



**HAL**  
open science

# Analyse de modèles épidémiologiques à plusieurs classes d'infectés : stabilité et observabilité

Mamadou Lamine Diouf

► **To cite this version:**

Mamadou Lamine Diouf. Analyse de modèles épidémiologiques à plusieurs classes d'infectés : stabilité et observabilité. Mathématiques [math]. Université Gaston BERGER de Saint-Louis du Sénégal, 2016. Français. NNT: . tel-01425907

**HAL Id: tel-01425907**

**<https://inria.hal.science/tel-01425907v1>**

Submitted on 4 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ GASTON BERGER  
DE SAINT-LOUIS

**UFR Sciences Appliquées et technologie**

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI)

École doctorale des Sciences et des Technologies

THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Mamadou Lamine DIOUF**

le 06 janvier 2016

**Analyse de modèles épidémiologiques à plusieurs classes d'infectés : stabilité et observabilité**

Co-Directeur de thèse : **Abderrahman IGGIDR, HDR, INRIA, Université de Lorraine**

Co-Directeur de thèse : **Mamadou SY, Professeur, Université Gaston Berger**

**Jury**

<b>M. Abdou SÉNE,</b>	Professeur, Université Gaston Berger	Président
<b>M. Jean Luc GOUZÉ,</b>	Professeur, Directeur de recherche INRIA, BIOCORE	Rapporteur
<b>M. Aboudramane GUIRO,</b>	Maître Conférence, Université de Bobo Dioulasso	Rapporteur
<b>M. Gauthier SALLET,</b>	Professeur Emérite, INRIA, Université de Lorraine	Rapporteur
<b>M. Ngalla DJITTÉ,</b>	Maître Conférence, Université Gaston Berger	Examineur
<b>M. Stanislas OUARO,</b>	Professeur, Université de Ouagadougou	Examineur

À

mes pères

**Djime Momar DIOUF**

**Babou DIOUF**

mes mères

**Mérame NDIAYE**

**Fatou NDIAYE**

mes oncles

**Abdoulaye NDIAYE**

**Aziz NDIAYE**

tous mes amis

## Remerciements

J'adresse mes chaleureux remerciements à mon co-directeur de thèse Abderrahman IGGIDR pour m'avoir encadré, guidé mes travaux et m'orienté dans la recherche. Je lui témoigne toute ma reconnaissance de son accueil au sein de l'équipe MASAIE de l'INRIA Nancy-Grand Est.

Toute ma gratitude à mon co-directeur de thèse Mamadou SY. Je tiens à saluer toute la compréhension dont il a fait preuve. J'ai particulièrement apprécié la diligence et la conscience professionnelle qu'il a fait montre. Pour cela je lui adresse mes vifs remerciements.

Je remercie les membres du jury. À l'endroit Jean Luc GOUZÉ, Aboudramane GUIRO et Gauthier SALLET qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse, je manifeste toute ma gratitude. Je manifeste ma reconnaissance à l'endroit de M. SALLET pour m'avoir initié à l'épidémiologie mathématique et, m'avoir mis en relation avec des mathématiciens de grandes qualités, à l'exemple de mon co-encadreur Abderrahman et de Michael Li. Nous avons utilisé la méthode développée par ce dernier pour démontrer l'un des résultats phare de cette thèse. Donc M. SALLET a été au début et à la fin de cette thèse.

Je remercie chaleureusement Ngalla DJITTÉ, Stanislas OUARO et Abdou SÉNE pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Cette thèse a bénéficié de l'appui d'AIRES SUD, de l'IRD, de l'INRIA, de la coopération franco-sénégalaise, du DIP, de l'AUF, du réseau EDP, d'UMMISCO et de CEA-MITIC.

Je remercie tout le personnel de l'UFR SAT pour les diverses aides.

Je remercie Khadija NIRI, qui m'a mis dans d'excellentes conditions lors de mon séjour à Casablanca.

Je ne pourrais passer sous silence de l'apport remarquable de Moussa Lo, ex-directeur de l'UFR SAT, et Aliou DIOP, directeur de l'école doctorale des sciences et des technologies.

Je profite de l'occasion pour remercier Alkhna Dramé, responsable du centre de documentation de l'UFR SAT, pour son soutien durant tout mon cursus universitaire.

Je remercie tous mes camarades du LANI, particulièrement Boubacar DIAO, Mahé NDAO, Léna TENDENG, Modou LO. Tous mes remerciements et mes vives félicitations à l'endroit de Mouhamadou DIABY, mon compagnon de route. Je remercie Lamine DIOP pour ses précieuses suggestions.

Je témoigne toute ma gratitude à Oumar BA et Abdoulaye GUISSÉ pour la lecture minutieuse

---

du document. Je remercie Ogo DIOP de sa disponibilité.

Je remercie toute ma famille pour m'avoir encouragé pendant cette longue aventure. Je remercie ma petite soeur Loly, mes petits frères Ablaye, yéro et Alassane pour tout leur soutien. Mention spéciale à Aziz pour m'avoir donné le goût de la connaissance, il m'a été d'une aide précieuse. Je remercie aussi Mama pour sa disponibilité. Je remercie également mon oncle Abdoulaye NDIAYE pour les efforts surhumains qu'il a fourni durant tout mon cursus et qui m'ont permis d'être bien meilleur que je ne puisse être sans cela.

Je saisis cette oportunité pour remercier du fond du coeur tous mes amis qui m'ont toujours épaulé dans toutes mes entreprises. Je ne manquerais pas de citer Amadou BATHILY, Aliou THIAM, Ablaye DIAGNE, Mama SALL, Samba DIALLO, Daouda SOW, Adama GUÈYE, Alkassoum GUÈYE, Aliou GUÈYE, Papa Tabane GUÈYE, Ahmadou LY.

Mes vifs remerciements à Babacar KÉBÉ.

Je remercie mes voisins du bloc B du village J et mes voisins de chambres Salif SY, Seyni Touré et Souleymane BALL.

Je remercie tous les camarades de l'AEERN.

Toute ma reconnaissance à mes familles adoptives de Metz, je parle de la famille BIE : Mahawa et Paul, et de, Samba Bocoum et sa femme. Tous mes remerciements à mes amis de Metz, plus particulièrement à Mady Edouard Diatta.

À tous ces nombreux camarades et amis auprès de qui, d'une manière ou d'une autre, j'ai contracté une dette significative dans l'écriture de cette thèse, je dis merci.

---

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé-Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques rappels : notions de Stabilité et d'observabilité</b>	<b>7</b>
1. Préambule . . . . .	7
2. Stabilité locale . . . . .	8
2.1. Première méthode de Lyapunov . . . . .	8
2.2. Critère de Routh-Hurwitz et règle de Descartes des signes . . . . .	9
2.3. Utilisation de la deuxième composée additive de matrice . . . . .	11
3. Stabilité globale . . . . .	11
3.1. Méthode directe de Lyapunov . . . . .	11
3.2. Propriétés dynamiques & Bendixson dans le plan . . . . .	13
3.3. Théorie de Li-Muldowney ou théorie de Bendixson généralisée . . . . .	17
4. La notion d'observateur . . . . .	19
4.1. Observabilité . . . . .	19
4.2. Critère d'observabilité . . . . .	21
4.3. Observateur à grand gain . . . . .	22
<b>2 Quelques modèles épidémiologiques</b>	<b>25</b>
1. Modèle de Bernouilli . . . . .	26

TABLE DES MATIÈRES

---

2.	Modèle Kermack et Mckendrick . . . . .	28
2.1.	Présentation du modèle . . . . .	28
2.2.	Étude du modèle . . . . .	29
3.	Modèle <i>SIS</i> de Vargas . . . . .	30
3.1.	Présentation du modèle . . . . .	30
3.2.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	31
3.3.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Stabilité globale d'un modèle épidémiologique avec deux classes d'infectés et une incidence masse action</b> . . . . .	<b>35</b>
1.	Présentation du modèle . . . . .	35
2.	Calcul de $\mathcal{R}_0$ . . . . .	39
3.	Points d'équilibre du système . . . . .	40
4.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	44
5.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	47
5.1.	Stabilité locale du point d'équilibre endémique . . . . .	47
5.2.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	49
6.	Simulations . . . . .	51
7.	Conclusion . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Stabilité globale d'un modèle épidémiologique avec une incidence non linéaire</b> . . . . .	<b>57</b>
1.	Présentation du modèle . . . . .	57
2.	Points d'équilibre et stabilité locale du point d'équilibre endémique . . . . .	59
3.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	63
4.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	64
5.	Généralisation du système dans le cas où $\alpha = 0$ . . . . .	70
5.1.	Points d'équilibre . . . . .	70
5.2.	Calcul de $\mathcal{R}_0$ . . . . .	71
5.3.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	72
5.4.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	73
6.	Conclusion . . . . .	74



<b>5</b>	<b>Stabilité globale d'un modèle <math>SI_1I_2</math> avec une incidence non linéaire dépendant d'une fonction</b>	<b>75</b>
1.	Présentation du modèle . . . . .	75
2.	Points d'équilibre et Taux de reproduction de base . . . . .	77
3.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	80
4.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	82
4.1.	Stabilité locale du point d'équilibre endémique . . . . .	82
4.2.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	84
5.	Conclusion . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Étude de l'observabilité d'un système <math>SI</math> avec <math>n</math> classes d'infectés</b>	<b>89</b>
1.	Introduction . . . . .	89
2.	Observabilité et Observateur grand gain du système . . . . .	90
3.	Application et Simulations . . . . .	93
4.	Conclusion . . . . .	101
	<b>Conclusion générale</b>	<b>103</b>
	<b>Annexe</b>	<b>105</b>
A.	Quelques outils nécessaires . . . . .	105
A.1	$k$ -ième composée additive de matrice . . . . .	105
A.2	Calcul du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0$ . . . . .	106
A.3	Théorème de Gershgorin . . . . .	107
B.	Prolongements de fonctions du chapitre 6 . . . . .	109
B.1	Prolongement de la fonction lipschitzienne . . . . .	109
B.2	Prolongement du difféomorphisme . . . . .	114
	<b>Bibliographie</b>	<b>115</b>



# Table des figures

1.1	Schéma observateur . . . . .	22
2.1	diagramme de transfert pour le SIS . . . . .	30
3.1	Diagramme de transfert pour le modèle $SI_1I_2$ . . . . .	37
3.2	$\beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.5, \gamma = 0.5, \mu = 0.01, b = 0.3, d = 0.2, \mathcal{R}_0 = 1.125000$ . . . . .	44
3.3	$i_1, \mathcal{R}_0 < 1$ . . . . .	51
3.4	$i_2, \mathcal{R}_0 < 1$ . . . . .	52
3.5	$i_1, \mathcal{R}_0 > 1$ . . . . .	53
3.6	$i_2, \mathcal{R}_0 > 1$ . . . . .	54
4.1	Diagramme de transfert pour le modèle $SIJS$ . . . . .	58
5.1	Diagramme de transfert pour le modèle $SI_1I_2$ . . . . .	76
6.1	Estimateur de $S$ avec prolongement de $\Psi$ et de $\psi$ . . . . .	96
6.2	Estimateur de $I_1$ avec prolongement de $\Psi$ et de $\psi$ . . . . .	97
6.3	Estimateur de $I_2$ avec prolongement de $\Psi$ et de $\psi$ . . . . .	98
6.4	Estimateur de $S$ sans prolongement . . . . .	99
6.5	Estimateur de $I_1$ sans prolongement . . . . .	100
6.6	Estimateur de $I_2$ sans prolongement . . . . .	101

## Résumé

Le but de cette thèse est de faire une analyse de la stabilité globale et de l'observabilité de quelques modèles épidémiologiques à plusieurs classes d'infectés. Nous avons étudié successivement la stabilité globale de modèles  $SI$ ,  $SIS$  et d'un autre  $SI$  avec deux classes d'infectés. Dans les deux derniers modèles, nous avons repris une étude déjà menée, car ces derniers ont été analysés par des auteurs qui ont donné une analyse erronée au niveau de la question fondamentale de la stabilité globale du point d'équilibre endémique. En effet, la même erreur a été reproduite dans ces deux travaux. Ainsi, nous avons mis en lumière la supposition erronée dont ils se sont basés pour mener leur étude et puis nous avons tenté de refaire l'analyse de stabilité globale de ces modèles. Après l'étude de stabilité globale de ces trois modèles, nous avons terminé par l'étude d'observabilité d'un modèle  $SI$  avec  $n$  classes d'infectés. Nous avons déterminé l'observateur grand gain pour ce dernier modèle.

**Mots clés :** Systèmes dynamiques non linéaire, modèles épidémiologiques, stabilité globale, méthodes de Lyapunov, théorème de Poincaré-Bendixson, méthode de Li-Muldowney, méthode de Jacquez et *al.*, observateur grand gain.

## Abstract

The aim of this thesis is to give an analysis of the global stability and the observability of some epidemiological models with several stages of infected. We have made successively the study of the global stability for some  $SI$ ,  $SIS$  and an another  $SI$  models with two classes of infected. At the two last models, we have made again the study, for the authors who studied them gave an erroneous analysis to the fundamental question of the global study of the endemic equilibrium. Indeed, the same mistake has been done on the two works. Thus, we have propose to make light on erroneous supposition on which they based their study, then we have tried to make another analysis of the global stability of those models. After that, we have end by the observability study of a  $SI$  model with  $n$  classes of infected. We have determined the high gain observer for that model.

**Keywords :** Nonlinear dynamical systems, epidemic models, global stability, Lyapunov's methods, Poincaré-Bendixson's theorem, Li-Muldowney's method, Jacquez and *al.* method, high gain observer.



# Introduction générale

Les modèles mathématiques occupent de plus en plus une place fondamentale dans l'analyse de la propagation et du contrôle de certaines infections. Un simple modèle joue un rôle significatif pour une meilleure compréhension de l'expansion d'une épidémie. Dans ce travail nous abordons spécifiquement les modèles compartimentaux. Les fondements de l'approche de l'épidémiologie basée sur les modèles compartimentaux ont été établis par des médecins de santé publique comme Sir Ronald Ross, W. H Hamer, Anderson Gray Mckendrick et William Ogilvy Kermack entre les années 1900 et 1935. La paternité de ces types de modèles peut-être attribuée à Ronald Ross, qui a obtenu le prix Nobel de physiologie ou médecine en 1902 pour la preuve que le paludisme est transmis par des anophèles.

Un modèle épidémiologique est formé de deux parties : compartiments et règles. Les compartiments divisent la population dans les différents états possibles par rapport à la maladie. Les règles spécifient la proportion des individus passant d'une classe à une autre. Ainsi, dans un cas à deux compartiments, il existe une proportion d'individus sains devenant infectés et, selon les maladies, il peut aussi exister une proportion d'individus infectieux étant guéris. L'acronyme utilisé pour un modèle est généralement fondé sur l'ordre de ses règles. Dans le modèle  $SIS$ , un individu est initialement sain ( $S$ ), il peut devenir infecté ( $I$ ) puis être guéri ( $S$ ); si la guérison n'est pas possible, alors il s'agit d'un modèle  $SI$ . Par rapport aux caractéristiques de l'infection, il existe plusieurs types de compartiments dont on peut citer entre autres le compartiment des latents, qui existe dans le cas où l'infection met un temps important pour rendre l'individu infectieux. Ce compartiment est d'habitude noté  $E$  du fait de l'abréviation de l'anglais « exposed compartment ». Le compartiment des vaccinés ( $V$ ), des rétablis ( $R$ ) peuvent aussi être cités, entre autres. Par ailleurs, si la maladie est transmise par un vecteur, les compartiments des vecteurs vont s'ajouter aux compartiments d'humains. Toutefois, dans ce travail nous allons considérer des infections à transmissions directes et comportant uniquement les compartiments susceptibles et infectés. Par

conséquent, nous allons porter notre étude sur des modèles  $SI$  et  $SIS$ .

Les modèles  $SI$  et  $SIS$  modélisent plusieurs types d'infections. Parmi ces infections nous pouvons citer le VIH-SIDA, qui n'admet pas d'immunité et sévit dans le monde entier, et qui peut être modélisé par un modèle  $SI$ . Nous pouvons citer aussi le choléra, qui est fréquent en Afrique subsaharienne, et peut être modélisé par un modèle  $SIS$ . En dehors de ces deux infections citées, l'Afrique subsaharienne est soumise régulièrement à une pléthore d'infections. La plupart peuvent être modélisées par des systèmes  $SI$  ou  $SIS$ . C'est le cas de l'infection à virus EBOLA qui a semé la panique, récemment en 2014, dans toute la sous région ouest africaine. A ce sujet, nous citons le modèle « Be-CoDis : Between-Countries Disease spread » élaboré par le Dr D. Ngom et coauteurs, pour endiguer l'évolution de l'infection. Compte-tenu de toutes ces considérations, il s'avère important d'étudier ces types de modèles. Le travail mené dans ce manuscrit de thèse concerne l'étude de la stabilité et d'observabilité de modèles épidémiologiques.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous donnons les outils mathématiques nécessaires à l'étude des systèmes d'équations différentielles ordinaires issus des modèles obtenus.

Dans le second chapitre, nous exposons quelques modèles épidémiologiques importants pour la compréhension de certains outils pour l'analyse mathématique. C'est ainsi que nous présentons le modèle de Bernouilli, qui est l'un des modèles épidémiologiques les plus anciens, ainsi que le modèle de Kermack et Mckendrick. Ces modèles démontrent clairement l'apport de l'épidémiologie mathématique dans la conduite des politiques de santé publique. En effet, après avoir mené une étude rigoureuse de la petite variole, qui était très redoutée à l'époque, Bernouilli tire des résultats importants, qui au début ont eu du mal à être acceptés, mais qui ont fini par s'imposer. Après son étude, Bernouilli préconise l'inoculation d'une forme moins virulente du virus, ce qui était une pratique très contestée des médecins. En fait, les résultats qu'il a obtenus montre que l'espérance de vie d'une population vaccinée est supérieure à celle d'une population non vaccinée. Fort de ce résultat, Bernouilli dit que : « l'intérêt public demandera toujours, non seulement que l'on emploie l'inoculation, mais encore qu'on se hâte de l'employer » (paragraphe 14 de son article [3]).

Par ailleurs, le modèle de Kermack et Mckendrick exposé dans ce chapitre introduit la notion de  $\mathcal{R}_0$  appelé le **taux de reproduction de base**. Il représente le nombre de nouveaux cas engendrés par un seul individu infecté introduit dans une population constituée entièrement de susceptibles. Ce



taux joue un rôle fondamental dans l'épidémiologie mathématique, car sa valeur nous renseigne s'il y a possibilité d'épidémie ou pas. Après l'exposé de ce modèle de Kermack et Mckendrik, nous présentons le modèle de Vargas, qui est un modèle de type  $S/S$ , dont l'étude date de 2011 (voir [69]). Il s'agit d'un modèle avec une incidence définie par la loi de l'action de masse  $\frac{\beta SI}{S+I}$ . La méthode directe de Lyapunov est utilisée pour prouver la stabilité autour des points d'équilibre. Sachant qu'un point d'équilibre épidémiologique est un point d'équilibre tel que s'il est atteint, le nombre d'infectés ne varie plus. Les systèmes épidémiologiques admettent un point d'équilibre sans maladie (extinction de la maladie :  $I = 0$ ), et un ou plusieurs points d'équilibre endémique (persistance endémique de la maladie :  $I \neq 0$ ).

Dans le troisième chapitre, nous effectuons l'étude de la stabilité globale du modèle épidémique avec deux classes d'infectés et une fonction d'incidence masse action suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = bN - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{S}{N} - \mu S, \\ \dot{I}_1 = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{S}{N} - (\mu + \gamma) I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma I_1 - (\mu + d) I_2. \end{cases} \quad (0.1)$$

Les détails sur les paramètres sont donnés au niveau du chapitre. Plusieurs travaux ont été faits sur ce type de système, dont les plus remarquables sont [67, 64, 51, 59, 37]. Les auteurs dans [67] ont travaillé sur un système similaire à (0.1), et ils ont même travaillé sur  $n$  classes d'infectés. Cependant, ils ont utilisé un recrutement constant, ils ont pris  $\Lambda$  à la place de  $bN$ , ce choix a rendu l'étude de points d'équilibre endémique difficile pour notre système. Mais aussi, ils ont pris  $\gamma = d$ . Mais le plus important, ils ont utilisé une supposition lourde reliant tous les paramètres pour conclure sur la stabilité globale du point d'équilibre endémique, là où nous avons supposé que le taux de natalité est plus important que la surmortalité induite par l'infection ( $b > d$ ). De même, dans la démonstration établie dans la preuve de la stabilité globale du point d'équilibre endémique, les auteurs de [64] font une supposition très lourde et très difficile à réaliser. Dans [51], les auteurs travaillent avec un seul taux de contact. Dans les travaux [59, 37], des modèles similaires au nôtre ont été considérés, mais les auteurs de [37] ne traitent pas la question de la stabilité globale du point d'équilibre endémique, mais aussi l'auteur de [59] suppose que  $\beta_1 = \beta_2$  et  $\gamma = d$ .

Nous avons effectué l'étude de (0.1) en déterminant le système des proportions. Nous avons prouvé l'existence et l'unicité du point d'équilibre endémique sous une condition. Puis, nous avons utilisé

la théorie directe de Lyapunov pour conclure sur la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie. Ensuite, en utilisant la théorie de Poincaré-Bendixson, nous avons prouvé la stabilité globale du point d'équilibre endémique. Enfin, nous avons effectué des simulations numériques pour illustrer les résultats de stabilité.

Nous abordons dans le quatrième chapitre l'étude de la stabilité globale d'un modèle épidémiologique avec une incidence non linéaire. L'incidence utilisée dans ce chapitre comporte une fonction puissance. Ce type d'incidence a été utilisé dans les travaux [56, 57]. Il s'agit d'un modèle revu. En effet, nous avons découvert une erreur dans l'article [10] qui invalide les résultats dominants du travail, à savoir les résultats de stabilité globale du point d'équilibre endémique. Le système est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p - \mu S + \alpha J, \\ \dot{I} = (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p - (\mu + \gamma) I, \\ \dot{J} = \gamma I - (\mu + d + \alpha) J. \end{cases} \quad (0.2)$$

C'est un modèle de type  $SIS$ . Les auteurs ont prouvé la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie du système général, et pour le cas endémique, ils ont travaillé sur (0.2) pour les cas particuliers  $p = 1$  ou  $d = 0$ , cependant ils affirment que l'ensemble :  $\Gamma^* = \{(S, I, J) \in \Gamma : S + I + \frac{\mu + d}{\mu} J = \frac{\Lambda}{\mu}\}$  est invariant, avec  $\Gamma = \{(S, I, J) \in \mathbb{R}_+^3 : S + I + J \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ . Or, comme nous allons le montrer, cet ensemble n'est pas invariant pour le système (1.1). Ainsi, nous avons déterminé les points d'équilibre du système, puis, montré la stabilité locale du point d'équilibre endémique. Nous avons prouvé la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie. Puis, nous avons prouvé la stabilité globale du point d'équilibre endémique sous la condition  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ . Le cas où  $\alpha$  et  $\beta_1$  sont à la fois nuls est traité par Korobeinikov et Maini dans [44]. Enfin, en utilisant la technique de J. Jacquez et C. Simon exposée dans [67], nous prouvons, avec une condition sur les paramètres, la stabilité globale du point d'équilibre endémique dans le cas où tous les paramètres sont non nuls.

Nous effectuons dans le cinquième chapitre l'étude de la stabilité globale d'un modèle épidémiologique avec une incidence non linéaire dépendant d'une fonction. C'est aussi un travail de révision. Comme dans l'article [10], l'erreur touche au résultat de stabilité globale du point d'équilibre endémique. Nous tentons dans ce chapitre d'apporter une solution au problème posé par les auteurs de [63]. L'erreur commise est la même dans les deux articles, d'ailleurs elle a été d'abord soulignée dans l'article [63] qui est antérieure à l'article [10], d'où la nécessité et l'urgence

de souligner et de corriger ces importants travaux. Le système utilisé dans ce travail est assez original, du fait qu'il utilise une incidence non-linéaire dépendant d'une fonction qui n'est pas définie explicitement, ce qui le différencie de [10, 67, 43, 42, 51, 37, 57, 30]. Le système étudié est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Pi - (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2))S - \mu S, \\ \dot{I}_1 = (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2))S - (\mu + \gamma)I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma I_1 - (\mu + d)I_2. \end{cases} \quad (0.3)$$

Nous avons dans un premier temps établi la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie par une fonction de Lyapunov, puis la stabilité locale du point d'équilibre endémique par le critère de Routh-Hurwitz, enfin nous avons établi la stabilité globale du point d'équilibre endémique sous une condition, par la méthode de Li-Muldowney qui est une approche nouvelle et puissante d'analyse de stabilité globale. Avant de donner les résultats de stabilité, nous avons rappelé les différents points d'équilibre et le taux de reproduction de base.

Enfin, le sixième chapitre concerne l'étude de l'observabilité du système  $SI$  avec  $n$  classes suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S) - \mu S, \\ \dot{I}_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S) - (\mu + \gamma_1)I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma_1 I_1 - (\mu + \gamma_2)I_2, \\ \vdots \\ \dot{I}_n = \gamma_{n-1} I_{n-1} - (\mu + d)I_n. \end{cases} \quad (0.4)$$

En posant  $x = (S, I_1, \dots, I_n)^T$  et  $y = I_n$ , nous montrons que notre étude d'observabilité du système (0.4) se résume au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x). \end{cases} \quad (0.5)$$

où  $f$  représente la dynamique de l'infection et  $h(x) = (0, \dots, 1).x$ .

Nous étudions l'observabilité du système, construisons un observateur grand gain pour le système, et effectuons des simulations pour un cas particulier du système ( $n = 2$  et  $\varphi = I_d$ ).



# Chapitre 1

## Quelques rappels : notions de Stabilité et d'observabilité

### Sommaire

---

<b>1.</b>	<b>Préambule</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>2.</b>	<b>Stabilité locale</b> . . . . .	<b>8</b>
2.1.	Première méthode de Lyapunov . . . . .	8
2.2.	Critère de Routh-Hurwitz et règle de Descartes des signes . . . . .	9
2.3.	Utilisation de la deuxième composée additive de matrice . . . . .	11
<b>3.</b>	<b>Stabilité globale</b> . . . . .	<b>11</b>
3.1.	Méthode directe de Lyapunov . . . . .	11
3.2.	Propriétés dynamiques & Bendixson dans le plan . . . . .	13
3.3.	Théorie de Li-Muldowney ou théorie de Bendixson généralisée . . . . .	17
<b>4.</b>	<b>La notion d'observateur</b> . . . . .	<b>19</b>
4.1.	Observabilité . . . . .	19
4.2.	Critère d'observabilité . . . . .	21
4.3.	Observateur à grand gain . . . . .	22

---

### 1. Préambule

Considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne de  $D \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Définition 1.1.

$\bar{x} \in D$  est dit point d'équilibre de (1.1) si  $f(\bar{x}) = 0$ . Un point d'équilibre  $\bar{x}$  est :

## 2.. STABILITÉ LOCALE

---

– *stable* : si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

– *instable* : s'il n'est pas stable,

– *attractif* : s'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x},$$

– *globalement attractif* : si pour tout  $x(0) \in D$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ ,

– *asymptotiquement stable* : s'il est stable et attractif.

### Remarque 1.1.

L'attractivité n'implique pas la stabilité sauf dans le cas linéaire  $\dot{x} = Ax$ .

## 2. Stabilité locale

### 2.1. Première méthode de Lyapunov

#### Définition 1.2.

On appelle système linéarisé du système (1.1) en  $\bar{x}$ , le système

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x,$$

où  $Df(\bar{x})$  est la dérivée de  $f$  en  $\bar{x}$ .

#### Théorème 1.1 (Poincaré-Lyapunov).

1. Si  $Df(\bar{x})$  a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.
2. Si  $Df(\bar{x})$  a au moins une valeur à partie réelle strictement positive, alors  $\bar{x}$  est instable.

#### Remarque 1.2.

Dans beaucoup de cas, la détermination des valeurs propres n'est pas évidente. Ainsi, nous allons donner quelques méthodes qui ne nécessitent pas la connaissance exacte des valeurs propres. Il s'agit du critère de Routh-Hurwitz, du critère de Li-Muldowney pour la stabilité locale, et en fin, au niveau de l'appendix, nous allons donner la règle des signes de Descartes, qui permet de connaître le signe (la forme) des racines du polynôme caractéristique sans les déterminer.

## 2.2. Critère de Routh-Hurwitz et règle de Descartes des signes

### Critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme admette toutes ses racines dans le demi-plan gauche ouvert.

#### Définition 1.3.

On appelle polynôme de Hurwitz, un polynôme réel qui a toutes ses racines dans le demi-plan gauche.

Considérons le polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  de  $Df(\bar{x})$  :

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

$\lambda^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$a_2$	$a_0$	$\dots$	$a_3$	$a_1$
$\lambda^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$a_1$	$\dots$	$a_2$	$a_0$	$\dots$
$\lambda^{n-2}$	$b_{n-2}$	$b_{n-4}$	$b_{n-6}$	$\dots$	$n$ pair	$n$ impair	$n$ pair	$n$ impair	$n$ pair
$\lambda^{n-3}$	$c_{n-3}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\lambda^1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\lambda^0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(2.1)

La première colonne du tableau est appelée colonne des pivots. Elle contient les coefficients des termes en  $p^{n-2k}$ , dans l'ordre des puissances décroissantes.

La deuxième ligne contient les coefficients des termes en  $p^{n-1-2k}$ , et se termine suivant la parité de  $n$ . Les lignes suivantes sont remplies en suivant les lois de formation suivantes :

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-i} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}, \quad c_{n-j} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & b_{n-j-1} \end{vmatrix}.$$

Si nécessaire une case vide est prise égale à zéro.

Le calcul des lignes est poursuivi jusqu'à ce que la première colonne soit remplie.

#### Critère 1.1 (Routh-Hurwitz).

Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne sont strictement positifs.

**Propriété 1.1** (de la méthode). – Il y a autant de racines à partie réelle positive que de changements de signe dans la première colonne.

– L'apparition de lignes de zéros indique l'existence de racines imaginaires pures (par paires). Dans ce cas, correspondant à un système oscillant, on continue le tableau en remplaçant la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant le polynôme reconstitué à partir de la ligne supérieure, les racines imaginaires pures étant les racines imaginaires de ce polynôme bicarré reconstitué.

### Règle de Descartes des signes

Considérons un polynôme de degré  $n$  à coefficients réels :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0. \quad (2.2)$$

Le critère de Descartes s'applique lorsque le polynôme  $P(x)$  est ordonné par puissances croissantes ou décroissantes comme en (2.2). Deux coefficients  $a_k$  non nuls successifs forment une permanence s'ils sont de même signe, et une variation s'ils sont de signes opposés. Le critère de Descartes spécifie alors :

**Critère 1.2.** Le nombre  $n_p$  des racines réelles positives du polynôme  $P(x) = 0$  est inférieur ou égal au nombre  $V$  des variations des coefficients du polynôme ordonné, et ces deux nombres ont la même parité.

Ainsi pour

$$P_1(x) = 8x^6 - 7x^2 - 5x - 6, \text{ on obtient } V = 1, \text{ donc } n_p = 1,$$

$$P_2(x) = 4x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3 \text{ donne } V = 5, \text{ donc } n_p = 1; 3 \text{ ou } 5.$$

Bien entendu le même critère peut s'appliquer à «l'équation aux opposés» pour laquelle  $y = -x$  et donner ainsi des indications sur le nombre  $n_n$  des racines réelles négatives de l'équation (1) à partir du nombre  $V_n$  des variations du polynôme  $Q(y)$  correspondant :

$$P(x) = Q(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 - a_3y^3 + \dots + (-1)^n a_n y^n.$$

ce qui conduit à  $V_n = 3$  et donc  $n_n = 1$  ou  $3$  pour le polynôme  $P_1(x)$ , et à  $V_n = 2$ , donc  $n_n = 0$  ou  $2$  pour le polynôme  $P_2(x)$ . On remarquera que  $V + V_n = n$  dans le cas général où les coefficients  $a_k$  sont tous non nuls (on dit qu'il n'y a aucune lacune). Comme il y a au total  $n$  racines pour une équation de degré  $n$ , le critère de Descartes ne donne alors aucune indication sur les racines complexes.



**Proposition 1.1.**

*Si tous les coefficients de  $P$  sont strictement positifs alors  $P$  n'admet pas de racine positive.*

**Corollaire 1.1.**

*Si tous les coefficients de  $P$  sont non nuls et de signe alterné alors  $P$  n'admet pas de racine négative.*

**Proposition 1.2.**

*Si il y a une variation des coefficients de  $P$  alors  $P$  admet au moins une racine positive.*

### 2.3. Utilisation de la deuxième composée additive de matrice

Cette méthode est très utile quand le point d'équilibre  $\bar{x}$  n'est pas connu explicitement. Et à l'image du critère de Routh-Hurwitz, elle ne nécessite pas la connaissance exacte des valeurs propres du Jacobien pour conclure sur la stabilité.

**Lemme 1.1** (Li and al., [51]).

*Soit  $A$  une matrice réelle  $n \times n$ . Pour que  $A$  soit stable, il faut et il suffit que :*

1. *la deuxième composée de matrice  $A^{[2]}$  (en anglais : second additive compound matrix) soit stable,*
2.  $(-1)^n \det(A) > 0$ .

