS fermées à l'aide des formulations bulk actuelles sont incomplètes, et, sous certains aspects, ambiguës.*

D'un point de vue plus quantitatif, l'étude numérique de l'impact d'une formulation bulk com-

plétée a montré que l'inclusion de la partie océanique de la CLS, ainsi que des sous-couches visqueuses, pouvait avoir un impact considérable sur les échelles de friction. Clôtons ce chapitre avec la figure 3.23, qui montre les erreurs numériques commises sur les *flux turbulents* (directement calculés à partir des échelles de friction) prescrits aux deux modèles, suivant que les CLSO et SCV soient prises en compte ou non.

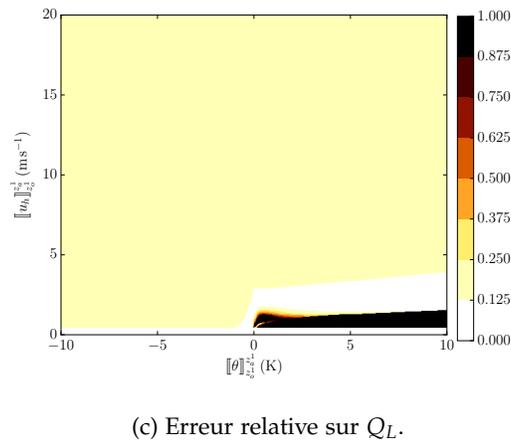
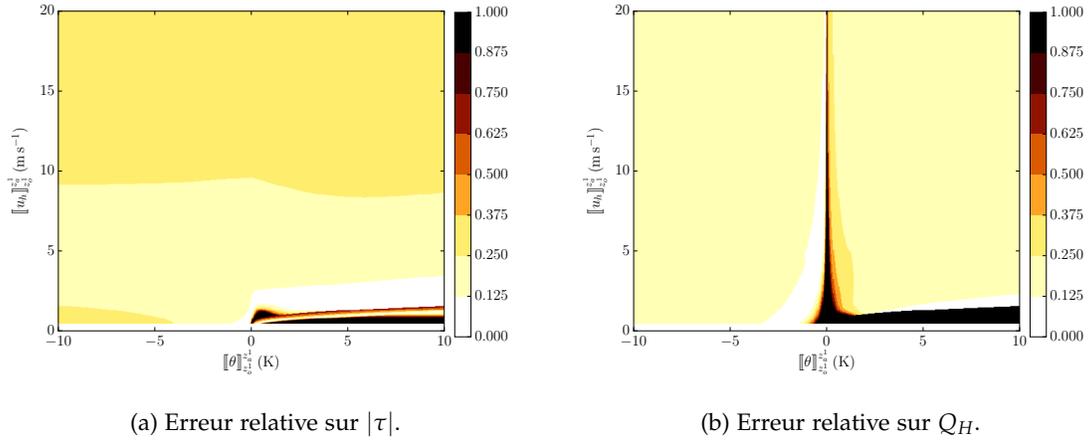


FIGURE 3.23 – Erreurs relatives sur les flux turbulents, entre une formulation bulk classique (sans CLSO ni SCV) et une formulation bulk intégrale, intégrant donc ces deux régions. On constate que la non prise en compte de ces régions peut entraîner des erreurs significatives sur les flux, de l'ordre de quelques dizaines de pourcents. Les plus grands écarts sont observés pour le flux  $\tau$  en condition de vents forts, pour le flux  $Q_H$  en condition de stratification quasi-neutre, et pour les trois flux  $\tau$ ,  $Q_H$  et  $Q_L$  en condition de vents faibles et de stratification stable. Bien entendu, ces erreurs se répercutent ensuite sur les modèles en eux-mêmes, puisque les flux y sont prescrits comme conditions de bord.

# Chapitre 4

## Couplage de couches d'Ekman

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction du problème</b>	<b>137</b>
4.1.1	Domaine d'étude	137
4.1.2	Équations d'évolution dans les régions intra-modèles	138
4.1.3	Condition de couplage cohérent	141
4.1.4	Forme finale du problème de couches d'Ekman couplées	143
<b>4.2</b>	<b>Quelques cas stationnaires avec solutions monodomains littérales</b>	<b>145</b>
4.2.1	Objectifs	145
4.2.2	Viscosités constantes	146
4.2.3	Viscosités affines	148
4.2.4	Viscosités polynomiales de degré 2	149
4.2.5	Viscosités polynomiales de degré 3	153
4.2.6	Comment exploiter ces résultats ?	156
<b>4.3</b>	<b>Couplage cohérent de couches d'Ekman stationnaires</b>	<b>156</b>
4.3.1	Viscosités turbulentes indépendantes des $(u_a^*)$	157
4.3.2	Viscosités turbulentes dépendantes des $(u_a^*)$	162
4.3.3	Impact de la cohérence du couplage sur la solution hors CLS	164
<b>4.4</b>	<b>Discussion sur l'extension au cas instationnaire</b>	<b>170</b>
4.4.1	Solutions monodomains	171
4.4.2	Cohérence du couplage	171
<b>4.5</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>172</b>

---

Après s'être focalisés sur la couche limite de surface et les formulations bulk qui y sont implémentées, ce chapitre vise à davantage étendre le domaine physique sur lequel l'influence de l'interface océan-atmosphère est perceptible. On prendra désormais en compte à la fois la CLS, mais aussi la *couche limite océanique* (CLO) et la *couche limite atmosphérique* (CLA), qui sont respectivement incluses dans les domaines des modèles océanique et atmosphérique. En plus des conditions aux limites sous forme de flux turbulents, ces deux régions sont affectées par l'interface océan-atmosphère *via* la présence de viscosités et diffusivités turbulentes au sein des équations d'évolution régissant leur dynamique ; ce sont les termes faisant intervenir  $\nu_{\alpha}^t$ ,  $\mathcal{K}_{T,\alpha}^t$ ,  $\mathcal{K}_{S,\rho}^t$  et  $\mathcal{K}_{q,a}^t$  dans le système d'équations primitives (1.55).

Ces termes sont indispensables à la bonne représentation de la dynamique au voisinage de l'interface océan-atmosphère. La plupart des schémas de paramétrisations turbulentes reposent sur l'introduction de nouvelles variables dans le problème, nécessitant autant d'équations différentielles supplémentaires de fermeture. Les viscosité et diffusivités turbulentes sont alors paramétrisées par les nouvelles variables introduites. [Launder et Spalding \(1972\)](#) introduit une typologie de modèles de paramétrisations turbulentes verticales, les distinguant en fonction du nombre d'équations prognostiques supplémentaires introduites, appelé *ordre de fermeture* :

- 0 – modèles dépendant du nombre de Richardson ([Louis, 1979](#); [Jones, 1973](#); [O'Brien, 1970](#); [Pacanowski et Philander, 1981](#)), et éventuellement aussi de l'échelle de friction  $u_{\alpha}^*$  ([Monin et Yaglom, 1971](#); [Brost et Wyngaard, 1978](#); [McWilliams et Huckle, 2005](#))
- 1 – « modèles  $k$  » : [Cuxart et al. \(2000\)](#); [Mellor et Yamada \(1982\)](#)
- 2 – « modèles  $k - \varepsilon$  » : [Umlauf et Burchard \(2005\)](#)

où  $k$  est une *énergie cinétique turbulente* (cf. (1.48)), échelle caractérisant l'énergie cinétique dont diposent les échelles turbulentes.  $\varepsilon$  est un *taux de dissipation d'énergie turbulente* (cf. (1.49)), échelle caractérisant le transfert d'énergie cinétique entre échelles turbulentes et macroscopiques. Naturellement, ces deux nouvelles grandeurs contiennent de l'information « invisible » aux yeux des grandes échelles, et ne sauraient donc pas être directement diagnostiquées à partir de celles-ci ; d'où la nécessité de les définir comme solutions de nouvelles équations aux dérivées partielles elles-mêmes paramétrisées.

Monter en ordre de fermeture permet, au niveau continu, d'obtenir des paramétrisations turbulentes plus précises, mais aussi numériquement plus coûteuses. S'il est théoriquement possible de monter autant que souhaité en ordre, pour des applications aux contextes météorologique et surtout climatologique, les schémas de fermeture d'ordres supérieurs à 2 sont à manipuler avec précaution, leur implémentation pouvant générer des instabilités numériques<sup>1</sup> ([Bougeault et André, 1986](#); [Zilitinkevich et al., 1999](#)).

Les fermetures turbulentes citées ci-dessus ont pour caractéristique commune d'avoir des formulations relativement complexes, et ce d'autant plus que leur ordre est élevé. Pour cette raison, obtenir des résultats mathématiques généraux sur la paramétrisation de la turbulence verticale au voisinage de la surface de l'océan est un problème très difficile, même dans un contexte non couplé. Citons toutefois quelques contre-exemples :

- ▶ [Bennis et al. \(2008\)](#) étudie la stabilité numérique de solutions stationnaires en considérant quatre schémas de fermeture turbulente dépendants du nombre de Richardson,  $Ri$  : deux schémas préexistants, issus de respectivement [Pacanowski et Philander \(1981\)](#) et [Gent \(1991\)](#), ainsi que deux nouveaux schémas introduits par cet article. Bien que l'existence de solutions stationnaires soit obtenue pour tous les schémas, leur unicité n'est garantie que pour l'une des nouvelles paramétrisations introduites, qui n'est pas utilisée dans les modèles. En outre, la stabilité numérique des solutions dépend du nombre de Richardson : en particulier, pour tous les schémas de fermeture, les solutions peuvent être instables pour  $Ri \geq 0$ .
- ▶ [Chacón-Rebollo et Lewandowski \(2014\)](#) étudie les propriétés numériques d'un grand nombre de schémas de turbulence, y compris le

1. Ces phénomènes concernent les fermetures turbulentes en général, et ne se limitent pas à leurs applications au contexte océan-atmosphère ([Katul, 1998](#)).

modèle  $k - \varepsilon$ , beaucoup utilisé dans les modèles actuels. Cette référence s'inscrit dans la continuité d'ouvrages s'inscrivant dans la même démarche, comme [Lauder et Spalding \(1972\)](#) ou [Markatos \(1986\)](#).

Le problème de couche d'Ekman ([Ekman et al., 1905](#)) est une forme simplifiée du problème de propagation de la turbulence sur la verticale, dans un contexte de fluide géophysique. L'intérêt principal de son étude est que ce cas test est à la fois suffisamment simple pour que certains de ses aspects puissent être traités mathématiquement, mais aussi suffisamment complexe pour qu'il soit intéressant d'un point de vue physique ([Csanady, 1967](#); [Zikanov et al., 2003](#)), puisqu'une partie significative des effets turbulents dus à la présence de l'interface océan-atmosphère y est représentée. C'est principalement pour cette raison que l'extension de notre problème s'oriente naturellement vers le problème d'Ekman couplé.

On s'intéressera ainsi à des cas idéalisés de couplage de couches d'Ekman, correspondant à une géométrie unidimensionnelle verticale. Ces colonnes, qu'on supposera non-stratifiées, sont définies comme des couches de fluide soumises uniquement à des gradients de pression, à la force de Coriolis et à une diffusion turbulente. On utilisera des schémas de paramétrisations turbulentes verticales d'ordre 0 ([Troen et Mahrt, 1986](#); [McWilliams et Huckle, 2005](#)); ceux-ci constituent, pour notre étude, un compromis satisfaisant entre réalisme physique et maniabilité mathématique.

Le § 4.1 introduit le problème, ses notations et sa géométrie. Le § 4.2 s'intéresse à des versions stationnaires simplifiées de ce problème, pour lesquelles on mettra en évidence des solutions littérales. Le § 4.3 étudie la cohérence du couplage de couches d'Ekman stationnaires, à l'aune des résultats précédents. Enfin, le § 4.4 donne quelques pistes concernant le cas instationnaire.

## 4.1 Introduction du problème

Cette première section vise à définir l'espace dans lequel évoluera la solution du problème, puis à y poser les équations principales. Dans toute la suite, on utilisera la notation suivante, pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a \neq b$  :

$$(a; b) = \begin{cases} ]a; b[ & \text{si } a < b \\ ]b; a[ & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

### 4.1.1 Domaine d'étude

On appelle  $(h_{pbl}^\alpha)_{\alpha \in \{o, a\}} \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$  les profondeurs et hauteurs des couches limites océanique et atmosphérique (en anglais, *planetary boundary layer*). Nous verrons plus tard comment ces deux grandeurs sont explicitement calculées. On se place sur un domaine délimité par un « plancher »  $z_o^\infty \in \mathbb{R}_-^*$ , situé en deçà de  $h_{pbl}^o$ , et un plafond  $z_a^\infty \in \mathbb{R}_+^*$ , situé au-delà de  $h_{pbl}^a$ .

Le domaine qu'on étudie présente une structure « en sandwich », comme représenté sur la figure 4.1 :

- (i) Au voisinage immédiat de la surface, la sous-couche visqueuse est délimitée par les longueurs de rugosité ;  $]z_u^{o,r}; z_u^{a,r}[$ . Cette région n'est pas traitée par les modèles numériques ; on l'a déjà présentée et étudiée au chapitre 2.

- (ii) La couche limite de surface est toujours délimitée par  $]z_0^1; z_a^1[$ . Elle inclut la sous-couche visqueuse, et a fait l'objet du chapitre 2.
- (iii) La couche limite planétaire (CLP), délimitée par l'intervalle  $[h_{pbl}^o; h_{pbl}^a]$ , inclut la CLA et la CLO. Les deux régions  $(z_\alpha^1, h_{pbl}^a)$ ,  $\alpha \in \{o, a\}$  (c'est à dire, la couche limite planétaire privée de la CLS) sont appelées *couches turbulentes* océanique et atmosphérique. Elles correspondent à des régions qui sont traitées par leur modèle numérique respectif, mais au sein desquelles la présence de l'interface océan-atmosphère se manifeste par une viscosité turbulente, dépendant directement de l'état turbulent de la CLS.
- (iv) On qualifie les régions  $(z_\alpha^\infty; h_{pbl}^\alpha)$ ,  $\alpha \in \{o, a\}$ , comme océan et atmosphère « libres ». On considère que l'interface océan-atmosphère en est suffisamment éloignée pour qu'elle n'y joue aucun rôle ; par conséquent, dans ces régions, les viscosités seront constantes, correspondant aux viscosités moléculaires résiduelles de l'eau et de l'air.

$$\approx [m] \quad z_0^\infty < h_{pbl}^o < z_0^1 < 0 < z_a^1 < h_{pbl}^a < z_a^\infty \quad (4.2)$$

Les cotes ( $z_\alpha^\infty$ ) ne correspondent pas au fond de l'océan et au « plafond » de l'atmosphère ; elles correspondent à des niveaux situés à coup sûr (c'est à dire, pour toute configuration physique réaliste) à l'extérieur de la couche limite planétaire.

#### 4.1.2 Équations d'évolution dans les régions intra-modèles

On définit  $\Omega_{Ek} = ]z_0^\infty, z_0^1[ \cup ]z_a^1; z_a^\infty[$  le domaine spatial qui nous intéresse. On dénote  $T \in \mathbb{R}_+^*$  le temps final d'expérience ; l'intervalle de temps sur lequel on se situe est donc  $[0; T]$ .

Pour notre étude, on s'intéressera uniquement à l'évolution de la quantité de mouvement horizontale (vent dans l'atmosphère, courant dans l'océan),  $u_h = u + iv \in \mathbb{C}$ . On négligera l'advection verticale :  $w = 0$ . On suppose aussi implicitement que les profils de température, d'humidité et de salinité sont constants (à la fois spatialement et temporellement) sur notre domaine d'étude, et que  $u_h \in L^1(0, T; \mathcal{E}_{Ek})$ , où l'espace fonctionnel  $\mathcal{E}_{Ek}$  est défini ainsi :

$$\mathcal{E}_{Ek} = \left\{ u : \Omega_{Ek} \rightarrow \mathbb{C} / \forall \alpha \in \{o, a\}, u|_{(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)} \in H^1(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \right\} \quad (4.3)$$

On aura alors :

$$u_h : [0; T] \times \Omega_{Ek} \rightarrow \mathbb{C} \\ (t, z) \mapsto u_h(t, z) \quad (4.4)$$

Dans le cadre du couplage océan-atmosphère, les équations régissant la dynamique des couches d'Ekman s'obtiennent à partir des équations portant sur  $(u, v)$  extraites du système (1.55), en y prescrivant des termes sources correspondant aux vent et courant *géostrophiques*. Ceux-ci peuvent être définis en décomposant le vent horizontal  $u_h = u + iv \in \mathbb{C}$  ainsi, sur chaque sous domaine  $\alpha \in \{o, a\}$  :

$$u_h = \widetilde{u}_h + u_g^\alpha \quad (4.5a)$$

$$\text{avec } if u_g^\alpha = -\frac{\nabla_h p}{\rho_{0,\alpha}} \quad (4.5b)$$

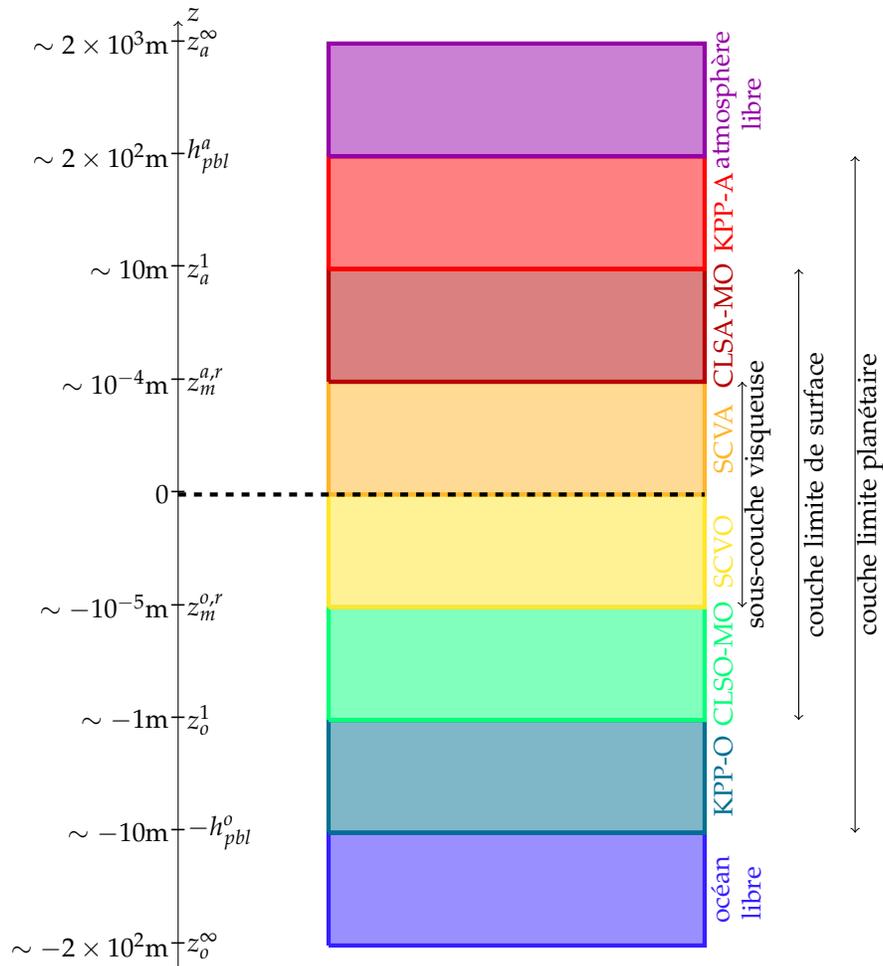


FIGURE 4.1 – Structure « en sandwich » du problème d'Ekman.

$$\partial_t \widetilde{u}_h + \iota f \widetilde{u}_h = \partial_z [(v_\alpha^t + v_\alpha^m) \partial_z u_h] \quad (4.5c)$$

où  $u_g^\alpha$  est défini comme étant un vent ou un courant géostrophique, constant de  $t$ , et  $\widetilde{u}_h$  est la perturbation autour de ces vents et courants. On suppose en général que sur une colonne verticale, les vent et courant géostrophiques sont aussi constants de  $z$  dans chaque sous-domaine. Réinjecter cette hypothèse dans (4.5b) implique que les gradients de pression horizontaux sont aussi constants du temps et de  $z$ . De façon générale, supposer que les vents et courants géostrophiques ne dépendent que de la latitude à laquelle on se situe est une bonne approximation. Les composantes géostrophiques sont alors définies par :

$$u_g^\alpha = \frac{\nabla_h p}{\rho_{0,\alpha}} \frac{1}{f} \quad (4.6)$$

(4.6) définit 2 termes, pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , correspondant aux vitesses résultant de l'équilibre entre force de Coriolis et forces dues au gradient de pression horizontal dans le fluide considéré.

On peut donc réorganiser le système (4.5) de façon à ce que les échelles géostrophiques y jouent le rôle de termes sources :

$$\partial_t u_h + \iota f u_h - \partial_z (v_\alpha \partial_z u_h) = \iota f u_g^\alpha, \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (4.7)$$

où  $f$  est le paramètre de Coriolis (supposé constant et pris dans  $[0; 10^{-4} \text{ s}^{-1}]$ ), et  $v_\alpha = v_\alpha^m + v_\alpha^t$  est la viscosité totale, incluant une partie moléculaire (constante) et une composante turbulente, éventuellement dépendante de  $z$  et des échelles de friction ( $u_\alpha^*$ ), qui permettent d'obtenir à la fois les profils de solution dans la CLS, et les flux turbulents prescrits aux bords de chaque sous-domaine, selon le formalisme défini au chapitre 2. De façon générale, au voisinage de l'interface, on aura  $v_\alpha^m \ll v_\alpha^t$ , et donc  $v_\alpha \approx v_\alpha^t$ .

On ajoute à l'équation (4.7) un couple de conditions aux limites turbulentes en ( $z_\alpha^1$ ), un raccord aux courant et vent géostrophiques en ( $z_\alpha^\infty$ ), ainsi qu'une initialisation sur ces mêmes grandeurs :

$$\partial_z u_h(t, z_\alpha^1) = \frac{u_\alpha^*}{\kappa |z_\alpha^1|} e^{i\theta_\tau} \quad t \in [0; T] \quad (4.8a)$$

$$u_h(t, z_\alpha^\infty) = u_g^\alpha \quad t \in [0; T] \quad (4.8b)$$

$$u_h(t = 0, z) = u_g^\alpha \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.8c)$$

où (4.8a) correspond à la condition classique (2.52a),  $v_\alpha \partial_z u_h|_{z_\alpha^1} = (u_\alpha^*)^2 e^{i\theta_\tau}$ , avec une viscosité donnée par un profil type CLS,  $v_\alpha(z) = \kappa u_\alpha^* |z|$ , qui fait unanimité pour  $z \approx z_\alpha^1$ , et qui, sous l'hypothèse de non-stratification ici faite, permet un raccord  $\mathcal{C}^1$  du profil de  $u_h$  entre la CLS et la CLP, en ( $z_\alpha^1$ ).  $\theta_\tau \in [0; 2\pi[$  est l'argument de la tension de vent dans la CLS,  $\tau$ .

Toutes les versions du problème d'Ekman que l'on considérera reposeront sur les équations (4.7) et (4.8). Différents cas de figure seront envisagés, selon la forme choisie pour les viscosités turbulentes ( $v_\alpha$ ), et en y ajoutant des hypothèses simplificatrices. Comme dit précédemment, on s'intéressera plus particulièrement à des paramétrisations de  $v$  d'ordre de fermeture 0 (cf. la liste p. 136) et dépendantes de ( $u_\alpha^*$ ) :

$$v_\alpha = v_\alpha(z, u_\alpha^*) \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (4.9)$$

Pour l'instant, on supposera que  $v_\alpha$  est donnée par la formulation générale ci-dessus. La suite du chapitre introduira quelques formes explicites pour la paramétrisation (4.9); celles-ci feront office d'exemples.

### 4.1.3 Condition de couplage cohérent

Le couplage entre les couches d'Ekman se fait *via* deux mécanismes : d'une part, l'échange du flux turbulent  $\tau$ , implicitement présent dans le membre de droite de la condition de bord (4.8a) : d'autre part, *via* les viscosités turbulentes ( $\nu_\alpha$ ), qui peuvent éventuellement dépendre des échelles de friction ( $u_\alpha^*$ ), cf. (4.9). Le couplage se fait dès lors que les échelles ( $u_\alpha^*$ ) sont interdépendantes. Dans notre cas, c'est l'ensemble de l'étude menée sur les paramétrisations CLS et sur les formulations bulk qui nous permet d'obtenir une condition de couplage bien posé pour les couches d'Ekman.

On considérera que le couplage de couches d'Ekman est cohérent si les échelles de vitesse de friction ( $u_\alpha^*$ ) sont définies de façon à ce que :

- (c1) Le flux turbulent  $\tau$  soit constant par rapport à  $z$  sur la CLS (excluant éventuellement la SCV). Cela est vrai tant que :

$$u_o^* = \lambda_u u_a^* \quad (4.10)$$

où  $\lambda_u = \sqrt{\rho_a / \rho_o}$ . On supposera dans la suite que  $u_o^*$  est calculée à partir de  $u_a^*$  *via* (4.10), qui est *de facto* désormais supposée toujours vérifiée.

- (c2) La solution  $u_h$  elle-même soit continue en  $z = 0$ . Numériquement, il faut donc que lorsqu'on extrapole les solutions d'une part de  $z_o^1$  jusqu'à  $0^-$ , et d'autre part de  $z_a^1$  jusqu'à  $0^+$ , en utilisant les paramétrisations CLS, on obtienne la même valeur de surface, i.e.  $u_h(0^+) = u_h(0^-)$ . En réutilisant les équations (2.66a)-(2.66b) (incluant le choix de paramétrisation de SCVA inspiré de Liu *et al.*, 1979), et en supposant (4.10) vraie, cette condition peut se formuler ainsi :

$$\kappa \frac{[[u_h]]_{z_o^1}^{z_a^1}}{u_a^*} = \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}} \right) + \lambda_u \ln \left( \frac{z_o^1}{z_u^{o,r}} \right) + 1 + \lambda_u \quad (4.11)$$

où les valeurs de  $u_h$  en  $z_o^1$  et en  $z_a^1$  sont extraites des profils de solution (par exemple, *via* un opérateur « Neumann to Dirichlet »), et les longueurs de rugosité ( $z_u^{a,r}$ ) sont obtenues à partir des échelles de friction *via* les mécanismes hérités de la formulation bulk utilisée.

La condition (c1) est simple à traiter, puisqu'il suffit de définir  $u_o^*$  *via* (4.10) pour qu'elle soit vérifiée. En d'autres termes, imposer l'égalité des flux entre les deux sous-domaines ne pose pas de difficulté. Même dans le cas général, en relevant l'hypothèse de non-stratification (et donc, en dépassant le cadre du problème d'Ekman), cette condition est vérifiée du moment que les échelles de friction océaniques sont définies par (2.54).

La condition (c2) est nettement plus subtile, restrictive et difficile à implémenter. Elle revient à imposer que la paramétrisation des profils de solutions dans la CLS soit cohérente avec les flux forcés au bord de chaque sous-domaine. Pour pouvoir expliciter mathématiquement cette condition sous la forme (4.11), il était nécessaire de développer une théorie exhaustive des paramétrisations CLS (c'est l'objet du chapitre 2), ainsi que de s'intéresser aux schémas de fermeture propres à cette région (c'est l'objet du chapitre 3).

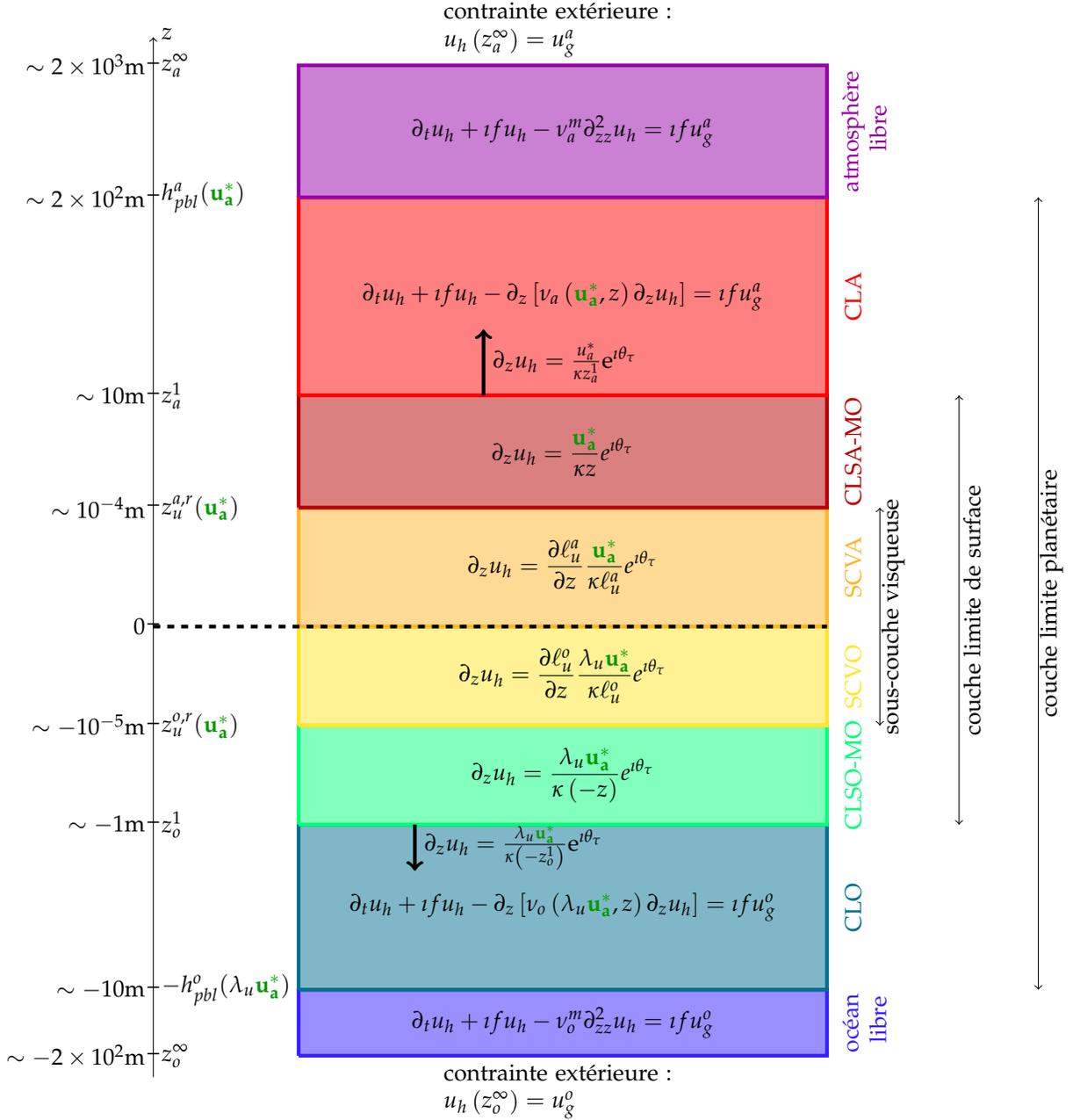


FIGURE 4.2 – Structure du problème d'Ekman couplé, avec mise en exergue de la dépendance des équations maîtresses vis à vis de l'échelle de vitesse de friction  $\mathbf{u}_a^*$ .

#### 4.1.4 Forme finale du problème de couches d'Ekman couplées

La figure 4.2 reprend la géométrie du problème, en explicitant les équations dirigeant la dynamique au sein de chacune des régions. On y remarque que de façon générale, les tailles des couches limites océanique et atmosphérique (c'est à dire les régions où la viscosité turbulente joue) dépendent elles-mêmes de l'état de la turbulence dans la CLS *via* les paramètres  $(u_\alpha^*)$ . On a typiquement :

$$h_{pbl}^\alpha(u_\alpha^*) \lesssim \frac{c_2^\alpha u_\alpha^*}{|f|} \quad (4.12)$$

où les  $(c_2^\alpha)$  sont des constantes sans dimension; on utilisera dans la suite  $c_2^o = 0.2$  (Benkley et Schulman, 1979; Arya, 1981) et  $c_2^a = 0.7$  (McWilliams et Huckle, 2005). Dans les modèles numériques, la paramétrisation des hauteurs de couche limite est plus sophistiquée que (4.12), et fait intervenir d'autres mécanismes dépassant le cadre de notre étude. Par souci de simplicité, on supposera que dans la suite, la hauteur de couche limite sera donnée par la borne supérieure dans (4.12). Ce choix a aussi une conséquence préjudiciable :  $f \rightarrow 0$  implique  $h_{pbl} \rightarrow +\infty^2$ .

Soulignons aussi que puisque  $(h_{pbl}^\alpha)$  dépend de  $(u_\alpha^*)$ , qui elle-même dépend de l'état de la solution, alors, dans le cas où le problème est instationnaire ( $\partial_t u_h \neq 0$ ), la géométrie du découpage en sous-couches du problème d'Ekman évolue elle aussi au cours du temps.

En résumé, l'ensemble des cas tests de couches d'Ekman s'inscrira dans le cadre défini par le système d'équations ci-dessous :

$$\partial_t u_h + i f u_h - \nu_o^m \partial_{zz}^2 u_h = i f u_g^o \quad (t, z) \in ]0; T] \times \left] z_o^\infty; h_{pbl}^o(u_o^*(t)) \right] \quad (4.13a)$$

$$\partial_t u_h + i f u_h - \partial_z [v_o \partial_z u_h] = i f u_g^o \quad (t, z) \in ]0; T] \times \left] h_{pbl}^o(u_o^*(t)); z_o^1 \right[ \quad (4.13b)$$

$$\partial_t u_h + i f u_h - \partial_z [v_a \partial_z u_h] = i f u_g^a \quad (t, z) \in ]0; T] \times \left] z_a^1; h_{pbl}^a(u_a^*(t)) \right[ \quad (4.13c)$$

$$\partial_t u_h + i f u_h - \nu_a^m \partial_{zz}^2 u_h = i f u_g^a \quad (t, z) \in ]0; T] \times \left[ h_{pbl}^a(u_a^*(t)); z_a^\infty \right[ \quad (4.13d)$$

$$\partial_z u_h(t, z_o^1) = \frac{\lambda_u u_a^*}{\kappa (-z_o^1)} e^{i\theta\tau} \quad t \in ]0; T] \quad (4.13e)$$

$$\partial_z u_h(t, z_a^1) = \frac{u_a^*}{\kappa z_a^1} e^{i\theta\tau} \quad t \in ]0; T] \quad (4.13f)$$

$$\ln\left(\frac{z_a^1}{z_u^{a,r}}\right) + \lambda_u \ln\left(\frac{z_o^1}{z_u^{o,r}}\right) + 1 + \lambda_u = \kappa \frac{[[u_h]]_{z_o^1}^{z_a^1}}{u_a^*} \quad t \in ]0; T] \quad (4.13g)$$

$$u_h(t, z_o^\infty) = u_g^o \quad t \in ]0; T] \quad (4.13h)$$

$$u_h(t, z_a^\infty) = u_g^a \quad t \in ]0; T] \quad (4.13i)$$

$$u_h(t=0, z) = u_g^o \quad z \in \left] z_o^\infty; z_o^1 \right[ \quad (4.13j)$$

$$u_h(t=0, z) = u_g^a \quad z \in \left] z_a^1; z_a^\infty \right[ \quad (4.13k)$$

2. Notons que de façon générale, le cas asymptotique  $f \rightarrow 0$  ne peut pas être traité comme problème d'Ekman; notamment, les vent et courant géostrophiques ne sont plus définis pour  $f = 0$ .

où les équations (4.13e) et (4.13f) réalisent le couplage entre les deux modèles, et l'équation (4.13g) assure que ce couplage est cohérent vis-à-vis du schéma de paramétrisations de la CLS. En un sens, cette équation, correspondant à un problème non-linéaire, peut être vue comme l'extension du problème de fermeture de formulation bulk : alors que les fermetures bulk ne prennent en compte que la CLS, la fermeture (4.13g) considère l'ensemble de la couche limite planétaire.

Notre objectif final est de déterminer des profils de solution au problème d'Ekman de façon à ce que la cohérence du couplage vis à vis des paramétrisations CLS soit assurée. Cela passe par la détermination de l'échelle atmosphérique  $u_a^*$ , qui permet à son tour, par cascade, de générer l'ensemble des effets turbulents dus à la présence d'une interface ; dans le cas simplifié du problème d'Ekman, ceux-ci se résument aux flux et viscosités turbulent(e)s.

Toujours sous les hypothèses de ce cas test, c'est l'équation (4.13g) qui donne une condition discriminante pour que ce couplage soit cohérent. Cette équation fait intervenir  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ , saut des solutions entre les premiers niveaux de chaque sous-modèle. Cela n'est pas surprenant : en effet, c'est à partir de ces valeurs que les formulations bulk, schémas de fermeture des paramétrisations CLS, déterminent l'échelle de friction  $u_a^*$ .

On ne dispose pas *a priori* de  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ . Celle-ci ne peut être obtenue qu'en déterminant séparément  $(u_h(z_\alpha^1))_{\alpha \in \{0, a\}}$  *via* des opérateurs « Neumann to Dirichlet »<sup>3</sup> en  $z_\alpha^1$  sur  $(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ . Le couplage cohérent de couches d'Ekman nécessite donc de résoudre le problème d'Ekman sur les régions  $(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ .

Par rapport à une simple résolution numérique (de quelque nature qu'elle soit), il nous semble intéressant de chercher des solutions littérales à des cas simplifiés du problème d'Ekman pour les raisons suivantes :

- (i) Les solutions littérales sont indépendantes de tout choix d'implémentation numérique (schémas de discrétisation, pas de maillage, erreurs d'arrondis...).
- (ii) Disposer de solutions littérales permet *a priori* d'avoir directement accès aux valeurs de premiers niveaux  $(u_h(z_\alpha^1))$  sans nécessairement devoir stocker une discrétisation numérique sur  $(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ .
- (iii) Bénéficier d'une solution littérale permet d'aller plus loin dans l'écriture de la condition (4.13g) : en particulier, on verra qu'on pourra l'écrire en isolant les dépendances de  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$  à  $u_a^*$ .
- (iv) Enfin, connaître les formes exactes des solutions au problème d'Ekman permet d'explorer aisément la sensibilité de celles-ci à différents paramètres d'entrées physiques (vent/courant géostrophiques, échelles de friction, etc.).

---

3. Cette classe d'opérateur permet de « transformer » une condition de bord type Neumann en une condition de bord type Dirichlet, sous réserve de connaissance des profils entiers de la solution, *via* une formule de Green (dans le cas unidimensionnel, cela correspond à une intégration par partie).

## 4.2 Quelques cas stationnaires avec solutions monodomaines littérales

Cette section vise à présenter quelques cas issus du système (4.13), auquel on rajoute des hypothèses simplificatrices permettant l'obtention de solutions littérales. Pour cette section seulement, on s'éloigne de la problématique de couplage : l'objectif est l'obtention de solutions littérales au problème d'Ekman vu comme deux sous-problèmes monodomaines indépendants, correspondant chacun à un milieu (océan ou atmosphère). Ces informations nous permettront ensuite, au § 4.3, d'étudier le couplage de ces deux sous-problèmes ; c'est alors que l'on passera de deux sous-problèmes monodomaines à un unique problème couplé.

Dans la présente section, on exprimera les solutions en fonction (entre autres) des échelles ( $u_\alpha^*$ ), qu'on considère pour l'instant comme données arbitraires. Les conditions de couplage cohérent (c1)-(c2) permettront ensuite, au § 4.3, de déterminer quelles doivent être les valeurs des échelles de friction pour que le couplage soit cohérent. Les profils de solution étant dépendants des échelles de friction, imposer une condition sur celles-ci reviendra ainsi à imposer une condition sur les profils de solution entiers pour que le couplage des couches d'Ekman soit cohérent.

Dans toute cette section, on s'intéressera à des solutions stationnaires de (4.13). On cherche ainsi des solutions stables (au sens dynamique) du problème d'Ekman couplé. On réécrit le système (4.13), en y ôtant les conditions d'initialisation temporelle (4.13j) et (4.13k), et en y imposant  $\partial_t = 0$ . On obtient alors :

$$\partial_z (v_\alpha \partial_z u_h) - i f u_h = -i f u_g, \quad z \in (z_\alpha^1, z_\alpha^\infty) \quad (4.14a)$$

$$u_h = u_g^\alpha, \quad z = z_\alpha^\infty \quad (4.14b)$$

$$\partial_z u_h = \frac{u_\alpha^*}{\kappa |z_\alpha^1|} e^{i\theta\tau}, \quad z = z_\alpha^1 \quad (4.14c)$$

Ce problème présente déjà un intérêt physique en soi, puisqu'il correspond à des solutions stationnaires du problème d'Ekman ; en outre, nous verrons par la suite que des résultats concernant ce cas stationnaire seront utiles pour l'étude du cas instationnaire. Les sous-sections à venir s'intéressent à différentes versions du problème (4.14).

Pour des raisons de simplicité, on considérera dans la suite qu'on a  $f > 0$ , ce qui n'est vrai que dans l'hémisphère nord. Cela dit, le cas  $f < 0$  est analytiquement très similaire (en substituant  $f \leftrightarrow -f$ ), d'où cette hypothèse supplémentaire. Le cas  $f = 0$ , théoriquement vérifié à l'équateur, est plus singulier ; une brève étude de ce cas est entreprise à l'annexe B.3.

### 4.2.1 Objectifs

Les quatre sous-sections à venir, du § 4.2.2 au § 4.2.4, s'intéressent au problème (4.14) pour des viscosités turbulentes polynomiales de  $z$ , de degré croissant, de 0 à 2. Pour chacun de ces sous-cas, on donnera une forme littérale de la solution, afin d'en extraire  $[[u_h]]_{z_0^1}^{z_0^1}$  ; cette information sera ensuite utilisée au § 4.3 pour déduire des conditions de couplage cohérent entre couches d'Ekman, *via* l'équation (4.13g). On donnera aussi au § 4.2.5 quelques pistes pour résoudre le cas polynomial de degré 3.

Il est à noter qu'au lieu de donner les profils complets des solutions, on aurait pu simplement donner  $[[u_h]]_{z_0^1}^{z_a^1}$ . En d'autres termes, si l'on s'en tient *stricto sensu* à notre objectif de couplage cohérent, la connaissance des profils de solution entiers est une information superflue. Nous avons tout de même choisi de donner les solutions, notamment parce qu'à notre connaissance, les solutions littérales pour des viscosités polynomiales de degré 2 ou 3 (traitées respectivement aux § 4.2.4 et § 4.2.5) ne sont pas connues dans la littérature actuelle.

On présentera aussi des résultats de simulations numériques afin de comparer, pour chaque sous-cas étudié, l'adéquation de la solution littérale avec des solutions issues de discrétisations par différences finies d'ordre 2. On utilisera deux simulations numériques :

- (i) Une solution obtenue par discrétisations uniformes de  $(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ , avec  $n_z = 300$  points de discrétisations. On aura typiquement  $\Delta z \approx 7\text{m}$  dans l'atmosphère et  $\Delta z \approx 0.7\text{m}$  dans l'océan.
- (ii) Une solution obtenue par discrétisations logarithmiques de  $(z_\alpha^1, z_\alpha^\infty)$ , c'est à dire correspondant à une discrétisation uniforme de  $\ln|z|$ , avec autant de points d'échantillonnage. On aura typiquement  $\Delta z \in [0.2; 40]\text{m}$  dans l'atmosphère et  $\Delta z \in [0.02; 4]\text{m}$  dans l'océan.

On constatera que ce n'est qu'en utilisant cette seconde discrétisation verticale, non uniforme de  $z$ , qu'on obtient une solution numérique satisfaisante. Cela est dû au fait que la solution est très sensible au pas des maillages au voisinage des premiers niveaux  $(z_\alpha^1)$ ; la discrétisation logarithmique utilisée reserre naturellement le maillage au voisinage de ces points. Dans les modèles numériques effectivement utilisés pour les simulations globales, bien que les choix de discrétisations verticales soient plus subtils que la seconde option présentée ci-dessus, ceux-ci préconisent aussi des reserrements autour de  $(z_\alpha^1)$ . Ce commentaire sur la validité de solutions numériques vient appuyer la nécessité d'établir des solutions littérales au problème d'Ekman pour pouvoir réaliser son couplage cohérent.

Pour ces expériences numériques, on utilise les constantes suivantes :

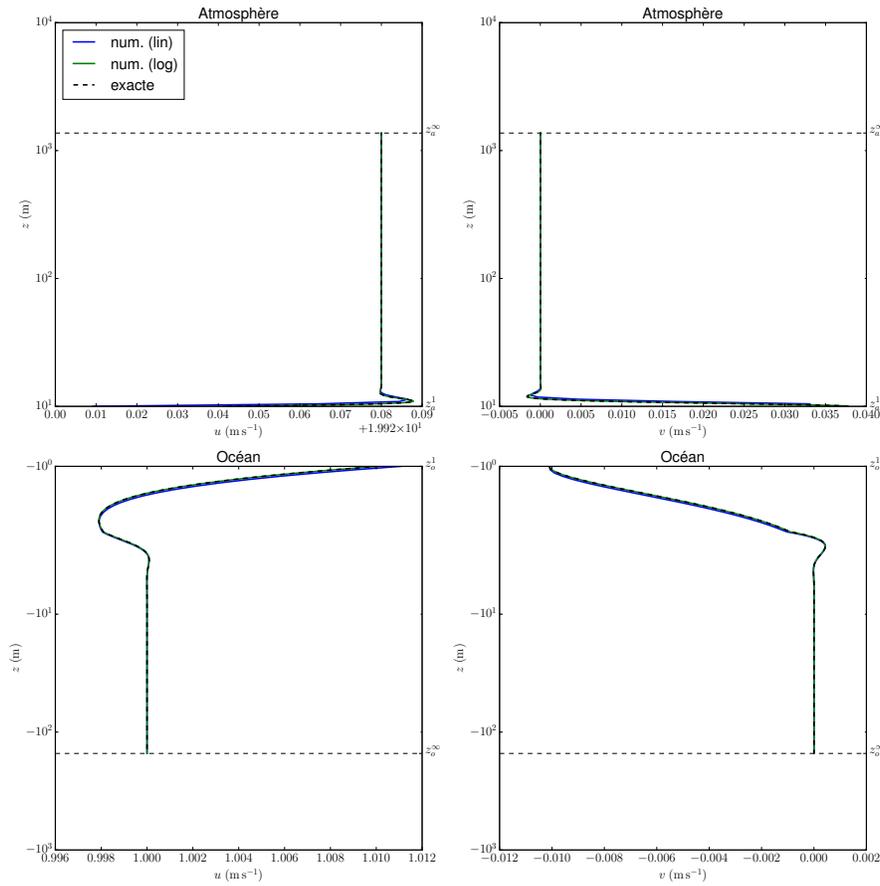
$$\begin{aligned}
 z_a^1 &= 10 \text{ m} & z_o^1 &= -1 \text{ m} \\
 \nu_a^m &= 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} & \nu_o^m &= 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\
 u_a^* &= 0.5 \text{ m s}^{-1} & u_o^* &= \lambda_u u_a^* \\
 u_g^a &= 20 \text{ m s}^{-1} & u_g^o &= 1 \text{ m s}^{-1} \\
 c_2^a &= 0.2 & c_2^o &= 0.7
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\lambda_u = \sqrt{\rho_a / \rho_o} \approx 3 \times 10^{-2}$$

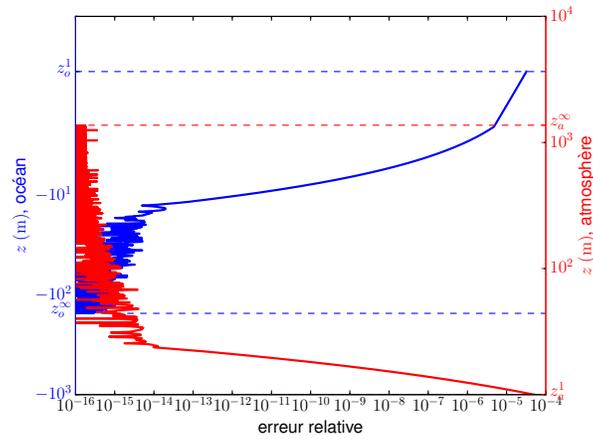
Le tableau 4.1 recense les différents cas traités pour  $\nu$ , ainsi que la littérature de référence : d'une part, comme paramétrisation physique pour  $\nu$ , et d'autre part, comme problème de couplage de couche d'Ekman.

#### 4.2.2 Viscosités constantes

On considère dans un premier temps que  $(\nu_\alpha)_{\alpha \in \{o,a\}}$  sont constantes, de valeurs arbitraires  $(\nu_\alpha^0)_{\alpha \in \{o,a\}}$ . En pratique, on sera naturellement amenés à choisir  $\nu_\alpha^0 = \nu_\alpha^m$  pour raccorder l'océan



(a) Profils de solutions.



(b) Erreurs relatives entre solutions littérale et numérique à discrétisation logarithmique pour l'océan (en bleu, ordonnée à gauche) et pour l'atmosphère (en rouge, ordonnée à droite). Pour ce cas, la précision machine est assez rapidement atteinte.

FIGURE 4.3 – Profils de solutions littérale (4.16) et numériques (a), et erreur relative (b) entre la solution littérale et la solution numérique à discrétisation logarithmique, pour des viscosités constantes de valeur  $(\nu_\alpha^m)_{\alpha \in \{o,a\}}$ . Les valeurs utilisées pour les paramètres sont données par (4.15).

Forme pour $\nu$	Littérature		Sous-section
	Physique	Couplage	
constante	Ekman <i>et al.</i> (1905)	Bye (2002)	§ 4.2.2
affine	Monin et Obukhov (1954)	Lewis et Belcher (2004)	§ 4.2.3
$P_2$			§ 4.2.4
$P_3$	O'Brien (1970)		§ 4.2.5

TABLEAU 4.1 – Les différents cas traités, ainsi que les références les introduisant.

et l'atmosphère libres. La résolution de (4.14) est immédiate et donne la solution suivante :

$$u_h(z) = u_g^\alpha + \frac{u_a^*}{\kappa |z_\alpha^1|} A_0^\alpha \sinh \left( \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_\alpha^0}} (z - z_\alpha^\infty) \right) e^{i\theta_\tau} \quad (4.16)$$

où  $\begin{cases} \chi = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ A_0^\alpha = \left[ \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_\alpha^0}} \cosh \left( \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_\alpha^0}} (z_\alpha^1 - z_\alpha^\infty) \right) \right]^{-1} \end{cases}$

L'extraction des valeurs de premiers niveaux est immédiate :

$$u_h(z_0^1) = u_g^o + \frac{u_o^*}{\kappa (-z_0^1)} \sqrt{\frac{\nu_o^0}{f}} \frac{1}{\chi} \tanh \left( \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_o^0}} (z_0^1 - z_o^\infty) \right) e^{i\theta_\tau} \quad (4.17a)$$

$$u_h(z_a^1) = u_g^a - \frac{u_a^*}{\kappa z_a^1} \sqrt{\frac{\nu_a^0}{f}} \frac{1}{\chi} \tanh \left( \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_a^0}} (z_a^\infty - z_a^1) \right) e^{i\theta_\tau} \quad (4.17b)$$

Le saut de solution entre les premiers niveaux s'écrit alors :

$$\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1} = \llbracket u_g^\alpha \rrbracket_o^a - C_0 u_a^* e^{i\theta_\tau} \quad (4.18a)$$

$$\text{avec } C_0 = \frac{\lambda_u}{\kappa (-z_0^1)} \sqrt{\frac{\nu_o^0}{f}} \frac{1}{\chi} \tanh \left( \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_o^0}} (z_0^1 - z_o^\infty) \right) + \frac{1}{\kappa z_a^1} \sqrt{\frac{\nu_a^0}{f}} \frac{1}{\chi} \tanh \left( \chi \sqrt{\frac{f}{\nu_a^0}} (z_a^\infty - z_a^1) \right) \quad (4.18b)$$

où on a noté  $\llbracket u_g^\alpha \rrbracket_o^a = u_g^a - u_g^o$ . La figure 4.3 représente un profil de solution issu de (4.16), ainsi que des profils issus de simulations numériques. On y remarque un très bon accord entre la solution littérale et les deux solutions numériques, qui sont proches l'une de l'autre.

### 4.2.3 Viscosités affines

On suppose désormais que les viscosités turbulentes sont des fonctions affines de  $z$  :

$$\nu_\alpha(z) = a_{\alpha,0} + a_{\alpha,1}z \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.19)$$

où les coefficients  $(a_{\alpha,0}, a_{\alpha,1}) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  sont définis de façon à ce que  $\nu_\alpha(z) > 0, z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ . Lewis et Belcher (2004) donnent la solution du problème d'Ekman dans ce cas. En adaptant

ces résultats aux conditions aux limites du problème (4.14), on obtient la forme suivante de solutions :

$$u_h(z) = u_g^\alpha + \left[ A_\alpha^1 I_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z) \right) + B_\alpha^1 K_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z) \right) \right] u_a^* e^{i\theta\tau} \quad (4.20)$$

avec :

$$A_\alpha^1 = \frac{1}{\kappa\chi z_\alpha^1} \sqrt{\frac{v_\alpha(z_\alpha^1)}{f}} \left[ I_0' \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z_\alpha^1) \right) - \frac{I_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z_\alpha^\infty) \right)}{K_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z_\alpha^\infty) \right)} K_0' \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z_\alpha^1) \right) \right]^{-1} \quad (4.21a)$$

$$B_\alpha^1 = - \frac{I_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z_\alpha^\infty) \right)}{K_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{\alpha,1}^2}} v_\alpha(z_\alpha^\infty) \right)} A_\alpha^1 \quad (4.21b)$$

où  $I_0$  et  $K_0$  sont les deux fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0. Avec cette forme de solution, le saut de solution entre les premiers niveaux est donné par :

$$[[u_h]]_{z_\alpha^1}^{z_\alpha^\infty} = [[u_g^\alpha]]_0^a - C_1 u_a^* e^{i\theta\tau} \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } C_1 = & A_a^1 I_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{a,1}^2}} v_a(z_a^1) \right) + B_a^1 K_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{a,1}^2}} v_a(z_a^1) \right) \\ & + \lambda_u \left[ A_o^1 I_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{o,1}^2}} v_o(z_o^1) \right) + B_o^1 K_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f}{a_{o,1}^2}} v_o(z_o^1) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.22b)$$

La figure 4.4 représente des profils de solution dans le cas où on étendrait la paramétrisation des viscosités turbulentes de la CLS à l'ensemble de la CLP, ce qui revient à prescrire :

$$v_\alpha(z) = \kappa u_a^* |z|, \quad \alpha \in \{o, a\}, z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.23)$$

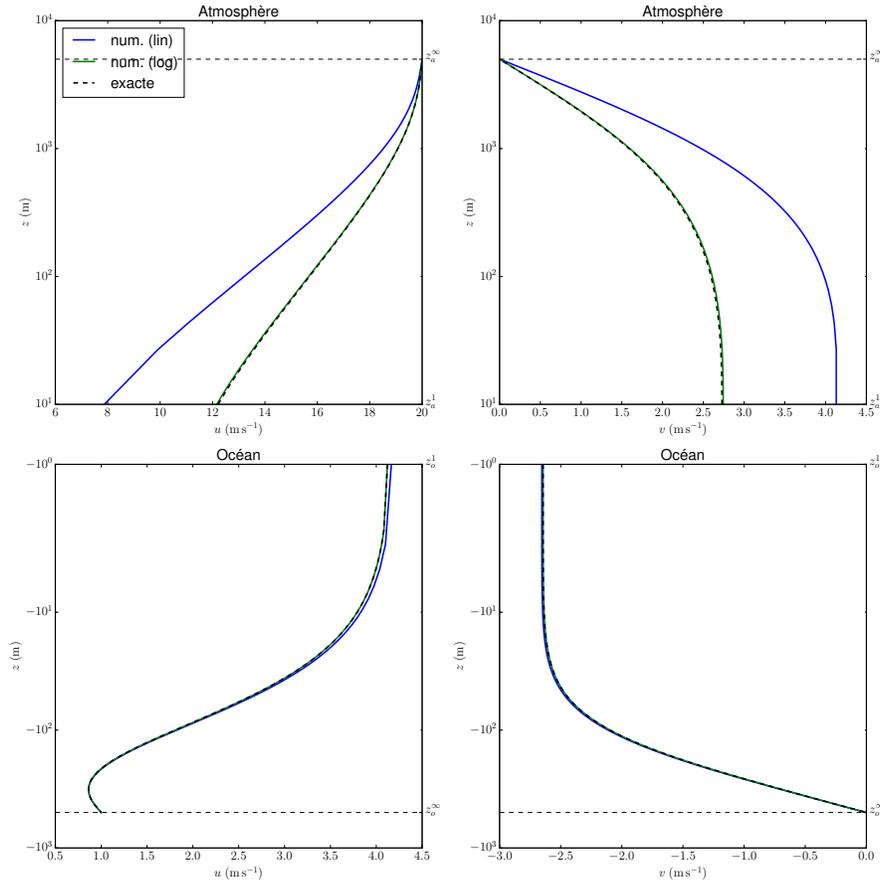
où on rappelle que comme précisé dans (4.15), on utilise  $u_a^* = 0.5 \text{ m s}^{-1}$  et  $u_o^* = \lambda_u u_a^*$ .

