Lois de paroi adaptatives pour un modèle de fermeture du second ordre dans un contexte industriel

Jean-François Wald

▶ **To cite this version:**

Jean-François Wald. Lois de paroi adaptatives pour un modèle de fermeture du second ordre dans un contexte industriel. Milieux fluides et réactifs. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2016. Français. NNT : . tel-01415106

HAL Id: tel-01415106
https://inria.hal.science/tel-01415106

Submitted on 12 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE SEA
SCIENCES EXACTES ET LEURS APPLICATIONS

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur
de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Mention : Mécanique des Fluides

Présentée et soutenue par

Jean-François Wald

Lois de paroi adaptatives pour un modèle de fermeture du second ordre dans un contexte industriel

Thèse dirigée par Rémi Manceau

soutenue le 10 mai 2016

Jury :

Rapporteurs :	Pr. Lars Davidson	-	Chalmers University of Technology
	Pr. Yann Bartosiewicz	-	Université Catholique de Louvain
Directeur :	Dr. Rémi Manceau	-	Université de Pau et des Pays de l'Adour
Examinateurs :	Pr. Azeddine Kourta	-	Université d'Orléans
	Dr. Sofiane Benhamadouche	-	EDF Lab
	Pr. Dominique Laurence	-	The University of Manchester
	Dr. Sylvain Lardeau	-	CD-Adapco
	Dr. Christophe Friess	-	Université d'Aix-Marseille

À Aurore,

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements au Dr. Rémi Manceau qui fut pour moi un directeur de thèse attentif qui a toujours su donner la bonne direction à tous les développements que j'ai mené. Nos nombreuses réunions ainsi que sa relecture méticuleuse de ce manuscrit m'ont aidé à réaliser un travail que je crois précis et rigoureux.

J'adresse également mes remerciements au Dr. David Monfort, chef du groupe I83 qui m'a ouvert les portes du groupe I83 d' EDF et qui a toujours eu un oeil attentif sur mes travaux.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance au Dr. Sofiane Benhamadouche dont le soutien à été sans faille et permanent durant ces trois années parfois difficiles. Sa façon de sentir la turbulence et l'écoulement d'un fluide nous ont bien des fois sortis de longues heures de blocage. Mais ses qualités humaines (dans et en dehors du travail !) m'ont également aidé à prendre du recul sur mes travaux. Sofiane, mille fois merci car ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans toi.

Je remercie également tout le groupe I83 qui a rendu cette thèse très agréable et extrêmement enrichissante. La bonne humeur du groupe ainsi que son enthousiasme ont sans aucun doute contribué aux résultats de cette thèse. Je remercie plus particulièrement l'équipe Saturne pour sa disponibilité et sa réactivité constante, Dominique Laurence pour son expertise dans la modélisation de la turbulence, Richard Howard qui m'a fait profiter de ses lumières pendant les deux années durant lesquelles nous avons partagé notre bureau, mais aussi Romain, Jérôme, Dominique, Dorothée, Isabelle, Christophe et tous ceux que j'oublie mais avec qui j'ai passé de très bon moments durant ces trois années.

Une place particulière va à mes compagnons de galère et amis thésards Cedric, Xavier, Benjamin et Pierre. Pas un pour rattraper l'autre quand il s'agit de décompresser en salle de pause mais dont le soutien a été indéfectible et permanent ! Nos nombreuses discussions autour du café me manquent déjà ! Un remerciement particulier pour Pierre, dont l'énergie a parfois été salvatrice et qui peut être sans s'en douter m'a toujours pousser à me dépasser (oui sans toi je n'aurais pas eu le courage de me mettre à TikZ !).

Mes pensées vont également à ma famille pour qui les fluides et la turbulence sonnent plus comme une science obscure mais qui m'ont soutenu et m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final. J'adresse un remerciement particulier à ma mère, ma grand-mère, ma vieille tante Claire et mon oncle Joe qui ont relu ces 200 pages et à qui le monde paraissait bien plus turbulent après la lecture.

Je n'oublie évidemment pas mes amis de la FGC qui ont toujours été là pour moi dans les bons comme les mauvais moments. Je n'énumérerais pas toutes nos péripéties durant ces trois années mais Franck, Lucas, Sylvain je vous remercie car sans vous je n'en aurais pas vu le bout !

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts je remercie Aurore pour son soutien sans faille et son enthousiasme permanent à l'égard de mes travaux. Son intelligence, sa tendresse et son sens critique m'ont guidé chaque jour et m'ont aussi montré qu'il était parfois nécessaire de prendre un peu de recul sur les formules mathématiques.

Table des matières

1 Introduction générale **1**

2 Bibliograhie - Modélisation RANS des écoulements **9**
2.1 Modélisation statistique - Opérateur de Reynolds 9
2.2 Modélisation statistique des équations de Navier-Stokes 10
2.3 Modélisation du premier ordre 11
2.3.1 Modèles algébriques 11
2.3.2 Modèles à deux équations de transport 12
2.4 Modélisation du second ordre 16
2.4.1 Modélisations des corrélations inconnues dans l'équation de transport des tensions de Reynolds 17
2.4.2 Physique de proche paroi et pondération elliptique 19
2.5 Modèles de paroi 21
2.5.1 Comportement « universel » en proche paroi 21
2.5.2 Sortie de l'équilibre 27
2.5.3 Lois « unifiées » 30
2.5.4 Lois de paroi 32
2.5.5 Lois de paroi adaptatives 48
2.6 Conclusion du chapitre 58

3 Stratégie et développement **61**
3.1 Motivations et Objectifs 61
3.2 Lois de paroi algébriques AAWF 62
3.2.1 Loi de paroi pour la vitesse 62
3.2.2 Loi de paroi pour le paramètre α 77
3.2.3 Loi de paroi pour le taux de dissipation ε 78
3.2.4 Loi de paroi pour k et détermination du frottement à la paroi 78
3.2.5 Lois de paroi pour les tensions de Reynolds 83
3.2.6 Méthode d'implémentation 91
3.2.7 Une alternative au modèle algébrique 93
3.3 Lois de paroi numériques ANWF 94
3.3.1 Stratégie 94
3.3.2 Équations de proche paroi 96
3.3.3 Termes convectifs et vitesse normale 97
3.3.4 Conditions aux limites de sous-mailles 100
3.3.5 Limitations 100
3.3.6 Résumé 100
3.4 Validation élémentaire 103
3.4.1 Canal pleinement développé 103
3.4.2 Crazy Channel 115

3.5 Conclusion du chapitre . . . 119

4 Applications à des configurations académiques 121
4.1 Jet impactant axisymétrique . . . 121
4.1.1 Description du cas . . . 121
4.1.2 Résultats en *Bas-Reynolds* . . . 123
4.1.3 Résultats en *Haut Reynolds* . . . 127
4.1.4 Raffinement localisé . . . 137
4.1.5 Convergence en maillage . . . 139
4.1.6 Conclusion sur le cas du jet impactant . . . 143
4.2 Marche descendante . . . 144
4.2.1 Description du cas . . . 144
4.2.2 Résultats en *Bas-Reynolds* . . . 144
4.2.3 Résultats en *Haut-Reynolds* . . . 148
4.2.4 Raffinement localisé . . . 153
4.3 Conclusion du chapitre . . . 156

5 Cas industriel : débitmètre à diaphragme 157
5.1 Description du cas . . . 157
5.2 Résultats en *Bas-Reynolds* . . . 159
5.3 Résultats en *Haut Reynolds* . . . 162
5.4 Raffinement localisé . . . 171
5.5 Convergence . . . 173
5.6 Conclusion sur le cas du diaphragme . . . 174

6 Conclusions et perspectives 177

A Loi de paroi pour la température 179

B Formulation de l'EB-RSM 181

C Introduction de la contrainte de réalisabilité dans l'EB-RSM 183

D Présentation de *Code_Saturne* 187

E Publications 191
E.1 Adaptive Wall Treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress Model . . . 191
E.2 Adaptive Wall Treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress Model . . . 200

Bibliographie 213

Chapitre 1

Introduction générale

Préambule

La turbulence au sein du mouvement d'un fluide est un phénomène physique très facile à observer par tout un chacun, et omniprésent au quotidien : l'écoulement torrentiel de l'eau sous un pont, la fumée s'échappant lentement d'une cigarette ou le simple fait de remuer son café pour le refroidir. C'est Léonard de Vinci qui, déjà au 16^{eme} siècle, en fit les premières observations scientifiques et qui le premier utilisa le terme *turbolenza* (du latin *turba*, la foule) pour caractériser cet état désordonné d'un fluide en mouvement. A juste titre, car c'est bien le caractère turbulent, chaotique et imprévisible des écoulements des fluides qui rend en partie impossible la prédiction du temps qu'il fera dans un mois (voire dans quatre à cinq jours).

Ces phénomènes sont très bien décrits par les célèbres équations différentielles de Navier-Stokes, qui traduisent le principe fondamental de la dynamique de Newton au travers de la juste identification des forces s'exerçant sur un fluide Newtonien au cours de son mouvement. Ces équations laissent encore aujourd'hui perplexes physiciens et mathématiciens (l'existence et l'unicité mathématique de solutions à ces équations font toujours partie des problèmes « à un million de dollars » non résolus du célèbre Institut Clay de mathématiques [1]), et ce malgré d'innombrables expériences et observations, qui en font un modèle fiable et reconnu. Malgré tout, des théories de la turbulence ont vu le jour, la plus reconnue étant celle de Kolmogorov (en 1941, soit plus de 400 ans après Léonard de Vinci) : un mouvement fluide au sein duquel coexistent, sur une très large gamme d'échelles, des tourbillons. Les plus grosses structures tourbillonnaires sont instables et celles-ci peuvent éventuellement se rompre et donner des tourbillons plus petits, transférant ainsi de l'énergie des grandes échelles vers les plus petites : c'est la cascade d'énergie de Kolmogorov.

Les écoulements turbulents interviennent très largement dans l'industrie. Dans certains cas, on cherche à exploiter la turbulence, comme par exemple pour améliorer des procédés de mélange ou de refroidissement. Dans d'autres cas, on cherche plutôt à la contrôler voire la réduire, comme par exemple pour diminuer les nuisances sonores qu'elle génère (décollage d'un avion). Dans la grande majorité des cas, on souhaite simplement comprendre la turbulence pour analyser et prendre en compte les sollicitations mécaniques qu'elle engendre. Mais dans tous les cas, il est extrêmement important pour l'industriel de se doter d'outils lui permettant de comprendre la turbulence des situations qu'il rencontre.

L'une des voies possibles est le recours à l'expérimentation : on reproduit, le plus souvent à échelle réduite et de manière simplifiée, les situations d'intérêt de manière à visualiser la

1. `http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation` .

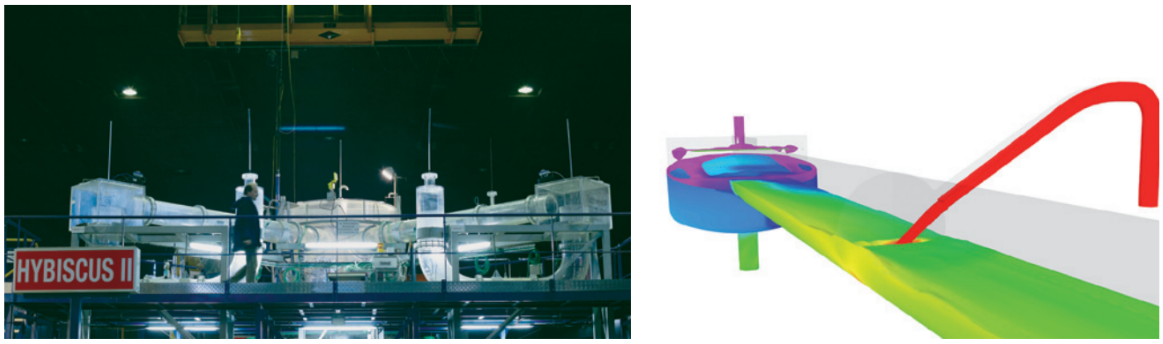


FIGURE 1.1 – Demi-cuve de réacteur à l'échelle 1/2 ***A gauche, a)*** Maquette expérimentale Hybiscus II. ***A droite, b)*** Calcul avec le code Neptune_CFD d'une injection de sécurité dans une branche partiellement dénoyée de la maquette Hybiscus II. *Propriété de EDF. Extrait de la plaquette MFEE.* [2]

topologie de l'écoulement et à effectuer des mesures. Au sein de la division Recherche et Développement d'EDF, cela se traduit par exemple par la simulation à échelle réduite de la rupture d'un barrage pour la sûreté des installations hydro-électriques, ou encore par la visualisation des écoulements dans la maquette expérimentale d'un Réacteur nucléaire à Eau Pressurisée (visible sur la figure (1.1a), maquette Hybiscus II, demi-cuve de réacteur à l'échelle 1/2 sur le site de Chatou).

Mais dès lors que l'on cherche à réaliser des études systématiques et paramétriques sur des configurations industrielles ou encore que l'on veuille reproduire des configurations accidentelles pour la sûreté, il devient difficile de réaliser des expériences pour toutes les situations rencontrées. A ce titre, la simulation numérique des écoulements fait l'objet depuis l'avènement de calculateurs puissants d'un fort engouement (figure (1.1b), présentant une simulation de la même configuration que la maquette expérimentale). En effet, l'intégration numérique des équations de Navier-Stokes permet d'observer le comportement d'un fluide dans ses moindres détails, tant spatiaux que temporels. Cependant, dès lors que l'écoulement devient turbulent, le spectre d'échelles à résoudre se répartit continûment sur une gamme tellement large que les ressources informatiques nécessaires aux calculs sont encore aujourd'hui inaccessibles pour un calcul industriel. On parle dans ce cas de simulations numériques directes (DNS [3]). A titre d'exemple, si l'ensemble du super calculateur *Tianhe-2* [4] (numéro 1 du top 500 mondial en novembre 2015) était utilisé, seule une simulation directe d'une voiture roulant à 3 km/h serait possible : on est bien loin de la plage de fonctionnement industrielle. Malgré quelques extrapolations comme celles de Spalart [Spalart 2000] qui entrevoit une utilisation industrielle de la DNS d'ici 2080, il est impossible de dire aujourd'hui avec certitude si la simulation numérique directe des écoulements turbulents sera un jour en adéquation avec les besoins et les ressources industriels.

2. `http://chercheurs.edf.com/organisation`.
3. Direct Numerical Simulation.
4. Advanced Institute for Computational Science, Japan.

Les ingénieurs doivent-ils alors attendre l'avènement de la DNS pour espérer réaliser des simulations numériques ? Il est évident que non. Deux axes de recherches sont développés dans ce sens au sein de la division Recherche et Développement d'EDF.

Le premier exploite les possibilités et la richesse infinie de la Simulation Numérique Directe pour élargir les connaissances de l'industriel sur la physique régissant la turbulence et les contraintes qu'elle fait naître proche des parois. On utilise alors des géométries simplifiées et on se place à des nombres de Reynolds bien plus faibles que ceux rencontrés en réalité. Ceci permet de mieux comprendre les enjeux liés à un phénomène bien précis. D'importants moyens informatiques sont ainsi disponibles au sein d'EDF et exploités dans ce sens : la machine Zumbrota (IBM BlueGene/Q) est par exemple équipée de 65536 cœurs et figurait en novembre 2015 à la 121^{me} position du top 500 mondial [5]. Ainsi, les travaux de Cedric Flageul [Flageul 2015] s'inscrivent par exemple dans une logique de compréhension à l'aide de calculs DNS de phénomènes tels que celui du choc froid (injection d'eau froide dans une cuve de réacteur chaude en cas d'incident) où la cuve en métal est soumise à de fortes contraintes thermiques et mécaniques. Comprendre ces phénomènes, c'est pouvoir mieux les prédire, et mieux les prédire c'est, par exemple, étendre la durée de vie d'une tranche en centrale.

Le second axe de recherche exploite l'alternative bien plus ancienne de la modélisation de la turbulence et offre des possibilités très vastes. Cette approche consiste à ne résoudre numériquement qu'une « partie » du contenu spectral d'un écoulement turbulent. Concrètement, on va éviter de résoudre les structures trop petites (les très petits tourbillons) et ainsi rendre l'intégration numérique des équations de Navier-Stokes accessible aux impératifs industriels de temps et de coût. Le problème est que la partie non résolue du spectre impose à la partie résolue des contraintes turbulentes, s'ajoutant aux contraintes dynamiques, qu'il est impératif de prendre en compte pour espérer intégrer les équations. La modélisation de ces contraintes et leur expression en fonction de la partie résolue est l'objectif de la modélisation de la turbulence. Les travaux de Frédéric Dehoux [Dehoux 2012] s'attachent par exemple à développer une modélisation avancée de type RANS des flux thermiques turbulents pour une meilleure prédiction des contraintes turbulentes lors de simulations industrielles.

En réalité, simulation directe et modélisation sont deux approches qui sont, *de facto*, indissociables l'une de l'autre et évoluent en symbiose : des calculs DNS sont indispensables à la validation des modèles de turbulence, qui eux-mêmes sont indispensables à l'industriel qu'est EDF.

Contexte scientifique et industriel

Il existe aujourd'hui trois grandes stratégies de modélisation de la turbulence. Chacune de ces approches propose une résolution plus ou moins partielle du contenu spectral d'un écoulement.

5. `http://www.top500.org/`

Simulation des Grandes Echelles (LES [6])

Cette approche vise à ne résoudre que les plus grandes structures tourbillonnaires de l'écoulement : seule une partie du spectre d'énergie est résolue. Cette description de l'écoulement turbulent est très riche car elle permet d'avoir accès à une vision instationnaire de l'écoulement. La partie non résolue de l'écoulement (les petits tourbillons) doit ainsi être modélisée. Ceci permet d'utiliser des maillages plus grossiers pour les calculs et ainsi permet l'étude de géométries plus complexes. Cette conclusion est cependant à nuancer en proche paroi, où la résolution nécessaire à un calcul LES est très proche de celle nécessaire à un calcul DNS. Malgré une technologie maîtrisée, très bien documentée, et un contenu extrêmement riche, cette approche est encore aujourd'hui difficilement utilisée dans l'industrie pour des raisons de coût de calcul.

Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS)

Une autre approche est celle des modélisations statistiques de l'écoulement, appelées modèles RANS. Cette approche est fondée sur les travaux de Osborne Reynolds dans lesquels les variables de l'écoulement comme la vitesse et la pression sont considérées comme des variables aléatoires. L'approche RANS vise à modéliser le comportement statistique des variables : c'est-à-dire le comportement qu'on obtiendrait si l'on répétait un grand nombre de fois l'expérience d'un écoulement turbulent et qu'en tout point du temps et de l'espace on en faisait une moyenne d'ensemble. Dans ce cas, aucune partie du spectre d'énergie turbulente n'est résolue.

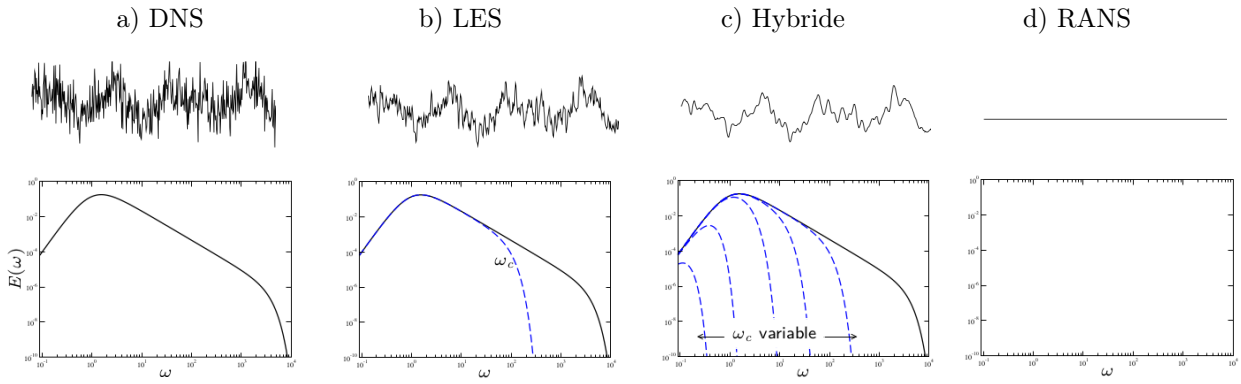


FIGURE 1.2 – Représentation schématique du signal turbulent résolu par différentes méthodes et spectre résolu correspondant. Extrait de [Manceau 2015a].

Méthode hybrides

Une troisième approche vise alors à proposer une catégorie de modèle décrivant la turbulence tantôt de manière statistique (aucune échelle du spectre n'est résolue, seul le mouvement moyen est connu) tantôt avec une vision « grandes échelles ». Ces méthodes sont en plein essor mais

6. Large Eddy Simulation.

souffrent d'un certain manque de maturité de par le manque de formalisme sur lequel elles reposent.

Motivations

L'approche RANS est largement la plus utilisée et la plus mature pour une utilisation industrielle. Cette thèse CIFRE, réalisée dans le cadre d'un co-encadrement entre le Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications (LMA) de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour et de la division Recherche et Développement d'EDF, s'inscrit précisément dans l'axe de recherche visant à améliorer la prédiction des modèles de turbulence de type RANS et s'appuie sur le code de calcul *Code_ Saturne*[7] développé à EDF depuis 1998 [Archambeau 2004].

Idéalement, on voudrait un modèle RANS universel, valable pour n'importe quel type d'écoulement, et permettant de décrire avec une précision parfaite l'écoulement moyen d'un phénomène turbulent. Malheureusement, un tel modèle n'existe pas et il existe un grand nombre de modèles différents dans la littérature, chacun possédant ses limites et ses forces. Un certain nombre de modèles seront détaillés dans le chapitre suivant.

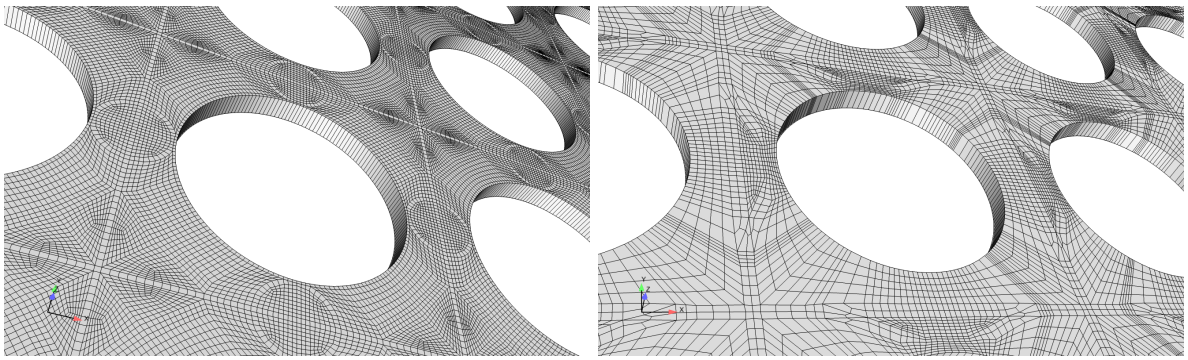


FIGURE 1.3 – Maillages à l'aval de deux grilles différentes dans un assemblage 5×5

Mais plus encore que les spécificités physiques liées à chaque modèle (un modèle k-ε aura tendance à surestimer l'énergie turbulente au niveau d'un point d'impact, le modèle de Spalart-Allmaras donne de très bons résultats en aérodynamique des écoulements attachés,...), les modèles imposent de drastiques contraintes de maillage. Ainsi l'ingénieur précautionneux désirant exploiter les possibilités d'un certain modèle devra veiller à ce que le maillage qu'il utilise soit en adéquation avec les prérequis de ce modèle.

Il existe ainsi deux grandes classes de modèles, qui seront détaillées dans le chapitre suivant. La première classe de modèles dits *Haut-Reynolds* impose une taille de maille proche des parois suffisamment large de manière à ce que les premiers points de calcul soient situés dans une zone pleinement turbulente (diffusion visqueuse négligeable devant la diffusion turbulente) et

7. *Code_ Saturne* est un code de calcul utilisant une méthode de type volumes finis colocalisés pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes sur maillages non structurés. Le logiciel est disponible gratuitement sous forme *open source* (`www.code-saturne.org`). Un aperçu des méthodes employées par le code est donné en annexe.

s'affranchissent de l'influence de la paroi. La deuxième classe de modèles, dits *Bas-Reynolds*, nécessite au contraire un maillage très fin près des parois de manière à capter tous les phénomènes dus à la paroi.

Utiliser un maillage grossier avec un modèle *Bas-Reynolds* ou utiliser un maillage fin avec un modèle de type *Haut-Reynolds* fait courir le risque à l'ingénieur d'obtenir des résultats non physiques et donc totalement faux, pouvant mener à de mauvaises interprétations sur le comportement de l'écoulement turbulent qu'il observe. Il est donc primordial de respecter les contraintes imposées par le modèle.

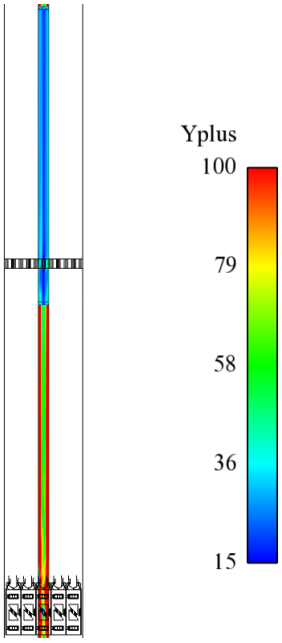


FIGURE 1.4 – Distance adimensionnelle à la paroi autour du tube central à travers deux grilles (assemblage combustible 5×5).

Malheureusement, les géométries très complexes auxquelles est confronté l'ingénieur l'empêchent souvent de maîtriser totalement le processus de maillage : malgré tout le soin apporté à la réalisation de ce dernier, il est possible que des contraintes géométriques imposent aussi bien des mailles très fines que des mailles très grossières au sein du même maillage. La figure (1.3), représentant les maillages à l'aval de deux grilles successives (grille simple de maintien à gauche, et grille de mélange à droite) pour un faisceau de tube 5x5, illustre parfaitement ce problème. Le maillage du faisceau issu de la grille simple est plus fin que celui de la grille de mélange. Le modèle utilisé ici est un modèle *Haut-Reynolds* et au vu de la figure (1.4), présentant la répartition de la distance adimensionnelle à la paroi [8] le long du tube central, on ne se situe plus dans la zone de validité du modèle utilisé.

Beaucoup d'auteurs ont récemment tenté de répondre à cette problématique industrielle en introduisant le concept de lois de paroi adaptatives permettant à un modèle de turbulence de se comporter à souhait comme un modèle *Haut-Reynolds* ou comme un modèle *Bas-Reynolds* en fonction du maillage qu'il rencontre. Ces développements ont malheureusement tous été réalisés dans le cadre de modèles de fermetures dits « du premier ordre » et ne permettant pas de reproduire certaines physiques mises en jeu dans le domaine nucléaire.

Objectifs

Cette thèse propose d'explorer différentes possibilités de lois de paroi adaptatives pour un modèle du second ordre disponible au sein de *Code_Saturne*, et ayant prouvé à plusieurs re-

8. Distance calculée en fonction de la distance physique, adimensionnée par le frottement à la paroi et notée y^+. On considère généralement que l'on se situe en zone pleinement turbulente si $y^+ > 30$.

prises sa capacité à reproduire des physiques complexes : le modèle EB-RSM (*Elliptic Blending Reynolds Stress Model*).

L'objectif est de créer un modèle, du second ordre et basé sur l'EB-RSM, qui donne des résultats satisfaisants quel que soit le type de maillage utilisé, en particulier quand ce dernier contient à la fois des cellules dont le centre est à une distance *Bas-Reynolds* et *Haut-Reynolds*. L'utilisateur du modèle de turbulence aura ainsi moins de contraintes et moins de doutes concernant les régions qui ne respectent pas les critères très strictes normalement imposés par le modèle.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit est divisé en quatre grandes parties.

La première partie établit un état de l'art des modèles de lois de paroi disponibles dans la littérature. Au préalable, on aura pris soin de faire un bref rappel du concept d'équations moyennées au sens de Reynolds ainsi que de certains modèles de turbulence largement utilisés dans l'industrie. On verra que le concept de loi de paroi est relativement ancien mais qu'il n'existe pas de littérature très riche concernant les modèles de fermeture du second ordre.