Généralement, pour éviter les calculs de valeurs propre de  $A^{[2]}$ , ce résultat est combiné avec le théorème de Gershgorin, que nous avons rappelé en Annexe (A.3), avec une application.

## 3. Stabilité globale

### 3.1. Méthode directe de Lyapunov

**Définition 1.4** (Bassin d'attraction).

*L'ensemble  $\mathcal{B}$  est appelé bassin d'attraction de  $\bar{x}$  si*

$$x(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}.$$

*$\bar{x}$  est globalement attractif si  $\mathcal{B} = D$ .*

### 3.. STABILITÉ GLOBALE

---

**Définition 1.5** (Stabilité asymptotique globale).

Un point d'équilibre  $\bar{x}$  de (1.1) est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 1.6** (Fonction de Lyapunov).

Soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre pour (1.1). On appelle fonction de Lyapunov pour  $\bar{x}$ , une fonction  $V$  telle que :

(i)  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$ ,

(ii)  $V(x) = 0$  si et seulement si  $x = \bar{x}$ ,

(iii)  $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$ , où

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle.$$

$V$  est une fonction de Lyapunov au sens strict pour  $\bar{x}$  si  $V$  est une fonction de Lyapunov et de plus :

(iv) pour tout  $x \in D \setminus \{\bar{x}\} : \dot{V} < 0$ .

**Théorème 1.2** (Lyapunov 1892).

Soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre de (1.1). S'il existe une fonction de Lyapunov pour  $\bar{x}$ , alors  $\bar{x}$  est stable. S'il existe une fonction de Lyapunov au sens strict pour  $\bar{x}$ , alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.3.**

- $\bar{x}$  est globalement asymptotiquement stable si  $V$  (fonction de Lyapunov au sens strict) est définie dans le domaine tout entier, c'est-à-dire ici  $D$ .
- La détermination de fonction de Lyapunov est toujours un problème difficile, et se fait au cas par cas. Raison pour laquelle, d'autres méthodes sont souvent utilisées. L'une d'elle est basée sur le théorème de Poincaré-Bendixson que nous allons étudier au niveau des propriétés dynamiques.

Dans ce qui suit, nous allons donner un résultat très important : le principe d'invariance de LaSalle. En effet, le principe d'invariance de LaSalle permet d'affiner la théorie de Lyapunov. Il donne la stabilité asymptotique même si la dérivée de la fonction de Lyapunov n'est pas strictement négative en dehors du point d'équilibre. Avant d'énoncer le théorème, nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 1.7** (Ensemble positivement invariant).

Un ensemble  $\Omega$  est positivement invariant si toute solution  $x(t)$  telle que  $x(0) \in \Omega$  reste dans  $\Omega$  pour  $t \geq 0$ .

**Théorème 1.3** (LaSalle-Lyapunov).

Soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de Lyapunov telle que  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \in D$ . Soit  $L = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$  et  $M$  le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans  $L$ . Alors toutes les solutions tendent vers  $M$  quand  $t \rightarrow \infty$ . En particulier, si  $M$  est réduit à  $\{\bar{x}\}$ , alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.

### 3.2. Propriétés dynamiques & Bendixson dans le plan

On sait que toute solution de (1.1) est entièrement déterminée par la donnée de la condition initiale  $(t_0 = 0, x_0)$ .

**Définition 1.8** (semi-orbite, orbite).

(i) On appelle semi-orbite positive  $\gamma^+(x_0)$  issue d'un point  $x_0$  :

$$\{x(t, x_0), t \geq 0\}.$$

(ii) On appelle semi-orbite négative  $\gamma^-(x_0)$  issue d'un point  $x_0$  :

$$\{x(t, x_0), t \leq 0\}.$$

(iii) L'orbite  $\gamma(x_0)$  est définie par :

$$\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

**Définition 1.9** (ensemble invariant).

(i) Un sous-ensemble  $\Omega$  de  $D$  est dit invariant si pour tout  $x_0 \in \Omega$  :  $\gamma(x_0) \subset \Omega$ .

(ii) Un sous-ensemble  $\Omega$  de  $D$  est dit positivement invariant si pour tout  $x_0 \in \Omega$  :  $\gamma^+(x_0) \subset \Omega$ .

(iii) Un sous-ensemble  $\Omega$  de  $D$  est dit négativement invariant si pour tout  $x_0 \in \Omega$  :  $\gamma^-(x_0) \subset \Omega$ .

**Remarque 1.4.**

1. Un ensemble invariant est à la fois positivement invariant et négativement invariant.
2. L'ensemble  $D$  est invariant.

### 3.. STABILITÉ GLOBALE

---

3. Un point d'équilibre est un ensemble invariant.
4. Une orbite est un ensemble invariant.
5. Une semi-orbite positive est un ensemble positivement invariant.

**Définition 1.10** (ensemble invariant minimal).

Un ensemble  $\Omega \subset D$  est un ensemble invariant minimal si c'est un ensemble non vide, fermé et invariant qui ne possèdent pas de sous ensemble propre ayant ces propriétés.

**Proposition 1.3.**

Soit  $E$ , un ensemble non vide, compact et invariant. Alors,  $E$  contient un ensemble invariant minimal.

**Définition 1.11** (attraction).

(i) Un point  $x_0$  est attiré par un ensemble  $E \subset D$  si

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t, x_0), E) = 0$ , où  $\text{dist}(x, E) = \inf\{\|x - y\|, y \in E\}$  est la distance de  $x$  à l'ensemble  $E$ .

(ii) L'ensemble

$$\mathcal{B}(E) = \{x_0 \in D, \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t, x_0), E) = 0\}$$

est le bassin d'attraction de  $E$ .

(iii) Un ensemble  $E$  est un attracteur si  $\mathcal{B}(E)$  contient un voisinage de  $E$ . Si  $\mathcal{B}(E) = D$  alors  $E$  est un attracteur global.

**Remarque 1.5.**

Il est clair que  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{B}(E)$  et que  $\mathcal{B}(E)$  est positivement invariant.

**Définition 1.12** (Oméga limite).

(i) Un point  $p$  est dit point  $\omega$ -limite de l'orbite  $\gamma(x_0)$ , s'il existe une suite strictement croissante  $(t_k)$ ,  $t_k \rightarrow +\infty$ , telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k, x_0) = p.$$

(ii) L'ensemble de tous les points  $\omega$ -limite de  $\gamma$  est l'ensemble  $\omega$ -limite, noté  $\omega(\gamma)$ .

(iii) Un point  $p$  est dit point  $\alpha$ -limite de l'orbite  $\gamma(x_0)$ , s'il existe une suite strictement décroissante  $(t_k)$ ,  $t_k \rightarrow -\infty$ , telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k, x_0) = p.$$

(iv) L'ensemble de tous les points  $\alpha$ -limite de  $\gamma$  est l'ensemble  $\alpha$ -limite, noté  $\alpha(\gamma)$ .

(v) Un point est limite s'il est  $\alpha$  ou  $\omega$ -limite.

**Remarque 1.6.**

1.  $p$  ne dépend que de  $\gamma$  et non de  $x_0$ .
2.  $\omega$  peut être vide, c'est le cas, par exemple si  $\gamma^+$  est une demi-droite.

**Proposition 1.4.**

Supposons qu'il existe un compact  $K$  tel que  $\gamma^+ \subset K \subset D$ . Alors,  $\omega(\gamma^+)$  est non vide, compact, connexe et invariant. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t, x_0), \omega(\gamma^+(x_0))) = 0.$$

**Remarque 1.7.**

1. Si  $x(t, x_0) \rightarrow \bar{x}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, alors  $\bar{x}$  est un point d'équilibre et  $\omega(\gamma^+) = \{\bar{x}\}$ .  
Réciproquement, si  $\omega(\gamma^+) = \{\bar{x}\}$  alors  $\bar{x}$  est un point d'équilibre et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = \bar{x}$ .
2. Un résultat analogue à la proposition précédente reste vrai pour l'ensemble  $\alpha$ -limite.

**Théorème de Poincaré-Bendixson**

Considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x} = g(x) \tag{3.1}$$

où  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

**Théorème 1.4 (Poincaré-Bendixson).**

Si  $\gamma^+$  est une semi-orbite positive bornée (i.e, il existe un compact  $K$  tel que  $\gamma^+ \subset K$ ) et si  $\omega(\gamma^+)$  ne contient pas de points d'équilibre, alors  $\omega(\gamma^+)$  est l'orbite d'une solution périodique, non stationnaire. De plus

ou bien  $\gamma = \omega(\gamma^+)$ ,

ou bien  $\omega(\gamma^+) = \overline{\gamma^+} \setminus \gamma^+$  (i.e  $\omega(\gamma^+) \cap \gamma^+ = \emptyset$ ).

Supposons que  $\omega(\gamma^+)$  et  $\alpha(\gamma^-)$  soient des orbites périodiques, non stationnaire. Si de plus

$\omega(\gamma^+) = \overline{\gamma^+} \setminus \gamma^+$ , alors  $\omega(\gamma^+)$  est appelé cycle  $\omega$ -limite,

$\alpha(\gamma^-) = \overline{\gamma^-} \setminus \gamma^-$ , alors  $\alpha(\gamma^-)$  est appelé cycle  $\alpha$ -limite.

Un cycle limite est un cycle  $\alpha$ -limite ou  $\omega$ -limite.

**Théorème 1.5.**

Tout ensemble  $K$  fermé et borné, non vide, positivement invariant, son ensemble  $\omega$ -limite contient soit :

- (i) un point d'équilibre attractif,
- (ii) une trajectoire périodique (un cycle limite),
- (iii) une réunion de points d'équilibre reliés par des trajectoires régulières.

**Théorème 1.6.**

Soit  $\gamma(x_0)$  une orbite fermée (orbite définie par une solution périodique non stationnaire). Alors, l'intérieur de  $\gamma(x_0)$  contient au moins un point d'équilibre de  $g$  ; donc, le système (3.1) a un point d'équilibre.

**Remarque 1.8** (Absence de cycle limite).

Dans la majeure partie de l'utilisation du théorème de Poincaré-Bendixson en épidémiologie, nous aurons besoin de montrer que le système n'admet pas de cycle limite, afin de pouvoir prouver la stabilité d'un point d'équilibre. D'où l'intérêt du paragraphe suivant.

**Critère de Bendixson dans le plan**

Considérons le système (3.1) :

$$\dot{x} = g(x) = g(x_1, x_2) = (g_1(x), g_2(x))$$

avec  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

**Théorème 1.7** (Critère de Bendixson).

Soit  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Si la quantité  $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$  est non nulle et de signe constant sur  $D$ , alors le système (3.1) n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans  $D$ .

**Théorème 1.8** (Critère de Dulac-Bendixson).

Soit  $B$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ , un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Si la quantité  $\frac{\partial(B(x)g_1(x))}{\partial x_1} + \frac{\partial(B(x)g_2(x))}{\partial x_2}$  est non nulle et de signe constant sur  $D$ , alors le système (3.1) n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans  $D$ .

### 3.3. Théorie de Li-Muldowney ou théorie de Bendixson généralisée

#### Problème de stabilité globale dans $\mathbb{R}^n$

Considérons une EDO dans  $\mathbb{R}^n$  définie par :

$$x' = f(x), \quad f \in C^1(D, \mathbb{R}^n), \quad \text{avec } D \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n.$$

Soit  $\bar{x} \in D$  un point d'équilibre de l'EDO (i.e  $f(\bar{x}) = 0$ ).

#### Définition 1.13.

$\bar{x}$  est globalement stable dans  $D$  si :

1.  $\bar{x}$  est localement asymptotiquement stable, et
2.  $\bar{x}$  est attractif dans  $D$ , i.e

$$x(t, x_0) \rightarrow \bar{x} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty \text{ pour tout } x_0 \in D.$$

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $x_1 \in D$ , et  $V$  un petit voisinage de  $x_1$ ,

#### Définition 1.14.

Un champ de vecteur  $g \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$  est une  $\epsilon$ -perturbation locale de  $f$  au point  $x_1$  si :

1.  $\text{supp}(f - g) \subset\subset V$
2.  $\|f - g\|_{C^1} < \epsilon$  avec

$$\|f - g\|_{C^1} = \sup_{x \in D} \left\{ \|f(x) - g(x)\| + \left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right\| \right\}.$$

#### Définition 1.15.

Un critère de Bendixson est une condition satisfaite par  $f$ , qui exclut des solutions périodiques non constantes de l'équation  $x' = f(x)$ .

#### Définition 1.16.

Un critère de Bendixson est dit  $C^1$  robuste, s'il est satisfait par  $C^1$   $\epsilon$ -perturbations locale  $g$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

**Exemple 1.1.** Le critère de Bendixson classic :  $\text{div}f(x) < 0$  pour  $n = 2$  est  $C^1$  robuste.

### 3.. STABILITÉ GLOBALE

---

**Lemme 1.2** (Pough).

Si  $x_1 \in D$  est un point limite tel que  $f(x_1) \neq 0$  alors pour tout  $\epsilon > 0$  et tout petit voisinage  $V$  de  $x_1$ , il existe  $g$  une  $\epsilon$ -perturbation locale de  $x_1$  tel que

$$x' = g(x)$$

qui admet une orbite périodique non constante passant par  $x_1$ .

**Corollaire 1.2.**

Si  $f$  satisfait à une condition de Bendixson  $C^1$  robuste sous de petites perturbations locales, alors tous les points limites de  $x' = f(x)$  sont des points d'équilibre.

**Théorème 1.9** (Li-Muldowney).

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $D$  est positivement invariant.
2.  $\bar{x}$  est l'unique point d'équilibre dans  $D$ .
3.  $\bar{x}$  est localement asymptotiquement stable.
4.  $x' = f(x)$  satisfait à un critère de Bendixson  $C^1$  robuste.

Alors  $\bar{x}$  est globalement asymptotiquement stable dans  $D$ .

#### Critère de Bendixson général

**Définition 1.17** (Ensemble absorbant).

Un ensemble  $K \subset D$  est absorbant si pour tout compact  $D_1$  de  $D$ , il existe  $T > 0$ , tel que

$$x(t, D_1) \subset K, \quad t \geq T.$$

Soit  $K \subset D$  un ensemble compact absorbant. Soit  $P(x)$  une matrice  $N \times N$ ,  $N = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ , tel que :  $P(x)$  et  $P^{-1}(x)$  sont  $C^1$  pour tout  $x \in K$ . Soit  $|z|$  une norme de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  la mesure de Lozinskiĭ. Soit

$$B(x) = P_f(x)P^{-1}(x) + P(x)\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}P^{-1}(x),$$
$$\bar{q}_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(x(s, x_0))) ds.$$



**Théorème 1.10** (Li-Muldowney).

Soit  $D$  un ensemble simplement connexe tel qu'il existe un sous ensemble compact absorbant  $K \subset D$ . Alors

$$\bar{q}_2 < 0$$

est un critère de Bendixson et, il est  $C^1$  robuste.

De plus, si  $\bar{x}$  est un unique point d'équilibre dans  $D$ , alors  $\bar{q}_2 < 0$  implique que  $\bar{x}$  est globalement stable dans  $D$ .

## 4. La notion d'observateur

Un observateur est un moyen de mesure qui permet de retrouver tous les états d'un système industriel en disposant du minimum d'informations sur ces états. Ce minimum d'information est obtenue à l'aide d'un capteur. Un observateur permet donc d'optimiser le nombre de capteurs dans une application industrielle; d'où son intérêt économique dans l'industrie. Durant les dernières décennies beaucoup de travaux en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs. Particulièrement notre but est de construire un observateur grand gain. Ainsi donc, considérons le système général suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où

- $x \in X$  représente le vecteur d'état, et  $X$  un ensemble connexe de dimension  $n$ ,
- $u \in U$  est l'entrée, et  $U$  est un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^m$ ,
- $y \in Y$  est la sortie, avec  $Y$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ ,
- $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^\infty$ .

Notons que  $x$  est l'inconnue, et est fonction du temps; les fonctions  $u$  et  $y$  sont des fonctions connues du temps.

### 4.1. Observabilité

**Définition 1.18** (Distinguabilité-Indistinguabilité).

Deux états initiaux  $x, \tilde{x}$  de  $X$  tel que  $x \neq \tilde{x}$  sont dits distinguables dans  $X$  si il existe  $t \geq 0$  et

#### 4.. LA NOTION D'OBSERVATEUR

---

$u : [0, t] \rightarrow U$  une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de  $x$  et  $\tilde{x}$  restent dans  $X$  pendant la durée  $[0, t]$  et vérifient  $y(t, x, u(t)) \neq y(t, \tilde{x}, u(t))$ .

Réciproquement, Deux états initiaux  $x, \tilde{x}$  de  $X$  tel que  $x \neq \tilde{x}$  sont indistinguables (notés  $x \sim \tilde{x}$ ) si pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $u : [0, t] \rightarrow U$  pour lesquels les trajectoires issues de  $x, \tilde{x}$  restent dans  $X$ , on a :  $y(t, x, u(t)) = y(t, \tilde{x}, u(t))$ .

#### Remarque 1.9.

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence. Notons par  $I(x)$  la classe d'équivalence de  $x$ .

#### Définition 1.19 (observabilité).

Le système (4.1) est

1. observable en  $x \in X$  si  $I(x) = \{x\}$ ,
2. observable si  $I(x) = \{x\}$ , pour tout  $x \in X$ .

#### Définition 1.20 (Observabilité faible).

Le système (4.1) est faiblement observable [resp. en  $x_0$ ] si il existe un voisinage  $V$  de tout  $x$  [resp. en  $x_0$ ] tel qu'il n'existe pas d'état indistinguable de  $x$  [resp.  $x_0$ ] dans  $V$ .

#### Définition 1.21 (Observabilité locale en temps et en espace).

L'état  $x$  est localement observable, si pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $\eta > 0$  plus petit que  $\epsilon$  et un voisinage  $W$  de  $x$  contenu dans  $V$ , tel que pour tout  $\tilde{x} \in W$ , il existe une entrée  $[0, \eta] \ni t \rightarrow u(t)$  qui distingue  $x$  et  $\tilde{x}$ , c'est-à-dire telle que  $y(\eta) \neq \tilde{y}(\eta)$ . Le système (4.1) est localement observable s'il l'est pour tout  $x$ .

#### Remarque 1.10.

$y(t)$  (resp.  $\tilde{y}(t)$ ) correspond à la sortie de (4.1) avec l'entrée  $u(t)$  et la condition initiale  $x$  (resp.  $\tilde{x}$ ).

#### Définition 1.22 (Observabilité locale faible).

Le système est localement faiblement observable en  $x_0 \in V$ , s'il existe un voisinage ouvert  $V'(x_0) \subset V$  contenant  $x_0$ , tel que pour tout voisinage  $V'' \subset V'(x_0)$  de  $x_0$ , pour tout point  $x_1 \in V''(x_0)$ , les couples  $(x_0, x_1)$  sont distinguables et les trajectoires  $x(t, x_0, u(t))$  et  $x(t, x_1, u(t))$  évoluent à l'intérieur de  $V''(x_0)$ .

## 4.2. Critère d'observabilité

La seule façon effective de tester l'observabilité d'un système est de considérer l'application qui à  $x$  associe  $y$  et ses dérivées en temps. Nous supposons dans cette section que  $y$  et  $u$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Définition 1.23** (Espace d'Observation).

L'espace d'observation du système (4.1) est le plus petit espace vectoriel, noté  $\mathcal{O}(h)$ , contenant les composantes de  $h : h_1, \dots, h_p$ , et tel que pour toute entrée  $u \in U$  et pour tout  $\tau \in \mathcal{O}(h)$ ,  $L_{f_u}\tau \in \mathcal{O}(h)$ , avec  $f_u(x) = f(x, u)$  et  $L_{f_u}\tau(x) = \frac{\partial \tau}{\partial x} f(x, u)$ .

**Définition 1.24** (Observabilité au sens du rang).

Le système (4.1) est observable au sens du rang en  $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$  si la dimension de l'espace vectoriel engendré  $d\mathcal{O}(h)|_{x_0} = \{d\tau|_{x_0}, \tau \in \mathcal{O}(h)\}$  est égal à  $n$ .

Le système (4.1) est observable au sens du rang s'il est observable pour tout  $x \in X$ .

**Remarque 1.11.**

L'observabilité exprime le fait que si l'on connaît à l'instant  $t_0$  la sortie  $y(t)$  et toutes ses dérivées, alors  $x(t_0)$  est défini de manière biunivoque.

**Théorème 1.11** (Condition du rang).

- Si le système (4.1) satisfait en  $x_0$  la condition d'observabilité au sens du rang, alors le système (4.1) est observable en  $x_0$ .
- Si (4.1) satisfait la condition d'observabilité au sens du rang, alors il est localement faiblement observable.
- Réciproquement, si le système est localement faiblement observable, alors il satisfait la condition du rang dans un ouvert dense de  $X$ .

**Définition 1.25** (Entrée universelle).

Une entrée  $u : [0, T] \rightarrow U$  admissible est dite universelle pour le système (4.1) sur  $[0, T]$  si, pour tout couple d'états initiaux distincts  $x_0$  et  $x_1$ , il existe au moins un temps  $t \in [0, T]$  tel que  $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$ . Une entrée non universelle est dite singulière.

**Définition 1.26** (Uniforme observabilité).

Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans  $U$  sont universelles est dit  $U$ -uniforme observable.

### 4.3. Observateur à grand gain

Un observateur ou reconstruteur d'état est un système dynamique qui permet d'obtenir une estimation de la valeur courante de l'état non mesuré d'un système à partir des informations antérieures sur les entrées et la sortie de ce dernier.

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{f}(\hat{x}(t), u(t), y(t)), \\ \hat{y}(t) &= \hat{h}(\hat{x}(t)),\end{aligned}\tag{4.2}$$

où  $\hat{x} \in M$  variété différentiable telle que  $h : M \rightarrow V$  une submersion (application différentiable surjective de rang  $n$ ),  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  espace d'état de (4.1);  $u$  et  $y$  sont les entrées et sorties de (4.1).

La reconstruction de l'état peut être schématisé ainsi :

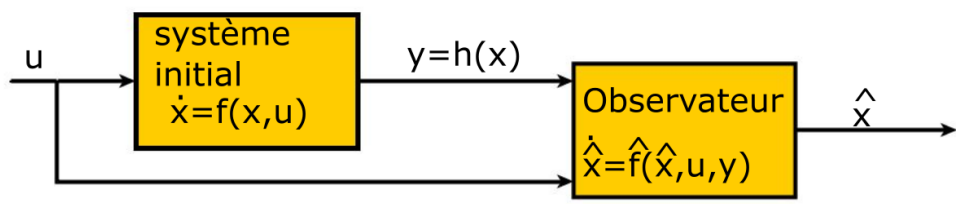


Figure 1.1 – Schéma observateur

**Définition 1.27** (Observateur).

(i) On appelle observateur de (4.1), tout système auxiliaire sous la forme de (4.2) dont la sortie de l'état estimé  $\hat{x}(t)$  est tel que :

$$\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

$e(t)$  s'appelle l'erreur de l'observation.

(ii) Le système (4.2) est un observateur asymptotique local de (4.1), s'il existe  $x_0 \in X$  et un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

(iii) Le système (4.2) est un observateur global de (4.1) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

pour toute condition initiale  $x(0) \in X$  et  $\hat{x}(0) \in M$ .

(iv) Le système (4.2) est un observateur exponentiel de (4.1) si

$$\exists \lambda, \mu > 0 \text{ tel que } \|e(t)\| \leq \mu e^{-\lambda t} \|e(0)\|.$$

Pour la suite, nous nous placerons dans le cas où (4.1) est un système autonome affine par rapport à la commande. Nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u, \\ y(t) = h(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \phi(\mathbb{R}^n) \\ \xi &\mapsto \begin{pmatrix} h(\xi) \\ L_f(h)\xi \\ \vdots \\ L_f^{n-1}(h)\xi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $L_f(h)$  représente la dérivée de Lie à l'ordre 1 de  $h$ , et a pour expression :

$$L_f(h) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$$

et les dérivées successives sont données par

$$L_f^p h = L_f(L_f^{p-1}(h)) \text{ avec } L_f^1 h = L_f h \text{ et } L_f^0 h = h.$$

Nous supposons que (4.3) est observable pour toutes les entrées et que  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(\mathbb{R}^n)$  est un difféomorphisme et effectuons le changement de variable suivant :

$$z_1 = h, \quad z_2 = L_f(h), \quad \dots, \quad z_n = L_f^{n-1}(h).$$

**Proposition 1.5.**

Le système (4.3) est observable si et seulement si par  $\phi$  (4.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ \vdots \\ g_n(z) \end{pmatrix} u \\ y = Cz. \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $C = [1, 0, \dots, 0]$ .

**Remarque 1.12.**

Nous demandons que  $\varphi$  et  $g_i$  soient globalement Lipschitzienne pour que les trajectoires de (4.4) ne partent pas à l'infini.

Le second membre de (4.4) est égal  $F(z) + G(z)$ , avec :

$$F(z) = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix} \text{ et } G(z) = \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_n(z) \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

**Théorème 1.12.** Supposons que (4.4) est uniformément observable et que  $\varphi$  et  $g_i$  Lipschitzienne alors :

$$\dot{\hat{z}} = F(\hat{z}) + G(\hat{z}) - S_\theta^{-1}C^t(C\hat{z} - y)$$

est un observateur pour (4.4). De plus pour  $\theta$  assez grand  $\|\hat{z} - z\| \leq K e^{-\frac{\theta t}{3}} \|\hat{z}_0 - z_0\|$ . Avec  $S_\theta$  vérifie  $\theta S_\theta + A^t S_\theta + S_\theta A = CC^t$  c'est-à-dire  $S_\theta$  solution stationnaire de

$$-\dot{S}_\theta = \theta S_\theta + A^t S_\theta + S_\theta A - CC^t.$$

**Lemme 1.3.**

$-\dot{S}_\theta = \theta S_\theta + A^t S_\theta + S_\theta A - CC^t$  admet une unique solution stationnaire  $S_\theta$  dont les coefficients sont donnés par  $S_\theta(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} S_\theta(i, j) = S_1(i, j) \frac{1}{\theta^{i+j-1}}$  où  $S_1$  est obtenue pour  $\theta = 1$ .

**Théorème 1.13.**

L'observateur grand gain du système initial est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = F(\hat{x}) + G(\hat{x}) - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}} S_\theta^{-1}C^t(C\hat{x} - y)$$

# Chapitre 2

## Quelques modèles épidémiologiques

### Sommaire

---

<b>1. Modèle de Bernouilli</b>	<b>26</b>
<b>2. Modèle Kermack et Mckendrick</b>	<b>28</b>
2.1. Présentation du modèle	28
2.2. Étude du modèle	29
<b>3. Modèle S/S de Vargas</b>	<b>30</b>
3.1. Présentation du modèle	30
3.2. Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie	31
3.3. Stabilité globale du point d'équilibre endémique	32

---

Ethymologiquement, le mot épidémiologie signifie : études sur les populations. Force est de noter que le mot épidémiopathologie est le plus approprié car, signifiant : études sur les maladies des populations. Pourtant, la définition pratique du mot est : une science s'intéressant à la distribution et aux déterminants des maladies dans la population, dans le but :

- de contribuer à la connaissance de leurs causes,
- de les prévenir et de les contrôler dans la population,
- de guider la politique de santé,
- d'aider à maintenir les individus en bonne santé et à traiter les maladies.

Le champ d'étude de l'épidémiologie reste les maladies infectieuses. Ces dernières représentent des maladies provoquées par transmissions de micro-organismes tels que : les virus, les bactéries, les parasites, les champignons, les levures. Nous pouvons citer quelques maladies infectieuses : la tuberculose, la maladie de Lyme, la dengue, le chikungunya, l'hépatite B, le paludisme, le VIH SIDA, etc.

Avec les données recueillies sur les infections, les mathématiciens élaborent des modèles mathématiques, afin de pouvoir étudier les infections avec les outils mathématiques. Cette approche de l'épidémiologie n'est pas très ancienne, et s'impose de plus en plus grâce à son apport, que nous allons présenter dans la suite. Elle constitue l'épidémiologie mathématique.

L'épidémiologie mathématique a connu beaucoup d'essor au cours des dernières décennies. Historiquement, le travail de Bernouilli sur la variole fait parti des plus anciens, et occupe une place importante. Il a permis de mettre en lumière très tôt l'importante contribution des mathématiciens dans l'épidémiologie.

### 1. Modèle de Bernouilli

Certains le considèrent comme étant le premier modèle mathématique en épidémiologie. Le modèle de Daniel Bernouilli 1760 est basée sur l'étude de la variole.

Pour combattre la variole, les médecins inoculent une certaine forme, que l'on espère peu virulente de la maladie, par scarification avec le contenu de la substance suppurant des vésicules d'un malade, ce qui est sans doute très risqué.

Le but du travail de Bernouilli était de donner une estimation quantitative des avantages et inconvénients de l'inoculation antivariolique. Nous allons exposer de façon résumé le modèle de Bernouilli, pour les détails il faut se référer à son travail [3]. Les données disposées par Bernouilli sont :

- $\beta$  : taux d'attaque de la variole par an et par susceptible,
- $\nu$  proportion de variolés qui meurent de la variole,
- $1/N$  proportion de personnes qui meurent de l'inoculation.

Les estimations numérique de son temps sont :  $\beta \simeq 1/8$ ,  $\nu \simeq 1/8$  et  $N \simeq 200$ . Par ailleurs, Bernouilli disposait de la table de cohorte de Halley. Il s'agit d'une table composée de deux colonnes : une pour le temps  $t$  en unité d'années et la seconde pour le nombre de survivants  $\xi(t)$ , à l'époque  $t$ , issus d'une cohorte (personnes nées la même année) de taille initiale  $\xi(0)$ .

Bernouilli désigne par  $S(t)$  le nombre de susceptibles vivant en  $t$  dans la cohorte de Halley et commence par construire une fonction à l'aide de ses données. Son idée consiste à ramener la variation totale d'une population à un seul individu en imaginant bien sûr un comportement homogène de ses membres. Il considère par  $\zeta(t)$  le nombre de survivants en  $t$  d'une cohorte de



taille initiale  $\zeta(0) = \xi(0)$  qui ne subit pas la variole. Il élabore le modèle suivant :

$$S(t) = -\beta S(t) + (\dot{\xi}(t) + \nu\beta S(t)) \frac{S(t)}{\xi(t)},$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\mu(t)\zeta(t) = \frac{\dot{\xi}(t) + \nu\beta S(t)}{\xi(t)}.$$

Avec  $\mu(t)$  étant le taux instantané de mortalité per capita pour toutes les causes autres que la variole.  $\xi(t)$  est connu grâce à la table de Halley. Comme, il est admis que les nouveau-nés sont susceptibles d'attrapés la maladie, donc  $S(0) = \xi(0)$ . On montre que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\xi(t)}{S(t)} \right) = \beta \frac{\xi(t)}{S(t)} - \nu\beta.$$

Cette relation est une équation différentielle du premier ordre linéaire et inhomogène pour  $\frac{\xi(t)}{S(t)}$ , avec la condition initiale  $\frac{\xi(0)}{S(0)} = 1$ . Sa résolution donne :

$$\frac{\xi(t)}{S(t)} = (1 - \nu)e^{\beta t} + \nu,$$

d'où

$$S(t) = \frac{\xi(t)}{(1 - \nu)e^{\beta t} + \nu}.$$

Donc  $S(t)$  peut être calculée grâce à  $\xi(t)$ , qui est connu.

D'autre part, nous avons :

$$\frac{\dot{\zeta}(t)}{\zeta(t)} - \frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} = \nu\beta \frac{S(t)}{\xi(t)} = \frac{\nu\beta}{(1 - \nu)e^{\beta t}},$$

en intégrant l'équation et tenant compte de la condition initiale prise dans le tableau de cohorte  $\zeta(0) = 1300$ , il obtient :

$$\ln \frac{\zeta(t)}{\xi(t)} = \int_0^t \frac{\nu\beta ds}{(1 - \nu)e^{\beta s} + \nu} = \ln \frac{e^{\beta t}}{(1 - \nu)e^{\beta t} + \nu},$$

on en déduit que :

$$\zeta(t) = \frac{\xi(t)}{1 - \nu + \nu e^{-\beta t}}.$$

De même la connaissance de  $\xi(t)$  permet la détermination de  $\zeta(t)$ .

**Conclusion de Bernoulli** Notons que Bernoulli calcule d'abord l'espérance de vie d'une population inoculée sans aucun risque, 29 ans et 9 mois, avant d'arriver à 29 ans et 7 mois « tout

tribu payé », ce qui est son expression pour signifier qu'il a tenu compte de ce que l'inoculation elle-même est mortelle une fois sur 200. Il a donc beau jeu d'insister : « l'intérêt public demandera toujours, non seulement que l'on emploie l'inoculation, mais encore qu'on se hâte de l'employer » (paragraphe 14 de son article ([3])).

## 2. Modèle Kermack et Mckendrick

### 2.1. Présentation du modèle

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le modèle de Kermack et Mckendrick. C'est un modèle compartimental simple. En effet, les individus sont compartimentés selon l'état clinique en individus sains ( $S$ ), infectieux ( $I$ ) et guéris ( $R$ ).