L'étude de cette figure révèle que la solution littérale est en très bon accord avec la solution numérique à discrétisation logarithmique. En revanche, la solution numérique à discrétisation uniforme se distingue de façon perceptible de ces deux solutions, notamment dans l'atmosphère : cela est dû au fait que, comme expliqué précédemment, résoudre le problème d'Ekman de façon satisfaisante nécessite d'avoir une grille très fine au niveau des cotes auxquelles sont prescrits les flux turbulents, c'est à dire aux voisinages des  $(z_\alpha^1)$ .

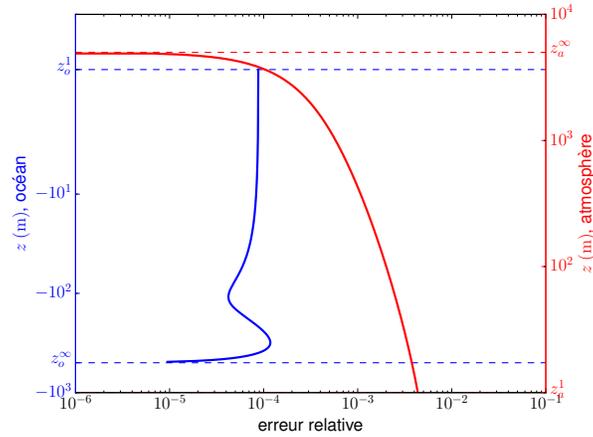
#### 4.2.4 Viscosités polynomiales de degré 2

On cherche toujours à résoudre le problème (4.14), en supposant que la viscosité a une forme polynomiale de degré 2 de la variable  $z$  :

$$v_\alpha(z) = \sum_{i=0}^2 p_i z^i \quad (4.24)$$



(a) Profils de solutions.



(b) Erreurs relatives entre solutions littérale et numérique à discrétisation logarithmique pour l'océan (en bleu, ordonnée à gauche) et pour l'atmosphère (en rouge, ordonnée à droite).

FIGURE 4.4 – Profils de solutions littérale (4.20) et numériques (a), et erreur relative (b) entre la solution littérale et la solution numérique à discrétisation logarithmique, pour des viscosités affines de  $z$  données par (4.23). Les valeurs utilisées pour les paramètres sont données par (4.15).

où  $(p_i)_{0 \leq i \leq 2} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $p_2 \neq 0$ , et que  $\forall z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ ,  $v_\alpha(z) > 0$ . Dans les applications, les coefficients  $(p_i)$  dépendent aussi du milieu dans lequel on se situe,  $\alpha \in \{0, a\}$ . Par souci de simplicité des notations, on omettra dans toute cette sous-section l'indice  $\alpha$ .

La solution littérale à cette équation utilise la fonction hypergéométrique de Gauss  ${}_2F_1$ , définie par :

$${}_2F_1(a, b, c; \eta) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(a)_s (b)_s \eta^s}{(c)_s s!} \text{ pour } |\eta| < 1 \quad (4.25)$$

où, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\cdot)_n$  est le *symbole de Pochhammer*, défini par :

$$(z)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (z + j), \quad (z, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* \quad (4.26a)$$

$$(z)_0 = 1, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.26b)$$

${}_2F_1$  peut être prolongée analytiquement pour  $|\eta| \geq 1$ , sous la condition  $c \notin \mathbb{Z}_-$  (pour plus de détails, voir [Olver, 2010](#)). En particulier, pour  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ , au voisinage de  $\eta = 0$ , la fonction  $\eta \mapsto {}_2F_1(a, b, c; \eta)$  est solution de l'équation différentielle suivante, appelée « équation hypergéométrique » :

$$\eta(1-\eta) \frac{d^2 w}{d\eta^2} + [c - (a+b+1)\eta] \frac{dw}{d\eta} - abw = 0 \quad (4.27)$$

Cette équation possède trois singularités simples sur  $\bar{\mathbb{C}}$  : 0, 1 et  $\infty$ . Sans rentrer dans les détails, il existe donc autant de paires de solutions à (4.27), chacune numériquement satisfaisante au voisinage de la singularité considérée.

Il s'agit alors de déterminer un changement de variable  $\eta = \eta(z)$ , ainsi qu'un jeu de coefficients  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  tels que (4.14), avec la viscosité donnée par (4.24), soit équivalente à (4.27).

Pour le détail des calculs, on renvoie à l'annexe B.1, où  $\eta$  et  $(a, b, c)$  sont explicités. Il existe, pour  $\alpha \in \{0, a\}$ , deux jeux de constantes  $(A_2^\alpha, B_2^\alpha) \in \mathbb{C}^2$ , indépendantes de  $u_\alpha^*$ , telles que la solution exacte de (4.14) avec une viscosité donnée par (4.24) soit :

$$u_h^\alpha(z) = u_g^\alpha + u_\alpha^* [A_2^\alpha {}_2F_1(a, b; c; \eta(z)) + B_2^\alpha G_2(a, b; c; \eta(z))] \quad (4.28)$$

La fonction  $G_2$  est un développement logarithmique de la fonction hypergéométrique au voisinage de  $\eta = 0$ . Elle est définie par (B.7). Les deux constantes  $(A_2^\alpha, B_2^\alpha)$  sont déterminées à l'aide des conditions de bord de  $z = z_\alpha^1$  (prescription d'un flux) et en  $z = z_\alpha^\infty$  (raccord avec le courant/vent géostrophique); elles sont données par (B.10).

On a utilisé des profils  $P_2$  définis par les trois contraintes suivantes :

$$v_\alpha(z_\alpha^1) = \kappa u_\alpha^* \left| z_\alpha^1 \right| + v_\alpha^m \quad (4.29a)$$

$$v_\alpha(z_\alpha^\infty) = v_\alpha^m \quad (4.29b)$$

$$\int_{(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)} v_\alpha(z) dz = \int_{(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)} v_\alpha^{kpp}(z) dz \quad (4.29c)$$

où  $v_\alpha^{kpp}$  est un profil polynomial adapté de la forme dite KPP. On distinguera 3 types de profils KPP, tous mathématiquement définis comme étant des polynômes de degré 3 de la variable  $z$ .

Référence ; légende sur la figure 4.5	Expression de $v_\alpha^t$	Différence par rapport à la forme classique
Troen et Mahrt (1986) ; courbe « classique »	$\kappa u_\alpha^*  z  \left(1 - \frac{ z }{h_{pbl}}\right)^2 \quad (4.30)$	
McWilliams et Huckle (2005) ; courbe « Mc- Williams »	$\begin{cases} \kappa u_\alpha^*  z  \left(1 - \frac{ z }{h_{pbl}}\right)^2 & \text{si }  z  \geq h_{pbl}/20 \\ \kappa u_\alpha^*  z  \left(1 - \frac{ z }{h_{pbl}}\right)^2 + \frac{(z - h_{pbl}/20)^2}{h_{pbl}^2/10} & \text{si }  z  < h_{pbl}/20 \end{cases} \quad (4.31)$	Régularisation pour éviter $v_\alpha^t \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ ; correspond à une augmentation du mélange turbulent vertical due aux effets de vagues.
Aucune ; courbe « $\mathcal{C}^1$ »	<p>Polynôme <math>P_3</math> défini par les contraintes</p> $\begin{aligned} v_\alpha(z_\alpha^1) &= \kappa u_\alpha^*  z_\alpha^1  \\ v'_\alpha(z_\alpha^1) &= \varepsilon_a \kappa u_\alpha^* \\ v_\alpha(z_\alpha^\infty) &= v_\alpha^m \\ v'_\alpha(z_\alpha^\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$ <p>où <math>\varepsilon_0 = -1</math> et <math>\varepsilon_a = 1</math>.</p>	Régularisation pour éviter $v'_\alpha(z_\alpha^\infty) = 0$ ; connection $\mathcal{C}^1$ avec le régime d'océan ou d'atmosphère libre.

TABLEAU 4.2 – Les différents types de profils KPP.

Ceux-ci sont recensés par le tableau 4.2.

À notre avis, le profil type  $\mathcal{C}^1$ , défini par (4.32), nous semble être le plus cohérent mathématiquement, puisqu'il permet un raccord  $\mathcal{C}^1$  à la fois en  $(z_\alpha^1)$  avec des profils type CLS,  $\nu_\alpha^{CLS} : z \mapsto \kappa u_\alpha^* |z|$ , et en  $(z_\alpha^\infty)$  avec les viscosités constantes de fond ( $\nu_\alpha^m$ ), qui correspondent aux profils de viscosité dans l'océan et l'atmosphère libres. Il existe deux différences (numériquement mineures) par rapport aux profils KPP classique (4.30) et modifié (4.31), puisque ces deux profils ne vérifient rigoureusement ni  $\nu_\alpha(z) = \kappa u_\alpha^* z + o(z^2)$  au voisinage de  $z_\alpha^1$ , ni  $\nu_\alpha(z_\alpha^1) = \nu_\alpha^m$ . Enfin, remarquons qu'à partir du profil classique (4.30), il est possible d'obtenir très facilement un profil « presque égal » au profil appelé  $\mathcal{C}^1$ , en ajoutant  $\nu_\alpha^m$  aux profils classique ; « presque », car on aura alors  $\nu_\alpha^t(z_\alpha^1) = \kappa u_\alpha^* |z_\alpha^1| + \nu_\alpha^m \approx \kappa u_\alpha^* |z_\alpha^1|$ , puisqu'on a quasi systématiquement  $\nu_\alpha^m \ll \kappa u_\alpha^* |z_\alpha^1|$ .

Pour cette raison, la forme KPP utilisée pour définir la forme approchée  $P_2$  est la forme  $\mathcal{C}^1$ , définie par (4.32). En un sens, (4.29) est un polynôme de degré 2 « ressemblant » au profil type KPP (4.32), qui correspond à une forme relativement commune de paramétrisation pour les viscosités turbulentes, en cas non stratifié (O'Brien, 1970). Ces profils sont aussi adaptables à des cas stratifiés.

Une comparaison numérique entre les différents types de profils KPP du tableau 4.2, et le profil (4.29), utilisé pour notre cas numérique, est représentée sur la figure 4.5. Comme cela est attendu, les profils classique et McWilliams sont très similaires, à l'exception de la région où  $|z| \gtrsim |z_\alpha^1|$ . Le profil dit  $\mathcal{C}^1$  est relativement proche des deux autres profils  $P_3$ , bien qu'on remarque que le simple fait d'imposer  $\nu_\alpha(z_\alpha^\infty) = \nu_\alpha^m \neq 0$  engendre des différences non négligeables (de l'ordre de quelques pourcents) sur la valeur maximale de la viscosité turbulente, même si  $\nu_\alpha^m \sim 10^{-6}, 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Le profil  $P_2$  utilisé correspond à un profil  $P_3$  « aplati » ; sa valeur maximale est moindre, mais son enveloppe plus étendue. Soulignons que tel qu'il est défini par (4.29) et représenté sur la figure 4.5, le profil  $P_2$  ne se raccorde pas de façon  $\mathcal{C}^1$  en  $z = z_\alpha^\infty$  avec les régimes d'océan et d'atmosphère libres. Ne disposant que de 3 contraintes pour définir ce profil, on a préféré imposer le raccord  $\mathcal{C}^1$  aux niveaux  $(z_\alpha^1)$ , quitte à n'assurer qu'un raccord  $\mathcal{C}^0$  aux niveaux  $(z_\alpha^\infty)$ .

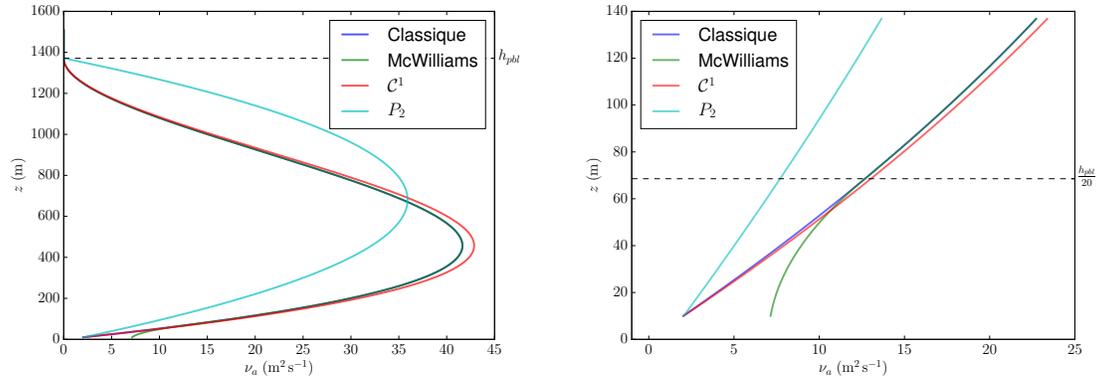
La figure 4.6 présente une comparaison de solutions au problème d'Ekman stationnaire avec des viscosités  $P_2$  définies par (4.29), entre la solution littérale (4.28) et des solutions numériques. On y observe un moins bon accord entre solutions littérale et numérique à discrétisation logarithmique que pour les cas des § 4.2.2 et 4.2.3, notamment dans l'atmosphère. Sans pouvoir en déterminer la cause exacte, nous pensons que cela pourrait s'expliquer par des erreurs de troncature dans les implémentations numériques des fonctions spéciales définissant (4.28), qui font intervenir des séries entières nécessitant un très grand nombre de termes lorsque  $|z| \nearrow |z_\alpha^\infty|$ .

### 4.2.5 Viscosités polynomiales de degré 3

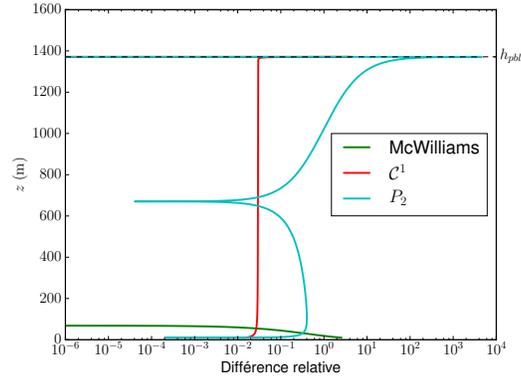
On considère désormais une viscosité de cette forme :

$$\nu_\alpha(z) = \sum_{j=0}^3 p_j z^j \quad (4.33)$$

On impose toujours  $\nu_\alpha(z) > 0$ ,  $z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ . De façon analogue à ce qu'on a fait pour les développements précédents, on va chercher un changement de variable permettant de ramener l'équation homogène associée (4.14), avec la viscosité (4.33), à une équation de référence. Dans le cas où  $\nu_\alpha \in P_3[z]$ , on cherche à se ramener à l'équation différentielle ordinaire de Heun

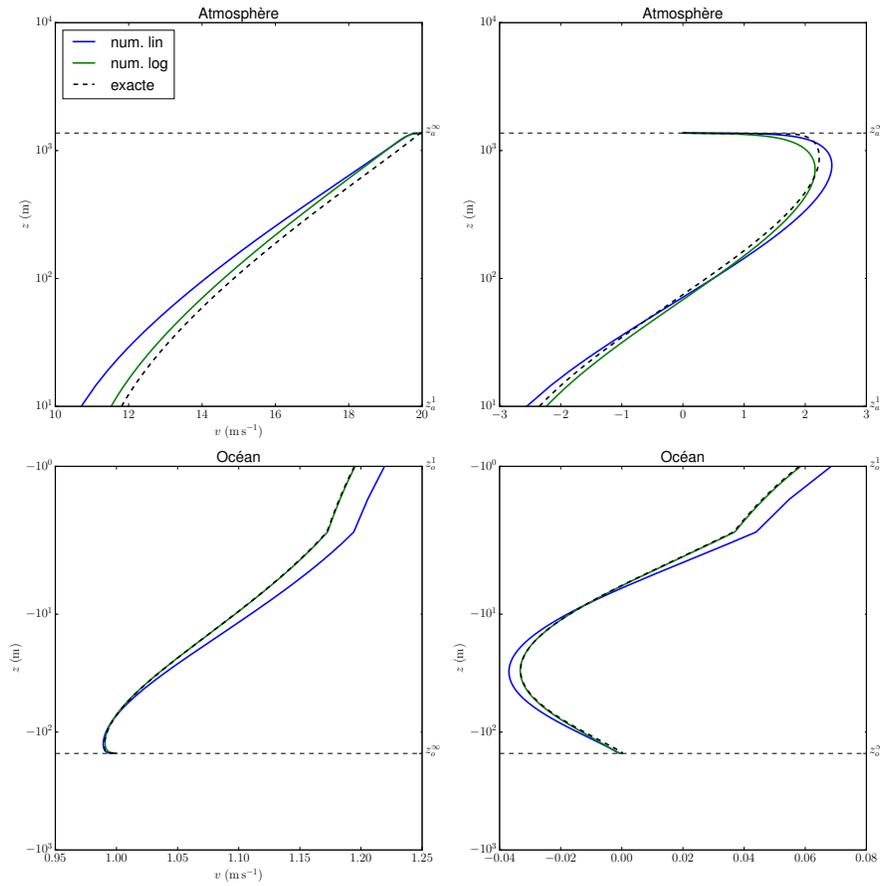


(a) Profils de viscosités.

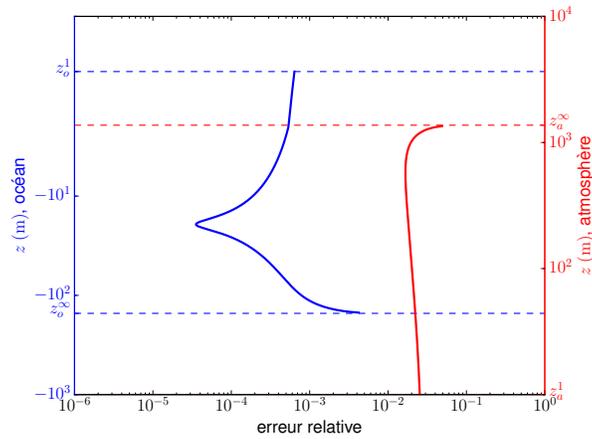
(b) Zoom de (a) autour de  $z_a^1$ .

(c) Différences relatives vis à vis du profil KPP classique.

FIGURE 4.5 – Différents profils de viscosités pour la CLP atmosphérique (voir le tableau 4.2) : le profil classique (Troen et Mahrt, 1986), le profil corrigé par McWilliams et Huckle (2005), le profil  $P_3$  défini par les contraintes (4.32), et le profil  $P_2$  « ressemblant » défini par (4.29). Les profils de viscosités turbulentes dans la CLP océanique sont analogues.



(a) Profils de solutions.



(b) Erreurs relatives entre solutions littérale et numérique à discrétisation logarithmique pour l'océan (en bleu, ordonnée à gauche) et pour l'atmosphère (en rouge, ordonnée à droite).

FIGURE 4.6 – Profils de solutions littérale (4.28) et numériques (a), et erreur relative (b) entre la solution littérale et la solution numérique à discrétisation logarithmique, pour des viscosités polynomiales de degré 2 de  $z$  données par (4.29). Les valeurs utilisées pour les paramètres sont données par (4.15).

(Ronveaux, 1995; Kristensson, 2010) :

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + \left( \frac{\gamma}{\eta} + \frac{\delta}{\eta - 1} + \frac{\varepsilon}{\eta - a} \right) \frac{dw}{d\eta} + \frac{\alpha\beta\eta - q}{\eta(\eta - 1)(\eta - a)} w = 0 \quad (4.34)$$

d'inconnue  $w : \eta \mapsto w(\eta)$ , et qui est définie sous la contrainte  $\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \varepsilon$ . (4.34) est une équation différentielle possédant 4 singularités régulières dans  $\mathbb{C}$  ; en  $0, 1, a$  et  $\infty$ .

On va toujours chercher  $\eta$  comme fonction affine de  $z$ . La stratégie adoptée pour déterminer  $\eta$  est de chercher une fonction affine qui envoie deux des racines de (4.33) sur 0 et 1. Pour ce faire, on aura besoin de supposer que (4.33) possède au moins deux racines distinctes. On choisira ensuite  $a$  comme étant l'image de la troisième racine de (4.33) par cette transformation  $\eta$ . Nous verrons par la suite qu'il est nécessaire que  $a \notin \{0, 1\}$  ; en d'autres termes, le polynôme (4.33) doit être scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ . Ceci n'est pas une hypothèse lourde, puisque cette condition est vérifiée par les formes standards de paramétrisations des viscosités turbulentes. Il suffit ensuite d'ajuster les autres paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, q)$ , pour faire concorder (4.34) avec (4.14).

Nous n'avons pas pu entièrement résoudre ce cas. On renvoie à l'annexe B.2 pour plus de détails sur l'état de notre progression.

#### 4.2.6 Comment exploiter ces résultats ?

Les résultats présentés dans cette section permettent, dans le cas de viscosités polynomiales de degré au plus 2 de  $z$ , d'obtenir des solutions littérales au problème de couches d'Ekman stationnaire. En particulier, il est possible d'en extraire  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$  comme fonction de  $\llbracket u_g^{\alpha} \rrbracket_o^a$ , donnée par les contraintes extérieures, et de  $(u_{\alpha}^*)_{\alpha \in \{o, a\}}$ , échelles de friction, qui elles, ne sont pas connues *a priori*.

Les schémas de paramétrisations de viscosités turbulentes polynomiaux de  $z$  ne sont pas rares ; cependant, il est important de souligner que dans la plupart des cas, les coefficients de ces polynômes dépendent de l'état de la turbulence dans la CLP *via* les échelles  $(u_{\alpha}^*)$ . Ainsi, en un sens, les profils  $u_h$  dans les couches d'Ekman, et *a fortiori*, la valeur du saut  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ , dépendent « doublement » des échelles  $(u_{\alpha}^*)$  : d'une part, *via* les conditions de transmission turbulentes en  $(z_{\alpha}^1)$ , ce qui se traduit explicitement dans les profils décrits ci-dessus ; d'autre part, *via* la dépendance des coefficients polynomiaux vis à vis de  $(u_{\alpha}^*)$ , qui, bien qu'elle ne soit pas explicitement exprimée, doit aussi être prise en compte.

Comme expliqué en début de section, une fois les solutions monodomaines connues, c'est *via* l'équation de cohérence (4.13g) qu'on pourra déterminer ces échelles, et réaliser le couplage cohérent de couches d'Ekman.

### 4.3 Couplage cohérent de couches d'Ekman stationnaires

Cette section a pour but de dimensionner les échelles de friction  $(u_{\alpha}^*)_{\alpha \in \{o, a\}}$  de façon à ce que les couches d'Ekman soient bien couplées non seulement entre elles (cf. (c1)), mais surtout vis à vis des schémas de paramétrisation de la CLS (cf. (c2)). En conservant les hypothèses qu'on a introduites précédemment, cette condition s'écrit sous la forme de l'équation de fermeture suivante, correspondant à (4.13g) :

$$\ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}(u_a^*)} \right) + \lambda_u \ln \left( \frac{z_o^1}{z_u^{o,r}(\lambda_u u_a^*)} \right) + 1 + \lambda_u = \kappa \frac{[[u_h]]_{z_o^1}^{z_a^1}}{u_a^*} \quad (4.35)$$

C'est donc de cette équation dont il sera question au sein de cette section.

Le couplage avec le schéma de paramétrisations CLS est réalisé *via* la présence des longueurs de rugosité  $(z_u^{\alpha,r})_{\alpha \in \{o,a\}}$  dans (4.35). On a vu au chapitre 3 que les formulations bulk, schémas de fermeture des paramétrisations CLS, peuvent être vues comme des algorithmes de point fixe permettant de déterminer les échelles de friction  $(u_a^*)$  dimensionnant correctement les profils de solution dans la CLS, en s'appuyant sur la forme de la dépendance des longueurs de rugosité aux échelles de friction.

Le § 4.3.1 présente des résultats numériques pour des cas simples, sans considérer la dépendance des viscosités turbulentes aux échelles de friction. Le § 4.3.2 s'intéresse au cas nettement plus complexe, et physiquement réaliste, où on prend en compte une double dépendance des profils (*via* à la fois les conditions aux limites et les viscosités turbulentes) de solution aux échelles de friction.

### 4.3.1 Viscosités turbulentes indépendantes des $(u_a^*)$

Cette sous-section s'intéresse au cas où les viscosités turbulentes ne sont fonctions que de  $z$  uniquement; on les suppose donc, en particulier, indépendantes des échelles  $(u_a^*)$ . On suppose aussi que les cotes  $(z_a^\infty)$  sont indépendantes des  $(u_a^*)$ .

Sous cette hypothèse, on aura toujours :

$$[[u_h]]_{z_o^1}^{z_a^1} = [[u_g^\alpha]]_o^a - C \frac{u_a^*}{\kappa} e^{i\theta\tau} \quad (4.36)$$

où  $C \in \mathbb{C}$  est indépendante de  $(u_a^*)$ , mais dépend de la forme des viscosités turbulentes dans la CLP. À titre d'exemple, elle est définie par (4.18b) pour des viscosités turbulentes constantes, ou par (4.22b) pour des viscosités affines.

Afin de simplifier le problème, on imposera  $z_u^{o,r} = -\lambda_u z_u^{a,r}$ . Cela correspond à prescrire le même rapport entre les longueurs de rugosité qu'entre les échelles de friction. Rappelons qu'au chapitre 2, le choix des  $z_u^{o,r}$  a été considéré comme le degré de liberté, au sein des grandeurs paramétrisant la CLS, *via* lequel le caractère  $\mathcal{C}^1$  (et non seulement  $\mathcal{C}^0$ ) de la solution en  $z = 0$  pouvait être assuré. Le choix fait ici correspond à assurer cette contrainte dans le cas où les SCV sont paramétrisées par la coordonnée visqueuse définie par (2.77).

L'équation (4.35), caractérisant le couplage cohérent, prend alors cette forme simplifiée :

$$\ln \left( \frac{(z_a^1)^{\frac{1}{1+\lambda_u}} (-z_o^1)^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}}}{\lambda_u^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}} z_u^{a,r}(u_a^*)} \right) - \kappa \frac{[[u_g^\alpha]]_o^a}{(1+\lambda_u) u_a^*} + 1 + \frac{C}{1+\lambda_u} = 0 \quad (4.37)$$

$z_u^{a,r} : u_a^* \mapsto z_u^{a,r}(u_a^*)$  est donnée par la formulation bulk utilisée pour paramétriser la CLS. Dans (4.37), toute dépendance à  $u_a^*$  est explicitement écrite.

Une forme est donnée par [Smith \(1988\)](#) :

$$z_u^{a,r} = a_2 (u_a^*)^2 + \frac{a_{-1}}{u_a^*} \quad (4.38)$$

où  $(a_2, a_{-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Même avec cette forme simple, seule l'obtention numérique d'une solution de (4.37) est envisageable.

On peut éventuellement traiter les cas asymptotiques  $a_2 (u_a^*)^2 \ll \frac{a_{-1}}{u_a^*}$  et son inverse, qui sont tous les deux physiquement relativement fréquents (ils correspondent respectivement à des cas de convection libre et de vents forts). La figure 4.7 montre que la limite « convection libre » peut être justifiée pour  $\left| \left[ u_h \right]_{z_0^1}^{z_a^1} \right| \leq 2 \text{ m s}^{-1}$ , tandis que la limite « vents forts » devient licite dès que  $\left| \left[ u_h \right]_{z_0^1}^{z_a^1} \right| \geq 10 \text{ m s}^{-1}$ .

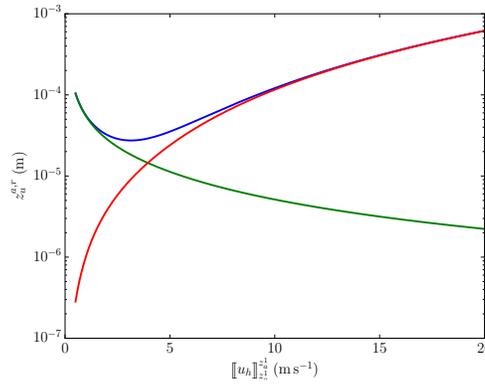


FIGURE 4.7 – Validité numérique des limites asymptotiques pour le calcul de  $z_u^{a,r}$ . La courbe bleue représente la longueur de rugosité (4.38); la courbe verte, le cas asymptotique de convection libre; enfin, la courbe rouge représente le cas asymptotique de vents forts.

#### Cas $u_a^* \ll 1$ (convection libre)

En faisant l'approximation que  $z_u^{a,r} (u_a^*) \approx \frac{a_{-1}}{u_a^*}$ , on peut alors écrire (4.37) sous la forme suivante :

$$u_a^* \ln u_a^* + p_{cl} u_a^* = q_{cl} \quad (4.39)$$

où :

$$p_{cl} = \ln \left( \frac{(z_a^1)^{\frac{1}{1+\lambda_u}} (-z_o^1)^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}}}{\lambda_u^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}} a_{-1}} \right) + 1 + \frac{C}{1 + \lambda_u} \quad (4.40a)$$

$$q_{cl} = \kappa \frac{\left[ \left[ u_g \right]_o^a \right]^a}{(1 + \lambda_u)} \quad (4.40b)$$

La solution est donnée par :

$$u_a^* = \frac{q_{cl}}{W_1 (e^{p_{cl}} q_{cl})} \quad (4.41)$$

où  $W_1$  est la première branche de la fonction de Lambert, définie telle que  $W_1(z)e^{W_1(z)} = z$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

**Cas  $\frac{a-1}{u_a^*} \ll 1$  (vents fort)**

Cette fois-ci, on fait l'approximation que  $z_u^{a,r}(u_a^*) \approx a_2 (u_a^*)^2$ . À l'image de (4.39), on peut remettre (4.37) sous la forme canonique suivante :

$$u_a^* \ln u_a^* + p_{vf} u_a^* = q_{vf} \quad (4.42)$$

où :

$$p_{vf} = -\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{C}{1 + \lambda_u} + \ln \left( \frac{(z_a^1)^{\frac{1}{1+\lambda_u}} (-z_0^1)^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}}}{\lambda_u^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}} a_2} \right) \right] \quad (4.43a)$$

$$q_{vf} = -\frac{\kappa}{2} \frac{\llbracket u_s^a \rrbracket_o^a}{(1 + \lambda_u)} \quad (4.43b)$$

De façon analogue, la solution est donnée par :

$$u_a^* = \frac{q_{vf}}{W_1 \left( e^{p_{vf}} q_{vf} \right)} \quad (4.44)$$

**Un exemple numérique**

Ce paragraphe a pour objectif de présenter un simple cas test numérique, dont le but est de quantifier l'erreur commise sur la condition de cohérence si elle n'est pas prise en compte. L'idée est simple : dans un premier temps, on génère, à partir d'une valeur de  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$  et d'une formulation bulk complète, un grand nombre de profils de solutions cohérents, desquels on extrait autant de valeurs des solutions aux cotes ( $z_\alpha^\infty$ ). Dans un second temps, on suppose qu'on ne connaît pas l'échelle de friction permettant d'obtenir des profils cohérents, mais seulement les conditions aux bords extraites des solutions de référence calculées précédemment. On teste alors « à l'aveugle » la condition de cohérence sur une plage de valeurs pour  $u_a^*$ . L'idée est de quantifier à quel point la condition de cohérence n'est pas vérifiée, en connaissant seulement des informations sur la solution aux cotes « infinies » (comme c'est le cas pour le problème d'Ekman), et sans connaître l'échelle de friction cohérente.

D'un point de vue purement technique, la procédure est la suivante :

- (1) On fixe  $u_h(z_0^1) = 0 \text{ m s}^{-1}$ . Pour un grand nombre de valeurs de  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$ , de  $0.5 \text{ m s}^{-1}$  à  $20 \text{ m s}^{-1}$ , on calcule l'échelle  $u_{a,ref}^*$  à l'aide d'une formulation bulk « complétée » (i.e., prenant en compte la sous-couche visqueuse et la CLS océanique).
- (2) On définit la viscosité par une fonction affine définie par les contraintes suivantes :

$$\nu_\alpha \left( z_\alpha^1 \right) = \kappa u_\alpha^* \left| z_\alpha^1 \right| \quad (4.45a)$$

$$\int_{(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)} \nu_\alpha \, dz = \int_{(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)} \nu_\alpha^{kpp} \, dz \quad (4.45b)$$

où, dans (4.45b),  $v_\alpha^{kpp}$  est le profil  $P_3$  défini par (4.32). Le test numérique effectué est le suivant :

- (3) On définit les profils de solution de référence en résolvant le problème d'Ekman instationnaire forcé par ces conditions aux limites :

$$u_h(z_0^1) = 0 \quad (4.46a)$$

$$\partial_z u_h|_{z_0^1} = \frac{\lambda_u u_{a,ref}^*}{\kappa(-z_0^1)} \quad (4.46b)$$

$$u_h(z_a^1) = \llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1} \quad (4.46c)$$

$$\partial_z u_h|_{z_a^1} = \frac{u_{a,ref}^*}{\kappa z_a^1} \quad (4.46d)$$

- (4) On déduit de ces profils de solution les valeurs de  $\llbracket u_g^\alpha \rrbracket_o^a$  et de  $C =$

$$\kappa \frac{\llbracket u_g^\alpha \rrbracket_o^a - \llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}}{u_a^*}.$$

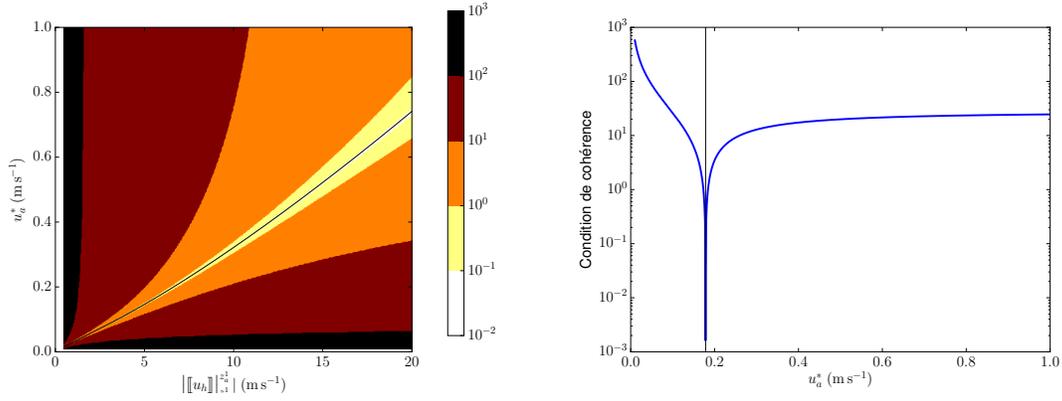
- (5) À partir des valeurs de  $\llbracket u_g^\alpha \rrbracket_o^a$  et de  $C$ , et sans connaître *a priori* les échelles  $u_{a,ref}^*$ , on calcule le membre de gauche de (4.37) en prenant de nombreuses valeurs de  $u_{a,\nu}^*$ , échelonnées entre  $0 \text{ m s}^{-1}$  et  $1 \text{ m s}^{-1}$ .

Les résultats numériques sont présentés sur la figure 4.8. On y remarque que, avec le jeu de paramètres numériques (4.15) qui est ici utilisé :

- (i) Pour chaque solution de référence, il n'existe qu'une seule échelle de friction  $u_a^*$  satisfaisant la condition de cohérence (cela se voit sur la figure 4.8a).
- (ii) Quantitativement, la condition de cohérence est très sensible à l'échelle  $u_a^*$ . En effet, comme le montre la figure 4.8b, des erreurs relativement faibles sur  $u_a^*$  entraînent très rapidement de grandes valeurs (plusieurs ordres de grandeurs) pour le module de la condition de cohérence.
- (iii) Comme cela est très couramment le cas dans la littérature, le régime de vents faibles présente des difficultés (ici, on observe que très rapidement, la condition de cohérence « explose » numériquement).

L'observation de la figure 4.8 pousse à émettre la conjecture qu'en se plaçant *sous les hypothèses supplémentaires ici exploitées* (viscosités affines, longueurs de rugosités océaniques simples, choix de paramètres numériques, etc.), le problème de couplage d'Ekman avec condition de cohérence semble bien posé, dans le sens où en se donnant comme donnée d'entrée une connaissance de la solution aux bords de la CLP, une et une seule échelle  $u_a^*$  semble satisfaire la condition de cohérence.

La quantité utilisée pour évaluer la condition de cohérence n'a pas réellement de sens physique. Au § 4.3.3, on évaluera de façon plus tangible l'impact qu'a l'imposition de la condition de cohérence sur les profils de solutions physiques.



(a)  $||u_h||_{z_0}^{z_1} \in [0.5; 20]$  (m s<sup>-1</sup>). La carte de couleur correspond au module du membre de gauche de la condition de cohérence, tel que décrit par le point (5). L'axe des abscisses correspond aux valeurs de  $||u_h||_{z_0}^{z_1}$  utilisés pour générer les profils de solution cohérents. L'axe des ordonnées correspond aux valeurs de  $u_a^*$  utilisées dans un second temps pour tester « à l'aveugle » la condition de cohérence. La courbe en noir correspond à  $u_{a,ref}^*$ , a priori inconnu.

(b) Coupe verticale de (a) pour  $||u_h||_{z_0}^{z_1} = 6$  m s<sup>-1</sup>. La ligne verticale noire correspond à  $u_{a,ref}^*$ .

FIGURE 4.8 – Résultats du test numérique mené ci-dessus. Le « test de cohérence » correspond au module du membre de gauche de l'équation (4.37). Le couplage de couche d'Ekman est cohérent lorsque ce module est nul.

### 4.3.2 Viscosités turbulentes dépendantes des $(u_\alpha^*)$

Dans le cas général (à titre d'exemple, pour des profils type KPP), la forme des viscosités turbulentes  $(\nu_\alpha)$  dépend des échelles de friction idoines  $(u_\alpha^*)$ . D'un point de vue purement « visuel », l'équation (4.37) est toujours valable ; cependant, le nombre  $C$  n'est plus constant. On peut symboliquement réécrire (4.37) ainsi :

$$\ln \left( \frac{(z_a^1)^{\frac{1}{1+\lambda_u}} (-z_o^1)^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}}}{\lambda_u^{\frac{\lambda_u}{1+\lambda_u}} z_{a,r}^{a,r} (u_a^*)} \right) - \kappa \frac{\left[ \left[ u_g^\alpha \right]_o^a \right]^a}{(1+\lambda_u) u_a^*} + 1 + \frac{C((u_\alpha^*))}{1+\lambda_u} = 0 \quad (4.47)$$

Il dépendra des  $(u_\alpha^*)$  *via* à la fois la forme de la dépendance des  $(\nu_\alpha)$ , et aussi *via* la forme de la solution, dont on a vu que même dans des cas analytiquement simples, elle pouvait être relativement complexe, faisant intervenir des fonctions spéciales éventuellement coûteuses à évaluer numériquement (fonctions hypergéométriques, de Bessel, de Heun...).

Dans ce type de configuration, on ne peut pas prétendre à une résolution littérale, puisque celle-ci passerait par l'inversion de ces fonctions spéciales. Ainsi, seule une résolution numérique est envisageable.

#### Expérience numérique

De façon analogue à ce qui a été décrit au § 4.3.1, on réalise une expérience numérique permettant de quantifier la (non-)vérification de la condition de cohérence.

On utilise toujours le jeu de paramètres numériques défini par (4.15). Le protocole est le suivant :

- (1) On fixe<sup>4</sup>  $u_h(z_o^1) = 0 \text{ m s}^{-1}$  et  $u_h(z_a^1) = 6 \text{ m s}^{-1}$ . On obtient donc  $\left[ [u_h] \right]_{z_o^1, ref}^{z_a^1} = 6 \text{ m s}^{-1}$ . On calcule l'échelle  $u_{a,ref}^*$  correspondant à ce problème à l'aide d'une formulation bulk « complétée » (i.e., prenant en compte la sous-couche visqueuse et la CLS océanique) : on trouve  $u_{a,ref}^* \approx 0.18 \text{ m s}^{-1}$ . On en déduit  $u_{o,ref}^* = \lambda_u u_{a,ref}^*$ .
- (2) On peut alors disposer d'un profil entier de solution « de référence », duquel on peut extraire la contrainte externe  $\left[ \left[ u_g^\alpha \right] \right]_o^a$ .
- (3) On fixe le domaine de calcul par  $z_\alpha^\infty = 1.2 \times c_2^\alpha \frac{u_{a,max}^*}{f}$ , où  $u_{a,max}^* = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $u_{o,max}^* = \lambda_u u_{a,max}^*$ .
- (4) Pour un grand nombre de valeurs de  $u_a^* \in [0.01; u_{a,max}^*]$  ( $\text{m s}^{-1}$ ), on définit les viscosités comme étant :
  - (i) des polynômes  $P_2$  définis par les contraintes (4.29) pour  $z \in ]z_a^1; \frac{c_2^\alpha u_a^*}{f} [$
  - (ii) constante de valeur  $\nu_a^m$  pour  $z \in ]\frac{c_2^\alpha u_a^*}{f}; z_a^\infty [$ .

4. Contrairement à l'expérience du § 4.3.1, on ne fait l'expérience que pour une seule valeur de  $\left[ [u_h] \right]_{z_o^1}^{z_a^1}$ . Tester plusieurs valeurs de saut initial a un coût numérique prohibitif, dû aux formes des solutions avec viscosités  $P_2$ , faisant intervenir des séries entières dont un grand nombre de termes doivent être calculés pour obtenir des résultats satisfaisants.

On définit des viscosités turbulentes analogues dans l'océan, avec les échelles caractéristiques  $u_o^* = \lambda_u u_a^*$ .

- (5) On considère le saut  $\left[ \left[ u_g^\alpha \right]_o^a \right]$ , défini au point (2), comme condition extérieure ; à partir de celle-ci, on re-extrapolé la solution pour obtenir une valeur de  $\left[ \left[ u_h \right]_{z_0^1}^{z_a^1} \right]$ .
- (6) On considère que le couplage est cohérent lorsque ce saut ré-évalué correspond à la valeur de référence  $\left[ \left[ u_h \right]_{z_0^1}^{z_a^1} \right]_{ref}$  (dans notre cas,  $6 \text{ m s}^{-1}$ ).

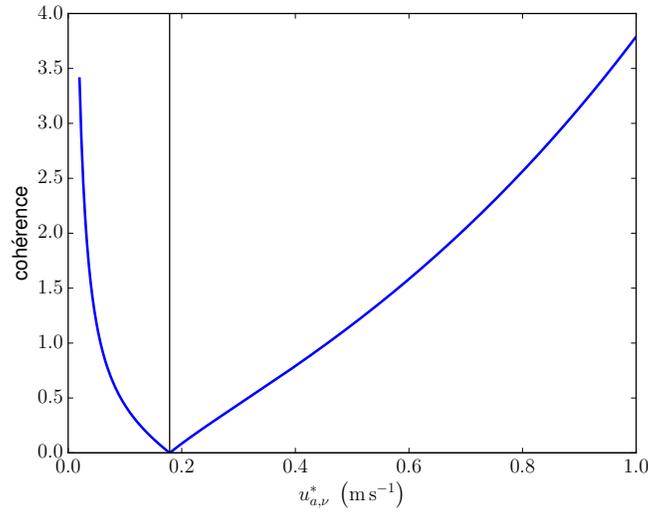


FIGURE 4.9 – Test numérique dans le cas d'une viscosité  $P_2$  dépendante de  $(u_a^*)$ . À partir de la donnée  $\left[ \left[ u_g^\alpha \right]_o^a \right]$ , on essaie de trouver les bonnes échelles de friction,  $u_{a,ref}^*$  et  $u_{o,ref}^* = \lambda_u u_{a,ref}^*$ , de façon à ce que la condition de couplage cohérent (4.47) soit vérifiée. La courbe bleue ci-dessus représente le module du membre de gauche de la condition de cohérence (4.47) ; la ligne noire verticale correspond à l'échelle  $u_{a,ref}^*$ .

La figure 4.9 donne une représentation graphique d'une évaluation de la condition de cohérence. On y remarque encore une fois qu'il n'existe qu'une échelle de friction  $u_a^*$  pour laquelle cette condition est vérifiée, et que celle-ci correspond bien à l'échelle de référence qui a été utilisée dans un premier temps, pour générer un profil cohérent. Cependant, on remarque qu'ici, l'écart à la condition de cohérence ne prend pas de valeurs très élevées aussi rapidement que dans le cas test du § 4.3.1. Nous pensons que cela est dû au changement de paramétrisation de la viscosité turbulente ; le choix d'une viscosité affine permettait d'obtenir  $\nu_\alpha \gg 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  aux voisinages des cotes infinies, ce qui n'est pas physiquement réaliste.

### Conclusions intermédiaires sur l'étude de la cohérence du couplage de couches d'Ekman stationnaires

Concernant le cas (4.14), on peut dresser les conclusions intermédiaires suivantes :

- (a) Il existe, pour des viscosités turbulentes polynomiales allant au moins jusqu'au degré 2, des solutions explicites au problème d'Ekman stationnaire. En principe, dans le cas de degrés polynomiaux plus élevés, d'autres solutions pourraient être construites par développement en série entière et/ou de Laurent. En particulier, les fonctions spéciales introduites dans cette section sont analytiques sur le disque unité ouvert  $\{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ , et avant tout définies par des relations de récurrence sur leur décomposition en série entière.
- (b) Les formes que prennent ces solutions sont relativement complexes et peuvent éventuellement être coûteuses d'un point de vue numérique. On observe même certains cas où les développements en série entière doivent contenir un si grand nombre de termes pour être précis, qu'obtenir des solutions numériques, au moyen d'une discrétisation adaptée, est moins coûteux.
- (c) Empiriquement, il semble qu'il soit possible de retrouver l'échelle de friction  $u_a^*$  permettant de dimensionner les solutions dans les couches d'Ekman de façon à ce que qu'elles soient cohérentes avec la paramétrisation des CLS, et que l'égalité des flux soit garantie. En d'autres termes, l'application qui à une échelle  $u_a^*$  associe le profil entier solution du problème d'Ekman sur  $]z_0^\infty; z_a^\infty[$  semble être inversible.

### 4.3.3 Impact de la cohérence du couplage sur la solution hors CLS

Les stratégies classiques de couplage assurent la condition (c1), mais pas nécessairement la condition (c2). Dans le cadre du problème de couches d'Ekman, cela revient à dire que les profils de solution couplés de façon classique (sans que la cohérence ne soit assurée) ne cherchent pas à vérifier l'équation (4.13g). Par conséquent, la solution obtenue en imposant (c2), couplée de façon cohérente, n'a aucune raison d'être la même que la solution obtenue avec des routines classiques de couplage.

Jusqu'à présent, notre exposé a pu montrer que cette cohérence du couplage était nécessaire pour que les profils de CLS puissent être vus comme une extension des profils de solution en dehors de leur domaine de calcul respectif, les raccordant de façon  $\mathcal{C}^0$  ou  $\mathcal{C}^1$ . Si on ne s'intéresse qu'à la solution sur les domaines de calcul, cet aspect peut s'apparenter à une chimère. Cette sous-section comporte un cas test visant à comparer des solutions hors CLS, selon que la cohérence du couplage y soit assurée ou non. Il s'agit donc, en quelque sorte, de quantifier l'erreur commise sur les solutions internes à chaque sous-domaine lorsque le couplage n'est pas réalisé de façon cohérente. On s'intéresse aux effets qu'ont les paramétrisations CLS sur les modèles, et non à ces paramétrisations en elles-mêmes.

Pour ce faire, on définira deux solutions :

- (s.1) une solution stationnaire obtenue numériquement (*via* un schéma aux volumes finis) comme limite asymptotique ( $t \rightarrow +\infty$ ) d'un problème instationnaire ;
- (s.2) la solution stationnaire littérale correspondant au même problème, avec les mêmes contraintes extérieures, à laquelle on impose la condition de cohérence.

L'objectif est de quantifier la différence entre les profils de solution dans les CLP de chaque sous-modèle, ainsi que la différence entre les flux de tension de vent conséquemment prescrits à ces deux solutions.

### Description du cas test

On s'intéressera au problème d'Ekman dans le cas où la viscosité turbulente  $\nu_\alpha$  est donnée par :

$$\nu_\alpha(z) = \kappa u_\alpha^* |z| \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.48)$$

ce qui correspond à un profil de type  $P_1$ , dont les solutions littérales sont données au § 4.2.3. On impose toujours  $u_g^o = 0$ . On s'intéressera à différents cas de figure, suivant la valeur de  $u_g^a$ , qui est donc considérée comme paramètre d'entrée. Les valeurs suivantes sont prises pour définir le reste des contraintes du problème :

$$\begin{aligned} z_a^1 &= 10 \text{ m} & z_o^1 &= -1 \text{ m} \\ z_a^\infty &= 2000 \text{ m} & z_o^\infty &= -500 \text{ m} \\ f &= 5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

**Paramétrisation de la CLS** On dérive la formulation bulk de la paramétrisation (4.38) pour la longueur de rugosité  $z_u^{a,r}$ , issue de Smith (1988), qu'on réécrit ici en explicitant les significations physiques des termes  $a_{-1}$  et  $a_2$  :

$$z_u^{a,r} = a_0 \frac{(u_a^*)^2}{g_0} + b_0 \frac{\nu_a^m}{u_a^*} \quad (4.50)$$

où  $a_0 = 0.018$  est le paramètre de Charnock,  $g_0 \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$  est l'accélération gravitationnelle,  $b_0 = 0.11$  est une constante et  $\nu_a^m = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  est la viscosité moléculaire de l'air. On impose aussi  $z_u^{o,r} = -\lambda_u z_u^{a,r}$ , où on rappelle que  $\lambda_u = \sqrt{\rho_a / \rho_o} \approx 3 \times 10^{-2}$ .

### Solution numérique

La solution numérique (s.1) est donnée en simulant un problème d'Ekman instationnaire (4.7), et en imposant des conditions aux limites géostrophiques. Cela correspond au cas classique de problème d'Ekman instationnaire, dont nous reproduisons les équations maîtresses ci-dessous :

$$\partial_t u_h + \imath f u_h - \partial_z (\nu_\alpha \partial_z u_h) = \imath f u_g^\alpha \quad \alpha \in \{o, a\}, t \in \mathbb{R}_+, z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.51a)$$

$$u_h(t, z_\alpha^\infty) = u_g^\alpha \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.51b)$$

$$u_h(0, z) = u_g^\alpha \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.51c)$$

$$\partial_z u_h(t, z_\alpha^1) = \frac{u_\alpha^*}{\kappa |z_\alpha^1|} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.51d)$$

On simule numériquement le système (4.51) à l'aide d'une méthode de volumes finis d'ordre 1 en temps et en espace. Les grilles spatiales de calculs sont représentées sur la figure 4.10.

Le pas de temps est constant, déterminé par une condition CFL à l'état initial, pour lequel le profil de viscosité est bien plus grand que ce vers quoi il convergera (cette condition CFL est donc toujours vérifiée). L'intégration successive des composantes réelle et imaginaire de  $u_h$ , prenant en compte le terme dû à la force de Coriolis, est faite par un schéma *forward-backward* alterné.

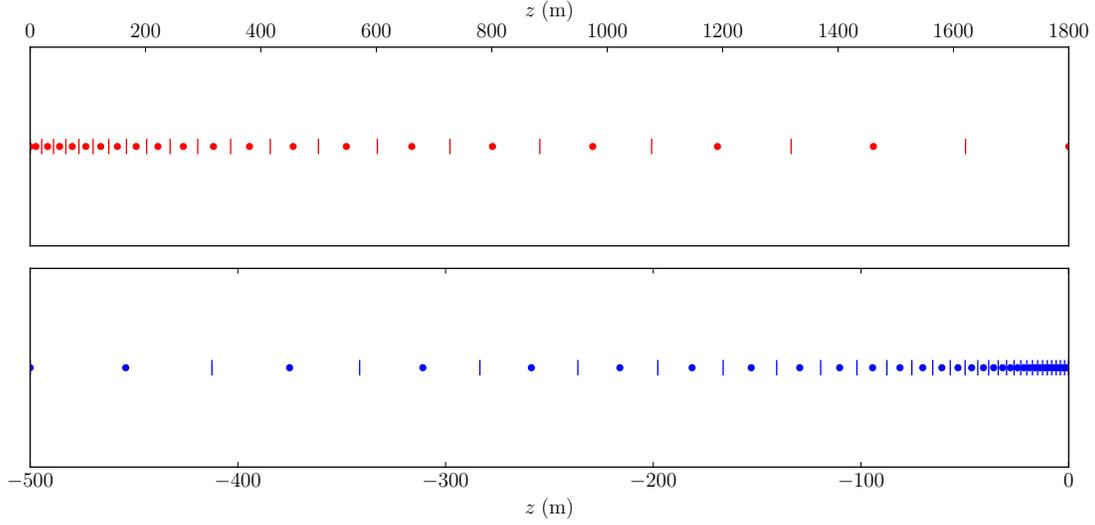


FIGURE 4.10 – Grilles de calculs pour la simulation numérique du cas test (atmosphère en haut et en rouge, océan en bas et en bleu). Les centres des volumes de contrôle sont représentés par des cercles, leurs bords par des barres verticales. La grille océanique comporte 30 mailles ; la grille atmosphérique, 20.

À la première itération temporelle, on impose  $u_{a,init}^* = 10 \text{ m s}^{-1}$ , ce qui est très grossièrement surévalué (c'est l'échelle avec laquelle on dimensionne le pas de temps  $\delta t$ ). Ensuite, l'échelle de friction  $u_a^*$  est déterminée à partir d'une fermeture bulk propre à la formulation (4.50), mise à jour à chaque pas de temps à partir de l'état de la solution aux deux niveaux les plus proches de l'interface. L'échelle  $u_o^*$  est déterminée grâce à la condition (c1), i.e.  $u_o^* = \lambda_u u_a^*$ . On considère qu'on a atteint une solution stationnaire lorsque :

$$\max_{\alpha \in \{o,a\}} \left\{ \left\| u_h(t_{k+1}, z_\alpha^1) - u_h(t_k, z_\alpha^1) \right\|_\infty \right\} < 10^{-6} \text{ m s}^{-1} \quad (4.52)$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  désigne les itérations temporelles, et  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  représentent les dates d'échantillonnages de la solution. Dans (4.52), on a noté  $\|z\|_\infty = \max\{|\Re(z)|, |\Im(z)|\}$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ .

### Solution cohérente

En parallèle à la solution numérique décrite ci-dessus, on détermine un profil de solution à la version stationnaire du problème (4.51), en utilisant les solutions exactes déterminées au § 4.2.3. On exige de ce profil de solution qu'il soit cohérent : la réalisation de la condition (4.35) est faite par les moyens d'un algorithme de descente de gradient visant à minimiser la grandeur  $|u_h(0^+) - u_h(0^-)|$  comme fonction de  $(u_a^*, \theta_\tau)$ . Les valeurs de  $u_h(0^\pm)$  sont obtenues en extrapolant la solution depuis  $z_\alpha^1$  jusqu'à la surface de part et d'autre de celle-ci. Autrement dit :

$$u_h(0^+) = u_h(z_a^1) - \frac{u_a^*}{\kappa z_a^1} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_u^{a,r}(u_a^*)} \right) + 1 \right] e^{i\theta_\tau} \quad (4.53a)$$

$$u_h(0^-) = u_h(z_o^1) + \frac{\lambda_u u_a^*}{\kappa (-z_o^1)} \left[ \ln \left( \frac{z_o^1}{z_u^{o,r}(u_a^*)} \right) + 1 \right] e^{i\theta_\tau} \quad (4.53b)$$

On implémente cet algorithme en démarrant des valeurs  $u_a^* = 0.5 \text{ m s}^{-1}$  et  $\theta_\tau = 0$ .  $z_u^{a,r}$  est toujours calculée à partir de (4.50) et  $z_u^{o,r} = -\lambda_u z_u^{a,r}$ . On suppose qu'on a atteint un profil cohérent lorsque :

$$|u_h(0^+) - u_h(0^-)| < 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \quad (4.54)$$

On a alors accès à un profil de solution donné par (4.20), en utilisant les échelles  $(u_a^*, \theta_\tau) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$  déterminées par l'algorithme de minimisation.

### Résultats et comparaison

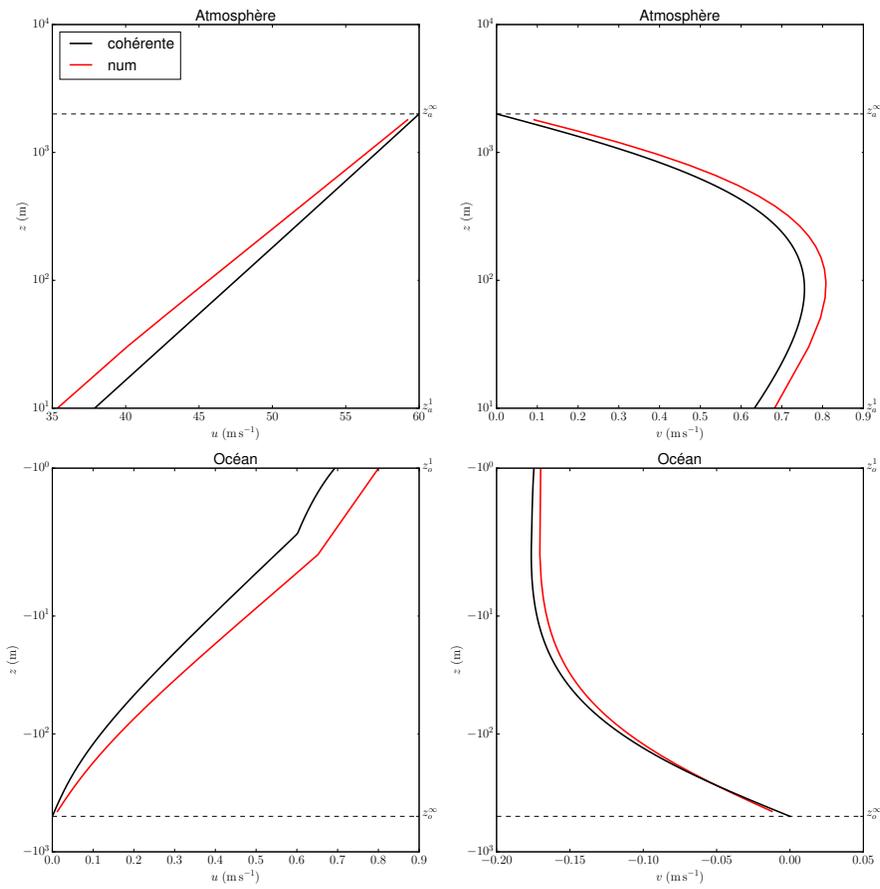
La figure 4.11 montre les profils de solutions obtenus, ainsi que l'erreur relative entre ceux-ci, dans le cas où on ferme le système par  $u_g^a = 60 \text{ m s}^{-1}$ , qui est une valeur physiquement réaliste. Pour ce même vent géostrophique, le tableau 4.3 donne l'erreur commise sur l'échelle de friction  $u_a^*$  en négligeant la cohérence du couplage, et ses répercussions sur le flux turbulent  $\tau$ , en norme et en direction.

Les conclusions suivantes s'imposent :

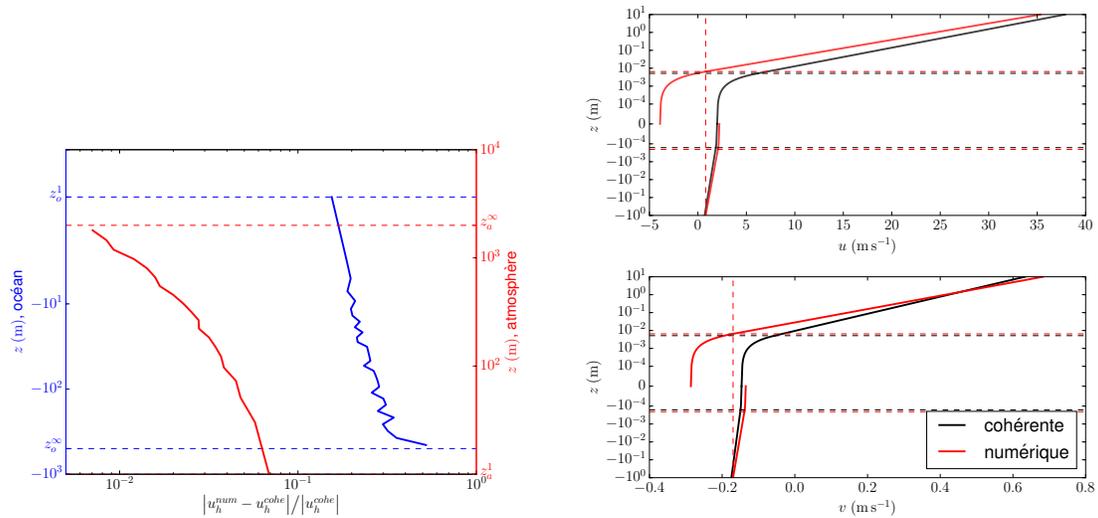
- (i) L'erreur entre solution classique et solution cohérente n'est pas circonscrite au voisinage immédiat de l'interface dans chaque domaine (i.e. la région où  $|z| \gtrsim |z_a^1|$ ), bien que c'est dans cette région qu'elle y est le plus importante. On observe cependant des erreurs de l'ordre de 10% tout le long de la CLP (voir la figure 4.11b).
- (ii) La solution obtenue classiquement correspond à une solution pour laquelle la formulation bulk ne considère que la CLS atmosphérique, en excluant les SCV et la CLS océanique. Cela se voit sur la figure 4.11c en constatant que la solution numérique en  $z_u^{a,r}$  correspond à celle en  $z_o^1$  (donnée par la ligne verticale rouge).
- (iii) Pour  $u_g^a = 60 \text{ m s}^{-1}$ , l'absence de prise en compte de la cohérence du couplage se traduit par une erreur de l'ordre de 20 – 30% sur le flux turbulent  $\tau$  (d'où l'erreur conséquente sur la solution en elle-même).

	$u_a^* \text{ [m s}^{-1}\text{]}$		$ \tau  \text{ [kg m}^{-1}\text{ s}^{-2}\text{]}$		$\theta_\tau \text{ (degré)}$	
	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur
Solution classique (s.1)	1.882	+8%	3.542	+26%	1.414	+13%
Solution cohérente (s.2)	1.675		2.806		1.244	

TABLEAU 4.3 – Comparaison des valeurs numériques des paramètres permettant de générer la paramétrisation de la CLS pour l'expérience numérique décrite ci-dessus.



(a) Profils de solutions sur la CLP, excluant la CLS.



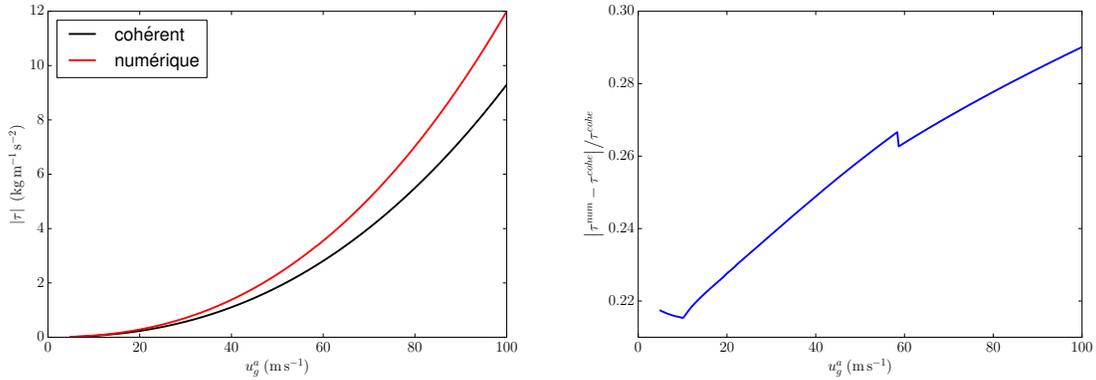
(b) Erreur relative entre la solution cohérente (prise comme référence) et la solution numérique sur les CLP. En bleu (ordonnée à gauche), domaine océan ; en rouge (ordonnée à droite), domaine atmosphère. Le bruit numérique sur les courbes ci-dessus est dû aux erreurs d'interpolation de la solution cohérente sur la grille plus fine de la solution numérique.

(c) Profils de solutions stationnaires extrapolés dans la CLS à l'aide des échelles de friction. Les lignes horizontales pointillées représentent les longueurs de rugosité de chaque profil. La ligne verticale pointillée représente la solution numérique au niveau  $z_0^1$ .

FIGURE 4.11 – Résultats numériques pour le cas test. (a) représente les profils dans la CLP, à l'intérieur du domaine de calcul de chaque sous-modèle. (b) représente l'erreur relative entre ces deux solutions sur les CLP. (c) représente l'extrapolation de chacun de ces profils dans la CLS, en la paramétrisant à l'aide de la théorie de Monin-Obukhov bilatérale (dans l'océan et l'atmosphère), et de paramétrisations SCV issues de Liu *et al.* (1979). On a ici imposé  $u_g^a = 60 \text{ m s}^{-1}$ .

La figure 4.12 montre les erreurs commises sur  $\tau$  lorsqu'on fait varier  $u_g^a$  entre 5 et 100  $\text{m s}^{-1}$ . Ces résultats permettent d'ajouter aux conclusions déjà énoncées ci-dessus la remarque suivante : la dégradation de la solution où la cohérence du couplage n'est pas imposée est d'autant plus marquée que les vents géostrophiques sont forts. Ce cas test étant isotrope, cette conclusion est toujours valable quelle que soit la valeur de  $\text{Arg } u_g^a$ .

En sortant du cadre du problème d'Ekman, il semble raisonnable d'émettre comme conjecture que sous des régimes de vents très forts, la non cohérence du couplage devrait mener à des erreurs considérables sur la solution.



(a)  $|\tau|$  pour les deux solutions, en fonction de  $u_g^a$ .

(b) Erreur relative sur  $\tau$  entre les deux solutions (la référence étant prise comme la solution cohérente). L'irrégularité autour de 60  $\text{m s}^{-1}$  est due à l'interpolation entre deux grilles de  $u_g^a$  non conformes.

FIGURE 4.12 – Comparaison des flux de tension de vent obtenus selon que la cohérence du couplage soit exigée ou non. (a) représente le module de ce flux ; (b) donne l'erreur relative entre les deux valeurs possibles.

## 4.4 Discussion sur l'extension au cas instationnaire

On relève l'hypothèse de stationnarité pour résoudre le cas instationnaire. On se place sur un intervalle de temps  $[0; T]$  avec  $0 < T < +\infty$ . Sur chaque sous-domaine  $(z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ , on s'intéressera au système d'équations homogénéisées suivant, où on rappelle que  $\widetilde{u}_h = u_h - u_g^a$ , cf. (4.5) :

$$\partial_t \widetilde{u}_h + \iota f \widetilde{u}_h - \partial_z (v_\alpha \partial_z \widetilde{u}_h) = 0 \quad (4.55a)$$

$$\widetilde{u}_h(t=0, z) = 0 \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.55b)$$

$$\widetilde{u}_h(t, z_\alpha^\infty) = 0 \quad t \in (0; T) \quad (4.55c)$$

$$\partial_z \widetilde{u}_h|_{z_\alpha^1} = \frac{u_\alpha^*}{\kappa |z_\alpha^1|} e^{i\theta\tau} \quad t \in (0; T) \quad (4.55d)$$

En toute rigueur, dans (4.55d), on aura  $u_\alpha^* = u_\alpha^*(t)$ . En effet, la solution évoluant au cours du temps, si l'on cherche à obtenir un couplage cohérent, alors les échelles ( $u_\alpha^*$ ) doivent s'adapter à l'évolution temporelle de la solution. Si l'on résout (4.55), il suffira ensuite de poser  $u_h = \widetilde{u}_h + u_g^a$

pour retrouver la solution de (4.7). Les vent et courant géostrophiques  $(u_g^\alpha)$  seront toujours supposés constants.

#### 4.4.1 Solutions monodomaines

On effectue une transformée de Fourier temporelle sur la variable  $\widetilde{u}_h$ , cette transformée étant ici définie par la convention :

$$F(f)(\omega, z) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z) e^{-i\omega t} dt \quad \forall z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty), [t \mapsto f(t, z)] \in L^2([0; T]) \quad (4.56)$$

où on prolonge  $f$  par 0 pour  $t \in \mathbb{R} \setminus [0; T]$ . Le système d'équations (4.55) devient alors :

$$i(\omega + f)\widehat{u}_h - \partial_z(\nu_\alpha \partial_z \widehat{u}_h) = -e^{-i\omega T} \widetilde{u}_h(T, \cdot) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R}_+ \times (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (4.57a)$$

$$\widehat{u}_h(\omega, z_\alpha^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (4.57b)$$

$$\partial_z \widehat{u}_h|_{z_\alpha^1} = \frac{\widehat{u}_\alpha^*}{\kappa |z_\alpha^1|} e^{i\theta_\tau} \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (4.57c)$$

où  $\widehat{u}_h = F(\widetilde{u}_h)$ , et  $\widehat{u}_\alpha^* : \omega \mapsto \widehat{u}_\alpha^*(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction temporelle d'échelles de frictions. Le terme de droite dans (4.57a) provient de l'intégration par partie permettant d'utiliser la propriété  $\widehat{\partial_t f} = i\omega \widehat{f}$ .

À propos du système (4.57), les remarques suivantes s'imposent :

- (i) La connaissance de  $\widetilde{u}_h(T, \cdot)$ , état final de la solution, est nécessaire.
- (ii) Si l'on suppose cette information connue, la structure de l'équation (4.57a) est exactement la même que la forme stationnaire, avec un second membre (correspondant à l'état final du système); le coefficient de Coriolis  $f$  de la version stationnaire y étant substitué par  $f + \omega$ .

On peut donc, dans le cadre de viscosités turbulentes standards (par exemple, celles traitées au § 4.2), obtenir des solutions au système (4.57). De façon générale, on aura :

$$\widehat{u}_h(\omega, z) = \widehat{u}_\alpha^*(\omega) [A(\omega) F_1(z) + B(\omega) F_2(z)] \quad (4.58)$$

Dans le cas simplifié où les viscosités turbulentes seraient indépendantes de  $u_\alpha^*$ , ( $A, B$ ) de (4.58) sont des constantes. Dans le cas général, elles dépendent de la fréquence  $\omega$  via  $\omega \mapsto \widehat{u}_\alpha^*(\omega)$ .

#### 4.4.2 Cohérence du couplage

La condition de cohérence (4.13g) est désormais dépendante de l'instant  $t$ . Elle s'écrit :

$$\ln\left(\frac{z_a^1}{z_u^{a,r}(t)}\right) + \lambda_u \ln\left(\frac{z_o^1}{z_u^{o,r}(t)}\right) + 1 + \lambda_u = \kappa \frac{[[u_h]]_{z_o^1}^{z_a^1}(t)}{u_a^*(t)} \quad t \in ]0; T] \quad (4.59)$$

où les dépendances des longueurs de rugosité  $(z_u^{a,r})$  à  $t$  se font via l'échelle de friction  $u_a^*(t)$ . On supposera ici qu'on a toujours  $z_u^{o,r} = -\lambda_u z_u^{a,r}$ . On peut alors réécrire (4.59) ainsi :

$$u_a^*(t) \left[ 1 + \lambda_u + \ln\left(\frac{z_a^1 (-z_o^1)^{\lambda_u}}{\lambda_u^{\lambda_u}}\right) - (1 + \lambda_u) \ln(z_u^{a,r}(t)) + \kappa C(t) \right] = \kappa [[u_h]]_{z_o^1}^{z_a^1} \quad (4.60)$$

L'équation de cohérence du couplage d'Ekman devrait faire intervenir la transformée de Fourier de (4.60). Il n'est pas envisageable de pouvoir prolonger l'étude en toute généralité : en effet, la dépendance temporelle du terme  $t \mapsto \ln(z_u^{a,r}(u_a^*(t)))$  est trop complexe pour que cette transformée soit directement explicitable. En outre, dans le cas (physiquement plus réaliste) où les viscosités turbulentes dépendent des échelles  $(u_a^*)$ ,  $t \mapsto C(t)$  peut prendre des formes très peu maniables, dépendant notamment des  $(u_a^*)$  via des fonctions spéciales (de Bessel, hypergéométriques, de Heun...).

## 4.5 Conclusion partielle

Nous avons présenté le problème d'Ekman, en expliquant pourquoi celui-ci constituait un premier cas test intéressant pour étudier la cohérence du couplage océan-atmosphère. Des solutions littérales au problème d'Ekman stationnaire ont été explicitées dans le cas de viscosités polynomiales turbulentes allant jusqu'au degré 2, et des pistes ont été données pour le traitement du degré 3.

En particulier, on sait exprimer ces solutions en y explicitant les dépendances aux échelles de friction  $(u_a^*)$ , qui, dans le cas des couches d'Ekman, contiennent l'intégralité des informations permettant de reconstruire les profils dans la couche limite de surface. On a ainsi pu s'intéresser aux conditions sous lesquelles le couplage est considéré comme cohérent, qu'on a pu réduire sous la forme d'une équation simple (4.35). Trouver une échelle  $u_a^*$  vérifiant cette équation revient à résoudre le problème d'Ekman couplé, avec viscosités turbulentes, où la cohérence océan-CLS-atmosphère est assurée. Quantitativement, nous avons alors observé un écart non négligeable, de l'ordre de 20 à 30%, entre les flux turbulents issus de profils de solutions selon qu'ils soient obtenus de façon usuelle ou de façon à vérifier la cohérence.

Nous nous sommes enfin intéressés à la version instationnaire du problème. Bien que, par l'intermédiaire d'une transformée de Fourier, on retombe sur la même forme que pour le problème stationnaire (et on peut en utiliser les solutions littérales), le traitement de solutions dépendantes du temps apporte de nombreuses difficultés supplémentaires. En premier lieu, des termes non locaux en temps apparaissent dans la résolution. Enfin, la résolution de la condition de couplage cohérent fait intervenir la transformée de Fourier de fonctions éventuellement très complexes. La vérification de celle-ci ne peut donc pour l'instant se faire que sous forme numérique.

## Chapitre 5

# Mise en œuvre numérique du couplage : analyse et optimisation de méthodes de Schwarz

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Position du problème et méthodes numériques standards</b>	<b>174</b>
5.1.1	Problème multiphysique	174
5.1.2	Algorithmes de Schwarz : généralités	176
5.1.3	Motivations derrière l'utilisation d'algorithmes de Schwarz	179
<b>5.2</b>	<b>Vers une méthode de couplage adaptée</b>	<b>181</b>
5.2.1	Couplage synchrone	182
5.2.2	Couplage asynchrone	185
5.2.3	Algorithmes de Schwarz à relaxation d'ondes	189
<b>5.3</b>	<b>Algorithmes OSWR et couplage océan-atmosphère</b>	<b>196</b>
5.3.1	La CLS, un « recouvrement négatif » ?	197
5.3.2	Prise en compte de la non linéarité des équations primitives pour le couplage OA	202
5.3.3	Caractère non-local des conditions de transmission physiques : formulations en flux explicites et semi-implicites	205
<b>5.4</b>	<b>Couplage de couches d'Ekman par algorithmes de Schwarz</b>	<b>208</b>
5.4.1	Absence de couches limites	209
5.4.2	Inclusion de paramétrisations CLS	216
<b>5.5</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>218</b>

---

Les chapitres précédents se sont exclusivement intéressés à des aspects liés à la formulation mathématique continu du problème de couplage océan-atmosphère. Ce chapitre a pour vocation de s'intéresser aux aspects algorithmiques liés à sa résolution numérique. En particulier, on introduira différents types d'algorithmes de Schwarz, qui constituent une classe de méthodes de couplage<sup>1</sup>.

---

1. Il existe d'autres méthodes qui, comme on le justifiera dans ce chapitre, semblent moins adaptées aux contraintes du couplage océan-atmosphère.

Dans un premier temps, au § 5.1, on présentera de façon générique les méthodes de Schwarz. Le § 5.2 dresse un état de l'art des méthodes de couplage actuellement utilisées dans le contexte océan-atmosphère, en expliquant en quoi celles-ci sont insuffisantes ; on introduit alors, dans un contexte général de couplage multiphysique, une nouvelle classe d'algorithmes mieux adaptés. Le § 5.3 s'intéresse à la mise en place de tels algorithmes pour le problème océan-atmosphère. Le § 5.4 présente quelques résultats numériques de mise en place de tels algorithmes dans des contextes de couplage océan-atmosphère simplifié, en s'appuyant sur les résultats du chapitre 4. Enfin, en fin de chapitre, une conclusion partielle propose un bilan et quelques pistes de réflexions quant au travail entrepris.

## 5.1 Position du problème et méthodes numériques standards

L'objectif de cette section est, dans un premier temps au § 5.1.1, d'introduire un problème multiphysique couplé, et une méthode pour le résoudre comme deux sous-problèmes séparés. Ensuite, le § 5.1.2 présente le formalisme général dans lequel s'inscrivent les algorithmes de Schwarz. Enfin, le § 5.1.3 se re-focalise sur le problème océan-atmosphère, en expliquant pourquoi ce type de formalisme sera préféré pour le traiter.

### 5.1.1 Problème multiphysique

Dans les deux sous-sections à venir, on s'intéressera à un problème générique de couplage multiphysique, en s'éloignant donc du contexte de couplage océan-atmosphère. Un problème à plusieurs sous-domaines est dit monophysique lorsque chacun de ses sous-problèmes ne se distingue que par son domaine géométrique ; en d'autres termes, on résout sur chaque sous-domaine le même système d'équations. Tout problème non monophysique est appelé problème multiphysique. Les domaines de calcul d'un problème monophysique peuvent éventuellement se recouvrir ; cela n'aurait pas de sens pour des problèmes multiphysiques, pour lesquels les frontières inter-domaines représentent aussi des frontières physiques (par exemple, la surface de l'océan).

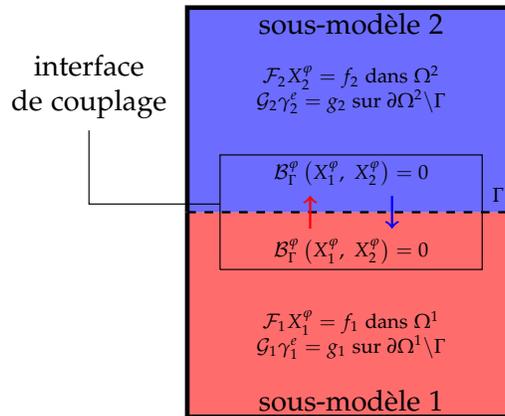


FIGURE 5.1 – Problème de couplage multiphysique générique à deux sous-modèles.

La géométrie du problème peut être schématisée par la figure 5.1 : on distingue deux sous-modèles aux domaines adjacents et sans recouvrement, notés  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , qu'on suppose ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \in \{1, 2, 3\}$ . On note  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  le bord d'un domaine donné. On appelle  $(\partial\Omega_i^e)_{i \in \{1, 2\}}$

les bords *externes* des deux sous-domaines, i.e.  $\partial\Omega_i^e = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega_{-i}$ , où  $-i = 2$  quand  $i = 1$  et vice versa (on utilisera cette notation dans toute la suite du chapitre). Enfin, on note  $\Gamma$  l'interface commune aux  $(\Omega_i)$  :  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .

On suppose qu'on s'intéresse à la simulation du problème couplé sur un intervalle temporel  $[0; T]$ , avec  $T > 0$ . En toute généralité, on peut schématiquement écrire un problème de type multiphysique sous la forme suivante :

$$\mathcal{F}_1 X_1^\varphi(t, \mathbf{x}) = f_1 \quad (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_1 \quad (5.1a)$$

$$\mathcal{G}_1 X_1^\varphi(t, \gamma_1^e) = g_1 \quad (t, \gamma_1^e) \in ]0; T] \times \partial\Omega_1^e \quad (5.1b)$$

$$X_1^\varphi(0, \mathbf{x}) = X_1^{\varphi,0} \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (5.1c)$$

$$\mathcal{F}_2 X_2^\varphi(t, \mathbf{x}) = f_2 \quad (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_2 \quad (5.1d)$$

$$\mathcal{G}_2 X_2^\varphi(t, \gamma_2^e) = g_2 \quad (t, \gamma_2^e) \in ]0; T] \times \partial\Omega_2^e \quad (5.1e)$$

$$X_2^\varphi(0, \mathbf{x}) = X_2^{\varphi,0} \quad \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (5.1f)$$

$$\mathcal{B}_\Gamma^\varphi \left( X_1^\varphi(t, \gamma), X_2^\varphi(t, \gamma) \right) = 0 \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.1g)$$

où pour chaque sous-domaine  $i \in \{1, 2\}$  :

- ▶ la solution entière (c'est à dire, contenant toute l'information physique) est représentée par les  $X_i^\varphi$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \in \mathbb{N}^*$  (on suppose ainsi implicitement que les deux sous-domaines ont la même dimension physique);
- ▶  $\mathcal{F}_i$  est un opérateur différentiel contenant les équations volumiques propres au domaine  $\Omega_i$  (par exemple, dans le contexte océan-atmosphère, celui-ci est déduit des équations primitives);
- ▶  $\mathcal{G}_i$  contient les conditions aux limites *s'appliquant sur les bords externes seulement* (par exemple, une condition de non-glissement au fond de l'océan, ou un flux d'énergie thermique solaire au « sommet » de l'atmosphère);
- ▶  $X_i^{\varphi,0}$  est l'état initial de la solution (c'est une donnée);
- ▶  $f_i$  représente un terme source et  $g_i$  une donnée à l'extérieur.

Dans (5.1g), l'opérateur  $\mathcal{B}_\Gamma^\varphi$  réalise le couplage entre les deux modèles. Il représente l'*opérateur de transmission physique* entre les deux sous-domaines, *via* lequel ceux-ci échangent de l'information. Cet opérateur provient du modèle physique, peut être relativement complexe (nous verrons au § 5.3 que c'est le cas pour le couplage océan-atmosphère), et ne permet pas toujours au problème (5.1) d'être bien posé.

Les indices «  $\varphi$  » utilisés dans (5.1) ont pour vocation de souligner le caractère *physique* de la solution couplée  $(X_i^\varphi)$  et de l'opérateur de transmission  $\mathcal{B}_\Gamma^\varphi$ . On introduira dans la suite de ce chapitre d'autres notations pour caractériser des solutions et opérateurs de transmission *non physiques*.

Dans toute la suite, on supposera qu'on aura *a minima*, pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$\forall t \in [0; T], [\mathbf{x} \mapsto X_i(t, \mathbf{x})] \in H^1(\Omega_i) \quad (5.2a)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_i, [t \mapsto X_i(t, \mathbf{x})] \in L^2([0; T]) \quad (5.2b)$$

(5.2a) permet de définir l'opérateur trace, à valeur dans  $L^2(\partial\Omega_i)$ , nécessaire à l'évaluation de la solution sur les frontières du domaine. Nous verrons dans la suite que (5.2b) est suffisant pour garantir le caractère bijectif des opérations de transformées de Fourier temporelles.

Le problème (5.1) est monolithique, dans le sens où il ne peut pas être traité en résolvant séparément deux problèmes sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . La problématique derrière les algorithmes de couplage est de trouver des méthodes pour pouvoir diviser (5.1) en deux sous-problèmes solubles séparément. Pour ce faire, on modifie légèrement l'équation de couplage (5.1g), de façon à ce qu'elle puisse être séparable en deux équations de couplage, une pour chaque sous-modèle, où l'apport de l'autre sous-modèle pourra être considéré comme une donnée, c'est à dire qu'il ne soit plus une inconnue. La principale difficulté est alors de bien vérifier tout de même *in fine* (5.1g), qui correspond au couplage physique.

### Couplages « forts » et « faibles » ; méthodes de couplage « étroites » et « relâchées »

Dans leur article de revue sur le couplage multiphysique, Keyes *et al.* (2013) introduisent les deux distinctions suivantes :

- (d1) On dit qu'un problème multiphysique est « fortement couplé » lorsque les interactions entre ses sous-modèles sont fortes, dans le sens où les négliger entraîne une erreur significative. À l'inverse, un problème « faiblement couplé » correspond à un problème pour lequel les interactions entre sous-problèmes ne sont pas primordiales. Ce qualificatif est indépendant de la méthode de couplage choisie ; il s'applique à un *problème multiphysique*. À titre d'exemple, l'océan et l'atmosphère sont fortement couplés ; les continents et l'atmosphère le sont plus faiblement.
- (d2) On dit qu'une *méthode numérique* réalise le couplage de façon « étroite » lorsque les informations échangées entre les sous-modèles font intervenir des variables « aussi synchronisées que possible d'un modèle à l'autre, à tout instant ». À l'inverse, des méthodes de couplage « relâchées » sont des méthodes pour lesquelles il existe un décalage de pas de temps entre la date actuelle du modèle 1, et les informations du modèle 2 qu'il exploite (et vice versa).

(d1) permet de caractériser un *problème multiphysique* ; (d2), une *méthode de couplage*. Il est nécessaire de développer des méthodes de couplage étroites afin de traiter un problème multiphysique fortement couplé. Dans la suite de ce chapitre, on présentera un certain nombre de méthodes de couplage, qu'on qualifiera d'étroites ou de relâchées, en vertu de la définition (d2).

### 5.1.2 Algorithmes de Schwarz : généralités

Les algorithmes de Schwarz constituent une classe de méthodes itératives permettant de retrouver une solution approchée, et dans certains cas, la solution exacte, au problème (5.1), en résolvant successivement des problèmes « séparés », tel qu'on l'a expliqué à la fin du § 5.1.1. Ces algorithmes définissent des *suites d'itérés de Schwarz*, notés ici  $(X_i^k)$ , où  $k \in \mathbb{N}$  désigne l'itération

de Schwarz et  $i \in \{1, 2\}$  le sous-domaine sur lequel on se situe. Dans leur version parallèle<sup>2</sup>, les suites d'itérés de Schwarz peuvent être définies ainsi, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathcal{F}_1 X_1^k(t, \mathbf{x}) = f_1 \quad (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_1 \quad (5.3a)$$

$$\mathcal{G}_1 X_1^k(t, \gamma_1^e) = g_1 \quad (t, \gamma_1^e) \in ]0; T] \times \partial\Omega_1^e \quad (5.3b)$$

$$\mathcal{B}_{1,1} X_1^k(t, \gamma) = \mathcal{B}_{1,2} X_2^{k-1}(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in ]0; T] \times \Gamma \quad (5.3c)$$

$$X_1^k(0, \mathbf{x}) = X_1^{\varphi, 0} \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (5.3d)$$

$$\mathcal{F}_2 X_2^k(t, \mathbf{x}) = f_2 \quad (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_2 \quad (5.3e)$$

$$\mathcal{G}_2 X_2^k(t, \gamma_2^e) = g_2 \quad (t, \gamma_2^e) \in ]0; T] \times \partial\Omega_2^e \quad (5.3f)$$

$$\mathcal{B}_{2,2} X_2^k(t, \gamma) = \mathcal{B}_{2,1} X_1^{k-1}(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in ]0; T] \times \Gamma \quad (5.3g)$$

$$X_2^k(0, \mathbf{x}) = X_2^{\varphi, 0} \quad \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (5.3h)$$

où les différences par rapport à (5.1) sont :

- L'introduction d'opérateurs de transmission de Schwarz  $(\mathcal{B}_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$ . Ceux-ci peuvent être choisis par le concepteur de l'algorithme de Schwarz, avec un certain nombre de contraintes, dont la première est une *contrainte de compatibilité* (Blayo et Rousseau, 2016). Si l'algorithme de Schwarz converge vers la solution physique  $(X_i^\varphi)$ , alors on aura :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \mathcal{B}_{i,i} X_i^\varphi = \mathcal{B}_{i,-i} X_{-i}^\varphi \text{ sur } ]0; T] \times \Omega_i \quad (5.4)$$

La contrainte de compatibilité consiste à exiger que les  $(\mathcal{B}_{i,j})$  soient définis de façon à ce que (5.4) implique<sup>3</sup> (5.1g). Cela revient à s'assurer que la solution convergée obtenue par algorithme de Schwarz vérifie bien la condition de couplage multiphysique de base.

Suivant les configurations physiques, on peut aussi imposer d'autres contraintes aux opérateurs de transmission, par exemple liées à des propriétés de conservation d'énergie (comme on le verra au § 5.2). Il est important de comprendre que les contraintes imposées aux opérateurs laissent tout de même une certaine liberté dans leur choix ; en d'autres mots, les opérateurs  $(\mathcal{B}_{i,j})$  ne sont pas forcément directement déduits de l'opérateur physique  $\mathcal{B}_\Gamma^\varphi$ .

- Lors de la résolution de (5.3), les  $(X_i^{k-1})_{i \in \{1,2\}}$  sont supposés connus. En particulier, les conditions aux limites sur  $\Gamma$ , (5.3c) et (5.3g), utilisent une information externe extraite de l'itéré de Schwarz précédent, qui est considérée comme une donnée. C'est précisément ce qui, contrairement à (5.1), rend (5.3) séparable en deux sous-problèmes : d'une part, (5.3a)-(5.3d) ; d'autre part, (5.3e)-(5.3h).

2. Il existe aussi des méthodes de Schwarz séquentielles, qui reviennent à remplacer (5.3g) par  $\mathcal{B}_{2,2} X_2^k = \mathcal{B}_{2,1} X_1^k$ . Le sous-modèle 2 ne peut alors être traité qu'après que le sous-modèle 1 l'ait été. Dans toute la suite, on supposera qu'on utilise des méthodes parallèles ; à de légères adaptations près, les conclusions obtenues seront aussi valables pour des algorithmes séquentiels.

3. Dans le cas général, l'implication réciproque est fautive ; en effet, on fera en sorte de définir les opérateurs  $(\mathcal{B}_{i,j})$  de façon à ce que (5.3) corresponde à deux sous-problèmes bien posés, ce qui n'est pas nécessairement le cas de (5.1).

(5.3) est un algorithme de Schwarz ; il correspond, à chaque itération  $k$ , à la résolution de deux sous-systèmes *indépendants*, ressemblant au problème (5.1), à une nuance cruciale près : les équations de transmission (5.3c) et (5.3g) sont en décalage l'une par rapport à l'autre. Il est important de comprendre qu'il ne s'agit *pas* d'un décalage temporel, mais bien d'un décalage en terme d'itérés de Schwarz. Par conséquent, une résolution multiphysique reposant sur un algorithme de Schwarz peut être considérée comme couplée étroitement, cf. (d2).

Le concepteur de l'algorithme de Schwarz choisit :

- (1) Un quadruplet d'opérateurs de transmission de Schwarz  $(\mathcal{B}_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$ .
- (2) Un couple de solutions « d'ébauche » (au sens des itérations de Schwarz, et non au sens temporel),  $(X_i^0|_{\Gamma})_{i \in \{1,2\}}$ , définies uniquement sur  $\Gamma$ .

Tout l'enjeu des méthodes de Schwarz est de faire ces choix de la meilleure façon possible. De façon générale, le couple de solutions initiales évoluera en fonction des conditions d'initialisations du problème considéré, et non de la forme continue de ses équations au niveau continu. Par conséquent, on concentrera le développement d'algorithmes de Schwarz autour de l'optimisation du quadruplet d'opérateurs de transmission  $(\mathcal{B}_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$ .

A minima, on exigera de ce choix qu'il mène à des suites d'itérés qui *convergent au sens de Schwarz*, c'est à dire qui vérifient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|X_i^k - X_i^\varphi\| = 0 \quad i \in \{1,2\} \quad (5.5)$$

En d'autres termes, en résolvant plusieurs fois deux sous-problèmes séparés, on veut converger vers la solution au problème monolithique (5.1). Dans (5.5), la norme utilisée dépend du problème physique considéré et de l'espace fonctionnel dans lequel les solutions évoluent. Bien entendu, la notion de convergence d'un algorithme de Schwarz n'a de sens que par rapport à une norme donnée (ou à un couple de normes éventuellement différentes sur les deux sous-domaines considérés).

On dira que l'algorithme de Schwarz converge *exactement* vers la solution à partir de l'itération  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  si :

$$\forall k \geq k_0, \forall i \in \{1,2\}, X_i^k = X_i^\varphi \quad (5.6)$$

Dans ce cas, il est évidemment inutile de continuer l'algorithme après les  $k_0$  premières itérations.

Chaque itération de (5.3) correspond à 2 résolutions d'un problème potentiellement compliqué ; par exemple, dans le cas du couplage océan-atmosphère, il s'agit de la résolution numérique des équations primitives dans chaque sous-domaine. Par conséquent, on cherchera à optimiser les algorithmes de Schwarz, de façon à ce que la convergence soit non seulement assurée, mais aussi rapide en terme de nombre d'itérations. En particulier, on cherchera à déterminer des algorithmes tels que :

$$\forall i \in \{1,2\}, \underbrace{\|X_i^k - X_i^\varphi\|}_{=e_k^i} \searrow 0 \text{ le plus rapidement possible} \quad (5.7)$$

où, par « le plus rapidement possible », on entend « en faisant le moins d'itérations de Schwarz possible ». (5.7) définit la suite d'erreurs  $(e_i^k)$ , pour  $i \in \{1,2\}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On reviendra sur ces erreurs au § 5.2.3.

Telles que présentées dans cette sous-section, les suites d'itérés de Schwarz définissent des fonctionnelles continues et ne font intervenir aucune discrétisation.

### 5.1.3 Motivations derrière l'utilisation d'algorithmes de Schwarz

La sous-section précédente a introduit les principales caractéristiques des algorithmes de Schwarz dans un cadre très général. Cette sous-section a maintenant pour objectif d'expliquer pourquoi la piste des algorithmes de Schwarz est préférée à d'autres solutions pour réaliser le couplage du problème océan-atmosphère. On se penchera sur deux éventuelles alternatives, dont on expliquera l'inadéquation : l'approche monolithique, et les méthodes algébriques. Enfin, la dernière partie de cette sous-section donne quelques arguments positifs motivant l'utilisation d'algorithmes de Schwarz pour ce problème.

#### Approche monolithique

Comme nous l'avons vu précédemment, coupler deux sous-problèmes apporte un certain nombre de difficultés, notamment en terme de synchronisation des échanges entre eux. L'approche monolithique consiste à s'affranchir de la nécessité de coupler, en résolvant le problème océan-atmosphère « en un seul bloc ». Il s'agit donc de simuler numériquement, de façon commune, l'océan et l'atmosphère. Nous estimons que cette approche n'est pas envisageable, pour diverses raisons.

La première est d'ordre communautaire : depuis le milieu du XX<sup>e</sup> siècle, les développements des modèles numériques océaniques et atmosphériques se sont d'abord faits de façon quasi-indépendantes, avec certes une certaine porosité entre les communautés, ayant ces dernières années tendance à augmenter, les problématiques de couplage devenant de plus en plus prépondérantes. Il ne faut pas oublier que chacune de ces communautés dispose de ses propres champs d'expertise, se nourrissant éventuellement les uns les autres. Les sources des codes d'un modèle typique de simulation atmosphérique ou océanique comportent  $O(10^5)$  lignes de code. L'approche monolithique est très intrusive au sein des développements des modèles, puisqu'elle impliquerait, pour chaque paire de modèles océan-atmosphère regroupée, d'uniformiser au niveau informatique l'intégralité des sources de code, de façon à ce qu'elles soient compatibles. Cela représente une très lourde charge de travail.

Les considérations énoncées jusqu'à présent auraient pu s'appliquer à n'importe quel problème de couplage entre deux modèles sophistiqués. En ce qui concerne plus spécifiquement le contexte océan-atmosphère, il faut bien comprendre que même au sein d'une pseudo « approche monolithique », la CLS ne sera pas traitée par les grilles de calcul, puisque, comme expliqué au début du chapitre 2, cela nécessiterait, au voisinage de l'interface océan-atmosphère, une résolution spatiale verticale prohibitive en terme de coûts de calculs. Ainsi, même si on considère artificiellement que l'océan et l'atmosphère sont traités ensemble, il subsistera toujours dans les faits des mécanismes de couplages océan-CLS et CLS-atmosphère, *via* les schémas de paramétrisations CLS. À moins de radicalement changer les méthodes de reconstruction de solutions discrètes au voisinage de la surface de l'océan<sup>4</sup>, considérer que les CLS sont incluses dans les grilles de discrétisation des sous-modèles est une erreur. Les exclure des grilles, comme cela a été préconisé au § 2.1, est certes moins confortable, mais plus justifié et scientifiquement honnête.

Une autre difficulté concernant l'implémentation d'une méthode monolithique est liée à l'hétérogénéité de l'océan et de l'atmosphère. Bien que reposant sur les mêmes équations de base (les équations primitives), les méthodes de discrétisations numériques des modèles océan et atmosphère présentent souvent de grandes disparités, en terme de résolutions spatiales et temporelles, mais aussi en terme de *natures mêmes des schémas utilisés* (éléments finis, différences

---

4. Ce qui, à notre avis, constitue effectivement une piste de recherche intéressante, bien qu'ambitieuse.

finies, éléments spectraux, etc.), ou de choix de méthodes pour le traitement de termes aux dérivées temporelles (schémas explicites, implicites, semi-implicites, etc.). Du fait des différences de propriétés physiques entre l’océan et l’atmosphère<sup>5</sup>, des méthodes numériques utilisées au sein d’un sous-modèle n’ont aucune raison d’être directement transposables à l’autre.

Enfin, une dernière raison pour laquelle l’approche monolithique est exclue est que les grilles de discrétisations spatiales horizontales de l’océan et de l’atmosphère sont nettement différentes. Les modèles les plus récents incorporent même des mécanismes de raffinements dynamiques et locaux du maillage autour de régions critiques (Blayo et Debreu, 1999; Jablonowski *et al.*, 2004; Abiodun *et al.*, 2008). Lier grilles de calcul océanique et atmosphérique peut se faire par des schémas d’interpolation (Reynolds et Smith, 1994), qui ont intrinsèquement tendance à entraîner des erreurs numériques. Incorporer ces mécanismes de façon à ce qu’ils s’accommodent bien avec les schémas de paramétrisations CLS nous semble être suffisamment complexe pour que ne pas avoir à se poser cette question soit réconfortant.

### Méthodes algébriques

Les méthodes algébriques sont des méthodes de couplage s’appliquant à des problèmes d’algèbre linéaire. Un exemple emblématique est la méthode du complément de Schur (Zhang, 2006), aujourd’hui employée sous différentes formes dans de nombreuses bibliothèques de décomposition de domaine (Farhat et Roux, 1992; Mandel, 1993), y compris dans des contextes multiphysiques (Barcelos *et al.*, 2006). Dans le cadre d’un problème à deux sous-modèles 1 et 2 partageant une interface  $\Gamma$ , elle peut se formaliser ainsi :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_\Gamma \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

où  $(U_i)$  correspond à la discrétisation de la solution sur les sous-domaines 1 et 2 (excluant l’interface  $\Gamma$ ), et sur  $\Gamma$ , pour  $i \in \{1, 2, \Gamma\}$ , respectivement. Les  $(F_i)$  sont les vecteurs de données, suivant le même découpage. Les  $(A_{ij})$ , pour  $(i, j) \in \{1, 2, \Gamma\}$ , sont des matrices-blocs correspondant à l’action du sous-modèle  $i$  sur le sous-modèle  $j$ . On appelle complément de Schur la grandeur suivante :

$$S = A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1} A_{11}^{-1} A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma} \quad (5.9)$$

Sans rentrer dans les détails, les méthodes de Schur reposent sur la détermination du complément de Schur  $S$  par un algorithme du gradient conjugué, préconditionné avec soin en fonction de la nature du problème physique traité, et surtout de sa discrétisation numérique. Une fois  $S$  connu, retrouver la solution couplée sur les deux sous-domaines est immédiat.

Dans le contexte océan-atmosphère, les méthodes de type algébriques (incluant donc les méthodes de Schur) ne nous semblent pas intéressantes, puisque celles-ci sont très tributaires des méthodes de discrétisation employées. Cela se traduit par le fait que développer une méthode algébrique adaptée à une paire spécifique de modèles océan et atmosphère ne préjuge en rien de sa pertinence pour une autre paire. Les méthodes numériques utilisées au sein des modèles océan et atmosphère présentant une certaine diversité (par exemple, en fonction de propriétés physiques privilégiées), et étant en évolution constante, coupler ces modèles *via* des méthodes algébriques ne nous semble pas satisfaisant.

5. Par exemple, le fait que les échelles de vitesse dans l’océan soient en général bien plus petites que dans l’atmosphère.

### Pourquoi préférer les algorithmes de Schwarz ?

L'approche s'appuyant sur les algorithmes de Schwarz est peu intrusive : elle nécessite seulement une légère adéquation des modèles en terme de pas de temps de discrétisation temporelle, et une relative similarité dans la formulation des conditions de bord à leur interface, qui, comme on l'a vu aux chapitres précédents, est plutôt bien vérifiée dans le contexte océan-atmosphère. Il est ainsi envisageable, d'un point de vue communautaire, de perfectionner les méthodes de couplage *de façon quasi-indépendante de l'évolution des modèles océan et atmosphère*. C'est entre autres ce qui justifie la pertinence des études de cas simplifiés pour lesquels des résultats mathématiques peuvent être obtenus, comme le couplage de couches d'Ekman vu au chapitre 4.

L'étude des algorithmes de Schwarz peut se faire de façon analytique au niveau continu, et ce avec un cadre théorique solide. Cela a pour conséquence une propriété très intéressante de modularité : un algorithme de Schwarz robuste est adaptable à une grande variété de couples de modèles océan et atmosphère. En particulier, la convergence théorique du couplage au sens de Schwarz se traduit en convergence numérique du problème vers la solution proprement couplée, et ce *quels que soient les choix de discrétisations numériques faits dans chaque sous-modèle*, en termes qualitatifs (natures des schémas) et quantitatifs (résolutions), du moment que les schémas choisis soient tous les deux consistants et que la discrétisation soit suffisamment fine.

## 5.2 Vers une méthode de couplage adaptée

L'objectif final de cette section est d'introduire un type d'algorithmes de Schwarz que nous jugeons particulièrement bien adapté à la résolution du couplage océan-atmosphère. Cela sera fait en fin de section, au § 5.2.3. Avant cela, on justifiera l'introduction de tels algorithmes relativement novateurs en présentant brièvement des méthodes plus classiques, qualifiées de « méthodes *ad hoc* », aux sous-sections § 5.2.1 et 5.2.2. Une fois ces méthodes présentées, on dressera un bilan partiel entre le § 5.2.2 et le § 5.2.3, afin de justifier la nécessité de développer des alternatives aux méthodes *ad hoc*.

Il existe une grande variété de méthodes pour coupler des problèmes instationnaires. Les méthodes *ad hoc* présentées ici se limitent à deux exemples couramment utilisés pour le traitement du problème océan-atmosphère. Gander (2015) propose une revue plus exhaustive des différents formalismes mathématiques utilisés pour la résolution multi-domaine de problèmes instationnaires. Il existe aussi des contraintes spécifiques au problème de couplage océan-atmosphère :

- (ctr1) Les méthodes de couplage doivent respecter des principes primordiaux de conservation globale aux implications physiques fortes : par exemple, la conservation de la chaleur, de la vorticité potentielle, ou de la quantité totale d'eau. La tendance est actuellement à la construction, au sein de modèles océan ou atmosphère, de méthodes « mimant » au niveau discret les propriétés de conservation continues (Dubos, 2017; Eldred et Randall, 2017). Le fait que les deux sous-modèles couplés utilisent chacun des schémas conservatifs ne constitue pas une garantie du caractère conservatif du système couplé océan-atmosphère<sup>6</sup>. Ces propriétés étant d'une importance physique capitale, mettre en place des méthodes de couplage les brisant n'est pas acceptable; cela peut entre autres mener, lors de simulations à échelles climatologiques, à

---

6. Notamment lorsque le couplage est fait de façon relâchée, cf. (d2).

des phénomènes de dérive numérique des modèles (Bryan, 1998; Gordon *et al.*, 2000).

- (ctr2) Les échanges entre sous-modèles font souvent intervenir des interpolations spatio-temporelles, et sont donc relativement coûteux. En outre, d'un point de vue informatique, ces échanges nécessitent une synchronisation des modèles. Enfin, le procédé même d'échanges de données est coûteux. Il est ainsi souhaitable, dans la mesure du possible, de les limiter le plus possible.
- (ctr3) Comme nous l'avons vu au chapitre 3, les conditions d'interface entre sous-modèles, issues de formulations bulk, sont entachées de fortes incertitudes. En particulier, ces formulations sont calibrées sur des tendances grandes échelles (en temps et en espace), et ne sont donc pas nécessairement pertinentes pour des évaluations instantanées de flux turbulents. Ces problématiques seront abordées plus en détails au § 5.3.2.
- (ctr4) D'un point de vue physique, l'océan et l'atmosphère sont *fortement couplés*, cf. (d1). En particulier, cela signifie que pour ce problème, mettre en place des méthodes de couplage « relâchées » n'est pas suffisant.

Les deux méthodes *ad hoc* présentées aux § 5.2.1 et 5.2.2 sont les méthodes standard actuellement implantées dans les modèles couplés océan-atmosphère. Elles se distinguent par les dates auxquelles les échanges d'information se font entre les sous-modèles et ne prennent donc sens que pour des problèmes simulés numériquement par discrétisation temporelle. On supposera que les deux sous-problèmes 1 et 2 sont discrétisés par des grilles temporelles uniformes<sup>7</sup> dont on note les pas de temps  $(\delta t_1, \delta t_2)$ , de façon à ce que  $\delta t_1 \leq \delta t_2$ , quitte à intervertir l'ordre.

### 5.2.1 Couplage synchrone

Le couplage synchrone, comme son nom l'indique, consiste à échanger de l'information entre les deux problèmes aux mêmes instants  $t$ . À moins de devoir mener des extrapolations sur la grille temporelle, cette méthode requiert une certaine conformité des grilles temporelles, *a minima* que  $\frac{\delta t_2}{\delta t_1} \in \mathbb{Q}$ . Cela constitue une première limitation propre à cette stratégie : les pas de discrétisations temporelles de chaque sous-modèle ne peuvent pas être choisis de façon totalement indépendante. En appelant  $\delta t_c$  le plus petit réel tel que  $\frac{\delta t_c}{\delta t_i} \in \mathbb{N}^*$  pour  $i \in \{1, 2\}$ , les échanges d'information entre sous-modèles ne peuvent se faire que tous les  $\delta t_c$ , ou moins fréquemment.

La figure 5.2 offre une représentation schématique d'un couplage synchrone. On résout alors le problème suivant, sur chaque sous-domaine spatial  $\Omega_i$ , repéré par  $i \in \{1, 2\}$ , et sur chaque sous-intervalle de temps  $\mathcal{T}_l = [l\delta t_c; (l+1)\delta t_c[ \subset [0; T]$ , repéré par  $l \in \left[0; \left\lceil \frac{T}{\delta t_c} \right\rceil\right]$  :

$$\mathcal{F}_i X_i(t, \mathbf{x}) = f_i \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{T}_l \times \Omega_i \quad (5.10a)$$

$$\mathcal{G}_i X_i(t, \gamma_i^e) = g_i \quad (t, \gamma_i^e) \in \mathcal{T}_l \times \partial\Omega_i^e \quad (5.10b)$$

$$\mathcal{B}_\Gamma^{\text{op}}(X_i(t, \gamma), X_{-i}(l\delta t_c, \gamma)) = 0 \quad (t, \gamma) \in \mathcal{T}_l \times \Gamma \quad (5.10c)$$

$$X_i(l\delta t_c, \mathbf{x}) = X_i\left((l\delta t_c)^-, \mathbf{x}\right) \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (5.10d)$$

7. Considérer des grilles temporelles non uniformes est aussi possible, mais cela complique l'exposé et n'apporte que des changements mineurs aux conclusions de ces deux premières sous-sections.

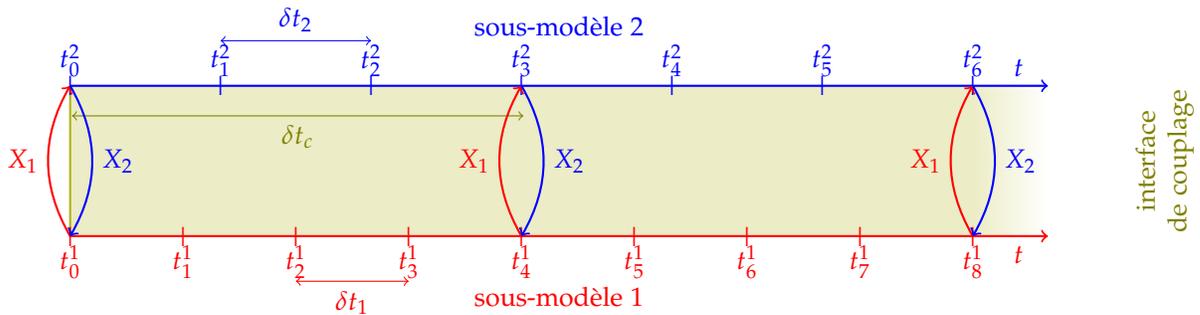


FIGURE 5.2 – Représentation schématique d'un couplage synchrone. Ci-dessus, en unité arbitraire,  $\delta t_1 = 3$ ,  $\delta t_2 = 4$  et  $\delta t_c = 12$ .

On peut faire les commentaires suivants sur (5.10) :

- ▶ (5.10) est un système d'équations aux dérivées partielles dont l'inconnue est  $X_i$ , sur l'intervalle temporel  $\mathcal{T}_i$  et le domaine spatial  $\Omega_i$ . Ce système correspond à un partitionnement temporel de (5.1) en  $\left\lceil \frac{T}{\delta t_c} \right\rceil$  sous-intervalles de temps, où  $\lceil x \rceil$  symbolise la partie entière par excès de  $x$ . On résout (5.10) successivement sur les sous-intervalles  $(\mathcal{T}_j)$  pour  $j$  croissant de 0 jusqu'à ce que le temps de simulation ait atteint le temps final  $T$ .
- ▶ (5.10c) est l'équation réalisant le couplage entre les deux sous-modèles. L'information transmise du sous-modèle  $-i$  au modèle  $i$  provient du sous-intervalle temporel précédent, et peut donc être considérée comme connue et constante.
- ▶ (5.10d) est une condition d'initialisation sur le sous-intervalle  $\mathcal{T}_l$  : on initialise la solution sur  $\mathcal{T}_l$  à la valeur finale de la solution sur le sous-intervalle précédent  $\mathcal{T}_{l-1}$ , qu'on a notée  $X_i \left( (l\delta t_c)^-, \mathbf{x} \right)$ . Pour  $l = 0$ , on la remplace par  $X_{i,0}^q$ , condition d'ébauche du problème physique (5.1), dans le membre de droite de (5.10d).