La seconde partie, cœur de ce manuscrit, s'attache à présenter les différentes approches développées dans le cadre de cette thèse. On détaillera la modélisation et les lois de paroi associées à chaque variable du modèle considéré, ainsi que les motivations ayant conduit à leurs élaborations. Chaque approche sera ensuite testée et validée sur le cas d'un canal turbulent pleinement développé pour différents nombres de Reynolds turbulents. Une première vérification de la robustesse de ces lois de paroi adaptatives sera par ailleurs proposée avec la simulation d'un canal pleinement développé sur maillage déformé (taille variable des mailles de proche paroi).

Dans une troisième partie, on s'intéressera aux résultats de différentes approches sur des cas mettant en jeu des phénomènes physiques plus complexes tels que ceux de recirculation ou d'impact. On évaluera chaque approche par rapport aux méthodes existantes avant d'en dégager les apports éventuels. On verra ainsi que la flexibilité permise par les méthodes décrites dans cette thèse donne des résultats très prometteurs pour une future utilisation à visée industrielle.

Enfin, dans une dernière partie, on propose de mettre en avant la force des méthodes déployées sur un cas récent directement issu de l'industrie : un dispositif de mesure de débit par diaphragme.

Le manuscrit est complété par quelques remarques de conclusion et différentes annexes.

Chapitre 2

Bibliograhie - Modélisation RANS des écoulements

Sommaire

2.1 Modélisation statistique - Opérateur de Reynolds 9
2.2 Modélisation statistique des équations de Navier-Stokes 10
2.3 Modélisation du premier ordre 11
2.3.1 Modèles algébriques 11
2.3.2 Modèles à deux équations de transport 12
2.4 Modélisation du second ordre 16
2.4.1 Modélisations des corrélations inconnues dans l'équation de transport des tensions de Reynolds 17
2.4.2 Physique de proche paroi et pondération elliptique 19
2.5 Modèles de paroi 21
2.5.1 Comportement « universel » en proche paroi 21
2.5.2 Sortie de l'équilibre 27
2.5.3 Lois « unifiées » 30
2.5.4 Lois de paroi 32
2.5.5 Lois de paroi adaptatives 48
2.6 Conclusion du chapitre 58

Ce chapitre est dédié à la présentation de la modélisation statistique de la turbulence. Une présentation brève mais non exhaustive des modèles de turbulence ainsi que de leur construction est donnée. Une attention particulière est portée à l'*Elliptic Blending Reynolds Stress Model* car c'est ce modèle qui a fait l'objet des principaux développements dans la présente thèse. Enfin, la modélisation de la proche paroi via des lois de parois est abordée. Une synthèse des différentes approches présentes dans la littérature est présentée.

2.1 Modélisation statistique - Opérateur de Reynolds

La modélisation statistique de la turbulence - ou modélisation RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) - traite la turbulence comme un phénomène chaotique déterministe. Les variables étant considérées comme des variables aléatoires, cette modélisation est conçue pour produire des solutions numériques du mouvement moyen d'un fluide, au sens de la moyenne d'ensemble.

Chaque variable (vitesse, pression, température...) est ainsi décomposée en la somme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante :

$$A^* = A + a \tag{2.1}$$

La moyenne de Reynolds est définie comme la moyenne d'ensemble :

$$A = \overline{A^*} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A_n \right). \tag{2.2}$$

En d'autres termes, cet opérateur sert à déterminer la moyenne d'une expérience donnée, sur un grand nombre de réalisations. Les équations de Navier-Stokes sont certes déterministes mais leur caractère fortement non linéaire leur confère une forte sensibilité aux conditions initiales (comportement chaotique). En pratique, l'hypothèse d'ergodicité permet de dire que, pour un écoulement statistiquement stationnaire, la moyenne d'ensemble est égale à la moyenne temporelle :

$$\overline{A}(x,y,z,t) = \overline{A}(x,y,z) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T A(x,y,z,t)dt \right). \tag{2.3}$$

2.2 Modélisation statistique des équations de Navier-Stokes

Le mouvement instantané d'un fluide newtonien incompressible et n'étant soumis à aucune force volumique extérieure, est régit, pour la i-ème composante du vecteur vitesse $\mathbf{U}^*(x,y,z,t)$, par l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U_i^*}{\partial t} + U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2.4}$$

Cette équation est associée à celle de la conservation de la masse, aussi appelée équation de continuité, qui assure l'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^* = \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} = 0 \tag{2.5}$$

L'application de l'opérateur de Reynolds à l'équation (2.4) permet d'obtenir les équations du champs moyen :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.6}$$

où $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$ définit le tenseur de Reynolds. L'équation (2.6) diffère des équations instantanées par la seule introduction de la divergence de ce tenseur. Il est donc très important car c'est lui qui porte toutes les informations sur la turbulence de l'écoulement. L'objectif de tous les modèles RANS est de déterminer les composantes du tenseur de Reynolds, ou tensions de Reynolds pour déterminer la pression et la vitesse moyenne.

En outre, la propriété d'incompressibilité des équations locales instantanées s'applique aussi en moyenne :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.7}$$

En pratique, la modélisation RANS des écoulements turbulents comprend deux niveaux de modélisation. Soit on utilise des relations algébriques pour modéliser directement le tenseur de Reynolds (R_{ij}) présent dans l'équation (2.6) (modèle à loi de comportement, ou *Eddy Viscosity Models*), soit on résout des équations de transport sur les tensions de Reynolds et on modélise les termes inconnus apparaissant dans ces équations (voir paragraphe 2.4, modèles du second ordre, ou *Reynolds Stress Models*).

2.3 Modélisation du premier ordre

La paternité des modèles à loi de comportement revient à Boussinesq, dont l'idée fondamentale fut d'affirmer que turbulence et déformation du champ de vitesse moyen sont directement liées. De la même façon qu'une loi de comportement lie contrainte et déformation en mécanique, Boussinesq proposa ainsi une loi de comportement linéaire faisant intervenir une viscosité turbulente et reliant contraintes de Reynolds et déformations du champs moyen :

$$R_{ij} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij} \tag{2.8}$$

avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{2}R_{ii} \tag{2.9}$$

Une généralisation de l'hypothèse de Boussinesq a été apportée avec la théorie des bases d'intégrités [Pope 1975]. Elle permet de relier les tensions de Reynolds aux puissances successives du tenseur de taux de déformation et de rotation (respectivement $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{W}}}$). La loi de Boussinesq n'est autre que la troncature linéaire de cette loi générale. Certains modèles utilisent des termes non linéaires supplémentaires issus de la théorie de Pope, mais n'apparaissant pas dans ces travaux, ils ne seront pas détaillés ici.

Il convient de souligner les hypothèses fortes sur lesquelles la loi de comportement de Boussinesq est fondée :

- instantanéité : pas d'effet mémoire de la turbulence, la réponse de la turbulence à une variation du champ moyen est instantanée.
- localité : la turbulence n'est influencée que par son très proche voisinage

Tout l'objectif des modèles à loi de comportement est donc le calcul de la viscosité turbulente ainsi que la modélisation de l'énergie turbulente k.

2.3.1 Modèles algébriques

Ces modèles, aussi appelés *modèles à 0 équations*, ne requièrent aucune résolution d'équations de transports supplémentaires. Dans le modèle de Prandtl, on prescrit la viscosité turbulente avec la relation suivante :

$$\nu_t = l^2 \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \tag{2.10}$$

où l est la longueur de mélange, donnée par exemple dans un canal plan de demi-hauteur h par :

$$l = \min(\kappa y, 0.1h) \tag{2.11}$$

Ce modèle a été amélioré par Van Driest [Driest 1956], puis Cebeci et al. [Cebeci 1974] et enfin Baldwin et Lomax [Baldwin 1978]. Ces modèles ne satisfont cependant pas au principe de complétude (aucune connaissance *a priori* de l'écoulement ne doit être nécessaire au calcul, voir par exemple [Chassaing 2000]), requis pour une modélisation satisfaisante de la turbulence et sont donc en pratique très peu utilisés lors de la simulation de géométries très complexes.

2.3.2 Modèles à deux équations de transport

La viscosité turbulente étant homogène à une longueur au carré sur un temps ($\nu_t \equiv L^2 \cdot T^{-1}$), on considère généralement que celle-ci peut s'écrire comme le quotient d'une échelle de longueur l au carré et d'une échelle de temps τ ($\nu_t = l^2/\tau$). On identifie ainsi facilement les valeurs de l et τ dans la section précédente. Mais d'autres choix sont possibles, dans la mesure où ceux-ci fournissent une viscosité turbulente homogène à L^2T^{-1}. Dans le cas des modèles à deux équations, deux équations de transport supplémentaires sont résolues de manière à déterminer ces échelles de longueur et de temps.

Le modèle k-ε

Initialement proposé par Launder et Spalding [Launder 1974], ce modèle fait intervenir l'énergie cinétique turbulente k ainsi que le taux de dissipation turbulente ε. On peut ainsi construire deux échelles $l = k^{3/2}/\varepsilon$ et $\tau = k/\varepsilon$ (qui sont les échelles de longueur et de temps des gros tourbillons), permettant d'établir :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{2.12}$$

L'équation modèle de transport de k est :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] \tag{2.13}$$

Avec pour terme de production :

$$P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \tag{2.14}$$

L'équation de transport exacte de ε étant trop complexe pour faire l'objet d'une modélisation terme à terme simple, une résolution inspirée de la résolution de k est adoptée : convection,terme source, terme puit, diffusion visqueuse et diffusion turbulente :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] \tag{2.15}$$

Les termes de production de dissipation et ceux de destruction de dissipation sont supposés reliés à ε et k par les relations simples :

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P \quad ; \quad \varepsilon_\varepsilon = C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{k}\varepsilon \tag{2.16}$$

Les constantes utilisées dans le modèle sont déterminées expérimentalement :

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1	1.3

Le système est donc fermé et toutes les contraintes s'obtiennent, pour mémoire, avec la relation de Boussinesq :

$$R_{ij} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij} \tag{2.17}$$

Le modèle k-ω

C'est Wilcox [Wilcox 1988] qui revint en premier à la vieille idée de Kolmogorov et proposa d'utiliser la fréquence caractéristique des tourbillons $\omega = \varepsilon/k$ comme seconde échelle. Dans cette approche, on peut alors écrire :

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \tag{2.18}$$

Les équations de transports s'écrivent alors :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k\frac{\partial k}{\partial x_k} = P - \beta' k\omega + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_k\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \alpha S^2 - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right] \tag{2.20}$$

où S est défini par la relation :

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \tag{2.21}$$

et les constantes sont données dans le tableau suivant :

β'	α	β	σ_k	σ_ω
0.09	5/9	3/40	2	2

Le modèle k-ω SST

Menter [Menter 1994] proposa par la suite un modèle passant d'une formulation de type k-ω en proche paroi, évitant ainsi les écueils liés à l'utilisation d'un modèle de type k-ε dans cette zone, à une formulation de type k-ε en zone pleinement turbulente. En effet, le modèle k-ω montre une grande sensibilité aux conditions aux limites mais permet une bonne résolution des couches limites turbulentes. La viscosité turbulente s'obtient dans ce modèle par :

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1\omega, SF_2)} \tag{2.22}$$

avec la fonction F_2 définie par la relation :

$$F_2 = \tanh\left[\Phi_2^2\right] \quad , \Phi_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right) \tag{2.23}$$

Les équations de transport pour k et ε s'écrivent :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k\frac{\partial k}{\partial x_k} = P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\nu + \sigma_k\nu_t)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_k\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \alpha S^2 - \beta\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\nu + \sigma_\omega\nu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right] + 2(1-F_1)\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_k}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \tag{2.25}$$

La production est donnée par l'expression :

$$P_k = \min\left(P, 10\beta^* k\omega\right) \tag{2.26}$$

Les constantes de fermeture sont d'une part :

α_1	β_1	σ_{k1}	$\sigma_{\omega 1}$
5/9	3/40	0.85	0.5

d'autre part

α_2	β_2	σ_{k2}	$\sigma_{\omega 2}$
0.44	0.0828	1	0.856

Pour chacune de ces constantes, la valeur finale utilisée dans le modèle est calculée de la façon suivante :

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2(1 - F_1) \tag{2.27}$$

où l'on a

$$F_1 = \tanh\left[\Phi_1^4\right] \quad , \Phi_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2}\right] \tag{2.28}$$

$$CD_{k\omega} = \max\left(2\rho\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10}\right) \tag{2.29}$$

Enfin, les constantes propres au modèle SST sont :

β^*	a_1
0.09	0.31

Le modèle ζ-f

Ce modèle, proposé par Hanjalic et al. [Hanjalic 2004] (on pourra également se reporter aux travaux de Laurence et al. [Laurence 2005]), est issu de la famille des modèles à relaxation elliptique (voir section suivante, sur la modélisation du second ordre). Une troisième équation de transport est résolue pour une variable ζ. La principale force de ces approches est qu'elle vient corriger le mauvais comportement de proche paroi du modèle k-ε sans aucune utilisation de fonction d'amortissement *ad hoc*.

$$\nu_t = C_\mu \zeta k T \tag{2.30}$$

Les 3 équations de transport résolues en plus des vitesses sont les suivantes :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j\frac{\partial k}{\partial x_j} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{C_{\varepsilon 1}P_k - C_{\varepsilon 2}\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U_j\frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = f - \frac{\zeta}{k}P_k + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\zeta}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x_j}\right] \tag{2.33}$$

Une équation elliptique est résolue pour la variable f :

$$L^2\nabla^2 f - f = \frac{1}{T}\left(C_1 - 1 + C_2'\frac{P_k}{\varepsilon}\right)\left(\zeta - \frac{2}{3}\right) \tag{2.34}$$

Celle-ci sert en réalité à mimer le comportement de la corrélation vitesse gradient de pression (voir la section 2.4.2.1) pour plus de détails). Les échelles de longueur et de temps sont données par les relations :

$$T = \max\left[\min\left(\frac{k}{\varepsilon}, \frac{0.6}{\sqrt{6}C_\mu|S|\zeta}\right), C_T\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right] \tag{2.35}$$

$$L = C_L\ \max\left[\min\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \frac{k^{1/2}}{\sqrt{6}C_\mu|S|\zeta}\right), C_\eta\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}\right] \tag{2.36}$$

Enfin, les constantes de fermeture sont :

C_μ	σ_k	σ_ε	σ_ζ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	C_1	C_2'	C_T	C_L	C_η
0.22	1	1.3	1.2	$1.4(1+0.012/\zeta)$	1.9	1.4	0.65	6	0.36	85

Le modèle Bl-$\overline{v^2}$-k

Conceptuellement proche du modèle ζ-f, le modèle Bl-$\overline{v^2}$-k a été développé par Billard et al. [Billard 2012]. En lieu et place d'une équation sur la variable ζ, une équation sur une variable ϕ est résolue. L'équation déterminant la viscosité turbulente est alors :

$$\nu_t = C_\mu \phi k T \tag{2.37}$$

Les 3 équations de transport résolues en plus des vitesses sont les suivantes :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j\frac{\partial k}{\partial x_j} = P - \varepsilon - E + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{C_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}^*\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_j\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = f - \frac{\phi}{k}P + \frac{2}{k}\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu_t}{\sigma_\phi}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right] \tag{2.40}$$

Le terme E, originellement introduit par Jones et Launder [Jones 1972] dans l'équation du taux de dissipation ε, est défini par :

$$E = C_{\varepsilon 3}(1-\alpha^3)\frac{k}{\varepsilon}2\nu\nu_t\frac{\partial U_i}{\partial x_k \partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k \partial x_j} \tag{2.41}$$

L'originalité du modèle vient de la pondération elliptique permettant le calcul de f :

$$f = (1-\alpha^3)f_w + \alpha^3 f_h \tag{2.42}$$

où α est solution de l'équation elliptique :

$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1, \tag{2.43}$$

et par ailleurs :

$$f_w = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{\phi}{k} \quad \text{et} \quad f_h = -\frac{1}{T}\left(C_1 - 1 + C_2\frac{P}{\varepsilon}\right)\left(\phi - \frac{2}{3}\right) \tag{2.44}$$

Le lecteur trouvera de plus amples détails sur la pondération elliptique à la section 2.4.2.1. Le coefficient $C^*_{\varepsilon 2}$ est donné par la relation :

$$C^*_{\varepsilon 2} = C_{\varepsilon 2} + \alpha^3(C_{\varepsilon 4} - C_{\varepsilon 2})\tanh\left(\left|\frac{\partial_j(\nu_t/\sigma_k\partial_j k)}{\varepsilon}\right|^{3/2}\right) \tag{2.45}$$

Les échelles de longueur et de temps sont elles données par les relations :

$$T = \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} + C_T^2\frac{\nu}{\varepsilon}} \tag{2.46}$$

$$L = C_L\sqrt{\frac{k^3}{\varepsilon^2} + C_\eta^2\frac{\nu^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}} \tag{2.47}$$

Enfin, les coefficients de fermeture utilisés dans le modèle Bl-$\overline{v^2}$-k sont donnés dans le tableau suivant :

C_μ	σ_k	σ_ε	σ_ϕ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	$C_{\varepsilon 4}$	C_1	C_2	C_T	C_L	C_η
0.22	1	1.5	1	1.83	1.9	2.3	0.4	1.4	0.65	4	0.164	75

2.4 Modélisation du second ordre

Un moyen de diminuer le niveau d'approximation par rapport aux modèles du premier ordre est de directement résoudre une équation de transport sur les tensions de Reynolds $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$. Par soustraction des équations de Navier-Stokes instantanées (2.4) et moyennées (2.6), on aboutit à une équation de transport sur les vitesses fluctuantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} \tag{2.48}$$

En remarquant alors que :

$$\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial t} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = \overline{u_i\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial t}} \tag{2.49}$$

on peut déduire de (2.48) les équations de transport du tenseur de Reynolds :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_k\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} = P_{ij} + \phi^*_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij} \tag{2.50}$$

où P_{ij}, ϕ^*_{ij}, ε_{ij} et D_{ij} représentent respectivement les termes de production, de corrélation vitesse-gradient de pression, de dissipation et de diffusion. Les expressions mathématiques de ces différents termes sont données ci-dessous :

$$P_{ij} = -\left(\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{x_k} + \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{x_k}\right) \tag{2.51}$$

$$\phi_{ij}^{*} = -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i \frac{\partial p}{x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{x_i}}\right) \tag{2.52}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \tag{2.53}$$

Finalement, la diffusion se décompose en une diffusion visqueuse et une diffusion turbulente :

$$D_{ij} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_{ij}^{\nu}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{D_{ij}^{T}} \tag{2.54}$$

On remarque que l'équation (2.50) fait intervenir des corrélations inconnues d'ordre supérieur (corrélation triple dans D_{ij}^{T} par exemple). Ceci met en évidence un phénomène de cascade d'équations : le terme convectif non linéaire dans l'équation des corrélations d'ordre n génère des corrélations d'ordre $n+1$. Ainsi, quel que soit l'ordre des équations obtenues, une fermeture est nécessaire *via*, *a minima*, une modélisation des corrélations d'ordre supérieure.

La différence fondamentale entre les modèles du second ordre et ceux du premier ordre se situe, en particulier, au niveau du terme de production P_{ij}. En effet, ce terme est suffisant pour expliquer de nombreux phénomènes et ne requiert ici aucune modélisation. Par ailleurs, la résolution d'équations de transport permet de s'affranchir de l'hypothèse d'instantanéité : le modèle est capable de reproduire l'effet mémoire de la turbulence.

2.4.1 Modélisations des corrélations inconnues dans l'équation de transport des tensions de Reynolds

2.4.1.1 Dissipation

Le tenseur du taux de dissipation ε_{ij} représente la dissipation des contraintes de Reynolds par la viscosité. On le modélise grâce à sa demi-trace, le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente, pour laquelle on résout une équation de transport calquée sur celle de k (voir paragraphe 2.3). Les composantes du tenseur s'obtiennent ensuite par une relation algébrique isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon \delta_{ij} \tag{2.55}$$

2.4.1.2 Terme de pression

Le terme de pression, ou encore de corrélation vitesse-gradient de pression a une fonction à la fois diffusive et redistributive. On peut en effet le décomposer ainsi :

$$\phi_{ij}^{*} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i p}\delta_{jk} + \overline{u_j p}\delta_{ik}\right)}_{D_{ij}^{p}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}}_{\Phi_{ij}} \tag{2.56}$$

D_{ij}^{p} est appelé terme de diffusion par la pression. Il est souvent directement associé à la modélisation des corrélations triples du fait de son caractère diffusif. Φ_{ij} constitue, lui, le terme

de corrélation pression-déformation ou terme de redistribution. Chou [Chou 1945] montra que le terme de redistribution peut se décomposer en la somme d'un terme « lent » noté Φ^1, non directement lié au champ de vitesse moyen, et d'un terme « rapide » noté Φ^2 dépendant explicitement du gradient de vitesse moyen et répondant donc instantanément à tout changement de ce dernier. De nombreux modèles ont été proposés pour ces termes, loin de toute paroi, et suivant les hypothèses suivantes :

— quasi-homogénéité : les gradients de vitesse moyens varient faiblement
— localité : le terme de redistribution ne dépend que de grandeurs locales

Modélisation du terme lent

Rotta [Rotta 1951] proposa le modèle suivant pour le terme lent :

$$\mathbf{\Phi^1} = -C_1 \varepsilon \mathbf{b} \tag{2.57}$$

où $\mathbf{b}$ est le tenseur d'anisotropie défini par

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{2.58}$$

Le coefficient C_1 est calibré de manière à reproduire correctement le retour à l'isotropie, et vaut 3.4.

Modélisation du terme rapide

Speziale et al. [Speziale 1991] ont proposé le modèle suivant pour la modélisation du terme rapide, appelé modèle SSG :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi^2} &= -C_1^* P\mathbf{b} + \left(C_3 - C_3^* \sqrt{\{\mathbf{b}^2\}}\right) k\mathbf{S} \\ &+ C_4 k \left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bS}\}\mathbf{I}\right) \\ &+ C_5 k \left(\mathbf{Wb} - \mathbf{bW}\right) \end{aligned} \tag{2.59}$$

où P n'est plus la production modélisée mais la demi-trace du tenseur définie par l'équation (2.51). Les constantes pour le modèle sont les suivantes :

C_1^*	C_3	C_3^*	C_4	C_5
1.8	0.8	1.3	1.25	0.4

Le modèle SSG est souvent associé à une composante supplémentaire non linéaire dans le terme lent mais on ne le considère pas dans cette thèse.

2.4.1.3 Corrélations triples

Le terme D_{ij}^T de l'équation (2.54) représente la divergence des corrélations triples de vitesse et nécessite lui aussi d'être modélisé. Il est supposé traduire le mélange de la turbulence par

elle-même, on le modélise donc à l'aide d'une diffusion. La plus célèbre d'entre ces modélisations est celle proposée par Daly et Harlow [Daly 1970] :

$$D_{ij}^T = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right) \tag{2.60}$$

La valeur de la constante C_S est classiquement fixée à 0.22.

2.4.2 Physique de proche paroi et pondération elliptique

De nombreux phénomènes ont lieu en proche paroi tels que le phénomène d'écho de paroi ou l'effet de blocage. Ces effets perturbent fortement l'écoulement et les hypothèses faites lors de l'expression du terme de redistribution (localité, quasi-homogénéité) ne sont plus vraies. Il n'est ainsi pas possible d'appliquer tel quel le modèle SSG en proche paroi. Certains modèles proposent ainsi d'intégrer des fonctions d'amortissement au sein du modèle de manière à prendre en compte les effets de paroi. Mais ces modèles ne rencontrent pas un franc succès et diverses approches se sont succédées pour permettre l'intégration jusqu'à la paroi des modèles du second ordre.

2.4.2.1 La pondération elliptique et l'EB-RSM

Développé par Manceau et Hanjalić [Manceau 2002], le modèle EB-RSM (*Elliptic Blending-Reynolds Stress Model*) s'affranchit des hypothèses restrictives ayant abouti au modèle de type SSG tout en simplifiant l'approche « relaxation elliptique » originellement proposée par Durbin [Durbin 1993].

Principe

L'idée de l'EB-RSM est d'introduire un coefficient scalaire de pondération $\alpha \in [0,1]$ permettant de pondérer, en étant élevé à une certaine puissance p, une grandeur A entre sa valeur pariétale A^w et sa valeur homogène A^h :

$$A = (1-\alpha^p)A^w + \alpha^p A^h \tag{2.61}$$

α doit ainsi être nul à la paroi et valoir 1 loin de toutes parois. La grandeur A peut représenter le terme de redistribution ϕ_{ij} ou encore le terme de dissipation ε_{ij}. En pratique, de manière à satisfaire le comportement asymptotique de $\phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$, il a été montré que la puissance p doit être prise égale à 3 [Manceau 2015b]. [1]

Equation pour α

A partir de la théorie de la relaxation elliptique introduite par Durbin [Durbin 1993], Manceau et Hanjalić proposent d'obtenir le coefficient α (unique pour toutes les tensions de Reynolds) en résolvant une équation elliptique :

$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1 \tag{2.62}$$

1. Une extension de ce modèle aux équations de transport des flux thermiques turbulents montre que pour les termes de redistribution et de dissipation de ces équations, il faut prendre $p = 1$ [Dehoux 2012].

L'échelle de longueur L apparaissant dans l'équation ci-dessus est une échelle caractéristique de la turbulence représentative des effets de non localité de la pression. Cette échelle de longueur est proportionnelle à l'échelle intégrale de la turbulence $k^{3/2}/\varepsilon$ loin des parois mais se comporte comme l'échelle de longueur de Kolmogorov en proche paroi :

$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}; C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{2.63}$$

avec $C_L = 0.161$ et $C_\eta = 80$.

Terme de redistribution pariétale

De manière à rester consistant avec la théorie de Durbin et à satisfaire les comportements asymptotiques des différentes variables, Manceau et Hanjalić proposent la forme générale suivante pour le terme de redistribution pariétal :

$$\phi_{ij}^w = -5\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_i u_k} n_j n_k + \overline{u_j u_k} n_i n_k - \frac{1}{2}\overline{u_k u_l} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij})\right) \tag{2.64}$$

où n_k représente la k-ième composante du vecteur normal à la paroi. Celui-ci peut être défini à l'aide du coefficient α. En effet, α valant 0 au niveau de la paroi, celle-ci décrit un isocontour pour α. Son gradient est ainsi en chaque point de la paroi orthogonal à celle-ci. On peut donc définir :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\alpha}{||\nabla\alpha||} \tag{2.65}$$

Pour le terme homogène n'importe quel modèle peut convenir mais c'est le modèle SSG qui est adopté par les auteurs (équation (2.59)) :

$$\phi_{ij}^h = \phi_{ij}^{SSG} \tag{2.66}$$

C'est également ce choix qui est adopté dans cette thèse.

Dissipation

Le terme de dissipation homogène correspond au modèle isotrope défini par l'équation (2.55) :

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{2.67}$$

Pour le terme de dissipation pariétale, les auteurs font le choix du modèle suivant, initialement proposé par Rotta [Rotta 1951] :

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon \tag{2.68}$$

L'équation de transport scalaire de la dissipation turbulente ε est modélisée par l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + U_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{C'_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{C_s}{\sigma_\varepsilon}\overline{u_k u_l} T\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) + \nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \tag{2.69}$$

où T est une échelle de temps, similaire dans sa construction à l'échelle de longueur L, définie par :

$$T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}; C_T\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right) \tag{2.70}$$

avec $C_T = 6$. Le coefficient $C'_{\varepsilon 1}$ est défini de la manière suivante :

$$C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1}\left(1 + A_1^P(1-\alpha^3)\frac{P}{\varepsilon}\right) \tag{2.71}$$

et constitue une modification classique du terme $C_{\varepsilon 1}$ visant à augmenter la création de dissipation en proche paroi [2]. Les autres coefficients de l'équation (2.69) sont donnés dans le tableau suivant :

$C_{\varepsilon 1}$	A_1^P	$C_{\varepsilon 2}$	σ_ε	C_s
1.44	0.1	1.83	1.15	0.22

Corrélation triple

Le modèle classique de Daly et Harlow est utilisé dans le modèle EB-RSM [Daly 1970], à la différence qu'on introduit l'échelle de temps définie par l'équation (2.70) :

$$D_{ij}^T = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_s T\overline{u_k u_l}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right) \tag{2.72}$$

L'ensemble du modèle EB-RSM utilisé dans le cadre de cette thèse pourra être trouvé en Annexe.