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \frac{SI}{N}, \\ \dot{I} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I. \end{cases} \quad (2.1)$$

L'élément crucial dans ce modèle en compartiment est indubitablement le processus de contagion : comment un individu susceptible devient infecté. Comme ce processus de contagion rend compte du passage du parasite d'un individu infecté à un individu susceptible, on comprend que le nombre de nouveaux malades dépend non seulement du nombre d'individus susceptibles, mais également du nombre d'individus déjà infectés présents dans la population. On pourrait ainsi naïvement penser que la force d'infection est proportionnelle au nombre  $I$  d'individus infectieux dans la maladie :

$$\lambda = \beta I \quad (2.2)$$

où le paramètre  $\beta$  rend compte du taux de contact infectieux. Il est important de noter ici que ce paramètre dépend à la fois de propriétés intrinsèques à la population hôte, des caractéristiques du parasite et de la maladie étudiée (Keeling et Rohani 2007). Une expression de  $\beta$  souvent proposée est :

$$\beta = -c \ln(1 - p) \quad (2.3)$$

où  $c$  est le taux de contact entre individus (propriété intrinsèque à la population hôte) et  $p$ , la probabilité qu'il y ait infection sachant que le contact a eu lieu avec un individu infecté (caractéristique du parasite et de la maladie). Ici le terme "contact" est pris dans son sens le

plus large. Il peut s'agir de contact direct pour les maladies à transmission direct ou de contact indirect pour les maladies à transmission indirecte.

## 2.2. Étude du modèle

### Existence d'épidémie

La première question qu'on se pose est de savoir s'il y a possibilité de voir apparaître une épidémie d'une infection modélisée par ce modèle, dans une population de sains. La réponse à cette question peut se faire en examinant (2.1)<sub>2</sub>. Cette équation informe que le nombre de malades augmente dès que  $\dot{I} > 0$ , ce qui revient à  $r = \beta S/N - \gamma > 0$ , ou encore  $\mathcal{R} > 1$ , avec

$$\mathcal{R} = \beta S / (\gamma N) \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{R}$  est le taux de reproduction de la maladie. Pour savoir si une épidémie de l'infection peut apparaître, il suffit d'examiner la valeur de  $\mathcal{R}$  lorsque tous les individus sont sains,  $S = N$ . Dans ce cas, le taux est égal à :

$$\mathcal{R}_0 = \beta / \gamma \quad (2.5)$$

et  $\mathcal{R}_0$  est appelé le **taux de reproduction de base**. Il représente le nombre de nouveaux cas engendrés par un seul individu infecté dans une population constituée entièrement de susceptibles. Ce taux joue un rôle fondamentale dans l'épidémiologie, car sa valeur nous renseigne s'il y a possibilité d'épidémie. Et en général, une épidémie peut avoir lieu dès que  $\mathcal{R}_0 > 1$  et impossible pour  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

### Détermination du nombre maximal d'infectés

Il serait utile du point de vue de la santé publique de connaître le nombre maximal atteint par les infectés ( $I_{max}$ ) lors d'une épidémie. Toujours, considérons l'équation (2.1)<sub>2</sub>, que l'on réécrit sous la forme :

$$dI/dt = (\beta S/N - \gamma)I = (\beta S/N - \gamma)(-\frac{dS}{dt} N/\beta S) = -dS/dt(1 - \gamma N/(\beta S)), \quad (2.6)$$

donc

$$dI = (\gamma N/(\beta S) - 1)dS.$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient :

$$I(t) = I_0 - S(t) + S_0 + \frac{\gamma N}{\beta} \ln \frac{S(t)}{S_0} = N - S(t) + \frac{\gamma N}{\beta} \ln \frac{S(t)}{S_0},$$

et l'étude de cette équation montre que  $I$  admet un maximum si  $S = \gamma N/\beta$ , il est égal à  $I_{max} = N(1 - \gamma/\beta + \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{\gamma N}{\beta S_0})$ .

**Points d'équilibre** Un point d'équilibre épidémiologique est un point d'équilibre tel que s'il est atteint, le nombre d'infectés ne varie plus. Il existe deux équilibres pour ce système :

- extinction de la maladie :  $I = 0$  (point d'équilibre sans maladie),
- persistance endémique de la maladie :  $S/N = \gamma/\beta = 1/\mathcal{R}_0$ .

Cette dernière condition nous offre une méthode simple d'estimation du  $\mathcal{R}_0$ .  $\mathcal{R}_0$  est égal à l'inverse de la proportion de susceptibles à l'équilibre endémique ( $S/N$ ).

## 3. Modèle SIS de Vargas

Dans ce paragraphe, nous présentons un modèle épidémiologique simple de Vargas ([69]), nous allons effectuer l'étude de stabilité. Il s'agit d'un modèle SIS, avec une incidence définie par la loi de l'action de masse  $\frac{\beta SI}{S+I}$ . La méthode de Lyapunov sera utilisée pour prouver la stabilité.

### 3.1. Présentation du modèle

Certaines infections ne confèrent pas d'immunité permanente. Les individus guéris redeviennent immédiatement susceptibles. Ces types d'infections sont modélisées par des modèles SIS. La population totale représentée par  $N$  est divisée en deux compartiments : le compartiments des susceptibles, noté  $S$ , et le compartiment des infectés, noté  $I$ . Le modèle est représenté par le diagramme suivant :

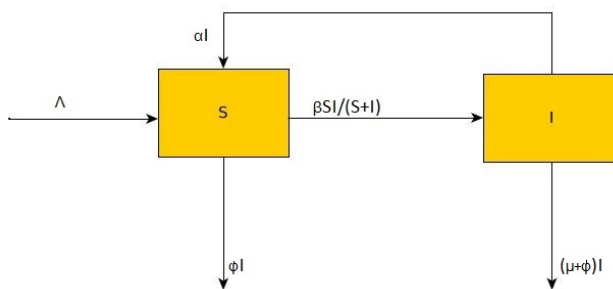


Figure 2.1 – diagramme de transfert pour le SIS

Le recrutement est égal à  $\Lambda$ , le taux de contact est  $\beta$ , le taux de mortalité est égal à  $\mu$ , la

surmortalité causée par l'infection est égal à  $\alpha$ , le taux de guérison est  $\phi$ .

Le diagramme indique alors que le système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \frac{\beta SI}{S+I} - \mu S + \phi I, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{S+I} - (\mu + \phi + \alpha)I. \end{cases} \quad (3.1)$$

L'équation différentiel de la population totale est donnée par :

$$\frac{d(S+I)}{dt} = \Lambda - \mu(S+I) - \alpha I. \quad (3.2)$$

Nous tirons de la relation précédente, que l'ensemble

$$\Omega = \{(S, I) \in \mathbb{R}_+^2, S+I \leq \Lambda/\mu\}, \quad (3.3)$$

est invariant pour (3.1). Par ailleurs, il existe deux points d'équilibre, qui sont obtenus grâce à la résolution de (3.1), pour  $\dot{S} = \dot{I} = 0$ . Notamment le point d'équilibre sans maladie  $E_0$  est obtenu en ajoutant la condition  $I = 0$ , la résolution de (3.1) donne  $E_0 = (\Lambda/\mu, 0)$ . Et le point d'équilibre endémique  $E^*$  est obtenu avec la condition  $I \neq 0$ . Le calcul donne :

$$\left( \frac{\Lambda(\mu + \phi + \alpha)}{\mu(\mu + \phi + \alpha) + (\alpha + \mu)(\beta - (\mu + \phi + \alpha))}, \frac{\Lambda(\beta - (\mu + \phi + \alpha))}{\mu(\mu + \phi + \alpha) + (\alpha + \mu)(\beta - (\mu + \phi + \alpha))} \right).$$

De plus, le taux de reproduction de base, qu'on peut calculer en prenons l'inverse de la proportion de susceptibles à l'équilibre, est donnée par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \phi + \alpha}.$$

Nous allons examiner la stabilité autour des points d'équilibre.

## 3.2. Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

### Théorème 2.1.

Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(S, I) = \frac{1}{2}I^2.$$

La dérivée de  $V$  est donnée par :

$$\begin{aligned} V'(S, I) &= \frac{I^2}{S+I}(\beta S - (\alpha + \mu + \phi)(S + I)), \\ &= -(\alpha + \mu + \phi) \frac{I^2}{S+I}((1 - \mathcal{R}_0)S + I). \end{aligned}$$

$V'(S, I) < 0$  si  $I \neq 0$ , et  $V(S, I) = 0$  uniquement au point d'équilibre sans maladie. D'où, d'après le théorème de Lyapunov : le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

### 3.3. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

#### Théorème 2.2.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$L = \left[ (S - S^*) + (I - I^*) - (S^* + I^*) \ln \frac{S + I}{S^* + I^*} \right] + \frac{(\alpha + 2\mu)(S^* + I^*)}{\beta I^*} (I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}).$$

La fonction  $L$  est strictement positive pour  $(S > 0, I > 0)$ , et est égale au point d'équilibre endémique. La dérivée de  $L$  est :

$$\begin{aligned} L' &= \frac{[(S - S^*) + (I - I^*)]}{S + I} \frac{d(S + I)}{dt} + \frac{(\alpha + 2\mu)(S^* + I^*)}{\beta I^*} \frac{(I - I^*)}{I} \frac{dI}{dt}, \\ &= \frac{[(S - S^*) + (I - I^*)]}{S + I} (\Lambda - \mu(S + I) - \alpha I) \\ &\quad + \frac{(\alpha + 2\mu)(S^* + I^*)}{\beta I^*} \frac{(I - I^*)}{I} \left( \frac{\beta S I}{S + I} - (\mu + \phi + \alpha) I \right). \end{aligned}$$

Or, nous avons les égalités suivantes à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mu(S^* + I^*) + \alpha I^*, \\ \alpha + \mu + \phi &= \frac{\beta S^*}{S^* + I^*}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En utilisation (3.4), l'expression de  $L'$  devient :

$$L' = \frac{[(S - S^*) + (I - I^*)]}{S + I} (-\mu(S - S^*) - (\alpha + \mu)(I - I^*))$$

$$+ \frac{(\alpha + 2\mu)(S^* + I^*)}{I^*} (I - I^*) \left( \frac{S}{S + I} - \frac{S^*}{S^* + I^*} \right).$$

Notons que :

$$\frac{S}{S + I} - \frac{S^*}{S^* + I^*} = \frac{I^*(S - S^*) - S^*(I - I^*)}{(S + I)(S^* + I^*)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} L' &= \frac{[(S - S^*) + (I - I^*)]}{S + I} (-\mu(S - S^*) - (\alpha + \mu)(I - I^*)) \\ &+ \frac{(\alpha + 2\mu)(S^* + I^*)}{I^*} (I - I^*) \left( \frac{I^*(S - S^*) - S^*(I - I^*)}{(S + I)(S^* + I^*)} \right), \\ &= -\mu \frac{(S - S^*)^2}{S + I} - \left( \alpha\mu + (\alpha + 2\mu) \frac{S^*}{I^*} \right) \frac{(I - I^*)^2}{S + I}. \end{aligned}$$

$V(S, I) < 0$  si  $S, I > 0$  et  $V(S, I) = 0$  uniquement au point d'équilibre endémique, donc d'après le théorème de Lyapunov : le point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable.





# Chapitre 3

## Stabilité globale d'un modèle épidémiologique avec deux classes d'infectés et une incidence masse action

### Sommaire

---

1.	Présentation du modèle . . . . .	35
2.	Calcul de $\mathcal{R}_0$ . . . . .	39
3.	Points d'équilibre du système . . . . .	40
4.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	44
5.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	47
5.1.	Stabilité locale du point d'équilibre endémique . . . . .	47
5.2.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	49
6.	Simulations . . . . .	51
7.	Conclusion . . . . .	55

---

### 1. Présentation du modèle

Le but de ce paragraphe consiste à présenter notre modèle d'étude. En effet, il s'agit d'un modèle de type  $SI$ . Ce type de modèle est déjà bien connu dans la littérature et présente plusieurs variantes. C'est un modèle épidémiologique dont le phénomène modélisé est une infection sans rétablissement ; en d'autres termes si un individu est infecté, il le reste durant toute sa vie. Lors d'une épidémie la population est scindée en deux compartiments : les individus sains susceptibles d'attraper la maladie et les infectés, notés respectivement par  $S$  et  $I$ . La population totale est représentée par  $N$ . Dans le cas particulier que nous abordons, le compartiment  $I$  est constitué

de deux compartiments, à savoir : les infectés au premier stade de la maladie et les infectés en phase terminale de l'infection, notés respectivement par  $I_1$  et  $I_2$ . Si  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les taux de contacts respectifs des compartiments  $I_1$  et  $I_2$ , alors il y a  $\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2$  contacts des infectés. Si tout contact avec un susceptible engendre un nouveau infecté, alors il y a  $(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)P(S)$  nouveaux infectés, où  $P(S)$  est la probabilité pour qu'un infecté rencontre un susceptible. La quantité  $(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)P(S)$  est connue dans la littérature par l'incidence masse action. Notons que la plupart des modèles utilise l'incidence bilinéaire  $(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S$ .

Le but de ce travail est d'analyser la stabilité globale du modèle  $S I_1 I_2$ . Ce système peut modéliser plusieurs infections n'admettant pas d'immunité, particulièrement le VIH. Pour ce modèle, nous supposons  $P(S) = \frac{S}{N}$ . Ainsi l'incidence est donnée par  $(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{S}{N}$ , où  $N$  est la population totale ( $N = S + I_1 + I_2$ ). La stabilité globale des systèmes utilisant ce type d'incidence est un sujet intéressant et plusieurs travaux y ont été effectués. Les travaux les plus remarquables ont été les œuvres de C. Simon et J. Jacquez dans [67], Melesse et Gumel dans [64], M. Li, J. Graef, L. Wang et J. Karsai dans [51], C. C. Cluskey dans [59], J. M. Hyman et J. Li [37]. Les auteurs de [67] ont étudié un système similaire au notre avec  $n$  classes d'infectés et ont utilisé une méthode géométrique pour leur analyse. Toutefois, ils ont pris un recrutement constant et ils supposent que la surmortalité causée par l'infection est égale au temps mis pour qu'un infecté passe d'un compartiment à un autre. Remarquons que le recrutement variable rend la détermination du point d'équilibre endémique difficile, et dans notre cas nous avons établi uniquement son existence et son unicité. Nous relevons surtout le fait qu'ils ont pris une condition forte reliant tous les paramètres pour prouver la stabilité globale du point d'équilibre endémique. Cependant, dans notre travail nous avons juste supposé que le taux de natalité est supérieure à la surmortalité causée par l'infection. De même, dans la démonstration établie dans la preuve de la stabilité globale du point d'équilibre endémique, les auteurs de [64], font une supposition très lourde et très difficile à réaliser. Dans le travail fait dans [51], les auteurs travaillent avec un seul taux de contact. Dans les travaux [59, 37], des systèmes similaires au nôtre ont été considérés, mais les auteurs de [37] ne traitent pas la question de la stabilité globale du point d'équilibre endémique, mais aussi l'auteur de [59] suppose que  $\beta_1 = \beta_2$  et  $\gamma = d$ . Par ailleurs, nous pouvons encore citer d'autres travaux, comme le travail de H. Guo et M. Y. Li [30], où les auteurs établissent la stabilité du point d'équilibre sans maladie, et le point d'équilibre endémique, en utilisant une incidence bilinéaire. Nous mentionnons également le travail de A. Iggidr, J. Mbang, G. Sallet et J. J. Tewa dans [40]

où les auteurs travaillent sur un système similaire mais avec une incidence bilinéaire.

Le système étudié dans ce chapitre est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = bN - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{S}{N} - \mu S, \\ \dot{I}_1 = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{S}{N} - (\mu + \gamma) I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma I_1 - (\mu + d) I_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec :

- $b$  est le taux de natalité de la population considérée,
- $\mu$  est le taux de mortalité de la population,
- $\beta_1$  et  $\beta_2$  les taux de contacts respectifs des compartiments  $I_1$  et  $I_2$ ,
- $1/\gamma$  est la durée moyenne pour passer d'infecté de première phase en phase terminale,
- $d$  est la surmortalité occasionnée par l'infection,
- $N = S + I_1 + I_2$ .

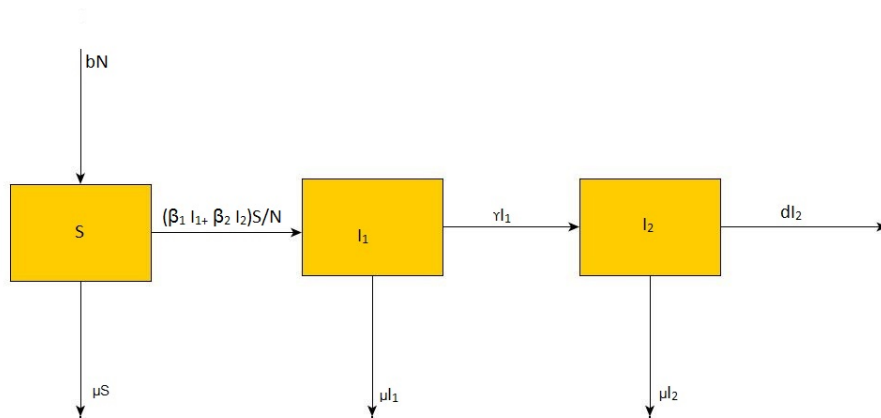


Figure 3.1 – Diagramme de transfert pour le modèle  $S/I_1/I_2$

L'expression de la dérivée de la population totale est déduite des celles de  $S$ ,  $I_1$  et  $I_2$  et s'écrit :

$$\dot{N} = (b - \mu)N - dI_2.$$

## 1.. PRÉSENTATION DU MODÈLE

Le point d'équilibre sans maladie est donné par  $S = N$ ,  $I_1 = I_2 = 0$ . Tout point d'équilibre vérifie le système d'équation :

$$\begin{cases} bN^* - (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) \frac{S^*}{N^*} - \mu S^* = 0, \\ (\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) \frac{S^*}{N^*} - (\mu + \gamma) I_1^* = 0, \\ \gamma I_1^* - (\mu + d) I_2^* = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

La résolution du système donne :

$$I_1^* = \frac{\mu + d}{\gamma} I_2^*,$$

$$S^* = \frac{(\mu + d)^2 (\mu + \gamma)^2}{\gamma (b(\beta_1 (\mu + d) + \beta_2 \gamma) - \mu (\mu + \gamma) (\mu + d))} I_2^*,$$

et  $I_2^*$  libre. Donc (1.1) admet une infinité de points d'équilibre endémique. De plus, la détermination d'une fonction de Lyapunov de notre système autour d'un point d'équilibre endémique n'est pas aisée. Ainsi, pour l'étude de (1.1), nous allons passer au système des proportions (prévalences).

Posons

$$s = \frac{S}{N}, \quad i_1 = \frac{I_1}{N} \text{ et } i_2 = \frac{I_2}{N},$$

la dérivée de  $s$  par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{s} = \frac{\dot{S}N - S\dot{N}}{N^2} = \frac{\dot{S}}{N} - \frac{S}{N} \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{S}}{N} - s \frac{\dot{N}}{N}.$$

Nous avons :

$$\frac{\dot{S}}{N} = b - (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2) s - \mu s \text{ et } \frac{\dot{N}}{N} = b - \mu - d i_2.$$

On obtient alors :

$$\dot{s} = b - bs - (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2) s + d s i_2.$$

De manière similaire, nous déterminons les expressions de  $i_1$  et  $i_2$ . Le modèle de proportions s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{s} = b - bs - (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2) s + d s i_2, \\ \dot{i}_1 = (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2) s - (b + \gamma) i_1 + d i_1 i_2, \\ \dot{i}_2 = \gamma i_1 - (b + d) i_2 + d i_2^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Les systèmes (1.3) et (1.1) représentent le même phénomène, d'où l'étude de (1.1) se ramène à l'étude de (1.3). Toutefois, nous soulignons que notre étude a été faite sous la condition  $b \geq d$ .

Nous débutons l'étude de notre modèle par la détermination du taux de reproduction de base dans le paragraphe suivant.

## 2. Calcul de $\mathcal{R}_0$

Dans ce paragraphe, il est question de la détermination du taux de reproduction de base. Nous rappelons que ce taux représente le nombre de nouveaux cas engendrés par un seul individu infecté dans une population constituée uniquement de susceptibles.

Nous notons par :

- $\mathcal{F}_j(s, i_1, i_2)$  le taux de nouveaux infectés dans le compartiment  $j$ ,
- $\mathcal{V}_j(s, i_1, i_2)$  le taux de transfert d'individus d'un compartiment à un autre par tout autre moyen.

Les matrices  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  sont représentées par :

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2)s \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} b - bs - (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2)s + ds i_2 \\ -(b + \gamma)i_1 + d i_1 i_2 \\ \gamma i_1 - (b + d)i_2 + d i_2^2 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de leur jacobienne respective au point d'équilibre sans maladie  $((1, 0, 0))$  donne :

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{D}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -b & -\beta_1 & -\beta_2 + d \\ 0 & -(b + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -(b + d) \end{pmatrix}.$$

Considérons  $F$  et  $V$  les matrices données par :

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} -(b + \gamma) & 0 \\ \gamma & -(b + d) \end{pmatrix}.$$

### 3.. POINTS D'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME

---

Le taux de reproduction de base est le rayon spectral de la matrice  $-FV^{-1}$ . Le calcul donne :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1}{b + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(b + \gamma)(b + d)}.$$

Après avoir établi le taux de reproduction nous passons à la détermination d'éventuelles points d'équilibre.

## 3. Points d'équilibre du système

Nous notons d'abord le point d'équilibre sans maladie que l'on note souvent par DFE (Disease Free Equilibrium) et  $DFE = (1, 0, 0)$ .

Nous cherchons maintenant d'éventuels points d'équilibre endémique c'est-à-dire des points d'équilibre dont  $(i_1, i_2) \neq (0, 0)$ . Nous avons le résultat suivant :

### Proposition 3.1.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , il existe un unique point d'équilibre endémique.

*Démonstration.* Il est important de signaler que dans notre cas, nous n'allons pas déterminer explicitement le point d'équilibre, mais nous allons prouver son existence et son unicité.

### Existence

A l'équilibre, nous avons :

$$\begin{cases} b - bs^* - (\beta_1 i_1^* + \beta_2 i_2^*)s^* + ds^* i_2^* = 0, \\ (\beta_1 i_1^* + \beta_2 i_2^*)s^* - (b + \gamma)i_1^* + di_1^* i_2^* = 0, \\ \gamma i_1^* - (b + d)i_2^* + d(i_2^*)^2 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

L'équation (3.1)<sub>3</sub> donne :

$$i_1^* = \frac{b + d}{\gamma} i_2^* - \frac{d}{\gamma} i_2^{*2}. \quad (3.2)$$

En remplaçant  $i_1^*$  par son expression dans (3.1)<sub>2</sub>, nous obtenons après simplification :

$$(\beta_1(b + d) - \beta_1 d i_2^* + \beta_2 \gamma)s^* - (b + \gamma)(b + d) + d(b + d)i_2^* + d(b + d)i_2^* - d^2 i_2^{*2} = 0. \quad (3.3)$$

Du fait que  $s^* + i_1^* + i_2^* = 1$ , nous avons :

$$s^* = 1 - i_1^* - i_2^* = 1 - \frac{b + d}{\gamma} i_2^* - \frac{d}{\gamma} i_2^{*2} - i_2^*.$$

En substituant  $s^*$  par son expression dans (3.3), il apparait que  $i_2^*$  est solution du polynôme :

$$P(i_2^*) = a_3(i_2^*)^3 + a_2 i_2^{*2} + a_1 i_2^* + a_0 = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} a_3 &= -\beta_1 \frac{d^2}{\gamma}, \\ a_2 &= 2\beta_1 d \frac{b+d}{\gamma} + \beta_1 d + \beta_2 d - d^2, \\ a_1 &= -\beta_1 \frac{(b+d)^2}{\gamma} - \beta_1(b+d) - \beta_1 d - \beta_2(b+d) - \beta_2 \gamma + d(b+\gamma) + d(b+d) \\ &= -\mathcal{R}_0(b+d)(b+\gamma) \left(1 + \frac{b+d}{\gamma}\right) - \beta_1 d + d(2b+d+\gamma), \end{aligned}$$

et

$$a_0 = \beta_1(b+d) + \beta_2 \gamma - (b+d)(b+\gamma) = (b+d)(b+\gamma)(\mathcal{R}_0 - 1).$$

Nous avons  $a_3 < 0$ , et comme  $\mathcal{R}_0 > 1$  donc nous avons aussi :  $a_2 > 0$ ,  $a_1 < 0$ , et  $a_0 > 0$ .

Vu la difficulté qui se rapporte à la détermination des racines du polynôme  $P$ , nous transformons ce problème en un problème d'intersection équivalent :  $P(i_2^*) = 0 \Leftrightarrow Q(i_2^*) = \mathcal{R}_0$  avec

$$Q(i_2^*) = -\frac{a_3}{k}(i_2^*)^3 - \frac{a_2}{k} i_2^{*2} - \frac{a_1}{k} i_2^* + 1, \text{ où } k = (b+d)(b+\gamma).$$

Aux points 0 et 1  $Q$  admet comme valeurs :

$$Q(0) = 1, \text{ et}$$

$$Q(1) = \frac{\beta_1(b^2 + b\gamma + d\gamma) + \gamma(b(b-d+\gamma) + \beta_2(b+\gamma))}{k}.$$

De plus, nous avons :

$$Q(1) - \mathcal{R}_0 = b \frac{\beta_1 b + \beta_2 \gamma + b\gamma + \gamma^2 - d\gamma}{k\gamma} > 0.$$

D'où

$$Q(0) < \mathcal{R}_0 < Q(1).$$

Essayons maintenant de mieux localiser  $i_2^*$  dans  $[0, 1]$ . Partant de l'inégalité

$$i_1^* + i_2^* < 1, \tag{3.4}$$

### 3.. POINTS D'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME

---

et de relation entre  $i_1^*$  et  $i_2^*$  suivante :

$$i_1^* = \frac{b+d}{\gamma} i_2^* - \frac{d}{\gamma} i_2^{*2},$$

nous déduisons que  $i_2^*$  vérifie :

$$R(i_2^*) = -d i_2^{*2} + (b+d+\gamma) i_2^* - \gamma < 0.$$

Le discriminant de ce polynôme donne :

$$\Delta_R = (b+d+\gamma)^2 - 4d\gamma = b^2 + 2b(d+\gamma) + (d-\gamma)^2 > 0.$$

Et les racines sont :

$$r_1 = (b+d+\gamma - \sqrt{\Delta_R})/2d \text{ et } r_2 = (b+d+\gamma + \sqrt{\Delta_R})/2d.$$

Nous remarquons, d'après les expressions des racines que :

1.  $r_1 < \gamma/2d < r_2$
2.  $r_2 > 1$ .

Ainsi, d'après l'étude de signe du polynôme  $R$ , nous obtenons :

$$0 < i_2^* < \min\{r_1, 1\} \leq \min\{\gamma/2d, 1\}, \text{ i.e}$$

$$i_2^* \in I = (0, \min\{r_1, 1\}) \subset (0, \min\{\gamma/2d, 1\}).$$

Par ailleurs, la différence entre  $Q(r_1)$  et  $\mathcal{R}_0$  est :

$$Q(r_1) - \mathcal{R}_0 = (1/(2k))[b(b+d+\gamma + \sqrt{\Delta_R})] > 0.$$

D'où le graphe de  $Q$  rencontre la droite  $y = \mathcal{R}_0$  en au moins un point dans  $I$ .

#### Unicité

Montrons que le graphe de  $Q$  et la droite  $y = \mathcal{R}_0$  se rencontre en un seul de  $I$ . Comme  $Q(0) = 1 < \mathcal{R}_0$ ,  $Q(r_1) > \mathcal{R}_0$ , et  $Q(1) > \mathcal{R}_0$ , il suffit de montrer que  $Q$  admet au plus une seule tangente verticale dans  $I$ .

La dérivée de  $Q$  est :

$$Q'(i_2^*) = -(1/k)(3a_3 i_2^{*2} + 2a_2 i_2^* + a_1).$$

Il faut noter que d'après la règle de descartes des signes qu'il n'y a pas de racines négatives. Pour déterminer les racines de  $Q'$ , nous calculons son discriminant :

$$\Delta = a_2^2 - 3a_3 a_1.$$



- soit  $\Delta \leq 0$ , dans ce cas le résultat est établi,
- soit  $\Delta > 0$ , dans ce cas nous avons deux racines  $x_1$  et  $x_2$ , tels que  $x_1 + x_2 = -(2a_2/3a_3)$ .

Or

$$\begin{aligned}
 -2a_2/3a_3 &= \frac{4b+d}{3} \frac{1}{d} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{\gamma}{d} + \frac{\beta_2\gamma}{\beta_1 d} - \frac{\gamma}{\beta_1} \right\} \\
 &= \frac{2b+d}{3} \frac{1}{d} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{b+d}{d} + \frac{\gamma}{d} + \frac{\beta_2\gamma}{\beta_1 d} - \frac{\gamma}{\beta_1} \right\} \\
 &= \frac{2b+d}{3} \frac{1}{d} + \frac{2}{3\beta_1 d} \{ \beta_1(b+d) + \beta_2\gamma + \beta_1\gamma - d\gamma \} \\
 &= \frac{2b+d}{3} \frac{1}{d} + \frac{2}{3\beta_1 d} \{ (b+d)(b+\gamma)\mathcal{R}_0 + \beta_1\gamma - d\gamma \},
 \end{aligned}$$

donc

$$-2a_2/3a_3 = \frac{2b+d}{3} \frac{1}{d} + \frac{2}{3\beta_1 d} \{ b(b+\gamma)\mathcal{R}_0 + bd\mathcal{R}_0 + \beta_1\gamma + d\gamma(\mathcal{R}_0 - 1) \}.$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned}
 b(b+\gamma)\mathcal{R}_0 &= \beta_1 b + \frac{\beta_2 b\gamma}{b+d}, \\
 \text{et } \frac{b+d}{d} &> 2,
 \end{aligned}$$

ce qui donne  $-2a_2/3a_3 > 2$ , et nous concluons qu'au moins l'une des racines de  $Q'$  est à l'extérieur de  $I$ .

Par conséquent, le graphe de  $Q$  et la droite  $y = \mathcal{R}_0$  se coupe en un seul point. Nous illustrons le résultat par la simulation suivante :

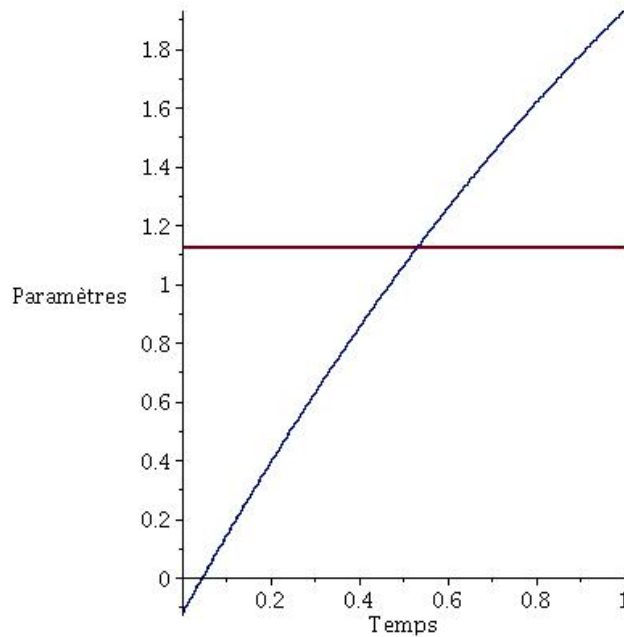


Figure 3.2 –  $\beta_1 = 0.4$ ,  $\beta_2 = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $b = 0.3$ ,  $d = 0.2$ ,  $\mathcal{R}_0 = 1.125000$

Nous tirons les valeurs de  $i_1^*$  et  $s^*$  grâce aux relations :  $i_1^* = \frac{b+d}{\gamma}i_2^* - \frac{d}{\gamma}i_2^{*2}$ , et  $s^* = 1 - \frac{b+d+\gamma}{\gamma}i_2^* + \frac{d}{\gamma}i_2^{*2}$ . D'où l'existence et l'unicité du point d'équilibre endémique pour le système (1.3).  $\square$

Nous allons poursuivre l'étude du modèle en examinant la stabilité autour des points d'équilibre. Ainsi, le paragraphe suivant a pour but l'étude de la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie.

## 4. Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

### Théorème 3.1.

*Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème s'appuie sur la notion de fonction de Lyapunov, et elle se fait en deux cas :  $\beta_2 \geq d$  et  $\beta_2 < d$ .

**Cas 1 :**  $\beta_2 \geq d$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = i_1 + \frac{\beta_2}{b+d} i_2.$$

Sa dérivée donne :

$$\dot{V} = (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2) s - (b + \gamma) i_1 + d i_1 i_2 + \frac{\beta_2 \gamma}{b+d} i_1 - \beta_2 i_2 + \beta_2 \frac{d}{b+d} i_2^2.$$

Comme  $\beta_1 i_1 s \leq \beta_1 i_1$  donc nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \beta_1 i_1 + \beta_2 i_2 s - (b + \gamma) i_1 + d i_1 i_2 + \frac{\beta_2 \gamma}{b+d} i_1 - \beta_2 i_2 + \beta_2 \frac{d}{b+d} i_2^2 \\ &\leq (b + \gamma) \left[ \frac{\beta_1}{b + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(b + \gamma)(b + d)} - 1 \right] i_1 + \beta_2 i_2 (s - 1) + d i_1 i_2 + \beta_2 \frac{d}{b + d} i_2^2, \\ &\leq (b + \gamma) (\mathcal{R}_0 - 1) i_1 + \beta_2 i_2 (s - 1) + d i_1 i_2 + \beta_2 \frac{d}{b + d} i_2^2. \end{aligned}$$

Sachant que  $\beta_2 i_2 (s - 1) = -\beta_2 i_2 (i_1 + i_2)$ , alors nous obtenons :

$$\dot{V} \leq (b + \gamma) (\mathcal{R}_0 - 1) i_1 + (d - \beta_2) i_1 i_2 + \left( \frac{d}{b + d} - 1 \right) \beta_2 i_2^2,$$

i.e

$$\dot{V} \leq (b + \gamma) (\mathcal{R}_0 - 1) i_1 + (d - \beta_2) i_1 i_2 - \frac{\beta_2 b}{b + d} i_2^2 \leq 0.$$

Si  $\mathcal{R}_0 < 1$  la forme est définie négative.