La méthode de couplage synchrone souffre, entre autres, des limitations suivantes :

- ( $p_-^{syn}1$ ) Comme dit précédemment, les pas de temps doivent être définis de façon à ce que leur rapport soit un nombre rationnel, ce qui a un léger caractère limitatif.
- ( $p_-^{syn}2$ ) La méthode de couplage synchrone correspond à forcer le problème 1 par la valeur finale du problème 2 au sous-intervalle temporel précédent (et vice versa), et non à coupler les deux problèmes. Si l'on fait l'hypothèse (optimiste) qu'au début d'une fenêtre de temps, on dispose de la solution correcte couplée, alors, dès le second pas de temps de ce sous-modèle, on s'éloigne de cette « véritable » solution bien couplée. En effet, à ce second pas de temps, le modèle 1 sera forcé par des valeurs prises par le sous-modèle 2 *au début de la fenêtre de temps actuelle*, et non au moment présent. Ainsi, en un sens, le forçage est « en retard » sur le problème qu'on cherche à résoudre ; en d'autre terme, le couplage est réalisé de façon relâchée.

Dans le contexte de couplage d'une colonne océan-atmosphère, le point  $(p_-^{syn} 2)$  est lié au traitement implicite de la direction verticale dans les modèles océan et atmosphère, dont les interactions sont constituées de flux à leur niveau le plus proche de la surface de l'océan. On peut écrire ces conditions sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}_o X_o|_\Gamma = F_{a \rightarrow o} (X_o|_\Gamma, X_a|_\Gamma) \quad (5.11a)$$

$$\mathcal{A}_a X_a|_\Gamma = F_{o \rightarrow a} (X_a|_\Gamma, X_o|_\Gamma) \quad (5.11b)$$

$$F_{o \rightarrow a} (X_a|_\Gamma, X_o|_\Gamma) = -F_{a \rightarrow o} (X_o|_\Gamma, X_a|_\Gamma) \quad (5.11c)$$

où  $(X_\alpha)_{\alpha \in \{o,a\}}$  sont les solutions dans chaque domaine, les  $(F_{\alpha \rightarrow -\alpha})$  sont les fonctions permettant d'obtenir le flux de  $\alpha$  vers  $-\alpha$ , et  $(\mathcal{A}_\alpha)$  les opérateurs différentiels liant les variables d'état au flux (par exemple,  $\nu_\alpha \partial_z$ ). (5.11c) correspond à faire en sorte que les flux envoyés par un sous-modèle correspondent bien aux flux perçus par l'autre sous-modèle ; cette équation permet de vérifier la contrainte (ctr1).

On distingue alors deux stratégies :

- le couplage en flux explicites :

$$\mathcal{A}_\alpha X_\alpha|_\Gamma (t_{n+1}) = F_{-\alpha \rightarrow \alpha} (X_\alpha|_\Gamma (t_n), X_{-\alpha}|_\Gamma (t_n)) \quad (5.12)$$

Cette méthode introduit une contrainte de stabilité numérique intrinsèque au couplage, et ce même si les deux sous-modèles pris séparément sont inconditionnellement stables (Lemarié *et al.*, 2015).

- le couplage en flux implicites :

$$\mathcal{A}_\alpha X_\alpha|_\Gamma (t_{n+1}) = F_{-\alpha \rightarrow \alpha} (X_\alpha|_\Gamma (t_{n+1}), X_{-\alpha}|_\Gamma (t_{n+1})) \quad (5.13)$$

Ryder *et al.* (2014) implémentent cette méthode pour le couplage continent-atmosphère. Beljaars *et al.* (2017) mettent en place cette méthode en deux étapes dans le contexte océan-atmosphère, et montrent son caractère inconditionnellement stable.

Le § 5.3.3 reviendra sur cette distinction, en l'adaptant au contexte de cette thèse.

### Cas idéalisé : couplage synchrone de modèles « parfaitement synchronisables »

Les problèmes listés ci-dessous sont strictement liés aux pas de discrétisations temporelles des sous-modèles 1 et 2, et sont effectifs lorsque ceux-ci sont distincts. Or, la méthode de couplage synchrone recèle d'autres insuffisances ; pour bien les mettre en exergue, considérons désormais un cas idéal, où les deux sous-modèles auraient exactement le même pas de discrétisation temporelle, et où l'échange d'information entre ceux-ci se ferait à chaque pas de temps. On qualifie ces problèmes comme étant « parfaitement synchronisables » ; les limitations  $(p_-^{syn} 1)$ - $(p_-^{syn} 2)$  ne sont donc plus rencontrées.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que même dans ce cas idéal, la méthode de couplage synchrone ne permet pas d'obtenir une solution couplée de façon satisfaisante. La figure 5.3 représente schématiquement les mécanismes d'échanges entre les sous-modèles, sous l'hypothèse de sous-modèles parfaitement synchronisables. Les problèmes suivants sont alors rencontrés :

- $(p_-^{syn} 4)$  Dans le cas de couplage en flux explicites, qui correspond à ce qui est fait pour le couplage synchrone océan-atmosphère dans les modèles actuels, le fait de prendre des valeurs instantanées de la solution

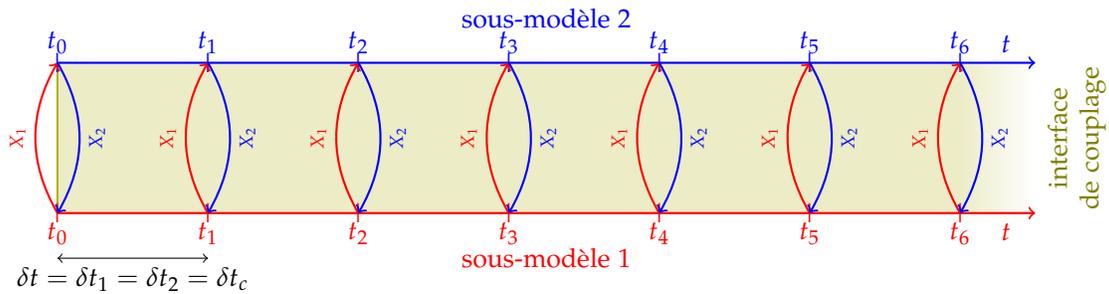


FIGURE 5.3 – Représentation schématique d’un cas de couplage synchrone entre problèmes « parfaitement synchronisables ». Les deux sous-modèles ont le même pas de discrétisation temporelle, et l’échange d’information entre ceux-ci se fait à chaque pas de temps.

peut entraîner le développement d’instabilités numériques (Connors et Ganis, 2011). En particulier ce type de couplage n’est que conditionnellement stable (Lemarié *et al.*, 2015), la condition de stabilité dépendant entre autres des maillages spatiaux des deux sous-domaines.

- ( $p_-^{syn}5$ ) Dans le contexte océan-atmosphère, les conditions de transmission entre les deux sous-modèles sont obtenues à partir de formulations bulk, qui n’ont pas été calibrées pour des valeurs instantanées des solutions, mais plutôt sur des tendances grandes échelles. Il y a par conséquent de fortes incertitudes sur le calcul de flux instantanés *via* des formulations bulk (Gulev *et al.*, 2007).
- ( $p_-^{syn}6$ ) Toujours dans ce contexte, en utilisant un couplage synchrone, l’océan recevra alors des flux à haute fréquence de l’atmosphère, alors que d’un point de vue physique, cette gamme de fréquences est plutôt absorbée par les modèles de vagues (Kondo *et al.*, 1973), et non perçue par la dynamique propre de l’océan.
- ( $p_-^{syn}7$ ) La solution alors obtenue n’est toujours pas proprement couplée, dans le sens où elle ne vérifiera pas l’équation (5.1g). Il existe un décalage (maintenant, réduit à un seul pas de temps) entre l’information transmise d’un modèle à l’autre pour évaluer les flux ; en d’autres termes, cette méthode de couplage est « relâchée », cf. (d2).

Il faut bien comprendre que dans le cas de problèmes non parfaitement synchronisables, ces écueils sont tout aussi valables et s’ajoutent donc aux points ( $p_-^{syn}1$ ) et ( $p_-^{syn}2$ ). Par conséquent, la méthode de couplage synchrone, même dans des cas idéalisés où on force les deux modèles à avoir les mêmes pas de temps<sup>8</sup>, n’est pas satisfaisante.

## 5.2.2 Couplage asynchrone

La méthode de couplage asynchrone offre une stratégie différente pour coupler deux modèles. À l’image de la méthode synchrone, nous la présentons, pour ensuite expliquer en quoi cette méthode ne convient pas non plus à la résolution du couplage océan-atmosphère.

8. Dans le contexte océan-atmosphère, cette stratégie est limitative, puisque pour des raisons physiques, les pas de temps océaniques sont typiquement beaucoup plus longs que les pas de temps atmosphériques.

Le couplage asynchrone offre une plus grande flexibilité en terme de grilles temporelles. Elle repose aussi sur le découpage de l'intervalle temporel  $[0; T]$  en *fenêtres de couplage*; en revanche, contrairement aux méthodes synchrones, on peut effectuer ce découpage de façons différentes pour les deux sous-modèles. On notera  $(t_{k_1}^1)_{k_1 \in \mathbb{N}}$  et  $(t_{k_2}^2)_{k_2 \in \mathbb{N}}$  les dates d'échantillonnages des deux sous-modèles;  $(\mathcal{T}_{l_1}^1)_{l_1 \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{T}_{l_2}^2)_{l_2 \in \mathbb{N}}$  leurs fenêtres de couplage.

Le sous-problème 1 sur la fenêtre de couplage  $\mathcal{T}_{l_1}^1$  ( $l_1 \in \mathbb{N}$  quelconque) s'écrit ainsi :

$$\mathcal{F}_1 X_1(t, \mathbf{x}) = f_1 \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{T}_{l_1}^1 \times \Omega_i \quad (5.14a)$$

$$\mathcal{G}_1 X_1(t, \gamma_1^e) = g_1 \quad (t, \gamma_1^e) \in \mathcal{T}_{l_1}^1 \times \partial\Omega_i^e \quad (5.14b)$$

$$\mathcal{B}_\Gamma^\phi \left( X_1(t, \gamma), \langle X_2(t', \gamma) \rangle_{t' \in \{\mathcal{T}^2 \leq t\}} \right) = 0 \quad (t, \gamma) \in \mathcal{T}_{l_1}^1 \times \Gamma \quad (5.14c)$$

$$X_i(l_1 \delta t_c, \mathbf{x}) = X_i((l_1 \delta t_c)^-, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (5.14d)$$

où :

- Le symbole  $\langle \cdot \rangle_{t' \in \mathcal{T}}$  correspond à une moyenne sur la fenêtre de temps  $\mathcal{T}$ . Ainsi, (5.14c) contient l'opérateur de transmission  $\mathcal{B}_\Gamma^\phi$  appliqué à la solution du sous-modèle 2 moyennée sur la fenêtre précédant l'instant  $t$ , définie ainsi :

$$\{\mathcal{T}^2 \leq t\} = \mathcal{T}_{l_{2,max}(t)}^2 \quad \text{où } l_{2,max}(t) = \max \left\{ l_2 \in \mathbb{N} / \forall t' \in \mathcal{T}_{l_2}^2, t' \leq t \right\} \quad (5.15)$$

où le choix dans l'opérateur de moyenne (continu, et son implémentation discrète) est laissé à l'utilisateur. Plus prosaïquement,  $\{\mathcal{T}^2 \leq t\}$  est la plus tardive fenêtre de couplage du sous-modèle 2 étant entièrement antérieure à l'instant  $t$ .

- (5.14d) correspond à une initialisation temporelle propre à la fenêtre  $\mathcal{T}_{l_1}^1$ , à partir de l'état final de la fenêtre temporelle précédente.

Le traitement du sous-problème 2 est parfaitement analogue à (5.14), en intervertissant les rôles respectifs de chaque sous-problème. La figure 5.4 offre une représentation schématique d'une implémentation de couplage asynchrone pour deux sous-modèles à pas de temps et tailles de fenêtres de couplage différents.

La méthode de couplage asynchrone présente les avantages suivants, par rapport à la méthode de couplage synchrone :

- $(p_+^{asym} 1)$  Aucune contrainte sur les pas de discrétisations temporelles des deux sous-modèles n'est requise. Ainsi, la méthode de couplage asynchrone est moins intrusive que la méthode synchrone, dans la mesure où elle ne nécessite pas l'adaptation des pas de temps des deux modèles.
- $(p_+^{asym} 2)$  Pour la transmission d'information d'un modèle à l'autre, l'utilisation de valeurs moyennées (plutôt qu'instantanées) permet de « lisser » les signaux transmis, et conséquemment d'en réduire les incertitudes.
- $(p_+^{asym} 3)$  L'utilisateur bénéficie d'une relative liberté quant au choix des tailles des fenêtres de couplage. S'il peut anticiper de rapides changements

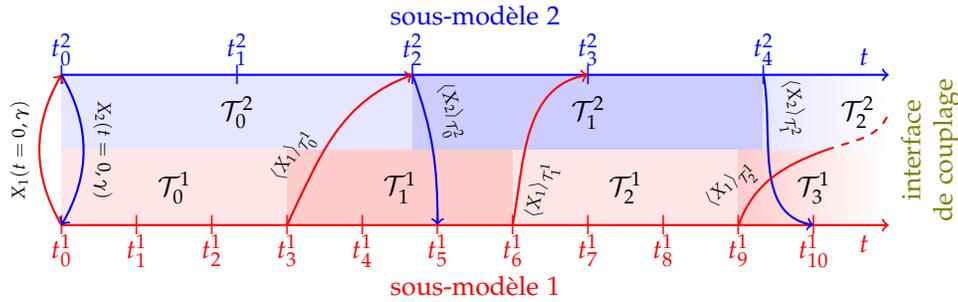


FIGURE 5.4 – Représentation schématique d’un couplage asynchrone. À chaque fin de fenêtre de couplage  $\mathcal{T}_{j_i}^i$ , le modèle  $i$  transmet au modèle  $\neg i$  une valeur moyennée de la solution sur la fenêtre de couplage qui vient de se dérouler ; cette valeur moyennée est prise en compte par le modèle  $\neg i$  (qui lui appliquera alors l’opérateur  $\mathcal{B}_{\Gamma}^{\varphi}$ , cf. (5.14c)) à partir de son premier pas de temps postérieur à la fin de la fenêtre de couplage  $\mathcal{T}_{j_i}^i$ .

dans la dynamique du modèle  $i$  à un instant donné, il pourra en dimensionner les fenêtres de couplage de façon à ce que ces changements correspondent à une transition entre deux fenêtres. Dans le contexte météorologique, un exemple typique de mise en place d’une telle stratégie consiste à dimensionner les fenêtres de couplage de façon à ce que les cycles diurnes correspondent à des changements de fenêtres de couplage.

En revanche, la méthode de couplage asynchrone souffre des limitations suivantes, dont certaines concernent aussi la méthode synchrone :

- ( $p_{-}^{asym}1$ ) Il existe un décalage temporel entre les deux sous-modèles, qui peut, en fonction du découpage relatif des fenêtres temporelles, être ponctuellement plus accentué que pour la stratégie synchrone. À titre d’exemple, sur la figure 5.4, au pas de temps  $t_2^2$ , le sous-modèle 2 prend en compte  $\langle X_1 \rangle_{\mathcal{T}_0^1}$  comme donnée du sous-problème 1 ; cette valeur correspond à l’état du sous-problème 1 entre 4 et 1 pas de temps  $\delta t_1$  avant  $t_2^2$ . La donnée transmise de 1 à 2 est donc en retard de plusieurs pas de temps sur le temps « physique ». En reprenant l’exemple précédemment introduit du cycle solaire au sein d’un modèle météorologique, cela veut dire que si les fenêtres de temps ne sont pas soigneusement dimensionnées, on pourrait se retrouver dans des situations où le matin, l’atmosphère serait simulée à l’aide de données océaniques provenant de la nuit précédente.
- ( $p_{-}^{asym}2$ ) La remarque fondamentale rappelée en ( $p_{-}^{sym}7$ ) est toujours valable : il n’y a aucune raison pour que le couplage entre les deux sous-modèles puisse être fait par résolution séparée, avec une seule transmission d’information. La solution obtenue ne vérifie pas (5.1g) : en d’autres termes, le couplage est réalisé de façon « relâchée », cf. (d2).

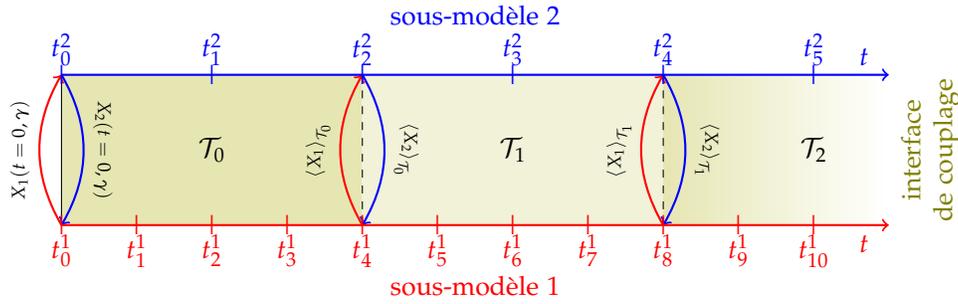


FIGURE 5.5 – Représentation schématique d’un couplage semi-asynchrone. Les fenêtres de couplage sont les mêmes pour les deux sous-modèles. À chaque fin de fenêtre de couplage  $\mathcal{T}_i$ , le modèle  $i$  transmet au modèle  $\neg i$  une valeur moyennée de la solution sur la fenêtre de couplage qui vient de se dérouler ; cette valeur moyennée est prise en compte par le modèle  $\neg i$  (qui lui appliquera alors l’opérateur  $\mathcal{B}_T^\phi$ , cf. (5.14c)) sur toute la fenêtre de couplage à venir,  $\mathcal{T}_{i+1}$ .

### Couplage semi-asynchrone

De façon analogue à ce qui a été fait pour les couplages synchrones « parfaitement synchronisables », on peut mettre en place une méthode de couplage « semi-asynchrone » en imposant que les fenêtres de couplage soient les mêmes pour les deux sous-modèles. Cette contrainte supplémentaire permet de réduire les effets soulevés au point  $(p_{-}^{asyn}1)$ , sans toutefois les annuler complètement : il existera toujours un décalage entre le sous-problème traité et les informations qu’il reçoit de l’autre sous-modèle, bien qu’il soit moindre que dans le cas décrit par la figure 5.4. On peut donc qualifier le couplage semi-asynchrone comme étant un couplage « relâché », cf. (d2). La figure 5.5 représente une situation de couplage semi-asynchrone.

### Conclusion intermédiaire sur les méthodes de couplage *ad hoc*

Comme le stipulent  $(p_{-}^{syn}7)$  et  $(p_{-}^{asyn}2)$ , un point commun aux méthodes synchrone et asynchrone est qu’elles n’ont aucune raison de correspondre à une situation de couplage équilibré, c’est à dire vérifiant l’équation (5.1g).

Que ce soit pour les méthodes synchrone ou asynchrone, un procédé pour atteindre une solution correctement couplée serait de répéter les échanges entre les deux sous-modèles, à pas de temps fixé (méthode synchrone) ou sur une fenêtre de couplage donnée (méthode asynchrone), jusqu’à ce que le couplage soit correctement fait. Cela correspond à mettre en place un algorithme de Schwarz (cf. § 5.1.2), et à attendre que celui-ci ait convergé.

Le caractère optimal (en nombre d’itérations) de la convergence n’est alors pas assuré : celui-ci dépend du choix des opérateurs  $(\mathcal{B}_{i,j})$ . En général, dans le cas de mise en place de méthode synchrone ou asynchrone, ces opérateurs sont directement déduits de  $\mathcal{B}_T^\phi$ , issu de la formulation continue du problème multiphysique, ou alors choisis comme opérateurs classiques (Dirichlet, Neumann, etc.). Il n’y a aucune raison pour que ces choix soient optimaux.

Telles qu’elles sont implémentées actuellement, les méthodes synchrone et asyn-

chrone correspondent à une seule itération d'un algorithme de Schwarz reposant sur des opérateurs de transmission imposés par les équations physiques, sans se préoccuper de leur caractère optimal en terme de couplage. Pour dresser un parallèle, mettre en place une méthode synchrone ou asynchrone classique pour coupler deux problèmes reviendrait, pour résoudre numériquement un problème non linéaire, à mettre en place un algorithme de Newton pour lequel on effectuerait une seule itération de point fixe. En un sens, ces méthodes *ad hoc* ne constituent donc qu'un premier pas, qu'on ne cherche pas à optimiser quant à sa rapidité de convergence.

### 5.2.3 Algorithmes de Schwarz à relaxation d'ondes

Les algorithmes de Schwarz globaux en temps (Gander *et al.*, 1999), ci-après appelés SWR pour *Schwarz Waveform Relaxation* (leur nom d'usage anglophone), constituent une classe d'algorithmes de Schwarz palliant aux limitations soulevées dans la conclusion intermédiaire ci-dessus, tout en s'en inspirant partiellement. À l'image de la décomposition de domaine en soi, cette méthode globale en temps, aussi appelée « à relaxation d'ondes », a d'abord été introduite au XIX<sup>e</sup> siècle (Picard, 1893; Lindelöf, 1894), avant de faire l'objet d'un regain d'intérêt pour résoudre par décomposition de domaine des systèmes d'équations différentielles ordinaires sur grille de discrétisation uniforme (Lelarasmee, 1982), puis sur grille quelconque (Horton et Vandewalle, 1995). Cette méthode a été ensuite implémentée pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles (Gander et Stuart, 1998; Giladi et Keller, 2002). Lions (1989) a étendu cette méthode à des cas où les sous-domaines considérés ne se recouvrent pas, ce qui correspond à un cadre dans lequel les problèmes de couplage multiphysique peuvent s'inscrire. Le développement d'algorithmes SWR adaptés à des problèmes de plus en plus variés est toujours aujourd'hui en cours, et constitue un champ de recherche dynamique; à titre d'exemple, récemment, Ong *et al.* (2016) ont montré que ce type de méthodes pouvaient, sous certaines conditions, être parallélisées en temps.

Pour mettre en place les algorithmes SWR, on découpera l'axe temporel en fenêtres de couplage de la même manière que cela a été fait pour la méthode semi-asynchrone (voir la figure 5.5), de façon à ce que les deux sous-modèles partagent les mêmes fenêtres de couplage. Naturellement, ce découpage n'est possible que sous réserve de compatibilité des pas de temps  $(\delta t_1, \delta t_2)$  : il est nécessaire que  $\frac{\delta t_2}{\delta t_1} \in \mathbb{Q}$ . Ceci constitue l'une des légères contraintes des algorithmes SWR.

Sur chaque fenêtre de temps  $\mathcal{T}_l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ), on met alors en place un algorithme de Schwarz, en utilisant le procédé décrit au § 5.1.2. En particulier, cela signifie que sur chaque fenêtre de temps, le problème « séparé » doit être résolu plusieurs fois, de façon itérative. On devra itérer autant de fois que nécessaire pour atteindre convergence, au sens de Schwarz.

On appelle  $X_i^k$  l'itération  $k \in \mathbb{N}^*$  (au sens de Schwarz) du sous-problème  $i \in \{1, 2\}$ . À  $i \in \{1, 2\}$  fixé, on détermine les itérés de Schwarz  $(X_i^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de façon itérative comme dans (5.3) :

$$\mathcal{F}_i X_i^k(t, \mathbf{x}) = f_i \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{T}_i \times \Omega_i \quad (5.16a)$$

$$\mathcal{G}_i X_i^k(t, \gamma_i^e) = g_i \quad (t, \gamma_i^e) \in \mathcal{T}_i \times \partial\Omega_i^e \quad (5.16b)$$

$$\mathcal{B}_{i,i} X_i^k(t, \gamma) = \mathcal{B}_{i,-i} X_{-i}^{k-1}(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in \mathcal{T}_i \times \Gamma \quad (5.16c)$$

$$X_i^k(t_{0,\mathcal{T}_i}, \mathbf{x}) = X_i^{k-1}(t_{0,\mathcal{T}_i}^-, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (5.16d)$$

où :

- ▶ (5.16c) est l'équation de couplage : à l'interface commune entre les deux sous-modèles, on force le sous-modèle  $i$  par l'itéré de Schwarz précédent, pris sur la même fenêtre de temps  $\mathcal{T}_l$ , de la solution du sous-modèle  $-i$ ; cela constitue une première différence avec les méthodes *ad hoc*. L'autre différence est que les opérateurs de transmission utilisés,  $(\mathcal{B}_{i,j})$ , ne sont pas forcément directement déduits de l'opérateur de couplage physique  $\mathcal{B}_\Gamma^\varphi$ ; c'est le concepteur de l'algorithme de Schwarz qui choisira les opérateurs, avec certaines contraintes : par exemple, que ces opérateurs vérifient la contrainte de compatibilité, ou qu'ils respectent certaines propriétés de conservation, cf. (ctr1).
- ▶ (5.16d) est une équation d'initialisation temporelle sur la fenêtre  $\mathcal{T}_l$  :
  - ◆  $t_{0,\mathcal{T}_l}$  correspond au début de la fenêtre  $\mathcal{T}_l$ , qui est aussi la fin de la fenêtre précédente  $\mathcal{T}_{l-1}$ , cf. le membre de droite de cette même sous-équation ;
  - ◆  $k_l^f \in \mathbb{N}^*$  est le nombre d'itérations de Schwarz effectuées à la fenêtre  $\mathcal{T}_l$ .  $X_{i-1}^{k_l^f}(t_{0,\mathcal{T}_{l-1}}^-, \mathbf{x})$  est donc l'évaluation de la dernière itération de Schwarz de la solution au temps final de la fenêtre de temps précédente. Dans le cas où  $j = 0$ , on remplace ce terme par la condition initiale physique  $X_i^{\varphi,0}$ , donnée par (5.1c) ou (5.1f).

La suite d'itérés de Schwarz est initialisée par une information provenant de la fenêtre de temps précédente (valeurs ponctuelles ou moyennées, par exemple).

Ainsi, à  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{T}_l$  fixés, on résout (potentiellement de façon parallèle) les deux problèmes (5.16), pour  $i \in \{1, 2\}$ . Une fois cela fait, on peut juger de la (non-)convergence de l'algorithme en utilisant un critère d'arrêt de ce type :

$$\int_{t \in \mathcal{T}_l} \int_{\gamma \in \Gamma} \left\| \mathcal{B}_\Gamma^\varphi \left( X_i^k(t, \gamma), X_{-i}^k(t, \gamma) \right) \right\|_{\mathbb{R}^d} d\gamma dt \stackrel{?}{\leq} r_{tol}^{Sch} \quad (5.17)$$

Deux scénarios sont possibles :

- ▶ (5.17) n'est pas vérifiée. On reste sur la même fenêtre de couplage  $\mathcal{T}_l$  et on passe à l'itéré de Schwarz suivant, en posant  $k \leftrightarrow k + 1$  et en re-résolvant les deux problèmes séparés (5.16).
- ▶ (5.17) est vérifiée. On est « suffisamment proche » de la solution bien couplée. On pose  $k_l^f = k$ ; ensuite, on passe au premier itéré de Schwarz de la fenêtre temporelle suivante, en posant  $l \leftrightarrow l + 1$  et  $k \leftrightarrow 0$ , et en utilisant à nouveau l'initialisation (5.16d).

La figure 5.6 propose une représentation schématique d'un algorithme SWR.

S'ils convergent bien sur chaque fenêtre de couplage, les algorithmes SWR permettent d'obtenir une solution couplée de façon étroite (cf. (d2)). En contrepartie, ces algorithmes sont plus coûteux en termes de temps de calculs que les méthodes de couplage *ad hoc* : en effet, il est nécessaire de simuler numériquement chaque fenêtre de couplage autant de fois que nécessaire avant

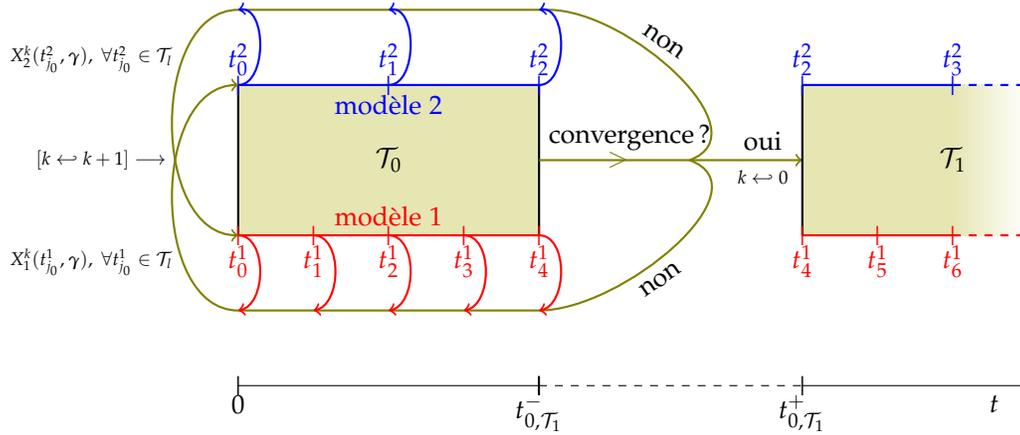


FIGURE 5.6 – Représentation schématique des deux premières fenêtres de couplage d’un algorithme SWR. Le passage de  $\mathcal{T}_0$  à  $\mathcal{T}_1$  ne se fait que si la convergence du couplage est atteinte ; dans le cas contraire, on passe à l’itération de Schwarz suivante : l’interface de couplage transmet les évolutions des sous-solutions du modèle  $i$  au modèle  $\neg i$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ , puis les deux sous-modèles recommencent leur simulation respective sur la fenêtre  $\mathcal{T}_0$ , avec des données d’interface mises à jour.

d’atteindre convergence. Le projet ANR COCOA<sup>9</sup>, démarré en 2017, a pour objectif d’évaluer l’impact de la mise en place d’algorithmes de Schwarz atteignant convergence pour le problème océan-atmosphère, dans un premier temps sans se préoccuper des coûts de calculs.

Obtenir une estimation de la vitesse de convergence d’un algorithme SWR passe par l’écriture de son *système d’erreur*, faisant intervenir la véritable solution multiphysique et bien couplée (qui n’est pas connue) du problème (5.1),  $(X_i^q)_{i \in \{1, 2\}}$ . On cherche un système d’équations aux dérivées partielles vérifié par l’erreur  $e_i^k = X_i^k - X_i^q$ .

On fera, dans la suite de cette sous-section, l’hypothèse que tous les opérateurs différentiels  $(\mathcal{F}_i)$ ,  $(\mathcal{G}_i)$  sont linéaires. On supposera en outre que l’opérateur de couplage multiphysique  $\mathcal{B}_\Gamma^q$  est *sécable*, ainsi :

$$\mathcal{B}_\Gamma^q(X_1, X_2) = \mathcal{B}_1^q X_1 - \mathcal{B}_2^q X_2 \quad (5.18)$$

Sous cette dernière hypothèse, la condition de couplage multiphysique (5.1g) s’écrit :

$$\mathcal{B}_1^q X_1(t, \gamma) = \mathcal{B}_2^q X_2(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.19)$$

Comme nous le verrons au § 5.3, cette hypothèse est restrictive : elle suggère que les mécanismes de couplage entre les deux sous-modèles peuvent se sous-diviser en deux parties indépendantes l’une de l’autre. En d’autres termes, elle limite l’intrication du couplage entre les deux sous-modèles. On supposera en outre que les opérateurs  $(\mathcal{B}_{i, \Gamma}^q)$ , définis par (5.18), sont linéaires. Ces hypothèses de linéarité et de sécabilité sont quasi-systématiquement faites dans la littérature standard, qui s’intéresse principalement à des problèmes linéaires.

9. Voir <http://www.agence-nationale-recherche.fr/Projet-ANR-16-CE01-0007>

Les opérateurs de transmission de Schwarz sont définis à partir des opérateurs de couplage multiphysique séparés  $(\mathcal{B}_i^\varphi)$  et de quatre opérateurs linéaires  $(\mathcal{H}_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}^2}$ , déterminés par l'utilisateur, ainsi :

$$\forall (i,j) \in \{1,2\}^2, \mathcal{B}_{i,j} = \mathcal{B}_i^\varphi + \mathcal{H}_{i,j} \quad (5.20)$$

Les opérateurs  $(\mathcal{B}_{i,j})$  sont donc linéaires aussi. Choisir  $(\mathcal{H}_{i,j}) = 0$  revient à mettre en place un algorithme SWR *suboptimal* ; sur chaque fenêtre de couplage, un éventuel grand nombre d'itérations seront nécessaires, sans aucune garantie *a priori* sur la rapidité de convergence<sup>10</sup>.

Les algorithmes SWR ont d'abord été développés pour des problèmes monophysiques, pour lesquels la présence d'un recouvrement entre les sous-domaines est possible (i.e.,  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  est un ouvert de mesure non nulle de  $\mathbb{R}^n$ ). La convergence d'algorithmes SWR est d'autant plus rapide que la taille du recouvrement est grande (Gander et Stuart, 1998). Dans le cas de problème sans recouvrement, comme l'est tout problème multiphysique, de tels algorithmes suboptimaux peuvent souffrir d'un coût de calcul prohibitif. Il existe cependant des configurations physiques<sup>11</sup> pour lesquelles la convergence est obtenue relativement rapidement, et ce même sans optimiser les opérateurs de transmission (Lombardi et al., 1996; Liu et al., 2009).

### Algorithmes SWR optimisés

Une façon de circonvenir ce problème est de construire les opérateurs  $(\mathcal{H}_{i,j})$  de façon à ce que l'algorithme SWR converge rapidement, et ce même sans recouvrement entre les sous-domaines. On parle alors d'algorithmes SWR *optimisés*, ci-après algorithmes OSWR (Gander et al., 1999; Bennequin et al., 2009, 2016). Nous verrons que *malgré l'intuition, poser  $(\mathcal{H}_{i,j}) = \bar{0}$ , c'est à dire, coupler les problèmes séparés via leurs opérateurs de transmissions physiques, ne donne pas les conditions de transmissions optimales au sens de Schwarz*. Au contraire, c'est en choisissant soigneusement la différence entre ces deux jeux d'opérateurs,  $(\mathcal{H}_{i,j})$ , que l'algorithme SWR peut être optimisé.

Pour un itéré de Schwarz  $k$  donné, le système pour l'erreur  $(e_i^k)_{i \in \{1,2\}}$  s'écrit ainsi :

$$\mathcal{F}_1 e_1^k(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_1 \quad (5.21a)$$

$$\mathcal{G}_1 e_1^k(t, \gamma_1^\ell) = 0 \quad (t, \gamma_1^\ell) \in ]0; T] \times \partial\Omega_1^\ell \quad (5.21b)$$

$$\boxed{\mathcal{B}_{1,1} e_1^k(t, \gamma) + \mathcal{H}_{1,1} X_1^\varphi(t, \gamma) = \mathcal{B}_{1,2} e_2^{k-1}(t, \gamma) + \mathcal{H}_{1,2} X_2^\varphi(t, \gamma)} \quad (t, \gamma) \in ]0; T] \times \Gamma \quad (5.21c)$$

$$\mathcal{F}_2 e_2^k(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_2 \quad (5.21d)$$

$$\mathcal{G}_2 e_2^k(t, \gamma_2^\ell) = 0 \quad (t, \gamma_2^\ell) \in ]0; T] \times \partial\Omega_2^\ell \quad (5.21e)$$

$$\boxed{\mathcal{B}_{2,2} e_2^k(t, \gamma) + \mathcal{H}_{2,2} X_2^\varphi(t, \gamma) = \mathcal{B}_{2,1} e_1^{k-1}(t, \gamma) + \mathcal{H}_{2,1} X_1^\varphi(t, \gamma)} \quad (t, \gamma) \in ]0; T] \times \Gamma \quad (5.21f)$$

Les équations de couplage (5.21c)-(5.21f) font encore intervenir la solution exacte  $(X_i^\varphi)$ , qui est inconnue. Une façon de résorber ce problème est d'imposer une nouvelle contrainte sur le choix des opérateurs  $(\mathcal{H}_{i,j})$ , en plus de la contrainte de compatibilité imposant (5.4)  $\Rightarrow$  (5.1g), et d'éventuelles contraintes supplémentaires (quant au caractère conservatif des  $(\mathcal{B}_{i,j})$ , par exemple). Les

10. C'est ce qui est effectué au sein des méthodes *ad hoc*, à une différence importante près : les itérations n'y sont pas effectuées, parce que ces méthodes ne se préoccupent tout simplement pas du caractère bien couplé de la solution obtenue.

11. Par exemple, si l'un des milieux a une dynamique beaucoup plus rapide que l'autre, comme c'est le cas de l'atmosphère par rapport à l'océan.

opérateurs  $(\mathcal{H}_{i,j})$  seront ainsi aussi choisis de façon à ce que :

$$\mathcal{H}_{i,i}X_i^\varphi(t, \gamma) = \mathcal{H}_{i,-i}X_{-i}^\varphi(t, \gamma) \quad i \in \{1, 2\}, (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.22)$$

Les équations de transmission (5.21c) et (5.21f) prennent alors ces formes simplifiées :

$$\mathcal{B}_{1,1}e_1^k(t, \gamma) = \mathcal{B}_{1,2}e_2^{k-1}(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in ]0; T] \times \Gamma \quad (5.23a)$$

$$\mathcal{B}_{2,2}e_2^k(t, \gamma) = \mathcal{B}_{2,1}e_1^{k-1}(t, \gamma) \quad (t, \gamma) \in ]0; T] \times \Gamma \quad (5.23b)$$

(5.21) est le système d'erreur pour l'algorithme OSWR; l'optimiser consiste à déterminer des opérateurs  $(\mathcal{H}_{i,j})$  de façon à ce que :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall (t, \mathbf{x}) \in ]0; T] \times \Omega_i, \left\| e_i^k(t, \mathbf{x}) \right\| \xrightarrow[k \nearrow]{} 0 \text{ le plus rapidement possible} \quad (5.24)$$

La stratégie classique pour optimiser ces opérateurs repose sur la transformée de Fourier temporelle de (5.21),  $e_i^k : (\omega, \mathbf{x}) \mapsto \widehat{e}_i^k(\omega, \mathbf{x})$ . Si l'espace des sous-solutions sur lequel on se situe est de régularité temporelle  $L^2([0; T])$ , comme le préconise (5.2b), alors cette approche est licite puisque :

- ▶ L'opération de transformée de Fourier est bijective. On peut donc, à partir de l'étude de  $\widehat{e}_i^k$ , revenir sans ambiguïté vers  $e_i^k$ .
- ▶ Le théorème de Parseval garantit qu'à  $\mathbf{x} \in \Omega_i$  fixé :

$$\left[ \left\{ \omega \mapsto \widehat{e}_i^k(\omega, \mathbf{x}) \right\} = \overline{0} \right] \Rightarrow \left[ \left\{ t \mapsto e_i^k(t, \mathbf{x}) \right\} = \overline{0} \right] \quad (5.25)$$

Pour caractériser la rapidité de la convergence de l'algorithme, on définit, pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , le facteur de convergence<sup>12</sup>  $\rho^k : \omega \mapsto \rho^k(\omega)$  :

$$\rho^k(\omega) = \max_{i \in \{1, 2\}} \left( \frac{\int_{\Gamma} \left\| \widehat{e}_i^k(\omega, \gamma) \right\| d\gamma}{\int_{\Gamma} \left\| \widehat{e}_i^{k-2}(\omega, \gamma) \right\| d\gamma} \right) \quad (5.26)$$

Dans le cas général, on cherchera à exprimer  $\rho^k$  en fonction des symboles de Fourier des opérateurs  $(\mathcal{B}_{i,j})$ , notés  $(\beta_{i,j})_{(i,j) \in \{1, 2\}^2}$ , définis par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, \forall \left[ X : \underbrace{[0; T] \times \Omega_i}_{L^2} \rightarrow \mathbb{R}^d \right], \widehat{\mathcal{B}_{i,j}X} = \beta_{i,j}\widehat{X} \quad (5.27)$$

Les symboles  $(\beta_{i,j})$  sont liés au choix des quatre opérateurs  $(\mathcal{H}_{i,j})$ , dont les symboles sont notés  $(\xi_{i,j})_{i,j \in \{1, 2\}^2}$  :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, \beta_{i,j} = \beta_i^\varphi + \xi_{i,j} \quad (5.28)$$

où les  $(\beta_i^\varphi)_{i \in \{1, 2\}}$  sont les symboles des opérateurs physiques séparés  $(\mathcal{B}_i^\varphi)$ , qui sont bien définis dès lors que ces opérateurs sont linéaires, et connus puisque prescrits par la physique.

12. Le décalage de deux itérés de Schwarz dans la définition (5.26) provient du fait qu'on utilise un algorithme de Schwarz parallèle. Si on avait utilisé un algorithme séquentiel, le dénominateur de (5.26) aurait fait intervenir  $\widehat{e}_i^{k-1}$ .

Typiquement, on cherche alors à exprimer  $\rho^k$  à partir des  $(\xi_j)$  via (5.26); on écrira donc, dans la suite,  $\rho^k = \rho^k(\omega, (\xi_j))$ . On détermine les  $(\xi_j)$  de façon à minimiser<sup>13</sup>  $\rho^1$ . De façon générale, pour des problèmes instationnaires, il existe des symboles  $(\xi_j^{opt})$  permettant d'obtenir  $\rho^1 = 0$ ; cela correspond à des opérateurs *parfaitement absorbants*, pour lesquels la convergence exacte est atteinte dès la seconde itération. Malheureusement, ces opérateurs sont *non-locaux en temps* : cela implique en particulier que retrouver les opérateurs temporels  $(\mathcal{H}_{i,j}^{opt})$  leur correspondant nécessiterait la connaissance de la solution pour  $t \in [0; T]$ , ce qui n'est évidemment pas disponible. En outre, il n'y a aucune raison pour que les opérateurs parfaitement absorbants satisfassent les différentes contraintes imposées aux  $(\mathcal{B}_{i,j})$  : la contrainte de compatibilité (5.4)  $\Rightarrow$  (5.1g), la contrainte (5.22), et d'éventuelles contraintes physiques supplémentaires.

A minima, on cherchera tout de même à minimiser  $\rho^k$  pour des  $(\mathcal{H}_{i,j})$  appartenant à une classe d'opérateurs différentiels  $\mathcal{E}_D$ , prédéfinie par l'utilisateur. Une façon de définir un choix optimal sur cette classe  $\mathcal{E}_D$  est :

$$\left(\mathcal{H}_{i,j}^{\mathcal{E}_D, opt}\right) = \min_{(\mathcal{H}_{i,j}) \in (\mathcal{E}_D)^4} \left( \max_{\omega \in [\omega_{min}; \omega_{max}]} \rho^1(\omega, (\xi_j(\mathcal{H}_{i,j}))) \right) \quad (5.29)$$

En théorie, au niveau continu, on devrait poser  $\omega_{min} = 0$  et  $\omega_{max} = +\infty$ . En pratique, une fois la discrétisation temporelle prise en compte,  $\omega_{min}$  et  $\omega_{max}$  sont les fréquences temporelles minimale et maximale que la grille temporelle peut traiter sur la fenêtre de couplage actuelle,  $\mathcal{T}_l$ . En vertu du théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon (Jerri, 1977), on aura :

$$\omega_{min} = \frac{2}{\delta t(\mathcal{T}_l)} \quad (5.30a)$$

$$\omega_{max} = \frac{2}{\min\{\delta t_1, \delta t_2\}} \quad (5.30b)$$

où  $\delta t(\mathcal{T}_l)$  est la durée de la fenêtre  $\mathcal{T}_l$  (qui est en général indépendante de  $l$ ), et on rappelle que les  $(\delta t_i)$  sont les pas de discrétisations temporelles des sous-modèles.

En général, on limite  $\mathcal{E}_D$  à un espace vectoriel de petite dimension, généré par des opérateurs différentiels classiques (Dirichlet, Neumann, etc.). Plus l'espace  $\mathcal{E}_D$  est grand, plus l'optimisation est difficile, mais meilleur est son résultat; le choix de cet espace  $\mathcal{E}_D$  constitue donc un compromis. Un exemple de choix est de chercher les  $(\mathcal{H}_{i,j})$  comme *conditions de Robin* :

$$\mathcal{E}_D = \left\{ p\gamma_\Gamma + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\Gamma}, p \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.31)$$

où  $\gamma_\Gamma$  est l'opérateur trace sur  $\Gamma$ , et  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\Gamma}$  la dérivée normale à  $\Gamma$ . Ces opérateurs sont bien définis grâce à la contrainte (5.2a). Pour l'exemple (5.31),  $\mathcal{E}_D$  étant de dimension 1, optimiser les  $(\mathcal{H}_{i,j})$  sur  $(\mathcal{E}_D)^4$  revient à optimiser un problème sur  $\mathbb{R}^4$ .

### Conclusion intermédiaire sur les algorithmes SWR

13. En toute rigueur, cela permet d'optimiser la première itération de Schwarz seulement. Cette approche repose sur l'*ansatz* (raisonnable) qu'une bonne optimisation de la première itération sera aussi valable pour les autres itérations. En outre, dans la pratique, souvent ce problème ne se pose pas, puisque  $\rho^k$  est indépendant de  $k$ .

À l'image des méthodes *ad hoc*, dans le cas où l'opérateur de couplage multiphysique est sécable en deux sous-opérateurs  $(\mathcal{B}_i^{\varphi})$ , l'implémentation d'algorithmes SWR non optimisés peut se faire immédiatement, en posant  $(\mathcal{B}_{i,j}) = (\mathcal{B}_i^{\varphi})$ . Nous avons vu que pour des raisons de coût numérique, l'utilisation de ce type d'algorithme peut être lourde en terme de temps de calcul. En outre, l'hypothèse de sécabilité sur  $\mathcal{B}_i^{\varphi}$  est assez restrictive.

En revanche, l'élaboration d'algorithmes OSWR, *optimisés*, est une piste prometteuse bien qu'exigeante pour répondre à ce type d'enjeux. La principale difficulté concernant son implémentation est liée à la formulation très complexe des conditions d'interface du problème océan-atmosphère, dérivées des formulations bulk, et liées à la paramétrisation des CLS. La construction d'algorithmes OSWR se fonde sur l'étude *a priori* des effets du couplage de sous-problèmes séparés issus d'un problème physique donné. À chaque problème physique correspond un problème d'optimisation (5.29) différent, éventuellement épineux. Par conséquent, l'implémentation d'algorithmes OSWR n'est pas immédiate ; elle peut toutefois se révéler fructueuse lorsque bien faite.

À notre avis, parmi les méthodes actuellement connues, les algorithmes OSWR constituent la meilleure option pour traiter le couplage océan-atmosphère, dans la mesure où ils permettent d'obtenir une solution correctement couplée, à moindre coût. En contrepartie, la complexité mathématique de la modélisation de l'océan et de l'atmosphère, en particulier, comme nous l'avons vu aux chapitres 2 et 3, au voisinage de leur interface commune, rend ardu le développement d'algorithmes OSWR spécifiques à ce problème.

## Récapitulatif des différentes méthodes de couplage évoquées

Le tableau 5.1 présente un récapitulatif des différentes méthodes de couplage évoquées, en rappelant les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles. On s'intéresse aux propriétés suivantes :

- ▶ **stabilité numérique** : est-il possible de mettre en place cette méthode de façon à ce que le couplage soit numériquement stable (de préférence inconditionnellement) ?
- ▶ **couplage étroit** : est-il possible de mettre en place cette méthode de façon à ce que le couplage soit étroit, cf. (d2) ?
- ▶ **mise en place simple** : l'implémentation de cette méthode nécessite-t-elle peu (voire pas) d'études préalables ?
- ▶ **non-intrusivité** : cette méthode impose-t-elle des contraintes, voire des modifications, sur les sous-modèles océan et atmosphère ?
- ▶ **coût numérique faible**
- ▶ **modularité** : la méthode peut-elle s'appliquer de la même façon suivant la paire de sous-modèles océan et atmosphère choisie ?
- ▶ **propriétés conservatives** : la méthode permet-elle de préserver les

éventuelles propriétés conservatives des schémas numériques utilisés par les sous-modèles océan et atmosphère ?

Méthode		stabilité numérique	couplage étroit	mise en place simple	non-intrusivité	coût numérique faible	modularité	propriétés conservatives
monolithique			++	-	-		-	++
algébrique			++	-	--		-	++
synchrone explicite	de base	--	--	++	++	-	-	--
	parfaite	--	--	+	-	-	-	-
synchrone implicite		++	--	-	+	++	-	--
asynchrone	de base	-	--	+	++	+	+	--
	semi-	+	-	+	+	+	+	++
SWR	de base	++	++	+	++	--	++	++
	optimisé	++	++	--	++	-	++	++

TABLEAU 5.1 – Récapitulatif partiel des différentes méthodes de couplage introduites. On s’intéresse aux *capacités* des méthodes de couplage à vérifier les propriétés mathématiques énoncées sur la première ligne, et non à leur vérification intrinsèque. Par exemple, les algorithmes semi-asynchrones ne sont pas *toujours stables* ; en revanche, il est relativement simple de les construire de façon à ce qu’ils le soient, contrairement aux algorithmes synchrones.

### 5.3 Algorithmes OSWR et couplage océan-atmosphère

À partir de cette section, l’exposé se focalisera exclusivement sur le problème océan-atmosphère. On peut citer [Lions et al. \(1995\)](#) comme référence préceuseuse, où l’étude du système couplé océan-atmosphère est entreprise dans un cadre mathématique rigoureux ; bien que cet article permette effectivement en théorie la démonstration de l’existence de solutions faibles à ce problème de couplage, il est aussi considérablement éloigné des formulations usuelles des équations continues permettant la modélisation de l’océan et de l’atmosphère. À titre d’exemple, l’une des hypothèses émises revient, dans le formalisme décrit aux chapitres précédents de la présente thèse, à considérer que les coefficients de transfert issus des formulations bulk (voir le chapitre 3),  $(C_x)_{x \in \{D, H, E\}}$ , dépendent uniquement de la position d’un point de la surface océanique sur le globe, et pas de l’état physique actuel de la solution.

Avec un formalisme plus proche des équations physiques, et toujours dans un contexte similaire au nôtre, [Martin \(2009\)](#) propose des algorithmes OSWR pour la parallélisation en espace de la modélisation numérique d'un système océan type « eaux peu profondes » linéarisé, plus connu sous le nom de *shallow water* (ou équations de Saint-Venant), pour lequel l'effet de l'atmosphère est supposé constant, et agit ainsi comme un forçage sur l'océan. Ce système simplifié partage avec le problème d'Ekman la caractéristique d'être à la fois suffisamment simple dans sa formulation pour que l'obtention de résultats analytiques soit possible, tout en pouvant aussi rendre compte d'une part significative d'effets physiques spécifiques et bien connus.

Avec un point de vue plus proche des sciences physiques, [Moulin et Wirth \(2014, 2016\)](#) utilisent aussi un modèle *shallow water*, en s'intéressant cette fois-ci aux effets du couplage multiphysique océan-atmosphère. Ces travaux reposent sur des schémas de paramétrisations de la turbulence simplifiés, afin de pouvoir obtenir des résultats analytiques qui montrent que dans ce cadre *shallow water*, l'océan a un rôle passif, absorbant de l'énergie à l'atmosphère.

La présente section a pour objectif de disséquer les principales difficultés inhérentes à l'implémentation d'algorithmes OSWR pour le couplage d'une colonne unidimensionnelle océan-atmosphère, avec des conditions à l'interface de type « bulk », et des paramétrisations turbulentes issues de la modélisation de la CLS. Nous verrons qu'il existe un écart considérable entre la complexité mathématique des formulations modernes de ce problème, et le type de configurations pour lesquelles l'implémentation et l'optimisation d'algorithmes OSWR ont déjà été élaborées. L'un de nos objectifs est de contribuer à « combler » cet écart.

On distinguera plus particulièrement trois difficultés, qui nous semblent être les plus prépondérantes. En premier lieu, au § 5.3.1, on s'intéressera à la géométrie du problème, et plus particulièrement à la place qu'y tient la CLS, qui d'un point de vue *stricto sensu* « couplage », peut être vue comme une région d'épaisseur non nulle séparant les deux sous-domaines : en quelque sorte, un *recouvrement négatif*. Ensuite, au § 5.3.2, on s'intéressera au caractère non-linéaire du système d'équations primitives, et en particulier de ses conditions aux limites type « bulk », et des paramétrisations turbulentes en découlant. Enfin, le § 5.3.3 s'intéresse au caractère non-local des conditions de transmission naturelles du problème océan-atmosphère, proposant différentes méthodes de discrétisations temporelles pour les flux permettant de circonvenir à ce problème.

Dans toute cette section, on reprend les notations du système (5.1), en substituant les indices  $i \in \{1, 2\}$  par  $\alpha \in \{o, a\}$ . En particulier, la solution sera décomposée ainsi :

$$X_\alpha^q = [u \quad v \quad T \quad q, S]^T \quad (5.32)$$

### 5.3.1 La CLS, un « recouvrement négatif » ?

La modélisation de la CLS et ses conséquences sur le comportement d'une colonne océan-atmosphère occupent une place centrale dans la présente thèse. Nous avons vu au § 2.1 qu'exclure la CLS des domaines de calcul des sous-modèles océan et atmosphère permet de s'abstenir d'un certain nombre de difficultés, notamment dues aux profils attendus des solutions dans cette région, qui ne peuvent pas être numériquement simulées.

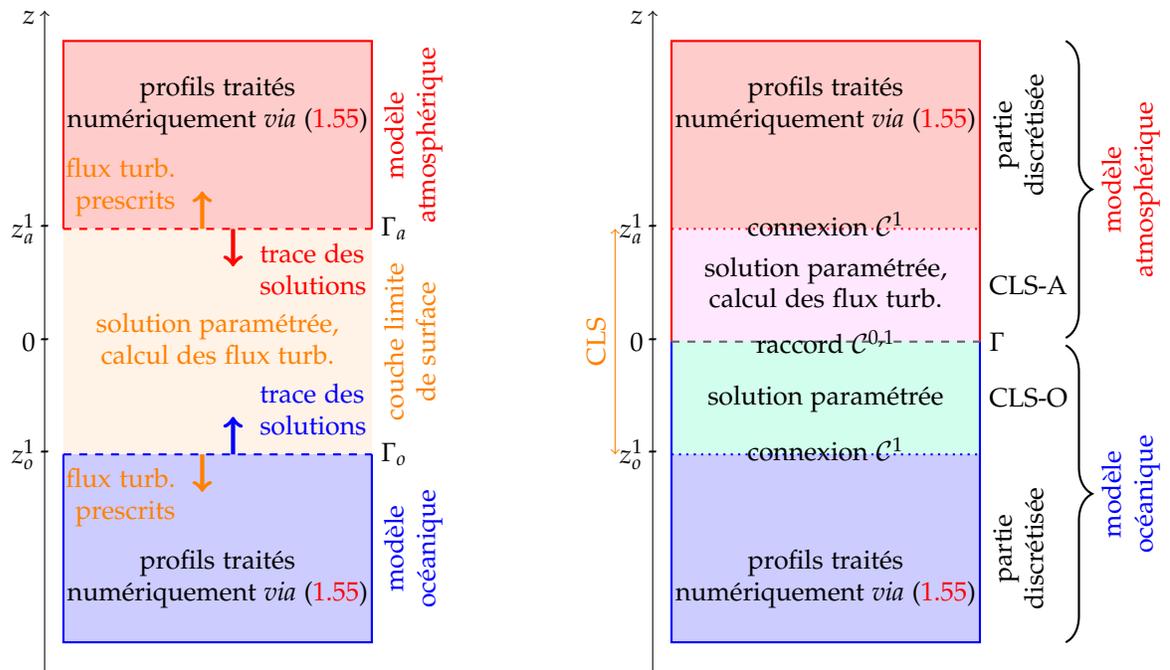
En contrepartie, cette stratégie d'exclusion de la CLS des domaines de calcul, telle que représentée sur la figure 2.2b, éloigne l'étude du couplage océan-atmosphère de la forme « classique » de couplage multiphysique représenté par la figure 5.1. Le système multiphysique de base (5.1) définit l'interface  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Si l'on suppose que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  correspondent aux régions où les modélisations de l'océan et de l'atmosphère sont faites par discrétisation spatiale, alors exclure

la CLS de ces domaines implique  $\Gamma = \emptyset$ .