2.5 Modèles de paroi

Les modèles EB-RSM, k-ω-SST ou Bl-v^2-k décrits dans la section précédente utilisent des conditions aux limites naturelles au niveau des parois pour chaque grandeur (vitesse nulle si paroi immobile, énergie cinétique turbulente nulle,...). Pour des raisons physiques ou pour des raisons de coût de calcul, l'ingénieur ne souhaite parfois pas utiliser ces conditions aux limites et souhaite s'affranchir de la résolution de la proche paroi. Un important axe de recherche en modélisation de la turbulence consiste alors à proposer des modèles permettant d'éviter cette résolution.

2.5.1 Comportement « universel » en proche paroi

Dans le cas d'un écoulement entre deux plaques planes, dans la limite de nombres de Reynolds suffisamment grands, Von Kármán [Karman 1930] et Prandtl [Prandtl 1930] puis Millikan [Millikan 1938] montrent que les différentes grandeurs de l'écoulement suivent un comportement « universel ». L'équilibre d'une tranche de fluide de hauteur $2h$ impose la condition suivante sur la contrainte de frottement à la paroi (située en $y = 0$) :

$$\tau_w = \mu\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=0} = h\frac{dP}{dx} \tag{2.73}$$

2. Il existe plusieurs types de modélisations pour ce coefficient $C'_{\varepsilon 1}$ variable (voir [Manceau 2015b]). Celle-ci possède l'avantage d'avoir un effet numérique stabilisant.

Par ailleurs, les équations de quantité de mouvement selon x (direction de l'écoulement) et y (direction normale à la paroi) s'écrivent :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} - \frac{d\overline{uv}}{dy} + \nu\frac{d^2U}{dy^2} \tag{2.74}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dy} - \frac{d\overline{v^2}}{dy} \tag{2.75}$$

avec μ et ν les viscosités dynamique et cinématique, respectivement. Intégrée entre 0 et y, l'équation de quantité de mouvement suivant y donne :

$$\frac{P}{\rho} + \overline{v^2} = \frac{P_0}{\rho} \tag{2.76}$$

où P_0 est fonction de x uniquement. Les dérivées suivant x des grandeurs moyennes étant supposées nulles (sauf pour la pression), on a $\frac{d\overline{v^2}}{dx} \approx 0$. Il vient alors $\frac{dP}{dx} = \frac{dP_0}{dx}$. Intégrée entre 0 et y, l'équation de quantité de mouvement suivant x donne alors :

$$0 = -\frac{y}{\rho}\frac{dP_0}{dx} + \overline{uv} + \nu\frac{dU}{dy} - \nu\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=0} \tag{2.77}$$

En posant $\tau_w = \rho u_\tau^2$, u_τ définissant la vitesse de frottement, il vient (en utilisant l'équation 2.73) :

$$-\overline{uv} + \nu\frac{dU}{dy} = u_\tau^2\left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{2.78}$$

2.5.1.1 Équations adimensionnées

Prenant u_τ et h comme échelles respectives de vitesse et de longueur, on obtient :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{1}{Re_\tau}\frac{d(U/u_\tau)}{d(y/h)} = 1 - \frac{y}{h} \tag{2.79}$$

où

$$Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu} \tag{2.80}$$

Lorsque le nombre de Reynolds est grand, le terme visqueux de l'équation (2.79) disparaît. Or, en région de proche paroi, les termes visqueux sont prépondérants. L'utilisation de l'échelle de longueur externe n'est donc visiblement pas pertinente en proche paroi. Il est alors naturel de choisir une nouvelle échelle de longueur δ_v telle que :

$$\frac{\delta_v u_\tau}{\nu} = 1 \Rightarrow \delta_v = \frac{\nu}{u_\tau} \tag{2.81}$$

Adimensionnant l'équation (2.78) et posant $y^+ = y/\delta_v = yu_\tau/\nu$ il vient :

$$\underbrace{-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2}}_{\tau_{turb}} + \underbrace{\frac{dU/u_\tau}{dy^+}}_{\tau_{visc}} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \tag{2.82}$$

Les équations (2.79) et (2.82) sont rigoureusement équivalentes tant que le nombre de Reynolds reste fini.

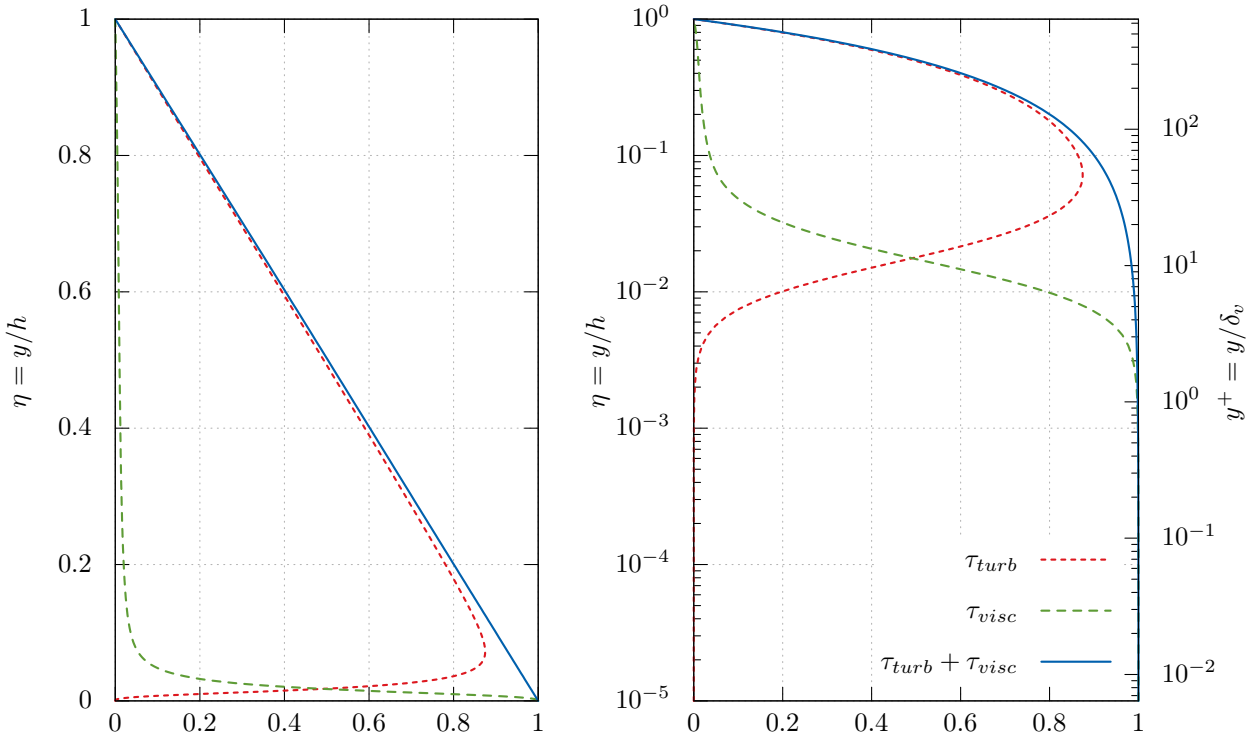


FIGURE 2.1 – Frottement en fonction de la distance à la paroi. Données DNS pour un canal à $Re_\tau = 640$, Iwamoto et al. [Iwamoto 2002]

2.5.1.2 Comportements asymptotiques

Par passage à la limite lorsque $Re_\tau \to \infty$, mais $\eta = y/h$ restant de l'ordre de 1, l'équation (2.79) devient :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} = 1 - \eta \tag{2.83}$$

La zone de validité de cette équation est appelée **zone centrale**. Lorsque y^+ reste de l'ordre de 1, le passage à la limite quand $Re_\tau \to \infty$ dans l'équation (2.82) donne :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{dU/u_\tau}{dy^+} = 1 \tag{2.84}$$

La zone de validité de cette équation, dans laquelle la contrainte de cisaillement totale est constante, est appelée **zone de paroi**. La zone validité de ces deux équations est illustrée dans la figure (2.1). On considère généralement la borne supérieure de cette zone autour de $y^+ = 5$.

Zone de paroi

L'équation (2.84) suggère qu'il existe une relation entre les variables U, y, u_τ et ν (mais pas h), de la forme :

$$F(U, y, u_\tau, \nu) = 0 \tag{2.85}$$

Adimensionnant cette relation par u_τ et ν il vient (théorème de Vaschy-Buckingham) :

$$F(U^+, y^+) = 0 \tag{2.86}$$

Le théorème des fonctions implicites stipule l'existence d'une fonction f qui permet finalement d'écrire :

$$U^+ = f(y^+) \tag{2.87}$$

Soit en dérivant la relation :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{df}{dy^+} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau^2}{\nu}\frac{df}{dy^+} \tag{2.88}$$

Par ailleurs, au sein de la sous-couche visqueuse le premier terme de l'équation (2.84) est négligeable, étant donné que ce sont les effets visqueux qui dominent. Ceci est corroboré par la figure (2.1) qui illustre bien qu'en très proche paroi, la contrainte est entièrement portée par la contrainte visqueuse. On peut donc intégrer l'équation (2.84) pour aboutir à l'expression :

$$U^+ = y^+ \tag{2.89}$$

Zone centrale

L'équation (2.83) suggère que l'écoulement dans cette zone est indépendant de la viscosité du fluide. Un raisonnement similaire au précédent permet alors de dire qu'il existe alors une relation entre les variables U, y, u_τ et h (mais pas ν), de la forme :

$$H(U, y, u_\tau, h) = 0 \tag{2.90}$$

Adimensionnant cette relation par u_τ et h il vient (théorème de Vaschy-Buckingham) :

$$H(U^+, \eta) = 0 \tag{2.91}$$

Le théorème des fonctions implicites stipule l'existence d'une fonction h qui permet finalement d'écrire :

$$U^+ = h(\eta) \tag{2.92}$$

Soit en dérivant la relation :

$$\frac{dU^+}{d\eta} = \frac{dh}{d\eta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{h}\frac{dh}{d\eta} \tag{2.93}$$

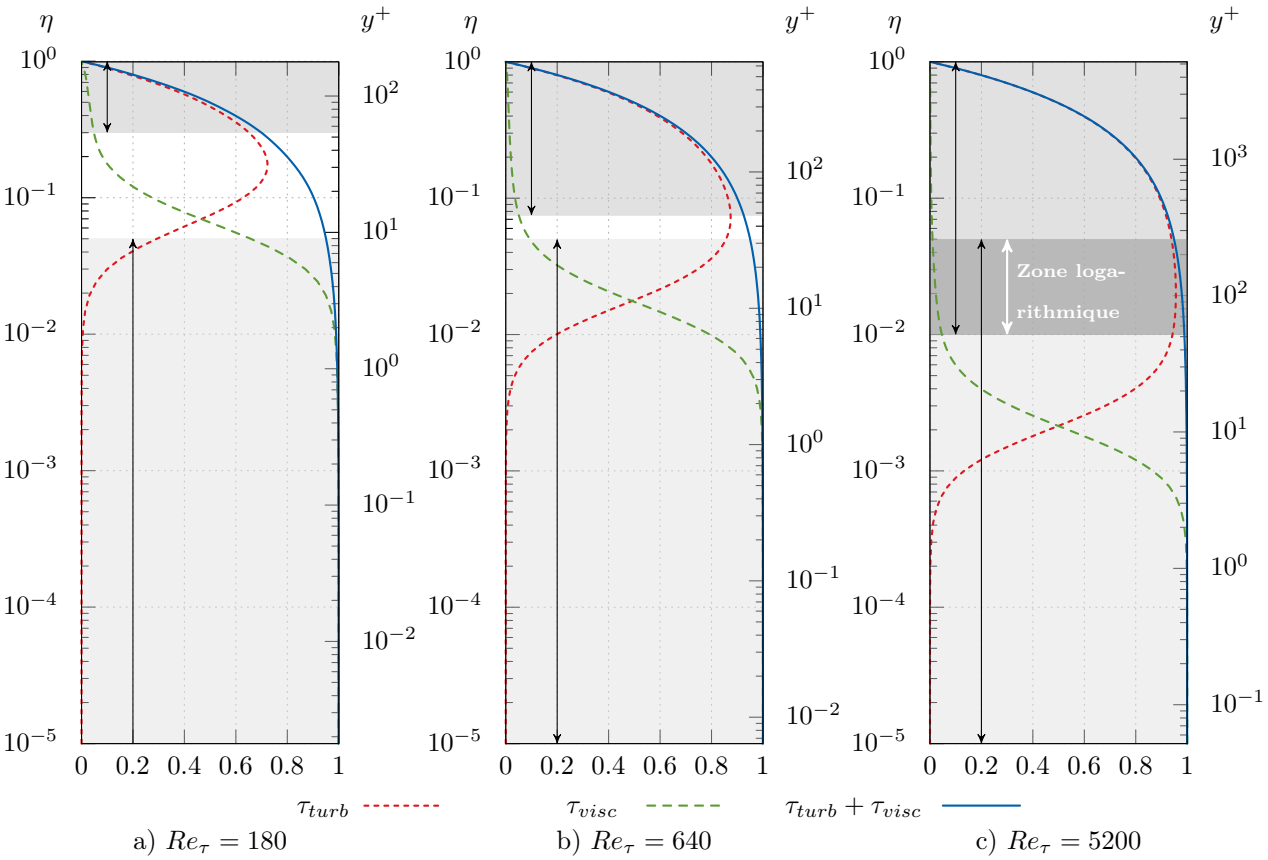


FIGURE 2.2 – Illustration du recouvrement progressif des zones centrales et de proche paroi à mesure que $Re_\tau \to \infty$. Données DNS dans un canal à $Re_\tau = 180$ [Moser 1999], $Re_\tau = 640$ [Iwamoto 2002] et $Re_\tau = 5200$ [Lee 2015].

Zone logarithmique

L'équation (2.88) est valable uniquement lorsque $Re_\tau \to \infty$ et $\eta \to 0$. De la même manière l'équation (2.93) est valable uniquement lorsque $Re_\tau \to \infty$ et $y^+ \to \infty$. On peut cependant supposer qu'il existe une région dans laquelle les relations sont valables simultanément (donc pour $y^+ \to \infty$ et $\eta \to 0$ en même temps). D'où la condition :

$$\frac{u_\tau}{h}\frac{dh}{d\eta} = \frac{u_\tau^2}{\nu}\frac{df}{dy^+} \tag{2.94}$$

La figure (2.2), représentant les contraintes turbulente, visqueuse et totale pour 3 calculs DNS de canal plan, illustre bien la présence de cette zone de recouvrement, qui conformément à l'hypothèse émise, n'apparaît qu'à très grand nombre de Reynolds turbulent. On a, dans cette figure, considéré que la zone centrale était définie par la relation (2.83) à plus ou moins 5%. De même pour la zone de paroi définie par la relation (2.84), à plus ou moins 5%. Cette tolérance est arbitraire mais illustre bien le propos de cette section.

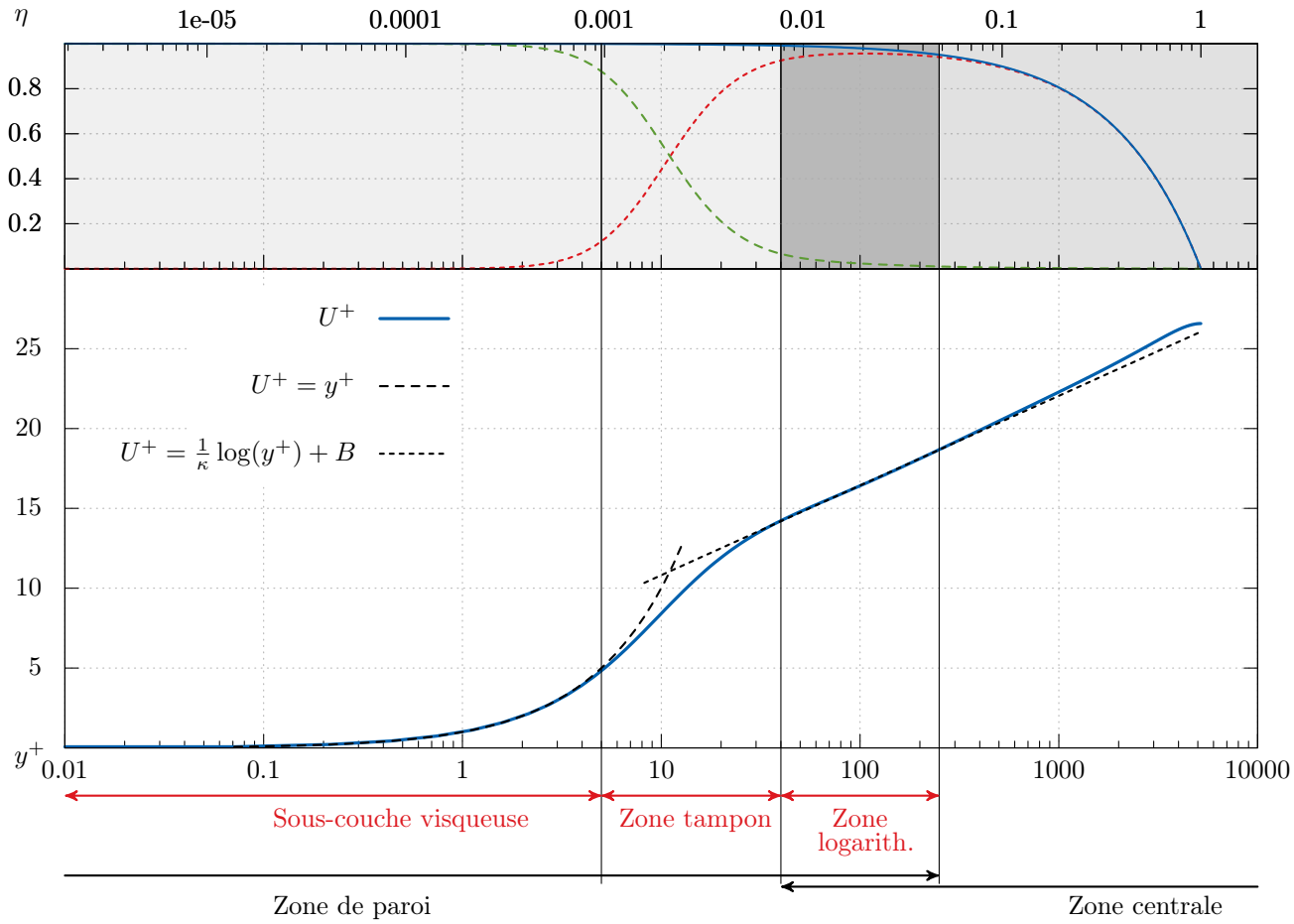


FIGURE 2.3 – Illustration d'un profil de vitesse et des diverses zones mises en évidence. Données DNS dans un canal à $Re_\tau = 5200$, Lee et al.[Lee 2015]

En multipliant alors la relation (2.94) de deux cotés par y/u_τ il vient :

$$\eta \frac{dh}{d\eta} = y^+ \frac{df}{dy^+} \tag{2.95}$$

Dans cette égalité le membre de gauche est fonction de η seulement et le membre de droite de y^+ seulement. Les deux membres de l'égalité sont par conséquent constants et égaux à une même constante notée $1/\kappa$, κ étant appelée constante de Von Kármán. L'expérience montre que $\kappa = 0.41$. On en déduit par conséquent la loi logarithmique :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B \tag{2.96}$$

avec $B = 5.2$.

La figure (2.3) illustre la très bonne adéquation de la loi analytique déduite par ces manipulations et les données DNS de Lee et al., pour des nombres de Reynolds turbulents suffisamment grands. Les profils de vitesse exhibent donc dans le cas d'un écoulement plan à l'équilibre un

comportement « universel » lorsqu'adimensionné en échelles internes. C'est sur cette universalité que se fonde la construction de lois de paroi décrites dans le paragraphe suivant.

2.5.1.3 Critiques et autres developpements

Ces lois sont dites « universelles » mais il est important de ne pas perdre de vue qu'elles ne sont vraies que sous des conditions très particulières et très rarement atteintes en pratique :

— Écoulement sur plaque plane (canal ou couche limite)
— Nombre de Reynolds très élevé ($Re_\tau \to \infty$)
— Pas de gradient de pression adverse, ni d'autres phénomènes tels qu'accélération ou flottabilité pouvant perturber l'équilibre de l'écoulement de couche limite.

De manière générale, Re_τ est loin d'être infini dans de nombreuses configurations industrielles et cette loi est perturbée voire complètement faussée par des effets d'écoulement complexes tels que réattachement, séparation de couche limite ou impacts de jet par exemple. Certains auteurs remettent régulièrement en question la validité de ces lois, notamment la valeur des constantes telles que κ et B [Marusic 2013]. D'autres ont tenté d'y introduire diverses dépendances au nombre de Reynolds turbulent, notamment dans [Wosnik 2000]. Pour une littérature plus étendue sur le sujet, on pourra se référer aux travaux de George [George 2007]. Ces approches n'ont jamais dans la pratique rencontré un franc succès, et encore aujourd'hui l'immense majorité des lois de paroi industrielles sont fondées sur les lois « universelles » de proche paroi.

2.5.2 Sortie de l'équilibre

Malgré l'utilisation toujours intensive de la loi logarithmique précédemment décrite, et ce même en dehors de son champ d'application théorique, de nombreux auteurs se sont penchés sur la prise en compte des phénomènes négligés dans l'approche précédente. En effet, lors d'écoulement plus complexe, proche de la séparation, $u_\tau \to 0$ entraîne l'apparition d'une singularité dans l'équation (2.96) et celle-ci ne tient plus. Une belle illustration de ce phénomène est donnée par la LES d'un diaphragme [Benhamadouche 2015], figure (2.4), où il est clairement possible de voir qu'au voisinage d'écoulements particuliers (ici en amont d'un décollement et en aval d'un réattachement), la loi logarithmique est mise en défaut. Stratford en 1959 [Stratfort 1959] est le premier d'une longue série à introduire une échelle de vitesse basée sur la pression :

$$u_p = \left(\frac{\nu}{\rho} \frac{dP_w}{dx} \right)^{1/3} \tag{2.97}$$

A l'aide d'une analyse basée sur cette échelle Stratford obtient un profil de type racine carrée pour la vitesse au niveau d'un point de décollement en faisant l'hypothèse d'un frottement rigoureusement nul :

$$\frac{U}{u_p} = \frac{2}{\kappa} \sqrt{\frac{y u_p}{\nu}} + C \tag{2.98}$$

Plus tard, Tennekes et Lumley [Tennekes 1972] affirmèrent que dans les mêmes conditions (point de décollement, frottement nul), c'est plutôt un profil logarithmique qui s'appliquait :

$$\frac{U}{u_p} = \alpha \ln \left(\frac{y u_p}{\nu} \right) + \beta \tag{2.99}$$

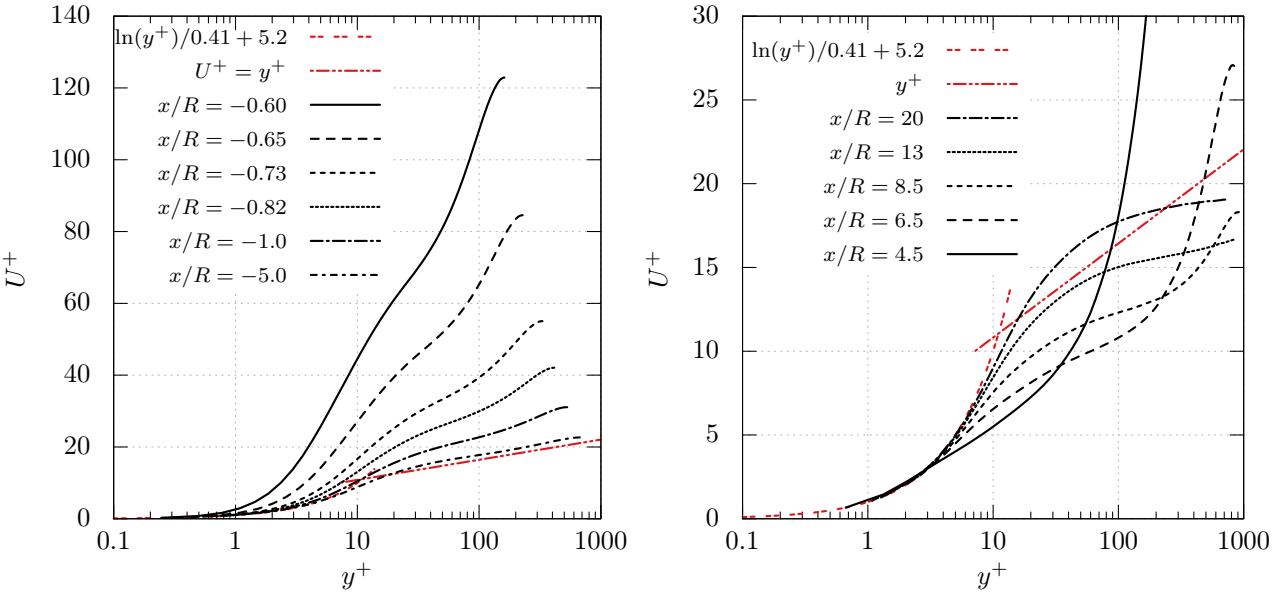


FIGURE 2.4 – ***a)*** Profils de vitesse adimensionnée en amont d'un décollement ***b)*** Profils de vitesse adimensionnée en aval d'un recollement (LES d'un diaphragme, Benhamadouche et al. [Benhamadouche 2015])

Townsend [Townsend 1961] affina la théorie de Stratford à l'aide d'un concept de longueur de mélange et l'étendit au cas d'un frottement non nul (mais positif) et obtint un profil hybride avec à la fois une racine carrée et un logarithme. Ces trois travaux fondateurs ouvrirent la voie à un grand nombre de travaux sur l'adimensionalisation de la vitesse en configuration « hors équilibre » et le lecteur pourra se référer à [Skote 2002] pour une littérature exhaustive sur le sujet. Il est cependant clair qu'il n'est pas possible de décrire de manière analytique, universelle et rigoureuse, avec une seule et unique échelle de vitesse basée sur le frottement à la paroi, tout profil de vitesse.

Shih et al. [Shih 1999] eurent l'idée originale de considérer l'échelle de vitesse suivante :

$$u_c = u_\tau + \left(\frac{\nu}{\rho}\frac{dP_w}{dx}\right)^{1/3} \tag{2.100}$$

Se fondant sur les travaux de Tennekes et Lumley, et appliquant un principe de superposition de solutions ils arrivèrent à établir la loi suivante :

$$\frac{U}{u_c} = \left[\frac{1}{\kappa}\frac{u_\tau}{u_c}\ln\left(\frac{yu_c}{\nu}\right) + C_1\right] + \left[\alpha\frac{u_p}{u_c}\ln\left(\frac{yu_c}{\nu}\right) + C_2\right] \tag{2.101}$$

avec

$$C_1 = \frac{u_\tau}{u_c}\left[\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{u_\tau}{u_c}\right) + B\right] \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{u_p}{u_c}\left[\alpha\ln\left(\frac{u_p}{u_c}\right) + \beta\right] \tag{2.102}$$

On notera les comportements asymptotiques de C_1 et C_2, discutables d'un point de vue numérique, qui tendent vers 0 respectivement lorsque $u_\tau \to 0$ et $u_p \to 0$. Cette loi a l'avantage d'exister même lorsque l'on se situe au niveau d'une zone de séparation ou de recollement.