Si  $\mathcal{R}_0 = 1$  alors  $\dot{V} \leq 0$ , nous appliquons le principe d'invariance de LaSalle pour conclure. En effet, dans ce cas, nous avons :

$$\dot{V} \leq i_2 \left( (d - \beta_2) i_1 - \frac{\beta_2 b}{b + d} i_2 \right) \leq 0.$$

et si  $i_2 = 0$  alors d'après (1.3)<sub>3</sub>,  $i_1 = 0$ . D'où le DFE est globalement asymptotiquement stable.

**Cas 2 :**  $\beta_2 < d$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante définie sur  $\{0 < s \leq 1, 0 \leq i_1 \leq 1, 0 \leq i_2 \leq 1\}$

par :

$$V = s - \ln s + i_1 + \left( \frac{b + \gamma}{\gamma} - \frac{\beta_1}{\gamma} \right) i_2.$$

#### 4.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE SANS MALADIE

Sa dérivée est égale à :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{s}\left(1 - \frac{1}{s}\right) + \dot{i}_1 + \left(\frac{b+\gamma}{\gamma} - \frac{\beta_1}{\gamma}\right)\dot{i}_2 \\
 &= (b - bs)\left(1 - \frac{1}{s}\right) - (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2)s + (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2) + ds i_2 - d i_2 \\
 &\quad + (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2)s - (b + \gamma)i_1 + d i_1 i_2 + (b + \gamma)i_1 - \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} i_2 \\
 &\quad + \frac{d(b + \gamma)}{\gamma} i_2^2 - \beta_1 i_1 + \beta_1 \frac{b + d}{\gamma} i_2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2.
 \end{aligned}$$

Après simplification, nous avons :

$$\dot{V} = -\frac{b}{s}(1-s)^2 + \beta_2 i_2 + d i_2 (s + i_1 - 1) - \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} i_2 + \frac{bd}{\gamma} i_2^2 + d i_2^2 + \beta_1 \frac{b + d}{\gamma} i_2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2.$$

D'après les égalités

$$\frac{b}{s}(1-s)^2 = \frac{b}{s}(i_1 + i_2)^2 \quad \text{et} \quad d i_2 (s + i_1 - 1) = -d i_2^2,$$

$\dot{V}$  devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -\frac{b}{s}(i_1 + i_2)^2 + \beta_2 i_2 - \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} i_2 + \frac{bd}{\gamma} i_2^2 + \beta_1 \frac{b + d}{\gamma} i_2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2 \\
 &= -\frac{b}{s}(i_1 + i_2)^2 + \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} (\mathcal{R}_0 - 1) i_2 + \frac{bd}{\gamma} i_2^2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2 \\
 &= -\frac{b}{s}(i_1 + i_2)^2 - \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} (1 - \mathcal{R}_0) i_2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2 + \frac{bd}{\gamma} i_2^2.
 \end{aligned}$$

Comme  $1/s \geq 1$  et  $i_2 \geq i_2^2$ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -b(i_1 + i_2)^2 - \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} (1 - \mathcal{R}_0) i_2^2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2 + \frac{bd}{\gamma} i_2^2 \\
 &= -b i_1^2 - 2b i_1 i_2 - b i_2^2 - \frac{(b + \gamma)(b + d)}{\gamma} (1 - \mathcal{R}_0) i_2^2 - \beta_1 \frac{d}{\gamma} i_2^2 + \frac{bd}{\gamma} i_2^2 \\
 &= -b i_1^2 - 2b i_1 i_2 - \frac{i_2^2}{\gamma} \left( b\gamma + (b + \gamma)(b + d)(1 - \mathcal{R}_0) + \beta_1 d - bd \right).
 \end{aligned}$$

Notons par

$$D = b\gamma + (b + \gamma)(b + d)(1 - \mathcal{R}_0) + \beta_1 d - bd,$$

et on obtient

$$\dot{V} \leq -b i_1^2 - 2b i_1 i_2 - D \frac{i_2^2}{\gamma}.$$

Donc si  $D \geq 0$  est vérifié alors  $\dot{V} \leq 0$ .

Et si  $bd < b\gamma + \beta_1 d$  alors  $D \geq 0$ .

Sinon, réécrivons l'expression de  $D$  :

$$\begin{aligned} D &= b\gamma + (b + \gamma)(b + d) - \beta_1(b + d) - \beta_2\gamma + \beta_1 d - bd \\ &= b\gamma + b^2 + bd + b\gamma + d\gamma - \beta_1(b + d) - \beta_2\gamma + \beta_1 d - bd \\ &= b^2 + 2b\gamma + d\gamma - \beta_1 b - \beta_2\gamma \\ &= b(b - \beta_1) + \gamma(2b + d - \beta_2). \end{aligned}$$

Du fait que  $bd \geq b\gamma + \beta_1 d$  nous obtenons  $b > \beta_1$ , et compte-tenu de la supposition du cas 2, nous concluons que  $D \geq 0$ .

D'où  $\dot{V} \leq 0$ . Nous concluons comme précédemment par le principe d'invariance de LaSalle. Ainsi, le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable dans les deux cas.  $\square$

Nous passons maintenant à l'étude de la stabilité du point d'équilibre endémique.

## 5. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

### 5.1. Stabilité locale du point d'équilibre endémique

#### Théorème 3.2.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le point d'équilibre endémique est localement stable.

*Démonstration.* Vu que la somme de nos trois variables est constante, c'est-à-dire  $s + i_1 + i_2 = 1$ , nous pouvons éliminer l'une des variables et travailler en dimension 2. Dans ce paragraphe, nous exprimons  $s$  en fonction de  $i_1$  et  $i_2$ . Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{i}_1 = (\beta_1 i_1 + \beta_2 i_2)(1 - i_1 - i_2) - (b + \gamma)i_1 + d i_1 i_2, \\ \dot{i}_2 = \gamma i_1 - (b + d)i_2 + d i_2^2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Calculons la valeur de la jacobienne au point  $(i_1^*, i_2^*)$  :

$$J(EE) = \begin{pmatrix} \beta_1 - 2\beta_1 i_1^* - \beta_1 i_2^* - \beta_2 i_2^* - (b + \gamma) + d i_2^* & \beta_2 - 2\beta_2 i_2^* - \beta_2 i_1^* - \beta_1 i_1^* + d i_1^* \\ \gamma & -b - d + 2d i_2^* \end{pmatrix}.$$

Au point d'équilibre, (5.1)<sub>1</sub> donne :

$$\beta_1 - \beta_1 i_1^* - \beta_1 i_2^* - \beta_2 i_2^* - (b + \gamma) + d i_2^* = -\beta_2 i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*}.$$

## 5.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Ajoutons de part et d'autre  $-\beta_1 i_1^*$  :

$$\beta_1 - 2\beta_1 i_1^* - \beta_1 i_2^* - \beta_2 i_2^* - (b + \gamma) + d i_2^* = -\beta_2 i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} - \beta_1 i_1^*.$$

La jacobienne devient :

$$J(EE) = \begin{pmatrix} \beta_2 i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} - \beta_1 i_1^* & \beta_2 - 2\beta_2 i_2^* - \beta_2 i_1^* - \beta_1 i_1^* + d i_1^* \\ \gamma & -b - d + 2d i_2^* \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de  $J(EE)$  est :

$$\begin{aligned} \det(J(EE)) &= \beta_2(b + d) i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} + \beta_1(b + d) i_1^* - 2\beta_2 d i_2^{*2} \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} - 2\beta_1 d i_1^* i_2^* \\ &\quad - \beta_2 \gamma + 2\beta_2 \gamma i_2^* + \beta_2 \gamma i_1^* + \beta_1 \gamma i_1^* - d \gamma i_1^* \\ &= \beta_2(b + d) i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} + (\beta_1(b + d) + \beta_2 \gamma) i_1^* + 2\beta_2 i_2^* \left( \gamma - d i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} \right) \\ &\quad - 2\beta_1 d i_1^* i_2^* - \beta_2 \gamma + \beta_1 \gamma i_1^* - d \gamma i_1^*. \end{aligned}$$

D'après (5.1)<sub>2</sub>, on a à l'équilibre :

$$(b + d) i_2^* = \gamma i_1^* + d i_2^{*2}.$$

Remplaçons  $(b + d) i_2^*$  par  $\gamma i_1^* + d i_2^{*2}$  au niveau du premier terme du déterminant et réorganisons l'expression :

$$\begin{aligned} \det(J(EE)) &= \beta_2 (\gamma i_1^* + d i_2^{*2}) \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} + (b + d)(b + \gamma) \mathcal{R}_0 i_1^* + 2\beta_2 \frac{i_2^*}{i_1^*} (\gamma i_1^* - d i_2^* + d i_2^{*2}) \\ &\quad - 2\beta_1 d i_1^* i_2^* - \beta_2 \gamma + \beta_1 \gamma i_1^* - d \gamma i_1^*. \end{aligned}$$

Remplaçons  $\gamma i_1^* - d i_2^* + d i_2^{*2}$  par  $b i_2^*$  :

$$\begin{aligned} \det(J(EE)) &= \beta_2 \gamma - \beta_2 \gamma i_2^* + \beta_2 d i_2^{*2} \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} + (b + d)(b + \gamma) \mathcal{R}_0 i_1^* + 2\beta_2 b \frac{i_2^{*2}}{i_1^*} \\ &\quad - 2\beta_1 d i_1^* i_2^* - \beta_2 \gamma + \beta_1 \gamma i_1^* - d \gamma i_1^* \\ &= \beta_2 i_2^* \left( -\gamma + d i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} + b \frac{i_2^*}{i_1^*} \right) + (b + d)(b + \gamma) \mathcal{R}_0 i_1^* + \beta_2 b \frac{i_2^{*2}}{i_1^*} \\ &\quad - 2\beta_1 d i_1^* i_2^* + \beta_1 \gamma i_1^* - d \gamma i_1^* \\ &= \beta_2 \frac{i_2^*}{i_1^*} \left( -\gamma i_1^* + (b + d) i_2^* - d i_2^{*2} \right) + (b + d)(b + \gamma) \mathcal{R}_0 i_1^* + \beta_2 b \frac{i_2^{*2}}{i_1^*} \\ &\quad - 2\beta_1 d i_1^* i_2^* + \beta_1 \gamma i_1^* - d \gamma i_1^*. \end{aligned}$$

Nous savons que  $-\gamma i_1^* + (b + d) i_2^* - d i_2^{*2} = 0$ , donc :

$$\det(J(E E)) = b(b + d + \gamma) \mathcal{R}_0 i_1^* + \beta_2 b \frac{i_2^*}{i_1^*} + d \gamma i_1^* (\mathcal{R}_0 - 1) + \beta_1 i_1^* (\gamma - 2d i_2^*).$$

Comme  $\mathcal{R}_0 > 1$  et  $i_2^* \in I$  donc le déterminant est positif.

Par ailleurs, la trace est :

$$\text{tr} J(E E) = -\beta_2 i_2^* \frac{1 - i_2^*}{i_1^*} - \beta_1 i_1^* - b - d + 2d i_2^* \leq 0.$$

Ce qui permet de conclure que le point d'équilibre endémique est localement stable.  $\square$

## 5.2. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

Pour l'étude de la stabilité globale du point d'équilibre endémique, nous allons, grâce à l'égalité  $s + i_1 + i_2 = 1$ , réduire le système (1.3) à un système de dimension 2 avec comme variable  $s$  et  $i_1$ , puis utiliser la théorie de Poincaré-Bendixson pour conclure. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{s} = b(1 - s) - (\beta_1 i_1 + \beta_2(1 - i_1 - s))s + ds(1 - i_1 - s), \\ \dot{i}_1 = (\beta_1 i_1 + \beta_2(1 - i_1 - s))s - (b + \gamma) i_1 + d i_1(1 - i_1 - s), \end{cases} \quad (5.2)$$

définie sur  $\Omega = \{0 \leq s \leq 1, 0 \leq i_1 \leq 1, s + i_1 \leq 1\}$ . Nous allons montrer par le critère de Dulac-Bendixson que (5.2) n'admet pas d'orbite périodique.

### Théorème 3.3.

Le système (5.2) n'admet pas d'orbite périodique.

*Démonstration.* Considérons la fonction  $B(x, y) = \frac{1}{xy}$ , nous avons :

$$B \dot{s}(s, i_1) = \frac{b}{s i_1} - \frac{b}{i_1} - \beta_1 - \frac{\beta_2}{i_1} + \beta_2 + \frac{\beta_2 s}{i_1} + \frac{d}{i_1} - d - \frac{ds}{i_1},$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial s} B \dot{s}(s, i_1) = -\frac{b}{s^2 i_1} + \frac{\beta_2}{i_1} - \frac{d}{i_1}.$$

Et

$$B \dot{i}_1(s, i_1) = \beta_1 + \frac{\beta_2}{i_1} - \beta_2 - \frac{\beta_2 s}{i_1} - \frac{b + \gamma}{s} + \frac{d}{s} - \frac{d i_1}{s} - d,$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial i_1} B \dot{i}_1(s, i_1) = -\frac{\beta_2}{i_1^2} + \frac{\beta_2 s}{i_1^2} - \frac{d}{s}.$$

## 5.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Ce qui conduit à

$$\frac{\partial B \dot{s}(s, i_1)}{\partial s} + \frac{\partial B \dot{i}_1(s, i_1)}{\partial i_1} = -\frac{b}{s^2 i_1} + \frac{\beta_2}{i_1^2} (s + i_1 - 1) - \frac{d}{i_1} - \frac{d}{s}$$

$$\frac{\partial B \dot{s}(s, i_1)}{\partial s} + \frac{\partial B \dot{i}_1(s, i_1)}{\partial i_1} < 0 \quad \forall s, i_1 \in (0, 1].$$

D'après le théorème de Dulac-Bendixson, (5.2) n'admet d'orbite périodique.  $\square$

Nous allons utiliser maintenant les théorèmes 3.2 & 3.3 et le théorème de Poincaré-Bendixson pour conclure sur la stabilité du point d'équilibre endémique.

### Théorème 3.4.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable sur  $\Omega - \Gamma$ , où  $\Gamma$  est une variété stable.

*Démonstration.* La jacobienne de (5.2) au point  $(1, 0)$  est :

$$J(EE) = \begin{pmatrix} -(b+d) + \beta_2 & -\beta_1 + \beta_2 - d \\ -\beta_2 & \beta_1 - \beta_2 - (b+\gamma) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est :

$$\det(J((1, 0))) = -\beta_1(b+d) - \beta_2\gamma + (b+d)(b+\gamma) = (b+d)(b+\gamma)(1 - \mathcal{R}_0) < 0.$$

Par suite, le point d'équilibre sans maladie est instable. Cependant, les valeurs propres de la matrice jacobienne sont :

$$\lambda_{1,2} = \beta_1 - (b+\gamma) - (b+d) \pm \sqrt{(\beta_1 - (b+\gamma) - (b+d))^2 - 4(b+\gamma)(b+d)(1 - \mathcal{R}_0)}.$$

L'une des valeurs propres est négative, donc le point d'équilibre sans maladie admet une variété de dimension 1 stable. L'ensemble  $\omega$ -limite de (5.2) est réduit au point d'équilibre endémique sur l'ensemble  $\Omega - \Gamma$ . D'où, d'après le théorème de Poincaré-Bendixson et le théorème 3.3 le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable sur  $\Omega - \Gamma$ .  $\square$

Nous allons illustrer les résultats par des simulations numérique au niveau du paragraphe suivant.



## 6. Simulations

Nous allons illustrer numériquement les résultats théoriques de stabilité. Nous allons simuler les variables  $i_1$  et  $i_2$  pour  $\mathcal{R}_0 < 1$  puis pour  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

Prenons les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.8, \gamma = 0.1, b = 0.7, d = 0.04.$$

Cela correspond à  $\mathcal{R}_0$  sensiblement égal à 0.51013512. Dans ce cas, la théorie prouve que le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable. Les simulations correspondantes sont représentées par les figures 3.3 et 3.4.

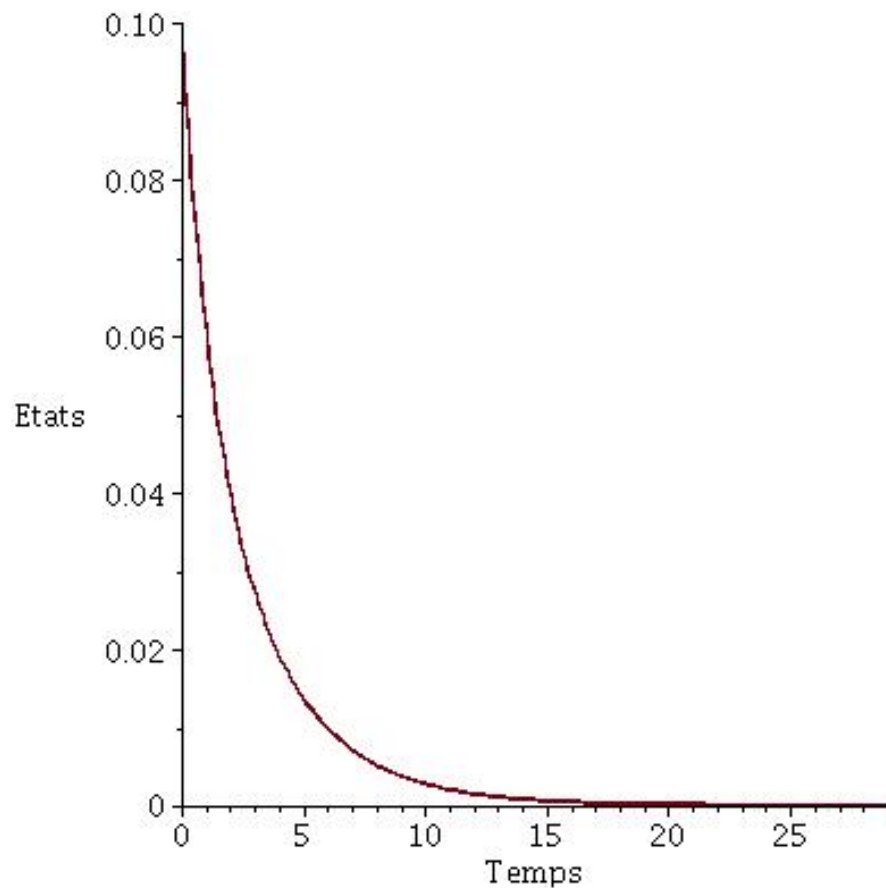


Figure 3.3 –  $i_1$ ,  $\mathcal{R}_0 < 1$

Les figures 3.3 et 3.4 montrent que les courbes tendent vers 0. Ce qui illustre que le point

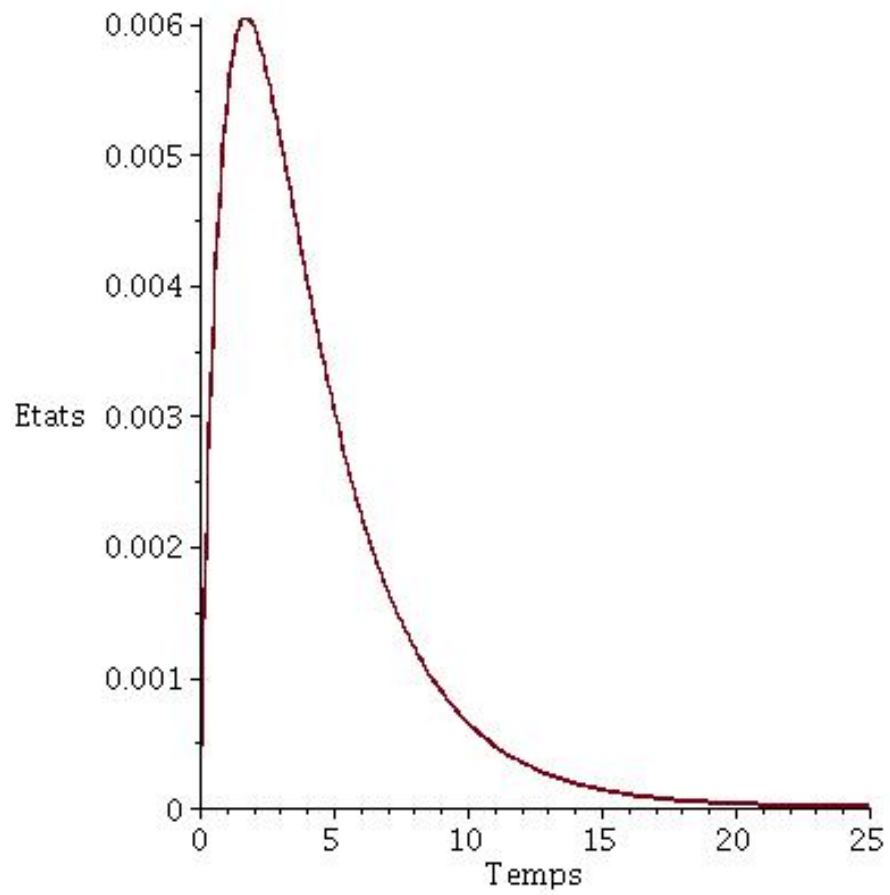


Figure 3.4 –  $i_2$ ,  $\mathcal{R}_0 < 1$

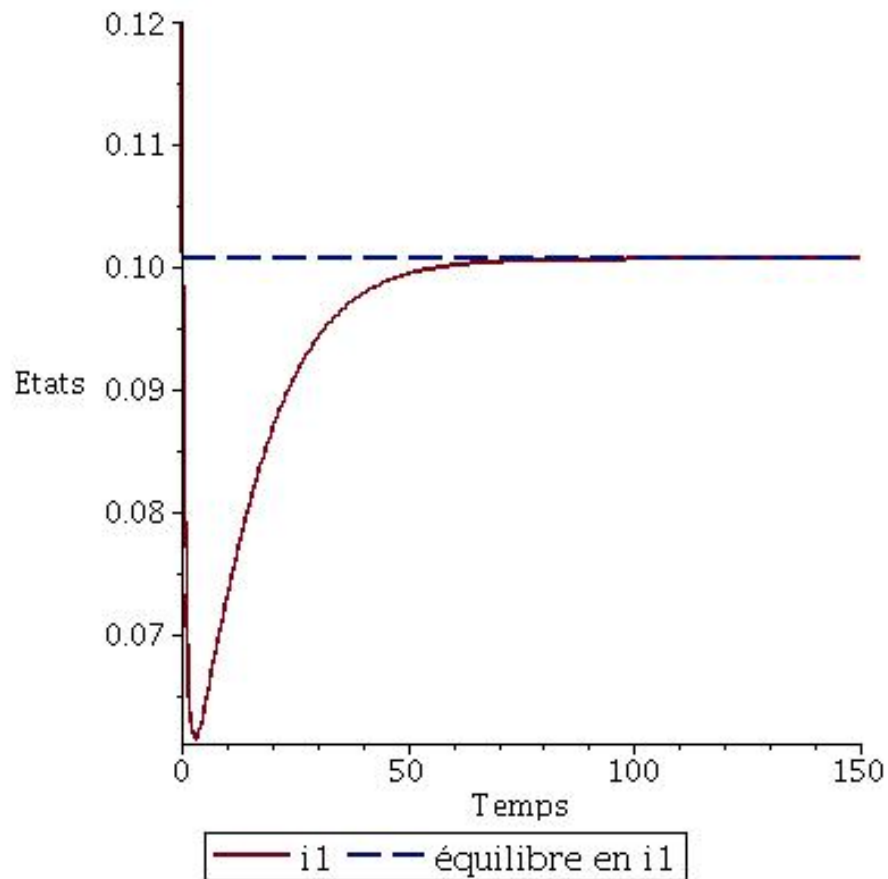


Figure 3.5 –  $i_1$ ,  $\mathcal{R}_0 > 1$

d'équilibre sans maladie et globalement asymptotiquement stable.

Prenons d'autres valeurs pour les paramètres :

$$\beta_1 = 0.3, \beta_2 = 0.8, \gamma = 0.5, b = 0.4, d = 0.1.$$

Ce qui correspond à  $\mathcal{R}_0$  sensiblement égal à 1.2222222. Dans ce cas, nous avons prouvé que le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable. Les simulations pour ce cas sont représentées par les figures 3.5 et 3.6.

Dans ce cas également, les courbes de  $i_1$  et  $i_2$  tendent respectivement vers  $i_1^*$  et  $i_2^*$ , qui sont numériquement sensiblement égales à 0.1005986226 et 0.1027084268 respectivement. Illustrant ainsi que le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

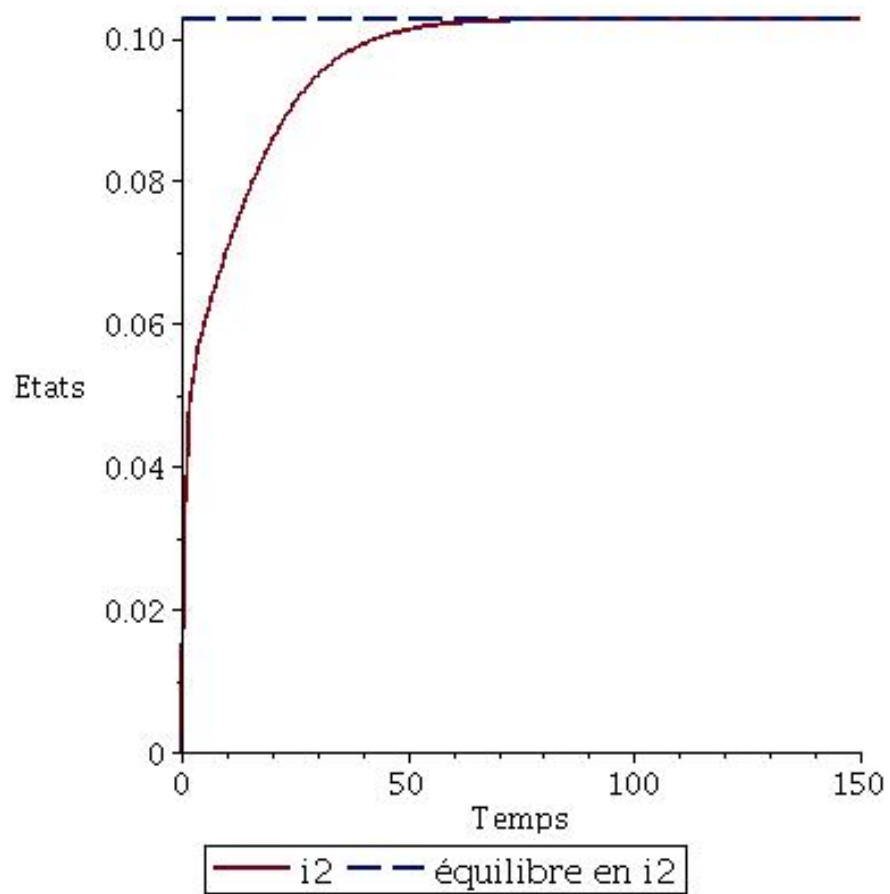


Figure 3.6 –  $i_2$ ,  $\mathcal{R}_0 > 1$

## 7. Conclusion

Les modèles  $SI$  font partie des modèles épidémiologiques les plus importants. Dans notre travail nous avons analysé la stabilité globale d'un modèle  $SI$  avec deux classes d'infectés et une incidence masse action. Pour effectuer cette analyse de stabilité, nous avons utilisé le système des proportions. Pour la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie, nous avons utilisé la technique directe de Lyapunov. Quant au point d'équilibre endémique, nous avons utilisé la théorie de Poincaré-Bendixson. Enfin, nous avons effectué des simulations numériques pour illustrer les résultats de stabilité.

Il serait intéressant d'analyser le système avec  $n$  classes d'infectés.

## 7.. CONCLUSION

---

# Chapitre 4

## Stabilité globale d'un modèle épidémiologique avec une incidence non linéaire

### Sommaire

---

1.	Présentation du modèle . . . . .	57
2.	Points d'équilibre et stabilité locale du point d'équilibre endémique . . . . .	59
3.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	63
4.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	64
5.	Généralisation du système dans le cas où $\alpha = 0$ . . . . .	70
5.1.	Points d'équilibre . . . . .	70
5.2.	Calcul de $\mathcal{R}_0$ . . . . .	71
5.3.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	72
5.4.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	73
6.	Conclusion . . . . .	74

---

### 1. Présentation du modèle

A l'instar du chapitre précédent, nous allons nous consacrer dans ce chapitre à l'étude d'un modèle épidémiologique comportant deux classes d'infectés et une incidence non linéaire. Ce présent modèle fut l'objet d'étude de la part des auteurs Li-Min Cai, Xue-Zhi Li et Mini Ghosh. Ces derniers avaient publié leur travail dans le journal "Applied Mathematics et Computation". Cependant, nous avons décelé une erreur dans le travail. Ils se sont appuyés sur une supposition erronée pour montrer la stabilité du point d'équilibre endémique. L'incidence utilisée dans ce

## 1.. PRÉSENTATION DU MODÈLE

chapitre comporte une fonction puissance. Ce type d'incidence a été utilisé dans [56, 57]. Nous allons, dans ce travail essayer d'apporter une solution au problème posé par les auteurs de [10]. Toutefois, il est important de souligner aussi que dans leur papier, les auteurs ont étudié la stabilité globale du point d'équilibre endémique du modèle pour des cas particuliers, à savoir  $p = 1$  ou  $d = 0$ . Le modèle en question est un modèle de type SIS, avec deux classes d'infectés. Rappelons qu'un modèle SIS modélise une infection avec possibilité de guérison. Il est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p - \mu S + \alpha J, \\ \dot{I} = (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p - (\mu + \gamma)I, \\ \dot{J} = \gamma I - (\mu + d + \alpha)J. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où

- S, I, J représentent respectivement les compartiments de susceptibles, d'infectés au premier stade de la maladie et d'infectés au second stade de la maladie.
- $\Lambda$ ,  $\mu$ ,  $1/\gamma$ ,  $d$ ,  $\alpha$  sont respectivement, le recrutement, le taux de mortalité, le temps mis pour qu'un infecté au premier stade devienne infecté en phase terminale, et le taux de guérison,
- $\beta_1$  and  $\beta_2$  représentent le taux de contact d'un infecté au premier stade et d'un infecté au second stade respectivement,
- le terme  $\beta_1 I S^p + \beta_2 J S^p$  représente l'incidence et  $p$  est une constante positive.

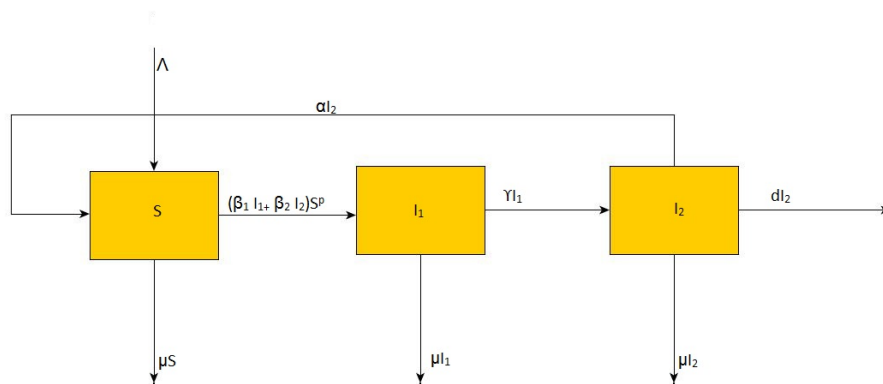


Figure 4.1 – Diagramme de transfert pour le modèle  $S/I/J$

Les auteurs du travail [10] ont prouvé la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie du système général, et pour le cas endémique, ils ont travaillé sur (1.1) pour les cas particuliers  $p = 1$



ou  $d = 0$ . Cependant ils affirment que l'ensemble :  $\Gamma^* = \{(S, I, J) \in \Gamma : S + I + \frac{\mu + d}{\mu} J = \frac{\Lambda}{\mu}\}$  est invariant. Or, comme nous allons le montrer dans le paragraphe suivant, cet ensemble n'est pas invariant pour le système (1.1). Ainsi, dans le même paragraphe, nous allons déterminer les points d'équilibre du système, puis, montrer la stabilité locale du point d'équilibre endémique. Dans le paragraphe 3 nous allons prouver la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie. Puis, nous prouvons au paragraphe 4 la stabilité globale du point d'équilibre endémique sous la condition  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ . Notons que dans le cas où  $\alpha = \beta_1 = 0$  la stabilité du point d'équilibre endémique a été prouvé par Korobeinikov et Maini dans [44]. Ensuite, en utilisant la technique de J. Jacquez et C. Simon exposée dans [67], nous prouvons, avec une condition, le cas où tous les paramètres sont non nuls. En retournant au cas  $\alpha = 0$ , nous allons finir le travail par le paragraphe 5, par l'étude du modèle avec  $n$  classes d'infectés et une incidence plus générale qui s'écrit :  $\sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S)$ , où  $\varphi$  est une fonction croissante.