On distinguera deux façons, équivalentes dans leurs effets, pour concilier l'exclusion de la CLS avec le formalisme classique du couplage multiphysique :

- (Str1) Considérer la CLS comme un sous-domaine à part entière, et résoudre ensuite *deux* problèmes de couplage : atmosphère-CLS et CLS-océan.
- (Str2) Sous-diviser la CLS entre CLSA et CLSO, et considérer que chaque sous-modèle (océan ou atmosphère) se partitionne lui-même en deux sous-parties : une région  $\Omega_\alpha^{num}$ , correspondant à la région traitée numériquement, et une région  $\Omega_\alpha^{CLS}$ , correspondant à la partie de la CLS propre à ce sous-modèle.

La figure 5.7 offre une représentation schématique de ces deux stratégies.



(a) Stratégie (Str1) : la CLS est un sous-domaine à part entière, qu'on couple à ses deux extrémités ( $\Gamma_\alpha$ ) $_{\alpha \in \{o,a\}}$  aux sous-domaines océan et atmosphère.

(b) Stratégie (Str2) : la CLS est sous-divisée en deux parties, CLS-A et CLS-O, incluses dans les domaines océan ou atmosphère.

FIGURE 5.7 – Représentation schématique des stratégies (Str1) et (Str2).

### Stratégie (Str1)

Cette stratégie consiste à établir *deux* mécanismes de couplage : CLS-océan et CLS-atmosphère. Considérer un mécanisme de couplage supplémentaire apporte des degrés de liberté supplémentaires, qui doivent être compensés par autant de contraintes. Les conditions de couplage cohérent, évoquées précédemment, peuvent jouer ce rôle de contraintes supplémentaires ; on

aura alors deux mécanismes de couplage liés entre eux *via* ces contraintes.

Les équations de base du système multiphysique, contraintes comprises, s'écrivent alors ainsi :

$$\mathcal{F}_o \left( X_o^\varphi \right) = f_o \quad (t, \mathbf{x}) \in [0; T] \times \Omega_o \quad (5.33a)$$

$$\mathcal{G}_o \left( X_o^\varphi \right) = g_o \quad (t, \gamma_o^e) \in [0; T] \times \partial\Omega_o^e \quad (5.33b)$$

$$\left[ \left( \mathcal{V}_{v, \mathcal{K}}^{o, t} \right)^T \cdot \partial_z X_o^\varphi \right] (t, \mathcal{T}_{0 \rightarrow o}(\gamma)) = FT_o \left( \mathbf{x}_o^{*, \varphi}(t, \gamma) \right) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.33c)$$

$$X_o^\varphi(0, \mathbf{x}) = X_o^{\varphi, 0} \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (5.33d)$$

$$\mathcal{F}_a \left( X_a^\varphi \right) = f_a \quad (t, \mathbf{x}) \in [0; T] \times \Omega_a \quad (5.33e)$$

$$\mathcal{G}_a \left( X_a^\varphi \right) = g_a \quad (t, \gamma_a^e) \in [0; T] \times \partial\Omega_a^e \quad (5.33f)$$

$$\left[ \left( \mathcal{V}_{v, \mathcal{K}}^{a, t} \right)^T \cdot \partial_z X_a^\varphi \right] (t, \mathcal{T}_{0 \rightarrow a}(\gamma)) = FT_a \left( \mathbf{x}_a^{*, \varphi}(t, \gamma) \right) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.33g)$$

$$X_a^\varphi(0, \mathbf{x}) = X_a^{\varphi, 0} \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (5.33h)$$

$$FT_o \left( \mathbf{x}_o^{*, \varphi}(t, \gamma) \right) = FT_a \left( \mathbf{x}_a^{*, \varphi}(t, \gamma) \right) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.33i)$$

$$P_{\rightarrow 0^-} \left( \mathbf{x}_o^{*, \varphi}, X_o^\varphi(t, \mathcal{T}_{0 \rightarrow o}(\gamma)) \right) = P_{\rightarrow 0^+} \left( \mathbf{x}_a^{*, \varphi}, X_a^\varphi(t, \mathcal{T}_{0 \rightarrow a}(\gamma)) \right) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.33j)$$

où, en plus des notations déjà introduites par le système (5.1) (en prenant en compte le changement d'indice) :

- ▶  $\Gamma$  est l'interface physique entre l'océan et l'atmosphère ;  $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \{o, a\}}$  est l'interface entre sous-modèles et CLS.
- ▶  $(\mathcal{T}_{0 \rightarrow \alpha})_{\alpha \in \{o, a\}}$  sont des opérateurs de translation, permettant d'associer de façon unique chaque point  $\gamma \in \Gamma$  à deux points, respectivement dans  $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \{o, a\}}$ . On a donc  $\mathcal{T}_{0 \rightarrow \alpha} : \Gamma \rightarrow \Gamma_\alpha$ , pour  $\alpha \in \{o, a\}$ . En première approximation, on peut considérer que ces opérateurs correspondent à de simples translations verticales.
- ▶  $\mathbf{x}_\alpha^{*, \varphi} \in \mathbb{R}^3$ , pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , contient les échelles de friction permettant de paramétrer la CLS. On aura typiquement :

$$\mathbf{x}_\alpha^{*, \varphi} = \left[ u_\alpha^{*, \varphi}, \theta_\alpha^{*, \varphi}, (q/s)_\alpha^{*, \varphi} \right]^T \quad (5.34)$$

Ces échelles de frictions dépendent du temps et de l'emplacement où on se situe, *via* le paramètre  $\gamma \in \Gamma$ , i.e.  $\mathbf{x}_\alpha^{*, \varphi} = \mathbf{x}_\alpha^{*, \varphi}(t, \gamma)$ .

- ▶ Dans (5.33c) et (5.33g), les  $(\mathcal{V}_{v, \mathcal{K}}^{\alpha, t})$  contiennent les viscosités et diffusivités turbulentes aux interfaces entre sous-domaines physiques et CLS. Celles-ci sont dépendantes du temps et de la position sur l'interface entre sous-modèle et CLS, i.e.  $\mathcal{V}_{v, \mathcal{K}}^{\alpha, t} = \mathcal{V}_{v, \mathcal{K}}^{\alpha, t}(t, \gamma_\alpha)$ , où  $\gamma_\alpha \in \Gamma_\alpha$ . Si on respecte l'ordre donné par (5.32), on aura :

$$\mathcal{V}_{v, \mathcal{K}}^{\alpha, t}(\gamma_\alpha, \mathbf{x}_\alpha^{*, \varphi}) = \left[ \nu_\alpha^h \quad \nu_\alpha^h \quad \nu_\alpha^v \quad \mathcal{K}_\alpha^T \quad \mathcal{K}_\alpha^{q, S} \right] \quad (5.35)$$

où les  $\nu_\alpha^{h,v}$  sont les viscosités totales (incluant donc une partie turbulente) horizontales et verticales, et les  $\mathcal{K}_\alpha^{T,q,S}$  sont les diffusivités totales.

- ▶ Les  $(FT_\alpha)_{\alpha \in \{o,a\}}$  sont les fonctions permettant d'obtenir les flux prescrits aux sous-modèles, à partir des échelles de friction, par exemple,
 
$$\boldsymbol{\tau} := \rho_\alpha \left( u_\alpha^{*,\varphi} \right)^2 \mathbf{e}_{\llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket_0^z}.$$
- ▶ (5.33i) correspond à imposer que les flux turbulents soient constants par rapport à  $z$  sur la CLS; elle correspond au système (2.54). En pratique, cette équation permet de déterminer  $\mathbf{x}_o^{*,\varphi}$  à partir de  $\mathbf{x}_a^{*,\varphi}$ . Elle correspond à la condition de couplage cohérent (c1) du chapitre 4.
- ▶ Dans (5.33j), les opérateurs  $(P_{\rightarrow} 0^\pm)$  permettent d'extrapoler les solutions des sous-modèles sur  $\Gamma_\alpha$  à leur valeur de surface *via* les schémas de paramétrisations CLS, conditionnées par  $\mathbf{x}_\alpha^{*,\varphi}$ . Ainsi, (5.33j) est une équation de continuité à la surface, et correspond à la condition de couplage cohérent (c2) du chapitre 4.

Les « contraintes supplémentaires » nécessaires, évoquées avant l'écriture du système, correspondent à ses deux dernières équations, (5.33i) et (5.33j). Au niveau continu, cette stratégie consiste à *occulter* la CLS, en limitant son action aux seules conséquences qu'elle a sur les sous-modèles, en s'assurant bien de la cohérence du couplage *via* les contraintes (5.33i) et (5.33j).

### Stratégie (Str2)

Cette stratégie, représentée schématiquement sur la figure 5.7b, consiste à conserver une séparation entre océan et atmosphère analogue au découpage classique des problèmes multiphysiques, représenté schématiquement sur la figure 5.1. En contrepartie, afin de pouvoir bénéficier d'un traitement correct de la CLS, il est nécessaire de sous-diviser chaque sous-modèle en deux parties : une partie pouvant être traitée numériquement, l'autre partie étant incluse dans la CLS, et donc traitée à l'aide de paramétrisations.

En choisissant cette stratégie, les équations continues des deux sous-modèles s'écrivent ainsi :

$$\mathcal{F}_o \left( X_o^\varphi \right) = f_o \quad (t, \mathbf{x}) \in [0; T] \times \Omega_o^{num} \quad (5.36a)$$

$$\mathcal{G}_o \left( X_o^\varphi \right) = g_o \quad (t, \gamma_o^e) \in [0; T] \times \partial\Omega_o^{num,e} \quad (5.36b)$$

$$X_o^\varphi (t, \gamma_o) = \mathcal{P}_o^{CLS} \left( \gamma_o, \mathbf{x}_o^{*,\varphi} (t, \mathcal{T}_{\Gamma_o \rightarrow \Gamma} (\gamma_o)) \right) \quad (t, \gamma_o) \in [0; T] \times \Gamma_o \quad (5.36c)$$

$$\partial_z X_o^\varphi (t, \gamma_o) = \partial_z \mathcal{P}_o^{CLS} \left( \gamma_o, \mathbf{x}_o^{*,\varphi} (t, \mathcal{T}_{\Gamma_o \rightarrow \Gamma} (\gamma_o)) \right) \quad (t, \gamma_o) \in [0; T] \times \Gamma_o \quad (5.36d)$$

$$X_o^\varphi (t, \mathbf{x}) = \mathcal{P}_o^{CLS} \left( \mathbf{x}, \mathbf{x}_o^{*,\varphi} (t, \mathcal{T}_{\mathbf{x} \rightarrow \Gamma} (\mathbf{x})) \right) \quad (t, \mathbf{x}) \in [0; T] \times \Omega_o^{CLS} \quad (5.36e)$$

$$X_o^\varphi (t = 0, \mathbf{x}) = X_{o,0}^\varphi (\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_o^{num} \cup \Omega_o^{CLS} \quad (5.36f)$$

$$\mathcal{F}_a \left( X_a^\varphi \right) = f_a \quad (t, \mathbf{x}) \in [0; T] \times \Omega_a^{num} \quad (5.36g)$$

$$\mathcal{G}_a \left( X_a^\varphi \right) = g_a \quad (t, \gamma_a^e) \in [0; T] \times \partial\Omega_a^{num,e} \quad (5.36h)$$

$$X_a^\varphi (t, \gamma_a) = \mathcal{P}_a^{CLS} \left( \gamma_a, \mathbf{x}_a^{*,\varphi} (t, \mathcal{T}_{\Gamma_a \rightarrow \Gamma} (\gamma_a)) \right) \quad (t, \gamma_a) \in [0; T] \times \Gamma_a \quad (5.36i)$$

$$\partial_z X_a^\varphi (t, \gamma_a) = \partial_z \mathcal{P}_a^{CLS} \left( \gamma_a, \mathbf{x}_a^{*,\varphi} (t, \mathcal{T}_{\Gamma_a \rightarrow \Gamma} (\gamma_a)) \right) \quad (t, \gamma_a) \in [0; T] \times \Gamma_a \quad (5.36j)$$

$$X_a^\varphi (t, \mathbf{x}) = \mathcal{P}_a^{CLS} \left( \mathbf{x}, \mathbf{x}_a^{*,\varphi} (t, \mathcal{T}_{\mathbf{x} \rightarrow \Gamma} (\mathbf{x})) \right) \quad (t, \mathbf{x}) \in [0; T] \times \Omega_a^{CLS} \quad (5.36k)$$

$$X_a^\varphi (t = 0, \mathbf{x}) = X_{a,0}^\varphi (\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_a^{num} \cup \Omega_a^{CLS} \quad (5.36l)$$

$$\mathcal{P}_o^{CLS} \left( \gamma, \mathbf{x}_o^{*,\varphi} (t, \gamma) \right) = \mathcal{P}_a^{CLS} \left( \gamma, \mathbf{x}_a^{*,\varphi} (t, \gamma) \right) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.36m)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_\Gamma(\gamma)} \mathcal{P}_o^{CLS} \left( \gamma, \mathbf{x}_o^{*,\varphi} (t, \gamma) \right) = \partial_{\mathbf{n}_\Gamma(\gamma)} \mathcal{P}_a^{CLS} \left( \gamma, \mathbf{x}_a^{*,\varphi} (t, \gamma) \right) \quad (t, \gamma) \in [0; T] \times \Gamma \quad (5.36n)$$

où, en plus du système (5.33) :

- Les  $(\mathcal{P}_\alpha^{CLS})$  correspondent aux opérateurs qui permettent de générer les profils paramétrisés de solution dans la CLS, à partir de la connaissance de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{x}_\alpha^{*,\varphi}$ .
- (5.36e) et (5.36k) sont les équations de paramétrisations de la CLSO et de la CLSA, comportant chacune une partie « Monin-Obukhov » et une partie « sous-couches visqueuses » ; elles correspondent aux profils (2.30)-(2.45), et (2.59)-(2.64), respectivement. Dans (5.36e) et (5.36k), l'opérateur  $\mathcal{T}_{\mathbf{x} \rightarrow \Gamma}$  permet d'associer à chaque point de la CLS un unique point de l'interface  $\Gamma$  ; à titre d'exemple, sous l'hypothèse de surface océanique plate, cet opérateur correspond à une simple translation verticale.

(5.36) peut être sous-divisé ainsi :

- (o) Une composante océan, comprenant un système d'EDP (5.36a)-(5.36d), et un schéma de paramétrisations CLSO (5.36e). Le couplage entre ces deux composantes océaniques se fait *via* une connection  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Gamma_o$ , cf. (5.36c)-(5.36d). Cette composante est initialisée par (5.36f).
- (a) Une composante atmosphère, comprenant un système d'EDP (5.36g)-(5.36j), et un schéma de paramétrisations CLSA (5.36k). Le couplage entre ces deux composantes atmosphériques se fait *via* une connection  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Gamma_a$ , cf. (5.36i)-(5.36j). Cette composante est initialisée par (5.36l).

Le couplage entre les composantes océan et atmosphère se fait *via* les équations (5.36m) et (5.36n).

- (5.36m) revient à imposer la continuité des solutions au franchissement de l’interface, et correspond à la condition (c2) du chapitre 4. Dans les modèles océan-atmosphère, la vérification de cette équation est réalisée *via* le dimensionnement des échelles de friction, par les moyens d’une formulation bulk.
- (5.36n) revient à imposer la continuité des gradients normaux à la surface  $\Gamma$  (sous nos hypothèses, ces gradients sont verticaux) : elle correspond à la condition (c1), sous réserve que les longueurs de rugosité océaniques  $(z_x^{o,r})$  soient bien choisies, comme cela est décrit au § 2.5.3.

### Comparatif et bilan sur les deux stratégies

Les deux stratégies décrites ci-dessus sont rigoureusement équivalentes, dans le sens où elles génèrent des solutions identiques dès que les équations desquelles elles sont dérivées sont les mêmes. Dans notre cas, ces équations sont le système d’équations primitives (1.55), et l’ensemble des paramétrisations de la CLS.

La différence entre les deux stratégies est ainsi d’ordre structurel uniquement. Dans la suite, on optera pour la (Str1), pour les raisons suivantes :

- (i) La décomposition de domaines entreprise par la (Str1) va de pair avec l’idée d’exclusion de la CLS des domaines de calcul, telle que préconisée au § 2.1. Chaque sous-domaine de calcul correspond alors rigoureusement à une région où les solutions seront traitées par discrétisation numérique.
- (ii) Cette stratégie est dans la continuité des stratégies classiques de couplage océan-atmosphère, dans la mesure où les échanges d’information se limitent alors à des échanges de flux égaux (cf. (5.33i)) entre les modèles. La principale nouveauté introduite, par rapport aux stratégies classiques, est l’équation (5.33j), qui impose la continuité des solutions à l’interface, et devrait être réalisée par des formulations bulk *intégrales*, du même type que celles introduites au § 3.4.3.

## 5.3.2 Prise en compte de la non linéarité des équations primitives pour le couplage OA

Nous avons vu au § 5.2.3 que les algorithmes SWR pouvaient être optimisés pour améliorer leur efficacité en terme de coûts de calculs. Cette optimisation est mise en place en étudiant l’erreur entre les itérés de Schwarz et la solution exacte, qui vérifie le système d’équations (5.21), *sous réserve que les opérateurs différentiels définissant le problème multiphysique soient linéaires*. Sans cette hypothèse de linéarité, le système d’erreur n’a pas de solution facilement explicitable.

Une des principales caractéristiques du problème de couplage océan-atmosphère réside dans son caractère fortement non-linéaire, notamment en ce qui concerne les conditions de bord imposées aux interfaces ( $\Gamma_\alpha$ ). À titre d’exemple, au niveau continu, ces conditions s’écrivent ainsi, sur  $[0; T] \times \Gamma_o$  :

$$\partial_z u_h = \frac{u_a^*}{\kappa z_a^1} e^{1\theta_\tau} \quad (5.37a)$$

$$\partial_z \theta = \frac{\theta_a^*}{\kappa z_a^1} \quad (5.37b)$$

$$\partial_z q = \frac{q_a^*}{\kappa z_a^1} \quad (5.37c)$$

Le chapitre 3 a montré que les échelles de friction  $(u_a^*, \theta_a^*, q_a^*)$  sont déterminées par des formulations bulk dépendant de l'état de la solution à la fois aux niveaux  $z = 0$  et  $z = z_a^1$ , avec un comportement fortement non linéaire et non local. Dans (5.37a), l'angle  $\theta_\tau = \text{Arg} \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right)$  est aussi dépendant de ces échelles de friction, puisque que  $u_h(0)$  est calculée *via* les paramétrisations CLS.

Les conditions aux limites (5.37) ne sont pas sécables, puisque comme le chapitre 3 l'a montré, les échelles de friction  $x_a^*$  dépendent des solutions dans les deux sous-domaines de façon complexe. Ce caractère non sécable sera traité au § 5.3.3.

Intéressons-nous pour l'instant uniquement aux difficultés liées au caractère non-linéaire des échelles de friction  $x_a^*$ . Pour ce faire, on fera une hypothèse abusive : on supposera que les échelles de friction  $x_a^*$  dépendent uniquement de la solution dans le sous-domaine océan. Insistons sur le fait que cette hypothèse n'a aucun sens physique<sup>14</sup> : son seul objectif est de séparer les difficultés propres à l'implémentation d'algorithmes SWR dans des modèles océan-atmosphère, pour s'intéresser dans un premier temps à leur caractère non-linéaire.

Sous cette hypothèse de sécabilité, en termes d'opérateurs  $\mathcal{B}_i^\varphi$ , (5.37) s'écrit :

$$\mathcal{B}_a^\varphi = [\partial_z \quad \partial_z \quad \partial_z]^T \quad (5.38a)$$

$$\mathcal{B}_o^\varphi = \frac{1}{\kappa z_a^1} \begin{bmatrix} u_a^* e^{i\theta_\tau} & \theta_a^* & q_a^* \end{bmatrix}^T \quad (5.38b)$$

(5.38b) définit bien un opérateur, dans la mesure où les échelles de friction  $(u_a^*, \theta_a^*, q_a^*)$  sont calculées à partir de la solution dans le sous-domaine océan. La forte non-linéarité des opérateurs définis par (5.38) implique que l'écriture des conditions de transmissions du système d'erreurs n'est pas aussi immédiate que (5.21c) et (5.21f). En effet, (5.20) montre bien que si les  $(\mathcal{B}_i^\varphi)$  ne sont pas linéaires, alors les  $(\mathcal{B}_{i,j})$  non plus. Même en conservant l'hypothèse (5.22) sur les  $(\mathcal{H}_{i,j})$ , la forme simplifiée (5.23) s'écrit alors :

$$\mathcal{B}_{1,1} X_1^k - \mathcal{B}_{1,1} X_1^\varphi = \mathcal{B}_{1,2} X_2^{k-1} - \mathcal{B}_{1,2} X_2^\varphi \quad (5.39a)$$

$$\mathcal{B}_{2,2} X_2^k - \mathcal{B}_{2,2} X_2^\varphi = \mathcal{B}_{2,1} X_1^{k-1} - \mathcal{B}_{2,1} X_1^\varphi \quad (5.39b)$$

Relever les hypothèses de linéarité sur les opérateurs ne permet plus d'écrire  $\mathcal{B}_{i,j} X_j^k - \mathcal{B}_{i,j} X_j^\varphi = \mathcal{B}_{i,j} e_j^k$ . Les conditions (5.39) ne peuvent ainsi pas être exploitées en tant que conditions aux limites pour le système d'équations aux dérivées partielles propre aux erreurs  $(e_j^k)_{j \in \{1,2\}}$ . Une méthode *a minima* pour circonvenir à ce problème consiste, sur chaque fenêtre de couplage, à linéariser (par rapport à la variable temporelle) les conditions aux limites autour de l'état de la solution au début de la fenêtre :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j} X_j^\psi(t, \gamma_j) &= \mathcal{B}_{i,j} X_j^\psi(t_0, \mathcal{T}, \gamma_j) + D \left[ \mathcal{B}_{i,j} X_j^\psi(t_0, \mathcal{T}, \gamma_j) \right] \cdot \left( X_j^\psi(t, \gamma_j) - X_j^\psi(t_0, \mathcal{T}, \gamma_j) \right) \\ &\quad + o \left( \left\| X_j^\psi(t, \gamma_j) - X_j^\psi(t_0, \mathcal{T}, \gamma_j) \right\| \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

14. Notons tout de même que dans un certain nombre de modèles numériques, le calcul de  $u_a^*$ , à partir duquel est directement déterminé  $u_o^*$ , ne prend pas en compte les courants océaniques de surface : cela revient rigoureusement à faire, pour la vitesse uniquement, cette hypothèse « dans l'autre sens » : l'échelle de friction  $u_o^*$  dépend de la solution atmosphérique uniquement.

où  $\psi = \varphi$  pour la solution physique et  $\psi = k \in \mathbb{N}$  pour les itérations de Schwarz. En supposant qu'au début de la fenêtre de couplage, la solution itérée est égale à la solution physique (i.e., que le couplage a bien été réalisé à la fenêtre de temps précédente, ou à l'initialisation), réinjecter (5.40) dans (5.39) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2\}, \quad D \left[ \mathcal{B}_{i,i} X_i^\psi (t_{0,\mathcal{T}}, \gamma_i) \right] \cdot e_i^k (t, \gamma_i) + o \left( \left\| X_i^\varphi (t, \gamma_i) - X_i^\varphi (t_{0,\mathcal{T}}, \gamma_i) \right\|, \left\| X_i^k (t, \gamma_i) - X_i^k (t_{0,\mathcal{T}}, \gamma_i) \right\| \right) \\ = D \left[ \mathcal{B}_{i,-i} X_{-i}^\psi (t_{0,\mathcal{T}}, \gamma_{-i}) \right] \cdot e_{-i}^{k-1} (t, \gamma_{-i}) \\ + o \left( \left\| X_{-i}^\varphi (t, \gamma_{-i}) - X_{-i}^\varphi (t_{0,\mathcal{T}}, \gamma_{-i}) \right\|, \left\| X_{-i}^{k-1} (t, \gamma_{-i}) - X_{-i}^{k-1} (t_{0,\mathcal{T}}, \gamma_{-i}) \right\| \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

(5.23) est un cas particulier de (5.41) : dans le cas où les opérateurs physiques  $(\mathcal{B}_i^\varphi)$  sont linéaires, alors les opérateurs de transmission de Schwarz  $(\mathcal{B}_{i,j})$  aussi, et les termes en  $o$  dans (5.41) sont rigoureusement nuls.

Le calcul du différentiel dans (5.41) avec les formes (5.38) est complexe. Même en se plaçant dans un cas grandement simplifié, en supposant une absence de stratification ( $\theta_a^* = q_a^* = 0$ ) et des vents et courants alignés ( $\theta_\tau = 0$ ), on aura, par exemple :

$$\begin{aligned} D [\mathcal{B}_{1,2}] u_h &= \partial_t (u_a^*)^2 / \rho_a \\ &= \frac{\partial \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}}{\partial t} \frac{\partial \left[ C_D \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right)^2 \right]}{\partial \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}} \\ &= \frac{\partial \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}}{\partial t} \left[ \frac{\partial C_D}{\partial \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}} \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right)^2 + 2 C_D \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

où  $C_D$  est le coefficient de transfert calculé par les formulations bulks, cf. chapitre 3. La dernière ligne de (5.42) met bien en exergue la nécessité de pouvoir calculer la dérivée partielle de  $C_D$  par rapport au saut de solution entre le premier niveau atmosphérique et la surface de l'océan. Telles qu'elles sont définies et utilisées aujourd'hui, les formulations bulk ne garantissent pas que cette opération soit licite, même au niveau continu. En outre, les coefficients de transfert étant définis comme solutions d'un problème non-linéaire, la détermination de dérivées partielles ne peut se faire que numériquement. Ainsi, les formulations bulk actuelles ne permettent pas de prolonger l'étude du système d'erreur pour les algorithmes de Schwarz.

L'un des principaux objectifs des approximations explicites de formulations bulk (Pelletier *et al.*, 2018), présentées au § 3.3, était justement de pouvoir :

- ▶ justifier l'existence des dérivées partielles de type  $\partial C_Y / \partial \llbracket X \rrbracket_0^{z_a^1}$ , où  $X \in \{u_h, \theta, q\}$  et  $Y \in \{D, H, E\}$ , dont un exemple est présent dans le dernier membre de droite de (5.42) ;
- ▶ les calculer facilement et exactement (c'est à dire, sans utiliser de schémas de discrétisations) grâce au fait que les coefficients de transfert soient désormais considérés comme de simples fonctions explicites des  $\llbracket X \rrbracket_0^{z_a^1}$ , pour  $X \in \{u_h, \theta, q\}$ .

Enfin, soulignons que dans le cas où les opérateurs  $(\mathcal{B}_{i,j})$  sont non linéaires, la notion de symbole de Fourier (5.27) n'a pas nécessairement de sens.

### 5.3.3 Caractère non-local des conditions de transmission physiques : formulations en flux explicites et semi-implicites

Une autre difficulté propre au système (5.42) est que les termes de saut qu'il contient nécessitent la connaissance de valeurs à l'interface. Le principal objectif du chapitre 2 était de construire une théorie exhaustive de la CLS permettant d'obtenir ces valeurs dites « de surface » par intégration des profils paramétrisés depuis le premier niveau du modèle océan. Par conséquent,  $\llbracket X \rrbracket_0^{z_a^1}$  contient des informations provenant du modèle océan, *via* la paramétrisation de la partie océanique de la CLS.

Les mécanismes de couplage océan-atmosphère font intervenir les échelles de friction, qui sont fonctions des sauts  $\llbracket X \rrbracket_0^{z_a^1}$  d'une façon bien trop subtile (*via* les formulations bulks et les paramétrisations CLS) pour que les opérateurs de transmission puissent être facilement séparables en deux parties, l'une concernant le sous-modèle océan, l'autre l'atmosphère. En d'autres termes, le couplage océan-atmosphère n'est pas sécable, cf. (5.18).

En particulier, on ne peut plus écrire les conditions de transmission sous la forme (5.16c). En s'écartant très légèrement du formalisme standard décrit dans le § 5.2.3, il est tout de même possible d'adapter l'écriture d'opérations de transmission du système d'itéré de Schwarz afin qu'elles puissent être faites de façon séparée. On peut alors distinguer deux stratégies :

- une formulation en flux explicites, où on substituerait (5.16c) par :

$$\mathcal{B}_{i,i} X_i^k = \mathcal{B}_{i,-i} (X_i^{k-1}, X_{-i}^{k-1}) \quad i \in \{1, 2\} \quad (5.43)$$

- une formulation en flux semi-implicites, où on substituerait (5.16c) par :

$$\mathcal{B}_{i,i} X_i^k = \mathcal{B}_{i,-i} (X_i^k, X_{-i}^{k-1}) \quad i \in \{1, 2\} \quad (5.44)$$

Les deux prochaines sous-sous-sections présentent rapidement ces deux formulations, en décrivant leur fonctionnement dans le cadre du couplage océan-atmosphère, avec des conditions de couplage naturelles données par (5.37).

#### Formulation en flux explicites

La première stratégie correspond à une formulation en flux explicites :

$$\partial_z x^k = \frac{u_{a,k-1}^*}{\kappa z_a^1} \quad x \in \{u_h, \theta, q\}, z = z_a^1 \quad (5.45a)$$

$$\mathbf{x}_{a,k-1}^* = \mathbf{x}_a^* (X^{k-1}(z_a^1) - X^{k-1}(z_o^1)) \quad (5.45b)$$

$$\partial_z x^k = \frac{x_{o,k-1}^*}{\kappa(-z_o^1)} \quad x \in \{u_h, \theta, s\}, z = z_o^1 \quad (5.45c)$$

$$\mathbf{x}_{o,k-1}^* = \mathcal{S}_{a \rightarrow o} (\mathbf{x}_{a,k-1}^*) \quad (5.45d)$$

où :

- Les indices  $k$  dénotent les itérations de Schwarz.

- ▶ Les flux transmis au modèle atmosphère (5.45a) sont explicites : ils correspondent aux flux définis par les échelles de friction  $\mathbf{x}_{a,k-1}^*$ , obtenues *via* une formulation bulk raccordant les profils de solution de l'itération de Schwarz précédente, cf. (5.45b).
- ▶ Les flux transmis au modèle océan (5.45c) sont aussi explicites : ils correspondent aux flux définis par les échelles de friction  $\mathbf{x}_{o,k-1}^*$ , obtenus *via* l'opérateur  $\mathcal{S}_{a \rightarrow o}$  qui permet de passer des échelles de friction atmosphériques vers leurs équivalents océaniques, en se reposant sur l'hypothèse de couche à flux constant. Cet opérateur correspond au système (2.54). En particulier, (5.45d) assure que le couplage océan-atmosphère est conservatif.
- ▶ Les conditions de transmission (5.45a) et (5.45c) correspondent donc à de simples conditions de Neumann, une fois les échelles de friction  $(\mathbf{x}_{\alpha,k-1}^*)$  déterminées *via* une formulation bulk intégrale (5.45b) et l'égalité des flux turbulents (5.45d). À chaque itération de Schwarz, ce rapide calcul des échelles de friction peut être fait *avant* les résolutions des sous-modèles.
- ▶ Une fois les échelles de friction déterminées, les résolutions des sous-modèle océan et atmosphère peuvent être effectuées de manière parallèle.

Implémenter cette formulation explicite ne nécessite aucun aménagement supplémentaires, seules les formulations bulks « intégrales », telles que définies au § 3.4.3, sont utilisées. Dans la formulation (5.45), les flux prescrits aux deux sous-modèles sont en retard d'une itération de Schwarz par rapport aux gradients des solutions aux niveaux  $(z_\alpha^1)$ , ce qui ne correspond pas à la réalité physique. En contrepartie, utiliser une telle formulation permet de s'affranchir du caractère non-local des conditions de transmissions (5.37), et de faire rentrer le problème océan-atmosphère dans le cadre théorique défini par (5.16), les conditions de transmissions à l'interface (5.45a) et (5.45c) étant désormais séparables. En reprenant les notations de (5.16), on aura :

$$\mathcal{B}_{\alpha,\alpha} = \partial_z \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (5.46a)$$

$$\mathcal{B}_{a,o} = \frac{\mathbf{x}_a^* \left( X_a^{k-1}(z_a^1) - X_o^{k-1}(z_o^1) \right)}{\kappa z_a^1} \quad (5.46b)$$

$$\mathcal{B}_{o,a} = \frac{\mathcal{S}_{a \rightarrow o} \left( \mathbf{x}_{a,k-1}^* \right)}{\kappa z_a^1} \quad (5.46c)$$

Si l'algorithme atteint convergence, alors la cohérence du couplage sera assurée dès qu'une formulation bulk intégrale est utilisée (cela permet aux profils de solution d'être cohérents entre eux) et que les échelles de friction océaniques sont bien calculées en utilisant l'hypothèse de couche à flux constant (cela permet aux profils de solution d'être cohérents vis à vis des paramétrisations turbulentes).

### Formulation en flux semi-implicites

On pourrait imaginer une autre formulation en flux « semi-implicites » :

$$\partial_z \chi^k = \frac{u_{a,k-\frac{1}{2}}^*}{\kappa z_a^1} \quad x \in \{u_h, \theta, q\}, z = z_a^1 \quad (5.47a)$$

$$\mathbf{x}_{a,k-\frac{1}{2}}^* = \mathbf{x}_a^* \left( X^k(z_a^1) - X^{k-1}(z_o^1) \right) \quad (5.47b)$$

$$\partial_z \chi^k = \frac{\mathbf{x}_{o,k-\frac{1}{2}}^*}{\kappa(-z_o^1)} \quad x \in \{u_h, \theta, s\}, z = z_o^1 \quad (5.47c)$$

$$\mathbf{x}_{o,k-\frac{1}{2}}^* = \mathcal{S}_{a \rightarrow o} \left( \mathbf{x}_{a,k-\frac{1}{2}}^* \right) \quad (5.47d)$$

Concernant la formulation (5.47) :

- ▶ Le flux prescrit à l'atmosphère est *semi-implicite*, dans la mesure où il correspond au flux raccordant l'itération  $k$  du modèle atmosphère à la valeur de surface extrapolée depuis l'itération  $k - 1$  du modèle océan.
- ▶ En particulier, le traitement de l'équation (5.47b) est délicat, puisqu'il ne peut pas se faire *via* une formulation bulk classique, même « intégrale ». (5.47b) devrait être traitée en *inversant partiellement la formulation bulk par rapport à l'information d'entrée provenant du sous-modèle atmosphère*, ce qui, vu la structure mathématique de ces formulations, est loin d'être immédiatement implémentable.
- ▶ Les échelles de friction océaniques sont toujours définies *via* l'opérateur (5.47d) : de cette manière, on s'assure que les flux échangés entre les modèles soient les mêmes.
- ▶ Le sous-modèle océan est traité de façon explicite, puisque les flux lui étant prescrits sont connus à l'avance. En particulier, la condition (5.47c) est une simple condition de Neumann.
- ▶ Cet algorithme ne peut pas être parallélisé :  $\mathbf{x}_{a,k-\frac{1}{2}}^*$  n'est connu qu'une fois le sous-modèle atmosphère entièrement traité. Or,  $\mathbf{x}_{a,k-\frac{1}{2}}^*$  est nécessaire au calcul des  $\mathbf{x}_{o,k-\frac{1}{2}}^*$ , qui sont utilisées comme données pour la résolution du sous-modèle océan.

Concernant le dernier point, une alternative parallélisable serait implémentable, en traitant les échelles océaniques de façon parfaitement analogue à (5.47b) :

$$\mathbf{x}_{o,k-\frac{1}{2}}^* = \mathbf{x}_o^* \left( X^{k-1}(z_a^1) - X^k(z_o^1) \right) \quad (5.48)$$

En contrepartie, les flux n'auraient alors aucune raison d'être cohérents entre eux. Lors d'une même itération de Schwarz, les deux modèles perçoivent différents flux, et par conséquent, le couplage n'est pas réalisé de façon conservative.

Les limitations évoquées ci-dessus rendent cette implémentation en flux semi-implicites difficilement réalisable. En particulier, fermer les formulations bulk à l'aide d'un saut de solutions prises à différentes itérations de Schwarz, selon les sous-modèles, nous semble contre-intuitif.

**Conclusion intermédiaire sur l'implémentation d'algorithmes SWR dans le contexte océan-atmosphère**

Le § 5.3.1 a présenté deux stratégies équivalentes pour rendre compte de la région d'épaisseur non nulle se situant entre les modèles océan et atmosphère à coupler. Ces deux stratégies correspondent à deux choix différents permettant d'écrire le couplage océan-atmosphère comme un problème multiphysique classique, auquel est ajoutée une contrainte de cohérence entre les conditions aux limites et les schémas de paramétrisations de la CLS.

Les § 5.3.2 et 5.3.3 s'intéressent à deux caractéristiques du couplage océan-atmosphère qui rendent ce problème incompatible avec les hypothèses classiquement utilisées, telles qu'introduites au § 5.2.3. Les caractères non-linéaire et non-local des conditions de transmission entre océan et atmosphère, hérités des formulations bulk, se traduisent par de nombreuses difficultés concernant l'écriture du système d'erreur de l'algorithme SWR. En particulier, pour l'instant, l'optimisation d'algorithmes SWR océan-atmosphère ne peut reposer *a minima* que sur la linéarisation des formulations bulk, et sur l'instauration d'un décalage temporel entre flux prescrits et état physique des solutions. L'étude numérique de la pertinence de ces linéarisation et décalage temporel reste à faire. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que celle-ci soit licite dès que les fenêtres de couplage sont suffisamment courtes, et la solution « lisse ».

En conclusion, pour l'instant, l'optimisation d'algorithmes SWR océan-atmosphère est un problème difficile, soluble uniquement de façon « approchée », sans réel contrôle sur ce qu'implique ce caractère approché. Notons qu'il est tout de même possible de mettre directement en place des algorithmes SWR non optimisés, sans toutefois pouvoir garantir leur caractère convergent, et encore moins, la vitesse de convergence (Lemarié *et al.*, 2014).

Quantifier les erreurs commises lors de la mise en place des stratégies décrites aux § 5.3.2 et 5.3.3 est une piste de recherche intéressante, dans la mesure où elle pourrait révéler de nouvelles propriétés du couplage océan-atmosphère jusqu'ici peu examinées.

## 5.4 Couplage de couches d'Ekman par algorithmes de Schwarz

Cette section a pour objectif l'application de différentes méthodes de couplage, y compris les algorithmes OSWR, présentés au § 5.2.3, au problème de couplage de couches d'Ekman, introduit au chapitre 4. Dans la mesure où le § 5.3 a montré que l'implémentation d'algorithmes OSWR n'était pour l'instant pas abordable pour le problème océan-atmosphère dans sa globalité, on utilise ici le problème simplifié des couches d'Ekman, pour lequel on dispose de solutions exactes.

On utilisera cette formulation continue, multiphysique du problème de couplage de couches d'Ekman :

$$\partial_t u_h + \imath f u_h - \partial_z (v_\alpha \partial_z u_h) = \imath f u_g^\alpha(z) - \partial_z (v_\alpha \partial_z u_g^\alpha) \quad (t, z) \in [0; T] \times (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (5.49a)$$

$$u_h(t, z_\alpha^\infty) = u_g^\alpha(z_\alpha^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (5.49b)$$

$$u_h(t = 0, z) = u_0^\alpha(z) \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (5.49c)$$

où  $\alpha \in \{o, a\}$  distingue les milieux physiques. On renvoie au § 4.1.2, qui utilise les notations

ci-dessus, pour le détail des différents termes de (5.49). La principale différence par rapport au § 4.1.2 est qu'on permet ici aux courant et vent géostrophiques d'être éventuellement dépendants de  $z$ ; cela est dû au fait que dans le cas couplé, les profils géostrophiques doivent se raccorder en  $z = 0$ . On modifie en conséquence le membre de droite de (5.49a), afin que le profil géostrophique constitue toujours une solution stationnaire monodomaine. Une autre différence se situe dans la condition d'initialisation (5.49c); le problème n'est pas forcément initialisé avec les composantes géostrophiques. En revanche, afin d'être cohérente avec (5.49b), (5.49c) doit entre autres vérifier :

$$u_0^\alpha(z_\alpha^\infty) = u_g^\alpha(z_a^\infty) \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (5.50)$$

Il manque deux conditions de bord (une pour chaque  $\alpha \in \{o, a\}$ ) à (5.49). On considérera deux cas, le second étant nettement plus délicat que le premier :

- ▶ Au § 5.4.1, on supposera que  $z_o^1 = z_a^1 = 0$ , ce qui signifie qu'on suppose qu'il n'y a pas de couche limite turbulente paramétrisée. On supposera alors que le couplage est réalisé *via* une condition de Dirichlet à l'interface. Sous certaines hypothèses supplémentaires, il sera alors possible d'optimiser les algorithmes SWR.
- ▶ Au § 5.4.2, on supposera  $z_o^1 < 0 < z_a^1$ , c'est à dire qu'il existe bien une CLS. Les deux modèles seront couplés par des conditions aux limites de type « bulk ».

En outre, dans toute cette section, on supposera le paramètre de Coriolis  $f$  et les cotes infinies ( $z_\alpha^\infty$ ) constants et connus.

### 5.4.1 Absence de couches limites

On suppose qu'on couple deux couches d'Ekman, sans couches limites. On pose ainsi  $z_o^1 = z_a^1 = 0$ . La formulation du problème multiphysique est la suivante :

$$\partial_t u_{h,\varphi}^o + f u_{h,\varphi}^o - \partial_z (v_o \partial_z u_{h,\varphi}^o) = f u_g^o(z) - \partial_z (v_o \partial_z u_g^o) \quad (t, z) \in [0; T] \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (5.51a)$$

$$u_{h,\varphi}^o(t, z_o^\infty) = u_g^o(z_o^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (5.51b)$$

$$u_{h,\varphi}^o(t = 0, z) = u_{init}^o(z) \quad z \in ]z_o^\infty; 0[ \quad (5.51c)$$

$$\partial_t u_{h,\varphi}^a + f u_{h,\varphi}^a - \partial_z (v_a \partial_z u_{h,\varphi}^a) = f u_g^a(z) - \partial_z (v_a \partial_z u_g^a) \quad (t, z) \in [0; T] \times ]0; z_a^\infty[ \quad (5.51d)$$

$$u_{h,\varphi}^a(t, z_a^\infty) = u_g^a(z_a^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (5.51e)$$

$$u_{h,\varphi}^a(t = 0, z) = u_{init}^a(z) \quad z \in ]0; z_a^\infty[ \quad (5.51f)$$

$$u_{h,\varphi}^o(t, 0^-) = u_{h,\varphi}^a(t, 0^+) \quad t \in [0; T] \quad (5.51g)$$

Les profils géostrophiques sont supposés connus et satisfaisant :

$$u_g^o(z = 0^-) = u_g^a(z = 0^+) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.52)$$

ce qui permet d'être cohérent avec (5.51g), qui réalise le couplage entre les deux sous-problèmes, sous la forme d'une condition Dirichlet-Dirichlet. On supposera en outre que dans (5.51a) et (5.51d), les viscosités turbulentes ( $v_\alpha^*$ ) sont données par une forme similaire à celles décrites par

la théorie de Monin-Obukhov :

$$\begin{aligned} \nu_\alpha (u_{\alpha,\nu}^*, z) &= \kappa u_{\alpha,\nu}^* |z| + \nu_\alpha^m & \alpha \in \{o, a\} \\ \text{avec } u_{a,\nu}^* &= 0.5 \text{ m s}^{-1} & u_{o,\nu}^* &= \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_o}} u_{a,\nu}^* \approx 1,6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} \\ \nu_a^m &= 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} & \nu_o^m &= 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (5.53)$$

### Solutions exactes

On peut exploiter les résultats du § 4.2.3 afin d'obtenir les solutions exactes, domaine par domaine, au problème (5.51). Pour cela, on résout deux sous-problèmes, sur  $[0; T] \times (0, z_\alpha^\infty)$ , en supposant les conditions aux limites en  $z = 0$  connues et données,  $u_{h,\Gamma}^\alpha$  :

$$u_{h,\varphi}^\alpha (t, 0^\pm) = u_{h,\Gamma}^\alpha (t) \quad t \in [0; T], \alpha \in \{o, a\} \quad (5.54)$$

Dans la suite, on supposera que  $T = +\infty$ , et que  $(u_{h,\Gamma}^\alpha)_{\alpha \in \{o,a\}} \in (L^2(\mathbb{R}))^2$ . On s'intéressera à l'adéquation entre la condition artificielle (5.54) et la condition de couplage physique (5.51g) plus tard. La résolution passe par l'écriture de la transformée de Fourier de (5.49), fermé en  $z = 0$  par (5.54). Afin de pouvoir effectuer des transformées de Fourier temporelles pour  $t \in \mathbb{R}$ , on prolonge artificiellement la solution par 0 pour des dates  $t \in \mathbb{R}^*$ . On effectuera des transformées de Fourier sur :

$$\widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha} (t, z) = u_{h,\varphi}^\alpha (t, z) - u_g^\alpha (z) \quad \alpha \in \{o, a\}, z \in (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.55)$$

On fera aussi les hypothèses supplémentaires suivantes, pour  $\alpha \in \{o, a\}$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha} (t, z) = 0 \quad z \in \mathbb{R}_\pm^* \quad (5.56a)$$

$$\left[ t \mapsto \widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha} (t, z) \right] \in L^2(\mathbb{R}) \quad z \in (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.56b)$$

$$\left[ t \mapsto \partial_z \widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha} (t, z) \right] \in L^2(\mathbb{R}) \quad z \in (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.56c)$$

Ces hypothèses permettent de s'abstenir de devoir calculer des termes de bord en  $t \rightarrow \infty$  lorsqu'on fera des intégrations par parties, au cours des transformées de Fourier temporelles. (5.56) permet de justifier l'existence de la transformée de Fourier, et son caractère bijectif.

Pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , sur  $(0; z_\alpha^\infty)$ , le système d'équations aux dérivées partielles sur  $\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha} = \mathcal{F}(\widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha})$ , transformée de Fourier temporelle de  $u_{h,\varphi}^\alpha$ , s'écrit :

$$i(f + \omega) \widehat{u_{h,\varphi}^\alpha} - \partial_z (v_\alpha \partial_z \widehat{u_{h,\varphi}^\alpha}) = u_{init}^\alpha (z) - u_g^\alpha (z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.57a)$$

$$\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha} (\omega, z = z_\alpha^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.57b)$$

$$\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha} (\omega, z = 0) = \widehat{u_{h,\Gamma}^\alpha} (\omega) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.57c)$$

où, dans (C.1a), on justifie  $\mathcal{F}[\partial_z (v_\alpha \partial_z \widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha})] = \partial_z (v_\alpha \partial_z \widehat{u_{h,\varphi}^\alpha})$  par (5.56c), en se rappelant que  $\forall z \in (0; z_\alpha^\infty)$ ,  $v_\alpha(z) \geq \nu_\alpha^m > 0$ . Le membre de droite de (C.1a) est dû à la discontinuité de  $\widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha}$  par rapport à la variable  $t$  en  $t = 0$ , qui se manifeste lors de l'intégration par parties induite par l'opération  $\partial_t \widetilde{u_{h,\varphi}^\alpha} \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \widehat{u_{h,\varphi}^\alpha}$ . Remarquons que si on avait initialisé le problème sur le vent

géostrophique, on aurait obtenu une équation différentielle homogène.

La solution exacte à (5.57) est donnée par (4.20). Elle est de la forme :

$$\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha}(\omega) = A_\alpha(\omega, z)f_1^\alpha(\omega, z) + B_\alpha(\omega, z)f_2^\alpha(\omega, z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.58)$$

Plus de détails sur les différentes fonctions présentes dans (5.58) sont disponibles en annexe C.1.

Sous réserve que les  $(u_{h,\Gamma}^\alpha)$  soient de régularité  $L^2$  en temps, alors ces « données à l'interface », qu'on a dans un premier temps supposées connues, sont compatibles avec la condition de couplage (5.51g) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \left[ \forall t \in \mathbb{R}, u_{h,\Gamma}^o(t) = u_{h,\Gamma}^a(t) \right] &\Leftrightarrow \left[ \forall t \in \mathbb{R}, \widehat{u_{h,\Gamma}^o}(t) = \widehat{u_{h,\Gamma}^a}(t) \right] \\ &\Leftrightarrow \left[ \forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{u_{h,\Gamma}^o}(\omega) = \widehat{u_{h,\Gamma}^a}(\omega) \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

ce qui représente une seule contrainte sur les deux fonctions  $(u_{h,\Gamma}^\alpha)$ . L'ensemble des couples de fonction  $(u_{h,\Gamma}^\alpha)$  permettant d'obtenir des solutions de (5.51) est un espace affine de dimension 1 ; ce système d'équations différentielles couplées est donc mal posé<sup>15</sup>.

Imposer une seconde condition de couplage permet d'obtenir une équation supplémentaire de couplage sur les  $(\widehat{u_{h,\Gamma}^\alpha})$ , permettant ainsi de rendre le système bien posé. Une condition semblant naturelle peut être trouvée en raccordant, pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , les solutions stationnaires de (5.51), en utilisant les profils de viscosités (5.53). Cela se traduit par :

$$\partial_z u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) = \lambda_u \partial_z u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) \quad (5.60)$$

où on rappelle que  $\lambda_u = \sqrt{\rho_a / \rho_o}$ .

Les conditions de couplage du problème multiphysique sont donc représentées par les deux équations (5.51g) et (5.60). Le fait que pour ce problème sans paramétrisations de la CLS, deux équations de couplage soient nécessaires, fait écho aux conditions de couplage cohérent évoquées au § 4.1.3, où les paramétrisations CLS étaient prises en compte :

- (i) La condition (5.51g) correspond à un raccord  $\mathcal{C}^0$  des solutions en  $z = 0$  ; cela revient à la condition de cohérence (c2), qui imposait aux profils CLS de se raccorder continûment à l'interface.
- (ii) La condition (5.60) correspond à l'égalité des flux sur la CLS, qui se traduisait, au chapitre 4, par la contrainte (4.10). La condition de couplage cohérent correspondant est (c1). Notons que (5.60) ne correspond pas à un raccord  $\mathcal{C}^1$  des solutions en  $z = 0$ .

(5.60) permet de déterminer la valeur des  $(u_{h,\Gamma}^\alpha)$ , qui est indépendante de  $\alpha$ , de façon unique. Cette valeur dépend des intégrales (C.5) et a une expression relativement complexe, à l'exception d'un cas particulier traité ci-dessous.

15. Ce résultat ne constitue pas réellement une surprise : il n'y a aucune raison pour que deux sous-problèmes bien posés constituent un problème couplé bien posé.

### Cas d'un système initialisé sur les composantes géostrophiques

On suppose qu'on initialise le problème sur les composantes géostrophiques, i.e. :

$$u_{h,init}^\alpha(z) = u_g^\alpha(z) \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (5.61)$$

(C.1a) devient alors une équation homogène, et par conséquent,  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  ne dépendent que de  $\omega$ . On peut aller jusqu'au bout des calculs ; on aura :

$$A_\alpha(\omega) = \frac{\widehat{u_{h,0}^\alpha}(\omega)}{f_1^\alpha(\omega, 0) - \frac{f_1^\alpha(\omega, z_\alpha^\infty)}{f_2^\alpha(\omega, z_\alpha^\infty)} f_2^\alpha(\omega, 0)} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.62a)$$

$$B_\alpha(\omega) = \frac{\widehat{u_{h,0}^\alpha}(\omega)}{f_2^\alpha(\omega, 0) - \frac{f_2^\alpha(\omega, z_\alpha^\infty)}{f_1^\alpha(\omega, z_\alpha^\infty)} f_1^\alpha(\omega, 0)} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.62b)$$

On peut alors montrer que la seule solution permettant de vérifier (5.59) et (5.60) est définie par  $\widehat{u_{h,\Gamma}^o}(t) = \widehat{u_{h,\Gamma}^a}(t) = 0$  : ce résultat était attendu, puisque le membre de droite de (5.49a) a été construit sur mesure pour que le profil géostrophique constitue une solution stationnaire du problème d'Ekman.

### Optimisation de l'algorithme SWR

On ne suppose plus le système initialisé sur les composantes géostrophiques. On met en place un algorithme SWR pour résoudre (5.51), auquel on ajoute la condition de couplage supplémentaire (5.60). L'algorithme de Schwarz s'écrit ainsi, pour  $\alpha \in \{o, a\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  distinguant ses itérations :

$$\partial_t \widehat{u_{h,k}^\alpha} + \iota f \widehat{u_{h,k}^\alpha} - \partial_z \left( \nu_\alpha \partial_z \widehat{u_{h,k}^\alpha} \right) = 0 \quad (t, z) \in [0; T] \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.63a)$$

$$\widehat{u_{h,k}^\alpha}(t, z_\alpha^\infty) = 0 \quad t \in [0; T] \quad (5.63b)$$

$$\widehat{u_{h,k}^\alpha}(t=0, z) = u_{h,init}^\alpha(z) - u_g^\alpha(z) \quad z \in (0; z_\alpha^\infty) \quad (5.63c)$$

$$\mathcal{B}_{\alpha,\alpha} \widehat{u_{h,k}^\alpha}(t, 0) = \mathcal{B}_{\alpha,-\alpha} \widehat{u_{h,k-1}^\alpha}(t, 0) \quad t \in [0; T] \quad (5.63d)$$

(5.63d) correspond à l'équation de couplage, et fait intervenir quatre opérateurs de transmission de Schwarz,  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \{o,a\}^2}$ , qu'on choisit comme conditions de Robin. En annexe C.2, on montre que la condition de compatibilité, évoquée précédemment, permet de réduire ce choix à celui d'un seul couple  $(p_o, p_a) \in \mathbb{C}^2$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{o,o} &= p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_o} & \mathcal{B}_{o,a} &= \lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a} \\ \mathcal{B}_{a,a} &= \lambda_u p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_a} & \mathcal{B}_{a,o} &= p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o} \end{aligned} \quad (5.64)$$

où les  $\gamma_{\Gamma_\alpha}$ , pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , symbolisent les opérateurs trace en  $z = 0^\pm$ , et ne sont donc pas des degrés de liberté. En utilisant les opérateurs  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$  donnés par (5.64), la transformée de Fourier de (5.63), sous réserve que (5.56) soit valable, s'écrit alors :

$$\iota(f + \omega) \widehat{u_{h,k}^o} - \partial_z \left( \nu_o \partial_z \widehat{u_{h,k}^o} \right) = u_{init}^o(z) - u_g^o(z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (5.65a)$$

$$\widehat{u_{h,k}^o}(\omega, z = z_o^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.65b)$$

$$(p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{u_{h,k}^o}(\omega, z = 0^-) = (\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{u_{h,k-1}^a}(\omega, z = 0^+) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.65c)$$

$$i(f + \omega) \widehat{u_{h,k}^a} - \partial_z (v_a \partial_z \widehat{u_{h,k}^a}) = u_{init}^a(z) - u_g^a(z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_a^\infty) \quad (5.65d)$$

$$\widehat{u_{h,k}^a}(\omega, z = z_a^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.65e)$$

$$(\lambda_u p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{u_{h,k}^a}(\omega, z = 0^+) = (p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{u_{h,k-1}^o}(\omega, z = 0^-) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.65f)$$

Notons, concernant les équations (5.65c) et (5.65f), que (5.56c) permettant l'inversion de la transformée de Fourier temporelle et de l'opération  $\partial_z$ , et les opérateurs de transmission étant indépendants de  $t$ , leur symbole de Fourier sont égaux aux opérateurs eux-mêmes.