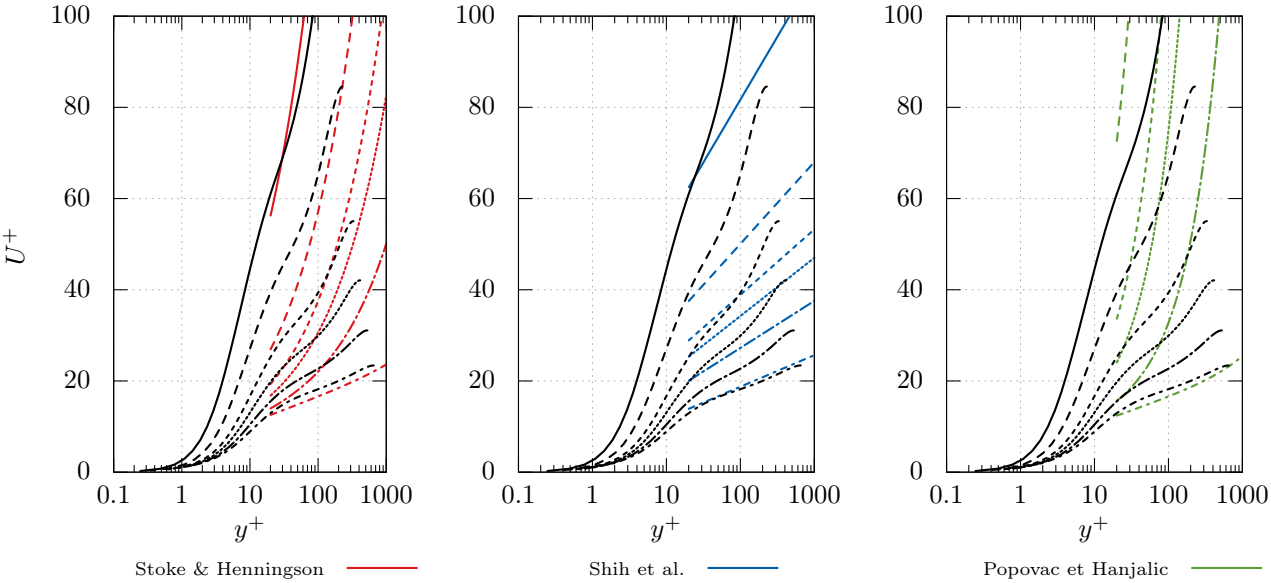


FIGURE 2.5 – Profils de vitesse en amont d'une recirculation (LES d'un diaphragme, Benhamadouche et al. [Benhamadouche 2015]) et lois hors équilibre associées.

Skote et Henningson [Skote 2002] proposèrent :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\left[\ln(y^+) - 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+\lambda y^+}+1}{2}\right) + 2(\sqrt{1+\lambda y^+}-1)\right] + B \tag{2.103}$$

avec

$$\lambda = \left(\frac{u_p}{u_\tau}\right)^3 \tag{2.104}$$

Popovac & Hanjalic proposèrent la formulation suivante :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa\Psi}\ln\left(Ey^+\right) \quad \text{avec} \quad \Psi = 1 - \frac{\lambda y^+}{U^+\kappa} \tag{2.105}$$

Dans leur publication originale, Popovac et Hanjalić autorisent leur loi à contenir non seulement des informations sur le gradient de pression mais aussi des informations sur la convection tangentielle et normale à travers le paramètre λ (voir chapitre 3, section 3.2.1.3). Nous réduirons, par soucis de cohérence et de clarté, cet état de l'art au terme de gradient de pression. Réécrivant alors la relation précédente, il vient :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\left[\ln\left(Ey^+\right) + \lambda y^+\right] \tag{2.106}$$

Les tentatives ont été nombreuses d'inclure des effets de pression au sein de la loi universelle. On remarquera par exemple également les travaux de Cruz et Freire [Cruz 1998][Cruz 2000], dont la loi de paroi a été appliquée avec succès au calcul d'une marche descendante.

Toutes ces tentatives ont été testées avec plus ou moins de succès et/ou de restriction comme en témoigne la figure (2.5), qui compare *a priori* quelques lois extraites de la littérature au profil

de vitesse en amont d'une bulle de recirculation sur un diaphragme [Benhamadouche 2015]. De manière générale, il peut être bon, voire souhaitable, lors de l'utilisation de ces lois de prendre en compte ces effets pour améliorer les prédictions des modèles. Il faut cependant garder en tête que toutes ces lois ont des domaines d'application ou de validité réduits et personne ne peut prétendre répliquer la solution complète des équations de Navier-Stokes par un profil analytique.

2.5.3 Lois « unifiées »

Il peut être très intéressant lors de la construction de lois de parois pour la vitesse d'avoir une loi qui évolue continûment et non pas définie par morceaux sur des intervalles. On trouve dans la littérature de nombreuses tentatives de raccordement continu entre les profils caractéristiques de proche paroi et de zone logarithmique. Les philosophies de ces approches sont fondées sur différents principes. Cette section donne un bref aperçu des possibilités offertes dans la littérature.

- *Loi de Reichardt* [Reichardt 1951] : cette loi est représentée par une unique formule analytique :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa y^+) + 7.8\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11}\exp\left(-\frac{y^+}{3}\right)\right] \tag{2.107}$$

  On voit que lorsque $y^+ \to 0$ cette loi se comporte bien de manière linéaire comme le souligne l'analyse dimensionnelle menée dans la section 2.5.1.2. De la même manière lorsque $y^+ \to \infty$, la loi récupère le comportement de la loi logarithmique. Entre ces deux zones, la loi de Reichardt assure une transition continue.
- *Loi de Van Driest* [Driest 1956] : partant de la constatation que l'hypothèse $l_m^+ = \kappa y^+$ est fausse en proche paroi, Van Driest propose d'amortir la viscosité turbulente en proche paroi en considérant :

$$\nu_t^+ = \left(\kappa y^+\right)^2\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right)\right]\frac{dU^+}{dy^+} \tag{2.108}$$

  De ce fait, sous l'hypothèse de Boussinesq $\overline{uv} = \nu_t \frac{dU}{dy}$ on peut mettre l'équation (2.82) sous la forme :

$$\frac{dU^+}{dy^+} + \left(\kappa y^+\right)^2\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right)\right]\left(\frac{dU^+}{dy^+}\right)^2 = 1 \tag{2.109}$$

  qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{1+\sqrt{1+4\kappa^2 y^{+2}\left[1-\exp\left(-\frac{y^+}{26}\right)\right]}} \tag{2.110}$$

  Finalement, par intégration on trouve le profil suivant pour U^+ :

$$U^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^*}{1+\sqrt{1+4\kappa^2 y^{*2}\left[1-\exp\left(-\frac{y^*}{26}\right)\right]}} \tag{2.111}$$

- *Loi de Spalding* [Spalding 1961] : Spalding part de la constatation que pour de larges valeurs de y^+, le profil de vitesse doit se comporter de manière logarithmique

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B \tag{2.112}$$

soit encore

$$y^+ = \exp(-\kappa B)\exp(-\kappa U^+) \tag{2.113}$$

Le développement limité en 0 de cette fonction est

$$y^+ = \exp(-\kappa B)\left(1 + \kappa U^+ + \frac{(\kappa U^+)^2}{2!} + \frac{(\kappa U^+)^3}{3!} + ...\right) \tag{2.114}$$

or en proche paroi, on souhaite que le profil se comporte linéairement soit

$$y^+ = U^+ \tag{2.115}$$

De manière à s'affranchir du mauvais comportement asymptotique de la relation (2.113), il convient d'en retirer les premiers termes du développement limité. L'expression

$$y^+ = \exp(-\kappa B)\left(\exp(-\kappa U^+) - 1 - \kappa U^+ - \frac{(\kappa U^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa U^+)^3}{3!}\right) \tag{2.116}$$

possède alors les mêmes propriétés que l'équation (2.113) loin de 0, mais se comporte en y^{+4} en 0. Il est ainsi possible de prescrire directement le comportement asymptotique désiré pour l'équation (2.116). Finalement la loi, implicite, de Spalding s'écrit :

$$y^+ = U^+ + \exp(-\kappa B)\left(\exp(-\kappa U^+) - 1 - \kappa U^+ - \frac{(\kappa U^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa U^+)^3}{3!}\right) \tag{2.117}$$

- *Loi de Popovac et Hanjalić* [Popovac 2007] : les auteurs proposent de pondérer les comportements linéaire et logarithmique de la vitesse par une fonction inspirée des travaux de Kader [Kader 1981] et développée à l'origine pour la thermique :

$$U^+ = f_1 y^+ + f_2\left[\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)\right] \tag{2.118}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 &=& \exp(-\Gamma) \\ f_2 &=& \exp(-1/\Gamma) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \Gamma(y^+) = \frac{0.01y^{+4}}{1+5y^+} \tag{2.119}$$

Une illustration du comportement de ces lois est donnée sur la figure (2.6). Il est possible de constater qu'elles donnent toutes de bons résultats en comparaison d'un profil extrait d'une DNS de canal à nombre de Reynolds turbulent $Re_\tau = 5200$. On notera tout de même le mauvais comportement de la loi de Popovac et Hanjalić en zone tampon.

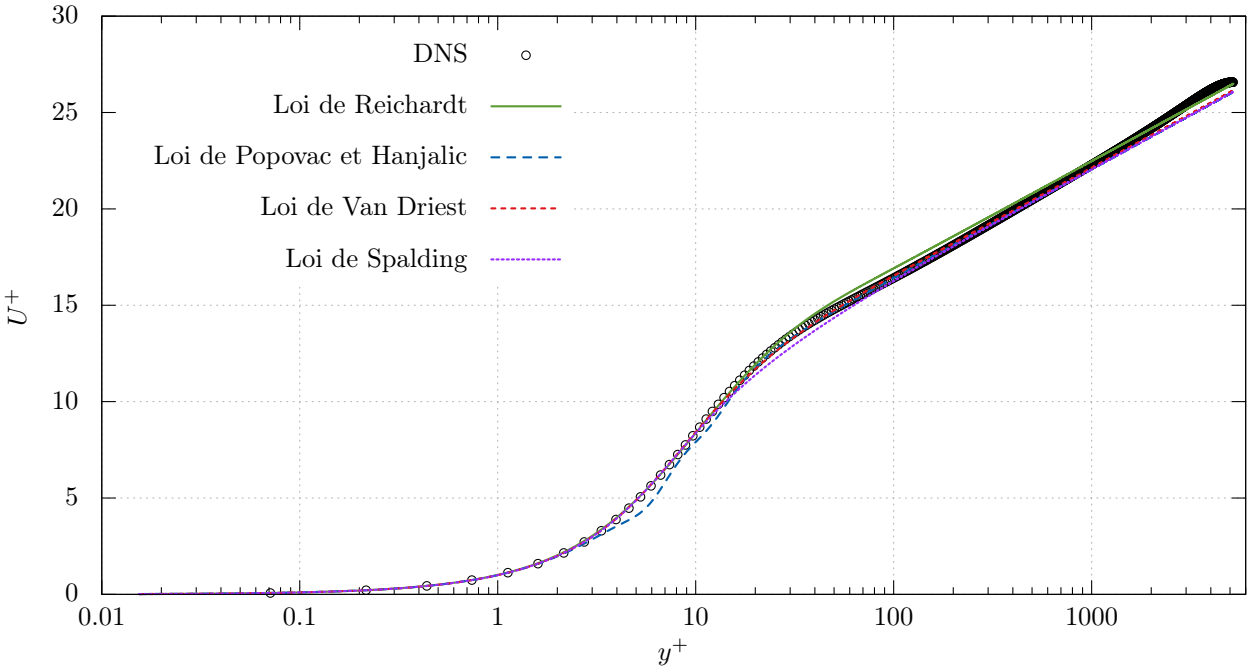


FIGURE 2.6 – Profils analytiques continus de vitesse et comparaison avec un canal à $Re_\tau = 5200$ [Lee 2015]

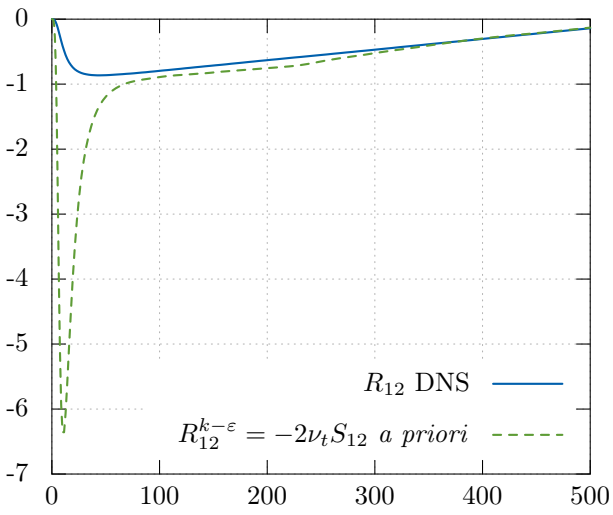
2.5.4 Lois de paroi

2.5.4.1 Modèles Haut Reynolds, Modèles Bas Reynolds

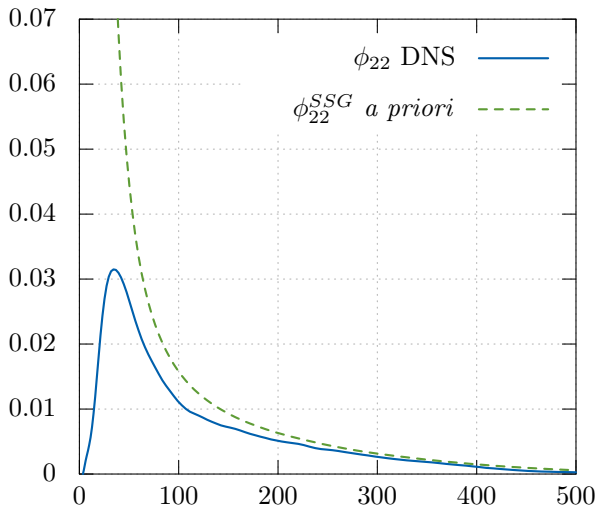
Certains modèles ne sont intrinsèquement pas capables de reproduire les effets des phénomènes de proche paroi. C'est par exemple le cas du modèle k-ε standard. Une évaluation *a priori*, avec des données DNS, de la contrainte R_{12} au travers de la loi de comportement (2.9) et de l'expression de la viscosité turbulente (2.12) montre en effet que celle-ci est très mal prédite par le modèle en proche paroi (figure (2.7a)). De la même manière, le modèle SSG pour le terme de redistribution par la pression, contraint par ses hypothèses de localité et de quasi-homogénéité, est incapable de reproduire l'effet de blocage (figure (2.7b)).

Ces modèles requièrent donc d'avoir les premiers points de calcul de proche paroi suffisamment loin de la paroi de manière à toujours se situer dans leurs domaines de validité respectifs. Typiquement, on considère que les points de paroi ne doivent jamais se situer sous la zone logarithmique. Toutes ces approches sont dites ***Haut-Reynolds***.

A contrario, toute approche permettant une résolution intégrale de la couche limite turbulente, c'est-à-dire capable de reproduire les effets de proche paroi, est appelée ***Bas-Reynolds***. Ces méthodes sont toutefois coûteuses car elles nécessitent une résolution plus fine et donc un nombre plus important de cellules de calcul. C'est historiquement cette raison qui a rendu les méthodes *Haut-Reynolds* si populaires, la majorité des calculateurs de l'époque étant bien moins puissants que ceux d'aujourd'hui.



a) R_{12} prédit par le modèle k-ε



b) Terme de redistribution prédit par le modèle SSG

FIGURE 2.7 – ***a)*** Calcul *a priori* de R_{12} prédit par le modèle k-ε à partir des données DNS à $Re_\tau = 590$ de Moser et al. [Moser 1999]. ***b)*** Calcul *a priori* de ϕ_{22} prédit par le modèle SSG [Speziale 1991] à partir des mêmes données DNS.

2.5.4.2 Nécessité et principe

Notant P le premier point de calcul à la paroi, U_p la vitesse en ce point et y_p la distance à la paroi, une intégration par la méthode des volumes finis sur cette cellule requiert deux conditions à la paroi sur $\mathbf{U}$ lors de la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (2.6) : la valeur de la vitesse tangentielle à la paroi, généralement 0 si le mur est immobile (condition pour le calcul des dérivées d'ordre 1, ici les termes convectifs), ainsi que celle de sa dérivée normale à la paroi (condition pour le calcul des dérivées d'ordre 2, ici les termes de diffusion).

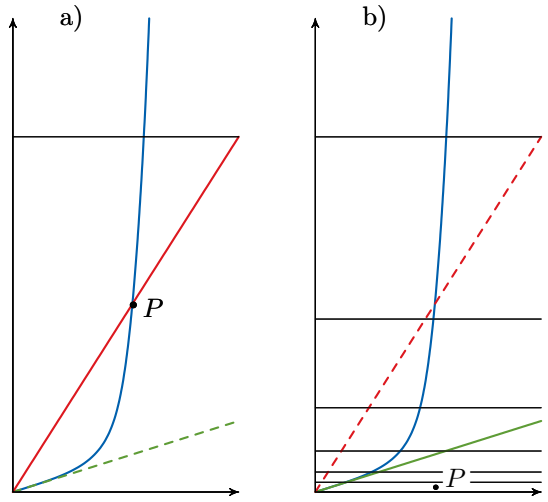


FIGURE 2.8 – Schéma de la situation à la paroi.

Dans le cas de modèles *Bas-Reynolds*, si P est situé suffisament proche de la paroi une évaluation linéaire du gradient à la paroi ne pose pas de problème (figure (2.8b). En revanche si le point P est situé loin de la paroi, l'erreur commise par une évaluation linéaire du gradient est importante :

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_w > \mu \frac{\Delta U}{\Delta y} = \mu \frac{U_p}{y_p}$$

Il est donc nécessaire d'estimer correctement le frottement à la paroi de manière à tenir compte de la couche limite non résolue si la maille de proche paroi n'est pas suffisamment fine comme c'est par exemple le cas dans les

approches *Haut-Reynolds* . Ceci est la plupart du temps réalisé au travers de l'utilisation de la « loi universelle » en proche paroi décrite plus haut. Différentes approches sont décrites dans les sections suivantes.

2.5.4.3 Lois à une échelle de vitesse

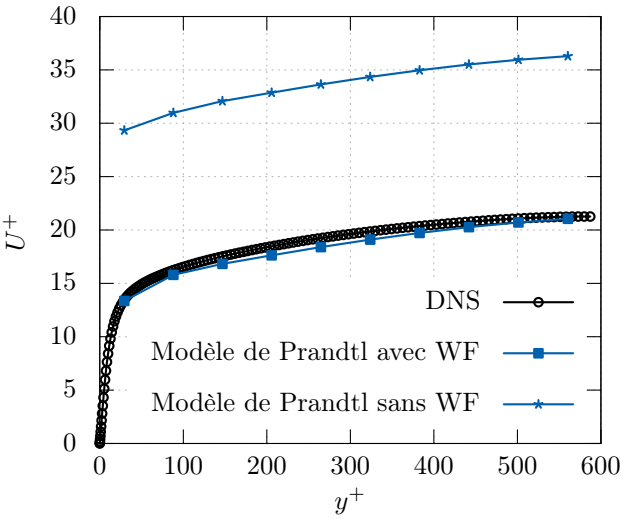
L'équation (2.96) fournit, lorsque le premier point de calcul, noté par l'indice P, est situé dans la zone logarithmique, une relation entre la vitesse au centre de la cellule et le frottement à la paroi :

$$\frac{U_p}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y_p u_\tau}{\nu}\right) + B \tag{2.120}$$

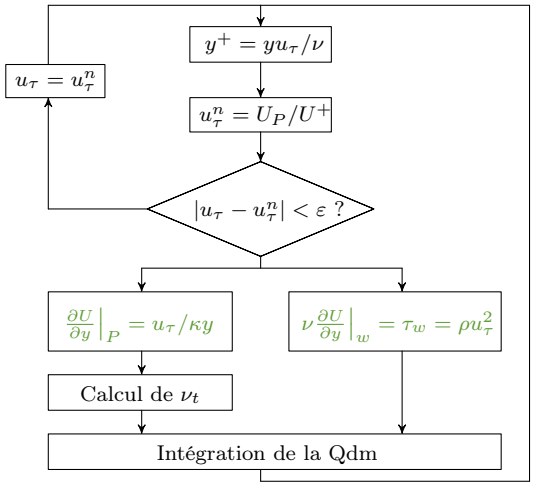
Cette relation est néanmoins implicite et il est nécessaire de résoudre itérativement à la manière de l'algorithme décrit dans la figure (2.9b). La relation précédente permet, une fois la vitesse de frottement connue, de calculer le gradient de vitesse au point P ainsi que de reconstruire le frottement à la paroi :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_P = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad \text{et} \quad \nu \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_w = \rho u_\tau^2 \tag{2.121}$$

Bradshaw et al. [Bradshaw 1967] furent parmi les premiers à utiliser cette intéressante propriété de manière à ne pas résoudre la sous-couche visqueuse. En lieu et place de la condition naturelle $U = 0$, gradient cellule et frottement à la paroi sont évalués au travers des relations (2.121). Ces travaux pionniers furent par la suite suivis de nombreux autres, et cette stratégie est encore aujourd'hui largement utilisée dans nombre de codes industriels et commerciaux.



a) Profil de vitesse dans un canal pleinement developpé à $Re_\tau = 590$



b) Algorithme

FIGURE 2.9 – Illustration de l'utilisation de lois de paroi pour l'utilisation d'un modèle de longueur de mélange

La figure (2.9a) montre les profils de vitesse obtenus par le modèle algébrique *Haut-Reynolds* de Prandtl avec d'une part l'utilisation des conditions aux limites naturelles et d'autre part

l'utilisation des relations (2.121). On notera l'erreur considérable commise sur la vitesse débitante si on n'utilise pas de lois de paroi (noté ici WF, pour *Wall Functions*).

2.5.4.4 Grandeurs turbulentes

L'avènement des modèles à transport de quantités turbulentes rendit également nécessaire de préciser les conditions aux limites pour les grandeurs turbulentes du modèle utilisé (k et ε par exemple). Les conditions aux limites en configuration *Bas-Reynolds* se déduisent aisément des conditions aux limites naturelles sur la vitesse et des équations régissant ces grandeurs avec des analyses asymptotiques. Néanmoins, en configuration *Haut-Reynolds*, un traitement similaire à celui de la vitesse est nécessaire. Lorsque l'écoulement de proche paroi est pleinement turbulent, on peut supposer, en zone logarithmique, la turbulence en équilibre local, soit $P = \varepsilon$. Ainsi on peut écrire :

$$P \equiv -\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y} = \varepsilon, \tag{2.122}$$

ce qui peut encore s'écrire, sachant que $dU/dy = u_\tau/\kappa y$,

$$\varepsilon_P = u_\tau^2 \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \tag{2.123}$$

De manière à déterminer k, partons de l'hypothèse qu'en zone pleinement turbulente $\overline{uv} \equiv u_\tau^2$ (contribution visqueuse des contraintes négligeable devant la turbulence). On note par ailleurs expérimentalement que le rapport $\overline{uv}/k$ reste constant :

$$\frac{\overline{uv}}{k} \approx 3.33 = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \tag{2.124}$$

On arrive facilement à la relation suivante pour l'énergie cinétique turbulente :

$$k_P = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \tag{2.125}$$

On dispose ainsi d'une condition à la limite explicite au premier point de calcul pour k et ε (équations (2.125) et (2.123) respectivement).

2.5.4.5 Redimensionalisation

En pratique, la méthode précédente est très peu utilisée car très limitée en terme d'usage. En effet, lors d'écoulements avec recirculation, l'énergie cinétique décroît vers 0, car par définition, en ces points, u_τ est égal à 0. Ce comportement pour le moins singulier peut avoir des répercussions parfois dramatiques sur les résultats. Un tel modèle prédit par exemple un transfert de chaleur *quasi* nul au point d'impact d'un jet sur une plaque plane ! Cet écueil fut partiellement levé par Spalding [Spalding 1967] puis Gosman et al. [Gosman 1967] en remplaçant la vitesse de frottement u_τ par une échelle de vitesse basée sur l'énergie cinétique turbulente. L'équation (2.123) suggère ainsi qu'il est légitime de considérer une nouvelle échelle définie par

$$u_k = C_\mu^{1/4} k^{1/2} \tag{2.126}$$

2.5.4.6 Lois standards et améliorations

Methodologie de Launder-Spalding

La première version la plus aboutie de lois de paroi prenant en compte les développements précédents a été donnée par Launder et Spalding [Launder 1974]. La méthode impliquait de suivre les étapes suivantes :

— Résolution de la quantité de mouvement avec les conditions aux limites appropriées venant des lois de paroi,
— Résolution de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente avec un terme de production et de dissipation modifié,
— Prescription de la dissipation ε en utilisant l'énergie cinétique prédite.

La même méthodologie que décrite précédemment s'applique à la résolution de l'équation de transport de la quantité de mouvement. La seule différence est que la vitesse de frottement u_τ n'est plus issue de la résolution itérative de l'équation (2.120) mais est calculée à l'aide de l'échelle de vitesse u_k par la relation :

$$\begin{aligned} y_k^+ &= \frac{y u_k}{\nu} \\ \frac{U}{u_\tau} &= \frac{1}{\kappa}\ln\left(y_k^+\right) + B \\ \tau_w &= \rho u_\tau u_k \end{aligned} \tag{2.127}$$

Dans l'équation de k, la valeur intégrale (1D) de la production d'énergie cinétique turbulente est définie par :

$$\int \rho P dy \equiv \int -\overline{uv}\frac{dU}{dy}dy \tag{2.128}$$

Sous l'hypothèse d'une contrainte turbulente constante dans toute la zone de paroi (ce qui est en tout rigueur faux, on pourra s'en convaincre avec la figure (2.1)), on peut supposer $-\overline{uv} = \tau_w$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int \rho P dy &= \int \tau_w \frac{dU}{dy}dy = \tau_w \Delta U \\ &= \rho u_\tau u_k \Delta U = \frac{\rho C_\mu^{1/4}\sqrt{k}U_P}{\ln(E y_k^+)}\Delta U \end{aligned} \tag{2.129}$$

Pour fixer la valeur du taux de dissipation moyen, Launder et Spalding préconisent :

$$\int \rho\varepsilon dy = \frac{u_k^3}{\kappa}\ln\left(E y_k^+\right) = \frac{C_\mu^{3/4}k_P^{3/2}}{\kappa}\ln\left(E y_k^+\right) \tag{2.130}$$

A noter que dans [Launder 1974], C_μ plutôt que $C_\mu^{3/4}$ est utilisé. De nombreux auteurs attribuent cependant cette erreur à une erreur typographique. Cette formulation trouve certainement son origine dans le calcul entre la paroi et la face de la première cellule adjacente, situé disons à Δy, de l'intégrale :

$$\int_0^{\Delta y} \rho\varepsilon dy \tag{2.131}$$

Cette dernière intégration mène toutefois à une singularité mathématique en proche paroi si l'on considère $\varepsilon = P = u_\tau^3/\kappa y$ (la fonction $y \mapsto 1/y$ n'est pas intégrable en 0) et nécessite de reconsidérer les hypothèses. En effet, on considère dans cette approche que la loi de paroi logarithmique sur U est valable jusqu'à la paroi ce qui est faux. En faisant alors l'hypothèse que :

$$\int_0^{\Delta y} \frac{dU}{dy} dy = \Delta y \frac{dU}{dy}, \tag{2.132}$$

et que

$$\frac{dU}{dy} \approx \frac{\Delta U}{\Delta y} = \frac{u\tau}{\Delta y} \ln\left(Ey^+\right), \tag{2.133}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta y} \rho\varepsilon dy &= \int_0^{\Delta y} P dy = u_\tau^2 \int_0^{\Delta y} \frac{dU}{dy} dy \\ &= u_\tau^2 \Delta y \frac{dU}{dy} = u_\tau^2 \Delta y \frac{u_\tau}{\Delta y} \ln\left(Ey^+\right) = \frac{u_\tau^3}{\kappa} \ln\left(Ey_k^+\right) \end{aligned} \tag{2.134}$$

On trouve bien la relation établie par Launder et Spalding. Disposant des termes de production et de dissipation moyens il est ainsi possible d'intégrer numériquement l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente. Lors de la résolution de l'équation de transport de la dissipation, cette dernière n'est pas résolue en proche paroi, mais prescrite au premier point de calcul à sa valeur locale :

$$\varepsilon_p = \frac{u_k^3}{\kappa y_p} \tag{2.135}$$

Modèle à deux couches et amélioration de Chieng-Launder

Il est évident que les hypothèses émises par Launder et Spalding sont sujettes à améliorations, notamment pour la prise en compte de la sous couche visqueuse. Il est par exemple supposé que la contrainte turbulente $\tau_t = \overline{uv}$ est constante et égale à τ_w sur toute la hauteur de la première cellule, ce qui est uniquement vrai dans la zone logarithmique. De manière à prendre en compte les effets visqueux, Chieng et Launder [Chieng 1980] se basèrent sur la coexistence de deux zones distinctes au sein de chaque cellule de proche paroi : une zone pleinement turbulente et une zone visqueuse. L'épaisseur de la sous couche visqueuse y_v est établie de telle sorte que le nombre de Reynolds défini par

$$Re_v = \frac{y_v \sqrt{k_v}}{\nu}, \tag{2.136}$$

soit constant et égal à 20. Par ailleurs l'énergie cinétique turbulente est supposée suivre au sein de chaque cellule de proche paroi le comportement suivant (on pourra se référer à la figure (2.10) pour la localisation schématique de y_n, y_p et y_v) :

$$\begin{cases} k = k_v \left(\dfrac{y}{y_v}\right)^2 & \text{si} \quad y < y_v \\ k = by + a & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.137}$$

avec

$$a = k_p - \frac{k_n - k_p}{y_n - y_p} y_p \quad \text{et} \quad b = \frac{k_n - k_p}{y_n - y_p} \tag{2.138}$$

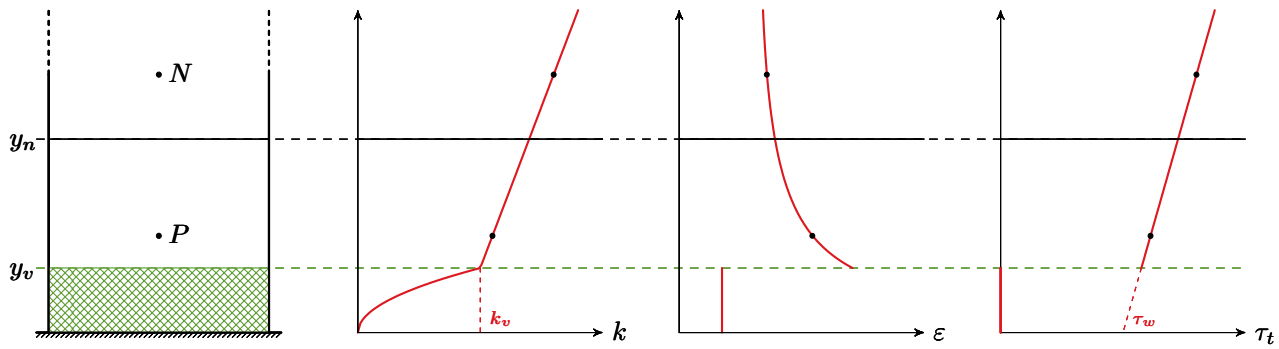


FIGURE 2.10
Variation supposé des variables dans la première cellule de paroi. Modèle de Chieng-Launder [Chieng 1980].