## 2. Points d'équilibre et stabilité locale du point d'équilibre endémique

Avant de déterminer les points d'équilibre, nous allons d'abord signaler l'erreur commise par les auteurs de [10].

### Remarque 4.1.

$\Gamma = \{(S, I, J) \in \mathbb{R}_+^3 : S + I + J \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$  est un ensemble invariant pour le système (1.1).

Par contre, l'ensemble  $\Gamma^* = \{(S, I, J) \in \Gamma : S + I + \frac{\mu + d}{\mu} J = \frac{\Lambda}{\mu}\}$  n'est pas invariant pour (1.1), car, si tel est le cas alors :

$$\dot{S} + \dot{I} + \frac{\mu + d}{\mu} \dot{J} = 0, \quad \forall (S, I, J) \in \Gamma^*. \quad (2.1)$$

Mais si nous remplaçons  $\dot{S}$ ,  $\dot{I}$  et  $\dot{J}$  par leurs expressions respectives au niveau du membre de gauche de (2.1) alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{S} + \dot{I} + \frac{\mu + d}{\mu} \dot{J} &= \Lambda - \mu S + \alpha J - \mu I + \frac{d\gamma}{\mu} I - \frac{(\mu + d)(\mu + d + \alpha)}{\mu} J, \\ &= \mu \left( \frac{\Lambda}{\mu} - S - I - \frac{\mu + d}{\mu} J \right) + \alpha J + \frac{d\gamma}{\mu} I - \frac{(\mu + d)(d + \alpha)}{\mu} J. \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2.. POINTS D'ÉQUILIBRE ET STABILITÉ LOCALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Du fait que  $(S, I, J) \in \Gamma^*$  alors  $\frac{\Lambda}{\mu} - S - I - \frac{\mu + d}{\mu} J = 0$ , (2.2) devient

$$\dot{S} + i + \frac{\mu + d}{\mu} j = \frac{d\gamma}{\mu} I - \frac{d(\mu + d) + \mu d}{\mu} J, \quad (2.3)$$

qui n'est pas nul sur tout  $\Gamma^*$ . D'où  $\Gamma^*$  n'est pas un ensemble invariant pour le système (1.1).

Le point d'équilibre sans maladie est donné par  $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ . Pour déterminer d'éventuels points d'équilibre endémique, nous résolvons le système :

$$\begin{cases} \Lambda - (\beta_1 I^* \beta_2 J^*) (S^*)^p - \mu S^* + \alpha J^* = 0, \\ (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) (S^*)^p - (\mu + \gamma) I^* = 0, \\ \gamma I^* - (\mu + d + \alpha) J^* = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Le calcul donne un unique point d'équilibre endémique, qui s'exprime comme suit :

$$S^* = \left( \frac{(\mu + d + \alpha)(\mu + \gamma)}{\beta_1(\mu + d + \alpha) + \beta_2 \gamma} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad I^* = \frac{\Lambda(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0})(\mu + d + \alpha)}{(\mu + d + \alpha)(\mu + \gamma) - \alpha \gamma}, \quad J^* = \frac{\gamma}{\mu + d + \alpha} I^*, \quad (2.5)$$

avec

$$\mathcal{R}_0 = \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right)^p \frac{\beta_1(\mu + d + \alpha) + \beta_2 \gamma}{(\mu + d + \alpha)(\mu + \gamma)},$$

où  $\mathcal{R}_0$  représente le taux de reproduction de base du système.

Après avoir déterminé le point d'équilibre endémique, nous montrons dans le lemme suivant, qu'il est localement stable.

### Lemme 4.1.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le point d'équilibre endémique existe et il est localement stable.

*Démonstration.* Nous allons établir la preuve par le critère de Routh-Hurwitz.

Considérons la matrice jacobienne du système (1.1) au point d'équilibre endémique :

$$A = \begin{pmatrix} -p(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) S^{*p-1} - \mu & -\beta_1 S^{*p} & -\beta_2 S^{*p} + \alpha \\ p(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) S^{*p-1} & \beta_1 S^{*p} - d_1 & \beta_2 S^{*p} \\ 0 & \gamma & -d_2 \end{pmatrix},$$

avec  $d_1 = \mu + \gamma$  et  $d_2 = \mu + d + \alpha$ . Nous avons :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -p(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) S^{*p-1} - \mu - \lambda & -\beta_1 S^{*p} & -\beta_2 S^{*p} + \alpha \\ p(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) S^{*p-1} & \beta_1 S^{*p} - d_1 - \lambda & \beta_2 S^{*p} \\ 0 & \gamma & -d_2 - \lambda \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = (-\rho(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p-1} - \mu - \lambda)[(\beta_1 S^{*p} - d_1 - \lambda)(-d_2 - \lambda) - \beta_2 \gamma S^{*p}] \\ + \beta_1 S^{*p}[\rho(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p-1}(-d_2 - \lambda)] + (-\beta_2 S^{*p} + \alpha)[\rho(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p-1} \gamma].$$

Notons par :  $a = \rho(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p-1}$ ,  $P$  s'écrit :

$$P(\lambda) = (-a - \mu - \lambda)[\lambda^2 - (\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2)\lambda - (\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 - \beta_2 \gamma S^{*p}] \\ + \beta_1 S^{*p}[-\lambda a - d_2 a] + (-\beta_2 S^{*p} + \alpha)\gamma a.$$

En développant l'expression, nous avons :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2)\lambda^2 + ((\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 + \beta_2 \gamma S^{*p})\lambda \\ - (a + \mu)\lambda^2 + (a + \mu)(\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2)\lambda + (a + \mu)((\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 + \beta_2 \gamma S^{*p}) \\ - \beta_1 S^{*p} a \lambda - \beta_1 S^{*p} d_2 a + (-\beta_2 S^{*p} + \alpha)\gamma a.$$

Après réduction, nous obtenons :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2 - a - \mu)\lambda^2 \\ + ((\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 + \beta_2 \gamma S^{*p} + (a + \mu)(\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2) - \beta_1 S^{*p} a)\lambda \\ + (a + \mu)((\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 + \beta_2 \gamma S^{*p}) - \beta_1 S^{*p} d_2 a + (-\beta_2 S^{*p} + \alpha)\gamma a.$$

Multiplions  $P(\lambda)$  par  $-1$  et on obtient :

$$Q(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0,$$

où

$$a_3 = 1, \\ a_2 = -\beta_1 S^{*p} + d_1 + d_2 + a + \mu, \\ a_1 = -(\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 - \beta_2 \gamma S^{*p} - (a + \mu)(\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2) + \beta_1 S^{*p} a, \\ a_0 = -(a + \mu)((\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 - \beta_2 \gamma S^{*p}) + \beta_1 S^{*p} d_2 a - (-\beta_2 S^{*p} + \alpha)\gamma a.$$

## 2.. POINTS D'ÉQUILIBRE ET STABILITÉ LOCALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

A l'équilibre nous avons les égalités :  $-\beta_1 S^{*p} + d_1 = \beta_2 \frac{J^*}{I^*} S^{*p} = \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p}$ , ce qui conduit à :

$$a_2 = \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + d_2 + a + \mu > 0. \quad (2.6)$$

De plus

$$-(\beta_1 S^{*p} - d_1)d_2 - \beta_2 \gamma S^{*p} = \beta_2 \frac{J^*}{I^*} S^{*p} d_2 - \beta_2 \gamma S^{*p} = \frac{\beta_2 S^{*p}}{I^*} (d_2 J^* - \gamma I^*) = 0.$$

Alors  $a_1$  et  $a_0$  deviennent :

$$a_1 = -(a + \mu)(\beta_1 S^{*p} - d_1 - d_2) + \beta_1 S^{*p} a$$

et

$$a_0 = \beta_1 S^{*p} d_2 a - (-\beta_2 S^{*p} + \alpha) \gamma a.$$

Ce qui donne :

$$a_1 = (a + \mu) \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + d_2 \right) + \beta_1 S^{*p} a, \quad (2.7)$$

et

$$a_0 = a(\beta_1 S^{*p} d_2 + \beta_2 \gamma S^{*p} - \alpha \gamma). \quad (2.8)$$

Remplaçons  $d_2$  par son expression, donc :

$$a_0 = a \left( \beta_1 \frac{\gamma I^*}{J^*} S^{*p} + \beta_2 \gamma S^{*p} - \alpha \gamma \right) = a \frac{\gamma}{J^*} (\beta_1 I^* S^{*p} + \beta_2 J^* S^{*p} - \alpha J^*) = a \frac{\gamma}{J^*} (\Lambda - \mu S^*).$$

Or d'après l'expression de  $\dot{N}$  à l'équilibre :  $\Lambda - \mu S^* = \mu I^* + \mu J^* + d J^*$ , ce qui permet d'avoir :

$$a_0 = a \frac{\gamma}{J^*} (\mu(I^* + J^*) + d J^*) > 0.$$

Il reste à montrer que  $a_2 a_1 > a_0$ .

Examinons le produit  $a_2 a_1$  :

$$\begin{aligned} a_2 a_1 &= d_2 (a + \mu) \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + d_2 \right) + \beta_1 S^{*p} d_2 a + \\ & \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + a + \mu \right) \left( (a + \mu) \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + d_2 \right) + \beta_1 S^{*p} a \right). \end{aligned}$$

En se basant sur (2.8), nous avons :

$$\begin{aligned} a_2 a_1 &= a_0 + a \alpha \gamma + d_2^2 a + d_2 \mu \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + d_2 \right) \\ & + \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + a + \mu \right) \left( (a + \mu) \left( \beta_2 \frac{\gamma}{d_2} S^{*p} + d_2 \right) + \beta_1 S^{*p} a \right), \end{aligned}$$

donc  $a_2 a_1 > a_0$ . Ainsi le critère de Routh est vérifié, d'où le point d'équilibre endémique est localement stable.  $\square$

### 3. Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

#### Théorème 4.1.

Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \left( \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \right) I + \frac{\beta_2}{\mu + d + \alpha} J.$$

La dérivée de  $V$  est :

$$\dot{V} = \left( \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \right) \dot{I} + \frac{\beta_2}{\mu + d + \alpha} \dot{J},$$

$$\dot{V} = \left( \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \right) (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p - \beta_1 I - \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + d + \alpha} I + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + d + \alpha} I - \beta_2 J,$$

ce qui donne après simplification :

$$\dot{V} = \left( \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \right) (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p - \beta_1 I - \beta_2 J,$$

donc

$$\dot{V} = (\beta_1 I + \beta_2 J) \left[ \left( \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \right) S^p - 1 \right]. \quad (3.1)$$

Sachant que la fonction  $S \mapsto \left( \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \right) S^p$  est strictement croissante et admet son maximum au point  $\frac{\Lambda}{\mu}$ , et a à ce point  $\mathcal{R}_0$  comme valeur, donc :

$$\dot{V} \leq (\beta_1 I + \beta_2 J) [\mathcal{R}_0 - 1].$$

Si  $\mathcal{R}_0 < 1$ , l'application du principe d'invariance de LaSalle est immédiate. Si  $\mathcal{R}_0 = 1$ , remplaçons  $\frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}$  par  $\frac{\mathcal{R}_0}{(\Lambda/\mu)^p}$  au niveau de (3.1), nous obtenons :

$$\dot{V} = (\beta_1 I + \beta_2 J) \left[ \frac{S^p}{(\Lambda/\mu)^p} - 1 \right],$$

et l'application du principe d'invariance de LaSalle donne le résultat. D'où le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable pour  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ .  $\square$

## 4. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

### Théorème 4.2.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le point d'équilibre endémique existe et il est globalement asymptotiquement stable pour  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ .

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \left(S + \frac{S^*}{p-1} \left(\frac{S^*}{S}\right)^{p-1}\right) + (I - I^* \ln I) + \frac{\mu + \gamma - \beta_1 S^{*p}}{\gamma} (J - J^* \ln J).$$

La dérivée de  $V$  est donnée par :

$$\dot{V} = \left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) \dot{S} + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \dot{I} + \frac{\mu + \gamma - \beta_1 S^{*p}}{\gamma} \left(1 - \frac{J^*}{J}\right) \dot{J}.$$

Remplaçons  $\dot{S}$ ,  $\dot{I}$  et  $\dot{J}$  par leurs expressions dans (1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\Lambda - \mu S) \left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) - (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p + (\beta_1 I + \beta_2 J) S^{*p} + \alpha J \left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) \\ & + (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p - (\mu + \gamma) I - (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p \frac{I^*}{I} + (\mu + \gamma) I^* \\ & + (\mu + \gamma) I - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}{\gamma} J - (\mu + \gamma) \frac{IJ^*}{J} + \frac{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}{\gamma} J^* \\ & - \frac{\beta_1 S^{*p}}{\gamma} (\gamma I - (\mu + d + \alpha) J) \left(1 - \frac{J^*}{J}\right). \end{aligned}$$

Après simplification, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\Lambda - \mu S) \left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) + (\beta_1 I + \beta_2 J) S^{*p} + \alpha J \left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) - (\beta_1 I + \beta_2 J) S^p \frac{I^*}{I} + (\mu + \gamma) I^* \\ & - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}{\gamma} J - (\mu + \gamma) \frac{IJ^*}{J} + \frac{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}{\gamma} J^* - \beta_1 S^{*p} \left(I - \frac{I^*}{J^*} J\right) \left(1 - \frac{J^*}{J}\right). \end{aligned}$$

Compte-tenu des égalités suivantes :

$$(\mu + \gamma) I^* = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}{\gamma} J^* = (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) S^{*p}, \quad (4.1)$$

et

$$\frac{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)}{\gamma} = (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*) S^{*p} \frac{1}{J^*}, \quad (4.2)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\Lambda - \mu S)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I + \beta_2 J)S^{*p} + \alpha J(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) - (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p \frac{I^*}{I} + 2(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} \\ & - (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} \frac{J}{J^*} - (\mu + \gamma) \frac{IJ^*}{J} - \beta_1 S^{*p} (I - \frac{I^*}{J^*} J)(1 - \frac{J^*}{J}). \end{aligned}$$

Remplaçons  $\Lambda$  par  $\mu S^* + (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} - \alpha J^*$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p}(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \alpha(J - J^*)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I + \beta_2 J)S^{*p} \\ & - (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p \frac{I^*}{I} + 2(\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} - (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} \frac{J}{J^*} - (\mu + \gamma) \frac{IJ^*}{J} \\ & - \beta_1 S^{*p} (I - \frac{I^*}{J^*} J)(1 - \frac{J^*}{J}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p}(3 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \alpha(J - J^*)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I + \beta_2 J)S^{*p} \\ & - (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p \frac{I^*}{I} - (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} \frac{J}{J^*} - (\mu + \gamma) \frac{IJ^*}{J} - \beta_1 S^{*p} (I - \frac{I^*}{J^*} J)(1 - \frac{J^*}{J}). \end{aligned}$$

En réarrangeant l'expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p}(3 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \alpha(J - J^*)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \beta_1 I S^{*p} \\ & - (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p \frac{I^*}{I} - \beta_1 I^* S^{*p} \frac{J}{J^*} - (\mu + \gamma) \frac{IJ^*}{J} - \beta_1 S^{*p} (I - \frac{I^*}{J^*} J)(1 - \frac{J^*}{J}). \end{aligned}$$

En se servant de l'égalité  $\mu + \gamma = (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} \frac{1}{I^*}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p}(3 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \alpha(J - J^*)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \beta_1 I S^{*p} \\ & - (\beta_1 I + \beta_2 J)S^p \frac{I^*}{I} - \beta_1 I^* S^{*p} \frac{J}{J^*} - (\beta_1 I^* + \beta_2 J^*)S^{*p} \frac{IJ^*}{I^* J} - \beta_1 S^{*p} (I - \frac{I^*}{J^*} J)(1 - \frac{J^*}{J}). \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \beta_2 J^* S^{*p}(3 - \frac{S^{*p}}{S^p} - \frac{IJ^*}{I^* J} - \frac{I^* J S^p}{I^* J^* S^{*p}}) + \alpha(J - J^*)(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}) + \beta_1 I S^{*p} \\ & + \beta_1 I^* S^{*p}(2 - \frac{S^{*p}}{S^p} - \frac{S^p}{S^{*p}}) + \beta_1 I^* S^{*p} - \beta_1 I^* S^{*p} \frac{J}{J^*} - \beta_1 \frac{IJ^*}{J} S^{*p} - \beta_1 S^{*p} (I - \frac{I^*}{J^*} J)(1 - \frac{J^*}{J}). \end{aligned}$$

#### 4.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Enfin, l'expression de  $\dot{V}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S)\left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) + \beta_2 J^* S^{*p} \left(3 - \frac{S^{*p}}{S^p} - \frac{IJ^*}{I^*J} - \frac{I^*JS^p}{IJ^*S^{*p}}\right) + \beta_1 I^* S^{*p} \left(2 - \frac{S^{*p}}{S^p} - \frac{S^p}{S^{*p}}\right) \\ & + \alpha(J - J^*)\left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right). \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 0$  alors, nous avons immédiatement,  $\dot{V} \leq 0$ , car :

- la fonction  $f : x \mapsto x^p$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $(x_1 - x_0)(f(x_0) - f(x_1)) \leq 0$ ,
- du fait que la moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique alors  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy - 3 \geq 0$  et  $x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$ , pour tout  $x, y \geq 0$ .

Sinon, si  $\beta_1 = 0$ ,  $\dot{V}$  est donnée par :

$$\dot{V} = \mu(S^* - S)\left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) + \beta_2 J^* S^{*p} \left(3 - \frac{S^{*p}}{S^p} - \frac{IJ^*}{I^*J} - \frac{I^*JS^p}{IJ^*S^{*p}}\right) + \alpha(J - J^*)\left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right).$$

Réécrivons l'expression de  $\dot{S}$  :

$$\dot{S} = \mu(S^* - S) - \beta_2 J(S^p - S^{*p}) - (J - J^*)(\beta_2 S^{*p} - \alpha).$$

Considérons :

$$L = V + \frac{\alpha}{\beta_2 S^{*p} - \alpha} \left(S + \frac{S^*}{p-1} \left(\frac{S^*}{S}\right)^{p-1}\right).$$

Le calcul de sa dérivée donne :

$$\begin{aligned} \dot{L} = & \mu \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_2 S^{*p} - \alpha}\right) (S^* - S) \left(1 - \frac{S^{*p}}{S^p}\right) + \beta_2 J^* S^{*p} \left(3 - \frac{S^{*p}}{S^p} - \frac{IJ^*}{I^*J} - \frac{I^*JS^p}{IJ^*S^{*p}}\right) \\ & - \beta_2 J \frac{\alpha}{\beta_2 S^{*p} - \alpha} \frac{(S^p - S^{*p})^2}{S^p}. \end{aligned}$$

Donc  $\dot{L} \leq 0$ .

D'où le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable si  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ . □

Maintenant, nous allons établir un résultat de stabilité globale du point d'équilibre pour tous les paramètres pris non nuls. Commençons par des notations :

**Notation 4.1.** Notons  $a$  et  $b$  par :

$$a = \frac{\beta_1}{\mu + \gamma} + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + d + \alpha)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\beta_2}{\mu + d + \alpha}.$$



Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 4.3.**

Si  $a \leq b$  (i.e  $\beta_1(\mu + d + \alpha) \leq \beta_2\mu$ ) et  $\frac{d}{\mu} - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 1 \leq 0$  alors le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

De même, si  $a > b$  (i.e  $\beta_1(\mu + d + \alpha) > \beta_2\mu$ ) et  $\frac{d}{\mu} + 1 - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 2\frac{b}{a} \leq 0$ , alors le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable.

*Démonstration.* La preuve suivante est inspirée de la méthode de Jacquez et coauteur dans [67].

Premièrement, supposons que  $a \leq b$  et  $\frac{d}{\mu} - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 1 \leq 0$ .

Nous allons écrire le système (1.1) avec les variables  $N$ ,  $V$  et  $J$ , où  $V$  est la fonction de Lyapunov du système au point d'équilibre sans maladie. Rappelons que  $V = aI + bJ$ , et sa dérivée est donnée par  $\dot{V} = (\beta_1 I + \beta_2 J)(aS^p - 1)$ . Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{N} = \Lambda - \mu N - dJ, \\ \dot{V} = (\beta_1 \frac{1}{a}V + (\beta_2 - \beta_1 \frac{b}{a})J)(a(N - \frac{1}{a}V + \frac{b-a}{a}J)^p - 1), \\ \dot{J} = \gamma(\frac{1}{a}V - \frac{b}{a}J) - (\mu + d + \alpha)J. \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , considérons le pavé  $B_\epsilon$  définie par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} N^* - \frac{d}{\mu}\epsilon &\leq N \leq N^* + \frac{d}{\mu}\epsilon, \\ V^* - \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon &\leq V \leq V^* + \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon, \\ J^* - \epsilon &\leq J \leq J^* + \epsilon. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vérifions que les champs de vecteurs du système (1.1), (4.3) pointent à l'intérieur du pavé  $B_\epsilon$ .

Au point  $N = N^* - \frac{d}{\mu}\epsilon$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \Lambda - \mu N^* + d\epsilon - dJ \\ &\geq \Lambda - \mu N^* + d\epsilon - dJ^* - d\epsilon \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, si  $N = N^* + \frac{d}{\mu}\epsilon$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \Lambda - \mu N^* - d\epsilon - dJ \\ &\leq \Lambda - \mu N^* - d\epsilon - dJ^* + d\epsilon \\ &= 0. \end{aligned}$$

#### 4.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

Vérifions le cas de la variable  $V$ . Comme  $(\beta_1 \frac{1}{a}V + (\beta_2 - \beta_1 \frac{b}{a})J) = (\beta_1 I + \beta_2 J)$  donc le signe de  $\dot{V}$  va dépendre de  $L = a(N - \frac{1}{a}V + \frac{b-a}{a}J)^p - 1$ . De ce fait, si  $V = V^* + \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon$  alors, nous avons :

$$\begin{aligned} L &= a(N - \frac{1}{a}V^* - \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{a\gamma}\epsilon + \frac{b-a}{a}J)^p - 1 \\ &\leq a(N^* + \frac{d}{\mu}\epsilon - \frac{1}{a}V^* - \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{a\gamma}\epsilon + \frac{b-a}{a}J^* + \frac{b-a}{a}\epsilon)^p - 1 \\ &= a(S^* + (\frac{d}{\mu} - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 1)\epsilon)^p - 1. \end{aligned}$$

Pour examiner le signe de  $L$ , nous comparons  $a^{1/p}(S^* + (\frac{d}{\mu} - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 1)\epsilon)$  à 1. Sachant que  $a^{1/p}S^* = 1$ , et  $\frac{d}{\mu} - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 1 < 0$  par supposition, donc  $L < 0$ . Par conséquent :

$$\dot{V} \leq 0 \text{ si } V = V^* + \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon.$$

Examinons le signe de  $\dot{V}$  si  $V = V^* - \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon$ . Donc

$$\begin{aligned} L &= a(N - \frac{1}{a}V^* + \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{a\gamma}\epsilon + \frac{b-a}{a}J)^p - 1 \\ &\geq a(N^* - \frac{d}{\mu}\epsilon - \frac{1}{a}V^* + \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{a\gamma}\epsilon + \frac{b-a}{a}J^* - \frac{b-a}{a}\epsilon)^p - 1 \\ &= a(S^* + (-\frac{d}{\mu} + \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} + 1)\epsilon)^p - 1. \end{aligned}$$

Par supposition, nous avons  $-\frac{d}{\mu} + \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} + 1 > 0$ . Et comme  $a^{1/p}S^* = 1$ , donc  $L > 0$ .

Ainsi :

$$\dot{V} \geq 0 \text{ si } V = V^* - \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon.$$

Il reste à vérifier au niveau de la variable  $J$ . Au point  $J = J^* - \epsilon$ , nous avons :

$$\begin{aligned} j &= \frac{\gamma}{a}V - (\frac{b\gamma}{a} + (\mu + d + \alpha))(J^* - \epsilon) \\ &\geq \frac{\gamma}{a}(V^* - \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon) - (\frac{b\gamma}{a} + (\mu + d + \alpha))(J^* - \epsilon) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et si  $J = J^* + \epsilon$ , nous avons :

$$\begin{aligned} j &= \frac{\gamma}{a}V - \left(\frac{b\gamma}{a} + (\mu + d + \alpha)\right)(J^* + \epsilon) \\ &\leq \frac{\gamma}{a}(V^* + \frac{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}{\gamma}\epsilon) - \left(\frac{b\gamma}{a} + (\mu + d + \alpha)\right)(J^* + \epsilon) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dès lors, les champs de vecteurs du système (4.3) pointent à l'intérieur de  $B_\epsilon$ . D'autre part, nous allons considérer la fonction de Lyapunov suivante :

$$F(N, V, J) = \max\left\{\frac{\mu}{d}|N - N^*|, \frac{\gamma}{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}|V - V^*|, |J - J^*|\right\}.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'ensemble  $\{(N, V, J) : F(N, V, J) \leq \epsilon\}$  est l'ensemble  $B_\epsilon$ . De surcroît,  $\dot{F} < 0$  si  $F = \epsilon$ . Car, en supposons que  $F = \epsilon$  correspond à  $F = \frac{\mu}{d}|N - N^*|$  alors, nous avons :

$$F = \frac{\mu}{d} \begin{cases} N - N^*, & \text{si } N \geq N^* \\ -N + N^*, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et la dérivée est donnée par :

$$\dot{F} = \frac{\mu}{d} \begin{cases} \dot{N} = \Lambda - \mu N - dJ, & \text{si } N \geq N^* \\ -\dot{N} = -\Lambda + \mu N + dJ, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, si  $F = \epsilon = \frac{\mu}{d}|N - N^*|$  alors  $N = N^* + \frac{d}{\mu}\epsilon$  ou  $N = N^* - \frac{d}{\mu}\epsilon$  et  $|J - J^*| < \epsilon$  c'est-à-dire  $J^* - \epsilon < J < J^* + \epsilon$ . Donc,

$$\dot{F} = \frac{\mu}{d} \begin{cases} \dot{N} = \Lambda - \mu(N^* + \frac{d}{\mu}\epsilon) - dJ < \Lambda - \mu N^* - d\epsilon - dJ^* + d\epsilon = 0 \\ -\dot{N} = -\Lambda + \mu(N^* - \frac{d}{\mu}\epsilon) + dJ < \Lambda + \mu N^* - d\epsilon + dJ^* + d\epsilon = 0. \end{cases}$$

De manière analogue, nous montrons que  $\dot{F} < 0$  si  $F = \epsilon = \frac{\gamma}{a(\mu + d + \alpha) + b\gamma}|V - V^*|$  ou si  $F = \epsilon = |J - J^*|$ . Puisque  $(S^*, I^*, J^*)$  est un minimum global strict de  $F$ , il s'en suit que  $F$  est une fonction de Lyapunov, ce qui prouve la stabilité globale de  $(S^*, I^*, J^*)$ .

La preuve du second cas c'est-à-dire :  $a > b$  et  $\frac{d}{\mu} + 1 - \frac{\mu + d + \alpha}{\gamma} - 2\frac{b}{a} \leq 0$  est identique à la précédente.  $\square$

## 5. Généralisation du système dans le cas où $\alpha = 0$

Dans ce paragraphe, nous allons donner une pseudo généralisation du système (1.1). Dans le cas où il y absence de rétablissement, nous allons étudier le système pour  $n$  classes d'infectés au lieu de deux, et nous allons utiliser une incidence plus générale.

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S) - \mu S, \\ \dot{I}_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S) - (\mu + \gamma_1) I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma_1 I_1 - (\mu + \gamma_2) I_2, \\ \vdots \\ \dot{I}_n = \gamma_{n-1} I_{n-1} - (\mu + d) I_n. \end{cases} \quad (5.1)$$

Avec :

- $\Lambda$  est le recrutement,
- $\beta_i$  est le taux de contact du compartiment  $I_i$ ,
- $\varphi$  est une fonction continue, positive et strictement croissante en  $S$ , on voit que la fonction  $S \mapsto S^p$  est un cas particulier,
- $\mu$  est le taux de mortalité,
- $1/\gamma_i$  est la durée qu'un individu infecté effectue dans le compartiment  $I_i$  avant de devenir infecté de classe  $I_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- $d$  est la surmortalité induite par l'infection au niveau de la classe  $n$ .

### 5.1. Points d'équilibre

Le point d'équilibre trivial ou point d'équilibre sans maladie est donnée par :  $DFE = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, \dots, 0)$ .

Tout point d'équilibre endémique est une solution qui vérifie  $(I_1, \dots, I_n) \neq (0, \dots, 0)$  du système suivant :

$$\begin{cases} \Lambda - \sum_{i=1}^n \beta_i I_i^* \varphi(S^*) - \mu S^* = 0, \\ \sum_{i=1}^n \beta_i I_i^* \varphi(S^*) - (\mu + \gamma_1) I_1^* = 0, \\ \gamma_1 I_1^* - (\mu + \gamma_2) I_2^* = 0, \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} I_{n-1}^* - (\mu + d) I_n^* = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

La résolution donne :

$$I_n^* = \frac{\gamma_{n-1} I_{n-1}^*}{\mu + d}, \quad (5.3)$$

et pour  $i$  allant de

$$n-1 \text{ à } 2 \text{ nous avons } l_i^* = \frac{\gamma_{i-1} l_{i-1}^*}{\mu + \gamma_i}. \quad (5.4)$$

En remplaçant les  $l_i$  dans (5.2)<sub>2</sub>, nous avons :

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j}{\prod_{j=2}^i (\mu + \gamma_j)} + \beta_n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j}{\prod_{j=2}^n (\mu + \gamma_j) \times (\mu + d)} \right) \varphi(S^*) = \mu + \gamma_1,$$

donc

$$\varphi(S^*) = (\mu + \gamma_1) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j}{\prod_{j=2}^i (\mu + \gamma_j)} + \beta_n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j}{\prod_{j=2}^n (\mu + \gamma_j) \times (\mu + d)} \right)^{-1}.$$

Notons par  $K$  la partie à droite de la dernière inégalité. De plus,  $\varphi$  continue et strictement croissante, donc réalise une bijection de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,  $S^*$  est déterminé de manière unique et est égal à  $S^* = \varphi^{-1}(K)$ . En outre, en remplaçant  $S^*$ ,  $\varphi(S^*)$  et  $l_i^*$  (donné dans (5.4)) pour  $i = 2$  à  $n$  dans (5.2)<sub>1</sub>, nous obtenons l'expression de  $l_i^*$ . Par conséquent, (5.3) et (5.4) donnent les expressions de  $l_i$ ,  $i = 2$  à  $n$ . D'où le système (5.2) admet un unique point d'équilibre endémique.