Le système pour les erreurs  $(\widehat{e_k^\alpha})_{\alpha \in \{o,a\}}$  s'écrit en soustrayant (5.57) à (5.65). On obtient :

$$i(f + \omega) \widehat{e_k^o} - \partial_z (v_o \partial_z \widehat{e_k^o}) = 0 \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (5.66a)$$

$$\widehat{e_k^o}(\omega, z = z_o^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.66b)$$

$$(p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{e_k^o}(\omega, z = 0^-) = (\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{e_{k-1}^a}(\omega, z = 0^+) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.66c)$$

$$i(f + \omega) \widehat{e_k^a} - \partial_z (v_a \partial_z \widehat{e_k^a}) = 0 \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_a^\infty) \quad (5.66d)$$

$$\widehat{e_k^a}(\omega, z = z_a^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.66e)$$

$$(\lambda_u p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{e_k^a}(\omega, z = 0^+) = (p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{e_{k-1}^o}(\omega, z = 0^-) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.66f)$$

où l'absence de termes en  $(u_{h,\varphi}^\alpha)$ , solution physique, dans les équations de couplage (5.66c) et (5.66f), est due aux conditions de couplage naturel (5.51g) et (5.60), qui impliquent :

$$\forall p_\alpha \in \mathbb{C}, (\lambda_u p_\alpha \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{u_{h,\varphi}^a}(\omega, z = 0^+) = (p_\alpha \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{u_{h,\varphi}^o}(\omega, z = 0^-) \quad \omega \in \mathbb{R}, \alpha \in \{o, a\} \quad (5.67)$$

Ainsi, les conditions de compatibilité des opérateurs de Schwarz permettent de vérifier (5.22); notons que relâcher (5.60) empêche de vérifier cette contrainte, et donc ne permet pas d'étudier  $(e_k^\alpha)$  de façon indépendante de la solution multiphysique.

La solution exacte à (5.66) peut être explicitement déterminée : elle correspond à la solution au problème homogène associé à (C.1a). La solution est donc obtenue par analogie à (5.58) :

$$\widehat{e_k^o}(\omega, z, p_o) = S_o(\omega, z, p_o) \times (\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{e_{k-1}^a}(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (5.68a)$$

$$\widehat{e_k^a}(\omega, z, p_a) = S_a(\omega, z, p_a) \times (p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{e_{k-1}^o}(\omega, z = 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]0; z_a^\infty[ \quad (5.68b)$$

où les  $(S_\alpha)$  sont deux fonctions indépendantes des  $(\widehat{e_k^\alpha})$ , données en annexe C.3.1.

On s'intéresse au facteur de convergence suivant, défini pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq 2$  :

$$\rho_k^\alpha(\omega, p_\alpha) = \left| \frac{\widehat{e_k^\alpha}(\omega, 0, p_\alpha)}{\widehat{e_{k-2}^\alpha}(\omega, 0, p_\alpha)} \right| \quad (5.69)$$

Toujours à l'annexe C.3.1, on montre que :

$$\rho_k^\alpha(\omega, p_\alpha) = [(\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) S_a(\omega, 0^+, p_a)] \times [(p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) S_o(\omega, 0^-, p_o)] \quad \omega \in \mathbb{R}, \alpha \in \{o, a\} \quad (5.70)$$

où on constate que  $\rho_k^\alpha$  est indépendant de  $\alpha \in \{o, a\}$  et de  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ; on notera ainsi dans la suite  $\rho_k^\alpha = \rho$ . (5.70) permet d'obtenir les éventuelles valeurs « parfaitement absorbantes » des coefficients  $(p_\alpha)$  pour lesquelles la convergence exacte du paquet d'ondes à la fréquence temporelle  $\omega$  est atteinte en deux itérations. Si elles existent, celles-ci sont solution de :

$$\lambda_u p_o \partial_z S_a(\omega, 0^+, p_a) = S_a(\omega, 0^+, p_a) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.71a)$$

$$p_a \partial_z S_o(\omega, 0^-, p_o) = S_o(\omega, 0^-, p_o) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.71b)$$

Résoudre exactement (5.71) n'est pas envisageable, et ce pour au moins deux raisons :

- (1) La forme des fonctions  $(S_\alpha)$ , cf. (C.15) et (C.16), rend ce problème fortement non linéaire et, dans le cas où il serait bien posé (ce qui est déjà optimiste), difficile à résoudre.
- (2) Étant donné l'expression des  $(S_o, S_a)$ , il n'existe pas de  $(p_o, p_a) \in \mathbb{C}^2$  constants permettant de vérifier (5.71). En d'autres termes, se restreindre à la classe (5.64), pour  $\mathcal{B}_{\alpha, \beta}$ , contraint les  $(p_\alpha)$  à ne pas dépendre de  $\omega$ .

Comme (5.29) le préconise, on cherche alors les opérateurs optimaux sur une plage de fréquences  $I_\omega = [\omega_{min}; \omega_{max}]$ . En pratique, ces fréquences limites sont données par les pas de temps des deux sous-modèles, et la taille de la fenêtre de couplage considérée, cf. (5.30). Les paramètres optimaux  $(p_\alpha^{opt})$  sont alors définis comme réalisant ce minimum :

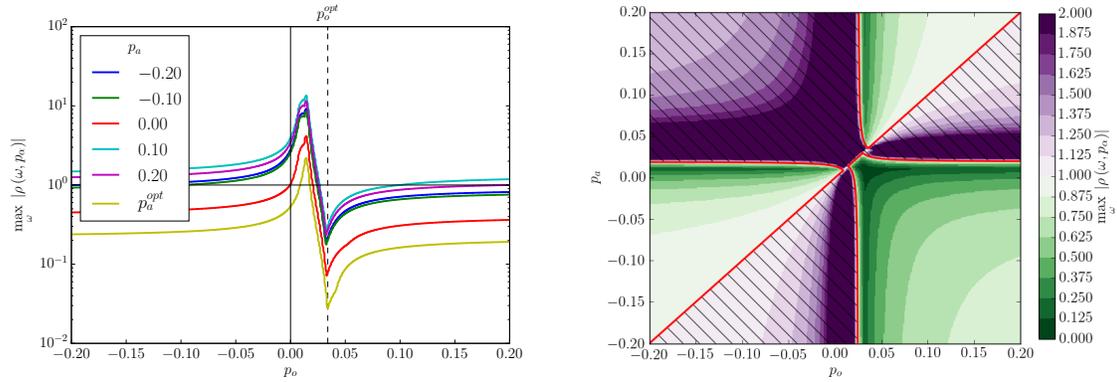
$$\max_{\omega \in I_\omega} [\rho(\omega, p_\alpha^{opt})] = \min_{(p_\alpha) \in \mathbb{C}^2} \left\{ \max_{\omega \in I_\omega} [\rho(\omega, p_\alpha)] \right\} \quad (5.72)$$

La figure 5.8 représente les valeurs de  $\max_{\omega \in I_\omega} |\rho|$ , extraites de (5.70), pour  $(p_o, p_a) \in [-0.2; 0.2]^2$ , où on rappelle que les valeurs de paramètres numériques utilisés sont données par (5.53). On a ici utilisé des valeurs de  $\omega_{min}$  et  $\omega_{max}$  définies par (5.30), en utilisant :

$$\delta t(\mathcal{T}) = 4 \text{ h} \quad \min \{\delta t_o, \delta t_a\} = 10 \text{ min} \quad (5.73)$$

L'observation de ces résultats amène aux conclusions suivantes :

- (i) Le taux de convergence est fortement dépendant des valeurs de  $(p_o, p_a)$ .
- (ii) Le meilleur taux de convergence est atteint pour  $(p_o^{opt}, p_a^{opt}) \approx (0.034, 0.009)$ ; il vaut 0.028. Cela veut dire qu'on obtient une convergence satisfaisante (avec une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$ ) en environ 4 itérations.
- (iii) Utiliser une condition Dirichlet-Dirichlet, i.e., poser  $p_o = p_a = 0$ , donne numériquement un taux  $\rho \approx 1$ , se situant à la limite entre convergence et non convergence de l'algorithme de Schwarz. Cela se voit en observant la courbe rouge sur figure 5.8a. Théoriquement, cela peut se constater en injectant  $p_o = p_a = 0$  dans (5.66c) et (5.66f) : dans ce cas, l'erreur sur  $\Gamma$  n'évolue pas d'une itération à l'autre.



(a)  $\max_{\omega \in I_\omega} |\rho(\omega, p_\alpha)|$  pour 6 valeurs fixées de  $p_a$ , y compris  $p_a^{opt}$ . La ligne verticale noire pointillée correspond à  $p_o^{opt}$ . La ligne noire horizontale correspond à  $\max_{\omega} |\rho| = 1$  : au-dessus de cette ligne, l'algorithme de Schwarz ne converge pas.

(b)  $\max_{\omega \in I_\omega} |\rho(\omega, p_o, p_a)|$ . La région délimitée en rouge, et hachurée en noir, correspond à  $\rho(p_a, p_o) > 1$ , c'est à dire à des configurations où l'algorithme de Schwarz ne converge pas.

FIGURE 5.8 – Valeurs de  $\max_{\omega \in I_\omega} |\rho|$ , tel que donné par (5.70), pour  $(p_a, p_o) \in [-0.2; 0.2]^2$ . Les valeurs de paramètres numériques utilisés sont données par (5.53).

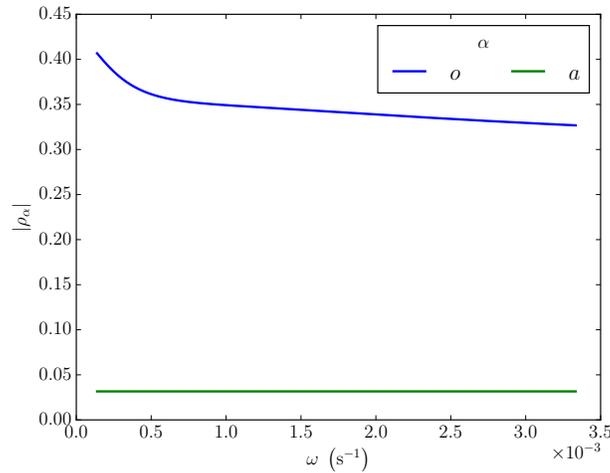


FIGURE 5.9 –  $\omega \mapsto |\rho_\alpha^{dn}(\omega)|$  pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , avec les conditions de transmission (5.74), sur la plage de fréquence définie par (5.73).

Dans cette expérience numérique, le choix des paramètres  $(p_\alpha)$  a été restreint à des valeurs réelles : utiliser des valeurs dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  reste à tester.

À l'annexe C.3.2, on s'intéresse aux résultats numériques du même algorithme de Schwarz, reposant cette fois-ci sur des conditions de type Dirichlet-Neumann, avec les conditions de transmission suivantes :

$$u_{h,k}^a(t, z = 0^+) = u_{h,k-1}^o(t, z = 0^+) \quad t \in [0; T] \quad (5.74a)$$

$$\partial_z u_{h,k}^o(t, z = 0^+) = \lambda_u \partial_z u_{h,k-1}^a(t, z = 0^+) \quad t \in [0; T] \quad (5.74b)$$

où le choix suit ce qui est préconisé dans Liu *et al.* (2009). On s'intéresse aux taux de convergence  $\rho_\alpha^{dn}$  pour  $\alpha \in \{o, a\}$ , du même algorithme de couplage que précédemment, avec les conditions de transmission (5.74). Les calculs sont détaillés à l'annexe C.3.2 ; les résultats numériques, présentés sur la figure 5.9. On constate que le taux de convergence du modèle océan, qui conditionne la convergence globale de l'algorithme de Schwarz, est de l'ordre de 0.41. Cela signifie que cette forme d'algorithme converge bel et bien ; en revanche, obtenir une convergence avec une tolérance numérique de  $10^{-4}$  nécessiterait environ 20 itérations de Schwarz, contre 4 pour un algorithme Robin-Robin optimisé.

## 5.4.2 Inclusion de paramétrisations CLS

On se place maintenant dans un cadre plus près de la physique des modèles : on inclut des paramétrisations CLS au problème. Il s'agit donc désormais d'un couplage océan-CLS-atmosphère. On suppose donc qu'on a  $z_o^1 < 0 < z_a^1$ , et que la CLS, correspondant à la région  $]z_o^1; z_a^1[$ , est paramétrisée, et non traitée par les sous-modèles numériques. Le problème de couplage multi-physique s'écrit alors :

$$\partial_t u_{h,\varphi}^o + if u_{h,\varphi}^o - \partial_z [v_o(u_o^*(t), z) \partial_z u_{h,\varphi}^o] = if u_g^o(z) - \partial_z [v_o(u_o^*(t), z) \partial_z u_g^o] \quad (t, z) \in [0; T] \times ]z_o^\infty; z_o^1[ \quad (5.75a)$$

$$u_{h,\varphi}^o(t, z_o^\infty) = u_g^o(z_o^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (5.75b)$$

$$v_o(u_o^*(t), z_o^1) \partial_z u_{h,\varphi}^o(t, z_o^1) = (u_o^*)^2 \quad t \in [0; T] \quad (5.75c)$$

$$u_{h,\varphi}^o(t = 0, z) = u_{init}^o(z) \quad z \in ]z_o^\infty; z_o^1[ \quad (5.75d)$$

$$\partial_t u_{h,\varphi}^a + if u_{h,\varphi}^a - \partial_z [v_a(u_a^*(t), z) \partial_z u_{h,\varphi}^a] = if u_g^a(z) - \partial_z [v_a(u_a^*(t), z) \partial_z u_g^a] \quad (t, z) \in [0; T] \times ]z_a^1; z_a^\infty[ \quad (5.75e)$$

$$u_{h,\varphi}^a(t, z_a^\infty) = u_g^a(z_a^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (5.75f)$$

$$v_a(u_a^*(t), z_a^1) \partial_z u_{h,\varphi}^a(t, z_a^1) = (u_a^*)^2 \quad t \in [0; T] \quad (5.75g)$$

$$u_{h,\varphi}^a(t = 0, z) = u_{init}^a(z) \quad z \in ]z_a^1; z_a^\infty[ \quad (5.75h)$$

$$u_a^*(t) = F_{bulk} \left( u_{h,\varphi}^o(t, z_0^1), u_{h,\varphi}^a(t, z_a^1) \right) \quad t \in [0; T] \quad (5.75i)$$

$$u_o^*(t) = \lambda_u u_a^*(t) \quad t \in [0; T] \quad (5.75j)$$

où (5.75i) et (5.75j) sont les conditions de couplage, modifiées par rapport à (5.75) pour rendre compte des paramétrisations CLS

- ▶ (5.75i) correspond à une fermeture bulk « intégrale », c'est à dire incluant les sous-couches visqueuses et la CLS océanique. C'est grâce à cette contrainte que les profils sont continus à la surface  $z = 0$ ; cette fermeture correspond à la condition Dirichlet-Dirichlet exprimée par (5.51g).
- ▶ (5.75j) correspond à imposer l'égalité du flux turbulent  $\tau$  sur la CLS, et correspond à la condition de couplage supplémentaire (5.60), de type Neumann-Neumann.

Si la fermeture bulk (5.75i) atteint bien convergence, alors les solutions sont continues aux interfaces entre sous-modèles numériques et CLS, en  $z = z_0^1$  et  $z = z_a^1$ . Une condition nécessaire et suffisante à ce que les solutions y soient aussi dérivables est qu'aux voisinages des  $(z_\alpha^1)$ , les profils de viscosité choisis soient cohérents avec ceux issus de la théorie de Monin-Obukhov :

$$v_\alpha(u_\alpha^*(t), z) = \kappa u_\alpha^*(t)z + o(z) \quad \alpha \in \{o, a\}, \quad |z - z_\alpha^1| \ll 1 \quad (5.76)$$

Dans la suite, on considérera (5.76) vérifiée. Par conséquent, les paramétrisations turbulentes dans la CLS peuvent être vues comme un prolongement continûment dérivable des solutions numériques dans l'océan et l'atmosphère. Il est aussi important de noter que contrairement à (5.51), dans (5.75), les viscosités turbulentes sont dépendantes du temps *via* les échelles de friction  $(u_\alpha^*(t))$ .

À la surface  $z = 0$ , qui est « invisible » au sein de (5.75), les paramétrisations CLS définissent des profils de solutions continues dès lors que la fermeture bulk (5.75i) a convergé, ce qu'on supposera aussi toujours vrai. Obtenir des profils vérifiant la condition (5.60) peut être fait en paramétrisant  $z_u^{o,r}$ , la longueur de rugosité océanique, de façon adaptée.

Mettre en place un algorithme de Schwarz global en temps,  $k \in \mathbb{N}$  distinguant toujours les itérés de Schwarz, donne alors :

$$\partial_t u_{h,k}^o + \imath f u_{h,k}^o - \partial_z \left( v_o \left( u_{o,k}^*(t), z \right) \partial_z u_{h,k}^o \right) = \imath f u_g^o(z) - \partial_z \left( v_o \left( u_{o,k}^*(t), z \right) \partial_z u_g^o \right) \quad (t, z) \in [0; T] \times \left] z_0^\infty; z_0^1 \right[ \quad (5.77a)$$

$$u_{h,k}^o(t, z_0^\infty) = u_g^o(z_0^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (5.77b)$$

$$v_o \left( u_{o,k}^*(t), z \right) \partial_z u_{h,k}^o \left( t, z_0^1 \right) = \left( u_{o,k}^* \right)^2 \quad t \in [0; T] \quad (5.77c)$$

$$u_{h,k}^o(t = 0, z) = u_{init}^o(z) \quad z \in \left] z_0^\infty; z_0^1 \right[ \quad (5.77d)$$

$$\partial_t u_{h,k}^a + \imath f u_{h,k}^a - \partial_z \left( v_a \left( u_{a,k}^*(t), z \right) \partial_z u_{h,k}^a \right) = \imath f u_g^a(z) - \partial_z \left( v_a \left( u_{a,k}^*(t), z \right) \partial_z u_g^a \right) \quad (t, z) \in [0; T] \times \left] z_a^1; z_a^\infty \right[ \quad (5.77e)$$

$$\begin{aligned}
u_{h,k}^a(t, z_a^\infty) &= u_g^a(z_a^\infty) & t \in [0; T] \\
(5.77f) \\
v_a \left( u_{a,k}^*(t), z \right) \partial_z u_{h,k}^a(t, z_a^1) &= \left( u_{a,k}^* \right)^2 & t \in [0; T] \\
(5.77g) \\
u_{h,k}^a(t = 0, z) &= u_{init}^a(z) & z \in ]z_a^1; z_a^\infty[ \\
(5.77h) \\
u_{a,k}^*(t) &= F_{bulk} \left( u_{h,k-1}^o(t, z_o^1), u_{h,k-1}^a(t, z_a^1) \right) & t \in [0; T] \\
(5.77i) \\
u_{o,k}^*(t) &= \lambda_u u_{a,k}^*(t) & t \in [0; T] \\
(5.77j)
\end{aligned}$$

L'optimisation de (5.77) nous semble pour l'instant hors de portée, pour les raisons évoquées aux § 5.3.2 et 5.3.3. Soulignons enfin un dernier aspect supplémentaire qui nous semble important : au niveau continu, la dépendance des viscosités turbulentes aux échelles de friction ( $u_a^*$ ) a pour conséquence qu'en théorie, l'état de la couche limite de surface a des répercussions *immédiates* sur le comportement de la solution *par d'autres moyens qu'une condition aux limites*. En particulier, cela signifie qu'il y a une transmission d'information *instantanée* entre l'état de la CLS et l'état de la solution loin de celle-ci, *via* la dépendance des viscosités turbulentes aux échelles de friction. Intuitivement, on peut s'attendre à ce qu'une fois le problème océan-atmosphère discrétisé spatialement, cet aspect exige que le traitement de la coordonnée verticale soit strictement implicite. En outre, ces considérations posent aussi des questions quant à la pertinence physique de ce modèle : comment est-il possible qu'une transmission d'informations se fasse de façon instantanée entre la surface océanique et le « plafond » de l'atmosphère (ou de façon équivalente, le fond de l'océan) ?

## 5.5 Conclusion partielle

Le § 5.1 a présenté de façon générique les problèmes multiphysiques ainsi que les algorithmes de Schwarz. Au § 5.2, le caractère insuffisant des méthodes de couplage *ad hoc* a été expliqué ; les algorithmes de Schwarz globaux en temps (ou algorithmes SWR) ont alors été introduits, ceux-ci permettant théoriquement la bonne prise en compte du couplage dans un contexte multiphysique. Le § 5.3 s'est penché sur les spécificités du problème océan-atmosphère, et notamment sur la présence de la couche limite de surface. Il a alors été montré que l'optimisation d'algorithmes SWR appliquée au contexte océan-atmosphère ne pourrait pas être entreprise directement, pour plusieurs raisons : le problème multiphysique est fortement non-linéaire, et fait intervenir des phénomènes non-locaux en temps, *via* les formulations bulk.

Ces limitations ont été mises en exergue au § 5.4, s'intéressant à la mise en place d'algorithmes de Schwarz pour le problème de couplage de couches d'Ekman. On a alors vu que les méthodes classiques pouvaient être mises en place dans un cadre théorique où la CLS serait traitée numériquement. En revanche, l'exclusion de la CLS des domaines de calcul, et sa paramétrisation subséquente, rend ce problème de couplage hors de portée en l'état, et ce malgré la structure relativement simple et bien connue du problème d'Ekman. En substance, cette limitation peut se réduire au constat suivant : *la structure mathématique des schémas de paramétrisations turbulentes utilisés dans les CLS est trop complexe pour que l'optimisation d'algorithmes de Schwarz puisse y être faite*. Mettre en place des algorithmes de Schwarz non optimisés, reposant sur des calculs de flux

explicite, est possible, mais sans aucune garantie quant à leur caractère convergent, et encore moins sur leur vitesse de convergence.

La maussaderie de ces conclusions est à nuancer : à l'image de l'étude détaillée de la CLS entreprise aux chapitres 2 et 3, l'analyse mathématique de la discrétisation du problème de couplage océan-atmosphère a permis d'en identifier les principales difficultés, ce qui constitue déjà, à notre avis, une nette avancée par rapport aux méthodes de couplage actuellement utilisées, qui ne se préoccupent tout simplement pas de ces questions. Si l'étude ici entreprise n'a pas débouché sur des réponses précises et définitives quant à l'implémentation numérique du couplage océan-atmosphère incluant les paramétrisations propres à la CLS, elle a toutefois permis d'en dégager les principaux enjeux et spécificités par rapport à l'état de l'art actuel mathématique des méthodes de couplage multiphysique. En ce sens, la recherche d'une implémentation correcte d'algorithmes de couplage permet de mettre en évidence des lacunes dans les modèles numériques actuellement utilisés, et donc de donner des pistes quant aux futurs développements à entreprendre.



# Conclusions et perspectives

L'étude mathématique des mécanismes turbulents au voisinage de la surface océan-atmosphère, et surtout de leur prise en compte dans les modèles numériques, a permis de dégager un certain nombre de résultats théoriques et pratiques qui, à notre avis, peuvent jouer le rôle de bases sur lesquelles la mise en place d'algorithmes de couplage satisfaisants pourrait se construire.

Le chapitre 2 a examiné les méthodes de paramétrisations de la couche limite de surface avec un regard mathématique. Si ce chapitre est plutôt de nature descriptive, le ton employé nous semble en lui-même novateur, dans la mesure où les études s'intéressant aux bases théoriques de la modélisation de la CLS, et surtout de sa cohérence dans le cadre de son utilisation actuelle, sont à notre connaissance excessivement rares. Le principal apport du chapitre 2 est l'*extension* des schémas de paramétrisations de la CLS, de façon à ce qu'une fois cette région exclue des domaines de calculs, elle puisse en être considérée comme un *prolongement*, et ce de façon naturelle vis-à-vis des profils de solution. Cela est assuré en faisant en sorte que ces paramétrisations permettent aux profils de solutions de vérifier certaines propriétés de régularité mathématique à l'interface entre domaines de calculs et CLS. Notre étude a notamment introduit l'extension de paramétrisations aux sous-couches visqueuses, ainsi qu'à la partie océanique de la CLS, régions auparavant purement et simplement ignorées dans les modélisations usuelles. C'est cette extension qui permet d'énoncer les conditions dites de *couplage cohérent*, qui correspondent à des propriétés mathématiques simples et courantes : continuité des valeurs à l'interface et égalité des flux turbulents au sein de la CLS. À notre avis, c'est l'enchevêtrement de paramétrisations de la CLS, souvent résultant d'une accumulation de développements successifs et relativement isolés les uns par rapport aux autres, qui explique la difficulté qu'il y a à établir *a posteriori* ces conditions qui semblent pourtant élémentaires.

La continuité des valeurs à l'interface est assurée par le dimensionnement des échelles de friction, lui-même garanti par les formulations bulks, qui font l'objet du chapitre 3. En un sens, ce chapitre clôt le précédent : on s'intéresse désormais exclusivement au dernier mécanisme numérique de fermeture des paramétrisations de la CLS. En particulier, on montre dans un premier temps que les formulations bulk dont l'usage est répandu sont mathématiquement irrégulières et parfois ambiguës, ce qui a naturellement des conséquences nocives sur la structure mathématique du couplage océan-atmosphère. Il est toutefois nécessaire de ne pas limiter le chapitre 3 à ses aspects purement techniques. L'essence de ce chapitre réside plutôt dans le fait que *construire les paramétrisations CLS de façon à ce qu'elles constituent des extensions des profils de solutions numériques a des conséquences sur leur fermeture que sont les formulations bulks*. Cette conclusion intermédiaire suit un principe global implicite que nous avons tenté de suivre au cours de notre exposé : la cohérence *globale* des paramétrisations, et plus particulièrement leur inter-compatibilité, est une condition *sine qua non* à leur utilisation.

Le chapitre 4 a considérablement étendu le domaine spatial de notre étude, en s'intéressant à

des régions traitées numériquement par les modèles océan et atmosphère, à savoir la couche limite planétaire. Nous avons choisi d'étudier ce problème d'Ekman, d'une part parce que son niveau de complexité est tel qu'il permet une étude mathématique rigoureuse tout en restant physiquement pertinent, et d'autre part parce que ce cas test, dont l'objet est l'étude de la propagation verticale de la turbulence sur une colonne de fluide soumise aux forces de Coriolis, est déjà largement traité par la littérature. En ce sens, on peut rapprocher le chapitre 4 d'études telles que celles menées par Bye (2002), Lewis et Belcher (2004), voire par Grisogono (1995) ou Parmhed *et al.* (2005), dont les objectifs ne sont pas les mêmes, mais les contexte et point de vue utilisés similaires. Le chapitre 4 peut être vu comme un prolongement naturel des trois chapitres précédents, dont l'un des principaux apports réside en la quantification numérique de l'impact des nouvelles idées introduites dans les chapitres 2 et 3. Ces deux précédents chapitres se focalisant sur la CLS, région non traitée par les domaines de calcul, définir une métrique permettant de mesurer la portée pratique des nouveautés introduites était loin d'être immédiat. En comparant des profils couplés de façon « cohérente », selon notre définition, à des profils classiques, le chapitre 4 a permis de montrer que l'impact sur les flux turbulents pouvait être important, jusqu'à 30% dans notre cas test.

Ces différences soulevées en fin de chapitre 4 sont des conséquences directes du caractère mathématiquement mal défini des schémas de paramétrisations turbulentes. Dans la terminologie de notre introduction, celui-ci constitue la première source d'erreur mathématique pour le couplage océan-atmosphère, présente dans sa formulation continue, et plus précisément nichée dans ses paramétrisations turbulentes. Le chapitre 5 se positionne en rupture par rapport aux trois chapitres précédents, et ce sur au moins deux plans : d'abord, parce qu'il ne s'intéresse plus directement aux schémas de paramétrisations turbulentes ; ensuite, parce qu'il rompt la logique d'extension spatiale qui a guidé les chapitres 2 à 4, de la CLS seule à des modèles de couches d'Ekman. Le dernier chapitre s'intéresse à la seconde source d'erreurs dans la prise en compte numérique du couplage océan-atmosphère, qui, comme on l'a précisé en introduction, est de nature algorithmique, et ne prend sens qu'une fois les modèles océan et atmosphère temporellement discrétisés.

Le chapitre 5 analyse les méthodes de couplage actuellement utilisées dans les modèles océan-atmosphère en les remplaçant dans le cadre de couplage multiphysique, bien appréhendé par la communauté des mathématiques appliquées (Gander, 2015). Cette typologie permet de qualifier les méthodes classiques dites *ad hoc* : elles peuvent être vues comme la première itération d'un algorithme de couplage itératif de Schwarz. Cette conclusion ne saurait être réduite à un simple résultat mathématique : sa portée, plus universelle, est que la nature fortement intriquée des interactions entre l'océan et de l'atmosphère (en reprenant le vocable de ce chapitre, le caractère *fortement couplé* de ce problème multiphysique) implique qu'il n'est pas possible de bien rendre compte de leurs interactions via une interface de couplage échangeant de l'information une seule fois par pas de temps (au maximum). Les méthodes *ad hoc* réalisent le couplage de façon incomplète : s'il y a bien transmission d'information entre les deux sous-modèles, leur caractère convergé, condition nécessaire à l'accord des méthodes de couplage avec le caractère fortement couplé du problème physique étudié, n'est en aucun cas garanti. C'est la seconde source d'erreur mathématique évoquée en introduction de la présente thèse.

Si les algorithmes de Schwarz globaux en temps constituent sans doute la piste la plus intéressante pour pallier ce problème, la fin du chapitre 5 montre qu'il existe un écart *considérable* entre la complexité actuelle des méthodes numériques rendant compte du couplage océan-atmosphère au sein des modèles, principalement due aux paramétrisation turbulentes, et celle de problèmes pouvant aujourd'hui être traités avec un cadre mathématique rigoureux. À titre

d'exemple, la présence de la CLS, pouvant être perçue comme une « zone tampon » d'épaisseur non-nulle entre les deux sous-modèles, empêche de circonscrire les difficultés propres au couplage océan-atmosphère à un simple caractère non-linéaire, pour lesquels, du reste, la littérature mathématique est en développement (Caetano *et al.*, 2011; Gander et Halpern, 2017). Ces limitations n'interdisent pas l'utilisation immédiate d'algorithmes de Schwarz dans le contexte océan-atmosphère ; il convient cependant de reconnaître que l'état de l'art mathématique ne permet pas d'en garantir la convergence.

Cet écart considérable entre état de l'art mathématique des méthodes de couplage et complexité de la formulation du problème océan-atmosphère amène à d'autres observations plus générales dépassant l'analyse des enjeux du chapitre 5. La fin de cette conclusion a vocation à prendre du recul par rapport à la présente thèse, en s'intéressant plus particulièrement aux rôles respectifs que, à notre avis, devraient jouer les communautés des mathématiques appliquées et des sciences du climat.

L'amélioration de la transcription numérique du couplage océan-atmosphère ne pourra se faire que suite à une étroite collaboration et à un effort d'uniformisation entre ces deux communautés. Étroite collaboration, parce que d'une part, seuls des physiciens de l'atmosphère et de l'océan disposent de l'expertise nécessaire à l'élaboration et au jugement du caractère physiquement pertinent des schémas de paramétrisations. D'autre part, seule la communauté des mathématiques appliquées dispose des outils et du savoir-faire permettant d'*analyser* les compatibilités de ces paramétrisations, une fois considérées comme un ensemble, et incluses dans des méthodes de couplage.

Effort d'uniformisation, parce que ce manuscrit de thèse recèle l'idée sous-jacente suivante, présente en filigrane dans sa quasi-intégralité : *l'amélioration des méthodes de couplage océan-atmosphère nécessite un cadre mathématique rigoureux, duquel le développement des paramétrisations s'est nettement écarté*. Si, bien entendu, l'évolution de la théorie mathématique des méthodes de couplage multiphysique sera un prérequis nécessaire au développement d'algorithmes de couplage océan-atmosphère satisfaisants, un effort de consolidation de la structure mathématique des paramétrisations physiques est inévitable. L'amélioration du couplage océan-atmosphère *ne pourra pas* se faire en restant dans une logique de « fuite en avant » consistant à compenser les insuffisances de schémas de paramétrisations en en introduisant de nouvelles ; *la problématique de couplage exige de s'intéresser à la structure même des paramétrisations, et non à leurs effets numériques seuls*. L'accent devra notamment être mis sur leur caractère auto-cohérent par rapport à leurs hypothèses fondamentales, et inter-cohérent lorsqu'utilisées en nombre.

Cet effort de restructuration se traduira sans doute momentanément par une détérioration partielle des résultats obtenus, puisque justement, l'adéquation des simulations numériques aux données mesurées constitue actuellement la principale boussole permettant de finement régler les paramétrisations (Hourdin *et al.*, 2017). Par conséquent, le développement d'algorithmes de couplage océan-atmosphère impliquera sans doute de repenser les paramétrisations et de les réadapter, ce qui devrait s'inscrire dans une temporalité plus lente que celle des développements usuels de paramétrisations. Concluons en donnant deux perspectives à long terme allant dans ce sens.

La première perspective concerne l'exclusion de la CLS des domaines de calcul, préconisée au début du chapitre 2. Celle-ci a pour conséquence incommode d'écarter la formulation du couplage océan-atmosphère du cadre formel multiphysique, en créant une « zone tampon » d'épaisseur non-nulle entre les deux sous-modèles. Réinclure la CLS au sein des domaines de

calcul est une piste à la fois intéressante et stimulante. Intéressante, parce qu'elle permettrait de se rapprocher d'une situation plus proche de problèmes mathématiquement bien traités ; stimulante, parce qu'elle nécessiterait de repenser localement, dans les régions correspondant à la CLS, les schémas de discrétisation utilisés, de façon à ce que ceux-ci soient équivalents aux paramétrisations turbulentes qui y régissent actuellement les profils de solutions. En effet, on *sait* que les discrétisations classiques sont intrinsèquement inaptes à la modélisation de la CLS : c'est justement le principal motif ayant justifié leur exclusion des domaines de calcul.

La seconde perspective concerne l'utilisation de la théorie de la similitude de Monin-Obukhov, omniprésente dans la thèse, pour obtenir les profils de solutions dans la CLS. Nous avons vu au chapitre 2 que son utilisation actuelle recelait un certain nombre d'incohérences. À notre avis, l'utilisation pratique de cet outil s'est nettement éloignée de ses bases théoriques : à titre d'exemple, les articles précurseurs concernant cette théorie reposent sur une hypothèse d'inertie totale de la surface océanique (Monin et Obukhov, 1954), ce qui n'est licite qu'à des échelles météorologiques. Il nous semble au mieux optimiste de continuer à utiliser cet outil théorique tel quel, sans en revisiter les fondements. Une autre piste, plus radicale mais aussi plus prometteuse, consisterait à construire de nouveaux schémas de paramétrisations de la CLS reposant sur d'autres hypothèses théoriques, plus adaptées au contexte fortement couplé océan-atmosphère. À notre avis, il appartiendrait alors à la communauté des sciences de l'océan et de l'atmosphère, conjointement à celle des mathématiques appliquées, de construire ces éventuels nouveaux outils théoriques. Les apprentissages contenus entre autres dans cette présente thèse pourraient être mis à contribution, afin de faire en sorte que ces outils soient plus ergonomiques vis-à-vis des méthodes mathématiques modernes de couplage multiphysique.

# Annexe A

## Détails sur les formulations bulks

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>CORE</b> . . . . .	<b>225</b>
A.1.1	Fonctionnement général . . . . .	225
A.1.2	Paramétrisation des coefficients de transfert neutres . . . . .	226
A.1.3	Lien entre l'état neutre et l'état stratifié . . . . .	227
A.1.4	Un commentaire important . . . . .	228
<b>A.2</b>	<b>Coare</b> . . . . .	<b>228</b>
A.2.1	Prise en compte de la stratification . . . . .	230
A.2.2	Paramétrisation des longueurs de rugosité . . . . .	231
A.2.3	Première estimation des échelles de friction . . . . .	231
A.2.4	Fonctionnement algorithmique . . . . .	232
<b>A.3</b>	<b>ECMWF</b> . . . . .	<b>232</b>
A.3.1	Nouvelle équation de fermeture . . . . .	234
A.3.2	Évaluation de la longueur d'Obukhov . . . . .	235
A.3.3	Paramétrisations des longueurs de rugosité . . . . .	235
A.3.4	Fonctions de stabilité . . . . .	235
A.3.5	Fonctionnement algorithmique . . . . .	236

---

Cette annexe rentre dans les détails du fonctionnement des trois formulations bulks CORE, Coare et ECMWF.

### A.1 CORE

La formulation CORE a été introduite au § 3.2.1.

#### A.1.1 Fonctionnement général

La formulation CORE repose sur une hypothèse de stratification neutre à une altitude arbitraire  $z_N$  (typiquement,  $z_N = 10$  m) ; cela correspond à supposer  $\theta_v(z_N) = \theta_{v,S_b}$ , où  $\theta_v$  est la température potentielle virtuelle. Les coefficients de transferts neutres ( $C_D^N, C_H^N, C_E^N$ ) sont définis comme fonctions explicites de  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}$  et de  $\llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1}$ , où on a noté  $\llbracket X \rrbracket_{z_1}^{z_2} := X(z_2) - X(z_1)$ .

La formulation CORE jongle entre une CLS stratifiée (la vraie CLS) et une CLS théorique, idéalisée et supposément neutre, où la modélisation des coefficients de transfert neutres est valable. Il est important de comprendre que cette CLS théorique *n'est pas la CLS physique délimitée par le dessus à un niveau différent  $z_N$* . Si c'était le cas, cela voudrait dire que cette formulation ne pourrait pas rendre compte de la stratification dans des cas où  $z_a^1 = z_N$ , ce qui est absurde. Il faut donc bien comprendre qu'en un sens, le passage entre la « vraie » CLS et la CLS idéalisée « neutre », n'est qu'un artifice numérique afin de calibrer la paramétrisation.

$\llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1}$  est directement extraite du modèle atmosphère et des données de surface.  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}$ , elle, n'est pas connue à l'avance. Elle est solution du problème suivant :

$$\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} = \sqrt{\frac{C_D}{C_D^N}} \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.1})$$

Ce problème est non-linéaire et non-trivial à résoudre, puisque  $C_D$  est inconnu, et que  $C_D^N$  dépend de  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}$ .

Si la stratification est neutre en  $z_N$ , alors paramétriser les coefficients de transferts neutres revient à paramétriser les longueurs de rugosité. En effet, appliquer (3.2) en substituant  $z_N$  à  $z_a^1$  et en réinjectant  $\zeta_a = 0$  permet de diagnostiquer  $(z_x^{a,r})_{x \in \{m, \theta, q\}}$  à partir de  $(C_X)_{X \in \{D, H, E\}}$  :

$$z_m^{a,r} = z_N \exp\left(-\frac{\kappa}{\sqrt{C_D^N}}\right) \quad (\text{A.2a})$$

$$z_\theta^{a,r} = z_N \exp\left(-\frac{\kappa \sqrt{C_D^N}}{C_H^N}\right) \quad (\text{A.2b})$$

$$z_q^{a,r} = z_N \exp\left(-\frac{\kappa \sqrt{C_D^N}}{C_E^N}\right) \quad (\text{A.2c})$$

Ainsi, d'un point de vue mathématique, paramétriser les coefficients de transfert neutres est strictement équivalent à paramétriser les longueurs de rugosité, comme le font les deux autres formulations, qui seront présentées ultérieurement.

### A.1.2 Paramétrisation des coefficients de transfert neutres

On modélise les coefficients de transferts neutres de la façon suivante :

$$C_D^N (\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}) = \frac{\alpha}{\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}} + \beta + \gamma \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \quad (\text{A.3a})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \\ \beta = 1.42 \cdot 10^{-4} \\ \gamma = 7.64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \text{ s} \end{cases}$$

$$C_H^N (\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}, \llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1}) = \chi (\llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1}) \sqrt{C_D^N (\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N})} \quad (\text{A.3b})$$

$$\text{avec } \chi \left( \llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1} \right) = \begin{cases} 0.018 & \text{en régime stable : } \llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1} \geq 0 \\ 0.0327 & \text{en régime instable : } \llbracket \theta_v \rrbracket_0^{z_a^1} < 0 \end{cases}$$

$$C_E^N \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right) = c_{e,0} \sqrt{C_D^N \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right)} \quad (\text{A.3c})$$

avec  $c_{e,0} := 0.0346$

La modélisation présentée en (A.3) est issue d'un calibrage à partir de données, qui naturellement ne peut pas être parfait. Il existe certaines configurations où sa pertinence est sujette à caution ; à titre d'exemple, lorsqu'on s'approche d'un régime de convection libre, i.e.  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \rightarrow 0$ .

(A.3a) provient d'un développement polynomial de  $u^{*2}$  en fonction de  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}$  :

$$u^{*2} = \sum_{k=0}^N a_k \left( \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right)^k \quad (\text{A.4})$$

Il est expliqué dans Large (2006) que Vera a montré en 1986 (dans un manuscrit non publié) que dans (A.4),  $(a_k)_{k \geq 4} = \bar{0}$ . On a en outre  $a_0 = 0$  ; un vent neutre nul implique par définition un  $u^*$  nul n'implique pas  $a_0 = 0$ . Il ne reste donc de (A.4) que  $(a_1, a_2, a_3)$  qui sont égaux aux  $(\alpha, \beta, \gamma)$  issus de (A.3a), puisque  $C_D^N = (u^*/u_N)^2$ . Ces coefficients sont obtenus en minimisant l'écart entre le modèle et des observations pour des sauts de vents allant de  $1 \text{ m s}^{-1}$  à plus de  $25 \text{ m s}^{-1}$ .

Enfin, remarquons que la formulation CORE est intrinsèquement discontinue par rapport à la variable d'entrée  $\llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1}$ , comme le souligne la fonction escalier  $\chi$  présente dans le calcul de  $C_H^N$ , cf. (A.3b).

### A.1.3 Lien entre l'état neutre et l'état stratifié

Si l'on suppose  $\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}$  connu, alors on peut obtenir les coefficients de transfert stratifiés (ou « non neutres »),  $(C_X)_{X \in \{D, H, E\}}$ , en réintégrant les invariants de la théorie de la similitude entre  $z_N$  et  $z_a^1$  :

$$C_D \left( \zeta_a, \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right| \right) = C_D^N \left( \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right| \right) \times \left[ 1 + \frac{\sqrt{C_D^N \left( \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right| \right)}}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_N} \right) - \psi_m \left( \zeta_a \right) \right] \right]^{-2} \quad (\text{A.5a})$$

$$C_H \left( \zeta_a, \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right|, \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \right) = C_H^N \left( \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right|, \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \right) \times \left[ 1 + \frac{\chi \left( \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \right)}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_N} \right) - \psi_h \left( \zeta_a \right) \right] \right]^{-2} \quad (\text{A.5b})$$

$$C_E \left( \zeta_a, \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right| \right) = C_E^N \left( \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N} \right| \right) \times \left[ 1 + \frac{c_{e,0}}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_N} \right) - \psi_h \left( \zeta_a \right) \right] \right]^{-2} \quad (\text{A.5c})$$

où les fonctions de stabilités  $(\psi_m, \psi_h)$  sont issues de [Högström \(1988\)](#), cf. (2.27). L'algorithme CORE repose sur un mécanisme d'itérations entre CLS neutre et CLS stratifiée. La figure A.1 représente schématiquement le comportement de cet algorithme. L'algorithme A.1 en donne une description sous forme d'étapes.

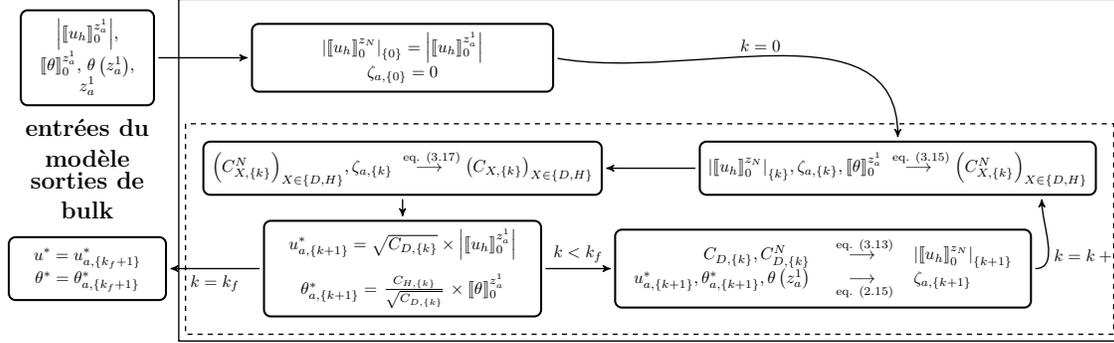


FIGURE A.1 – Représentation schématique du fonctionnement particulier de l'algorithme CORE. Ce schéma est une adaptation de la figure 3.1. On a ici supposé qu'on était en atmosphère parfaitement sèche, pour des raisons de lisibilité. D'un point de vue algorithmique, l'ajout de l'humidité se comporterait de façon très similaire à la prise en compte de la température potentielle  $\theta$ .

### A.1.4 Un commentaire important

Un paradoxe important est à souligner : le coefficient  $C_H^N$  est défini à partir de la valeur de  $\|\theta\|_0^{z_a^1}$ . Or, par définition,  $C_H^N$  correspond à un état neutre, pour lequel  $\|\theta_v\|_0^{z_a^1} = 0$ . Dans la formulation CORE, on définit d'abord  $C_H^N$  pour ensuite calculer  $C_H$ . Le paradoxe vient du fait que la définition de  $C_H^N$  dépend aussi de l'état de stabilité (ou le cas échéant, d'instabilité) de l'atmosphère au niveau  $z_a^1$ , où il n'y a aucune raison que le régime neutre règne. Numériquement,  $C_H^N$  n'est pas défini intrinsèquement : on a aussi besoin d'avoir une information sur l'état à une altitude *vers laquelle on va se ramener* pour le calculer.

Physiquement, ce paradoxe se traduit par le fait que l'hypothèse de stratification neutre à  $z = z_N$  est artificielle. La formulation CORE jongle entre une CLS stratifiée (la vraie CLS) et une CLS théorique, idéalisée et supposément neutre, où la modélisation (A.3) est valable. Il est important de comprendre que cette CLS théorique *n'est pas la CLS physique délimitée par le dessus à un niveau différent  $z_N$* . Si c'était le cas, cela voudrait dire que la formulation CORE ne pourrait pas rendre compte de la stratification dans des cas où  $z_a^1 = z_N$ , ce qui est absurde. Il faut donc bien comprendre qu'en un sens, le passage entre la « vraie » CLS et la CLS idéalisée « neutre », n'est qu'un artifice numérique afin de calibrer la modélisation (A.3). Si cette CLS idéalisée correspondait effectivement à une CLS physiquement neutre, alors la présence de  $\|\theta_v\|_0^{z_a^1}$  dans (A.3b) n'aurait aucun sens.

## A.2 Coare

La formulation Coare a été introduite au § 3.2.2.

(0) **Initialisation** : on fixe  $\zeta_{a,\{0\}} = 0$ , ce qui correspond à une stratification neutre, c'est à dire à un profil de température potentielle virtuelle constante sur la CLS. On initialise  $|\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}|_{\{0\}} = |\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}|$ . On calcule  $\chi := \chi(\llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1})$ , cf. (A.3b). On pose  $k = 0$ .

(1) **Itération**  $\{k\}$  : on calcule les coefficients de transferts neutres, cf. (A.3)

$$C_{D,\{k\}}^N = \frac{\alpha}{|\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}|_{\{k\}}} + \beta + \gamma |\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}|_{\{k\}} \quad (\text{A.6a})$$

$$C_{H,\{k\}}^N = \chi C_{D,\{k\}}^N \quad (\text{A.6b})$$

$$C_{E,\{k\}}^N = c_{e,0} C_{D,\{k\}}^N \quad (\text{A.6c})$$

(2) On en déduit les coefficients de transferts non neutres, à partir de leurs versions neutres et de  $\zeta_{a,\{k\}}$ , cf. (A.5)

$$C_{D,\{k\}} = C_{D,\{k\}}^N \times \left[ 1 + \frac{\sqrt{C_{D,\{k\}}^N}}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_N} \right) - \psi_m(\zeta_{a,\{k\}}) \right] \right]^{-2} \quad (\text{A.7a})$$

$$C_{H,\{k\}} = C_{H,\{k\}}^N \times \left[ 1 + \frac{\chi}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_N} \right) - \psi_h(\zeta_{a,\{k\}}) \right] \right]^{-2} \quad (\text{A.7b})$$

$$C_{E,\{k\}} = C_{E,\{k\}}^N \times \left[ 1 + \frac{c_{e,0}}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z_a^1}{z_N} \right) - \psi_h(\zeta_{a,\{k\}}) \right] \right]^{-2} \quad (\text{A.7c})$$

$$(\text{A.7d})$$

(3) On met à jour les échelles de friction :

$$u_{a,\{k+1\}}^* = \sqrt{C_{D,\{k\}}} \times |\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}| \quad (\text{A.8a})$$

$$\theta_{a,\{k+1\}}^* = \frac{C_{H,\{k\}}}{\sqrt{C_{D,\{k\}}}} \times \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.8b})$$

$$q_{a,\{k+1\}}^* = \frac{C_{E,\{k\}}}{\sqrt{C_{D,\{k\}}}} \times \llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.8c})$$

(4) Si la convergence est atteinte, on sort de l'algorithme en utilisant les dernières échelles de friction calculées. Sinon, on ré-évalue un nouveau saut de vent neutre (A.1), et un nouveau paramètre de stabilité (2.24) :

$$|\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_N}|_{\{k+1\}} = \sqrt{\frac{C_{D,\{k\}}}{C_{D,\{k\}}^N}} \times |\llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1}| \quad (\text{A.9a})$$

$$\zeta_{a,\{k+1\}} = g \frac{\kappa z_a^1}{(u_{a,\{k+1\}}^*)^2} \left[ \frac{\theta_{a,\{k+1\}}^*}{\theta_v} + \frac{q_{a,\{k+1\}}^*}{q + q_0} \right] \quad (\text{A.9b})$$

On pose ensuite  $k \leftrightarrow k + 1$ , et on revient au point (1).

### A.2.1 Prise en compte de la stratification

La formulation Coare s'écrit *via* des sous-coefficients de transferts  $(c_x)_{x \in \{d, h, e\}}$ , définis tels que :

$$\forall x \in \{d, h, e\}, C_X = \sqrt{c_d c_x} \quad (\text{A.10})$$

ce qui permet alors d'écrire :

$$u_a^* = \sqrt{c_d} \mathcal{U} \quad (\text{A.11a})$$

$$\theta_a^* = \sqrt{c_h} \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.11b})$$

$$q_a^* = \sqrt{c_e} \llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.11c})$$

Afin d'évaluer  $(c_x)_{x \in \{d, h, e\}}$ , on utilise des sous-coefficients de transfert neutres, liés aux sous-coefficients stratifiés par :

$$\forall x \in \{d, h, e\}, \sqrt{c_x} = \frac{\sqrt{c_x^n}}{1 - \frac{\sqrt{c_x^n}}{\kappa} \psi_y(\zeta_a)}, \text{ avec } y = \begin{cases} m & \text{si } x = d \\ h & \text{si } x \in \{h, e\} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Le couple de fonctions de stabilité utilisées est plus élaboré que (2.27). Il repose sur une formulation inspirée de [Beljaars et Holtslag \(1991\)](#) (pour la partie stable), en y accolant un régime asymptotique en  $\zeta_a^{-1/3}$  dans le cas de la limite convective ([Grachev et al., 2000](#)).

$$\psi_m(\zeta_a) = \begin{cases} (1-f)\phi_m^k(X_m^1) + f\phi^c(X_m^2) & \text{si } \zeta_a < 0 \\ -[(1+\zeta_a) + 2/3(\zeta_a - 14.28)\exp(-c) + 8.525] & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.13a})$$

$$\psi_h(\zeta_a) = \begin{cases} (1-f)\phi_h^k(X_h^1) + f\phi^c(X_h^2) & \text{si } \zeta_a < 0 \\ -[(1 + 2/3 \zeta_a)^{3/2} + 2/3(\zeta_a - 14.28)\exp(-c) + 8.525] & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.13b})$$

avec :

$$\begin{aligned} c &= \min(50, 0.35\zeta_a); & f &= \frac{\zeta_a^2}{1 + \zeta_a^2}; \\ X_m^1 &= (1 - 15\zeta_a)^{1/4}; & X_m^2 &= (1 - 10, 15\zeta_a)^{1/3}; & X_h^1 &= \sqrt{1 - 15\zeta_a} & X_h^2 &= (1 - 34, 15\zeta_a)^{1/3} \\ \phi^c(X) &= 3/2 \ln\left(\frac{1+X+X^2}{3}\right) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1+2X}{\sqrt{3}}\right) + \pi/\sqrt{3} \\ \phi_m^k(X) &= 2 \ln\left(\frac{1+X}{2}\right) + \ln\left(\frac{1+X^2}{2}\right) - 2 \arctan(X) + \pi/2 \\ \phi_h^k(X) &= 2 \ln\left(\frac{1+X}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Les sous-coefficients de transferts neutres sont eux-mêmes diagnostiqués à partir du triplet de longueurs de rugosité  $(z_x^{a,r})_{x \in \{u, \theta, q\}}$  :

$$\sqrt{c_d^n} = \frac{\kappa}{\ln(z_a^1/z_u^{a,r})} \quad (\text{A.15a})$$

$$\sqrt{c_h^n} = \frac{\kappa}{\ln(z_a^1/z_\theta^{a,r})} \quad (\text{A.15b})$$

$$\sqrt{c_e^n} = \frac{\kappa}{\ln(z_a^1/z_q^{a,r})} \quad (\text{A.15c})$$

## A.2.2 Paramétrisation des longueurs de rugosité

Il ne reste plus qu'à paramétriser les longueurs de rugosité en fonction des échelles de friction afin de pouvoir fermer le système non linéaire posé par la formulation Coare. Le choix préconisé est le suivant :

$$z_u^{a,r} = \alpha_{Ch}(\mathcal{U}) \frac{(u_a^*)^2}{g} + 0.11 \frac{v_a}{u_a^*} \quad (\text{A.16a})$$

$$z_\theta^{a,r} = \min\left(1.15 \cdot 10^{-4}, 5.5 \cdot 10^{-5} \times R_r^{-0.6}\right) \quad (\text{A.16b})$$

$$\begin{aligned} &\text{avec } R_r = z_u^{a,r} \frac{u_a^*}{v_a} \\ z_q^{a,r} &= z_\theta^{a,r} \end{aligned} \quad (\text{A.16c})$$

où  $v_a = 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  est la viscosité cinématique de l'air.  $\alpha_{Ch}(\mathcal{U})$ , sans dimension, est appelé *paramètre de Charnock*. Autrefois considéré constant ( $\alpha_{Ch} = 0.011$ , cf. [Charnock, 1955](#)), il est, dans la formulation Coare, fonction croissante et affine par morceau de  $\mathcal{U}$ , en accord avec [Johnson et al. \(1998\)](#) :

$$\alpha_{Ch} : \mathcal{U} \mapsto \begin{cases} 0.011 & \text{si } \mathcal{U} \leq u_{g,0} = 10 \text{ m s}^{-1} \\ 0.018 & \text{si } \mathcal{U} \geq u_{g,1} = 18 \text{ m s}^{-1} \\ 0.011 + 0.007 \frac{\mathcal{U} - u_{g,0}}{u_{g,1} - u_{g,0}} & \text{si } \mathcal{U} \in ]u_{g,0}; u_{g,1}[ \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Remarquons enfin que puisque les fonctions de stabilité sont les mêmes pour la température et l'humidité, (A.16c) implique que pour la formulation Coare,  $C_H = C_E$ .