On notera le comportement quadratique bien connu adopté à la paroi. Ainsi, en combinant l'équation précédente en $y = y_v$ avec l'équation (2.136), y_v est déduit de la relation non-linéaire :

$$\left[k_p - (y_p - y_v)\frac{k_n - k_p}{y_n - y_p}\right]^{1/2} \frac{y_v}{\nu} = 20 \tag{2.139}$$

Une fois y_v puis k_v déterminé, il est possible de déterminer le frottement grâce à la loi logarithmique :

$$\begin{cases} u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_v} \\ y_k^+ = \dfrac{y u_k}{\nu} \\ \dfrac{U_p}{u_\tau} = \dfrac{1}{\kappa}\ln(E y_k^+) \\ \tau_w = \rho u_\tau u_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tau_w = \frac{\rho C_\mu^{1/4}\sqrt{k_v} U_p \kappa}{\ln(E y_k^+)} \tag{2.140}$$

La contrainte turbulente $\tau_t = \overline{uv}$ varie linéairement en dehors de la sous couche visqueuse :

$$\begin{cases} \tau_t = 0 & \text{si} \quad y < y_v \\ \tau_t = \tau_w + (\tau_n - \tau_w)\dfrac{y}{y_n} & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.141}$$

Enfin, le taux de dissipation est déterminé par les équations :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{2\nu k_v}{y_v^2} & \text{si} \quad y < y_v \\ \varepsilon = \dfrac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.142}$$

Comme pour l'approche de Launder-Spalding, l'utilisation de quantités intégrées sur la première cellule dans les termes sources des équations est avantageuse lors de l'utilisation de méthodes type volumes finis. La production intégrale sur la première cellule peut alors s'écrire, en

suivant le même raisonnement :

$$\begin{aligned}\overline{P} \equiv \frac{1}{y_n}\int \rho P dy &= \frac{1}{y_n}\int_0^{y_v} \tau_t \frac{dU}{dy} dy + \frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} \left[\tau_w + (\tau_n - \tau_w)\frac{y}{y_n}\right]\frac{dU}{dy} dy \\ &= \underbrace{\frac{1}{y_n}\int_0^{y_v} \tau_t \frac{dU}{dy} dy}_{I_1=0} + \underbrace{\frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} \tau_w \frac{dU}{dy} dy}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} \left[(\tau_n - \tau_w)\frac{y}{y_n}\right]\frac{dU}{dy} dy}_{I_3} \end{aligned} \quad (2.143)$$

La contribution de la sous couche visqueuse (I_1) est identiquement nulle, la production étant créée uniquement par la turbulence et le gradient de vitesse moyenne. On sépare alors l'intégrale restante en deux parties (I_2 et I_3) :

$$I_2 \equiv \int_{y_v}^{y_n} \tau_w \frac{dU}{dy} dy = \tau_w \left(U_n - U_v\right) \quad (2.144)$$

Dans la seconde moitié, on réécrit le gradient de vitesse avec la loi logarithmique :

$$\begin{aligned} I_3 \equiv \int_{y_v}^{y_n} \left[(\tau_n - \tau_w)\frac{y}{y_n}\right]\frac{dU}{dy} dy &= \int_{y_v}^{y_n} \left[(\tau_n - \tau_w)\frac{y}{y_n}\right]\frac{u_\tau}{\kappa y} dy \\ &= \frac{u_\tau \left(\tau_n - \tau_w\right)}{\kappa}\left(1 - \frac{y_v}{y_n}\right) \end{aligned} \quad (2.145)$$

De la même manière l'intégration du taux de dissipation ε le long de la première cellule donne :

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{y_n}\int \varepsilon dy = \left[2\frac{k_v^{3/2}}{Re_v} + \frac{1}{c_l}\left(\frac{2}{3}\left(k_n^{3/2} - k_v^{3/2}\right) + 2a\left(k_n^{1/2} - k_v^{1/2}\right) + \lambda_\varepsilon\right)\right] \quad (2.146)$$

avec $c_l = 2.55$. La constante λ_ε dépend de l'énergie cinétique turbulente et de la variable a via les relations :

$$\begin{cases} \lambda_\varepsilon = a^{3/2}\log\left[\dfrac{\left(\sqrt{k_n} - \sqrt{a}\right)/\left(\sqrt{k_n} + \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{k_v} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{k_v} + \sqrt{a}\right)}\right] & \text{si} \quad a > 0 \\ \lambda_\varepsilon = 2(-a)^{3/2}\left[\text{Atan}\left(\dfrac{\sqrt{k_n}}{\sqrt{-a}}\right) - \text{Atan}\left(\dfrac{\sqrt{k_v}}{\sqrt{-a}}\right)\right] & \text{si} \quad a < 0 \end{cases} \quad (2.147)$$

L'utilisation de ce modèle se révèle plus efficace dans la prédiction des écoulements avec séparation, impact ou recollement. Par ailleurs, les tests menés par Chieng et Launder suggèrent une dépendance moindre à la taille de maille en proche paroi sur la prédiction de l'écoulement. Malgré ces avancées, les auteurs révèlent une sous estimation de l'ordre de 20% du nombre de Nusselt Nu sur les écoulements séparés.

Modification du modèle de Chieng-Launder

Pour des écoulements à l'équilibre, les calculs DNS montrent que $Re_v = 20$ correspond environ à $y^+ = 11.5$, ce qui correspond au croisement des lois logarithmique et linéaire. C'est donc une valeur de transition adaptée. Mais l'hypothèse $Re_v = 20$ n'est pas valable pour tous les types d'écoulements. Johnson et Launder [Johnson 1982] ont montré que la prédiction des transferts thermiques pouvait être grandement améliorée en laissant l'épaisseur de la sous couche visqueuse varier suivant la formule :

$$Re_v = \frac{Re_{v0}}{1 + c_k \gamma_k} \quad \text{avec} \quad \gamma_k = \frac{k_v - k_w}{k_v} \tag{2.148}$$

avec $c_k = 3.1$ et $Re_{v0} = 20$. k_w est l'extrapolation linéaire à la paroi du comportement linéaire en zone turbulente de k (illustré sur la figure (2.11)). Les premiers résultats des auteurs sur un écoulement en présence de séparation montrent un accord raisonnable avec l'expérience et une amélioration nette sur le modèle de Chieng-Launder.

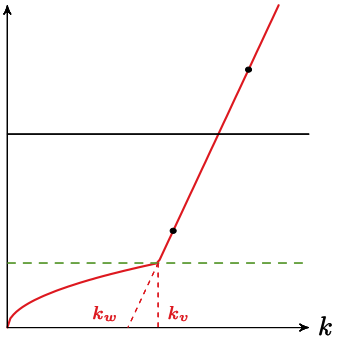


FIGURE 2.11
Schéma de la situation à la paroi.

Ciofalo et Collins [Ciofallo 1989] confirmèrent plus tard l'importance vitale de la variabilité d'épaisseur de la sous couche visqueuse pour les lois de parois lors d'écoulement en impact ou avec séparation. Ils relièrent l'épaisseur de cette sous-couche visqueuse non pas directement à k comme le préconisaient Johnson et Launder mais plutôt à l'intensité turbulente locale $k^{1/2}/U$ au point P. D'un point de vue numérique, leur approche est sans doute plus stable.

Amano [Amano 1984] affirma plus tard que la prescription, sous hypothèse d'équilibre local, de la valeur du taux de dissipation à $\varepsilon = k_p^{3/2}/c_l y_p$ dans la première cellule de proche paroi est erronée. Il préconise un traitement de l'équation de transport du taux de dissipation similaire à celui proposé par Chieng et Launder pour la production P. La production locale de k est écrite

$$P = \tau_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right). \tag{2.149}$$

On notera l'introduction par Amano du terme $\partial V/\partial x$, considéré comme constant et égal à la valeur au point P. Il est ainsi possible de calculer :

$$\overline{P_\varepsilon} \equiv \overline{\left(C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P \right)} = \frac{1}{y_n} \int_{y_v}^{y_n} C_{\varepsilon 1} \frac{\sqrt{by + a}}{c_l y} \left[\tau_w + (\tau_n - \tau_w) \frac{y}{y_n} \right] \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) dy \tag{2.150}$$

Le terme source de dissipation du taux de dissipation est plus délicat à calculer. N'étant pas nul comme P_ε entre 0 et y_v, il s'écrit :

$$\overline{\varepsilon_\varepsilon} \equiv \overline{C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}} = \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} dy \tag{2.151}$$

Avec le profil employé dans l'approche de Chieng-Launder, le terme ε^2/k n'est pas intégrable entre 0 et y_v. Amano propose alors d'estimer sa valeur en supposant :

$$\frac{1}{y_v} \int_0^{y_v} k dy = \frac{k_v}{3} \tag{2.152}$$

De cette manière il est possible d'intégrer la contribution de la sous-couche visqueuse de la façon suivante :

$$\frac{1}{y_v} \int_0^{y_v} C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} dy = C_{\varepsilon 2} \frac{12}{y_v y_n} \left(\frac{k_v}{Re_v} \right)^2 \tag{2.153}$$

Soit finalement,

$$\overline{\varepsilon_\varepsilon} \equiv \overline{\left(C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}\right)} = C_{\varepsilon 2}\frac{12}{y_v y_n}\left(\frac{k_v}{Re_v}\right) + \frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} C_{\varepsilon 2}\frac{by+a}{c_l y}dy \tag{2.154}$$

Extension à 3 couches du modèle de Chieng-Launder

Amano et al. [Amano 1984] proposa d'étendre le modèle de Chieng Launder en réduisant la taille de la sous couche-visqueuse et en intégrant une zone tampon comme décrit sur la figure (2.12).

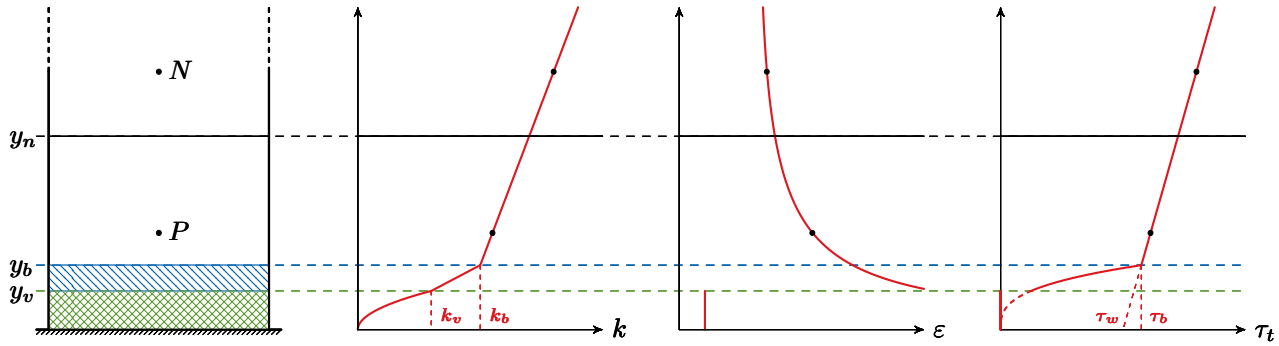


FIGURE 2.12
Schéma de la situation à la paroi. Modèle d'Amano.

Les profils analytiques au travers de ces 3 couches sont alors donnés par les relations :

$$\begin{cases} \tau_t = 0 & \text{si} \quad y < y_v \\ \tau_t = \tau_b\left(\dfrac{y}{y_b}\right)^3 & \text{si} \quad y_b > y > y_v \\ \tau_t = \tau_w + (\tau_n - \tau_w)\dfrac{y}{y_n} & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.155}$$

Le taux de dissipation est donné par les équations :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{2\nu k_v}{y_v^2} & \text{si} \quad y < y_v \\ \varepsilon = \dfrac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.156}$$

Enfin, k décrit le profil suivant :

$$\begin{cases} k = k_v\left(\dfrac{y}{y_v}\right)^2 & \text{si} \quad y < y_v \\ k = k_b\dfrac{y}{y_b} & \text{si} \quad y_b > y > y_v \\ k = by + a & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.157}$$

Les termes sources sont alors calculés par intégration comme dans les approches précédentes. Pour les calculs détaillés, le lecteur pourra se référer à [Amano 1984]. Malgré une légère amélioration par rapport au modèle à deux couches, Amano aboutit à la conclusion que l'ajout d'une couche supplémentaire n'avait pas un bénéfice suffisant, au regard de l'effort d'intégration numérique nécessaire.

Version dite « standard »

Bien qu'évoluées, les lois de parois décrites dans la section précédente restent très peu utilisées. Une version de ces lois à deux couches dite « standard » [Iacovides 2012] ou « conventionelle » [Craft 2002] par certains auteurs est souvent utilisée dans la littérature mais ne fait, à la connaissance de l'auteur, l'objet d'aucune publication de référence. L'épaisseur de la sous-couche visqueuse y_v est établie de telle sorte que le nombre de Reynolds défini par

$$Re_v = \frac{y_v \sqrt{k_p}}{\nu} \tag{2.158}$$

soit constant et égal à 20, soit $y_v = 20\nu/\sqrt{k_p}$. On notera que le nombre de Reynolds Re_v n'est non plus estimé à l'aide l'énergie cinétique turbulente en y_v mais en y_p. Au sein de chaque zone, on suppose une variation prédéfinie des variables k, ε et τ_t.

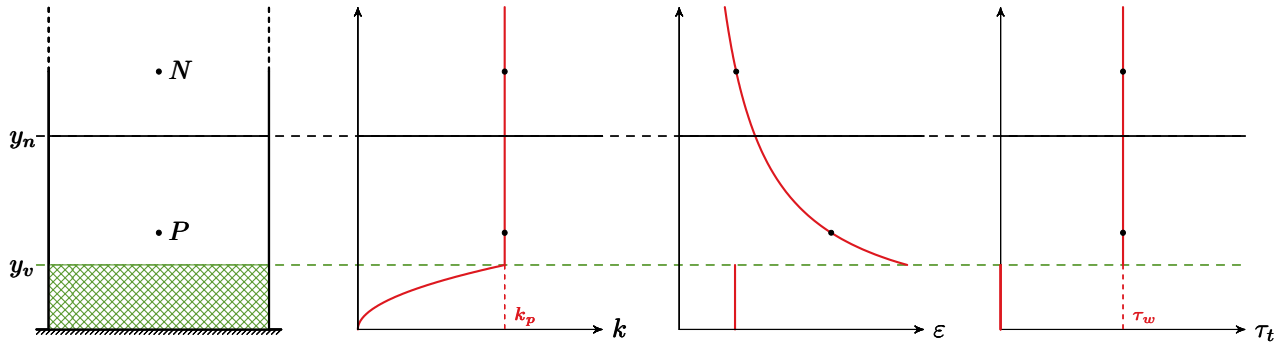


FIGURE 2.13
Variation supposée des variables dans la première cellule de paroi. Modèle « standard ».

La contrainte turbulente est supposée nulle dans la sous couche visqueuse, et constante en dehors :

$$\begin{cases} \tau_t = 0 & \text{si} \quad y < y_v \\ \tau_t = \tau_w & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.159}$$

Le taux de dissipation est donné par les équations :

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{2\nu k_p}{y_v^2} & \text{si} \quad y < y_v \\ \varepsilon = \dfrac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y} & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.160}$$

Enfin, k reste constant et égal à k_p au dessus de y_v mais observe un comportement quadratique en dessous :

$$\begin{cases} k = k_p \left(\dfrac{y}{y_p}\right)^2 & \text{si} \quad y < y_v \\ k = k_p & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.161}$$

La prise de k et τ_t constants au dessus de la sous-couche visqueuse n'a pas de justification à proprement parler. On observe cependant qu'elle rend les calculs non dépendants de la valeur des variables en y_n (contrairement, par exemple, aux expressions (2.143) et (2.146) dans l'approche de Chieng-Launder). C'est sans doute cet aspect, ayant des impacts sur la stabilité numérique sur maillage quelconque, qui a influencé ce choix. Suivant la méthodologie de Launder-Spalding, il est ainsi possible de calculer :

$$\overline{P} \equiv \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \tau_t \frac{dU}{dy} dy = \underbrace{\frac{1}{y_n}\int_0^{y_v} \tau_t \frac{dU}{dy} dy}_{=0} + \frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} \tau_w \frac{u_\tau}{\kappa y} dy \tag{2.162}$$

$$= \frac{u_\tau \tau_w}{\kappa y_n} \ln\left(\frac{y_n}{y_v}\right) \tag{2.163}$$

ainsi que

$$\overline{\varepsilon} \equiv \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \varepsilon dy = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_v} \frac{2\nu k_p}{y_v^2} dy + \frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y} dy \tag{2.164}$$

$$= \frac{k_p^{3/2}}{y_n}\left[\frac{2}{Re_v} + \frac{1}{c_l}\ln\left(\frac{y_n}{y_v}\right)\right] \tag{2.165}$$

où, pour mémoire, c_l est la constante définie par $c_l = \kappa / C_\mu^{3/4} \approx 2.55$.

Lois de paroi UMIST-A

Les lois de paroi UMIST-A développées par Craft et al. [Craft 2002] bien plus tard sont une tentative de généralisation des lois décrites précédemment. Arguant que toutes les lois de paroi existantes se basent sur la loi logarithmique, et que la plupart des situations complexes font intervenir des phénomènes bien plus complexes (séparation, recollement, flottabilité,...) ils font l'hypothèse de variation suivante sur la viscosité turbulente ν_t :

$$\begin{cases} \nu_t = 0 & \text{si} \quad y < y_v \\ \nu_t = \kappa(y - y_v) u_k & \text{si} \quad y > y_v \end{cases} \tag{2.166}$$

avec $u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}$.

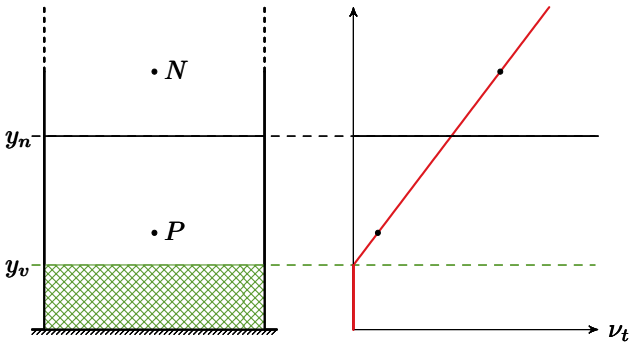


FIGURE 2.14
Variation supposée de la viscosité turbulente au sein de la première cellule. Modèle « UMIST-A ».

Ainsi, une loi de paroi sur la vitesse est obtenue en intégrant l'équation suivante, forme simplifiée de l'équation de quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_t)\frac{\partial U}{\partial y}\right] = C \tag{2.167}$$

avec

$$C = U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{2.168}$$

considéré comme constant sur la cellule et égal à la valeur calculée au point P. On entrevoit immédiatement la force de cette approche. Lorsque le terme C est nul comme dans les approches dérivées du modèle de Chieng-Launder, on retombe sur la loi logarithmique en zone pleinement turbulente, alors que lorsque ces termes ne sont pas nuls, l'intégration donne une loi analytique plus compliquée :

- Si $y^* < y_v^*$

$$\nu U = Ay^* + \frac{C}{2}y^{*2} \tag{2.169}$$

- Si $y^* > y_v^*$

$$\nu U = \frac{C}{\alpha}y^* - \frac{C\lambda}{\alpha^2}\ln(Y^*) + \frac{A}{\alpha}\ln(Y^*) + Ay_v^* + Cy_v^*\left(\frac{y_v^*}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{2.170}$$

avec $y^* = y\sqrt{k_p}/\nu$, $\alpha = c_l c_\mu$ et les relations suivantes :

$$A = \frac{U_n - C\left(\frac{1}{\alpha}(y_n^* - y_v^*) + \frac{y_v^{*2}}{2} - \frac{1}{\alpha}\lambda\ln(Y_n^*)\right)}{y_v^* + \frac{1}{\alpha}\ln(Y_n^*)}$$
$$\lambda = 1 - \alpha y_v^*$$
$$Y^* = 1 + \alpha(y^* - y_v^*)$$

Cette loi, en la différenciant en $y = 0$, permet ainsi de prescrire le frottement τ_w. De même que dans les approches précédentes, l'équation de transport de k est résolue au sein de la première

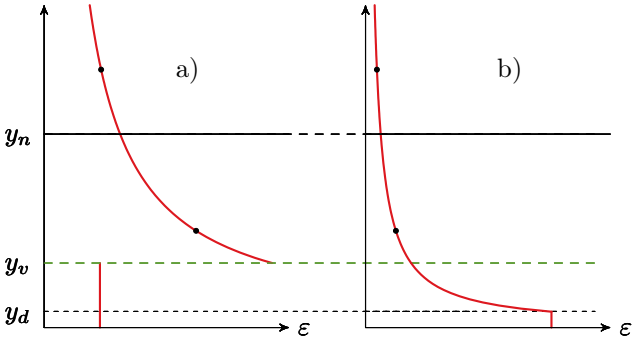


FIGURE 2.15
Variation supposée de ε dans la première cellule de paroi. Modèle « standard » et modèle UMIST-A.

cellule avec la prescription des termes sources moyen de production ($\overline{P}$) et de dissipation ($\overline{\varepsilon}$). La modélisation du taux de dissipation est cependant modifiée. En effet, les observations faites à partir de données DNS et expérimentales montrent clairement que le maximum de dissipation est localisé à la paroi. Or, dans tous les modèles précédents, il n'y pas de continuité dans la modélisation de la dissipation et la valeur de proche paroi est inférieure à celle au centre de la cellule P (figure (2.15a)). Ainsi, afin d'assurer la continuité, on définit le point y_d tel que :

$$\frac{k_p^{3/2}}{c_l y_d} = \frac{2\nu k_p}{y_d^2} \tag{2.171}$$

Cette dernière équation amène à définir y_d de telle sorte que :

$$Re_d \equiv \frac{y_d\sqrt{k_p}}{\nu} = 2c_l = 5.1 \tag{2.172}$$

La valeur obtenue, illustrée sur la figure (2.15b), est 4 fois inférieure à y_v. Il est ainsi possible de définir la dissipation moyenne :

$$\overline{\varepsilon} \equiv \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \varepsilon dy = \frac{k_p^{3/2}}{y_n}\left[\frac{2}{Re_d} + \frac{1}{c_l}\ln\left(\frac{y_n}{y_d}\right)\right] \tag{2.173}$$

De la même manière, le terme de production moyen est calculé par :

$$\overline{P} \equiv \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \nu_t\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 dy = \underbrace{\frac{1}{y_n}\int_0^{y_v} \nu_t\left(\frac{dU}{dy}\right)^2}_{=0} + \frac{1}{y_n}\int_{y_v}^{y_n} \nu_t\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 dy \tag{2.174}$$

où dU/dy est la loi analytique issue de l'intégration de l'équation (2.167). Etant donné la complexité analytique que peut atteindre une telle expression, les auteurs recommandent pour ce terme une intégration numérique. Craft et al. rapportent avec cette approche couplée à un modèle k-ε des résultats nettement supérieurs aux lois de paroi dites « standards » et proches des calculs *Bas-Reynolds* sur des cas complexes incluant de la flottabilité.

Extensions des lois UMIST-A

Les hypothèses intervenant dans le modèle UMIST-A sont moins restrictives que dans la plupart des modèles de paroi conventionnels. Il est donc possible d'y introduire des termes permettant d'étendre davantage son domaine de validité. Ces extensions incluent :

— Prise en compte des effets de relaminarisation par modification du taux de dissipation :

$$\overline{\varepsilon_{new}} = F_\varepsilon \overline{\varepsilon} \tag{2.175}$$

où F_ε est une fonction analytique dépendant de la contrainte turbulente locale. On pourra consulter [Craft 2002] pour plus de détails sur cet aspect,

— Variation de viscosité avec la température,

— Effets de flottabilité,

— Extension de la démarche à la thermique et introduction de modifications pour les nombres de Prandtl élevés,

— Extensions aux surfaces rugueuses.

Ces modifications rendent les équations analytiques bien plus complexes, mais semblent être d'un effet non négligeable sur les résultats obtenus par Craft et al. Plus tard, Suga et al. [Suga 2013] proposèrent plusieurs modifications à ces lois de parois notamment par l'introduction de fonctions d'amortissement dans le calcul du profil analytique de ν_t. Ces améliorations semblent fournir des résultats légèrement meilleurs sur un cas de jet impactant, cas sur lequel le modèle a été calibré.

2.5.4.7 Et pour les modèles du second ordre ?

Alors que la littérature est abondante et assez précise sur le traitement de la paroi en présence de modèles à viscosité turbulente, il est extrêmement difficile de trouver des publications de référence sur le traitement des tensions de Reynolds lors de l'utilisation de modèles du second ordre.

Lois standards

La stratégie la plus simple et la plus courante (on pourra en trouver une description dans [Iacovides 2012]) consiste à résoudre les équations de transports des tensions de Reynolds au sein de chaque cellule de proche paroi, en imposant une diffusion nulle à la paroi :

$$\left.\frac{\partial R_{ij}}{\partial y}\right|_w = 0 \tag{2.176}$$

Les termes de production et de dissipation sont bien souvent issus de la lignée des modèles k-ε avec par exemple :

$$\overline{P_{11}} = 2\overline{P_k}, \quad \overline{P_{22}} = \overline{P_{33}} = 0 \tag{2.177}$$

et

$$\overline{\varepsilon_{11}} = \overline{\varepsilon_{22}} = \overline{\varepsilon_{33}} = \frac{2}{3}\overline{\varepsilon} \tag{2.178}$$

où $\overline{P_k}$ et $\overline{\varepsilon}$, peuvent être estimées avec un modèle de loi de paroi issu des développements de la section précédente. Un choix relativement similaire est adopté au sein du code de calcul

Code_Saturne [Archambeau 2004]. On notera cependant que le choix est fait pour les termes $\overline{P_k}$ et $\overline{\varepsilon}$ de ne pas utiliser les valeurs moyennes mais les grandeurs locales au point de paroi considéré. Iacovides et al. [Iacovides 2013] soulignèrent par ailleurs le caractère limité de ce dernier type d'approche dans le cas de l'écoulement au travers de tubes alignés.