## 5.2. Calcul de $\mathcal{R}_0$

Nous allons définir par  $\mathcal{F}_i(S, l)$  le taux de nouveaux cas d'infectés dans le compartiment  $i$ , et par  $\mathcal{V}_i(S, l)$  le taux de transfert d'un compartiment à un autre par tout autre moyen. Les matrices  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  sont données par :

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_i l_i \varphi(S) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} -(\mu + \gamma_1) l_1 \\ \gamma_1 l_1 - (\mu + \gamma_2) l_2 \\ \dots \\ \gamma_{n-1} l_{n-1} - (\mu + d) l_n \end{bmatrix}.$$

Les matrices Jacobiennes au point d'équilibre sans maladie :

$$D\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta_1 \varphi(\Lambda/\mu) & \beta_2 \varphi(\Lambda/\mu) & \dots & \beta_n \varphi(\Lambda/\mu) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{DV} = \begin{pmatrix} -(\mu + \gamma_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -(\mu + \gamma_2) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -(\mu + \gamma_3) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & -(\mu + d) \end{pmatrix}.$$

Notons par  $F = \mathcal{DF}$  et  $V = \mathcal{DV}$ . Le taux de reproduction est donnée par  $\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1})$ , est égal à

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i \varphi(\Lambda/\mu) \prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j}{\prod_{j=1}^i (\mu + \gamma_j)} + \frac{\beta_n \varphi(\Lambda/\mu)}{\mu + d} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma_j}{\mu + \gamma_j}.$$

### 5.3. Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

#### Théorème 4.4.

Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \int_{\Lambda/\mu}^S \left(1 - \frac{\varphi(\Lambda/\mu)}{\varphi(u)}\right) du + c_n I,$$

où

$$I = (I_1, \dots, I_n)^T$$

et

$$c_n = \left(1, \frac{\mu + \gamma_1}{\gamma_1} - \frac{\beta_1 \varphi(\Lambda/\mu)}{\gamma_1}, \dots, \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu + \gamma_i)}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \varphi(\Lambda/\mu) \frac{\prod_{j=i+1}^{n-1} (\mu + \gamma_j)}{\prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j}\right).$$

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \frac{\beta_1 \varphi(\Lambda/\mu)}{\mu + \gamma_1} + \frac{\beta_2 \varphi(\Lambda/\mu) \gamma_1}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2)} + \frac{\beta_3 \varphi(\mu) \gamma_1 \gamma_2}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2)(\mu + \gamma_3)} + \dots \\ &\quad + \frac{\beta_n \varphi(\Lambda/\mu) \gamma_1 \dots \gamma_{n-1}}{(\mu + \gamma_1) \dots (\mu + \gamma_{n-1})(\mu + d)}. \end{aligned}$$

Sachant que  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  alors  $\mu + \gamma_1 - \beta_1 \varphi(\Lambda/\mu) > 0$ , ainsi

$$(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2) - \beta_1 \varphi(\Lambda/\mu)(\mu + \gamma_2) - \beta_2 \varphi(\Lambda/\mu) \gamma_1 > 0,$$

ainsi de suite, jusqu'au dernier terme de  $V$ ,

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu + \gamma_i)}{\gamma_i} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \varphi(\Lambda/\mu) \frac{\prod_{j=i+1}^{n-1} (\mu + \gamma_j)}{\prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j} > 0.$$

Donc  $V$  est positive dans  $\Omega$ , sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V} = \left(1 - \frac{\varphi(\Lambda/\mu)}{\varphi(S)}\right)\dot{S} + c_n \dot{I}_n.$$

Le calcul montre que tous les termes en  $I_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\beta_n I_n \varphi(S)$  se suppriment. La dérivée devient :

$$\dot{V} = (\Lambda - \mu S) \left(1 - \frac{\varphi(\Lambda/\mu)}{\varphi(S)}\right) + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(\Lambda/\mu) \frac{\prod_{j=i+1}^{n-1} (\mu + \gamma_j)}{\prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j} - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu + \gamma_i)}{\gamma_i}\right) I_n.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\dot{V} = \Lambda \left(1 - \frac{S}{\Lambda/\mu}\right) \left(1 - \frac{\varphi(\Lambda/\mu)}{\varphi(S)}\right) + \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu + \gamma_i)(\mu + d)}{\gamma_i} (\mathcal{R}_0 - 1) I_n.$$

Étant donné que  $\varphi$  est croissante et  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  donc  $\dot{V} \leq 0$ . Et d'après le principe d'invariance de LaSalle, le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.  $\square$

## 5.4. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

### Théorème 4.5.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$  alors le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$\dot{V} = \int_{S^*}^S \left(1 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(u)}\right) du + c(I_1 - I_1^* \ln I_1, \dots, I_n - I_n^* \ln I_n),$$

où

$$c = \left(1, \frac{\mu + \gamma_1}{\gamma_1} - \frac{\beta_1 \varphi(S^*)}{\gamma_1}, \frac{(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} - \frac{\beta_1 I_1^* \varphi(S^*)}{\gamma_2 I_2^*}, \dots, \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mu + \gamma_i}{\gamma_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i I_i^* \varphi(S^*)}{\gamma_{n-1} I_{n-1}^*}\right)^T.$$

La dérivée de  $V$  est :

$$\dot{V} = \left(1 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(S)}\right)\dot{S} + \sum_{i=1}^n c_i \left(1 - \frac{I_i^*}{I_i}\right) \dot{I}_i,$$

l'expression de  $\dot{V}$  se réduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mu(S^* - S) \left(1 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(S)}\right) + \beta_1 I_1^* \varphi(S^*) \left[2 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(S)} - \frac{\varphi(S)}{\varphi(S^*)}\right] \\ & + \beta_2 I_2^* \varphi(S^*) \left[3 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(S)} - \frac{I_1 I_2^*}{I_1^* I_2} - \frac{I_1^* I_2 \varphi(S)}{I_1 I_2^* \varphi(S^*)}\right] + \beta_3 I_3^* \varphi(S^*) \left[4 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(S)} - \frac{I_1^* I_3 \varphi(S)}{I_1 I_3^* \varphi(S^*)} - \frac{I_1 I_2^*}{I_1^* I_2} - \frac{I_2 I_3^*}{I_2^* I_3}\right] \end{aligned}$$

$$+ \dots + \beta_n I_n^* \varphi(S^*) \left[ n + 1 - \frac{\varphi(S^*)}{\varphi(S)} - \frac{I_1^* I_n \varphi(S)}{I_1 I_n^* \varphi(S^*)} - \frac{I_1 I_2^*}{I_1^* I_2} - \frac{I_2 I_3^*}{I_2^* I_3} - \dots - \frac{I_{n-1} I_n^*}{I_{n-1}^* I_n} \right].$$

Du fait que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, les termes entre crochets sont négatifs.

D'où le résultat. □

## 6. Conclusion

Le système soumis à l'étude dans ce chapitre est un système  $S/S$  utilisant une incidence assez particulière et deux classes d'infectés. Nous avons établi la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie pour  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ . Dans le cas où  $\mathcal{R}_0 > 1$ , nous avons établi la stabilité globale du point d'équilibre endémique pour les cas  $\alpha = 0$  et  $\beta_1 = 0$  par la méthode directe de Lyapunov, et le cas où tous les paramètres sont non nuls, nous avons utilisé la technique de J. Jacquez et C. Simon exposée dans [67]. De surcroît, nous terminons le travail par une pseudo-généralisation du système.



# Chapitre 5

## Stabilité globale d'un modèle $S/I_1/I_2$ avec une incidence non linéaire dépendant d'une fonction

### Sommaire

---

1.	Présentation du modèle . . . . .	75
2.	Points d'équilibre et Taux de reproduction de base . . . . .	77
3.	Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie . . . . .	80
4.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	82
4.1.	Stabilité locale du point d'équilibre endémique . . . . .	82
4.2.	Stabilité globale du point d'équilibre endémique . . . . .	84
5.	Conclusion . . . . .	88

---

### 1. Présentation du modèle

Le modèle soumis à notre analyse est un modèle  $S/I_1/I_2$  qui a déjà fait l'objet d'étude de la part des auteurs S. M. Moghadas et A. B. Gumel, et ces derniers ont publié leur travail [63] dans le journal : *Mathematics and Computers and Simulation*. Par contre, il faut bien noter que l'étude faite par ces derniers auteurs comporte une erreur fondamentale, qui affecte les résultats de stabilité globale des points d'équilibre. De surcroît, ils ont établi que le système n'admet pas de cycles fermés, entaché de la dite erreur, pour conclure sur la stabilité, ce qui est insuffisant. L'erreur en tant que telle consiste à prendre un ensemble comme invariant pour leur système, sans qu'il en soit ainsi. Donc, il s'agit de la même erreur que dans le travail repris dans le chapitre 4. D'ailleurs, les auteurs de [10], c'est-à-dire du travail repris dans le chapitre 4, ont cité le papier

## 1.. PRÉSENTATION DU MODÈLE

[63]. D'où la nécessité de corriger cette erreur. Ce présent système utilise une incidence non-linéaire comme [10, 67, 43, 42, 51, 37, 57, 30], mais ce qui fait son originalité est que l'incidence dépend d'une fonction qui n'est pas définie de manière explicite. Dans notre travail, nous avons repris l'étude de leur système, qui est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Pi - (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2))S - \mu S, \\ \dot{I}_1 = (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2))S - (\mu + \gamma)I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma I_1 - (\mu + d)I_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

où

- $S, I_1, I_2$  représentent respectivement les compartiments de susceptibles, d'infectés au premier stade de la maladie et d'infectés au second stade de la maladie.
- $\Pi, \mu, 1/\gamma, d$  sont respectivement, le recrutement, le taux de mortalité, le temps mis pour qu'un infecté au premier stade devienne infecté en phase terminale,
- $\beta_1$  and  $\beta_2$  représentent le taux de contact d'un infecté au premier stade et d'un infecté au second stade respectivement,
- le terme  $c\beta_1 f(I_1)S + c\beta_2 f(I_2)S$  représente l'incidence et  $c$  est une constante positive.

Avec la fonction  $f$  qui est définie de la manière suivante :

**(A1)** :  $f(0) = 0,$

**(A2)** :  $f'(I) > 0,$

**(A3)** :  $f''(I) < 0,$

**(A4)** :  $\lim_{I \rightarrow +\infty} f(I) = C < +\infty$

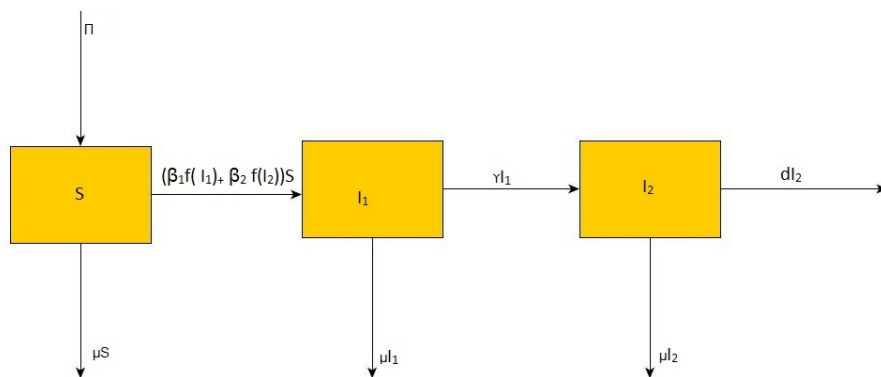


Figure 5.1 – Diagramme de transfert pour le modèle  $S/I_1/I_2$

Notons d'abord que  $\Omega = \{0 \leq S, I_1, I_2 \leq \frac{\square}{\mu}, S + I_1 + I_2 \leq \frac{\square}{\mu}\}$  est un ensemble invariant pour le système (1.1). Pour mettre en exergue l'erreur commise par les auteurs, nous allons donner le changement de variable qu'ils ont effectué afin de travailler avec un système équivalent. Posons :

$$X = \frac{\mu}{\square}S, Y_1 = \frac{\mu}{\square}I_1, Y_2 = \frac{\mu}{\square}I_2, \tilde{t} = \mu t, \tilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{\mu}, \tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{\mu}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\mu}, \tilde{d} = \frac{d}{\mu}.$$

Avec ces notations, (1.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{dX}{d\tilde{t}} = 1 - [\tilde{\beta}_1 f(\frac{\square}{\mu}Y_1) + \tilde{\beta}_2 f(\frac{\square}{\mu}Y_2)] X - X, \\ \dot{Y}_1 = \frac{dY_1}{d\tilde{t}} = [\tilde{\beta}_1 f(\frac{\square}{\mu}Y_1) + \tilde{\beta}_2 f(\frac{\square}{\mu}Y_2)] X - \tilde{\gamma}Y_1 - Y_1, \\ \dot{Y}_2 = \frac{dY_2}{d\tilde{t}} = \tilde{\gamma}Y_1 - (1 + \tilde{d})Y_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

La nouvelle taille de la population est  $\tilde{N} = X + Y_1 + Y_2$ , et satisfait :

$$\dot{\tilde{N}} = 1 - \tilde{N} - \tilde{d}Y_2.$$

L'ensemble  $\mathcal{D} = \{X, Y_1, Y_2 \geq 0, X + Y_1 + Y_2 \leq 1\}$  est invariant pour le système pour le nouveau système. Cependant, ils ont aussi considéré  $\mathcal{D}^* = \{(X, Y_1, Y_2) \in \mathcal{D}, X + Y_1 + (1 + \tilde{d})Y_2 = 1\}$  comme ensemble invariant pour le nouveau système, ce qui est faux. En effet,

$$\frac{d}{d\tilde{t}}(X + Y_1 + (1 + \tilde{d})Y_2) = 1 - X - Y_1 + \tilde{\gamma}\tilde{d}Y_1 - (1 + \tilde{d})^2Y_2 = \tilde{d}(\tilde{\gamma}Y_1 - (1 + \tilde{d})Y_2) \neq 0.$$

C'est pourquoi nous allons reprendre l'étude du système (1.1). Nous avons dans un premier temps établi la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie par une fonction de Lyapunov, puis la stabilité locale du point d'équilibre endémique par le critère de Routh-Hurwitz. Enfin nous avons établi sous condition, par la méthode de Li-Muldowney, la stabilité globale du point d'équilibre endémique. Avant de donner les résultats de stabilité, nous commençons par rappeler les différents points d'équilibre et du taux de reproduction de base.

## 2. Points d'équilibre et Taux de reproduction de base

Le point d'équilibre sans maladie est  $DFE = (\frac{\square}{\mu}, 0, 0)$ . Avant de déterminer le point d'équilibre endémique, nous allons d'abord calculer le taux de reproduction de base. Nous notons par :

- $\mathcal{F}_j(S, I_1, I_2)$  le taux de nouveaux infectés dans le compartiment  $j$ ,
- $\mathcal{V}_j(S, I_1, I_2)$  le taux de transfert d'individus d'un compartiment à un autre par tout autre moyen.

## 2.. POINTS D'ÉQUILIBRE ET TAUX DE REPRODUCTION DE BASE

---

Les matrices  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  sont représentées par :

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \\ (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2))S & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \Pi - (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2))S - \mu S & \\ -(\mu + \gamma)I_1 & \\ \gamma I_1 - (\mu + d)I_2 & \end{bmatrix}.$$

Le calcul de leur jacobienne respective au point d'équilibre sans maladie  $(\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0)$  donne :

$$\mathcal{DF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\beta_1 f'(0)\frac{\Pi}{\mu} & c\beta_2 f'(0)\frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{DV} = \begin{pmatrix} -\mu & -c\beta_1 f'(0)\frac{\Pi}{\mu} & -c\beta_2 + df'(0)\frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & -(\mu + \gamma) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu + d) \end{pmatrix}.$$

Considérons  $F$  et  $V$  les matrices données par :

$$F = \begin{pmatrix} c\beta_1 f'(0)\frac{\Pi}{\mu} & c\beta_2 f'(0)\frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} -(\mu + \gamma) & 0 \\ \gamma & -(\mu + d) \end{pmatrix}.$$

Le taux de reproduction de base est le rayon spectral de la matrice  $-FV$ . Le calcul donne :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{c\beta_1 f'(0)\Pi}{\mu(\mu + \gamma)} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)\Pi}{\mu(\mu + \gamma)(\mu + d)}.$$

Nous avons le résultat suivant, qui a été établi dans [63], que nous rappelons pour la clarté de l'exposé :

### Proposition 5.1.

*Si les hypothèses (A1), (A2), (A3) et (A4) sont vérifiées et  $\mathcal{R}_0 > 1$  alors il existe un unique point d'équilibre endémique.*

*Démonstration.* Tout point d'équilibre endémique est un point d'équilibre tel que  $(I_1, I_2) \neq (0, 0)$ , qui est solution de :

$$\begin{cases} \Pi - (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))S - \mu S^* = 0, \\ (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))S^* - (\mu + \gamma)I_1^* = 0, \\ \gamma I_1^* - (\mu + d)I_2^* = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

(2.1)<sub>3</sub> donne :

$$I_2^* = \frac{\gamma I_1^*}{(\mu + d)}, \quad (2.2)$$

et (2.1)<sub>2</sub> donne

$$S^* = \frac{(\mu + \gamma)I_1^*}{c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*)}. \quad (2.3)$$

En remplaçant  $I_2^*$  et  $S^*$  par leurs expressions respectifs aux (2.2) et (2.3) dans (2.1)<sub>1</sub>, et en remplaçant aussi  $(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))S^*$  par  $(\mu + \gamma)I_1^*$ , nous avons :

$$\Pi - (\mu + \gamma)I_1^* - \mu \frac{(\mu + \gamma)I_1^*}{c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(\gamma I_1^*/(\mu + d))} = 0.$$

Ce qui entraîne

$$\Pi(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(\gamma I_1^*/(\mu + d))) = (\mu + \gamma)[c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(\gamma I_1^*/(\mu + d)) + \mu]I_1^*.$$

Ce qui revient à l'étude du point fixe de  $H$  définie par :

$$H(I) = \frac{\Pi(c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I/(\mu + d)))}{(\mu + \gamma)[c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I/(\mu + d)) + \mu]}, \quad I \geq 0.$$

Nous avons :  $H(0)=0$ . Par ailleurs,

$$H'(I) = \Pi \mu \frac{c\beta_1 f'(I) + c\beta_2 \gamma/(\mu + d) f'(\gamma I/(\mu + d))}{(\mu + \gamma)[c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I/(\mu + d)) + \mu]^2} > 0,$$

et

$$H'(0) = \frac{c\beta_1 f'(0)\Pi}{\mu(\mu + \gamma)} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)\Pi}{\mu(\mu + \gamma)(\mu + d)} = \mathcal{R}_0.$$

D'autre part, d'après la définition de la fonction  $H$  et celle de  $f$ , nous avons  $H(I) < \frac{\Pi}{\mu + \gamma}$ , ce qui entraîne  $H(\frac{\Pi}{\mu + \gamma}) < \frac{\Pi}{\mu + \gamma}$ . En définitive, nous avons :  $H(0) = 0$  et  $H'(0) > 1$ , et de plus  $H(\frac{\Pi}{\mu + \gamma}) < \frac{\Pi}{\mu + \gamma}$ . Donc  $H$  admet au moins un point fixe compris entre 0 et  $\frac{\Pi}{\mu + \gamma}$ .

### 3.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE SANS MALADIE

strictement. Et l'expression de la dérivée montre que  $H$  est strictement croissante. De surcroît, la dérivée seconde de  $H$  est :

$$H''(I) = \frac{\Pi\mu}{\mu + \gamma} \times \left\{ \frac{[c\beta_1 f''(I) + c\beta_2 \gamma^2 / (\mu + d)^2 f''(\gamma I / (\mu + d))][c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I / (\mu + d)) + \mu]^2}{[c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I / (\mu + d)) + \mu]^4} - \frac{2[c\beta_1 f'(I) + c\beta_2 \gamma / (\mu + d) f'(\gamma I / (\mu + d))]^2 [c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I / (\mu + d)) + \mu]}{[c\beta_1 f(I) + c\beta_2 f(\gamma I / (\mu + d)) + \mu]^4} \right\}.$$

La concavité de  $H$  montre l'unicité du point fixe. Nous avons prouvé qu'il existe un unique  $I_1^* > 0$ . Nous déduisons les expressions de  $S^*$ ,  $I_2^*$  aux niveaux de (2.3) et (2.2), respectivement. D'où il existe un unique point d'équilibre endémique, noté par  $EE$ , qui vérifie :

$$EE = \left( \frac{(\mu + \gamma)I_1^*}{c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(\gamma I_1^* / (\mu + d))}, I_1^*, \frac{\gamma I_1^*}{\mu + d} \right).$$

□

## 3. Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

### Théorème 5.1.

Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable et instable pour  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) I_1 + \frac{c\beta_2 f'(0)}{\mu + d} I_2.$$

La dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) \dot{I}_1 + \frac{c\beta_2 f'(0)}{\mu + d} \dot{I}_2 \\ \dot{V} &= \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) S - c\beta_1 f'(0) I_1 \\ &\quad - \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{\mu + d} I_1 + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{\mu + d} I_1 - c\beta_2 f'(0) I_2. \end{aligned}$$

Après simplification, nous avons

$$\dot{V} = \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) S - c\beta_1 f'(0) I_1 - c\beta_2 f'(0) I_2.$$

Du fait de la définition de  $f$ , nous avons  $f(I) \leq f'(0)I$ , ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) S - c\beta_1 f(I_1) - c\beta_2 f'(I_2) \\ &= (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) \left[ \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) S - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La fonction  $S \mapsto \left( \frac{c\beta_1 f'(0)}{\mu + \gamma} + \frac{c\beta_2 \gamma f'(0)}{(\mu + \gamma)(\mu + d)} \right) S$  est strictement croissante et atteint son maximum en  $\frac{\Pi}{\mu}$ . Ce maximum est égal à  $\mathcal{R}_0$ . Donc

$$\dot{V} \leq (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) (\mathcal{R}_0 - 1).$$

Si  $\mathcal{R}_0 < 1$ , l'application du principe de LaSalle est immédiate. Supposons que  $\mathcal{R}_0 = 1$ , d'après (3.1), nous avons :

$$\dot{V} \leq (c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) \left( \frac{S}{\Pi/\mu} - 1 \right).$$

Nous appliquons aussi le principe d'invariance de LaSalle. D'où le point d'équilibre sans maladie est globalement asymptotiquement stable pour  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ .

Maintenant supposons que  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

Étudions la stabilité locale du point d'équilibre sans maladie.

Considérons la matrice jacobienne au point d'équilibre sans maladie :

$$J(DFE) = \begin{pmatrix} -\mu & -c\beta_1 f'(0) \frac{\Pi}{\mu} & -c\beta_2 f'(0) \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & c\beta_1 f'(0) \frac{\Pi}{\mu} - (\mu + \gamma) & c\beta_2 f'(0) \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & \gamma & -(\mu + d) \end{pmatrix}.$$

Le calcul du déterminant donne :

$$\begin{aligned} \det(J(DFE) - \lambda I) &= \\ &(-\mu - \lambda) \left( \lambda^2 + (2\mu + d + \gamma - c\beta_1 f'(0) \frac{\Pi}{\mu}) \lambda + (\mu + \gamma)(\mu + d)(1 - \mathcal{R}_0) \right) \end{aligned}$$

$\det(J(DFE)) > 0$  a des valeurs propres positives quand  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Donc l'équilibre sans maladie est instable.  $\square$

## 4. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

### 4.1. Stabilité locale du point d'équilibre endémique

#### Théorème 5.2.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le point d'équilibre endémique existe et il est localement stable.

*Démonstration.* Dans cette preuve, nous utilisons le critère de Routh-Hurwitz.

Considérons la matrice Jacobienne du système au point d'équilibre endémique ( $EE$ ) :

$$J(EE) = \begin{pmatrix} -(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*)) - \mu & -c\beta_1 f'(I_1^*) S^* & -c\beta_2 f'(I_2^*) S^* \\ c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) & c\beta_1 f'(I_1^*) S^* - (\mu + \gamma) & c\beta_2 f'(I_2^*) S^* \\ 0 & \gamma & -(\mu + d) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $J(EE)$  est donné par :

$$P(\lambda) = \det(J(EE) - \lambda I),$$

$$P(\lambda) =$$

$$-(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu + \lambda) \{ (c\beta_1 f'(I_1^*) S^* - (\mu + \gamma) - \lambda) (-(\mu + d) - \lambda) - c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^* \} \\ + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*)) (-(\mu + d) - \lambda) - c\beta_2 f'(I_2^*) S^* (c\beta_1 \gamma f(I_1^*) + c\beta_2 \gamma f(I_2^*)).$$

Après réduction de l'expression de  $P$ , nous obtenons :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + [-(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu) + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* - (\mu + \gamma) - (\mu + d)] \lambda^2 \\ + [-(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu) (-c\beta_1 f'(I_1^*) S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)) + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) \\ + c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^* - (\mu + d) (\mu + \gamma) - c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (c\beta_1 \gamma f(I_1^*) + c\beta_2 \gamma f(I_2^*))] \lambda \\ - (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*)) (\mu + d) (\mu + \gamma) \\ - \mu (-c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) + (\mu + d) (\mu + \gamma)) + \mu c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^*.$$

Le polynôme  $P$  peut se réécrire de la manière suivante :

$$-P(\lambda) = -a_3 \lambda^3 - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0.$$

Alors  $-a_3 = 1$  est positif, et

$$a_2 = -(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu) + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* - (\mu + \gamma) - (\mu + d).$$



Au point d'équilibre, (1.1)<sub>2</sub> donne :

$$\mu + \gamma = (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*)) \frac{S^*}{I_1^*}.$$

Alors

$$c\beta_1 f'(I_1^*) S^* - (\mu + \gamma) = c\beta_1 \frac{S^*}{I_1^*} (f'(I_1^*) I_1^* - f(I_1^*)) - c\beta_2 f(I_2^*) \frac{S^*}{I_1^*}. \quad (4.1)$$

La concavité de  $f$  donne  $f'(I_1^*) I_1^* - f(I_1^*) < 0$ , ce qui entraîne  $a_2 < 0$ .

Maintenant, examinons le signe de  $a_1$  :

$$\begin{aligned} a_1 = & -(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu)(-c\beta_1 f'(I_1^*) S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)) + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) \\ & + c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^* - (\mu + d)(\mu + \gamma) - c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (c\beta_1 \gamma f(I_1^*) + c\beta_2 \gamma f(I_2^*)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a_1 = & -(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))((\mu + \gamma) + (\mu + d)) - \mu(-c\beta_1 f'(I_1^*) S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)) \\ & + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) + c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^* - (\mu + d)(\mu + \gamma). \end{aligned}$$

A l'équilibre, nous avons :

$$\begin{aligned} c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) + c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^* - (\mu + d)(\mu + \gamma) = & c\beta_1 (f'(I_1^*) I_1^* - f(I_1^*)) \frac{S^*}{I_1^*} (\mu + d) \\ & + c\beta_2 \gamma (f'(I_2^*) I_2^* - f(I_2^*)) \frac{S^*}{I_2^*} < 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Donc  $a_1 < 0$ . Nous examinons aussi le signe de  $a_0$  :

$$\begin{aligned} a_0 = & -(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))(\mu + d)(\mu + \gamma) - \mu(-c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) + (\mu + d)(\mu + \gamma)) \\ & + \mu c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^*. \end{aligned}$$

Grâce à (4.2)  $a_0$  est négatif.

Il reste à avoir  $(-a_2)(-a_1) - (-a_0) > 0$ .

Examinons  $a_2 a_1$  :

$$\begin{aligned} a_2 a_1 = & [-(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu) + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* - (\mu + \gamma) - (\mu + d)][-(\mu + d)(\mu + \gamma) \\ & + c\beta_2 \gamma f'(I_2^*) S^* + c\beta_1 f'(I_1^*) S^* (\mu + d) - (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))((\mu + \gamma) + (\mu + d))] \end{aligned}$$

$$-\mu(-c\beta_1 f'(I_1^*)S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)).$$

Donc, en développant par le dernier terme du premier facteur c'est-à-dire  $\mu + d$  par rapport au second facteur, nous avons :

$$\begin{aligned} a_2 a_1 &= [-(c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*) + \mu) + c\beta_1 f'(I_1^*)S^* - (\mu + \gamma)][-(\mu + d)(\mu + \gamma) \\ &+ c\beta_2 \gamma f'(I_2^*)S^* + c\beta_1 f'(I_1^*)S^*(\mu + d) - (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))((\mu + \gamma) + (\mu + d)) \\ &\quad - \mu(-c\beta_1 f'(I_1^*)S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d))] \\ -a_0 + d &[(\mu + d)(\mu + \gamma) - c\beta_2 \gamma f'(I_2^*)S^* - c\beta_1 f'(I_1^*)S^*(\mu + d)] + (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))(\mu + d)^2 \\ &\quad + \mu(\mu + d)(-c\beta_1 f'(I_1^*)S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)). \end{aligned}$$

En réduisant l'expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_2 a_1 &= -a_0 + [a_2 + \mu + d] \times a_1 + d[(\mu + d)(\mu + \gamma) - c\beta_2 \gamma f'(I_2^*)S^* - c\beta_1 f'(I_1^*)S^*(\mu + d)] \\ &\quad + (c\beta_1 f(I_1^*) + c\beta_2 f(I_2^*))(\mu + d)^2 + \mu(\mu + d)(-c\beta_1 f'(I_1^*)S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)). \end{aligned}$$

D'après (4.1) et (4.2) :

$$(\mu + d)(\mu + \gamma) - c\beta_2 \gamma f'(I_2^*)S^* - c\beta_1 f'(I_1^*)S^*(\mu + d)$$

et

$$-c\beta_1 f'(I_1^*)S^* + (\mu + \gamma) + (\mu + d)$$

sont positifs. De plus  $a_2 + \mu + d < 0$  et  $a_1 < 0$ .

Par suite  $(-a_2)(-a_1) - (-a_0) > 0$ . D'où, le critère de Routh-Hurwitz montre que le point d'équilibre endémique est stable.  $\square$

## 4.2. Stabilité globale du point d'équilibre endémique

### Hypothèse 5.1.

$$\gamma > 2c\beta_1 f'(0) \frac{\Pi}{\mu}.$$

### Théorème 5.3.

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$  et l'hypothèse 5.1 vérifiée alors le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable dans  $\mathring{\Omega}$ .

*Démonstration.* Dans cette preuve, nous utilisons la méthode de Li-Muldowney.

La matrice Jacobienne du système est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu & -c\beta_1 f'(I_1)S & -c\beta_2 f'(I_2)S \\ c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2) & c\beta_1 f'(I_1)S - (\mu + \gamma) & c\beta_2 f'(I_2)S \\ 0 & \gamma & -(\mu + d) \end{pmatrix},$$

La matrice deuxième matrice composée  $J^{[2]}$  est :

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu + c\beta_1 f'(I_1)S - (\mu + \gamma) & & \\ & \gamma & \\ & 0 & \\ & & c\beta_2 f'(I_2)S & & c\beta_2 f'(I_2)S \\ & & -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu - (\mu + d) & & -c\beta_1 f'(I_1)S \\ & & c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2) & & c\beta_1 f'(I_1)S - (\mu + \gamma) - (\mu + d) \end{pmatrix}$$

Considérons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I}{J} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I}{J} \end{pmatrix} \text{ donc } P_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{iJ - Ij}{J^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{iJ - Ij}{J^2} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$B = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1} = \begin{pmatrix} -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu + c\beta_1 f'(I_1)S - (\mu + \gamma) & & \\ & \gamma \frac{I_1}{I_2} & \\ & 0 & \\ & & c\beta_2 \frac{I_2}{I_1} f'(I_2)S & & c\beta_2 \frac{I_2}{I_1} f'(I_2)S \\ & & -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - 2\mu - d + \frac{I_1}{I_1} - \frac{I_2}{I_2} & & -c\beta_1 f'(I_1)S \\ & & c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2) & & c\beta_1 f'(I_1)S - 2\mu - \gamma - d + \frac{i}{I} - \frac{j}{J} \end{pmatrix}$$

La matrice  $B$  peut être écrite en matrice bloc :

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix},$$

où

$$B_{1,1} = -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu + c\beta_1 f'(I_1)S - (\mu + \gamma),$$

#### 4.. STABILITÉ GLOBALE DU POINT D'ÉQUILIBRE ENDÉMIQUE

---

$$B_{1,2} = [c\beta_2 \frac{l_2}{l_1} f'(l_2)S, c\beta_2 \frac{l_2}{l_1} f'(l_2)S],$$

$$B_{2,1} = \begin{bmatrix} \gamma \frac{l_1}{l_2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$B_{2,2}$  est égale à :

$$\begin{pmatrix} -(c\beta_1 f(l_1) + c\beta_2 f(l_2)) - 2\mu - d + \frac{l_1}{l_1} - \frac{l_2}{l_2} & -c\beta_1 f'(l_1)S \\ c\beta_1 f(l_1) + c\beta_2 f(l_2) & c\beta_1 f'(l_1)S - 2\mu - \gamma - d + \frac{i}{i} - \frac{j}{j} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $(u, v, w)$  qui représente un vecteur  $\mathbb{R}^3$ , considérons la norme suivante sur  $\mathbb{R}^3$

$$|(u, v, w)| = \max\{|u|, |v| + |w|\},$$

et la mesure de Lozinskiĭ de  $B$  peut être estimée comme :

$$\bar{\mu}(B) \leq \max\{\bar{\mu}_1(B_{1,1}) + |B_{1,2}|, |B_{2,1}| + \bar{\mu}_1(B_{2,2})\}.$$

Nous avons

$$\bar{\mu}(B) \leq \{g_1, g_2\},$$

où

$$\begin{aligned} g_1 &= \bar{\mu}_1(B_{1,1}) + |B_{1,2}|, \\ &= -(c\beta_1 f(l_1) + c\beta_2 f(l_2)) - \mu + c\beta_1 f'(l_1)S - (\mu + \gamma) \\ &\quad + \max\{c\beta_2 \frac{l_2}{l_1} f'(l_2)S, c\beta_2 \frac{l_2}{l_1} f'(l_2)S\}, \\ &= -(c\beta_1 f(l_1) + c\beta_2 f(l_2)) - \mu + c\beta_1 f'(l_1)S - (\mu + \gamma) + c\beta_2 \frac{l_2}{l_1} f'(l_2)S. \end{aligned}$$

Du fait de la concavité de  $f$ , nous avons :

$$f(l_2) \geq l_2 f'(l_2),$$

donc

$$c\beta_2 \frac{l_2}{l_1} f'(l_2)S \leq c\beta_2 f(l_2) \frac{S}{l_1},$$

et grâce à (1.1)<sub>2</sub>, nous avons :

$$c\beta_2 f(l_2) \frac{S}{l_1} = \frac{l_1}{l_1} - c\beta_1 f(l_1) \frac{S}{l_1} + (\mu + \gamma).$$

De plus  $f(I_1) \geq I_1 f'(I_1)$  alors  $-c\beta_1 f(I_1) \frac{S}{I_1} \leq -c\beta_1 f'(I_1)S$ . Donc

$$c\beta_2 \frac{I_2}{I_1} f'(I_2)S \leq c\beta_2 f(I_2) \frac{S}{I_1} \leq \frac{\dot{I}_1}{I_1} - c\beta_1 f'(I_1)S + (\mu + \gamma).$$

D'où

$$g_1 \leq -(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu + \frac{\dot{I}_1}{I_1}.$$

D'autres part :

$$g_2 = \gamma \frac{I_1}{I_2} + \max\{-\mu - (\mu + d) + \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{I}_2}{I_2}, 2c\beta_1 f'(I_1)S - (\mu + \gamma) - (\mu + d) + \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{I}_2}{I_2}\}$$

D'après la supposition (5.1), nous avons

$$g_2 = \gamma \frac{I_1}{I_2} - \mu - (\mu + d) + \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{I}_2}{I_2},$$

Selon (1.1)<sub>3</sub> nous avons :

$$-\frac{\dot{I}_2}{I_2} = -\gamma \frac{I_1}{I_2} + (\mu + d),$$

alors

$$g_2 = -\mu + \frac{\dot{I}_1}{I_1},$$

donc

$$\bar{\mu}(B) \leq \max\{g_1, g_2\} \leq \max\{-(c\beta_1 f(I_1) + c\beta_2 f(I_2)) - \mu + \frac{\dot{I}_1}{I_1}, -\mu + \frac{\dot{I}_1}{I_1}\},$$

d'où

$$\bar{\mu}(B) \leq -\mu + \frac{\dot{I}_1}{I_1}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{t} \int_0^t \bar{\mu}(B) \leq \frac{1}{t} \int_0^t (-\mu + \frac{\dot{I}_1}{I_1}) ds = \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} - \mu < -\frac{\mu}{2}.$$

Ce qui conduit à

$$\bar{q}_2 \leq -\frac{\mu}{2} < 0.$$

D'où, d'après le théorème de Li-Muldowney (1.10), le point d'équilibre endémique est globalement asymptotiquement stable dans  $\hat{\Omega}$ . □

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mené un travail de rectification de l'article [63]. Après avoir souligné l'erreur commise par les auteurs, nous avons établi la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie dans le cas où  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  par la méthode directe de Lyapunov. Puis, pour  $\mathcal{R}_0 > 1$ , nous avons établi la stabilité globale du point d'équilibre endémique, avec une condition, par la méthode de Li-Muldowney, qui est une approche nouvelle et puissante d'analyse de stabilité globale.