## A.2.3 Première estimation des échelles de friction

L'algorithme Coare repose aussi sur une bonne première estimation (i.e., relativement proche de la valeur convergée) des échelles de friction, qui, selon [Fairall et al. \(2002\)](#), permettrait de converger avec une tolérance raisonnable en 3 itérations de point fixe seulement. Cette première estimation se fait ainsi :

(1) on pose  $z_{u,\{0\}}^{a,r} = 1.10^{-4} \text{ m}$  et  $u_{g,\{0\}} = 0.5 \text{ m s}^{-1}$ , et on calcule  $\mathcal{U}_{\{0\}} =$

$$\sqrt{\left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right|^2 + (u_{g,\{0\}})^2};$$

(2) on calcule

$$u_{10m} = \mathcal{U}_{\{0\}} \frac{\ln\left(10\text{m} / z_{u,\{0\}}^{a,r}\right)}{\ln\left(z_a^1 / z_{u,\{0\}}^{a,r}\right)} \quad (\text{A.18})$$

(3) on pose  $u_{a,\{0\}}^* = 0.035 u_{10m}$ ;

- (4) on pose  $z_{u,\{1\}}^{a,r} = \alpha \left( u_{a,\{0\}}^* \right)^2 / g + 0.11 \nu / u_{a,\{0\}}^*$  ;
- (5) on calcule  $C_{D,10} = \left[ \kappa / \ln \left( 10 / z_{u,\{1\}}^{a,r} \right) \right]^2$ ,  $C_{H,10} = 0.00115 / \sqrt{C_{D,10}}$  ;
- (6) on calcule  $z_{\theta,\{1\}}^{a,r} = 10 \exp \left( -\kappa / C_{H,10} \right)$  ;
- (7) on impose  $z_{q,\{1\}}^{a,r} = z_{\theta,\{1\}}^{a,r}$  ;
- (8) on calcule

$$C_D = \left[ \frac{\kappa}{\ln \left( z_a^1 / z_{u,\{1\}}^{a,r} \right)} \right]^2 \quad C_\theta = \frac{\kappa}{\ln \left( z_a^1 / z_{\theta,\{1\}}^{a,r} \right)} \quad (\text{A.19})$$

$$C_C = \kappa \frac{C_\theta}{C_D} = \frac{\left[ \ln \left( z_a^1 / z_{u,\{1\}}^{a,r} \right) \right]^2}{\ln \left( z_a^1 / z_{\theta,\{1\}}^{a,r} \right)}$$

- (9) on pose

$$Ri_u^c = -\frac{z_a^1}{z_i} \frac{1}{0.004 \beta^3} \quad Ri_u = \frac{g z_a^1}{\theta(z_a^1)} \left( \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} + \frac{\llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1}}{q_0} \theta(z_a^1) \right) \frac{1}{\left( \mathcal{U}_{\{0\}} \right)^2} \quad (\text{A.20})$$

- (10) on pose

$$\zeta_{a,\{1\}} = C_C Ri_u \mathcal{X} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{avec } \mathcal{X} = \begin{cases} (1 + Ri_u / Ri_u^c)^{-1} & \text{si } Ri_u > 0 \\ 1 + 3Ri_u / C_C & \text{sinon} \end{cases}$$

- (11) on calcule

$$u_{a,\{1\}}^* = \kappa \mathcal{U}_{\{0\}} \left[ \ln \left( z_a^1 / z_{u,\{1\}}^{a,r} \right) - \psi_u \left( \zeta_{a,\{1\}} \right) \right]^{-1}$$

$$\theta_{a,\{1\}}^* = \kappa \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \left[ \ln \left( z_a^1 / z_{\theta,\{1\}}^{a,r} \right) - \psi_\theta \left( \zeta_{a,\{1\}} \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.22})$$

$$q_{a,\{1\}}^* = \kappa \llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1} \left[ \ln \left( z_a^1 / z_{q,\{1\}}^{a,r} \right) - \psi_q \left( \zeta_{a,\{1\}} \right) \right]^{-1}$$

#### A.2.4 Fonctionnement algorithmique

L'algorithme de point fixe Coare fonctionne de la façon décrite par algorithme A.2. La figure A.2 offre une représentation schématique du fonctionnement de cet algorithme.

### A.3 ECMWF

La formulation ECMWF a été introduite au § 3.2.3.

(0) **Initialisation** : on effectue la première itération suivant la méthode décrite au paragraphe précédent. On en déduit  $u_{a,\{1\}}^*$ ,  $\theta_{a,\{1\}}^*$ ,  $q_{a,\{1\}}^*$ ,  $\mathcal{U}_{\{1\}}$ . On pose  $k = 1$ .

(1) **Itération**  $\{k\}$  : on calcule les longueurs de rugosité, cf. (A.16)

$$z_{u,\{k\}}^{a,r} = \alpha \left( \mathcal{U}_{\{k\}} \right) \frac{\left( u_{a,\{k\}}^* \right)^2}{g} + 0.11 \frac{v_a}{u_{a,\{k\}}^*} \quad (\text{A.23a})$$

$$z_{\theta,\{k\}}^{a,r} = \min \left( 1.15 \cdot 10^{-4}, 5.5 \cdot 10^{-5} \times R_r^{-0.6} \right) \quad (\text{A.23b})$$

$$\text{avec } R_r = z_{u,\{k\}}^{a,r} \frac{u_{a,\{k\}}^*}{v_a}$$

$$z_{q,\{k\}}^{a,r} = z_{\theta,\{k\}}^{a,r} \quad (\text{A.23c})$$

(2) On en déduit les sous-coefficients de transferts neutres, cf. (A.15) :

$$\sqrt{c_{d,\{k\}}^n} = \frac{\kappa}{\ln \left( z_a^1 / z_{u,\{k\}}^{a,r} \right)} \quad (\text{A.24a})$$

$$\sqrt{c_{h,\{k\}}^n} = \frac{\kappa}{\ln \left( z_a^1 / z_{\theta,\{k\}}^{a,r} \right)} \quad (\text{A.24b})$$

$$\sqrt{c_{e,\{k\}}^n} = \frac{\kappa}{\ln \left( z_a^1 / z_{q,\{k\}}^{a,r} \right)} \quad (\text{A.24c})$$

(3) On calcule le paramètre de stabilité, cf. (2.24) :

$$\zeta_{a,\{k\}} = g \frac{\kappa z_a^1}{\left( u_{a,\{k\}}^* \right)^2} \left[ \frac{\theta_{a,\{k\}}^*}{\theta_v} + \frac{q_{a,\{k\}}^*}{q + q_0} \right] \quad (\text{A.25})$$

(4) On en déduit les sous-coefficients de transfert, cf. (A.12) :

$$\sqrt{c_{x,\{k\}}} = \frac{\sqrt{c_{x,\{k\}}^n}}{1 - \frac{\sqrt{c_{x,\{k\}}^n}}{\kappa} \psi_x \left( \zeta_{a,\{k\}} \right)} \quad (\text{A.26})$$

(5) On met à jour les échelles de friction, cf. (A.11)

$$u_{a,\{k+1\}}^* = \sqrt{c_{d,\{k\}}} \left| \llbracket u_h \rrbracket_0^{z_a^1} \right| \quad (\text{A.27a})$$

$$\theta_{a,\{k+1\}}^* = \sqrt{c_{h,\{k\}}} \llbracket \theta \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.27b})$$

$$q_{a,\{k+1\}}^* = \sqrt{c_{e,\{k\}}} \llbracket q \rrbracket_0^{z_a^1} \quad (\text{A.27c})$$

(6) Si on a atteint convergence, on sort de l'algorithme en utilisant les dernières échelles de friction calculées. Sinon, on ré-évalue un nouveau vent de rafale (3.16) et un nouveau vent gonflé (3.14), à l'aide des nouvelles échelles de friction  $\left( \mathbf{x}_{a,\{k+1\}}^* \right)$ . On pose ensuite  $k \leftrightarrow k + 1$ , et on revient au point (1).

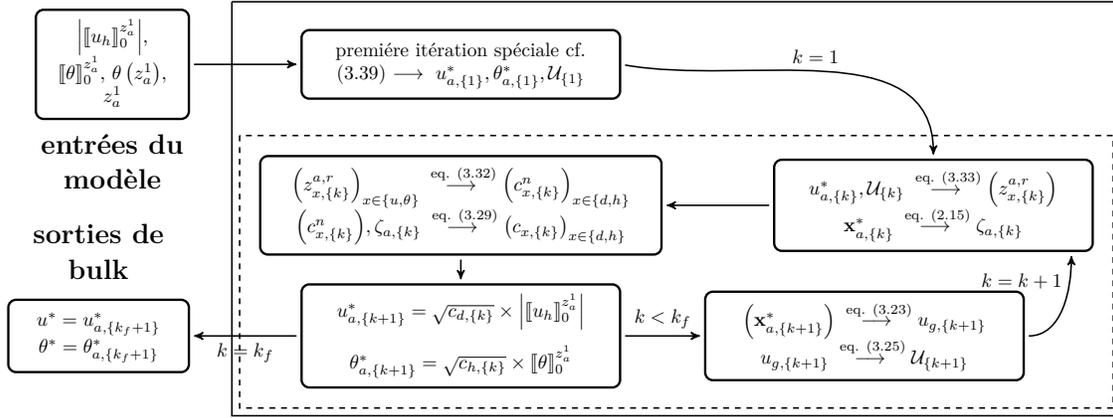


FIGURE A.2 – Représentation schématique du fonctionnement particulier de l'algorithme Coare. Ce schéma est une adaptation de la figure 3.1. On a ici supposé qu'on était en atmosphère parfaitement sèche, pour des raisons de lisibilité. D'un point de vue algorithmique, l'ajout de l'humidité se comporterait de façon très similaire à la prise en compte de la température potentielle  $\theta$ .

### A.3.1 Nouvelle équation de fermeture

Comme toutes les autres formulations bulk, la formulation ECMWF repose sur une hypothèse de fermeture déduite de l'intégration de groupes sans dimension, eux-mêmes issus de la théorie de la similitude de Monin-Obukhov, cf. (2.26). Le système d'équations de fermeture de la formulation ECMWF est le suivant :

$$C_D = \frac{(u_a^*)^2}{\left| \left[ \left[ u_h \right]_0^{z_a^1} \right]^2 \right.} = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]^2} \quad (\text{A.28a})$$

$$C_H = \frac{u_a^* \theta_a^*}{\left| \left[ \left[ u_h \right]_0^{z_a^1} \right] \left[ \left[ \theta \right]_0^{z_a^1} \right] \right.} = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) \right] \left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_\theta^{a,r}}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]} \quad (\text{A.28b})$$

$$C_E = \frac{u_a^* q_a^*}{\left| \left[ \left[ u_h \right]_0^{z_a^1} \right] \left[ \left[ q \right]_0^{z_a^1} \right] \right.} = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) \right] \left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_q^{a,r}}{z_q^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_q^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_q^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]} \quad (\text{A.28c})$$

où  $L_O^a$  est la longueur d'Obukhov dans le milieu atmosphère, définie par (2.21). Les membres de droite de (A.28) correspondent à des intégrations des profils de solution sur les intervalles  $]z_x^{a,r}, z_x^{a,r} + z_a^1[$  ; ainsi, ils font intervenir deux évaluations des fonctions de stabilité : en  $z_x^{a,r} / L_O^a$  (très près de la surface), et en  $(z_x^{a,r} + z_a^1) / L_O^a$ .

Dans le cas d'une CLSA au-dessus d'une surface océanique, on aura toujours  $z_x^{a,r} \ll L_O^a$ ,  $z_a^1$ . Les formulations précédentes revenaient à considérer :

$$\left[ z_x^{a,r} / L_O^a \ll 1 \right] \Rightarrow \begin{cases} \phi_x \left( z_x^{a,r} / L_O^a \right) \ll 1 \\ \phi_x \left( (z_x^{a,r} + z_a^1) / L_O^a \right) \approx \phi_x \left( z_a^1 / L_O^a \right) \end{cases}, \quad x \in \{u, \theta, q\} \quad (\text{A.29})$$

Cette approximation est raisonnable dans le cas d'une CLSA au-dessus de l'océan. Dans le cas d'une CLS au-dessus d'une surface continentale terrestre (et aussi, dans une moindre mesure, au-dessus de la glace), on peut avoir  $z_x^{a,r} \lesssim z_a^1$ . Dans ce type de contexte, (3.2) n'est plus justifiée. La formulation ECMWF préconise la forme (A.28) parce qu'elle a vocation à être universelle; cette forme peut être utilisée au-dessus de tous les types de surface (continent, mer, glace). En revanche, les formulations CORE et Coare sont utilisées au-dessus des océans seulement.

### A.3.2 Évaluation de la longueur d'Obukhov

La longueur d'Obukhov est dépendante des échelles de friction. La formulation ECMWF l'évalue *via* le nombre de Richardson bulk  $Ri_b$  :

$$Ri_b = \frac{g z_a^1}{\mathcal{U}^2} \frac{[\theta_v]_0^{z_a^1}}{\theta_v(z_a^1)} \quad (\text{A.30})$$

où  $\mathcal{U}$  est défini par (3.14), qui fait intervenir  $u_a^*$ . On peut en outre lier le paramètre de stabilité  $\zeta_a = z_a^1/L_O^a$  par la formule suivante :

$$Ri_b = \zeta_a \frac{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]} \quad (\text{A.31})$$

Injecter (A.30) dans (A.31), en se rappelant que  $\zeta_a = z_a^1/L_O^a$ , permet d'obtenir une évaluation de  $L_O^a$ , qui est utilisée dans l'algorithme itératif pour la prise en compte de la stratification :

$$L_O^a = \frac{\theta_v(z_a^1)}{[\theta_v]_0^{z_a^1}} \frac{\mathcal{U}^2}{g} \frac{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_\theta^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_\theta^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{z_u^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_u^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]} \quad (\text{A.32})$$

### A.3.3 Paramétrisations des longueurs de rugosité

Les longueurs de rugosité  $(z_x^{a,r})_{x \in \{d,h,e\}}$  dépendent des échelles de friction ainsi :

$$z_u^{a,r} = \alpha_u \frac{v_a}{u_a^*} + \alpha_{Ch} \frac{(u_a^*)^2}{g} \quad (\text{A.33a})$$

$$z_\theta^{a,r} = \alpha_\theta \frac{v_a}{u_a^*} \quad (\text{A.33b})$$

$$z_q^{a,r} = \alpha_q \frac{v_a}{u_a^*} \quad (\text{A.33c})$$

où on a  $\alpha_u = 0.11$ ,  $\alpha_\theta = 0.40$  et  $\alpha_q = 0.62$  (cf. [Brutsaert, 2013](#)).  $\alpha_{Ch}$  est le paramètre de Charnock : contrairement à l'algorithme Coare, on le suppose ici constant,  $\alpha_{Ch} = 0.018$ . Remarquons que contrairement à la formulation Coare, on a ici  $z_q^{a,r} \neq z_\theta^{a,r}$ .

### A.3.4 Fonctions de stabilité

La formulation ECMWF préconise ce choix pour les fonctions intégrées de stabilité :

$$\psi_m(\zeta) = \begin{cases} 2 \ln \left( \frac{1+Y}{2} \right) + \ln \left( \frac{1+Y^2}{2} \right) - 2 \text{Arctan}(Y) + \frac{\pi}{2}, & \zeta < 0 \\ -b \left( \zeta - \frac{c}{d} \right) \exp(-d\zeta) - a\zeta - \frac{bc}{d}, & \zeta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.34a})$$

$$\psi_h(\zeta) = \begin{cases} 2\ln\left(\frac{1+Y}{2}\right), & \zeta < 0 \\ -b\left(\zeta - \frac{c}{d}\right)\exp(-d\zeta) - \left(1 + \frac{2}{3}a\zeta\right)^{3/2} - \frac{bc}{d} + 1, & \zeta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.34b})$$

où  $Y = (1 - 16\zeta)^{1/4}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2/3$ ,  $c = 5$  et  $d = 0.35$ . Ces fonctions diffèrent de celles utilisées dans les routines Coare pour les régimes stables seulement. (A.34) utilise une formulation inspirée de [Holtslag et De Bruin \(1988\)](#), à laquelle est greffé un régime asymptotique pour  $\zeta \gg 1$ .

### A.3.5 Fonctionnement algorithmique

L'algorithme A.3 décrit le fonctionnement de l'algorithme itératif ECMWF. La figure A.3 en donne une représentation schématique.

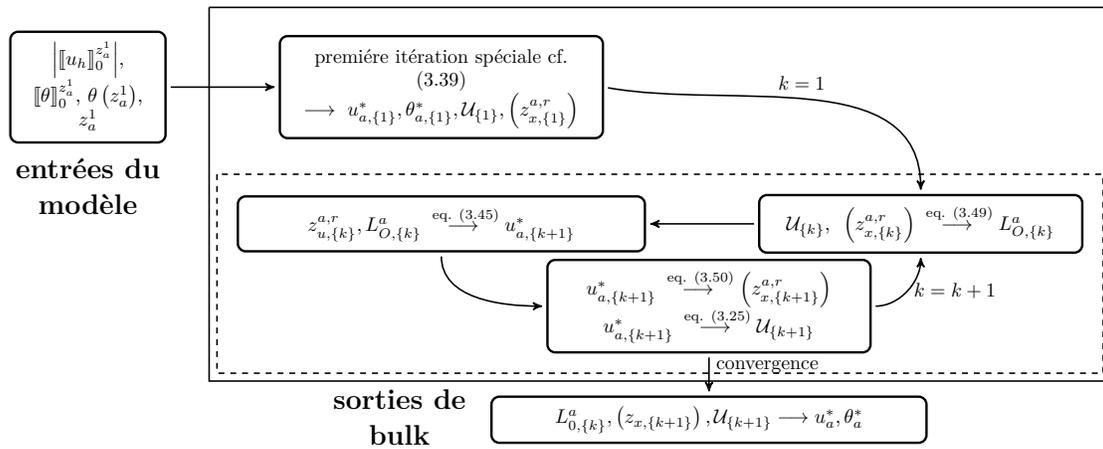


FIGURE A.3 – Représentation schématique du fonctionnement particulier de l'algorithme ECMWF. Ce schéma est une adaptation de la figure 3.1. On a ici supposé qu'on était en atmosphère parfaitement sèche, pour des raisons de lisibilité. D'un point de vue algorithmique, l'ajout de l'humidité se comporterait de façon très similaire à la prise en compte de la température potentielle  $\theta$ .

(0) **Initialisation** : on effectue la première itération suivant la même méthode que pour l'algorithme Coare. On en déduit  $u_{a,\{1\}}^*$ ,  $\theta_{a,\{1\}}^*$ ,  $q_{a,\{1\}}^*$ ,  $\mathcal{U}_{\{1\}}$  et  $(z_{x,\{1\}}^{a,r})$ . On pose  $k = 1$ .

(1) **Itération**  $\{k\}$  : on calcule la longueur d'Obukhov à l'aide de (A.32) :

$$L_{O,\{k\}}^a = \frac{\theta_v(z_a^1) \mathcal{U}_{\{k\}}^2}{\llbracket \theta_v \rrbracket_0^1 z_a^1} \frac{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_{u,\{k\}}^{a,r}}{z_{\theta,\{k\}}^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_{u,\{k\}}^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_{\theta,\{k\}}^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_{u,\{k\}}^{a,r}}{z_{u,\{k\}}^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_{u,\{k\}}^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_{u,\{k\}}^{a,r}}{L_O^a} \right) \right]} \quad (\text{A.35})$$

(2) On met  $u_a^*$  à jour, cf. (A.28)

$$u_{a,\{k+1\}}^* = \frac{\kappa}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_{u,\{k\}}^{a,r}}{z_{u,\{k\}}^{a,r}} \right) - \psi_m \left( \frac{z_a^1 + z_{u,\{k\}}^{a,r}}{L_{O,\{k\}}^a} \right) + \psi_m \left( \frac{z_{u,\{k\}}^{a,r}}{L_{O,\{k\}}^a} \right) \right]} \quad (\text{A.36})$$

(3) À partir de cette nouvelle échelle  $u_{a,\{k+1\}}^*$ , on effectue un nouveau diagnostic des longueurs de rugosité :

$$z_{x,\{k+1\}}^{a,r} = z_x^{a,r} \left( u_{a,\{k+1\}}^* \right) \quad (\text{A.37})$$

On met aussi à jour le vent avec rafales :

$$\mathcal{U}_{\{k+1\}} = \mathcal{U} \left( u_{a,\{k+1\}}^* \right) \quad (\text{A.38})$$

Si on n'a pas atteint convergence, on revient au point (1).

(4) On appelle  $k_f$  la valeur prise par  $k$  lors de la dernière itération. Les échelles de friction sont évaluées ainsi :

$$u_a^* = u_{a,\{k_f+1\}}^* \quad (\text{A.39a})$$

$$\theta_a^* = \frac{\kappa}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_{\theta,\{k_f+1\}}^{a,r}}{z_{\theta,\{k_f+1\}}^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_{\theta,\{k_f+1\}}^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_{\theta,\{k_f+1\}}^{a,r}}{L_{O,\{k_f\}}^a} \right) \right]} \llbracket \theta \rrbracket_0^1 z_a^1 \quad (\text{A.39b})$$

$$q_a^* = \frac{\kappa}{\left[ \ln \left( \frac{z_a^1 + z_{q,\{k_f+1\}}^{a,r}}{z_{q,\{k_f+1\}}^{a,r}} \right) - \psi_h \left( \frac{z_a^1 + z_{q,\{k_f+1\}}^{a,r}}{L_O^a} \right) + \psi_h \left( \frac{z_{q,\{k_f+1\}}^{a,r}}{L_{O,\{k_f\}}^a} \right) \right]} \llbracket q \rrbracket_0^1 z_a^1 \quad (\text{A.39c})$$

ALGORITHME A.3 – Algorithme bulk ECMWF. L'indice  $\{k\}$  dénote les itérations de point fixe.



## Annexe B

# Détails sur les solutions exactes de problèmes d'Ekman

### Sommaire

---

<b>B.1 Viscosité quadratique</b> . . . . .	239
<b>B.2 Viscosité cubique</b> . . . . .	242
<b>B.3 Absence de force de Coriolis</b> . . . . .	246
B.3.1 Solutions monodomaines . . . . .	247
B.3.2 Couplage de couches d'Ekman stationnaire en absence de force de Coriolis	248

---

Cette annexe rentre dans les détails des calculs de solutions exactes des problèmes d'Ekman dans le cadre de viscosités polynomiales quadratique (annexe B.1), cubique (annexe B.2) et dans le cas singulier  $f = 0$  (annexe B.3).

On rappelle qu'on cherche à résoudre le problème (4.14), i.e. :

$$\partial_z (\nu_\alpha \partial_z u_h) - i f u_h = -i f u_g, \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \quad (\text{B.1a})$$

$$u_h = u_g^\alpha, \quad z = z_\alpha^\infty \quad (\text{B.1b})$$

$$\partial_z u_h = \frac{u_\alpha^*}{\kappa |z_\alpha^1|} e^{i\theta\tau}, \quad z = z_\alpha^1 \quad (\text{B.1c})$$

### B.1 Viscosité quadratique

On suppose que  $\nu_\alpha$  est donnée par :

$$\nu_\alpha(z) = \sum_{i=0}^2 p_i z^i \quad (\text{B.2})$$

où  $(p_i)_{0 \leq i \leq 2} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $p_2 \neq 0$ , et que  $\forall z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ ,  $\nu_\alpha(z) > 0$ .

L'équation homogène associée à (B.1a) est :

$$\left( \sum_{i=0}^2 p_i z^i \right) \partial_{zz}^2 u_h + \left( \sum_{i=0}^1 (i+1) p_{i+1} z^{i+1} \right) \partial_z u_h - \iota f u_h = 0 \quad (\text{B.3})$$

On rappelle qu'on cherche à trouver un changement de variable  $\eta : z \mapsto \eta(z)$ , ainsi qu'un jeu de coefficients  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ , tels que (B.3) soit équivalente à l'équation différentielle hypergéométrique suivante :

$$\eta(1-\eta) \frac{d^2 w}{d\eta^2} + [c - (a+b+1)\eta] \frac{dw}{d\eta} - abw = 0 \quad (\text{B.4})$$

On cherche  $\eta$  comme fonction affine de  $z$ . Par identification, on trouve :

$$\eta(z) = \eta_1 z + \eta_0 \quad (\text{B.5a})$$

$$\eta_1 = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 - \frac{p_0}{p_2} \right]^{-1/2} & \text{si } \frac{1}{4} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 - \frac{p_0}{p_2} \geq 0 \\ \pm \frac{i}{2} \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 + \frac{p_0}{p_2} \right]^{-1/2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.5b})$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_1}{p_2} \eta_1 + 1 \right] \quad (\text{B.5c})$$

$$(\text{B.5d})$$

On supposera dans la suite que le polynôme (4.24) possède deux racines réelles distinctes. Rappelons qu'on a imposé, pour des raisons physiques,  $v_\alpha(z) > 0$ ; ainsi, ces racines sont dans  $\mathbb{R} \setminus (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ . Dans notre contexte de modélisation de couche d'Ekman, cette hypothèse est raisonnable, puisqu'on raccorde la viscosité turbulente avec la viscosité moléculaire aux bords du domaine, i.e.  $v_\alpha(z_\alpha^\infty) = v_\alpha^m \ll 1$ . Si  $v'_\alpha(z_\alpha^\infty) = 0$ , alors  $(v_\alpha(z) - v_\alpha^m) \propto (z - z_\alpha^\infty)^2$ , ce qui impliquerait  $v_\alpha(z_\alpha^1) \gg 1$ , puisque  $|z_\alpha^1| \ll |z_\alpha^\infty|$ . Or, physiquement,  $v_\alpha(z_\alpha^1)$  n'est jamais très grand. Ainsi, on a  $v'_\alpha(z_\alpha^\infty) \neq 0$ , et puisque  $v_\alpha(z_\alpha^\infty) \gtrsim 0$ , on aura  $v_\alpha(z_\alpha^\infty + \varepsilon) = 0$ , où  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$  et est du signe de  $z_\alpha^\infty$ . Si  $v_\alpha$  est suffisamment régulière, alors puisque  $v'_\alpha(z_\alpha^\infty) \neq 0$ , on aura  $v'_\alpha(z_\alpha^\infty + \varepsilon) \neq 0$ . Ainsi,  $z_\alpha^\infty + \varepsilon$  est une racine réelle simple de  $v_\alpha$ . Puisque (4.24) est à coefficients réels, alors l'autre racine de ce polynôme est elle aussi réelle.

On sera donc dans le premier cas de (B.5b). Le choix du signe  $\pm$  donne deux possibilités de changement de variable  $\eta_+$  et  $\eta_-$ , liés par la relation  $\eta_+ = 1 - \eta_-$ . On choisit dans (B.5b) le même signe que celui de  $z$ . On peut montrer qu'avec ce choix, dans le cas où  $v_\alpha$  a deux racines réelles distinctes, ce qui a été justifié ci-dessus, alors on obtient  $\eta(z) \in ]0; 1[$ ,  $z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty)$ . En outre,  $\eta$  est une fonction croissante de  $|z|$ . Ainsi, l'hypothèse de racines réelles distinctes sur le polynôme (4.24), couplé à ce choix de changement de variable, permet d'obtenir la nouvelle variable  $\eta$  sur le disque ouvert de convergence de la série utilisée pour définir  ${}_2F_1$  dans (4.25).

On peut montrer qu'un jeu de coefficients  $(a, b, c)$  permettant de se ramener à (4.14) est défini par :

$$a \text{ est l'une des racines du polynôme } X^2 - X - \frac{f}{p_2} \quad (\text{B.6a})$$

$$b = 1 - a \quad (\text{B.6b})$$

$$c = 1 \quad (\text{B.6c})$$

Le choix de la racine dans (B.6a) est sans importance, puisque sans incidence sur la solution (cela est dû à des propriétés algébriques de la fonction hypergéométrique). On note qu'on a toujours  $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

On a donc trouvé un changement de variable  $z \mapsto \eta$ , ainsi qu'un triplet  $(a, b, c)$ , tels que l'équation homogène associée à (4.14) soit équivalente à (4.27). On a en outre justifié que dans notre cas, on aura toujours  $\eta \in ]0; 1[$ . Ainsi, *a priori*, ce sont les solutions de (4.27) au voisinage des singularités  $\eta = 0$  et  $\eta = 1$  qui généreront des solutions satisfaisantes. Dans la suite, on utilisera les solutions au voisinage de  $\eta = 0$ ; utiliser les solutions au voisinage de  $\eta = 1$  revient à considérer la même équation en posant  $\eta' = 1 - \eta$ , ce qui correspondait au choix écarté pour  $\eta$  dans (B.5), et en ajustant conséquemment les coefficients  $(a, b, c)$ .

Ainsi,  $G_1 : z \mapsto {}_2F_1(a, b; c; \eta_0 + \eta_1 z)$  est l'une des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (4.14), avec une viscosité donnée par (4.24). Sans rentrer dans les détails, le fait que  $c = 1 \in \mathbb{N}^*$  implique que la seconde solution linéairement indépendante de cette équation, au voisinage de  $\eta = 0$ , est donnée à l'aide du développement suivant (Olver, 2010) :

$$G_2(a, b; c; \eta) = {}_2F_1(a, b; c; \eta) \ln \eta - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} [\psi_{\Gamma}(a+k) + \psi_{\Gamma}(b+k) - \psi_{\Gamma}(1+k) - \psi_{\Gamma}(c+k)] \eta^k \quad (\text{B.7})$$

$(\cdot)_k$  est toujours le symbole de Pochhammer (ou factorielle ascendante), et  $\psi_{\Gamma}$ , appelée *fonction digamma*, est la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$  :

$$\psi_{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-^* \quad (\text{B.8})$$

Remarquons que  $c \in \mathbb{N}^*$  implique que dans (B.7), les  $(c)_k$  ne s'annulent jamais, et  $\psi_{\Gamma}(c+k)$  est toujours bien définie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En outre,  $(a, b) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$  garantit que  $\psi_{\Gamma}(a+k)$  et  $\psi_{\Gamma}(b+k)$  sont toujours bien définies pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

La solution à l'équation non homogène (B.1a) est une combinaison linéaire des fonctions  $(G_i)_{i \in \{1,2\}}$ , les coefficients étant déterminés grâce aux conditions aux limites. On aura donc :

$$u_h^{\alpha}(z) = u_g^{\alpha} + u_{\alpha}^* [A_2^{\alpha} {}_2F_1(a, b; c; \eta_0 + \eta_1 z) + B_2^{\alpha} G_2(a, b; c; \eta_0 + \eta_1 z)] \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$A_2^{\alpha} = \frac{1}{\eta_1 \kappa |z_{\alpha}^1|} \left[ {}_2F_1'(a, b; ; c; \eta_0 + \eta_1 z_{\alpha}^1) - \mathcal{R}_2 G_2'(a, b; c; \eta_0 + \eta_1 z_{\alpha}^1) \right]^{-1} \quad (\text{B.10a})$$

$$B_2^{\alpha} = -\mathcal{R}_2 A_2^{\alpha} \quad (\text{B.10b})$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{{}_2F_1(a, b; ; c; \eta_0 + \eta_1 z_{\alpha}^{\infty})}{G_2(\eta_0 + \eta_1 z_{\alpha}^{\infty})} \quad (\text{B.10c})$$

où, dans (B.10a), les dérivations sont effectuées par rapport à la variable  $\eta$ , en utilisant les identités suivantes :

$${}_2F_1'(a, b; c; \eta) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; \eta) \quad (\text{B.11a})$$

$$G_2'(a, b; ; c; \eta) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; \eta) \ln \eta + \frac{{}_2F_1(a, b; c; \eta)}{\eta}$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (k-1)!} [\psi_{\Gamma}(a+k) + \psi_{\Gamma}(b+k) - \psi_{\Gamma}(1+k) - \psi_{\Gamma}(c+k)] \eta^{k-1} \quad (\text{B.11b})$$

où on rappelle que  $|\eta| < 1$ , ce qui permet la dérivation terme par terme de la série dans (B.11b).

## B.2 Viscosité cubique

On suppose que  $\nu_{\alpha}$  est donnée par :

$$\nu_{\alpha}(z) = \sum_{i=0}^3 p_i z^i \quad (\text{B.12})$$

où  $(p_i)_{0 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^4$  tel que  $p_3 \neq 0$ , et que  $\forall z \in (z_{\alpha}^1; z_{\alpha}^{\infty})$ ,  $\nu_{\alpha}(z) > 0$ .

L'équation homogène associée à (B.1a) est :

$$\left( \sum_{i=0}^3 p_i z^i \right) \partial_{zz}^2 u_h + \left( \sum_{i=0}^2 (i+1) p_{i+1} z^{i+1} \right) \partial_z u_h - \iota f u_h = 0 \quad (\text{B.13})$$

On rappelle qu'on cherche à trouver un changement de variable  $\eta : z \mapsto \eta(z)$ , ainsi qu'un jeu de coefficients  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, a, q) \in \mathbb{C}^7$ , tels que (B.13) soit équivalente à l'équation différentielle suivante, appelée équation de Heun :

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + \left( \frac{\gamma}{\eta} + \frac{\delta}{\eta-1} + \frac{\varepsilon}{\eta-a} \right) \frac{dw}{d\eta} + \frac{\alpha\beta\eta - q}{\eta(\eta-1)(\eta-a)} w = 0 \quad (\text{B.14})$$

où la contrainte  $\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \varepsilon$  est exigée.

Appelons  $(r_i)_{0 \leq i \leq 2} \in \mathbb{C}^3$  les trois racines de (4.33). On peut par exemple choisir :

$$\eta(z) = \eta_0 + \eta_1 z \quad (\text{B.15a})$$

$$\text{avec } \eta_0 = -\frac{r_0}{r_1 - r_0} \quad (\text{B.15b})$$

$$\eta_1 = \frac{1}{r_1 - r_0} \quad (\text{B.15c})$$

Ce choix permet d'obtenir  $\eta(r_0) = 0$  et  $\eta(r_1) = 1$ . On pose donc, comme convenu :

$$a = \eta_0 + \eta_1 r_2 \quad (\text{B.16})$$

L'hypothèse de polynôme à racines simples implique que  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Il s'agit alors d'ajuster les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, q)$  pour que (4.34) soit équivalente au problème homogène associé à (4.14) avec la viscosité (4.33). On trouve :

$$\gamma = \frac{b_0}{a} \quad (\text{B.17a})$$

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^2 b_k}{1-a} \quad (\text{B.17b})$$

$$\varepsilon = \frac{\sum_{k=0}^2 b_k a^k}{a(1-a)} \quad (\text{B.17c})$$

$$q = \frac{f}{\eta_1^2} t \quad (\text{B.17d})$$

$$\beta = 0 \quad (\text{B.17e})$$

$$\alpha = \gamma + \delta + \varepsilon - 1 \quad (\text{B.17f})$$

où on a défini les coefficients  $(b_j)_{0 \leq j \leq 2}$  ainsi :

$$b_0 = \frac{\eta_1^2}{p_3} \left[ p_1 - 2p_2 \frac{\eta_0}{\eta_1} + 3p_3 \left( \frac{\eta_0}{\eta_1} \right)^2 \right] \quad (\text{B.18a})$$

$$b_1 = \frac{\eta_1}{p_3} \left[ 2p_2 - 6p_3 \frac{\eta_0}{\eta_1} \right] \quad (\text{B.18b})$$

$$b_2 = 3 \quad (\text{B.18c})$$

Les trois premières équations de (B.17) mettent bien en exergue que  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  est nécessaire, ce qui explique pourquoi (4.33) a été supposé scindé à racines simples.

Résoudre le problème homogène d'Ekman est ainsi équivalent à résoudre (4.34), avec le choix (B.15) pour  $\eta(z)$ , et les paramètres de l'équation de Heun donnés par (B.16) et (B.17). Au voisinage de la singularité  $\eta = 0$ , si  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$  (ce qu'on suppose vrai), une solution à (4.34) est donnée par le développement en série entière suivant :

$$H\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \eta^j, \quad |\eta| < 1. \quad (\text{B.19})$$

où  $(c_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est définie ainsi :

$$c_0 = 1 \quad (\text{B.20a})$$

$$c_1 = \frac{q}{a\gamma} \quad (\text{B.20b})$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad c_{j+1} = \frac{(Q_j + q)c_j - P_j c_{j-1}}{R_j} \quad (\text{B.20c})$$

$$\text{où } P_j = (j-1+\alpha)(j-1+\beta) \quad (\text{B.20d})$$

$$Q_j = j[(j-1+\gamma)(1+a) + a\gamma + \varepsilon] \quad (\text{B.20e})$$

$$R_j = a(j+1)(j+\gamma) \quad (\text{B.20f})$$

Dans le cas où en plus,  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$  (ce qui, vu la condition précédente, implique  $\gamma \notin \mathbb{Z}$ ), la seconde solution linéairement indépendante de (B.19) est donnée par :

$$\eta^{1-\gamma} H_2\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta) \quad (\text{B.21})$$

où

$$H_2\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta) = H\ell(a, (a\delta + \varepsilon)(1-\gamma) + q; \alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, \delta; \eta) \quad (\text{B.22})$$

Ce n'est pas le cas ici. On a systématiquement  $\gamma = 1$ . Il s'agit alors de mettre en place la stratégie développée dans le §2.7(i) de <http://dlmf.nist.gov/2.7#i>. En réutilisant leurs notations :

$$w'' + fw' + gw = 0 \quad (\text{B.23})$$

on a :

$$f(z) = \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} = \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^{s-1} \quad (\text{B.24a})$$

$$g(z) = \frac{-q}{z(z-1)(z-a)} = \sum_{s=0}^{\infty} g_s z^{s-2} \quad (\text{B.24b})$$

on a exploité le fait que  $\alpha\beta a = 0$ . On trouve les développements ( $f_s$ ) et ( $g_s$ ) en faisant un développement de Laurent des  $f$  et  $g$  donnés par (B.24) :

$$f_0 = \gamma = 1 \quad (\text{B.25a})$$

$$f_s = -\delta - \frac{\varepsilon}{a^s} \quad s \geq 1 \quad (\text{B.25b})$$

$$g_0 = 0 \quad (\text{B.25c})$$

$$g_1 = -\frac{q}{a} \quad (\text{B.25d})$$

$$g_s = -\frac{\alpha\beta - q}{1-a} - \frac{\alpha\beta - \frac{q}{a}}{a(a-1)} \frac{1}{a^{s-2}} \quad s \geq 2 \quad (\text{B.25e})$$

L'équation indiciale est :

$$Q(X) = X(X-1) + \gamma X = 0 \quad (\text{B.26})$$

on voit bien que dans le cas où  $\gamma = 1$ , on a  $Q(X) = X^2$  et donc une solution unique double  $X = 0$ . La première solution est donnée par (B.19). La seconde solution est donnée par le développement logarithmique suivant :

$$w_2(z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s z^s + w_1(z) \ln z \quad (\text{B.27})$$

où les coefficients ( $b_s$ ) $_{s \geq 1}$  sont à déterminer en réinjectant  $w_2$  dans l'équation (B.23). Les calculs sont fastidieux :

$$w_2''(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)(s+2)b_{s+2}z^s + 2 \overbrace{\sum_{s=-1}^{\infty} (s+2)c_{s+2}z^s}^{w_1'(z)/z} - \underbrace{\sum_{s=-2}^{\infty} c_{s+2}z^s}_{w_1/z^2} + \cancel{w_1'' \ln z} \quad (\text{B.28a})$$

$$f(z)w_2'(z) = \left( \sum_{s=-1}^{\infty} f_{s+1}z^s \right) \left[ \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)b_{s+1}z^s + \overbrace{\sum_{s=-1}^{\infty} c_{s+1}z^s}^{w_1/z} + \cancel{w_1' \ln z} \right] \quad (\text{B.28b})$$

$$g(z)w_2(z) = \left( \sum_{s=-2}^{\infty} g_{s+2}z^s \right) \left( \sum_{s=1}^{\infty} b_s z^s + w_1 \ln z \right) \quad (\text{B.28c})$$

où les termes en  $\ln z$  se simplifient, puisque  $w_1$  est solution de (B.23). On regroupe les produits de sommes infinies de (B.28b) et de (B.28c) par puissance de  $z$ , pour identification. On trouve :

$$\left( \sum_{s=-1}^{\infty} f_{s+1}z^s \right) \left( \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)b_{s+1}z^s \right) = \sum_{s=-1}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^{s+1} (s+2-r)f_{s+r+1}b_{s+2-r} \right) z^s \quad (\text{B.29a})$$

$$\left( \sum_{s=-1}^{\infty} f_{s+1}z^s \right) \left( \sum_{s=-1}^{\infty} c_{s+1}z^s \right) = \sum_{s=-2}^{\infty} \left( \sum_{r=-1}^{s+1} f_{r+1}c_{s+1-r} \right) z^s \quad (\text{B.29b})$$

$$\left( \sum_{s=-2}^{\infty} g_{s+2}z^s \right) \left( \sum_{s=1}^{\infty} b_s z^s \right) = \sum_{s=-1}^{\infty} \left( \sum_{r=-2}^{s-1} g_{r+2}b_{s-r} \right) z^s \quad (\text{B.29c})$$

On identifie alors par puissance de  $s$ , en distinguant  $s = -2$ ,  $s = -1$  ou  $s \geq 0$ . Les termes en  $s = -2$  donnent  $-c_0 + f_0c_0 = 0$ , ce qui dans notre cas est une tautologie<sup>1</sup> puisque  $f_0 = \gamma = 1$ .

$s = -1$  donne :

$$c_1 + f_0c_1 + f_1c_0 + b_1(f_0 + g_0) \quad (\text{B.30})$$

On obtient donc :

$$b_1 = -\frac{c_1 + f_0c_1 + f_1c_0}{f_0 + g_0} \quad (\text{B.31})$$

La condition  $f_0 + g_0 \neq 0$  doit être respectée. C'est le cas ici puisque  $f_0 = 1$  et  $g_0 = 0$ . Ensuite, les termes en  $s \geq 0$  donnent :

$$\begin{aligned} & (s+1)(s+2)b_{s+2} + (2s+3)c_{s+2} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(\text{B.29a})} \\ & + b_{s+2}(s+2)f_{s+1} + \sum_{r=1}^{s+1} (s+2-r)f_{s+r+1}b_{s+2-r} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(\text{B.29b})} \\ & + \sum_{r=-1}^{s+1} f_{r+1}c_{s+1-r} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(\text{B.29c})} \\ & + b_{s+2}g_0 + \sum_{r=-1}^{s-1} g_{r+2}b_{s-r} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

On en déduit donc, pour  $s \geq 0$ ,  $b_{s+2}$  à partir de la connaissance des  $(b_j)_{1 \leq j \leq s+1}$  (et en réarrangeant les sommes) :

---

1. Ce qui est plutôt confortant.

$$b_{s+2} = \frac{(2s+3)c_{s+2} + \sum_{r=-1}^{s+1} f_{r+1}c_{s+1-r} + \sum_{r=1}^{s+1} (rf_{2s+3-r} + g_{s-r+2})b_r}{(s+2)(s+1+f_{s+1}) + g_0} \quad (\text{B.33})$$

Pour que (B.33) ait du sens, la condition  $(s+2)(s+1+f_{s+1}) + g_0 \neq 0$  doit être respectée. Rappelons que dans notre cas,  $g_0 = 0$ . Cette condition de non-nullité est donc équivalente à  $s + f_s \neq 0$  pour  $s \geq 1$ . Dans notre cas, les  $(f_s)_{s \geq 1}$  sont donnés par (B.25b). La condition s'écrit donc :

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, s - \delta - \frac{\varepsilon}{a^s} \neq 0 \quad (\text{B.34})$$

Si toutes les hypothèses énoncées plus haut sont vérifiées, on obtient alors la solution suivante pour la problème (4.14) avec la viscosité (4.33) :

$$u_h(z) = u_\alpha^* + [A_3^\alpha H\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta_0 + \eta_1 z) + B_3^\alpha w_2(\eta_0 + \eta_1 z)] u_\alpha^* \quad (\text{B.35})$$

où :

$$A_3^\alpha = \frac{1}{\eta_1 \kappa |z_\alpha^1|} \left[ H\ell'(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta_0 + \eta_1 z_\alpha^1) - \mathcal{R}_3 \left[ (1-\gamma) (\eta_0 + \eta_1 z_\alpha^1)^{-\gamma} H_2\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta_0 + \eta_1 z_\alpha^1) + (\eta_0 + \eta_1 z_\alpha^1)^{1-\gamma} H_2\ell'(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta_0 + \eta_1 z_\alpha^1) \right] \right]^{-1} \quad (\text{B.36a})$$

$$B_3^\alpha = -\mathcal{R}_3 A_3^\alpha \quad (\text{B.36b})$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{H\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta_0 + \eta_1 z_\alpha^\infty)}{(\eta_0 + \eta_1 z_\alpha^\infty)^{1-\gamma} H_2\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \eta_0 + \eta_1 z_\alpha^\infty)} \quad (\text{B.36c})$$

Cette étude reste à finir, nos principales difficultés résidant dans l'implémentation numérique du système (B.36), extrêmement sensible aux erreurs d'arrondis, selon nos premiers tests.

### B.3 Absence de force de Coriolis

De façon générale, les résultats obtenus au § 4.2 ne s'appliquent pas directement au cas  $f = 0$ . Dans un souci d'exhaustivité, cette annexe vise à donner des solutions analytiques au problème d'Ekman stationnaire (B.1) dans ce cas. Physiquement, celui-ci correspond à une colonne verticale océan-atmosphère se situant exactement au niveau de l'équateur. C'est un cas singulier pour (B.1a), qui prend alors la simple forme d'un invariant :

$$\partial_z (v_\alpha \partial_z u_h) = 0 \quad (\text{B.37})$$

Soulignons aussi que les évaluations de  $\left( h_{pbl}^\alpha \right)_{\alpha \in \{0, a\}}$  déduites de (4.12) ne sont plus définies pour  $f = 0$ . Il devient donc nécessaire de fixer les hauteurs de couche limite de façon arbitraire.

La condition de bord en  $z = z_\alpha^1$ , en exploitant  $v_\alpha(z_\alpha^1) = \kappa u_\alpha^* |z_\alpha^1|$ , donne la valeur de l'invariant (B.37). On aura alors :

$$\partial_z u_h = (u_\alpha^*)^2 e^{i\theta\tau} \frac{1}{v_\alpha(z)}, \quad z \in (z_\alpha^1, z_\alpha^\infty) \quad (\text{B.38})$$

### B.3.1 Solutions monodomaines

La solution se trouve en intégrant sur  $(z; z_a^\infty)$  :

$$u_h(z) = u_g^\alpha - (u_a^*)^2 e^{i\theta\tau} \int_z^{z_a^\infty} \frac{dz}{v_a(z)} \quad (\text{B.39})$$

Le tableau B.1 donne les résultats littéraux pour les formes de viscosités turbulentes introduites précédemment (du § 4.2.2 au § 4.2.4), sur la couche limite planétaire atmosphérique.

Forme pour $v_a$		$\int_z^{z_a^\infty} \frac{dz}{v_a(z)}$
Degré	Expression	
0	$v_a^m$	$\frac{z_a^\infty - z}{v_a^m}$
1	$p_0 + p_1 z$ avec $p_1 \neq 0$	$\frac{1}{p_1} \ln \left( \frac{p_0 + p_1 z_a^\infty}{p_0 + p_1 z} \right)$
2	$A(z - r_0)(z - r_1)$ , où $(A, r_0, r_1) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $r_0 \neq r_1$	$\frac{1}{A(r_0 - r_1)} \left[ \ln \left( \frac{z_a^\infty - r_1}{z - r_1} \right) - \ln \left( \frac{z_a^\infty - r_0}{z - r_0} \right) \right]$
	$A(z - r_0)^2$ , où $(A, r_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$\frac{1}{A} \left[ \frac{1}{z - r_0} - \frac{1}{z_a^\infty - r_0} \right]$
	$A \left[ (z - b)^2 + a^2 \right]$ avec $(A, a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R}$	$\frac{1}{aA} \left[ \text{Arctan} \left( \frac{z_a^\infty - b}{a} \right) - \text{Arctan} \left( \frac{z - b}{a} \right) \right]$

TABLEAU B.1 – Solutions pour le problème d'Ekman atmosphérique avec des viscosités turbulentes polynomiales de degré compris entre 0 et 2, dans le cas où  $f = 0$ . Résultats issus de (B.39).

À titre d'exemple, le profil de viscosité  $P_2$  défini par les contraintes (4.29) peut se réécrire :

$$v_a(z) = \sum_{k=0}^2 p_k (z - z_a^1)^k \quad (\text{B.40a})$$

$$\text{avec } p_0 = \kappa u_a^* z_a^1 \quad (\text{B.40b})$$

$$p_1 = \kappa u_a^* \quad (\text{B.40c})$$

$$p_2 = \frac{1}{z_a^\infty - z_a^1} \left[ \frac{v_a^m - \kappa u_a^* z_a^1}{z_a^\infty - z_a^1} - \kappa u_a^* \right] \quad (\text{B.40d})$$

qui est un polynôme de degré 2 de la variable  $z - z_a^1$ . La valeur de l'intégrale extraite du tableau B.1 dépend des valeurs relatives des paramètres  $v_a^m$  et  $u_a^*$ , qui conditionnent le discriminant  $\delta_2$  du polynôme (B.40a) :

$$\delta_2 = \kappa u_a^* \left[ \kappa u_a^* - 4 \frac{v_a^m}{z_a^1} X^2 + 4X\kappa u_a^* (1 + X) \right] \quad (\text{B.41})$$

où  $X = z_a^1 / (z_a^\infty - z_a^1)$ . Trois régimes sont possibles, suivant la valeur de  $v_a^m$  par rapport à une valeur critique  $v_a^{m,c}$  :

$$v_a^{m,c} = \frac{\kappa u_a^* z_a^1}{4X^2} [1 + 4X(1 + X)] \quad (\text{B.42})$$

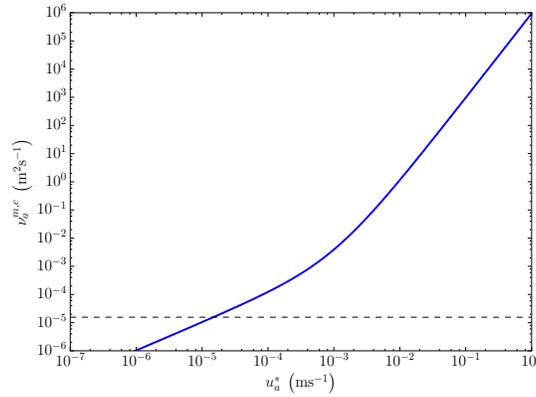


FIGURE B.1 – En bleu,  $v_a^{m,c} : u_a^* \mapsto v_a^{m,c}(u_a^*)$  telle que définie par (B.42), avec  $z_a^\infty = \frac{c_2 u_a^*}{f_{30^\circ}}$ . En noir pointillé, valeur physiquement réaliste pour  $v_a^m$  à 25°C.

La figure B.1 représente  $v_a^{m,c} : u_a^* \mapsto v_a^{m,c}(u_a^*)$  dans le cas où  $z_a^\infty = z_a^\infty(u_a^*) = \frac{c_2 u_a^*}{f}$ , toujours pour le paramètre de Coriolis  $f$  pris à la latitude 30°. De façon générale, on a toujours  $u_a^* \gg 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ . Ainsi, l'interprétation de la figure B.1 rend raisonnable l'hypothèse  $v_a^m < v_a^{m,c}$ . On sera alors dans le premier cas décrit par le tableau B.1 pour des polynômes de degré 2, avec

$$(r_i)_{i \in \{0,1\}} = -\frac{\kappa u_a^* \mp \sqrt{\delta_2}}{2p_2} \quad (\text{B.43a})$$

$$A = p_2 \quad (\text{B.43b})$$

### B.3.2 Couplage de couches d'Ekman stationnaire en absence de force de Coriolis

Un cas polynomial de degré 3 physiquement réaliste est donné par la paramétrisation suivante pour  $(v_\alpha)_{\alpha \in \{0,a\}}$  :

$$v_\alpha(u_\alpha^*, z) = \frac{c_2 \kappa u_\alpha^{*2}}{f} G[\sigma_\alpha(z)] + v_\alpha^m \quad (\text{B.44})$$

où  $\sigma_\alpha : z \mapsto \frac{f|z|}{c_2 u_\alpha^*}$ , et on utilise toujours  $f = f_{30^\circ} \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . On trouve alors cette expression pour la solution :

$$u_h(z) = u_g^\alpha \mp \frac{u_\alpha^*}{\kappa} \left[ p_0^\alpha \ln \left[ \frac{1 - r_\alpha}{\sigma_\alpha(z) - r_\alpha} \right] - \frac{p_0^\alpha}{2} \ln \left[ \frac{-1 - r_\alpha - \sigma_\alpha^m / r_\alpha}{[\sigma_\alpha(z)]^2 - 2\sigma_\alpha^i \sigma_\alpha(z) - \sigma_\alpha^m / r_\alpha} \right] \right. \\ \left. + \frac{p_1^\alpha}{\sigma_\alpha^d} \left( \text{Arctan} \left( \frac{1 - \sigma_\alpha^i}{\sigma_\alpha^d} \right) - \text{Arctan} \left( \frac{\sigma_\alpha(z) - \sigma_\alpha^i}{\sigma_\alpha^d} \right) \right) \right] \quad z \in (z_\alpha^1; z_\alpha^\infty) \\ \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{B.45})$$

où le signe  $\pm$  est positif dans l'océan, négatif dans l'atmosphère, et :

$$\sigma_\alpha^m = \frac{f}{c_2 \kappa u_\alpha^* 2} v_\alpha^m \quad (\text{B.46a})$$

$$r_\alpha = \frac{2}{3} \left[ 1 - \cosh \left[ \frac{1}{3} \text{Acosh} \left( 1 + \frac{27}{2} \sigma_\alpha^m \right) \right] \right] \quad (\text{B.46b})$$

$$\sigma_\alpha^i = 1 - \frac{r_\alpha}{2} \quad (\text{B.46c})$$

$$\sigma_\alpha^d = \sqrt{\frac{3}{4} r_\alpha^2 - r_\alpha} \quad (\text{B.46d})$$

$$p_0^\alpha = \left[ 3r_\alpha^2 - 4r_\alpha + 1 \right]^{-1} \quad (\text{B.46e})$$

$$p_1^\alpha = 2p_0^\alpha(1 - r_\alpha) - p_0^\alpha \sigma_\alpha^i \quad (\text{B.46f})$$

Toutes ces constantes sont bien définies dès lors que  $v_\alpha^m, u_\alpha^* > 0$ ; en particulier, on aura toujours  $r_\alpha < 0$ .

On peut alors extraire  $\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1}$  de la solution exacte (B.45), en l'évaluant aux points  $(z_\alpha^1)_{\alpha \in \{o, a\}}$  :

$$\llbracket u_h \rrbracket_{z_0^1}^{z_a^1} = \llbracket u_h \rrbracket_{z_0^\infty}^{z_a^\infty} - \sum_{\alpha \in \{o, a\}} \left( \frac{u_\alpha^*}{\kappa} \left[ p_0^\alpha \ln \left[ \frac{1 - r_\alpha}{\sigma_\alpha^1 - r_\alpha} \right] - \frac{p_0^\alpha}{2} \ln \left[ \frac{-1 - r_\alpha - \sigma_\alpha^m / r_\alpha}{(\sigma_\alpha^1)^2 - 2\sigma_\alpha^i \sigma_\alpha^1 - \sigma_\alpha^m / r_\alpha} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p_1^\alpha}{\sigma_\alpha^d} \left( \text{Arctan} \left( \frac{1 - \sigma_\alpha^i}{\sigma_\alpha^d} \right) - \text{Arctan} \left( \frac{\sigma_\alpha^1 - \sigma_\alpha^i}{\sigma_\alpha^d} \right) \right) \right] \right) \quad (\text{B.47})$$

où on a défini  $\sigma_\alpha^1 = \sigma_\alpha(z_\alpha^1) = \frac{f|z_\alpha^1|}{c_2 u_\alpha^*}$ , pour  $\alpha \in \{o, a\}$ .