Lois avec prescription de l'anisotropie

Il existe cependant une stratégie complètement différente pour la détermination de lois de paroi pour les modèles du second ordre. Les différentes données DNS de canal disponibles montrent en effet que les composantes du tenseur d'anisotropie définies par la relation :

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{2k} - \frac{1}{3}, \tag{2.179}$$

restent relativement constantes au sein de la zone logarithmique. Certaines stratégies tirent ainsi parti de cette propriété pour directement fixer une valeur d'anisotropie tabulée à l'avance. Pope [Pope 2000] suggère par exemple les valeurs suivantes pour l'anisotropie en zone logarithmique pour une couche limite pleinement développée :

b_{11}	b_{22}	b_{33}	b_{12}
0.517	-0.313	-0.204	-0.058

Une équation supplémentaire sur l'énergie cinétique turbulente k est ensuite résolue de manière à pouvoir calculer les tensions de Reynolds issues de ces valeurs d'anisotropie :

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left((\nu + \nu_t)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right) \tag{2.180}$$

Les traitements développés précédemment pour les modèles de type k-ε (Chieng-Launder, Amano,...) peuvent de cette manière être appliqués à cette nouvelle équation sur k. Les conditions aux limites pour les tensions de Reynolds sont calculées à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} R_{11} = 2k\left(b_{11} - \frac{1}{3}\right) \\ R_{22} = 2k\left(b_{22} - \frac{1}{3}\right) \\ R_{33} = 2k\left(b_{33} - \frac{1}{3}\right) \\ R_{12} = -\tau_w \end{cases}$$

et sont ensuite explicitement prescrites au premier point de calcul P. On notera qu'on prescrit une valeur pour R_{12} égale au frottement total (on néglige le frottement visqueux, voir équation 2.84). Les valeurs utilisées pour l'anisotropie sont fortement dépendantes des auteurs ainsi que du modèle. Ainsi, on trouve dans le guide utilisateur du code commercial Fluent [Fluent 2013] :

b_{11}	b_{22}	b_{33}
0.216	-0.210	-0.006

Lors de la résolution de l'équation de transport sur le taux de dissipation ε, la valeur locale issue de

$$\varepsilon_p = \frac{u_k^3}{\kappa y} \tag{2.181}$$

est explicitement prescrite au premier point de calcul P comme dans les approches précédentes.

2.5.5 Lois de paroi adaptatives

La plupart des maillages industriels, pour des raisons de coûts, restent encore aujourd'hui inaccessibles aux modèles *Bas-Reynolds*. Mais il est parfois très difficile de maîtriser pleinement le processus de maillage pour l'ingénieur et comme on l'a vu dans le chapitre 1 il n'est pas rare que le maillage ne satisfasse pas aux contraintes imposées par le modèle. Les premiers points de calcul, se situant bien souvent en zone tampon ($5 \leq y^+ \leq 30$ pour les écoulements de couche limite), rendent ainsi inapplicables les modèles *Haut* (loi de parois) et *Bas-Reynolds* (intégration de la couche limite). Les approches adaptatives sont une tentative de réponse à cette problématique. Là où les approches conventionnelles (type Chieng-Launder) divisent la cellule de proche paroi en plusieurs couches, les modèles adaptatifs proposent une pondération entre les comportements de proche paroi et pleinement turbulent en utilisant des fonctions de pondération assurant une **transition continue** pour différentes variables à travers la première cellule, et cela même si le centre de la cellule est situé en zone tampon.

2.5.5.1 Travaux sur la thermique de Kader

De manière à lier de manière continue, indépendamment de la localisation du premier point de calcul et du nombre de Prandtl, la température et le flux thermique à la paroi, Kader [Kader 1981] fut l'un des premier à tenter de construire une loi continue (ici sur pour la variable température θ).

$$\theta^+ = \mathrm{Pr}\, y^+ \exp(-\Gamma) + \left[2.12 \ln(1 + y^+) + \beta(\mathrm{Pr})\right] \exp(-1/\Gamma) \tag{2.182}$$

avec

$$\Gamma = \frac{0.01\,(\mathrm{Pr}\, y^+)^4}{1 + 5\mathrm{Pr}^3\, y^+} \tag{2.183}$$

et la définition suivante pour les flux et température adimensionnés :

$$\theta^+ = \frac{T_w - T}{T_\tau} \quad \text{et} \quad T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p u_\tau} \tag{2.184}$$

où T_w et q_w sont la température et le flux à la paroi, respectivement et C_p la capacité thermique du fluide considéré. Cette loi se montre en très bonne adéquation avec divers résultats expérimentaux pour un nombre de Prandtl variant sur un large intervalle ($\mathrm{Pr} \in \left[6.10^{-3}, 40.10^3\right]$) et est encore aujourd'hui largement utilisée.

L'extension de cette loi à la dynamique a été bien plus tardive. On pourra se référer à la section 2.5.5.5 pour les détails de cette application.

2.5.5.2 Esch et Menter

La première tentative d'application de loi continue pour la dynamique fut introduite par Esch et Menter [Esch 2003a] pour modèle k-ω-SST. De manière à assurer une transition continue du modèle de la zone pleinement turbulente à la zone visqueuse de proche paroi, et à mesure que la cellule de proche paroi est raffinée, les conditions aux limites suivantes, fonctions de y^+, sont exprimées pour ω :

$$\omega(y^+) = \sqrt{\omega_{vis}^2(y^+) + \omega_{log}^2(y^+)} \tag{2.185}$$

avec

$$\omega_{vis} = \frac{6}{0.075 y^{+2}} \quad \text{et} \quad \omega_{log} = \frac{1}{0.3\kappa y^+} \tag{2.186}$$

Une formulation similaire est fournie pour décrire le frottement à la paroi :

$$u_\tau = \sqrt[4]{(u_\tau^{vis})^4 + (u_\tau^{log})^4} \tag{2.187}$$

avec

$$u_\tau^{vis} = \frac{U_p}{y^+} \quad \text{et} \quad u_\tau^{log} = \frac{\kappa U_p}{\ln(E y^+)} \tag{2.188}$$

On dispose ainsi de conditions aux limites indépendamment de la localisation du premier point de calcul. Cette tentative semble alors fournir de bons résultats sur un grand nombre de physiques et de cas tests [Esch 2003b] mais reste à la connaissance de l'auteur peu utilisée, du fait qu'elle n'offre aucune justification physique autre qu'offrir les bons comportements limitants.

2.5.5.3 Lois de paroi de type « scalable »

Les lois de pondération précédentes ne s'appliquant qu'au modèle k-ω-SST, Esch et Menter [Esch 2003a] exposent également une stratégie permettant l'application de modèles *Haut-Reynolds* sur des maillages de type *Bas-Reynolds*. Cette approche est dite « scalable wall function ». Cette appellation est cependant trompeuse puisqu'il ne s'agit pas vraiment d'une loi adaptative au sens où l'entend cette section mais plutôt d'une limitation sur la vitesse permettant d'éviter les écueils liés à l'utilisation d'un maillage excessivement raffiné. La vitesse de frottement est alors déterminée par la relation

$$u_\tau = \frac{\kappa U_p}{\ln(E\widehat{y}^+)} \quad \text{avec} \quad \widehat{y}^+ = \max\left(y^+, y_{lim}^+\right) \tag{2.189}$$

où y_{lim}^+ est la valeur pour laquelle se croisent les lois linéaire et logarithmique. Tout se passe donc comme si on empêchait le modèle de tomber dans la zone logarithmique, en renvoyant toujours une vitesse de frottement correspondant à la borne inférieure de la zone logarithmique $(U^+(y_{lim}^+))$.

Cette approche, très utilisée, permet de diminuer la sensibilité au maillage lors de l'utilisation de maillage non adapté au modèle et d'éviter de faire diverger le calcul. Elle est toutefois à utiliser avec précaution : c'est un artefact permettant d'utiliser un modèle sur un maillage présentant des zones plus raffinées mais en aucun cas cette approche ne convergera vers une approche *Bas-Reynolds*.

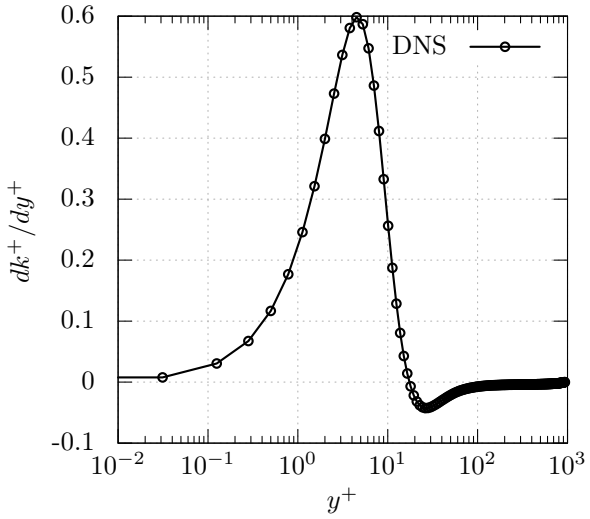


FIGURE 2.16 – Variation de dk^+/dy^+, données DNS à $Re_\tau = 950$ de Hoyas et Jimenez [Hoyas 2006].

2.5.5.4 Tables de Kalitzin et al.

Les travaux fondateurs de Kalitzin et al. [Kalitzin 2004] posèrent les bases de la modélisation adaptative des lois de paroi. Partant de la constatation que le critère de localisation en zone logarithmique est trop sévère pour beaucoup de maillages industriels, Kalitzin et al. identifient comme particulièrement importante la modélisation de la zone tampon intermédiaire, zone dans laquelle le modèle de Esch et Menter ne donne que des résultats approximatifs. Comme cela a été exposé dans la section précédente, il est d'usage dans les lois de paroi de modéliser finement les termes de production et de dissipation de l'équation de l'énergie cinétique turbulente, tout en laissant le terme de diffusion libre. Kalitzin et al. remettent en cause cette hypothèse souvent formulée lors de l'utilisation de lois de paroi, à savoir l'utilisation de la condition à la limite :

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \tag{2.190}$$

aux parois. Cette hypothèse n'est en réalité vraie que dans la sous-couche visqueuse ainsi que dans la zone logarithmique, comme en témoigne la figure (2.16). Ainsi, si une loi de paroi doit avoir pour ambition de modéliser finement les phénomènes ayant lieu en zone tampon, il est nécessaire pour les auteurs de s'affranchir de cette hypothèse. Pour ce faire, des solutions analytiques ou pré-intégrées de plusieurs modèles couramment utilisés dans la littérature sont transcrites sous forme de tables :

	Spalart-Almaras	k-ω-SST		$v^2 - f$			
y^+	ν_t^+	k^+	ω^+	k^+	ε^+	f^+	v^2
0.1	0.041	0.12	0.02	0.14	0.25	0.8	0.06
0.2	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

A chaque pas de temps, et pour chaque cellule de proche paroi, on utilise les valeurs locales de U_p et y_p pour calculer la distance adimensionnelle y_p^+ ainsi que la vitesse de frottement correspondante u_τ. Cette étape est réalisée à l'aide d'une loi continue sur la vitesse (loi de Spalding, équation (2.117)) de manière à pouvoir directement calculer :

$$\begin{cases} Re_y = \dfrac{y_p U_p}{\nu} = y_p^+ U^+(y_p^+) = F(y_p^+) \\ y_p^+ = F^{-1}(Re_y) \end{cases}$$

On tabule alors dans ce cas directement la fonction F^{-1}. Pour chaque variable et suivant le modèle utilisé on vient ensuite regarder la table et trouver les valeurs correspondantes. Ces grandeurs sont ensuite dimensionnées à l'aide de l'échelle interne u_τ et utilisées comme conditions explicites (de type Dirichlet) à la limite. Dans le cas du modèle k-ω, on aura par exemple :

$$\begin{aligned} k_p &= u_\tau^2 k^+(y_p^+) \\ \omega_p &= u_\tau^2 \omega^+(y_p^+)/\nu \end{aligned}$$

Cette stratégie fut appliquée avec succès à la simulation d'un canal et d'une bulle de recirculation mais souffre de plusieurs lacunes qui ont fait l'objet de plusieurs tentatives de corrections par la suite (voir par exemple le paragraphe 2.5.5.6).

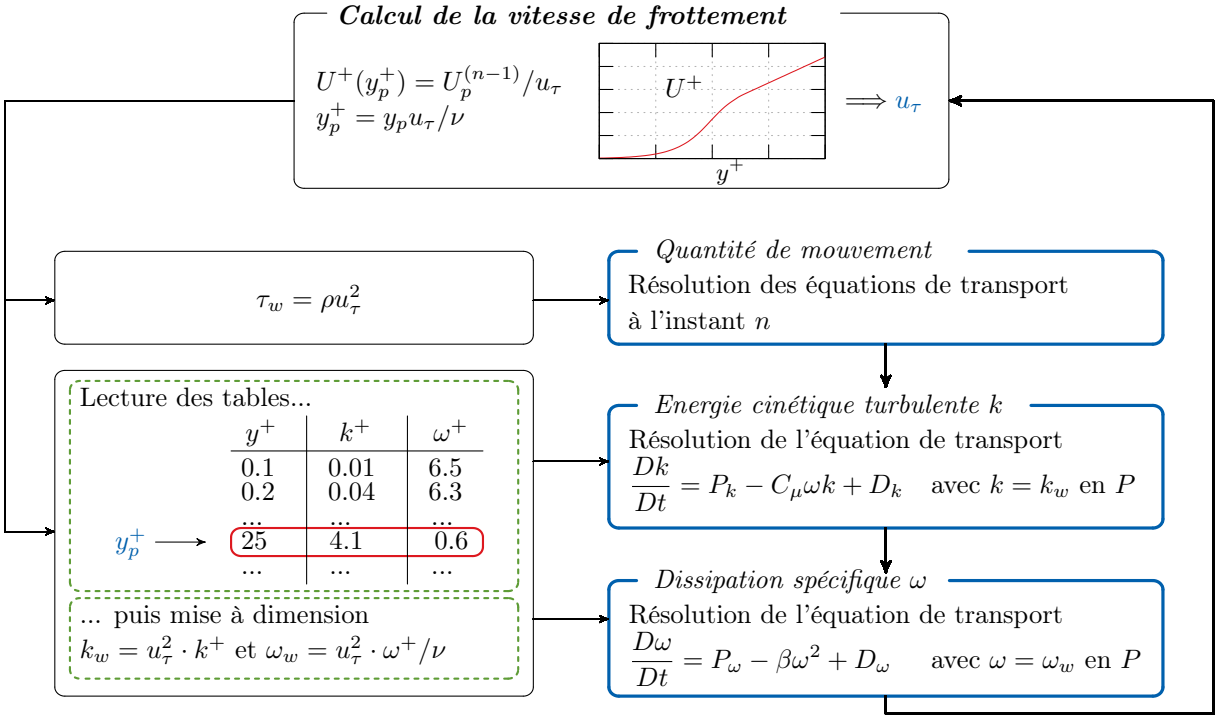


FIGURE 2.17 – Algortihme de paroi de Kalitzin et al. [Kalitzin 2004] pour un modèle k-ω.

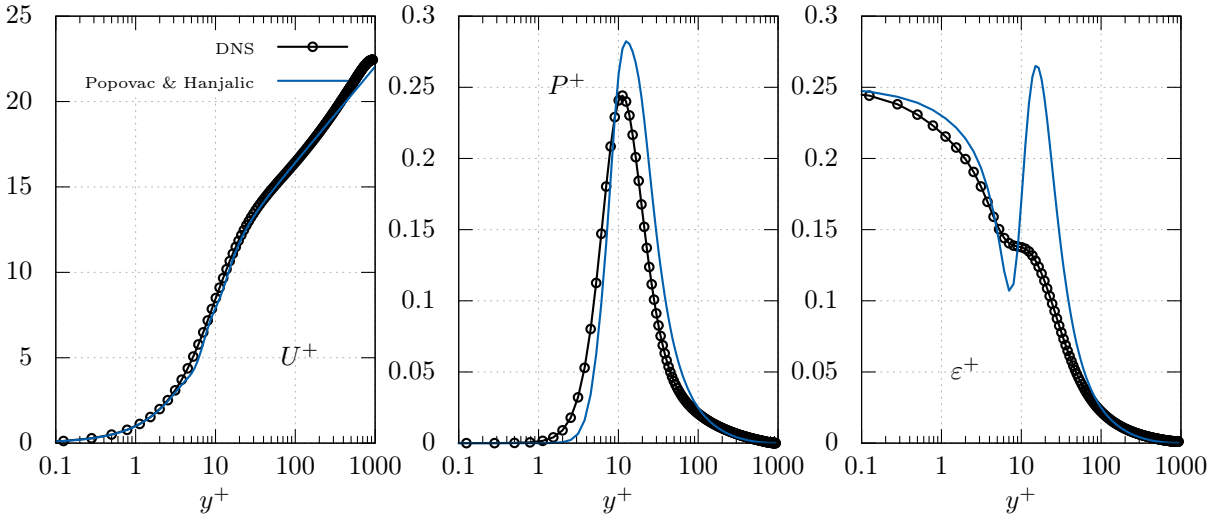


FIGURE 2.18 – Lois analytiques de Popovac et Hanjalić pour la vitesse, la production et la dissipation calculées *a priori* à partir des données DNS de Hoyas et Jimenez [Hoyas 2006]

2.5.5.5 Modèle de Popovac et Hanjalić

Popovac et Hanjalić [Popovac 2007] reprennent les idées de Esch et Menter mais s'affranchissent de la pondération quadratique ou en puissance quatre. Ils ont l'idée originale de se servir d'une fonction introduite par Kader [Kader 1981] comme fonction de pondération et introduisent également une pondération sur les termes sources de l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Ce modèle de paroi est associé dans l'article original au modèle de turbulence ζ-f [Hanjalic 2004] (dont une description détaillée est donnée au paragraphe 2.3.2). Le schéma (2.20) résume cette approche.

Popovac et Hanjalić partent de la constatation que la fonction introduite par Kader pour la thermique fournit d'excellents résultats lorsqu'elle est appliquée à la dynamique. Ils définissent ainsi une loi continue sur la vitesse, dont une illustration pourra être trouvée sur la figure (2.18), définie par la relation :

$$U^+ = y^+ \exp(-\Gamma) + \left[\frac{1}{\kappa}\ln(Ey^+)\right]\exp(-1/\Gamma)$$
$$\Gamma = \frac{0.01y^{+4}}{1+5y^+} \tag{2.191}$$

La distance adimensionnelle à la paroi y^+ est calculée à partir de l'échelle de vitesse basée sur k ($u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}$) :

$$y^+ = \frac{C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}y_p}{\nu} \tag{2.192}$$

Il est à noter que cette évaluation ne tient pas compte du fait que k varie lorsque l'on sort de la zone logarithmique. De ce fait, l'échelle u_k définie par $C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}$ n'est plus adaptée. Mais ceci

ne semble pas perturber les résultats des auteurs car la valeur de y^+ n'apparaît en proche paroi que dans la loi de vitesse. Le frottement à la paroi est donc déterminé par le système :

$$\begin{cases} u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p} \\ y^+ = y_p u_k/\nu \\ U_p/u_\tau = U^+(y^+) \\ \tau_w = \rho u_\tau u_k = \dfrac{C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}U_p}{U^+(y^+)} \end{cases} \tag{2.193}$$

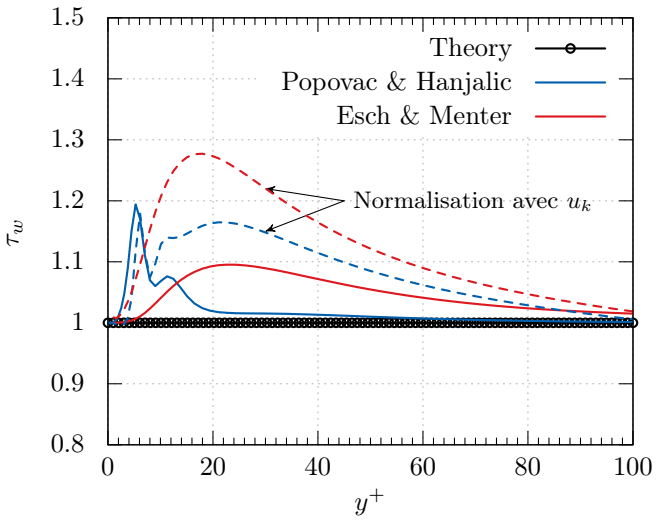


FIGURE 2.19 – Estimation *a priori* de τ_w

La figure (2.19) fournit une évaluation *a priori* du frottement à la paroi obtenu par la loi de Popovac et Hanjalić avec d'une part l'adimensionnement de y^+ par u_τ (trait plein) et d'autre part l'adimensionnement de y^+ par u_k (trait pointillé, équations (2.193)). Ces résultats sont comparés avec la loi de Esch et Menter (voir paragraphe 2.5.5.2). Malgré une erreur d'environ 20% en zone tampon, la supériorité de la loi de Popovac et Hanjalić se voit clairement en zone logarithmique : dès le début de la zone logarithmique, on observe une prédiction du frottement correcte.

On notera également que l'utilisation de la seconde échelle de vitesse u_k détériore la prédiction du frottement dans tous les cas. C'est cependant une condition indispensable pour la simulation d'écoulements complexes comme souligné au paragraphe 2.5.4.5.

Traitement des grandeurs turbulentes

La pondération de l'équation (2.191) est appliquée à toutes les grandeurs de l'écoulement qui nécessitent une loi. L'équation de l'énergie cinétique est ainsi résolue à l'aide d'une pondération sur ses termes sources, définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P &= P^{vis}\exp(-\Gamma) + P^{log}\exp(-1/\Gamma) \\ \varepsilon &= \varepsilon^{vis}\exp(-\Gamma_\varepsilon) + \varepsilon^{log}\exp(-1/\Gamma_\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.194}$$

avec les expressions de proche paroi et zone logarithmique suivantes :

$$\begin{cases} P^{vis} = \nu_t \left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)_p^2 \\ P^{log} = \dfrac{u_k^3}{\kappa y_p} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon^{vis} = \dfrac{2\nu k_p}{y_p^2} \\ \varepsilon^{log} = \dfrac{u_k^3}{\kappa y_p} \end{cases}$$

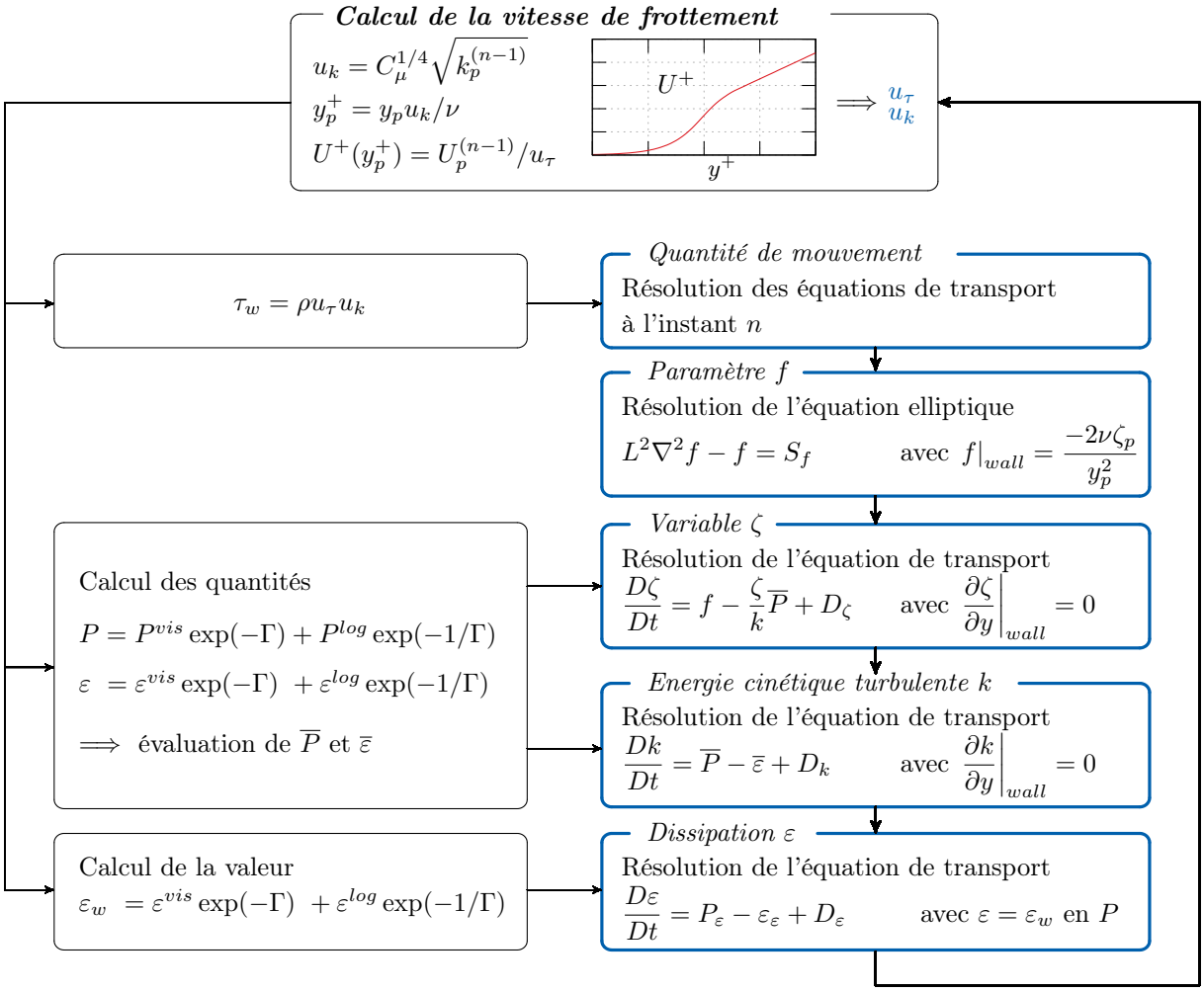


FIGURE 2.20 – Algorithme de Popovac et Hanjalić [Popovac 2007] pour le modèle ζ-f.

On notera l'introduction de la fonction Γ_ε définie par :

$$\Gamma_\varepsilon = \frac{0.001y^{+4}}{1+y^+} \tag{2.195}$$

qui, selon les auteurs, permet d'obtenir une meilleure approximation de la dissipation. Une illustration *a priori* de ces deux lois de comportement continues est donnée sur la figure (2.18).

Comme il est d'usage, Popovac et Hanjalić utilisent non pas les valeurs locales mais les valeurs moyennes de la production et de la dissipation comme terme source de l'équation de l'énergie cinétique turbulence k :

$$\overline{P} = \frac{1}{y}\int_0^y P dy, \qquad \overline{\varepsilon} = \frac{1}{y}\int_0^y \varepsilon dy \tag{2.196}$$

Ces termes sources sont couplés à la condition suivante pour k :

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \tag{2.197}$$

La dissipation est quant à elle fixée au point P grâce à la relation (2.194) et l'équation de transport sur la variable ζ est résolue de la même manière que celle de k. La résolution de l'équation elliptique sur le paramètre f reste inchangée étant donné la difficulté de créer une pondération pour cette variable, sans conséquences sur les résultats selon les auteurs.

Approfondissements

Basara [Basara 2006] trouva sur beaucoup de cas de meilleurs résultats en modifiant la pondération de la dissipation suivant l'expression suivante :

$$\varepsilon = (1-\alpha)\varepsilon^{vis} + \alpha\varepsilon^{log} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{u_k^3}{\kappa y_p P_k} \tag{2.198}$$

où P_k est donné par l'expression (2.194). Malgré ces modifications, la modélisation de ε dans la zone tampon souffre d'une large erreur (figure (2.21)). Popovac et Hanjalić suggérèrent de modifier cette pondération en manipulant les coefficients de la fonction de pondération. Cette solution ne convint pas à Rahman et Siikonen qui proposèrent d'améliorer la pondération utilisée sur la dissipation ε [Rahman 2012] en la remplaçant par l'expression :

$$\varepsilon = (1-\alpha)\varepsilon^{vis} + \alpha f_p \varepsilon^{log} \quad \text{avec} \quad f_p = \sqrt{\tanh\left(\sqrt{C_\mu}\frac{Re_y^{3/2}}{Re_T}\right)} \tag{2.199}$$

où $Re_T = k^2/\nu\varepsilon$ et $Re_y = y\sqrt{k}/\nu$.