# Chapitre 6

## Étude de l'observabilité d'un système $S/I$ avec $n$ classes d'infectés

### Sommaire

---

1. Introduction . . . . .	89
2. Observabilité et Observateur grand gain du système . . . . .	90
3. Application et Simulations . . . . .	93
4. Conclusion . . . . .	101

---

### 1. Introduction

Dans le modèle (5.1), les infectés en phase terminale de la maladie peuvent être connus. Connaissant le nombre d'individus présentant les caractéristiques les plus sévères de l'infection, nous allons essayer de reconstruire tous les états antérieurs des différentes classes, afin de mieux maîtriser la propagation de l'infection. Nous rappelons le modèle (5.1) :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S) - \mu S, \\ \dot{I}_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i I_i \varphi(S) - (\mu + \gamma_1) I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma_1 I_1 - (\mu + \gamma_2) I_2, \\ \vdots \\ \dot{I}_n = \gamma_{n-1} I_{n-1} - (\mu + d) I_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec :

- $\Lambda$  est le recrutement,
- $\beta_i$  est le taux de contact du compartiment  $I_i$ ,

## 2.. OBSERVABILITÉ ET OBSERVATEUR GRAND GAIN DU SYSTÈME

- $\varphi$  est une fonction continue, positive et strictement croissante en  $S$ , on voit que la fonction  $S : \mathbb{R} \rightarrow S^p$  est un cas particulier,
- $\mu$  est le taux de mortalité,
- $1/\gamma_i$  est la durée qu'un individu infecté effectue dans le compartiment  $I_i$  avant de devenir infecté de classe  $I_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- $d$  est la surmortalité induite par l'infection au niveau de la classe  $n$ .

Posons  $x = (S, I_1, \dots, I_n)^T$  et  $y = I_n$ . Nous allons étudier le problème d'observation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ y = h(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f$  représente la dynamique de l'infection et  $h(x) = (0, \dots, 1).x$ .

Nous allons étudier l'observabilité du système (1.2), construire un observateur grand gain pour le système, et effectuer des simulations pour un cas particulier du système ( $n = 2$  et  $\varphi = I_d$ ).

## 2. Observabilité et Observateur grand gain du système

Considérons la fonction suivante :

$$\psi : x \mapsto \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}.$$

### Lemme 6.1.

(1.2) est observable et  $\psi$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  dans  $\psi(\Omega)$ .

*Démonstration.* La fonction  $\psi$  est composée des  $k$  dérivées de  $y$ , qui sont données pour  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= (-1)^k (\mu + d)^k I_n + (-1)^{k-1} \gamma_{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} (\mu + \gamma_{n-1})^{k-1-i} (\mu + d)^i I_{n-1} \\ &+ (-1)^{k-2} \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \left[ \sum_{i=0}^{k-2} (\mu + \gamma_{n-2+i})^{k-2-i} ((\mu + \gamma_{n-1+i})^i + (\mu + d)^i) \right. \\ &\left. + \sum_{i,j,l \neq 0, i+j+l=k-2} (\mu + \gamma_{n-2})^i (\mu + \gamma_{n-1})^j (\mu + d)^l \right] I_{n-2} + \dots + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & + (-1)^{k-p} \prod_{i=1}^{k-p} \gamma_{n-i} \left[ \sum_{i=0}^{k-p} (\mu + \gamma_{n-p+i})^{k-p-i} ((\mu + \gamma_{n-p+1+i})^i + \dots + (\mu + \gamma_{n-1})^i + (\mu + d)^i) \right. \\
 & \quad \left. \sum_{i_j \neq 0, i_1 + \dots + i_{p+1} = k-p} (\mu + \gamma_{n-p})^{i_1} \dots (\mu + \gamma_{n-1})^{i_p} (\mu + d)^{i_{p+1}} \right] l_{n-p} \\
 & \quad \vdots \\
 & - \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_{n-i} ((\mu + \gamma_{n-k+1}) + (\mu + \gamma_{n-k+2}) + \dots + (\mu + \gamma_{n-1}) + (\mu + d)) l_{n-k+1} \\
 & \quad + \prod_{i=1}^k \gamma_{n-i} l_{n-k}.
 \end{aligned}$$

Notons par  $c_{l_{n-p}}^k$  le coefficient correspondant à la variable  $l_{n-k}$ .  $y^{(k)}$  peut être réécrit :

$$y^{(k)} = \sum_{p=0}^k c_{l_{n-p}}^k l_{n-p}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

D'autre part, l'expression de  $y^{(n)}$  se déduit facilement de celle de  $y^{(n-1)}$ .

La matrice Jacobienne en  $x_0$  est :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{l_{n-1}}^1 & c_{l_n}^1 \\ 0 & \cdots & c_{l_{n-2}}^2 & c_{l_{n-1}}^2 & c_{l_n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_S^n & \cdots & \cdots & c_{l_{n-1}}^n & c_{l_n}^n \end{pmatrix}$$

Le calcul par induction montre que chaque  $c_{x_i}^k$ , pour  $k = 1$  à  $n$ , est déterminé de manière unique, et est différent de zero et indépendant de  $x$ , excepté du dernier coefficient qui est donnée par :

$$c_S^n = c_{l_{n-1}}^{n-1} \sum_{i=1}^n \beta_i l_i \varphi'(S).$$

La Jacobienne est diagonale inférieure. Le rang de  $A$  est  $n + 1$  si et seulement si  $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$ .

Par ailleurs, Considérons  $x$  et  $x'$  tels que  $\psi(x) = \psi(x')$ . L'égalité des deux vecteurs donne à la première composante  $l_n = l'_n$ , et par suite la deuxième composante de l'égalité de  $\psi(x)$  et  $\psi(x')$  donne  $l_{n-1} = l'_{n-1}$ . En appliquant ce principe tour à tour pour les  $n - 1$  composantes,

## 2.. OBSERVABILITÉ ET OBSERVATEUR GRAND GAIN DU SYSTÈME

nous obtenons  $l_k = l'_k$ , pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Et à la dernière composante nous avons, du fait de la bijectivité de  $\varphi$  que  $S = S'$ . Donc  $x = x'$ , ce qui prouve l'injectivité de  $\psi$ . L'injectivité de (1.2) et le rang de  $A$  montre que  $\psi$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  dans  $\psi(\Omega)$ .  $\square$

Le système étant observable, nous allons déterminer son observateur grand gain. Effectuons le changement de variable suivant  $z = \psi(x)$ . Nous allons déterminer  $\psi^{-1}$ . Par identification  $z_i = \psi_i(x)$ , nous avons :

$$l_n = z_1, \quad l_{n-1} = \frac{1}{\gamma_{n-1}} z_2 + \frac{\mu + d}{\gamma_{n-1}} z_1,$$

$$l_{n-2} = \frac{1}{\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}} z_3 + \frac{(\mu + \gamma_{n-1}) + (\mu + d)}{\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}} z_2 - \frac{(\mu + \gamma_{n-1})(\mu + d) + 2(\mu + d)^2}{\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}} z_1.$$

Répétant ce procédé jusqu'à la composante  $(n - 1)$ -ième, nous montrons que :

$$l_{n-k} = (d_1^k, \dots, d_{k+1}^k)(z_1, \dots, z_{k+1}),$$

et la composante  $n + 1$  donne :

$$S = \varphi^{-1}\left(\frac{z_{n+1} + (d_1^{n+1}, \dots, d_n^{n+1})(z_1, \dots, z_n)}{(d_1, \dots, d_n)(z_1, \dots, z_n)}\right).$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \Psi(z(t)) \end{pmatrix}, \\ h = z_1 = (1, \dots, 0)z. \end{cases} \quad (2.1)$$

Notons la matrice dans (2.1) par  $A$  et  $C = (1, \dots, 0)$ .  $\Psi(z(t)) = y^{(n+1)}$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\Omega$ . L'observateur de (2.1) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + (0, \dots, \Psi(\hat{z}(t)))^T + S_\theta^{-1}C^T(y - C\hat{z}),$$

où  $S_\theta$  est la solution de l'équation :

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0.$$

La résolution de l'équation conduit à :

$$S_\theta(i, j) = (-1)^{i+j} \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} \frac{1}{\theta^{i+j-1}}.$$

Le système

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \times S_\theta^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y)$$

est un observateur pour (1.2).

Par ailleurs, comme les observateurs en  $z$  et  $x$  ne sont pas invariants dans le domaine, il faut les prolonger dans  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Application et Simulations

Nous allons donner une application de l'observateur grand gain construit dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, nous allons prendre  $n = 2$  pour le système (1.1), et  $\varphi = I_d$ . (1.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - \mu S, \\ \dot{I}_1 = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - (\mu + \gamma) I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma I_1 - (\mu + d) I_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

La sortie est  $y = I_2$  et

$$\psi(S, I_1, I_2) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ \gamma I_1 - (\mu + d) I_2 \\ \gamma(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) S - \gamma((\mu + \gamma) + (\mu + d)) I_1 + (\mu + d)^2 I_2 \end{pmatrix}.$$

Sa jacobienne est :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & -(\mu + d) \\ \gamma(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) & \gamma\beta_1 S - \gamma((\mu + \gamma) + (\mu + d)) & \gamma\beta_2 S + (\mu + d)^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la jacobienne est égal à  $\det \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \gamma^2 (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)$ , qui est positif dans  $\Omega_\epsilon = \{S \geq 0, I_1 \geq \epsilon_2, I_2 \geq \epsilon_3, S + I_1 + I_2 \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ , avec  $\epsilon = \min(\epsilon_2, \epsilon_3)$ . Pour montrer que  $\Omega_\epsilon$  est positivement invariant, nous observons l'expression du champ de vecteurs pour  $S = 0$  à la composante  $\dot{S}$ , pour ce choix de  $S$ ,  $\dot{S}$  est positif. Par ailleurs, le champ de vecteurs est positif aux composantes  $\dot{I}_1$  and  $\dot{I}_2$ , pour  $I_1 = \epsilon_2$  et  $I_2 = \epsilon_3$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  suffisamment petits. Nous concluons que  $\Omega_\epsilon$  est positivement invariant.

### 3.. APPLICATION ET SIMULATIONS

Nous donnons l'expression de  $S_\theta$  :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \theta & -\theta^{-2} & \theta^{-3} \\ -\theta^{-2} & 2\theta^{-3} & -3\theta^{-4} \\ \theta^{-3} & -3\theta^{-4} & 6\theta^{-5} \end{pmatrix}.$$

Le changement de variable  $z = \psi(S, l_1, l_2)$ , conduit à :

$$z_1 = l_2, \quad z_2 = \gamma l_1 - (\mu + d)l_2, \quad l_1 = \frac{\mu + d}{\gamma} z_1 + \frac{1}{\gamma} z_2,$$

$$z_3 = \gamma(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2)S - \gamma[(\mu + \gamma) + (\mu + d)]l_1 + (\mu + d)^2 l_2,$$

$$S = \frac{z_3 + \gamma[(\mu + \gamma) + (\mu + d)]l_1 - (\mu + d)^2 l_2}{\gamma(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2)},$$

et quand nous remplaçons  $l_1$  and  $l_2$  par leurs expressions, nous obtenons :

$$S = \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + ((\mu + \gamma) + (\mu + d))z_2 + z_3}{(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1 z_2}.$$

L'expression de  $\psi^{-1}$  est :

$$\psi^{-1} : z \rightarrow \begin{cases} \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + ((\mu + \gamma) + (\mu + d))z_2 + z_3}{(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1 z_2}, \\ \frac{\mu + d}{\gamma} z_1 + \frac{1}{\gamma} z_2, \\ z_1. \end{cases}$$

Selon l'expression de  $\psi^{-1}$  nous déduisons  $\Psi(z)$  :

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= ((\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_2 + \beta_1 z_3) \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + ((\mu + \gamma) + (\mu + d))z_2 + z_3}{(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1 z_2} \\ &+ ((\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1 z_2) \left( \lambda - \frac{(\mu + \gamma)(\mu + d)}{\gamma} z_1 - \frac{2\mu + \gamma + d}{\gamma} z_2 - \frac{z_3}{\gamma} \right. \\ &\left. - \mu \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + ((\mu + \gamma) + (\mu + d))z_2 + z_3}{(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1 z_2} \right) - (\mu + \gamma)z_2 - (2\mu + \gamma + d)z_3. \end{aligned}$$

Le système en  $z$  est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = \Psi(z). \end{cases} \quad (3.2)$$

L'ensemble invariant pour le système (3.2) est :

$$\Omega_{z,\epsilon} = \{(z_1, z_2, z_3) : z_i \in [a_i, b_i] \text{ et } (EQ) \leq 0\},$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= \epsilon, \quad b_1 = \frac{\Lambda}{\mu}, \\ a_2 &= \gamma\epsilon - (\mu + d)\frac{\Lambda}{\mu}, \quad b_2 = \gamma\frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + d)\epsilon \\ a_3 &= -\gamma(2\mu + d + \gamma)\frac{\Lambda}{\mu} + (\mu + d)^2\epsilon, \quad b_3 = \gamma\beta_1\beta_2\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 - \gamma\epsilon(2\mu + d + \gamma) + (\mu + d)^2\frac{\Lambda}{\mu} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (EQ) : & \gamma(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + \gamma(2\mu + d + \gamma)z_2 + \gamma z_1 + (\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1z_2 + \beta_1z_2^2 \\ & + (\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)(\mu + d)z_1^2 + \beta_1z_1z_2 + \gamma(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1^2 + \beta_1\gamma z_1z_2 \\ & - \frac{\Lambda}{\mu}[(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1z_2]. \end{aligned}$$

Et son observateur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 + 3\theta(z_1 - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 + 3\theta^2(z_1 - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_3 = \Psi(\hat{z}) + \theta^3(z_1 - \hat{z}_1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Comme l'observateur n'est pas forcément invariant dans  $\Omega_{z,\epsilon}$ , nous devons effectuer le prolongement de  $\Psi$  et  $\psi$ . Nous l'avons fait dans l'annexe B.. Finalement, nous déduisons l'observateur grand gain du système (3.1) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{S}} = \Lambda - (\beta_1\hat{l}_1 + \beta_2\hat{l}_2)\hat{S} + \left( -\frac{3(\beta_1\hat{S} - 2\mu - \gamma - d)\theta^2}{\gamma(\beta_1\hat{l}_1 + \beta_2\hat{l}_2)} + \frac{\theta^3}{\gamma(\beta_1\hat{l}_1 + \beta_2\hat{l}_2)} \right) (\hat{l}_2 - l_2) \\ -\mu\hat{S} - \frac{3\theta}{\gamma(\beta_1\hat{l}_1 + \beta_2\hat{l}_2)} (\beta_1d\hat{S} + \beta_1\mu\hat{S} + \beta_2\gamma\hat{S} - \mu d - \gamma d - \mu^2 - \gamma\mu)(\hat{l}_2 - l_2), \\ \dot{\hat{l}}_1 = (\beta_1\hat{l}_1 + \beta_2\hat{l}_2)\hat{S} - (\mu + \gamma)\hat{l}_1 + 3\frac{(\mu + d)\theta + \theta^2}{\gamma}(\hat{l}_2 - l_2), \\ \dot{\hat{l}}_2 = \gamma\hat{l}_1 - (\mu + d)\hat{l}_2 + 3\theta(\hat{l}_2 - l_2). \end{cases}$$

Nous avons effectué les simulations avec les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$\Lambda = 4; \beta_1 = 0.01; \beta_2 = 0.15;$$

$$\gamma = 0.02; \mu = 0.01; d = 0.015;$$

$$\epsilon = 0.01; \theta = 1.5.$$

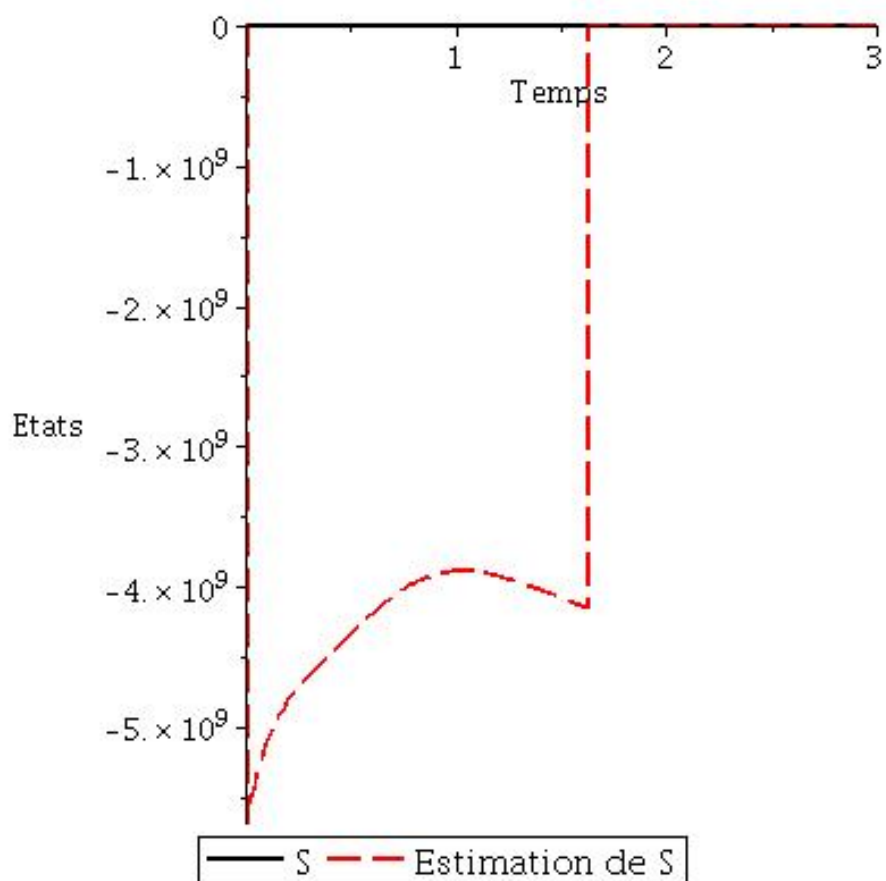


Figure 6.1 – Estimateur de  $S$  avec prolongement de  $\Psi$  et de  $\psi$

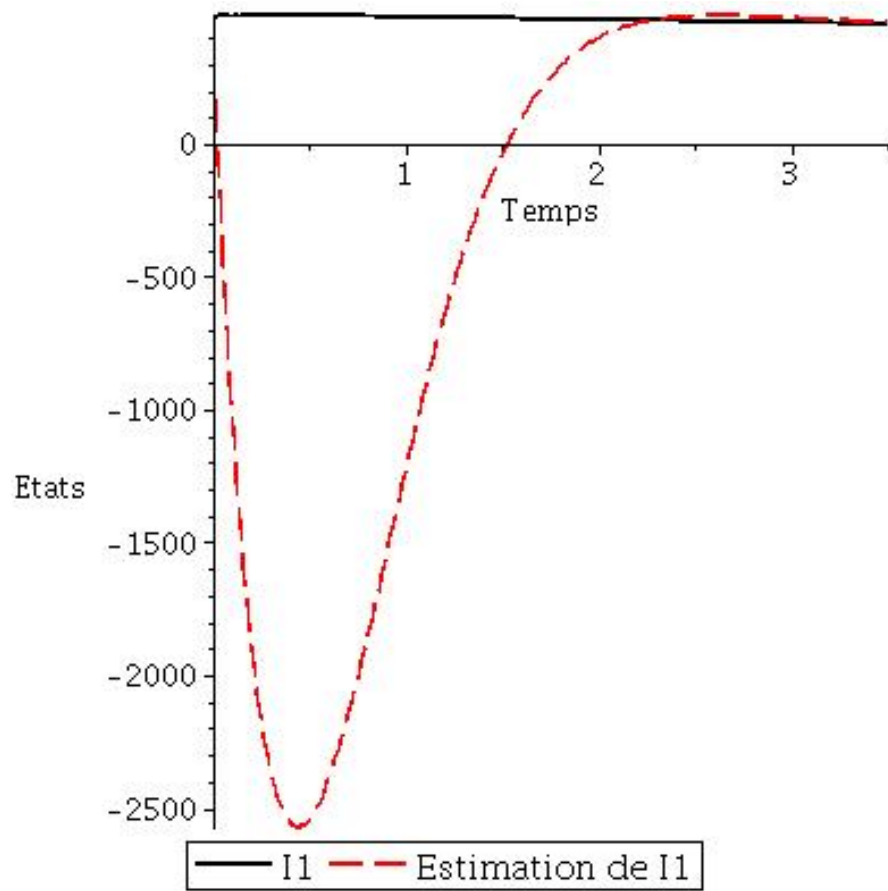


Figure 6.2 – Estimateur de  $I_1$  avec prolongement de  $\Psi$  et de  $\psi$

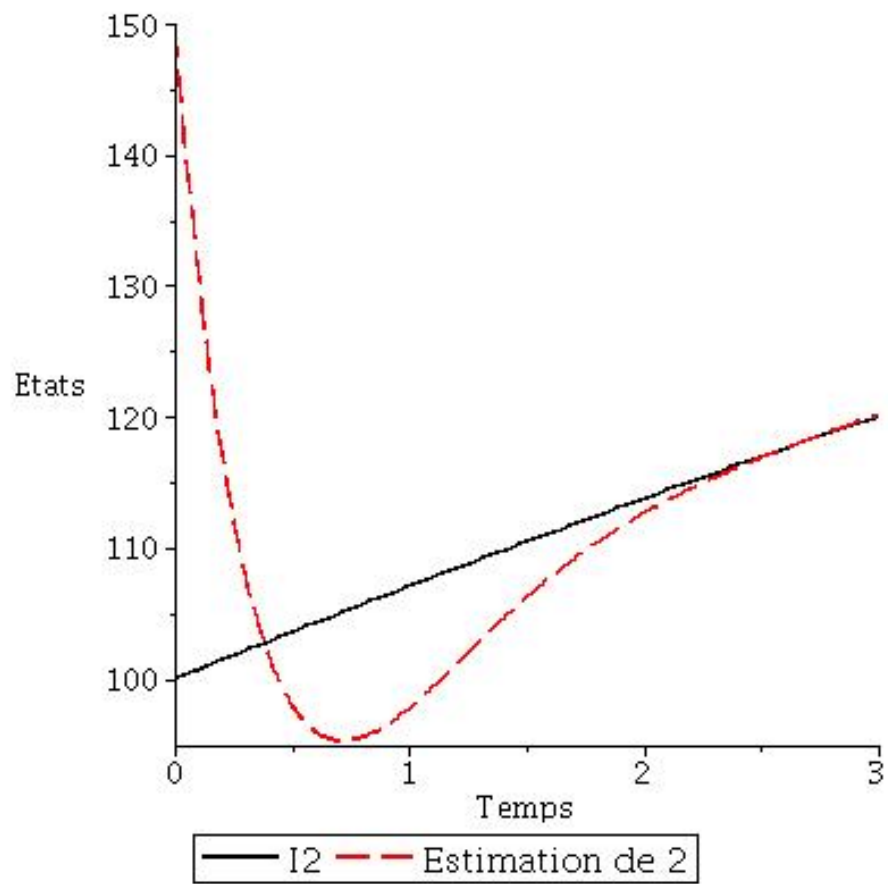


Figure 6.3 – Estimateur de  $I_2$  avec prolongement de  $\Psi$  et de  $\psi$



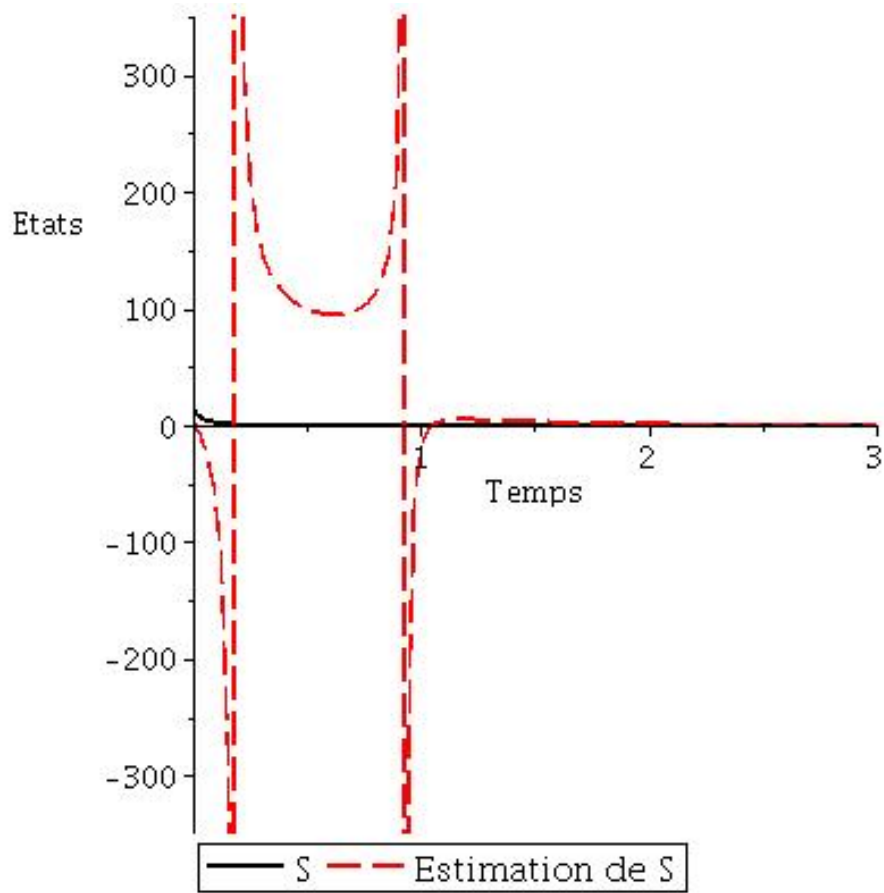


Figure 6.4 – Estimateur de  $S$  sans prolongement

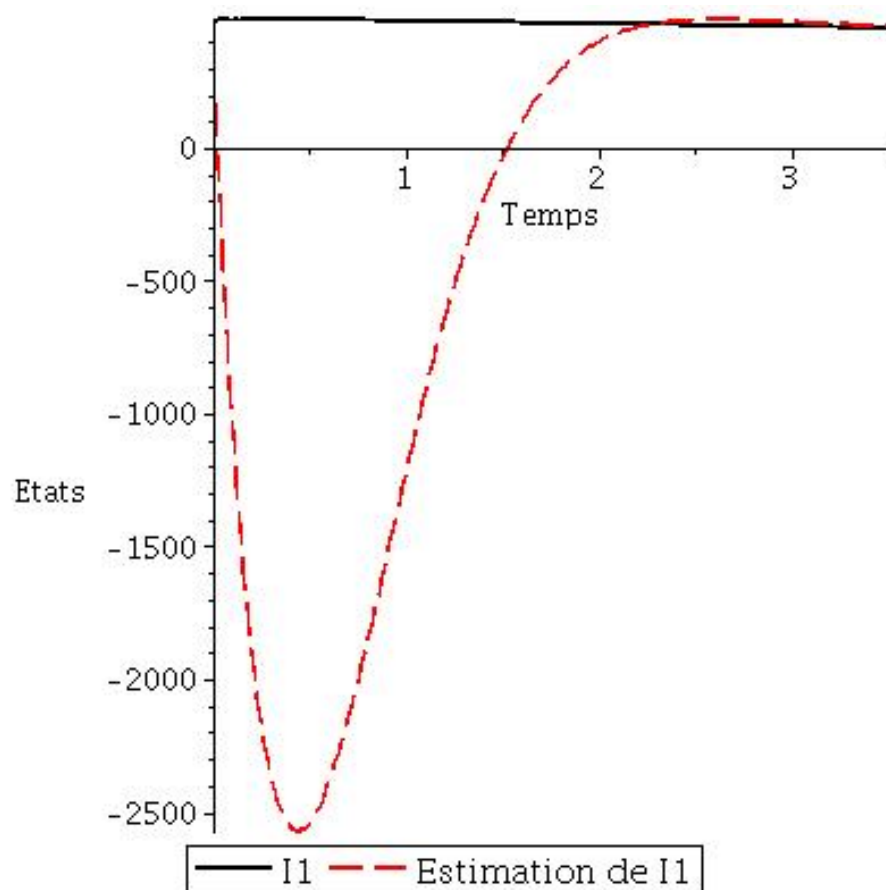


Figure 6.5 – Estimateur de  $I_1$  sans prolongement

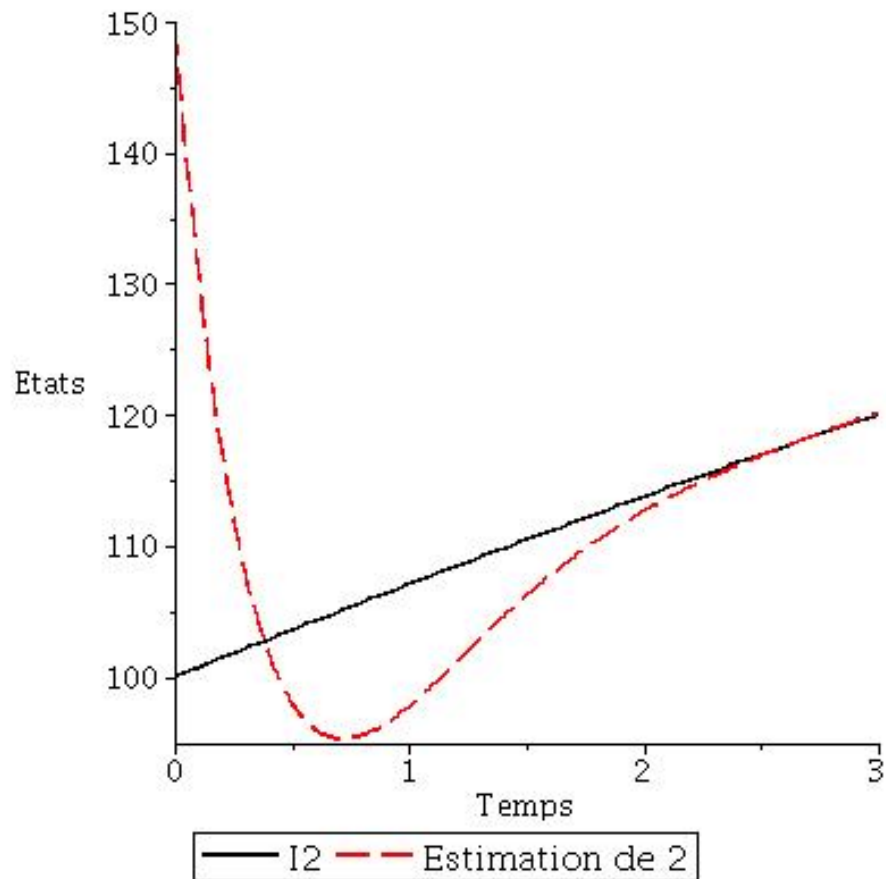


Figure 6.6 – Estimateur de  $l_2$  sans prolongement

## 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué l'étude de l'observabilité d'un système  $SI$  à  $n$  classes d'infectés. Nous avons montré que le système est observable, puis nous avons déterminé son observateur grand gain. Pour les simulations, nous avons appliqué les résultats théoriques sur le système avec  $n = 2$ .

## 4.. CONCLUSION

---

# Conclusion générale

Dans ce mémoire de thèse, nous avons porté notre réflexion sur l'étude de la stabilité et de l'observabilité de certaines maladies infectieuses qui sévissent un peu partout dans le monde et singulièrement en Afrique subsaharienne qui est notre domaine d'étude. L'étude s'est faite sur des modèles généraux, en effet, nous avons travaillé sur des modèles  $SI$  et  $SIS$  et non sur des infections spécifiques.

Nous avons fait un rappel des outils fondamentaux de mathématiques nécessaires pour l'analyse des systèmes soumis à notre étude dans le premier chapitre. Puis, dans le deuxième chapitre nous avons fait la présentation de quelques modèles épidémiologiques nécessaires pour la compréhension de nos travaux. Ainsi, nous avons évoqué deux modèles célèbres et faisant partie des premiers modèles en épidémiologie mathématique. Nous avons aussi donné un modèle  $SI$  traité par *Vargas* dans l'article [69].