## Annexe C

# Optimisation d'algorithmes SWR pour le problème d'Ekman

### Sommaire

---

C.1	Solution exacte au problème de couches d'Ekman couplé . . . . .	251
C.2	Contraintes de la condition de compatibilité sur $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$ . . . . .	252
C.3	Solutions exactes du système d'erreur et taux de convergence . . . . .	254
C.3.1	Conditions de transmission Robin-Robin . . . . .	254
C.3.2	Conditions de transmission Dirichlet-Neumann . . . . .	255

---

Cette annexe rentre dans certains détails de calculs menés au § 5.4.1.

### C.1 Solution exacte au problème de couches d'Ekman couplé

On s'intéresse au problème (5.57), qu'on recopie ici :

$$i(f + \omega) \widehat{u_{h,\varphi}^\alpha} - \partial_z \left( v_\alpha \partial_z \widehat{u_{h,\varphi}^\alpha} \right) = u_{init}^\alpha(z) - u_g^\alpha(z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.1a})$$

$$\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha}(\omega, z = z_\alpha^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1b})$$

$$\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha}(\omega, z = 0) = \widehat{u_{h,\Gamma}^\alpha}(\omega) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1c})$$

La solution exacte à (C.1) est :

$$\widehat{u_{h,\varphi}^\alpha}(\omega) = A_\alpha(\omega, z) f_1^\alpha(\omega, z) + B_\alpha(\omega, z) f_2^\alpha(\omega, z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.2a})$$

$$\text{avec } f_1^\alpha(\omega, z) = I_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f + \omega}{(\kappa u_{\alpha,v}^*)^2}} v_\alpha(z) \right) \quad (\text{C.2b})$$

$$f_2^\alpha(\omega, z) = K_0 \left( 2\chi \sqrt{\frac{f + \omega}{(\kappa u_{\alpha,v}^*)^2}} v_\alpha(z) \right) \quad (\text{C.2c})$$

où on rappelle que  $\chi = e^{i\frac{\pi}{4}}$ , et que  $I_0$  et  $K_0$  sont les fonctions modifiées de Bessel de première espèce. On étend les racines carrées de (C.2) aux cas où  $f + \omega < 0$  en posant  $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$  pour  $x < 0$ . Dans (C.2), la dépendance des fonctions  $(\omega, z) \mapsto A_\alpha(\omega, z)$  et  $(\omega, z) \mapsto B_\alpha(\omega, z)$  en  $z$  est due au fait que l'on résout un problème non homogène ; si le système couplé avait été initialisé sur l'état géostrophique, alors  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  n'auraient dépendu que de  $\omega$ . Intéressons-nous d'abord à la dépendance de ces fonctions en  $z$ . On a, par méthode de variation de la constante :

$$\partial_z A_\alpha(\omega, z) = \frac{f_2^\alpha(\omega, z)}{f_1^\alpha(\omega, z) \partial_z f_2^\alpha(\omega, z) - \partial_z f_1^\alpha(\omega, z) f_2^\alpha(\omega, z)} \frac{u_{init}^\alpha(z) - u_g^\alpha(z)}{\nu_\alpha(z)} = s_a^\alpha(\omega, z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.3a})$$

$$\partial_z B_\alpha(\omega, z) = -\frac{f_1^\alpha(\omega, z)}{f_1^\alpha(\omega, z) \partial_z f_2^\alpha(\omega, z) - \partial_z f_1^\alpha(\omega, z) f_2^\alpha(\omega, z)} \frac{u_{init}^\alpha(z) - u_g^\alpha(z)}{\nu_\alpha(z)} = s_b^\alpha(\omega, z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.3b})$$

Sous réserve que (C.3) décrit bien des fonctions intégrables par rapport à la variable  $z$  sur  $(0; z_\alpha^\infty)$ , ce qu'on supposera vrai, on aura :

$$A_\alpha(\omega, z) = \int_0^z s_a^\alpha(\omega, \eta) d\eta + a_\alpha(\omega) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.4a})$$

$$B_\alpha(\omega, z) = \int_0^z s_b^\alpha(\omega, \eta) d\eta + b_\alpha(\omega) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.4b})$$

où  $(a_\alpha, b_\alpha) \in [\omega \mapsto \mathbb{C}]^2$  sont les deux derniers degrés de liberté, déterminés de façon à satisfaire (C.1b) et (C.1c). De façon très schématique, on aura alors :

$$A_\alpha(\omega, z) = \int_0^z s_a^\alpha(\omega, \eta) d\eta + g_\alpha^1 \left( \widetilde{u_{h,\Gamma}^\alpha}(\omega) \right) \quad (\text{C.5a})$$

$$B_\alpha(\omega, z) = \int_0^z s_b^\alpha(\omega, \eta) d\eta + g_\alpha^2 \left( \widetilde{u_{h,\Gamma}^\alpha}(\omega) \right) \quad (\text{C.5b})$$

où  $(g_\alpha^1, g_\alpha^2)$  sont explicitement connues en réinjectant (C.4) dans (C.1b) et (C.1c).

## C.2 Contraintes de la condition de compatibilité sur $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$

On cherche à optimiser un algorithme de type « Schwarz à relaxation d'onde », tel que présenté au § 5.2.3, au problème d'Ekman sans CLS (5.51), qu'on recopie ici :

$$\partial_t u_{h,\varphi}^o + i f u_{h,\varphi}^o - \partial_z \left( \nu_o \partial_z u_{h,\varphi}^o \right) = i f u_g^o(z) \quad (t, z) \in [0; T] \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.6a})$$

$$u_{h,\varphi}^o(t, z_o^\infty) = u_g^o(z_o^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (\text{C.6b})$$

$$u_{h,\varphi}^o(t = 0, z) = u_{init}^o(z) \quad z \in ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.6c})$$

$$\partial_t u_{h,\varphi}^a + i f u_{h,\varphi}^a - \partial_z \left( \nu_a \partial_z u_{h,\varphi}^a \right) = i f u_g^a(z) \quad (t, z) \in [0; T] \times ]0; z_a^\infty[ \quad (\text{C.6d})$$

$$u_{h,\varphi}^a(t, z_a^\infty) = u_g^a(z_a^\infty) \quad t \in [0; T] \quad (\text{C.6e})$$

$$u_{h,\varphi}^a(t = 0, z) = u_{init}^a(z) \quad z \in ]0; z_a^\infty[ \quad (\text{C.6f})$$

$$u_{h,\varphi}^a(t, 0^-) = u_{h,\varphi}^a(t, 0^+) \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{C.6g})$$

(C.6h)

L'écriture de l'algorithme de Schwarz est la suivante (cf. (5.63)) :

$$\partial_t \widetilde{u}_{h,k}^\alpha + \iota f \widetilde{u}_{h,k}^\alpha - \partial_z \left( \nu_\alpha \partial_z \widetilde{u}_{h,k}^\alpha \right) = 0 \quad (t, z) \in [0; T] \times (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.7a})$$

$$\widetilde{u}_{h,k}^\alpha(t, z_\alpha^\infty) = 0 \quad t \in [0; T] \quad (\text{C.7b})$$

$$\widetilde{u}_{h,k}^\alpha(t = 0, z) = u_{h,init}^\alpha(z) - u_g^\alpha(z) \quad z \in (0; z_\alpha^\infty) \quad (\text{C.7c})$$

$$\mathcal{B}_{\alpha,\alpha} \widetilde{u}_{h,k}^\alpha(t, 0) = \mathcal{B}_{\alpha,-\alpha} \widetilde{u}_{h,k-1}^\alpha(t, 0) \quad t \in [0; T] \quad (\text{C.7d})$$

(C.7e)

où on suppose que les opérateurs  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$  sont de type Robin-Robin :

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta} = \widetilde{p}_{\alpha,\beta} \partial_z + \widetilde{q}_{\alpha,\beta} \gamma_{\Gamma_\alpha} \quad (\alpha, \beta) \in \{o, a\}^2 \quad (\text{C.8})$$

où  $\gamma_{\Gamma_\alpha}$  symbolise l'opérateur trace unilatéral sur  $\Gamma_\alpha = \{z = 0^\pm\}$ . Dans (C.8),  $(\widetilde{p}_{\alpha,\beta}, \widetilde{q}_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta) \in \{o,a\}^2} \in \mathbb{C}^8$  est un jeu de huit paramètres, constituant les degrés de liberté permettant l'optimisation des  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$ .

Il semble raisonnable de supposer que pour  $\alpha \in \{o, a\}$ ,  $\widetilde{q}_{\alpha,-\alpha} \neq 0$ ; intuitivement, cela revient à dire que les sous-modèles communiquent des informations sur leurs *valeurs* à la surface, et pas seulement leurs gradients. On peut, par conséquent, normaliser les coefficients  $(\widetilde{p}_{\alpha,\beta}, \widetilde{q}_{\alpha,\beta})$  ainsi :

$$p_{\alpha,\beta} = \frac{\widetilde{p}_{\alpha,\beta}}{\widetilde{q}_{\alpha,-\alpha}} \quad (\alpha, \beta) \in \{o, a\}^2 \quad (\text{C.9a})$$

$$q_{\alpha,\alpha} = \frac{\widetilde{q}_{\alpha,\alpha}}{\widetilde{q}_{\alpha,-\alpha}} \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{C.9b})$$

$$q_{\alpha,-\alpha} = 1 \quad \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{C.9c})$$

Et définir les opérateurs  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$  en réécrivant (C.8) avec les coefficients normalisés (C.9). Il reste donc 6 degrés de liberté :  $(p_{\alpha,\beta})$ , pour  $(\alpha, \beta) \in \{o, a\}^2$ , et  $(q_{\alpha,\alpha})$ , pour  $\alpha \in \{o, a\}$ .

La condition de compatibilité s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} p_{o,o} \partial_z u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) + q_{o,o} u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) = p_{o,a} \partial_z u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) + u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) \\ p_{a,o} \partial_z u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) + u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) = p_{a,a} \partial_z u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) + q_{a,a} u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) = u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) \\ \partial_z u_{h,\varphi}^o(t, z = 0^-) = \lambda_u \partial_z u_{h,\varphi}^a(t, z = 0^+) \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

dans (C.10), on a bien équivalence, parce que l'ajout d'une seconde condition de couplage permet d'obtenir un problème bien posé. (C.10) impose les 4 contraintes suivantes sur les coefficients :

$$p_{o,a} p_{a,o} - p_{a,a} p_{o,o} = 0 \quad (\text{C.11a})$$

$$1 - q_{o,o} q_{a,a} = 0 \quad (\text{C.11b})$$

$$q_{o,o} p_{a,o} - p_{o,o} = p_{a,o} - q_{a,a} p_{o,o} \quad (\text{C.11c})$$

$$p_{o,a} - p_{a,a} q_{o,o} = \lambda_u (p_{o,o} - p_{a,o} q_{o,o}) \quad (\text{C.11d})$$

On s'attend donc à ce que les conditions de compatibilité laissent 2 degrés de liberté dans le choix des coefficients  $(p_{\alpha,\beta})$  et  $q_{\alpha,-\alpha}$ . On peut montrer que (C.11) est satisfait dès que :

$$q_{o,o} = 1 \quad (\text{C.12a})$$

$$q_{a,a} = 1 \quad (\text{C.12b})$$

$$p_{o,a} = \lambda_u p_{o,o} \quad (\text{C.12c})$$

$$p_{a,a} = \lambda_u p_{a,o} \quad (\text{C.12d})$$

Ainsi, la condition de compatibilité des opérateurs de transmission  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$  restreint le choix des 6 coefficients au seul couple  $(p_{o,a}, p_{a,a})$ , qu'on nommera dans la suite plus simplement  $(p_o, p_a) \in \mathbb{C}^2$ . Les autres coefficients peuvent être entièrement déterminés<sup>1</sup> à partir de (C.12). Injecter (C.12) dans (C.8) permet d'obtenir une écriture simplifiée pour les  $(\mathcal{B}_{\alpha,\beta})$  :

$$\mathcal{B}_{o,o} = p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_o} \quad (\text{C.13a})$$

$$\mathcal{B}_{o,a} = \lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a} \quad (\text{C.13b})$$

$$\mathcal{B}_{a,a} = \lambda_u p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_a} \quad (\text{C.13c})$$

$$\mathcal{B}_{a,o} = p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o} \quad (\text{C.13d})$$

### C.3 Solutions exactes du système d'erreur et taux de convergence

On s'intéresse au système d'erreur d'un algorithme de Schwarz pour coupler deux couches d'Ekman, selon qu'on utilise des conditions de transmission de type Robin-Robin (avec deux degrés de liberté), ou de type Dirichlet-Neumann (sans degré de liberté).

#### C.3.1 Conditions de transmission Robin-Robin

La solution exacte à (5.66) est :

$$\widehat{e}_k^o(\omega, z, p_o) = S_o(\omega, z, p_o) \times (\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) \widehat{e}_{k-1}^a(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.14a})$$

$$\widehat{e}_k^a(\omega, z, p_a) = S_a(\omega, z, p_a) \times (p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) \widehat{e}_{k-1}^o(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]0; z_a^\infty[ \quad (\text{C.14b})$$

où :

$$S_\alpha(\omega, z, p_\alpha) = R_{1,\alpha}(\omega, p_\alpha) f_1^\alpha(\omega, z) + R_{2,\alpha}(\omega, p_\alpha) f_2^\alpha(\omega, z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty), \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{C.15})$$

où les  $(f_j^\alpha)_{j \in \{1,2\}, \alpha \in \{o,a\}}$  sont données par (C.2b) et (C.2c), et où, pour  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $j \in \{1,2\}$  :

$$\frac{1}{R_{j,o}(\omega, p_o)} = f_j^o(\omega, 0) + p_o \partial_z f_j^o(\omega, 0) - \frac{f_j^o(\omega, z_o^\infty)}{f_{-j}^o(\omega, z_o^\infty)} \left[ f_{-j}^o(\omega, 0) + p_o \partial_z f_{-j}^o(\omega, 0) \right] \quad (\text{C.16a})$$

$$\frac{1}{R_{j,a}(\omega, p_a)} = f_j^a(\omega, 0) + \lambda_u p_a \partial_z f_j^a(\omega, 0) - \frac{f_j^a(\omega, z_a^\infty)}{f_{-j}^a(\omega, z_a^\infty)} \left[ f_{-j}^a(\omega, 0) + \lambda_u p_a \partial_z f_{-j}^a(\omega, 0) \right] \quad (\text{C.16b})$$

1. À deux constantes multiplicatives près, sans incidence sur la solution ; ces degrés de liberté superflus ont été levés par la normalisation (C.9).

Intéressons-nous maintenant au taux de convergence :

$$\rho_k^\alpha(\omega, p_\alpha) = \left| \frac{\widehat{e}_k^\alpha(\omega, 0, p_\alpha)}{\widehat{e}_{k-2}^\alpha(\omega, 0, p_\alpha)} \right| \quad (\text{C.17})$$

On peut exploiter (C.14) pour exprimer  $\widehat{e}_k^\alpha$  en fonction de  $\widehat{e}_{k-2}^\alpha$ , pour  $\alpha \in \{o, a\}$  :

$$\widehat{e}_k^o(\omega, z, p_\alpha) = S_o(\omega, z, p_o) \times [(\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) S_a(\omega, 0^+, p_a)] \times [p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}] \widehat{e}_{k-2}^o(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.18a})$$

$$\widehat{e}_k^a(\omega, z, p_\alpha) = S_a(\omega, z, p_a) \times [(p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) S_o(\omega, 0^-, p_o)] \times [\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}] \widehat{e}_{k-2}^a(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]0; z_a^\infty[ \quad (\text{C.18b})$$

Une dernière manipulation est nécessaire sur (C.18), afin d'exprimer les gradients  $\partial_z \widehat{e}_k^\alpha$  en fonction de la solution elle-même. (C.14) implique :

$$\partial_z \widehat{e}_k^\alpha(\omega, z, p_\alpha) = \frac{\partial_z S_\alpha(\omega, z, p_\alpha)}{S_\alpha(\omega, z, p_\alpha)} \widehat{e}_k^\alpha(\omega, z, p_\alpha) \quad (\text{C.19})$$

Réévaluer (C.18) en  $z = 0$ , et en exploitant (C.19), permet d'obtenir :

$$\rho_k^\alpha(\omega, p_\alpha) = [(\lambda_u p_o \partial_z + \gamma_{\Gamma_a}) S_a(\omega, 0^+, p_a)] \times [(p_a \partial_z + \gamma_{\Gamma_o}) S_o(\omega, 0^-, p_o)] \quad \omega \in \mathbb{R}, \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{C.20})$$

### C.3.2 Conditions de transmission Dirichlet-Neumann

On s'intéresse au couplage de couches d'Ekman par un algorithme de Schwarz reposant sur des conditions Dirichlet-Neumann : on impose à l'atmosphère une condition de Dirichlet, et à l'océan une condition de Neumann, à l'image de ce qui est préconisé par Liu *et al.* (2009). Dans l'espace de Fourier, le système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par  $\widehat{e}_{k,dn}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{o, a\}$ , est le suivant, obtenu par analogie à (5.66) :

$$i(f + \omega) \widehat{e}_{k,dn}^o - \partial_z (v_o \partial_z \widehat{e}_{k,dn}^o) = 0 \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.21a})$$

$$\widehat{e}_{k,dn}^o(\omega, z = z_o^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{C.21b})$$

$$\partial_z \widehat{e}_{k,dn}^o(\omega, z = 0^-) = \lambda_u \partial_z \widehat{e}_{k-1,dn}^a(\omega, z = 0^+) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{C.21c})$$

$$i(f + \omega) \widehat{e}_{k,dn}^a - \partial_z (v_a \partial_z \widehat{e}_{k,dn}^a) = 0 \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_a^\infty) \quad (\text{C.21d})$$

$$\widehat{e}_{k,dn}^a(\omega, z = z_a^\infty) = 0 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{C.21e})$$

$$\widehat{e}_{k,dn}^a(\omega, z = 0^+) = \widehat{e}_{k-1,dn}^o(\omega, z = 0^-) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{C.21f})$$

Par analogie à (C.14), (C.15) et (C.16), on obtient :

$$\widehat{e}_{k,dn}^o(\omega, z) = S_o^{dn}(\omega, z) \times \lambda_u \partial_z \widehat{e}_{k-1,dn}^a(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.22a})$$

$$\widehat{e}_{k,dn}^a(\omega, z) = S_a^{dn}(\omega, z) \times \widehat{e}_{k-1,dn}^o(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]0; z_a^\infty[ \quad (\text{C.22b})$$

où :

$$S_a^{dn}(\omega, z, p_\alpha) = R_{1,a}^{dn}(\omega) f_1^\alpha(\omega, z) + R_{2,a}^{dn}(\omega) f_2^\alpha(\omega, z) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times (0; z_\alpha^\infty), \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{C.23})$$

où les  $(f_j^\alpha)_{j \in \{1,2\}, \alpha \in \{o,a\}}$  sont données par (C.2b) et (C.2c), et où, pour  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $j \in \{1,2\}$  :

$$\frac{1}{R_{j,o}^{dn}(\omega, p_o)} = \partial_z f_j^o(\omega, 0) - \frac{f_j^o(\omega, z_o^\infty)}{f_{-j}^o(\omega, z_o^\infty)} \partial_z f_{-j}^o(\omega, 0) \quad (\text{C.24a})$$

$$\frac{1}{R_{j,a}^{dn}(\omega, p_a)} = f_j^a(\omega, 0) - \frac{f_j^a(\omega, z_a^\infty)}{f_{-j}^a(\omega, z_a^\infty)} f_{-j}^a(\omega, 0) \quad (\text{C.24b})$$

De façon analogue à (C.18), on a :

$$\widehat{e_{k,dn}^o}(\omega, z) = \lambda_u S_o^{dn}(\omega, z) \partial_z S_a^{dn}(\omega, 0) \widehat{e_{k-2,dn}^o}(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.25a})$$

$$\widehat{e_{k,dn}^a}(\omega, z) = \lambda_u S_a^{dn}(\omega, z) S_o^{dn}(\omega, 0) \widehat{e_{k-2,dn}^a}(\omega, 0) \quad (\omega, z) \in \mathbb{R} \times ]z_o^\infty; 0[ \quad (\text{C.25b})$$

On obtient alors ces valeurs pour les taux de convergence  $(\rho_\alpha^{dn})_{\alpha \in \{o,a\}}$  :

$$\rho_\alpha^{dn}(\omega) = \lambda_u S_\alpha^{dn}(\omega, 0) \partial_z S_{-\alpha}^{dn}(\omega, 0) \quad \omega \in \mathbb{R}, \alpha \in \{o, a\} \quad (\text{C.26})$$

# Bibliographie

- ABIODUN, B. J., PRUSA, J. M. et GUTOWSKI, W. J. (2008). Implementation of a non-hydrostatic, adaptive-grid dynamics core in CAM3. Part I : comparison of dynamics cores in aqua-planet simulations. *Climate Dynamics*, 31(7):795–810.
- ARYA, S. P. S. (1981). Parameterizing the Height of the Stable Atmospheric Boundary Layer. *Journal of Applied Meteorology*, 20(10):1192–1202.
- BARCELOS, M., BAVESTRELLO, H. et MAUTE, K. (2006). A Schur–Newton–Krylov solver for steady-state aeroelastic analysis and design sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17):2050 – 2069. Fluid-Structure Interaction.
- BARNIER, B. (1998). Forcing the Ocean. In CHASSIGNET, E. P. et VERRON, J., éditeurs : *Ocean Modeling and Parameterization*, volume 516, chapitre 2, pages 45–80. Springer.
- BELJAARS, A., DUTRA, E., BALSAMO, G. et LEMARIÉ, F. (2017). On the numerical stability of surface–atmosphere coupling in weather and climate models. *Geoscientific Model Development*, 10(2):977–989.
- BELJAARS, A. et HOLTSLAG, A. (1991). Flux parameterization over land surfaces for atmospheric models. *Journal of Applied Meteorology*, 30(3):327–341.
- BELL, M. J., LEFEBVRE, M., LE TRAON, P.-Y., SMITH, N. et WILMER-BECKER, K. (2009). GODAE : The Global Ocean Data Assimilation Experiment. *Oceanography*, 22:14–21.
- BENKLEY, C. W. et SCHULMAN, L. L. (1979). Estimating Hourly Mixing Depths from Historical Meteorological Data. *Journal of Applied Meteorology*, 18(6):772–780.
- BENNEQUIN, D., GANDER, M. J., GOUARIN, L. et HALPERN, L. (2016). Optimized Schwarz waveform relaxation for advection reaction diffusion equations in two dimensions. *Numerische Mathematik*, 134(3):513–567.
- BENNEQUIN, D., GANDER, M. J. et HALPERN, L. (2009). A homographic best approximation problem with application to optimized Schwarz waveform relaxation. *Mathematics of Computation*, 78(265):185–223.
- BENNIS, A.-C., CHACÓN-REBOLLO, T., MARMOL, M. G. et LEWANDOWSKI, R. (2008). Stability of some turbulent vertical models for the ocean mixing boundary layer. *Applied Mathematics Letters*, 21(2):128 – 133.
- BLAYO, E. et DEBREU, L. (1999). Adaptive Mesh Refinement for Finite-Difference Ocean Models : First Experiments. *Journal of Physical Oceanography*, 29(6):1239–1250.

- BLAYO, E. et ROUSSEAU, A. (2016). About Interface Conditions for Coupling Hydrostatic and Nonhydrostatic Navier-Stokes Flows. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 9(5):1565–1574.
- BOUGEAULT, P. et ANDRÉ, J.-C. (1986). On the Stability of the THIRD-Order Turbulence Closure for the Modeling of the Stratocumulus-Topped Boundary Layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43(15):1574–1581.
- BOUSSINESQ, J. V. (1897). *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*. Masson, 55, quai des Grands-Augustins, Paris, France.
- BOUTIN, J., WALDTEUFEL, P., MARTIN, N., CAUDAL, G. et DINNAT, E. (2004). Surface Salinity Retrieved from SMOS Measurements over the Global Ocean : Imprecisions Due to Sea Surface Roughness and Temperature Uncertainties. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 21(9): 1432–1447.
- BRODEAU, L., BARNIER, B., GULEV, S. K. et WOODS, C. (2017). Climatologically Significant Effects of Some Approximations in the Bulk Parameterizations of Turbulent Air–Sea Fluxes. *Journal of Physical Oceanography*, 47(1):5–28.
- BROST, R. A. et WYNGAARD, J. C. (1978). A Model Study of the Stably Stratified Planetary Boundary Layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 35(8):1427–1440.
- BRUTSAERT, W. (2013). *Evaporation into the atmosphere : theory, history and applications*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- BRYAN, F. O. (1998). Climate Drift in a Multicentury Integration of the NCAR Climate System Model. *Journal of Climate*, 11(6):1455–1471.
- BUCKINGHAM, E. (1914). On physically similar systems ; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345.
- BUSINGER, J. A., WYNGAARD, J. C., IZUMI, Y. et BRADLEY, E. F. (1971). Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. *Journal of the atmospheric Sciences*, 28(2):181–189.
- BYE, J. (2002). Inertially coupled Ekman layers. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 35(1):27–39.
- BYUN, D. W. (1990). On the analytical solutions of flux-profile relationships for the atmospheric surface layer. *Journal of Applied Meteorology*, 29(7):652–657.
- CAETANO, F., GANDER, M. J., HALPERN, L. et SZEFTTEL, J. (2011). Schwarz Waveform Relaxation Algorithms with Nonlinear Transmission Conditions for Reaction-Diffusion Equations. In HUANG, Y., KORNHUBER, R., WIDLUND, O. et XU, J., éditeurs : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XIX*, pages 245–252. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- CASTRO, S. L., WICK, G. A. et EMERY, W. J. (2003). Further refinements to models for the bulk-skin sea surface temperature difference. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 108(C12).
- CHACÓN-REBOLLO, T. et LEWANDOWSKI, R. (2014). *Mathematical and numerical foundations of turbulence models and applications*. Springer.
- CHARNOCK, H. (1955). Wind stress on a water surface. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81(350):639–640.
- CHEN, S. S., ZHAO, W., DONELAN, M. A., PRICE, J. F. et WALSH, E. J. (2007). The CBLAST-Hurricane program and the next-generation fully coupled atmosphere–wave–ocean models for hurricane research and prediction. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 88(3):311–317.

- CONNORS, J. M. et GANIS, B. (2011). Stability of algorithms for a two domain natural convection problem and observed model uncertainty. *Computational Geosciences*, 15(3):509–527.
- CORLESS, R. M., GONNET, G. H., HARE, D. E., JEFFREY, D. J. et KNUTH, D. E. (1996). On the Lambert W function. *Advances in Computational mathematics*, 5(1):329–359.
- CSANADY, G. (1967). On the “resistance law” of a turbulent Ekman layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 24(5):467–471.
- CUXART, J., BOUGEAULT, P. et REDELSPERGER, J.-L. (2000). A turbulence scheme allowing for mesoscale and large-eddy simulations. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 126(562):1–30.
- DEE, D., UPPALA, S., SIMMONS, A., BERRISFORD, P., POLI, P., KOBAYASHI, S., ANDRAE, U., BALMASEDA, M., BALSAMO, G., BAUER, P. *et al.* (2011). The ERA-Interim reanalysis : Configuration and performance of the data assimilation system. *Quarterly Journal of the royal meteorological society*, 137(656):553–597.
- DELCROIX, T., HENIN, C., PORTE, V. et ARKIN, P. (1996). Precipitation and sea-surface salinity in the tropical Pacific Ocean. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers*, 43(7):1123 – 1141.
- DHUNDEL, R., ALLEN, R. G. et TREZZA, R. (2016). Improving iterative surface energy balance convergence for remote sensing based flux calculation. *Journal of Applied Remote Sensing*, 10(2): 026033–026033.
- DONLON, C. J., MINNETT, P. J., GENTEMANN, C., NIGHTINGALE, T. J., BARTON, I. J., WARD, B. et MURRAY, M. J. (2002). Toward Improved Validation of Satellite Sea Surface Skin Temperature Measurements for Climate Research. *Journal of Climate*, 15(4):353–369.
- DONNER, L. J., WYMAN, B. L., HEMLER, R. S., HOROWITZ, L. W., MING, Y., ZHAO, M., GOLAZ, J.-C., GINOUX, P., LIN, S.-J., SCHWARZKOPF, M. D., AUSTIN, J., ALAKA, G., COOKE, W. F., DELWORTH, T. L., FREIDENREICH, S. M., GORDON, C. T., GRIFFIES, S. M., HELD, I. M., HURLIN, W. J., KLEIN, S. A., KNUTSON, T. R., LANGENHORST, A. R., LEE, H.-C., LIN, Y., MAGI, B. I., MALYSHEV, S. L., MILLY, P. C. D., NAIK, V., NATH, M. J., PINCUS, R., PLOSHAY, J. J., RAMASWAMY, V., SEMAN, C. J., SHEVLIAKOVA, E., SIRUTIS, J. J., STERN, W. F., STOUFFER, R. J., WILSON, R. J., WINTON, M., WITTENBERG, A. T. et ZENG, F. (2011). The Dynamical Core, Physical Parameterizations, and Basic Simulation Characteristics of the Atmospheric Component AM3 of the GFDL Global Coupled Model CM3. *Journal of Climate*, 24(13):3484–3519.
- DOYLE, J. D. (1995). Coupled ocean wave/atmosphere mesoscale model simulations of cyclogenesis. *Tellus A*, 47(5):766–778.
- DUBOS, T. (2017). A variational formulation of geophysical fluid motion in non-Eulerian coordinates. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143(702):542–551.
- ECMWF (2016). *Part IV : Physical Processes*, chapitre 3, pages 35–60. IFS Documentation. ECMWF.
- EKMAN, V. W. *et al.* (1905). On the influence of the Earth’s rotation on ocean-currents.
- ELDRED, C. et RANDALL, D. (2017). Total energy and potential enstrophy conserving schemes for the shallow water equations using Hamiltonian methods – Part 1 : Derivation and properties. *Geoscientific Model Development*, 10(2):791.
- EMANUEL, K. A. (1986). An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part I : Steady-state maintenance. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 43(6):585–605.

- FAIRALL, C., BRADLEY, E. F., GODFREY, J., WICK, G., EDSON, J. B. et YOUNG, G. (1996a). Cool-skin and warm-layer effects on sea surface temperature. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 101(C1):1295–1308.
- FAIRALL, C. W. *et al.* (2002). Bulk Parametization of Air-Sea Fluxes : Updates and Verification for the COARE Algorithm. *Journal of Climate*, pages 571–591.
- FAIRALL, C. W., BRADLEY, E. F., ROGERS, D. P., EDSON, J. B. et YOUNG, G. S. (1996b). Bulk parameterization of air-sea fluxes for tropical ocean-global atmosphere coupled-ocean atmosphere response experiment. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 101(C2):3747–3764.
- FARHAT, C. et ROUX, F.-X. (1992). An Unconventional Domain Decomposition Method for an Efficient Parallel Solution of Large-Scale Finite Element Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(1):379–396.
- FOKEN, T. (2006). 50 years of the Monin-Obukhov similarity theory. *Boundary-Layer Meteorology*, 119(3):431–447.
- FRITTS, D. C. et LU, W. (1993). Spectral estimates of gravity wave energy and momentum fluxes. Part II : Parameterization of wave forcing and variability. *Journal of the atmospheric sciences*, 50(22):3695–3713.
- GANDER, M. J. (2006). Optimized schwarz methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(2): 699–731.
- GANDER, M. J. (2015). 50 Years of Time Parallel Time Integration. In CARRARO, T., GEIGER, M., KÖRKEL, S. et RANNACHER, R., éditeurs : *Multiple Shooting and Time Domain Decomposition Methods : MuS-TDD, Heidelberg, May 6-8, 2013*, pages 69–113. Springer International Publishing, Cham.
- GANDER, M. J. et HALPERN, L. (2017). Time Parallelization for Nonlinear Problems Based on Diagonalization. In LEE, C.-O., CAI, X.-C., KEYES, D. E., KIM, H. H., KLOWONN, A., PARK, E.-J. et WIDLUND, O. B., éditeurs : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXIII*, pages 163–170. Springer International Publishing, Cham.
- GANDER, M. J., HALPERN, L. et NATAF, F. (1999). Optimal Convergence for Overlapping and Non-Overlapping Schwarz Waveform Relaxation. In LAI, C.-H., BJØRSTAD, P., CROSS, M. et WIDLUND, O., éditeurs : *Proceedings of the 11th International Conference on Domain Decomposition Methods*.
- GANDER, M. J. et STUART, A. M. (1998). Space-Time Continuous Analysis of Waveform Relaxation for the Heat Equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(6):2014–2031.
- GARRATT, J. R. (1992). *The atmospheric boundary layer*. Cambridge University Press.
- GENT, P. R. (1991). The heat budget of the TOGA-COARE domain in an ocean model. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 96(S01):3323–3330.
- GERKEMA, T., ZIMMERMAN, J. T. F., MAAS, L. R. M. et van HAREN, H. (2008). Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Reviews of Geophysics*, 46(2).
- GILADI, E. et KELLER, H. B. (2002). Space-time domain decomposition for parabolic problems. *Numerische Mathematik*, 93(2):279–313.

- GODFREY, J. et BELJAARS, A. (1991). On the turbulent fluxes of buoyancy, heat and moisture at the air-sea interface at low wind speeds. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 96(C12):22043–22048.
- GORDON, C., COOPER, C., SENIOR, C. A., BANKS, H., GREGORY, J. M., JOHNS, T. C., MITCHELL, J. F. B. et WOOD, R. A. (2000). The simulation of SST, sea ice extents and ocean heat transports in a version of the Hadley Centre coupled model without flux adjustments. *Climate Dynamics*, 16(2):147–168.
- GRACHEV, A., FAIRALL, C. et BRADLEY, E. (2000). Convective profile constants revisited. *Boundary-layer meteorology*, 94(3):495–515.
- GRISOGONO, B. (1995). A generalized Ekman layer profile with gradually varying eddy diffusivities. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 121(522):445–453.
- GUILLOTEAU, E. (1998). Optimized Computation of Transfer Coefficients in Surface Layer with Different Momentum and Heat Roughness Lengths. *Boundary-Layer Meteorology*, 87(1):147–160.
- GULEV, S., JUNG, T. et RUPRECHT, E. (2007). Estimation of the Impact of Sampling Errors in the VOS Observations on Air–Sea Fluxes. Part I : Uncertainties in Climate Means. *Journal of Climate*, 20(2):279–301.
- HÖGSTRÖM, U. (1988). Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface layer : a re-evaluation. *Boundary-Layer Meteorology*, 42(1):55–78.
- HÖGSTRÖM, U. (1996). Review of some basic characteristics of the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 78(3):215–246.
- HOLTSLAG, A. et DE BRUIN, H. (1988). Applied modeling of the nighttime surface energy balance over land. *Journal of Applied Meteorology*, 27(6):689–704.
- HORTON, G. et VANDEWALLE, S. (1995). A Space-Time Multigrid Method for Parabolic Partial Differential Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(4):848–864.
- HOUDIN, F., , BAEK, S., BOUCHER, O., DASSAS, K., ESCRIBANO, J., FITA, L., FORGET, F., GAINUSA-BOGDAN, A., GUEZ, L., HOUDIN, C., IDELKADI, A., LEFEBVRE, M. P., LI, L., LOTT, F., MADELEINE, J.-B., MILLOUR, E., RISI, C., SADOURNY, R. et PHU, L. V. (2015). LMDZ : A Documentation. Rapport technique, Laboratoire de Météorologie Dynamique.
- HOUDIN, F., MAURITSEN, T., GETTELMAN, A., GOLAZ, J.-C., BALAJI, V., DUAN, Q., FOLINI, D., JI, D., KLOCKE, D., QIAN, Y., RAUSER, F., RIO, C., TOMASSINI, L., WATANABE, M. et WILLIAMSON, D. (2017). The Art and Science of Climate Model Tuning. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 98(3):589–602.
- JABLONOWSKI, C., HERZOG, M., PENNER, J. E., OEHMKE, R. C., STOUT, Q. F. et van LEER, B. (2004). Adaptive Grids for Weather and Climate Models.
- JERRI, A. J. (1977). The Shannon sampling theorem. Its various extensions and applications : A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11):1565–1596.
- JOHNSON, H., HØJSTRUP, J., VESTED, H. et LARSEN, S. E. (1998). On the dependence of sea surface roughness on wind waves. *Journal of Physical Oceanography*, 28(9):1702–1716.
- JONES, J. H. (1973). Vertical Mixing in the Equatorial Undercurrent. *Journal of Physical Oceanography*, 3(3):286–296.

- KATUL, G. (1998). An Investigation of Higher-Order Closure Models for a Forested Canopy. *Boundary-Layer Meteorology*, 89(1):47–74.
- KEYES, D. E., McINNES, L. C., WOODWARD, C., GROPP, W., MYRA, E., PERNICE, M., BELL, J., BROWN, J., CLO, A., CONNORS, J., CONSTANTINESCU, E., ESTEP, D., EVANS, K., FARHAT, C., HAKIM, A., HAMMOND, G., HANSEN, G., HILL, J., ISAAC, T., JIAO, X., JORDAN, K., KAUSHIK, D., KAXIRAS, E., KONIGES, A., LEE, K., LOTT, A., LU, Q., MAGERLEIN, J., MAXWELL, R., MCCOURT, M., MEHL, M., PAWLOWSKI, R., RANGLES, A. P., REYNOLDS, D., RIVIÈRE, B., RÜDE, U., SCHEIBE, T., SHADID, J., SHEEHAN, B., SHEPHARD, M., SIEGEL, A., SMITH, B., TANG, X., WILSON, C. et WOHLMUTH, B. (2013). Multiphysics simulations : Challenges and opportunities. *The International Journal of High Performance Computing Applications*, 27(1):4–83.
- KHUNDZHUA, G. et ANDREEV, E. G. (1974). Experimental studies of heat transfer between the sea and the atmosphere during a small-scale interaction. *Akademiia Nauk SSSR, Izvestiia, Fizika Atmosfery i Okeana*, 10:1110–1113.
- KONDO, J. (1975). Air-sea bulk transfer coefficients in diabatic conditions. *Boundary-Layer Meteorology*, 9(1):91–112.
- KONDO, J., FUJINAWA, Y. et NAITO, G. (1973). High-Frequency Components of Ocean Waves and Their Relation to the Aerodynamic Roughness. *Journal of Physical Oceanography*, 3(2):197–202.
- KRISTENSSON, G. (2010). *Heun's differential equation*, pages 141–162. Springer New York, New York, NY.
- LARGE, W., McWILLIAMS, J. et DONEY, S. (1994). Oceanic Vertical Mixing : A Review and a Model with a Nonlocal Boundary Parameterization. *Reviews of Geophysics*, 32(4):363–403.
- LARGE, W. B. (2006). Surface Fluxes for Practitioners of Global Ocean Data Assimilation. In CHASSIGNET, E. P. et VERRON, J., éditeurs : *Ocean Weather Forecasting. An Integrated View of Oceanography*, chapitre 9, pages 229–270. Springer.
- LARGE, W. G. (1998). Modeling and parameterizing ocean planetary boundary layers. In CHASSIGNET, E. P. et VERRON, J., éditeurs : *Ocean Modeling and Parameterization*, volume 516, chapitre 3, pages 81–120. Springer.
- LAUNDER, B. E. et SPALDING, D. B. (1972). *Mathematical models of turbulence*. Academic press.
- LAUNIAINEN, J. (1995). Derivation of the relationship between the Obukhov stability parameter and the bulk Richardson number for flux-profile studies. *Boundary-Layer Meteorology*, 76(1): 165–179.
- LELARASMEE, E. (1982). *The waveform relaxation method for time domain analysis of large scale integrated circuits : Theory and applications*. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California.
- LEMARIÉ, F., BLAYO, E. et DEBREU, L. (2015). Analysis of Ocean-atmosphere Coupling Algorithms : Consistency and Stability. *Procedia Computer Science*, 51(Supplement C):2066 – 2075. International Conference On Computational Science, ICCS 2015.
- LEMARIÉ, F., MARCHESIELLO, P., DEBREU, L. et BLAYO, E. (2014). Sensitivity of Ocean-Atmosphere Coupled Models to the Coupling Method : Example of Tropical Cyclone Erica. Research Report RR-8651, Inria.
- LEWANDOWSKI, R. (1997). *Analyse mathématique et océanographie*. Masson.

- LEWIS, D. et BELCHER, S. (2004). Time-dependent, coupled, Ekman boundary layer solutions incorporating Stokes drift. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 37(4):313–351.
- LI, X. et GAO, S. (2008). *Air–Sea Coupling*, pages 147–155. Springer Netherlands, Dordrecht.
- LINDELÖF, E. (1894). Sur l’application des méthodes d’approximations successives à l’étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 10:117–128.
- LIONS, J., TEMAM, R. et WANG, S. (1993). Modèles et analyse mathématiques du système Océan/Atmosphère. I. Structure des sous-systèmes. *Compte Rendu de l’Académie des Sciences de Paris*, 316(1):113–119.
- LIONS, J.-L., TEMAM, R. et WANG, S. (1995). Mathematical Theory for the Coupled Atmosphere-Ocean Models (CAO III). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 74:105–163.
- LIONS, P. L. (1989). On the Schwarz Alternating Method III : A Variant for Nonoverlapping Subdomains. In CHAN, T., GLOWINSKI, R., PÉRIAUX, J. et WIDLUND, O., éditeurs : *Proceedings of the 3rd International Conference on Domain Decomposition Methods*.
- LIU, S., KERMANI, A., SHEN, L. et YUE, D. K. (2009). Investigation of coupled air-water turbulent boundary layers using direct numerical simulations. *Physics of Fluids*, 21(6):062108.
- LIU, W. T., KATSAROS, K. B. et BUSINGER, J. A. (1979). Bulk parameterization of air-sea exchanges of heat and water vapor including the molecular constraints at the interface. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 36(9):1722–1735.
- LOMBARDI, P., ANGELIS, V. D. et BANERJEE, S. (1996). Direct numerical simulation of near-interface turbulence in coupled gas-liquid flow. *Physics of Fluids*, 8(6):1643–1665.
- LOUIS, J.-F. (1979). A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. *Boundary-Layer Meteorology*, 17(2):187–202.
- MAHRT, L., VICKERS, D., HOWELL, J., HØJSTRUP, J., WILCZAK, J. M., EDSON, J. et HARE, J. (1996). Sea surface drag coefficients in the Risø Air Sea Experiment. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 101(C6):14327–14335.
- MANDEL, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3):233–241.
- MARKATOS, N. (1986). The mathematical modelling of turbulent flows. *Applied Mathematical Modelling*, 10(3):190 – 220.
- MARTIN, V. (2009). Schwarz Waveform Relaxation Algorithms for the Linear Viscous Equatorial Shallow Water Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(5):3595–3625.
- MCPHADEN, M. J., BUSALACCHI, A. J., CHENEY, R., DONGUY, J.-R., GAGE, K. S., HALPERN, D., JI, M., JULIAN, P., MEYERS, G., MITCHUM, G. T., NILNER, P. P., PICAUT, J., REYNOLDS, R. W., SMITH, N. et TAKEUCHI, K. (1998). The Tropical Ocean-Global Atmosphere observing system : A decade of progress. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 103(C7):14169–14240.
- MCWILLIAMS, J. C. et HUCKLE, E. (2005). Ekman Layer Rectification. *Journal of Physical Oceanography*, 36:1646–1659.
- MELLOR, G. L. et YAMADA, T. (1982). Development of a Turbulence Closure Model for Geophysical Fluid Problems. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 20(4):851–875.

- MOHAMMADI, B. et PIRONNEAU, O. (1994). *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*. Wiley.
- MOHAMMADI, B., PIRONNEAU, O. et VALENTIN, F. (1998). Rough boundaries and wall laws. *International journal for numerical methods in fluids*, 27(14):169–177.
- MONIN, A. S. et OBUKHOV, A. M. (1954). Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere. *Trudy Akademii Nauk SSSR Geofizicheskogo Instituta*, 24:163–187.
- MONIN, A. S. et YAGLOM, A. M. (1971). *Statistical fluid mechanics*, volume 1. The MIT Press.
- MOULIN, A. et WIRTH, A. (2014). A Drag-Induced Barotropic Instability in Air–Sea Interaction. *Journal of Physical Oceanography*, 44(2):733–741.
- MOULIN, A. et WIRTH, A. (2016). Momentum Transfer Between an Atmospheric and an Oceanic Layer at the Synoptic and the Mesoscale : An Idealized Numerical Study. *Boundary-Layer Meteorology*, 160(3):551–568.
- NASTROM, G. et GAGE, K. S. (1985). A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *Journal of the atmospheric sciences*, 42(9):950–960.
- NEELIN, J. D., LATIF, M., ALLAART, M. A. F., CANE, M. A., CUBASCH, U., GATES, W. L., GENT, P. R., GHIL, M., GORDON, C., LAU, N. C., MECHOSO, C. R., MEEHL, G. A., OBERHUBER, J. M., PHILANDER, S. G. H., SCHOPF, P. S., SPERBER, K. R., STERL, K. R., TOKIOKA, T., TRIBBIA, J. et ZEBIAK, S. E. (1992). Tropical air-sea interaction in general circulation models. *Climate Dynamics*, 7(2):73–104.
- OBUKHOV, A. M. (1962). Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(1):77–81. Erreur d’orthographe dans le titre et transcription alternative du nom cyrillique de l’auteur laissées telles quelles pour des raisons de traçabilité.
- O’BRIEN, J. J. (1970). A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 27(8):1213–1215.
- OBUKHOV, A. (1946). Turbulentnost’ v temperaturnoj-neodnorodnoj atmosfere. *Trudy Inst. Theor. Geofiz. AN SSSR*, 1:95–115. Adaptation anglophone : [Obukhov \(1971\)](#).
- OBUKHOV, A. (1971). Turbulence in an atmosphere with a non-uniform temperature. *Boundary-layer meteorology*, 2(1):7–29.
- OLVER, F. W. (2010). Hypergeometric Function. In *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*, chapitre 15. Cambridge University Press.
- ONG, B., HIGH, S. et KWOK, F. (2016). Pipeline Schwarz Waveform Relaxation. In DICKOPF, T., GANDER, M. J., HALPERN, L., KRAUSE, R. et PAVARINO, L. F., éditeurs : *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXII*, pages 363–370. Springer International Publishing, Cham.
- ORLANSKI, I. (1981). The quasi-hydrostatic approximation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 38(3):572–582.
- PACANOWSKI, R. C. et PHILANDER, S. G. H. (1981). Parameterization of Vertical Mixing in Numerical Models of Tropical Oceans. *Journal of Physical Oceanography*, 11(11):1443–1451.
- PAGOWSKI, M. (2006). An iterative solution of flux-profile relationships in the surface layer for regional model applications. Rapport technique, NOAA, Earth System Research Laboratory (Boulder, CO, USA).

- PARES, C. (1988). Un traitement faible en éléments finis de la condition de glissement sur une paroi pour les équations de Navier-Stokes. *Note CRAS*, 307:101–106.
- PARMHED, O., KOS, I. et GRISOGONO, B. (2005). An improved Ekman layer approximation for smooth eddy diffusivity profiles. *Boundary-layer meteorology*, 115(3):399–407.
- PAULSON, C. et SIMPSON, J. (1981). The temperature difference across the cool skin of the ocean. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 86(C11):11044–11054.
- PAULSON, C. A. (1970). The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *Journal of Applied Meteorology*, 9(6):857–861.
- PELLETIER, C., LEMARIÉ, F. et BLAYO, E. (2018). Sensitivity Analysis and Metamodels for the Bulk Parameterization of Turbulent Air-sea Fluxes. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. Accepted December 2017.
- PICARD, E. (1893). Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 9: 217–272.
- REYNOLDS, O. (1895). On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 186:123–164.
- REYNOLDS, R. W. et SMITH, T. M. (1994). Improved Global Sea Surface Temperature Analyses Using Optimum Interpolation. *Journal of Climate*, 7(6):929–948.
- RONVEAUX, A. (1995). *Heun's Differential Equations*. Oxford Science Publications.
- ROULLET, G. et MADEC, G. (2000). Salt conservation, free surface, and varying levels : a new formulation for ocean general circulation models. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 105(C10):23927–23942.
- RYDER, J., POLCHER, J., PEYLIN, P., OTTLÉ, C., CHEN, Y., VAN GORSEL, E., HAVERD, V., MCGRATH, M., NAUDTS, K., OTTO, J. *et al.* (2014). A multi-layer land surface energy budget model for implicit coupling with global atmospheric simulations. *Geoscientific Model Development Discussions*, 7:8649–8701.
- SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations : I. The basic experiment. *Monthly weather review*, 91(3):99–164.
- SMITH, S. D. (1988). Coefficients for Sea Surface Wind Stress, Heat Flux, and Wind Profiles as a Function of Wind Speed and Temperature. *Journal Of Geophysical Research*.
- STANFORTH, A., WOOD, N. et CÔTÉ, J. (2002). Analysis of the numerics of physics–dynamics coupling. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 128(586):2779–2799.
- SUNDQVIST, H. (1988). Parameterization of condensation and associated clouds in models for weather prediction and general circulation simulation. In *Physically-based modelling and simulation of climate and climatic change*, pages 433–461. Springer.
- TENNEKES, H. (1973). The logarithmic wind profile. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 30(2):234–238.
- TORT, M. et DUBOS, T. (2014). Usual approximations to the equations of atmospheric motion : A variational perspective. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 71(7):2452–2466.

- TORT, M., DUBOS, T. et MELVIN, T. (2015). Energy-conserving finite-difference schemes for quasi-hydrostatic equations. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141(693):3056–3075.
- TROEN, I. B. et MAHRT, L. (1986). A simple model of the atmospheric boundary layer ; sensitivity to surface evaporation. *Boundary-Layer Meteorology*, 37(1-2):129–148.
- ULLRICH, P. A., JABLONOWSKI, C., KENT, J., LAURITZEN, P. H., NAIR, R., REED, K. A., ZARZYCKI, C. M., HALL, D. M., DAZLICH, D., HEIKES, R., KONOR, C., RANDALL, D., DUBOS, T., MEURDESOLF, Y., CHEN, X., HARRIS, L., KÜHNLEIN, C., LEE, V., QADDOURI, A., GIRARD, C., GIORGETTA, M., REINERT, D., KLEMP, J., PARK, S.-H., SKAMAROCK, W., MIURA, H., OHNO, T., YOSHIDA, R., WALKO, R., REINECKE, A. et VINER, K. (2017). DCMIP2016 : A Review of Non-hydrostatic Dynamical Core Design and Intercomparison of Participating Models. *Geoscientific Model Development (in review)*.
- UMLAUF, L. et BURCHARD, H. (2003). A generic length-scale equation for geophysical turbulence models. *Journal of Marine Research*, 61(2):235–265.
- UMLAUF, L. et BURCHARD, H. (2005). Second-order turbulence closure models for geophysical boundary layers. A review of recent work. *Continental Shelf Research*, 25(7):795–827.
- WEBSTER, P. J. et LUKAS, R. (1992). TOGA COARE : The coupled ocean—atmosphere response experiment. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 73(9):1377–1416.
- WGASF (2000). Intercomparison and validation of ocean-atmosphere energy flux fields. Final Report of the Joint WCRP/SCOR Working Group on Air-Sea Fluxes. Rapport technique, WGASF.
- ZHANG, F. (2006). *The Schur complement and its applications*, volume 4. Springer Science & Business Media.
- ZIKANOV, O., SLINN, D. N. et DHANAK, M. R. (2003). Large-eddy simulations of the wind-induced turbulent Ekman layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 495:343–368.
- ZILITINKEVICH, S., GRYANIK, V. M., LYKOSOV, V. N. et MIRONOV, D. V. (1999). Third-Order Transport and Nonlocal Turbulence Closures for Convective Boundary Layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 56(19):3463–3477.



Cette thèse s'intéresse à la modélisation numérique du couplage entre l'océan et l'atmosphère. Bien que présentant un certain nombre de caractéristiques communes, ces deux milieux physiques sont suffisamment dissemblables pour être numériquement simulés par des modèles distincts, incluant chacun des spécificités propres. Par conséquent, leurs interactions sont prises en compte *via* des algorithmes de couplage multiphysique.

La mise en place de tels algorithmes nécessite une bonne compréhension des modélisations des milieux océanique et atmosphérique, en particulier au voisinage de leur interface commune. C'est pourquoi une partie conséquente de la présente thèse dissèque, analyse et complète les *paramétrisations turbulentes*, qui sont des mécanismes numériques définis au niveau continu, traitant la couche limite turbulente au voisinage de la surface océanique. Les travaux entrepris ont permis d'identifier deux sources d'erreurs, théoriquement et numériquement significatives, dans la modélisation numérique standard de l'interface océan-atmosphère.

La première source d'erreur se manifeste dans les formulations continues des paramétrisations turbulentes : celles-ci sont actuellement utilisées de manière incomplète, ce qui se traduit par le caractère mathématiquement irrégulier des solutions qu'elles génèrent. En revenant aux fondements de la théorie dont les paramétrisations découlent, la présente thèse étend leur domaine d'application, permettant de générer des profils de solution réguliers, dans un cadre théorique uniforme et bi-domaine. Les effets d'une telle extension sont numériquement évalués sur des cas tests physiquement réalistes : celle-ci peut mener à des biais considérables (de l'ordre de 20%) dans les flux échangés entre océan et atmosphère. D'un point de vue théorique, cette extension permet de définir des critères simples sous lesquels le couplage océan-atmosphère peut être considéré comme cohérent par rapport aux deux domaines physiques, et surtout aux paramétrisations turbulentes.

La seconde source d'erreur est de nature algorithmique : elle concerne la discrétisation temporelle des mécanismes de couplage. Les méthodes actuelles, dites *ad hoc*, ne garantissent pas une complète cohérence des flux d'un modèle à l'autre. Les algorithmes de Schwarz « globaux en temps », issus de thématiques liées à la décomposition de domaine, constituent une piste intéressante pour traiter ces aspects. La mise en place de tels algorithmes sur des modèles physiquement réalistes représente un défi considérable. Leur impact numérique sur des cas tests simplifiés est évalué. L'étude préalable des paramétrisations turbulentes permet de donner des pistes quant au développement d'algorithmes de couplage, concernant à la fois la « cohérence du couplage » précédemment introduite, et l'incorporation graduelle d'effets physiques plus complexes.

This thesis focuses on the numerical modelling of the air-sea coupling. Although they share some common features, these two physical environments are sufficiently dissimilar for their numerical treatment to be carried out by distinct models, each including their own specificities. The interactions between these two components are thus taken into account through coupling algorithms.

Implementing such algorithms requires proper understanding of the oceanic and atmospheric modelling, most importantly in the vicinity of their common interface. Therefore a substantial part of this thesis dissects, analyzes and completes *turbulent parameterization schemes*, which are the numerical mechanisms, defined at a continuous level, through which the turbulent surface layer at the vicinity of the sea surface is treated. Two theoretically and numerically meaningful sources of errors in the standard numerical modelling of the air-sea interface have been isolated.

The first source of error lies in the continuous formulation of the turbulent parameterizations, which are currently used in an incomplete manner, leading to mathematically irregular solution profiles. By carefully studying their theoretical bases, this thesis extends the parameterizations, allowing them to generate regular profiles within a standardized, bi-domain framework. Numerical investigations on physically relevant test cases show that including such an extension can result in considerable bias (of the order of 20%) in air-sea fluxes evaluations. From a theoretical perspective, carrying this extension leads to establishing simple criteria under which the air-sea coupling can be considered as coherent with respect to the two physical environments, and more importantly, to the turbulent parameterizations.

The second source of error is algorithmic in essence: it is linked to the temporal discretization of the coupling mechanisms. Existing *ad hoc* methods do not guarantee perfect coherence of the air-sea fluxes from one model to the other. Global in time Schwarz algorithms, which have first been developed as domain decomposition methods, are good candidates for correcting these flaws, although their implementation to the air-sea context is a considerable challenge, given the complexity of this problem. Investigations on the numerical impact of such algorithms are carried out on simplified test cases. Thanks to the undertaken work on turbulent parameterizations, perspectives on the development of coupling algorithms are given, regarding both their "coherence" *as per* the aforementioned conditions, and the gradually increasing complexity of physical effects that are accounted for.