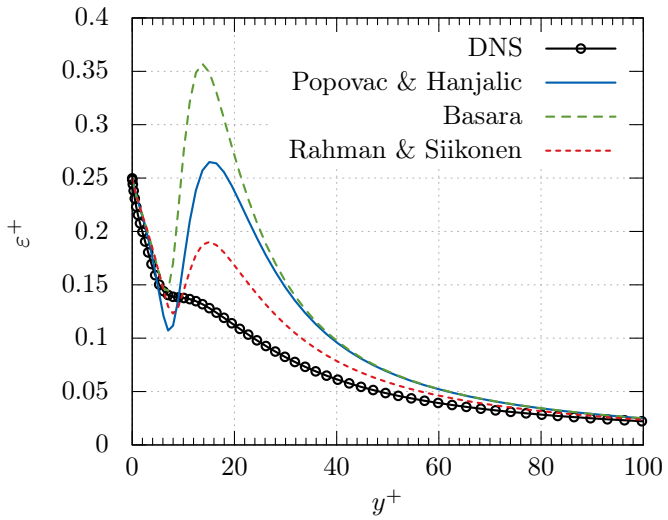


FIGURE 2.21 – Estimation *a priori* de ε^+, comparaison aux données DNS à $Re_\tau = 950$ de Hoyas et Jimenez [Hoyas 2006].

2.5.5.6 Approche de Billard et al.

L'approche de Billard et al. [Billard 2015] s'inscrit dans la lignée des travaux de Popovac et Hanjalic [Popovac 2007] puisque la stratégie reste globalement identique :

— Se servir d'une loi continue sur U^+ de manière à prescrire le frottement à la paroi,
— Proposer une loi continue sur la production P et la dissipation turbulente ε de manière à intégrer l'équation de k avec une condition de Neumann homogène sur les faces des cellules de proche paroi,
— Proposer des lois continues pour les autres variables intervenant dans le modèle.

Ce modèle de paroi est associé dans l'article original au modèle de turbulence Bl-v^2-k (dont une description détaillée est donnée au paragraphe 2.3.2).

Traitement de la vitesse

L'utilisation de l'échelle de vitesse $u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k}$ n'est utilisable qu'en zone logarithmique. En effet, si l'on se rapproche de la paroi, l'énergie cinétique varie fortement et il n'est plus possible d'utiliser cette échelle. Le système suivant, utilisé dans l'approche de Popovac et Hanjalić est donc mis en défaut :

$$\begin{cases} u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p} \\ y^+ = y_p u_k/\nu \\ U_p/u_\tau = U^+(y^+) \\ \tau_w = \rho u_\tau u_k \end{cases}$$

et ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants si on sort de la zone logarithmique. L'estimation de la distance adimensionelle y^+ n'est en effet plus bonne, et ce quand bien même une loi continue sur U^+ est adoptée. Popovac et Hanjalić se sont affranchis de cette difficulté en évitant au maximum de se servir de la distance à la paroi y^+. Mais Billard et al. proposent quant à eux une méthode astucieuse, permettant de s'affranchir de cette problématique en mimant la méthode couramment employée pour déterminer la vitesse de frottement u_τ à l'aide de la loi sur U^+. On définit ainsi le système :

$$\begin{cases} u_k^2 = \dfrac{k_p}{k^+(y^+)} \\ y^+ = y_p u_k/\nu \end{cases}$$

où k^+ est une loi analytique fonction de y^+. Lorsque l'on se trouve en *Haut-Reynolds*, k^+ dégénère alors vers son comportement logarithmique $k^+ = C_\mu^{-1/2}$ et on retrouve ainsi l'échelle de vitesse classique $u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}$.

Traitement des grandeurs turbulentes

Toutes les autres grandeurs turbulentes de l'écoulement (production P, dissipation ε, paramètre de pondération α,...) sont issues de solutions préintégrées des équations simplifiées du modèle ainsi que d'interpolation par spline cubique de Hermite.

Il est intéressant de noter que Billard et al. ont fait le choix de n'utiliser que des grandeurs locales et non des grandeurs intégrées comme le suggére la littérature.

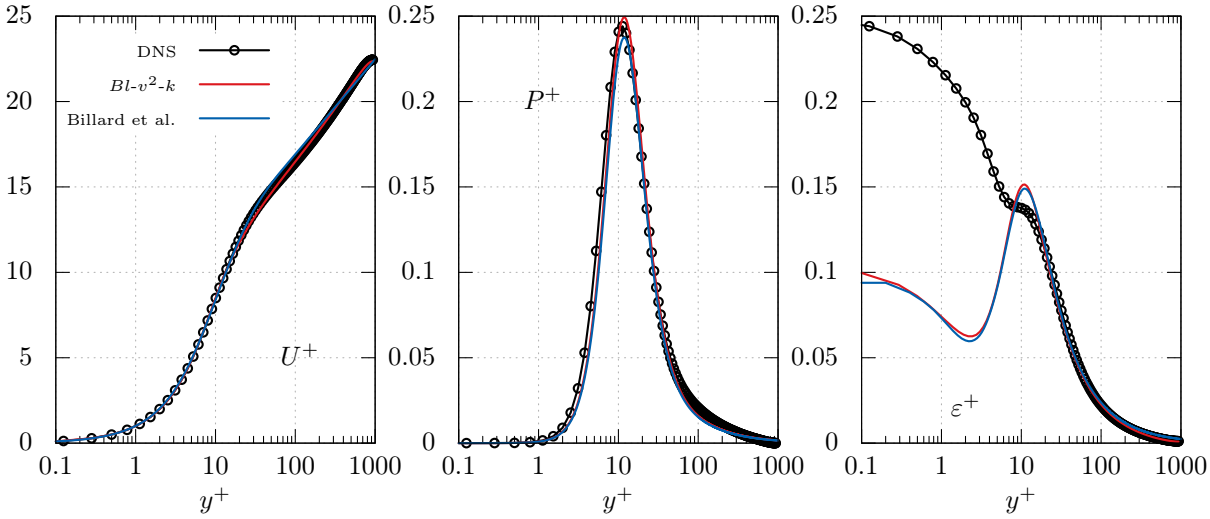


FIGURE 2.22 – Lois de Billard et al. pour la vitesse, la production et la dissipation comparées aux données DNS à $Re_\tau = 950$ de Hoyas et Jimenez [Hoyas 2006] et au modèle $Bl\text{-}v^2\text{-}k$.

2.5.5.7 UMIST-N

Une approche totalement différente des approches précédentes fut développée par Craft et al. [Craft 2004]. Le but de ces lois de parois est similaire à celui des lois de paroi de type analytique : dégager le frottement à la paroi (τ_w) ainsi que les différents termes sources et puits moyens des équations des grandeurs turbulentes (telles que production moyenne $\overline{P_k}$, dissipation moyenne $\overline{\varepsilon}$,...). Alors que les lois adaptatives de parois standards supposent des variations prédéfinies pour chaque variable au sein de chaque cellule de proche paroi (comme U^+, k^+ ou encore P^+ et ε^+), les lois de parois UMIST-N permettent d'obtenir ces profils par la résolution d'équations de transport simplifiées, de type couche limite, en utilisant une grille fine similaire à celle employée pour un modèle *Bas-Reynolds*, embarquée dans chaque cellule de proche paroi (voir le schéma (2.23)). Ainsi, sur chaque cellule de proche paroi, on fait l'hypothèse que la diffusion tangentielle est négligeable devant la diffusion normale à la paroi et on résout de manière découplée des équations de transport du type :

$$U\frac{\partial \phi}{\partial x} + V\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S_\phi \tag{2.200}$$

où ϕ représente U, k, ε ou toute autre variable du modèle. Seule une équation de transport sur la quantité de mouvement tangentielle (équation sur U) est résolue. On fait en effet la supposition que le gradient de pression est constant sur l'ensemble de la cellule et égal à :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_e - P_w}{\delta_{e-w}} \tag{2.201}$$

C'est là toute la force de la méthode : on s'affranchit de l'étape coûteuse en temps de calcul de la résolution multidimensionnelle d'une équation de Poisson pour la pression. La vitesse normale V est déduite par continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(y) = \int \frac{\partial U}{\partial x} dy \tag{2.202}$$

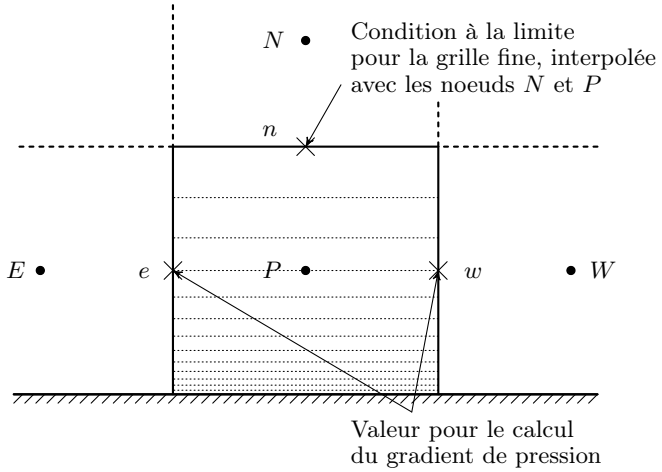


FIGURE 2.23 – Schéma de la situation dans une cellule de proche paroi lors de l'utilisation des lois de paroi UMIST-N

Les conditions aux limites des équations monodimensionnelles sont les conditions aux limites naturelles du modèle au niveau de la paroi. Les conditions aux limites au niveau de la face de calcul nord (n) sont déduites par interpolation linéaire des cellules avoisinantes :

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_N) \tag{2.203}$$

Cette stratégie s'avère particulièrement efficace sur les cas de jets impactants testés par Craft et al. et donnent des résultats spectaculaires en comparaison des lois standards, et ce tout en gardant un coût de calcul extrêmement faible par rapport aux approches *Bas-Reynolds*.

Cependant, Chedevergne [Chedevergne 2010] mit en avant la grande difficulté de traitement des maillages non structurés 3D avec l'utilisation d'une telle méthode. En effet, il devient très difficile alors de calculer localement les termes convectifs tangentiels. Les auteurs proposèrent alors de résoudre, sur le même principe, des équations affranchies de tout phénomène convectif.

2.6 Conclusion du chapitre

La modélisation de la paroi pour les modèles du premier ordre a continuellement évolué depuis les travaux de Bradshaw et al. [Bradshaw 1967] améliorant de manière conséquente les résultats de simulation sur physiques complexes [Craft 2002] mais atteignant parfois un niveau de complexité et d'implémentation considérable [Amano 1984].

L'introduction de la notion d'adaptativité connaît depuis les travaux de Kalitzin et al. [Kalitzin 2004] un essor considérable et permet de répondre à une problématique industrielle importante : l'impossibilité de la maîtrise totale du processus de maillage.

La littérature est en revanche beaucoup moins riche concernant les lois de paroi pour les modèles du second ordre, et on ne sait parfois pas réellement ce qui est fait au premier point de paroi. Pourtant, ces modèles sont très précieux pour l'industrie car ce sont bien souvent les seuls capables de reproduire certaines physiques complexes [Benhamadouche 2014a]. Suivant

les traces des approches adaptatives de Hanjalić et Popovac [Popovac 2007] puis Billard et al. [Billard 2015], le chapitre suivant introduit la notion de lois de paroi adaptatives pour le modèle EB-RSM. Celle-ci se base sur une approche originale permettant la bonne maîtrise de la façon dont sont traitées les grandeurs turbulentes en proche paroi.

L'adaptation de l'approche UMIST-N [Craft 2004] pour les modèles du second ordre est également investiguée.

Chapitre 3

Stratégie et développement

Sommaire

3.1 Motivations et Objectifs 61
3.2 Lois de paroi algébriques AAWF 62
3.2.1 Loi de paroi pour la vitesse 62
3.2.2 Loi de paroi pour le paramètre α 77
3.2.3 Loi de paroi pour le taux de dissipation ε 78
3.2.4 Loi de paroi pour k et détermination du frottement à la paroi 78
3.2.5 Lois de paroi pour les tensions de Reynolds 83
3.2.6 Méthode d'implémentation 91
3.2.7 Une alternative au modèle algébrique 93
3.3 Lois de paroi numériques ANWF 94
3.3.1 Stratégie 94
3.3.2 Équations de proche paroi 96
3.3.3 Termes convectifs et vitesse normale 97
3.3.4 Conditions aux limites de sous-mailles 100
3.3.5 Limitations 100
3.3.6 Résumé 100
3.4 Validation élémentaire 103
3.4.1 Canal pleinement développé 103
3.4.2 Crazy Channel 115
3.5 Conclusion du chapitre 119

Ce chapitre est dédié à la présentation de différentes approches pour le traitement adaptatif des parois : une première méthode est fondée sur des lois analytiques continues, une seconde s'attache à la résolution d'équations 1D au sein de la couche limite.

3.1 Motivations et Objectifs

Comme l'a montré le chapitre précédent, les lois de paroi adaptatives font l'objet de développements importants depuis quelques années. Malgré cela, aucune approche de la sorte n'a encore été proposée pour les modèles du second ordre. Ces modèles sont pourtant capables de reproduire avec précision des physiques parfois inaccessibles aux modèles du premier ordre [Benhamadouche 2014a]. Le modèle EB-RSM (dont une description est donnée au paragraphe 2.4.2.1) est un modèle du second ordre ayant montré de très bons résultats et ce même

lors d'écoulements complexes (voir par exemple dans [Manceau 2014], écoulement impactant sur un disque en rotation).

On s'attache ainsi dans ce qui suit à développer des lois de paroi adaptatives originales pour le modèle EB-RSM, de manière à exploiter les capacités de ce modèle tout en lui donnant la souplesse des lois de paroi, nécessaires d'un point de vue industriel.

3.2 Lois de paroi algébriques AAWF

3.2.1 Loi de paroi pour la vitesse

Dans un premier temps, on s'intéresse au traitement de la vitesse. On a vu au chapitre précédent que de nombreuses lois continues existent pour la vitesse (paragraphe 2.5.3). Ces lois présentent cependant certains désavantages comme un manque de souplesse ou une mauvaise prédiction de la zone tampon. Ce paragraphe a pour but d'examiner le comportement de la vitesse en proche paroi et de proposer une nouvelle loi, plus adaptée aux objectifs de cette thèse.

3.2.1.1 Comportement asymptotique de U^+

On peut écrire un développement asymptotique en 0 pour les vitesses fluctuantes u et v, sachant que $u|_w = 0$, $v|_w = 0$ et $\partial v/\partial y = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcccccccc} u & = & a_1 y & + & a_2 y^2 & + & a_3 y^3 & + & o(y^3) \\ v & = & & + & b_2 y^2 & + & b_3 y^3 & + & o(y^3) \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

soit finalement

$$\overline{uv} = \overline{a_1 b_2} y^3 + (\overline{a_2 b_2} + \overline{a_1 b_3}) y^4 + o(y^4) \tag{3.2}$$

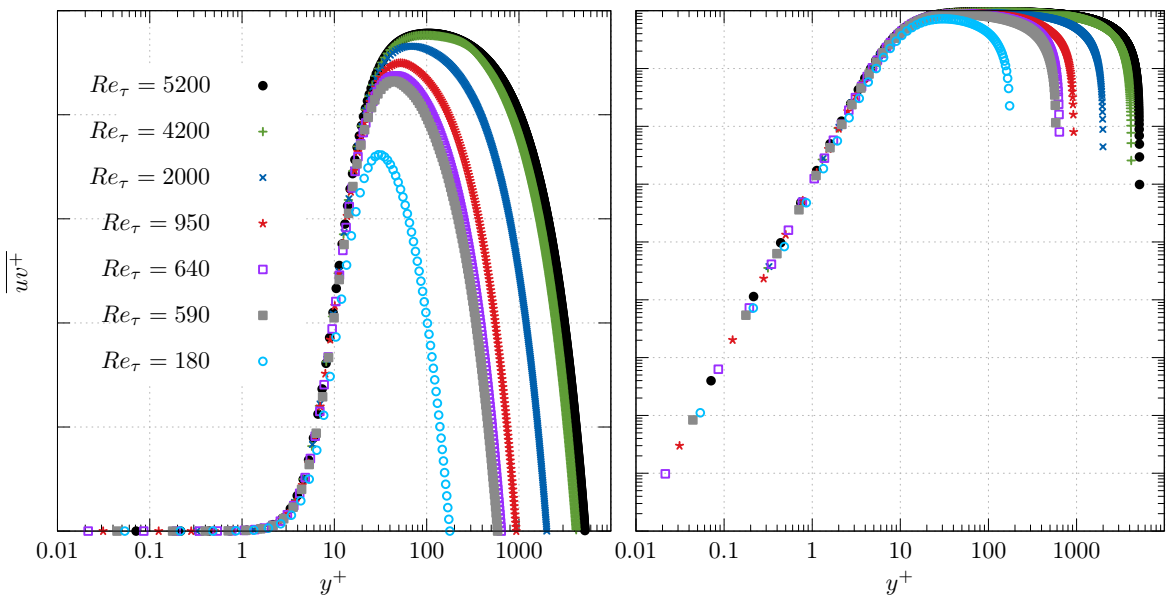


FIGURE 3.1 – Profils de $\overline{uv}^+$ pour différents nombres de Reynolds turbulents

En notant $\overline{uv}^+ = \overline{uv}/u_\tau^2$ il vient alors :

$$\overline{uv}^+ = \overline{a_1 b_2}^+ y^{+3} + (\overline{a_2 b_2}^+ + \overline{a_1 b_3}^+) y^{+4} + o(y^{+4}) \tag{3.3}$$

où

$$\overline{a_1 b_2}^+ = \frac{\overline{a_1 b_2}\nu^3}{u_\tau^5} \tag{3.4}$$

Le tracé de l'évolution de $\overline{uv}^+$ à partir de données DNS pour différents Reynolds turbulent, donné en figure (3.1), permet de conjecturer un comportement peu dépendant de Re_τ en proche paroi. Cette observation est corroborée par les travaux de Panton [Panton 1997], qui aboutit à la même conclusion. Dès lors, il est possible pour $0 < y^+ \leq 5$ de supposer :

$$\ln(\overline{uv}^+) = A \ln(y^+) + B \tag{3.5}$$

Une régression linéaire sur l'ensemble de ces données fournit alors le jeu de coefficient suivant :

	Valeur	ε [1]
A	3.0233	0.005005
B	-6.84251	0.006936

Soit, pour y^+ suffisamment petit :

$$\begin{aligned} \overline{uv}^+ &= \mathrm{e}^{\left(A\ln(y^+)+B\right)} \\ &= \mathrm{e}^B y^{+A} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ces résultats confirment les conclusions sur le comportement de $\overline{uv}^+$ en y^{+3} et fournit une valeur pour la constante $\overline{a_1 b_2}$. On a donc finalement :

$$\overline{uv}^+ = \overline{a_1 b_2}^+ y^{+3} + o(y^{+3}) \tag{3.7}$$

avec

$$\overline{a_1 b_2}^+ = \mathrm{e}^B = 1.0674\ 10^{-3} = C_{\overline{uv}} \tag{3.8}$$

et l'incertitude suivante sur ce coefficient :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{B-\varepsilon} \leq C_{\overline{uv}} \leq \mathrm{e}^{B+\varepsilon} \\ \mathrm{e}^{-\varepsilon}\mathrm{e}^B \leq C_{\overline{uv}} \leq \mathrm{e}^{\varepsilon}\mathrm{e}^B \\ 1.0621\ 10^{-3} \leq C_{\overline{uv}} \leq 1.0728\ 10^{-3} \end{aligned} \tag{3.9}$$

La figure (3.2) illustre le très bon comportement de cette loi en puissance trois pour $\overline{uv}^+$, et ce quel que soit le nombre de Reynolds turbulent. Cette loi peut être utilisée pour déterminer le comportement asymptotique de la vitesse. En effet, les équations (3.7) et (3.8) permettent de réécrire l'équation (2.82) (quantité de mouvement suivant x) :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} - \overline{uv}^+ = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} - C_{\overline{uv}} y^{+3} + o(y^{+3}) \tag{3.10}$$

1. ε représente ici l'écart-type aux données de références.

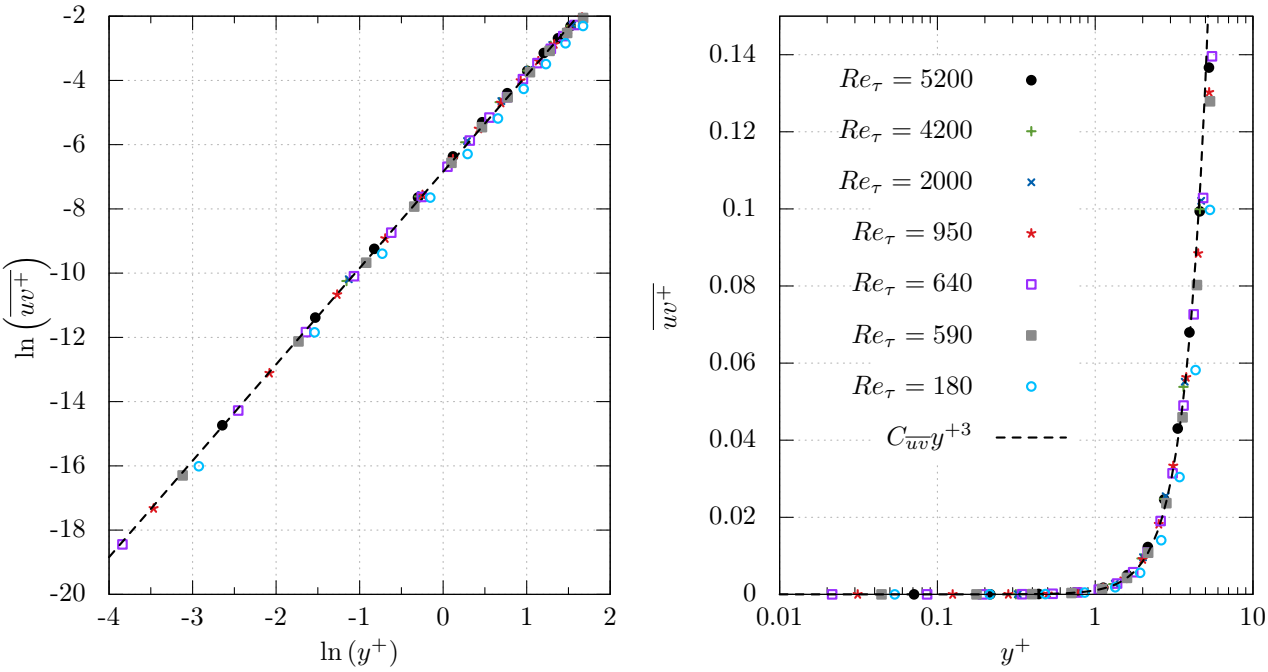


FIGURE 3.2 – Comportement asymptotique de $\overline{uv}^+$ pour différents nombres de Reynolds turbulents

soit finalement, après intégration, le développement limité suivant à l'ordre 4 pour U^+ en 0 :

$$U^+ = y^+ - \frac{1}{2Re_\tau} y^{+2} - \frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+4} + o(y^{+4}) \tag{3.11}$$

De prime abord, ce développement semble contradictoire avec la loi universelle établie au chapitre 2. En effet, on introduit ici une dépendance au nombre de Reynolds turbulent. Évaluons chaque terme de ce développement à partir des données DNS à $Re_\tau = 640$ issues de [Iwamoto 2002]. Notons à présent :

$$y^+ - U^+ = \underbrace{\frac{y^{+2}}{2Re_\tau}}_{\Delta_2(y^+)} + \underbrace{\frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+4}}_{\Delta_4(y^+)} + o(y^{+4}) \tag{3.12}$$

$\Delta_2 + \Delta_4 + o(y^{+4})$ constitue le reste du développement limité de U^+ à la paroi une fois qu'on lui a soustrait son terme dominant y^+. Il est intéressant de regarder si ces deux termes sont importants où s'ils ne représentent qu'une infime fraction du développement de U^+ à la paroi par rapport à y^+. Pour ce faire, on a tracé sur la figure (3.3) l'évolution de Δ_2, Δ_4, et $\Delta_2 + \Delta_4$ en fonction de y^+, que l'on a comparé avec la valeur de $y^+ - U^+$ extraite des données DNS. Par soucis de clarté, les courbes sont tracées en pourcentage de U^+. Par exemple, pour Δ_2, on a représenté $100\Delta_2/U^+$.

On définit par ailleurs Δ_{lim}, comme la valeur de y^+ à partir de laquelle Δ_4 porte 80% du

reste du développement asymptotique :

$$\frac{\Delta_4(\Delta_{lim})}{\Delta_2(\Delta_{lim}) + \Delta_4(\Delta_{lim})} = 0.8 \tag{3.13}$$

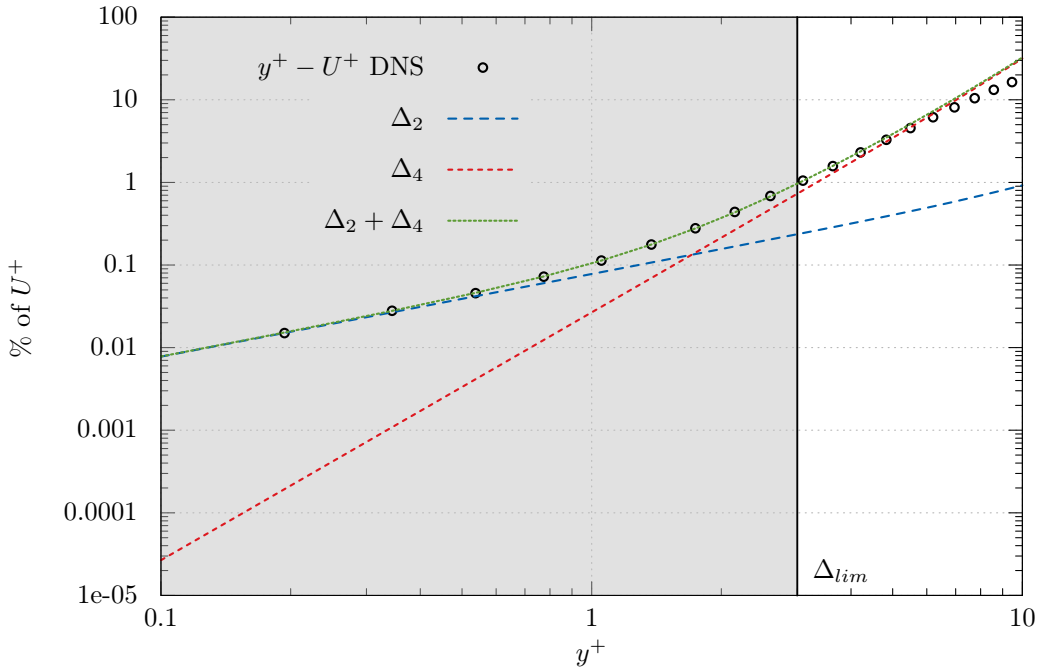


FIGURE 3.3 – Comportement asymptotique de U^+ à $Re_\tau = 640$

On distingue ainsi sur la figure (3.3) deux zones :

— $y^+ < \Delta_{lim}$: Comme en témoigne la figure (3.3), le reste du développement limité de U^+ ($\Delta_2 + \Delta_4$) représente moins de 1% de la vitesse ! Ainsi, dans cette zone :

$$\Delta_2 + \Delta_4 \ll U^+ \quad \text{si} \quad y^+ < \Delta_{lim} \tag{3.14}$$

— $y^+ > \Delta_{lim}$: Ici les termes supplémentaires $\Delta_2 + \Delta_4$ ne sont plus négligeables et représentent jusqu'à 10% de U^+. Cependant, la figure (3.3) le montre bien, on a :

$$\Delta_2 + \Delta_4 \approx \Delta_4 \quad \text{si} \quad y^+ > \Delta_{lim} \tag{3.15}$$

La figure (3.4) représente les mêmes variables que la figure (3.3) mais examine leur comportement lorsque le nombre de Reynolds turbulent augmente. Les données issues de [Lee 2015] pour $Re_\tau = 5200$ sont donc superposées aux données précédentes. Les deux zones mises en évidence sont toujours visibles mais on voit également très clairement qu'à mesure que le nombre de Reynolds turbulent augmente, Δ_{lim} diminue.