Notre contribution débute à partir du troisième chapitre par l'étude de la stabilité d'un système  $SI$ . Le système en question utilise une incidence masse action et est composé de deux classes d'infectés. Nous avons effectué l'étude du système en déterminant le système des proportions, nous avons prouvé l'existence et l'unicité du point d'équilibre endémique sous la condition  $b > d$ . Puis, nous avons utilisé la théorie directe de Lyapunov pour conclure sur la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie. Ensuite, par le biais de la théorie de Poincaré-Bendixson, nous avons prouvé la stabilité globale du point d'équilibre endémique. Enfin, nous avons effectué des simulations numériques pour illustrer les résultats de stabilité.

Au niveau du quatrième et du cinquième chapitre, nous avons répondu à des problèmes posés au niveau de deux articles parus avec des erreurs majeures. En effet, nous avons décelé une erreur dans [63] publié en 2002 et la même erreur a été reprise au niveau de [10] en 2009, d'où la nécessité et l'urgence de souligner cette erreur et de donner une nouvelle analyse de ces modèles forts intéressants.

Dans le quatrième chapitre, il s'agit d'un modèle  $SIS$ . Nous avons déterminé les points d'équilibre du système, puis, montré la stabilité locale du point d'équilibre endémique. Nous avons prouvé la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie par la méthode directe de Lyapunov. Puis, nous avons prouvé la stabilité globale du point d'équilibre endémique sous la condition  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ . Enfin, en utilisant la technique de J. Jacquez et C. Simon exposée dans [67], nous prouvons, avec une certaine condition, la stabilité globale du point d'équilibre endémique dans le cas où tous les paramètres sont non nuls. En ce qui concerne le cinquième chapitre, nous avons dans un premier temps établi la stabilité globale du point d'équilibre sans maladie par une fonction de Lyapunov, puis la stabilité locale du point d'équilibre endémique par le critère de Routh-Hurwitz, enfin nous avons établi la stabilité globale du point d'équilibre endémique sous une condition, par la méthode de Li-Muldowney qui est une nouvelle approche d'analyse de stabilité globale. Avant de donner les résultats de stabilité, nous avons rappelé les différents points d'équilibre et le taux de reproduction de base.

Finalement, nous terminons le travail au niveau du sixième chapitre par une étude d'observabilité d'un modèle  $SI$  constitué de  $n$  classes d'infectés. Nous avons prouvé l'observabilité du système et nous avons construit un observateur grand gain pour du système, et effectué des simulations pour un cas particulier du système, c'est-à-dire pour deux classes d'infectés. En partant, tout simplement du nombre d'infectés en phase critique de l'infection, qui est dans la majeure partie des cas cliniquement connu, l'observateur permet de reconstruire tous les états.

### **Perspectives**

Les modèles que nous avons étudié sont assez généraux, il serait intéressant de modéliser une infection spécifique pour pouvoir tenir compte de tous les détails de l'infection afin d'obtenir des modèles plus réalistes.

Il serait intéressant d'envisager de travailler sur des modèles comportant  $n$  classes d'infectés.

Il serait aussi intéressant d'établir la stabilité du point d'équilibre endémique sans aucune condition des systèmes contenus dans le premier, deuxième et troisième chapitres.

Il serait également intéressant de travailler avec des systèmes structurés en temps, en âge et en espace.

# Annexe

## Sommaire

---

<b>A.</b>	<b>Quelques outils nécessaires</b> . . . . .	<b>105</b>
A.1	k-ième composée additive de matrice . . . . .	105
A.2	Calcul du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0$ . . . . .	106
A.3	Théorème de Gershgorin . . . . .	107
<b>B.</b>	<b>Prolongements de fonctions du chapitre 6</b> . . . . .	<b>109</b>
B.1	Prolongement de la fonction lipschitzienne . . . . .	109
B.2	Prolongement du difféomorphisme . . . . .	114

---

## A. Quelques outils nécessaires

### A.1 k-ième composée additive de matrice

**Définition A.1** (k-ième composée additive de matrice).

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on appelle k-ième composée additive de  $A$ , la  $A^{[k]}$  matrice de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  où  $N = C_n^k$  définie par

$$A^{[k]} = D_+ \left( (I + hA)^k \right)_{|h=0},$$

avec  $D_+$  la dérivée à droite.

La deuxième composée additive de  $A$  est donnée :

$$\text{pour } n = 2 \quad \text{par} \quad a_{11} + a_{22},$$

$$\text{pour } n = 3 \quad \text{par} \quad \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{pour } n = 4 \text{ par } \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & a_{24} & -a_{13} & -a_{14} & 0 \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{34} & a_{12} & 0 & -a_{14} \\ a_{42} & a_{43} & a_{11} + a_{44} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{31} & a_{21} & 0 & a_{22} + a_{33} & a_{34} & -a_{24} \\ -a_{41} & 0 & a_{21} & a_{43} & a_{22} + a_{44} & a_{23} \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & -a_{42} & a_{32} & a_{33} + a_{44} \end{bmatrix}.$$

**Exemple A.1.** *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta SI - \mu S, \\ \dot{E} = \beta SI - (\mu + \gamma)E, \\ \dot{I} = \gamma E - (\mu + d)I. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La Jacobienne du système  $J = \frac{\partial f}{\partial x}$  le long des trajectoires  $(S(t), E(t), I(t))$  est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S \\ \beta I & -\mu - \gamma & \beta S \\ 0 & \gamma & -\mu - d \end{bmatrix}.$$

La deuxième composée additive matrice est donnée par :

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} -\beta I - 2\mu - \gamma & \beta S & \beta S \\ \gamma & -\beta I - 2\mu - d & 0 \\ 0 & \beta I & -2\mu - \gamma - d \end{bmatrix}.$$

## A.2 Calcul du taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0$

Nous présentons la méthode de détermination de  $\mathcal{R}_0$  que nous avons utilisée dans notre travail. Il s'agit de la méthode de Van den Driessche et Watmough exposée dans [25].

Considérons une épidémie modélisée par un système d'équations différentielles ordinaires de la forme :

$$dx_i/dt = f_i(x), \quad x_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad (\text{A.2})$$

Supposons qu'il existe  $n$  compartiments dans lesquels les  $m$  premiers compartiments sont infectés. Soit

$$X_s = \{x \geq 0 : x_i = 0, i = 1, \dots, m\},$$

l'ensemble de tous les états sans maladie. Soient  $\mathcal{F}_i(x)$  le taux d'apparition de nouveaux cas d'infections dans le compartiment  $i$ ,  $\mathcal{V}_i^+(x)$  le taux de transfert (entrant) des individus dans le compartiment  $i$  et  $\mathcal{V}_i^-(x)$  le taux de transfert (sortant) des individus hors du compartiment  $i$ .



Chaque fonction est supposée être au moins deux fois différentiable par rapport à la variable  $x$ . En posant  $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$ , le système (A.2) se met sous la forme suivante :  $dx/dt = \mathcal{F}(x) - \mathcal{V}(x)$ . Les fonctions  $\mathcal{F}_i$ ,  $\mathcal{V}_i^+$ ,  $\mathcal{V}_i^-$  sont supposées vérifier les hypothèses (A1), ..., (A5) décrites ci-dessous : (A1) : si  $x \geq 0$ , alors  $\mathcal{F}_i(x)$ ,  $\mathcal{V}_i^+(x)$ ,  $\mathcal{V}_i^-(x) \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ . (A2) : si  $x_i = 0$ , alors  $\mathcal{V}_i^- = 0$ . En particulier, si  $x \in X_s$  alors  $\mathcal{V}_i^- = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ . (A3) :  $\mathcal{F}_i(0) = 0$  pour  $i > m$ . (A4) : si  $x \in X_s$ , alors  $\mathcal{F}_i(x) = \mathcal{V}_i^+(x) = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ . (A5) : si  $\mathcal{F}(x) = 0$  alors toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives à un point  $x_0 \in X_s$ . Sous les conditions précédentes, pour un  $x_0 \in X_s$ , les matrices  $F$  et  $V$  définies par :

$$F = \begin{bmatrix} \partial \mathcal{F}_i \\ \partial x_j \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \partial \mathcal{V}_i \\ \partial x_j \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq m$$

sont telles que :  $F$  est non négative et  $V$  est inversible.

La matrice  $FV^{-1}$  est appelée opérateur de la prochaine génération. L'élément  $(i, k)$  de  $FV^{-1}$  est interprété comme le nombre de nouvelles infections attendues dans le compartiment  $i$  produit par l'individu infecté présenté originellement dans le compartiment  $k$ . Dans cette méthode,  $\mathcal{R}_0$  est défini par le rayon spectral de l'opérateur de la prochaine génération (ie.  $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ ).

### A.3 Théorème de Gershgorin

Le théorème de Gershgorin est aussi appelé critère du disque de Gershgorin. Il permet également de conclure sur la stabilité d'une matrice sans avoir recours au calcul explicite des valeurs propres.

#### Définition A.2.

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ . Pour tout  $i \in [1, n]$  on nomme

$$D_i = B_f \left( a_{ii}, \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right) = \left\{ x \in K : |a_{ii} - x| \neq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}$$

le  $i$ ème disque de Gershgorin de  $A$ , avec  $B_f$  est une boule fermée.

#### Théorème A.1 (Théorème de Gershgorin).

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ . L'ensemble des valeurs propres est inclus dans la réunion des disques de Gershgorin, c'est à dire :  $\lambda$  est une valeur propre de  $A \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^n D_i$ .

**Exemple A.2.** Considérons le système (2.2) dans le cas où  $f = I_d$  :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Pi - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S, \\ \dot{I}_1 = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (\mu + \gamma)I_1, \\ \dot{I}_2 = \gamma I_1 - (\mu + d)I_2. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Nous avons, grâce au théorème de Gershgorin, le résultat suivant :

**Lemme A.2.**

Si  $\beta_2 > \beta_1$  le point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable.

*Démonstration.* La Jacobienne au point d'équilibre endémique  $E^*$  est :

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & \beta_1 S^* - \gamma - \mu & \beta_2 S^* \\ 0 & \gamma & -d - \mu \end{pmatrix}$$

La deuxième matrice composée  $J^{[2]}(E^*)$  est :

$$\begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* + \beta_1 S^* - \gamma - 2\mu & \beta_2 S^* & \beta_2 S^* \\ \gamma & -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - 2\mu - d & -\beta_1 S^* \\ 0 & \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & \beta_1 S^* - d - \gamma - 2\mu \end{pmatrix}$$

Soit  $P = \text{diag}(I_2^*, I_1^*, S^*)$ .

La matrice  $J^{[2]}(E^*)$  est similaire à  $A = PJ^{[2]}(E^*)P^{-1}$  égale à :

$$\begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* + \beta_1 S^* - \gamma - 2\mu & \frac{\beta_2 I_2^* S^*}{I_1^*} & \beta_2 I_2^* \\ \frac{I_1^* \gamma}{I_2^*} & -d - \beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - 2\mu & -\beta_1 I_1^* \\ 0 & \frac{(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^*}{I_1^*} & \beta_1 S^* - d - \gamma - 2\mu \end{pmatrix}$$

Les éléments diagonaux de  $A$  sont négatifs car :

$$\beta_1 S^* - (\mu + \gamma) = \beta_1 \frac{\Pi}{\mu R_0} - \frac{\Pi}{\mu R_0} \left( \beta_1 + \frac{\gamma \beta_2}{\mu + d} \right) < 0.$$

La matrice  $A$  est à diagonale dominante en ligne, car :

$$\begin{aligned}
 A_{11} + |A_{12}| + |A_{13}| &= -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* + \beta_1 S^* - \gamma - 2\mu + \frac{\beta_2 I_2^* S^*}{I_1^*} + \beta_2 I_2^* \\
 &= -\beta_1 I_1^* + S^* \left( \beta_1 + \beta_2 \frac{\gamma}{\mu + d} \right) - \gamma - 2\mu \\
 &= -\beta_1 I_1^* + S^* \left( \frac{\mu + \gamma}{S^*} \right) - \gamma - 2\mu \\
 &= -\beta_1 I_1^* - \mu < 0 \\
 \\
 A_{22} + |A_{21}| + |A_{23}| &= -d - \beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - 2\mu + \frac{I_1^* \gamma}{I_2^*} + \beta_1 I_1^* \\
 &= -\beta_2 I_2^* - \mu < 0 \\
 \\
 A_{33} + |A_{31}| + |A_{32}| &= \beta_1 S^* - d - \gamma - 2\mu + \frac{(\beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^*) S^*}{I_1^*} \\
 &= \beta_1 S^* - d - \gamma - 2\mu + \mu + \gamma = \beta_1 S^* - (\mu + d) \\
 &= \beta_1 \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)}{\beta_1(\mu + d) + \beta_2 \gamma} - (\mu + d) \\
 &= -(\mu + d) \left( 1 - \frac{\beta_1(\mu + \gamma)}{\beta_1(\mu + d) + \beta_2 \gamma} \right) < 0 \text{ since } \beta_2 > \beta_1.
 \end{aligned}$$

Par suite, la matrice  $A$  est stable d'après le théorème Gershgorin. Ce qui implique que  $J^{[2]}(E^*)$  est stable. Donc la première condition de (1.1) est vérifiée.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 \det(J(E^*)) &= -\frac{\beta_2 \Pi (-2 + R_0) \gamma + \beta_1 \Pi (-2 + R_0) (d + \mu) + R_0 \mu (d + \mu) (\gamma + \mu)}{R_0} \\
 &= -\frac{(-2 + R_0) R_0 \Pi \mu (d + \mu) (\gamma + \mu) + R_0 \mu (d + \mu) (\gamma + \mu)}{R_0} \\
 &= -\mu (d + \mu) (\gamma + \mu) (R_0 - 1) < 0.
 \end{aligned}$$

La seconde condition de (1.1) est aussi vérifiée. D'où le résultat.  $\square$

## B. Prolongements de fonctions du chapitre 6

### B.1 Prolongement de la fonction lipschitzienne

Au niveau du chapitre 6, le système initiale en  $z$  est invariant dans  $\Omega_{z,\epsilon}$ , mais ceci n'est pas forcément le cas de l'observateur. Donc, nous devons prolonger la fonction lipschitzienne  $\Psi(z)$  de  $\Omega_{z,\epsilon}$  dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier. L'ensemble invariant  $\Omega_{z,\epsilon}$  (l'ensemble invariant du système initiale en  $z$ ) n'est pas un pavé, mais la moitié d'un pavé, obtenu en divisant le pavé en deux par un

plan diagonal. Donc, deux des sommets du pavé ne se trouve pas dans l'ensemble invariant. Il est donné par

$$\Omega_{z,\epsilon} = \{(z_1, z_2, z_3) : z_i \in [a_i, b_i] \text{ et } (EQ) \leq 0\},$$

où

$$\begin{aligned} (EQ) : & \gamma(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + \gamma(2\mu + d + \gamma)z_2 + \gamma z_1 + (\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1z_2 + \beta_1z_2^2 \\ & + (\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)(\mu + d)z_1^2 + \beta_1z_1z_2 + \gamma(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1^2 + \beta_1\gamma z_1z_2 \\ & - \frac{\Lambda}{\mu} [(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1z_2]. \end{aligned}$$

En prenant trois points du plan diagonal, nous déterminons l'équation de ce plan :  $\mathcal{P} : c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$

Nous commençons par prolonger  $\Psi$  dans l'ensemble  $\Omega_{z,\epsilon}$  tout entier. Nous prolongeons  $\Psi$  dans le demi pavé complémentaire à  $\Omega_{z,\epsilon}$ , en attribuant à chaque point la valeur de son symétrique orthogonal par rapport au plan diagonal. Puis, nous attribuons à chaque point extérieur au pavé la valeur de son projeté orthogonal sur le pavé.

if  $(a_1 \leq x \leq b_1)$  and  $(a_2 \leq y \leq b_2)$  and  $(a_3 \leq z \leq b_3)$  and  $((EQ) > 0)$  then

$$\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi \left( 2x - 2c_1 \frac{c_1x + c_2y + c_3z + c_4}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, 2y - 2c_2 \frac{c_1x + c_2y + c_3z + c_4}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, 2z - 2c_3 \frac{c_1x + c_2y + c_3z + c_4}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \right)$$

else

if  $x \leq a_1$  then

if  $y \leq a_2$  then

if  $z \leq a_3$  then

$$\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, a_2, a_3)$$

else

if  $z \leq b_3$  then

$$\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, a_2, z)$$

else

$$\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, a_2, b_3)$$

end if

```

        end if
    else
        if  $y \leq b_2$  then
            if  $z \leq a_3$  then
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, y, a_3)$ 
            else
                if  $z \leq b_1$  then
                     $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, y, z)$ 
                else
                     $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, y, b_3)$ 
                end if
            end if
        end if
    else
        if  $z \leq a_3$  then
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, b_2, a_3)$ 
        else
            if  $z \leq b_1$  then
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, b_2, z)$ 
            else
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(a_1, b_2, b_3)$ 
            end if
        end if
    end if
end if
else
    if  $x \leq b_1$  then
        if  $y \leq a_2$  then
            if  $z \leq a_3$  then
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, a_2, a_3)$ 
            else
                if  $z \leq b_3$  then

```

```

         $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, a_2, z)$ 
    else
         $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, a_2, b_3)$ 
    end if
end if
else
    if  $y \leq b_2$  then
        if  $z \leq a_3$  then
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, y, a_3)$ 
        else
            if  $z \leq b_1$  then
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, y, z)$ 
            else
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, y, b_3)$ 
            end if
        end if
    end if
else
    if  $z \leq a_3$  then
         $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, b_2, a_3)$ 
    else
        if  $z \leq b_1$  then
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, b_2, z)$ 
        else
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(x, b_2, b_3)$ 
        end if
    end if
end if
end if
else
    if  $y \leq a_2$  then
        if  $z \leq a_3$  then

```

```

         $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, a_2, a_3)$ 
    else
        if  $z \leq b_3$  then
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, a_2, z)$ 
        else
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, a_2, b_3)$ 
        end if
    end if
else
    if  $y \leq b_2$  then
        if  $z \leq a_3$  then
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, y, a_3)$ 
        else
            if  $z \leq b_1$  then
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, y, z)$ 
            else
                 $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, y, b_3)$ 
            end if
        end if
    end if
else
    if  $z \leq a_3$  then
         $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, b_2, a_3)$ 
    else
        if  $z \leq b_1$  then
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, b_2, z)$ 
        else
             $\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(b_1, b_2, b_3)$ 
        end if
    end if
end if
end if
end if

```

end if  
 end if  
 end if.

## B.2 Prolongement du difféomorphisme

Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe précédent, il faut prolonger le difféomorphisme  $\psi$ . L'expression de  $\psi^{-1}$  est :

$$\psi^{-1} : z \rightarrow \begin{cases} \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + ((\mu + \gamma) + (\mu + d))z_2 + z_3}{(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1z_2}, \\ \frac{\mu + d}{\gamma}z_1 + \frac{1}{\gamma}z_2, \\ z_1. \end{cases}$$

Les deux dernières composantes étant affines, les prolongements gardent les mêmes expressions. Il s'agit des expressions de  $l_1$  et  $l_2$ . La première composante représente l'expression de  $S$ . Etant donné que l'observateur n'est pas forcément invariant dans l'ensemble  $\Omega_{z,\epsilon}$ , pour une valeur initiale  $t_0$  fixé, au bout d'un certain temps, la solution  $S(\hat{z}(t))$  sort du domaine.

En notant par  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  et  $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  les extrémités du domaines, nous allons effectuer le prolongement de  $S$  en déterminant les temps correspondant à  $S(\underline{a})$ ,  $S(\bar{b})$ ,  $S(\underline{a}) \pm \delta$  et  $S(\bar{b}) \pm \delta$ ,  $\delta > 0$  suffisamment petit. Puis nous prolonger la fonction par les demi-droites  $[S(\underline{a}) \pm \delta, S(\underline{a}))$  et  $[S(\bar{b}) \pm \delta, S(\bar{b}))$ , avec  $\delta$  suffisamment petit pour que  $[S(\underline{a}) \pm \delta, S(\underline{a})]$  et  $[S(\bar{b}) \pm \delta, S(\bar{b})]$  soient des segments droits et non des arcs. Nous notons les équations  $[S(\underline{a}) \pm \delta, S(\underline{a})]$  et  $[S(\bar{b}) \pm \delta, S(\bar{b})]$  par  $k_1 * t + c_1$  et  $k_2 * t + c_2$ . Nous avons le prolongement :

$$S(t) \equiv S(z) = \begin{cases} \frac{(\mu + d)(\mu + \gamma)z_1 + ((\mu + \gamma) + (\mu + d))z_2 + z_3}{(\beta_1(\mu + d) + \beta_2\gamma)z_1 + \beta_1z_2}, & \text{if } z(t) \in \Omega_{z,\epsilon}, \\ k_1 * t + c_1, & \text{si } z(t) \notin \Omega_{z,\epsilon} \text{ et } d(z(t), \underline{a}) \leq d(z(t), \bar{b}), \\ k_2 * t + c_2, & \text{si } z(t) \notin \Omega_{z,\epsilon} \text{ et } d(z(t), \underline{a}) > d(z(t), \bar{b}). \end{cases}$$

Pour deux solutions  $z^1$  et  $z^2$  différentes, nous avons  $\psi^{-1}(z^1) = (S^1, l_1^1, l_2^1)$  différent de  $\psi^{-1}(z^2) = (S^2, l_1^2, l_2^2)$ . Et les prolongements conservent l'injectivité. La différentiabilité découle de la construction des prolongements.



# Bibliographie

- [1] Amos AF, McCarty DJ, Zimmet P.. *The rising global burden of diabetes and its complications : estimates and projections to the year 2010*. Diabet Med 1997 ; 14 : 1-85.
- [2] R. M. Anderson and R. M. May. *Infection diseases of Humans*. Oxford University Press, London 1991.
- [3] D. Bernoulli. *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour le prévenir*, *Mem. Math. Phys. Acad.Roy. Sci.,Paris (1760)*, p.145.
- [4] N.P. Bhatia and G.P. Szego. *Dynamical Systems : Stability Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics No 35, Springer Verlag, (1967).
- [5] British Diabetic Association [BDA], *Diabetes in the United Kingdom*, (1996).
- [6] A. Boutayeb, A. Chetouani, A. Achouyab and E. H. Twizell. *J. Appl. Math. and Computing* 21(2006),1 - 2, pp. 127 - 139.
- [7] A. Boutayeb and A. Kerfati. *Mathematical models in diabetology, Modelling, Measurement and Control*, C 44(2) (1994) 53-63.
- [8] S. Busenberg and P. Van den Driessche. *Analysis of a disease transmission model in a population with varying size*. *J. Math. Biol.*, **28** (1990) 257–270 .
- [9] S.M.Blower , P.M.Small and P.C.Hopwell. *Control strategies for Tuberculosis Epidemics : New Models for Old Problems* , Science ,(273) : 497-500 ,(1996).
- [10] L. M. Cai, X. Z. Li and M. Ghosh. *Global stability of a stage-structured epidemic model with a nonlinear incidence*, *AMC* 214 (2009) 73-82.
- [11] C. Castillo-Chavez, W. Huang, and J. Li. *Competitive exclusion in gonorrhea models and other sexually transmitted diseases*, *SIAM J. Appl. Math.*, 56 (1996), pp. 494–508.

- [12] C. Castillo-Chavez, Z. Feng, and W. Huang. *On the computation of  $R_0$  and its role on global stability*, in Mathematical approaches for emerging and reemerging infectious diseases : an introduction (Minneapolis, MN, 1999), vol. 125 of IMA Vol. Math. Appl., Springer, New York, 2002, pp. 229–250.
- [13] Cherruault Y. *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant*, Presses Universitaires de France (P.U.F),(1998a).
- [14] Cherruault Y. *Biomathématiques, Coll. Que sais je ? (n.2052)*, Presses Universitaires de France (P.U.F),(1983).
- [15] Critère de Routh-Hurwitz. online.[www.jdotec.net](http://www.jdotec.net)
- [16] W.A.Coppel. *Stability and Asymptotic behavior of Differential Equations* , D.C.Health and company Boston , 1965.
- [17] Cours Khalil Ezzinbi. *Cours sur les systèmes dynamiques et équations différentielles*,
- [18] Cours Gauthier Sallet. Modélisation et simulation en épidémiologie *INRIA et IRD* 2010.
- [19] Cours Sandrine Charles. *Biologie Mathématique et Modélisation* . 01/02/2006.
- [20] Cours C. A. Stuart et B. Zwahlen. *Equations différentielles ordinaires. EPFL Département de Mathématiques Année académique 1998/99*.
- [21] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, and J. A. J. Metz. *Mathematical epidemiology of infectious diseases*. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000. Model building, analysis and interpretation.
- [22] M.L. Diouf, A. Iggidr, M. Sy. *Global stability of an epidemic model with infected stages and mass-action incidence*. *Biomath* 3 : 1–8,2014.
- [23] M.L. Diouf, A. Iggidr. *Global stability of a stage-structured epidemic model with a non-linear incidence, revisited*.
- [24] M.L. Diouf, A. Iggidr. *Global stability of a two-stage epidemic model with generalized non-linear incidence, revisited*.
- [25] P. van der Driessche and J. Watmough. *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, *Math. Biosci.*,(2002)
- [26] M. Fan, M. Y. Li, K. Wang. *Global stability of an SEIS epidemic with recruitment and varying total population size*, *Math. Biosci.* 170(2001) :199–208.

- [27] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, deuxième édition.
- [28] David F. Griffiths and Desmond J. Higham. *Numerical methods for Ordinary Differential Equations*, Initial value problems, Springer Undergraduate Mathematics series(2010).
- [29] A. Guiro, A. Iggidr, D. Ngom, and H. Touré. On the stock estimation for some fishery systems *Rev. in Fish Biol. and Fishe.*,3 : 313–327, 2009
- [30] H. Guo and M. Y. Li. Global dynamics of a staged progression model for infectious diseases. *Math. Biosci. and eng.*,3(3) :513–525, 2006.
- [31] Li-Ming Cai, Xue-Zhi Li and Ghosh. *Global satbility of staged-structured model with a non linear incidence*, *Applied Math. Comput.* 214(2009), pp.73-82.
- [32] H. W. Hethcote. *The Mathematics of infectious diseases*, *SIAM Re.*42 (2000), pp.599-653.
- [33] H.W.Hethcote and and H.R.Thieme. *Stability of the endemic equilibrium in epidemic model with subpopulations*, *Math.Biosciences* 75 (1985),pp.205-227.
- [34] H. W. Hethcote and J. A. Yorke. *Gonorrhea Transmission Dynamics and control*. Springer Verlag, 1984.
- [35] M.W. Hirsch. *The dynamical systems approach to differential equations*, Bull A.M.S., (1984), pp. 1–64.
- [36] J. M. Hyman, J. Li, E. A. Stanley. The differential infectivity and staged progression models for the transmission of HIV12. *Mathematical Biosciences*, 155(2) :77–109,1999.
- [37] J. M. Hyman, J. Li. The reproductive number for an HIV model with differential infectivity and staged progression. *Linear Algebra and its Applications*, 398 :101–116, 2005.
- [38] IDF Clinical Guidelines Task Force. *Global guideline for type 2 diabetes*. Brussels : *International Diabetes Federation*, 2005.
- [39] Abderrahman Iggidr. *Controllability, Observability, and Stability of Mathematical Models*. Jerzy A. Filar. *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Mathematical Models*, UNESCO, *Eolss Publishers*, 2004. <hal-00866648>
- [40] A. Iggidr, J. Mbang, G. Sallet, and J.-J. Tewa. Multi-compartment models. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplements*, suppl. volume(Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference,) :506–519, September 2007.

- [41] J. A. Jacquez, C. P. Simon, and J. Koopman. *Core groups and the  $R_0$ s for subgroups in heterogeneous SIS and SI models*, in Epidemics models : their structure and relation to data, D.Mollison, ed., Cambridge University Press, 1996, pp. 279–301.
- [42] A. Korobeinikov. *Lyapunov functions and global properties for SEIR and SEIS epidemic models*, *Math.Med.Biology* (2004) 21,pp.75-83.
- [43] A. Korobeinikov and P. K. Maini. *Non-linear incidence and stability of infectious disease models*,*Math.Med.Biology* (2005) 22,pp. 113-128.
- [44] A. Korobeinikov and P. K. Maini. A Lyapunov function and global properties for SIR and SEIR epidemiological model with nonlinear incidence. *Math. Biosci. and eng.* 1(1) : 57–60,2004.
- [45] J. P. LaSalle. The stability of dynamics systems. *CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl.Math.* 25, SIAM, Philadelphia, 1976.
- [46] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method with applications*, Academic Press, New-York, 1961.
- [47] J.P. LaSalle. *Stability theory for ordinary differential equations. stability theory for ordinary differential equations.*, *J. Differ. Equations*, 41 (1968), pp. 57–65.
- [48] J. P. LaSalle. *The stability of dynamical systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix : "Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations" by Z. Artstein, Regional Conference Series in Applied Mathematics.
- [49] A. Lajmanovich and J.A. Yorke. *A deterministic model for gonorrhoea in a nonhomogeneous population.*, *Math. Biosci.*, 28 (1976), pp. 221–236.
- [50] S. A. Levin. *Descartes' Rule of Sign-How hard can it be ?*.
- [51] M. Y. Li, J. R. Graef, L Wang and J Karsai. Global dynamics of a SEIR with varying total population size. *Mathematical biosciences*, 160 :191–213, 1999.
- [52] M.Y. Li, J. S. Muldowney, and P. van den Driessche. *Global stability for the SEIR model in epidemiology*, *Math. Biosci.*, 125 (1995), pp. 155–164.
- [53] M.Y. Li, J. S. Muldowney, and P. van den Driessche. *Global stability for the SEIRS models in epidemiology*, *Canadian Applied Mathematics quarterly*, 7(4), 1999.

- [54] M. Y. Li and J. S. Muldowney. *Global stability for the SEIR model in epidemiology*, Math. Biosci., 125 (1995), pp. 155–164.
- [55] M. Y. Li, H. Smith, and L Wang. Global dynamics of a SEIR with vertical transmission. *SIAM J. Appl. Math.*, 62(1) :58–69, 2001.
- [56] W. Liu, H. W. Hethcote and S. A. Levin. Dynamical behavior of epidemiological with non linear incidence rates. *J. Math. Biol* 25 : 359-380,1987.
- [57] W. Liu, S. A. Levin and Y. Iwasa. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. *J. Math. Biol* 23 : 187–2040,1986.
- [58] D.G.Luenberger. *Introduction to dynamics : theory , models and applications* , John Wiley and New York ,1979.
- [59] C. C. McCluskey. A model of HIV/AIDS with staged progression and amelioration. *Mathematical Biosciences*, 181 :1–16, 2003.
- [60] C. C. McCluskey. Lyapunov functions for tuberculosis models with fast and slow progression. *Math. Biosci. and Eng.*, 2006.
- [61] J.S. Muldowney. *Compound matrices and ordinary differential equations*, Rocky Mountain journal of mathematics, Vol. 20, number 4, Fall 1990, pp857-871
- [62] D. Y. Melesse and A. B. Gumel. *Global asymptotic properties of an SEIRS model with multiple infectious stages*, *Math. Anal. and Appl.* 366 (2010), pp.202-217.
- [63] S.M. Moghadas and A.B. Gumel. Global stability of a two-stage epidemic model with generalized non-linear incidence. *Math. Comput. Simul.*, **60**, 107–118 (2002).
- [64] D. Y. Melesse and A. B. Gumel. Global asymptotic properties of an SEIRS model with multiple infectious stages. *Math. Anal. and Appl.*,366 :202–217, 2010.
- [65] A. S. Perelson, D. E. Kirschner, and R. De Boer. *Dynamics of HIV infection of CD4+ T cells.*, Math Biosci, 114 (93), pp. 81–125.
- [66] A. S. Perelson and P. W. Nelson. *Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo*, SIAM Rev., 41 (1999), pp. 3–44 (electronic).
- [67] C. P. Simon and J. A. Jacquez. Reproduction Numbers and the stability of equilibria of SI models for heterogeneous population. *SIAM*, 52(2) :541–576, April 1992.

- [68] Smith, Hal L. Systems of ordinary differential equations which generate an order preserving flow. A survey of results. *SIAM Rev.*, **30** 1 (1988), 87–113.
- [69] Cruz Vargas-De-Leòn. On the global stability of SIS, SIR and SIRS with standard incidence. *Chaos, Solitons and Fractals*, **44** (2011), 1106–1110.
- [70] Gerald Teschl, *Ordinary differential equations and Dynamical systems*, 2004.
- [71] H. R. Thieme. *Mathematics in population biology*, Princeton Series in Theoretical and Computational Biology, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [72] H.R.Thieme. *Global stability of the endemic equilibrium in infinite dimension :Lyapunov functions and positive operator*, *Journal of differentiel equation* 2011,250(9),pp.3772-3801.
- [73] J. P. Tian and J. Wang. *Global stability for cholera epidemic models*, *Math. Biosci.* 232(2011) : 31–41
- [74] Wild S, Roglic G, Green A, et al.. *Global prevalence of diabetes : estimates for the year 2000 and projections for 2030*. *Diabetes Care* 2004 ; 27 : 1047-53.
- [75] World Health Organisation [WHO]. *The World Health Report 2002 : Reducing Risk : Promoting a Healthy Life*, (2002).