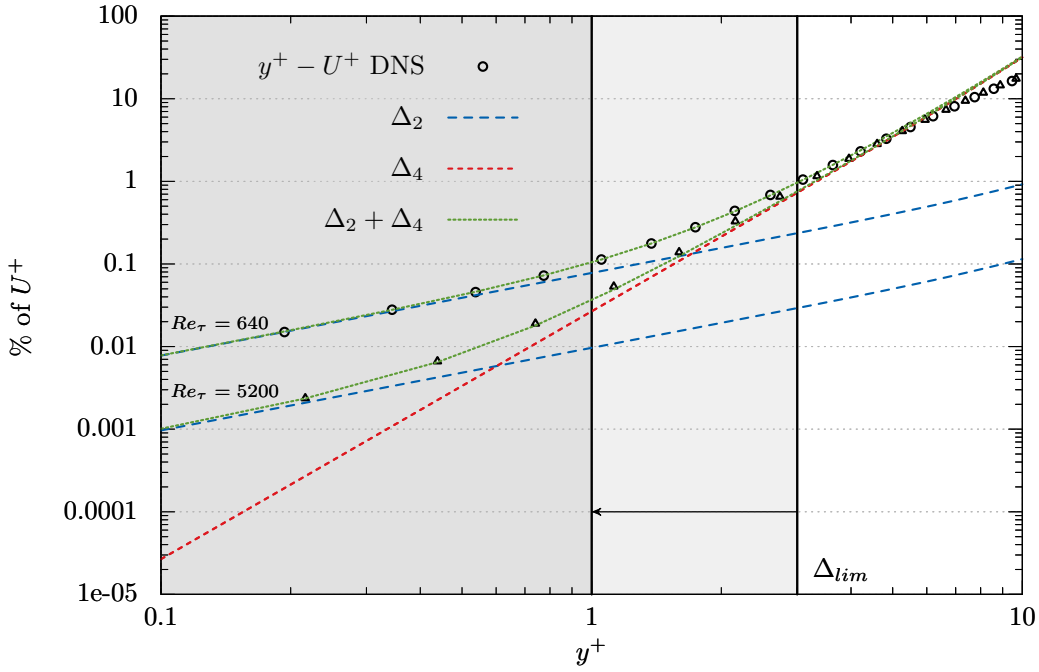


FIGURE 3.4 – Comportement asymptotique de U^+ à $Re_\tau = 640$ et $Re_\tau = 5200$

Il est donc possible d'affirmer qu'en proche paroi, U^+ est indépendant du nombre de Reynolds turbulent. Par ailleurs, on montre aussi qu'une bonne approximation de U^+ au-delà de $y^+ = 5$ passe par la prise en compte du terme d'ordre supérieur Δ_4. Il est d'ailleurs facile de s'en convaincre avec la figure (3.5).

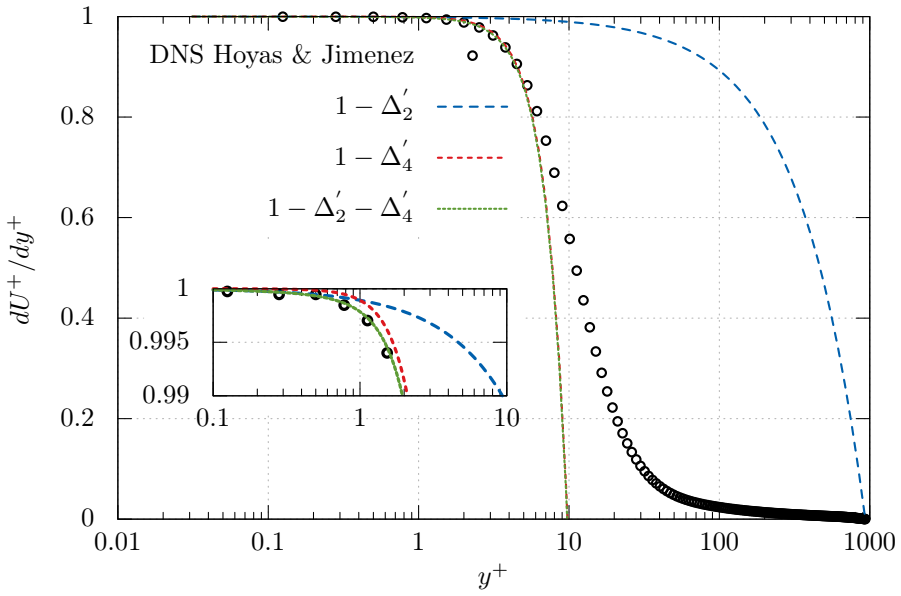


FIGURE 3.5 – Comportement asymptotique de dU^+/dy^+

Celle-ci représente l'évolution du gradient de la vitesse dU^+/dy^+, avec et sans prise en compte de Δ_4. On peut donc raisonnablement faire l'hypothèse qu'en proche paroi, on peut écrire U^+ de la façon suivante :

$$U^+ = y^+ - \frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+4} + o(y^{+4}) \tag{3.16}$$

3.2.1.2 Loi de paroi

De manière à établir une loi analytique de paroi qui relie le comportement de proche paroi et le comportement logarithmique, on cherche à trouver des fonctions f_1 et f_2 permettant d'effectuer la pondération désirée. Typiquement on cherche à trouver $f_1(y^+)$ et $f_2(y^+)$ telle que :

$$U^+(y^+) = f_1(y^+)\Phi_w(y^+) + f_2(y^+)\Phi_{log}(y^+) \tag{3.17}$$

où $\Phi_w(y^+)$ et $\Phi_{log}(y^+)$ représentent respectivement le comportement de proche paroi et le comportement en zone log de la vitesse. On prend, généralement, dans ces cas là :

$$\begin{aligned} \Phi_w(y^+) &= y^+ \\ \Phi_{log}(y^+) &= \frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B \end{aligned} \tag{3.18}$$

Il pourrait être astucieux ici d'utiliser l'équation (3.16) pour l'établissement de la fonction Φ_w. Il n'est cependant pas aisé d'établir une pondération dans ce cas. On introduira de ce fait ce comportement d'une autre façon. On souhaite trouver une pondération simple de ces deux comportements, on pose $f_2 = 1 - f_1$ et on cherche donc une fonction de pondération de la forme :

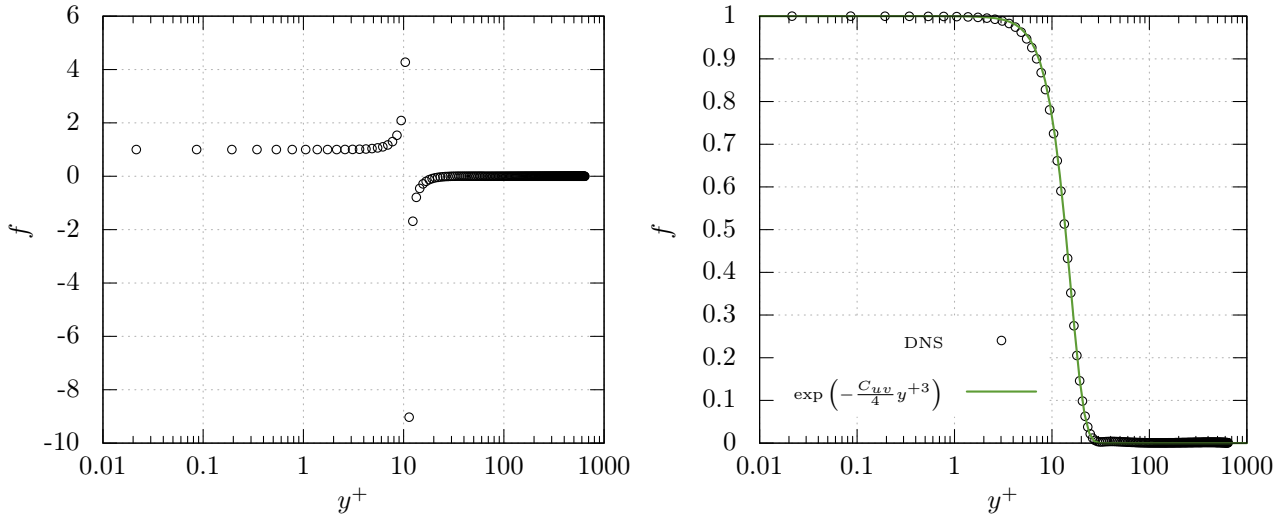
$$U^+ = f\Phi_w + (1-f)\Phi_{log} \tag{3.19}$$

Il est possible d'obtenir une évaluation de la fonction f à partir de données DNS en canal. En effet, en inversant la relation (3.19), il vient :

$$f = \frac{U^+_{DNS} - \Phi_{log}}{\Phi_w - \Phi_{log}} \tag{3.20}$$

Comme en témoigne la figure (3.6a),on note la présence d'une singularité au voisinage de $y^+ = 10$. Celle-ci est due au fait que les courbes représentatives de Φ_w et Φ_{log} se coupent en ce point, d'où une indétermination qui apparaît dans (3.20). Ce type de fonction est difficile à modéliser et on préfère de manière générale travailler avec des fonctions bornées ne présentant aucun risque d'explosion au voisinage d'un point. Deux solutions sont alors possibles à ce stade : la modification du type de pondération utilisé ou la modification des fonctions de comportement logarithmique ou proche paroi de manière à éviter leur intersection. Or il se trouve que la partie logarithmique est uniquement valable si y^+ est supérieur à 20. L'intersection ayant lieu en $y^+ \approx 11$, il est possible, sans affecter le comportement asymptotique en zone logarithmique de notre fonction, d'amortir Φ_{log} de manière à ce que Φ_w et Φ_{log} ne se coupent pas. On introduit ainsi la fonction :

$$d(y^+) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{y_0}\right)^n\right) \tag{3.21}$$



a) Evaluation *a priori* sans amortissement

b) Evaluation *a priori* avec amortissement

FIGURE 3.6 – a) Evaluation de f *a priori* à partir des données DNS de Kasagi à $Re_\tau = 650$ (equation (3.20)) b) Evaluation de f *a priori* avec prise en compte de l'amortissement de Φ_{log}.

et on pose

$$\Phi_{log} = d(y^+)\left[\frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B\right] \tag{3.22}$$

On obtient maintenant une fonction f régulière, sans singularité et bornée entre 0 et 1 (figure (3.6b)). Ce type d'allure est relativement bien représenté par les fonctions du type

$$f(y^+) = \exp\left(-C^{ste}y^n\right) \tag{3.23}$$

On souhaite par ailleurs récupérer le comportement asymptotique à l'ordre 4 dégagé dans la partie précédente pour U^+. On impose donc :

$$f(y^+) = \exp(-\frac{C_{\overline{uv}}}{4}y^{+3}) \tag{3.24}$$

De cette façon, étant donné le développement limité à l'ordre 3 de f :

$$f(y^+) = 1 - \frac{C_{\overline{uv}}}{4}y^{+3} + o(y^{+3}) \tag{3.25}$$

on peut établir :

$$\Phi_w(y^+)f(y^+) = y^+ - \frac{C_{\overline{uv}}}{4}y^{+4} + o(y^{+4}) \tag{3.26}$$

qui correspond au développement asymptotique de U^+ supposé indépendant de Re_τ (développé au paragraphe 3.2.1.1). Une analyse plus fine sur la fonction d'amortissement $d(y^+)$ permet alors d'identifier le jeu de paramètres suivants comme celui permettant la meilleure estimation de la zone tampon :

$$n = 2.25 \quad \text{et} \quad y_0 = 14.5 \tag{3.27}$$

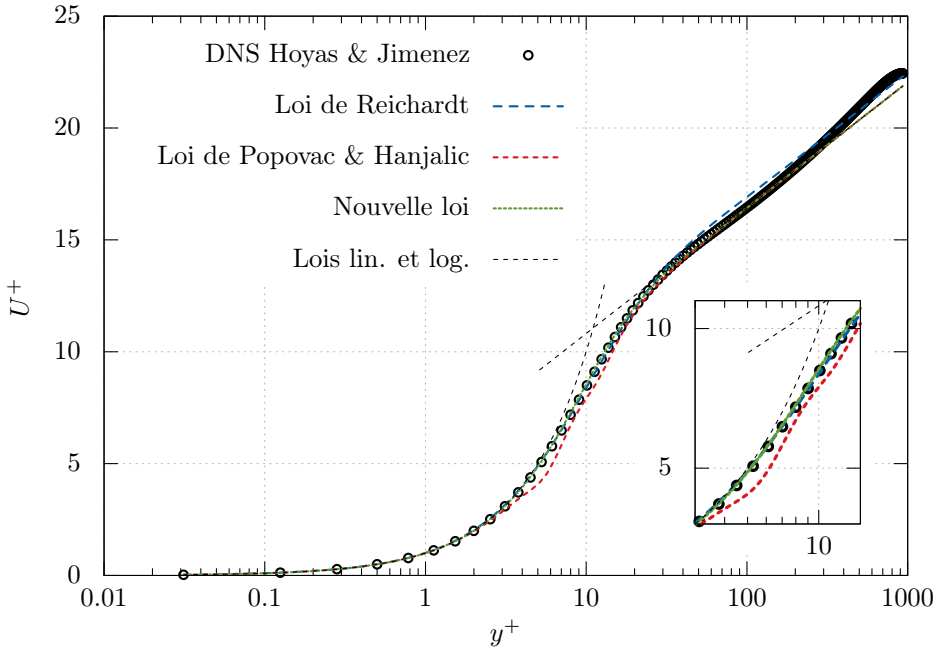


FIGURE 3.7 – Comparaison de la loi de Reichardt [Reichardt 1951], de Popovac et Hanjalic [Popovac 2007] et de la nouvelle loi (3.28) avec les données DNS de Hoyas et Jimenez à $Re_\tau = 950$ [Hoyas 2006].

On choisit donc à partir de maintenant la loi suivante :

$$\begin{aligned} U^+ &= f\Phi_w + (1-f)\Phi_{log} \\ f(y^+) &= exp\left(-\frac{C_{\overline{uv}}}{4}y^{+3}\right) \\ \Phi_w(y^+) &= y^+ \\ \Phi_{log}(y^+) &= d(y^+)\left[\frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B\right] \\ d(y^+) &= 1 - exp\left(-\left(\frac{y^+}{y_0}\right)^n\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

avec

$$C_{\overline{uv}} = 1.0674 \cdot 10^{-3} \qquad n = 2.25 \qquad y_0 = 14.5 \tag{3.29}$$

ainsi que les constantes de la loi logarithmique

$$\kappa = 0.41 \qquad B = 5.2 \tag{3.30}$$

Dans toute la suite de cette thèse on notera par $\widetilde{\cdot}$ toute loi de paroi utilisée au sein d'une cellule de paroi pour en déterminer les conditions aux limites. On note ainsi $\widetilde{U}^+$ la loi de paroi pour la vitesse (3.28).

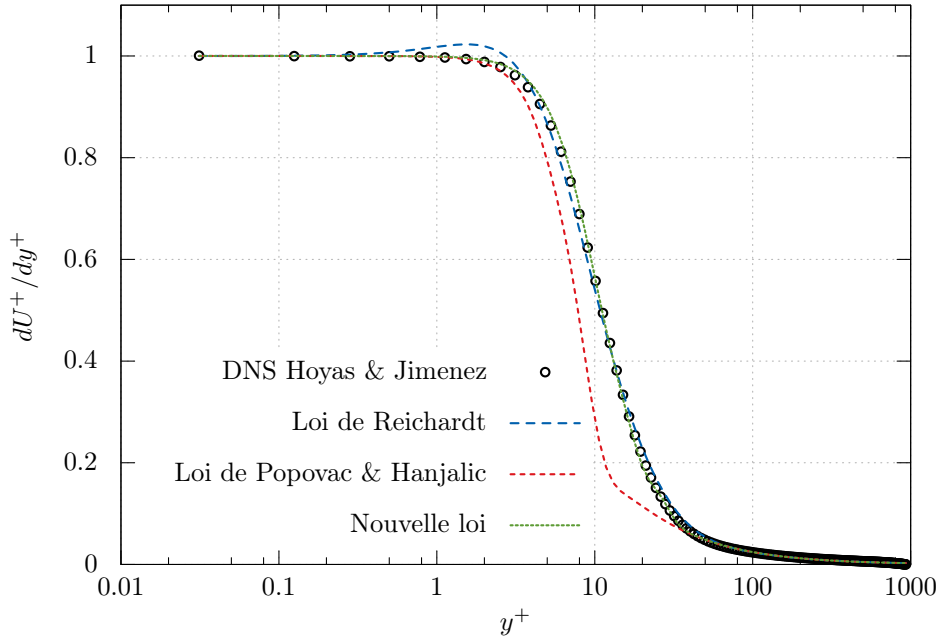


FIGURE 3.8 – Comparaison du gradient de la loi de Reichardt [Reichardt 1951], de Popovac et Hanjalić [Popovac 2007] et de la nouvelle loi (3.31) avec les données DNS de Hoyas et Jimenez à $Re_\tau = 950$ [Hoyas 2006].

La dérivation suivant y^+ de cette loi permet également de déterminer une variation analytique du gradient de vitesse :

$$\widetilde{S}^+ = \frac{d\widetilde{U}^+}{dy^+} \tag{3.31}$$

Une comparaison de cette loi et de sa dérivée avec certaines lois de la littérature est donnée dans les figures (3.7) et (3.8), respectivement. On remarque un très bon comportement de la loi nouvelle loi (3.28) et de sa dérivée, notamment en zone tampon. De la même manière, en se rappelant que, lorsque $Re_\tau \to \infty$:

$$\frac{dU^+}{dy^+} - R_{12}^+ = 1 \tag{3.32}$$

on peut écrire, pour la production d'énergie cinétique turbulente P :

$$P^+ = -R_{12}^+ \frac{dU^+}{dy^+} = \frac{dU^+}{dy^+}\left(1 - \frac{dU^+}{dy^+}\right) \tag{3.33}$$

On peut donc proposer une loi pour la production d'énergie cinétique P :

$$\widetilde{P}^+ = \widetilde{S}^+\left(1 - \widetilde{S}^+\right) \tag{3.34}$$

De la même manière, une illustration de cette loi est donnée en figure (3.9). Encore une fois, on note la supériorité de la nouvelle loi dans la prédiction du pic de production au sein de la zone tampon et de la sous-couche visqueuse.

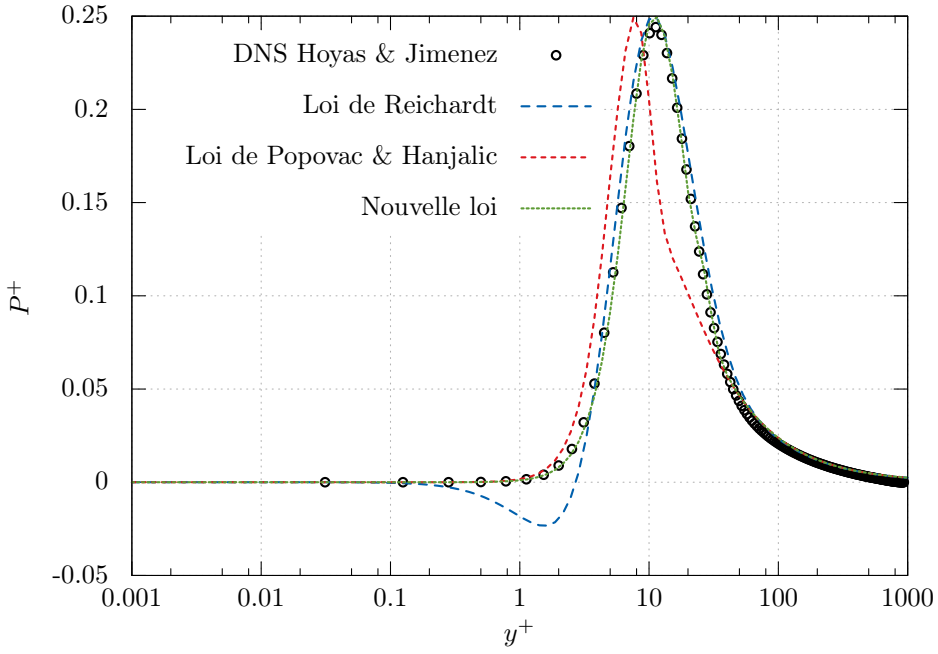


FIGURE 3.9 – Comparaison de la production P issue de la loi de Reichardt [Reichardt 1951], de Popovac et Hanjalić [Popovac 2007] et de la nouvelle loi (3.34) avec les données DNS de Hoyas et Jimenez à $Re_\tau = 950$ [Hoyas 2006].

3.2.1.3 Prise en compte du gradient de pression

Lorsque l'on sort du cadre du canal plan pleinement turbulent ou de la couche limite, les termes inertiels et de gradient de pression des équations de Navier-Stokes viennent perturber l'équilibre ayant permis de mettre en avant le profil « universel » logarithmique de la vitesse pour $30 < y^+ < 120$. En effet, il est bien plus fréquent lors de calculs industriels d'obtenir des profils de vitesse quelconques et dont la loi logarithmique est une approximation erronée (voir par exemple la figure (2.4) au chapitre précédent). Intégrer ces effets au sein d'une loi de paroi sur U est donc particulièrement important, et de nombreux auteurs s'y sont affairés. La proposition la plus aboutie est sans doute celle de Skote et Henningson [Skote 2002] qui proposèrent pour les écoulements à gradient de pression adverse :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\left[\ln(y^+) - 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+\lambda y^+}+1}{2}\right) + 2(\sqrt{1+\lambda y^+}-1)\right] + B \tag{3.35}$$

avec

$$\lambda = \left(\frac{u_p}{u_\tau}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\right) \tag{3.36}$$

Cette expression est en réalité la solution analytique de l'équation suivante :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{\sqrt{1+\lambda y^+}}{\kappa y^+} \tag{3.37}$$

elle-même issue de l'équation de quantité de mouvement suivant x, en faisant l'hypothèse de longueur de mélange $\nu_t^+ = \kappa y^+$. Cette loi se comporte de manière excellente mais est inapplicable dans les cas où $1 + \lambda y^+ < 0$. Cela n'a rien de surprenant, puisque dès lors, les hypothèses ayant abouti à cette loi ne sont plus valables. On peut alors supposer, sans nuire au cadre de la loi, que l'on ne s'écarte que faiblement de l'équilibre :

$$\lambda y^+ \ll 1 \tag{3.38}$$

On cherche ainsi à écrire une relation qui reste proche de l'équation (3.35) pour $\lambda y^+ \ll 1$, mais qui n'a pas de problèmes de racine négative (même si on ne peut raisonnablement pas espérer qu'elle soit juste si $1+\lambda y^+ < 0$). On remarque alors que, sous cette hypothèse, un développement limité à l'ordre 1 de l'équation (3.37) permet d'écrire :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{\sqrt{1+\lambda y^+}}{\kappa y^+} = \frac{1}{\kappa y^+} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\kappa} + o(y^+) \tag{3.39}$$

L'intégration de cette dernière équation nous mène alors à l'expression suivante pour la loi de vitesse :

$$\widetilde{U}^+ = \frac{1}{\kappa}\left[\ln(y^+) + \frac{1}{2}\lambda y^+\right] + B \tag{3.40}$$

Les effets de pression sont donc contenus dans le terme linéaire λy^+ faisant dévier la loi logarithmique standard. On notera que cette expression est également un développement limité à l'ordre 1 de l'équation (3.35). Cette loi est à rapprocher des travaux de Popovac et Hanjalić [Popovac 2007], qui proposent la loi suivante pour la vitesse :

$$\widetilde{U}^+_{PH} = \frac{1}{\kappa\Psi}\ln\left(Ey^+\right) \quad \text{avec} \quad \Psi = 1 - \frac{\lambda y^+}{U^+\kappa} \tag{3.41}$$

On notera la dépendance à U^+ du coefficient Ψ : ce coefficient est calculé à l'aide du terme λ issu de l'itération précédente ainsi que de la vitesse issue de l'itération précédente. A titre indicatif, il est possible de retrouver une formulation comparable à l'équation (3.40) en considérant que le terme de vitesse U^+ apparaissant dans Ψ est également issu de la loi ($U^+ = \widetilde{U}^+_{PH}$). On aboutit alors à l'expression suivante :

$$\widetilde{U}^+_{PH} = \ln\left(Ey^+\right) + \lambda y^+ \tag{3.42}$$

Ces deux lois présentent de très bons résultats en couche limite soumise à un gradient de pression, comme en témoigne la figure (3.10), présentant les données expérimentales de Nagano et al. [Nagano 1998] pour le développement d'une couche limite soumise à un gradient de pression adverse. Dans leur publication originale, Popovac et Hanjalić autorisent également leur loi à contenir non seulement des informations sur le gradient de pression mais aussi des informations sur les termes inertiels. Il est en effet tout à fait possible d'inclure les termes inertiels [2] dans cette loi en faisant l'hypothèse que tout comme le gradient de pression, ceux-ci restent suffisamment constants au sein de la zone logarithmique, soit pour l'expression de λ :

$$\lambda = \frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{3.43}$$

2. Éventuellement de flottabilité dans le cas de phénomènes thermiques comme la convection naturelle

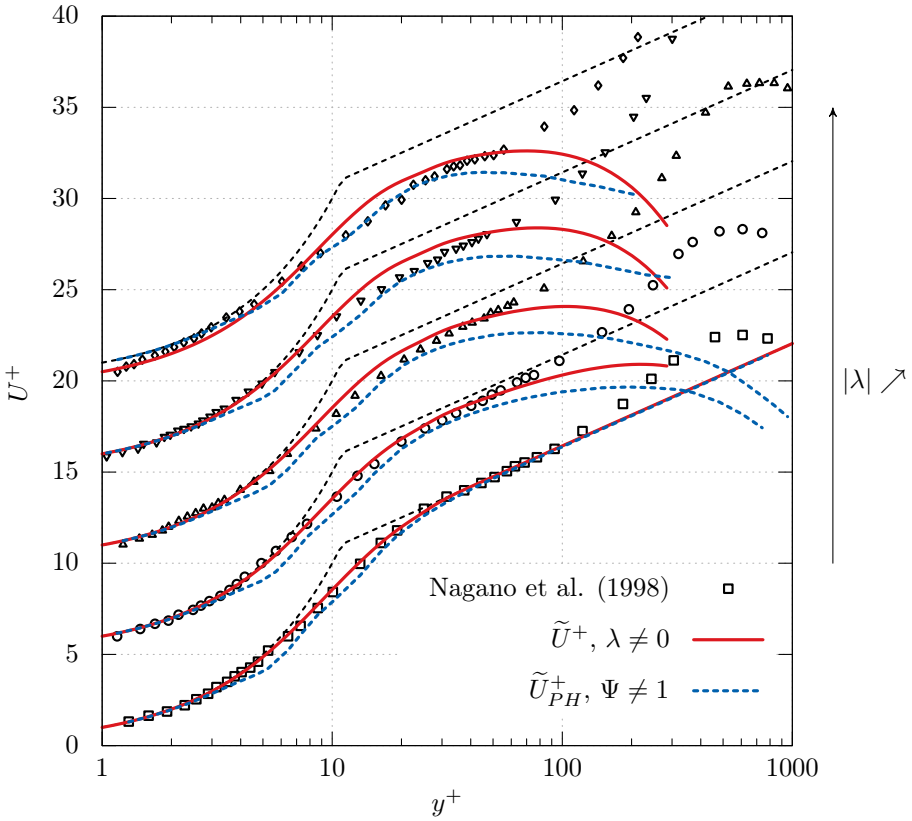


FIGURE 3.10 – Test *a priori* de la loi (3.40), avec la loi de Popovac et Hanjalic (3.41) pour différentes positions longitudinales. Données expérimentales de Nagano et al. [Nagano 1998].

Cette affirmation est relativement vraie et en adéquation avec les observations. On pourra s'en convaincre en se concentrant sur les zones vertes de la figure (3.28) représentant en zone logarithmique le bilan de l'équation de la quantité de mouvement suivant x à différentes positions, pour le calcul d'un jet en impact sur une plaque plane avec le modèle EB-RSM (paragraphe 2.4.2.1). Par souci de clarté, et ceux-ci étant *quasi* nuls dans la zone considérée, les termes de diffusion ont été omis.

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à la prise en compte de termes supplémentaires dans la loi de paroi sur la vitesse, notamment en LES. Hickel et al. [Hickel 2012] émettent par exemple des doutes, montrant que pour une couche limite soumise à un gradient de pression adverse, les termes inertiels équilibrent presque exactement le terme de gradient de pression. En d'autres termes, en zone logarithmique, on aurait :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} \approx U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.44}$$

Le terme λ serait donc nul et n'aurait que peu d'impact sur la loi. Il est intéressant de noter que cette observation est vérifiée sur la figure (3.11) en $x/D = 0.5$ mais pas lors du redéveloppement de la couche limite. Lorsque $x/D > 0.5$ les termes inertiels sont équilibrés par $\partial_y R_{12}$. Leur valeur absolue est cependant moins importante.

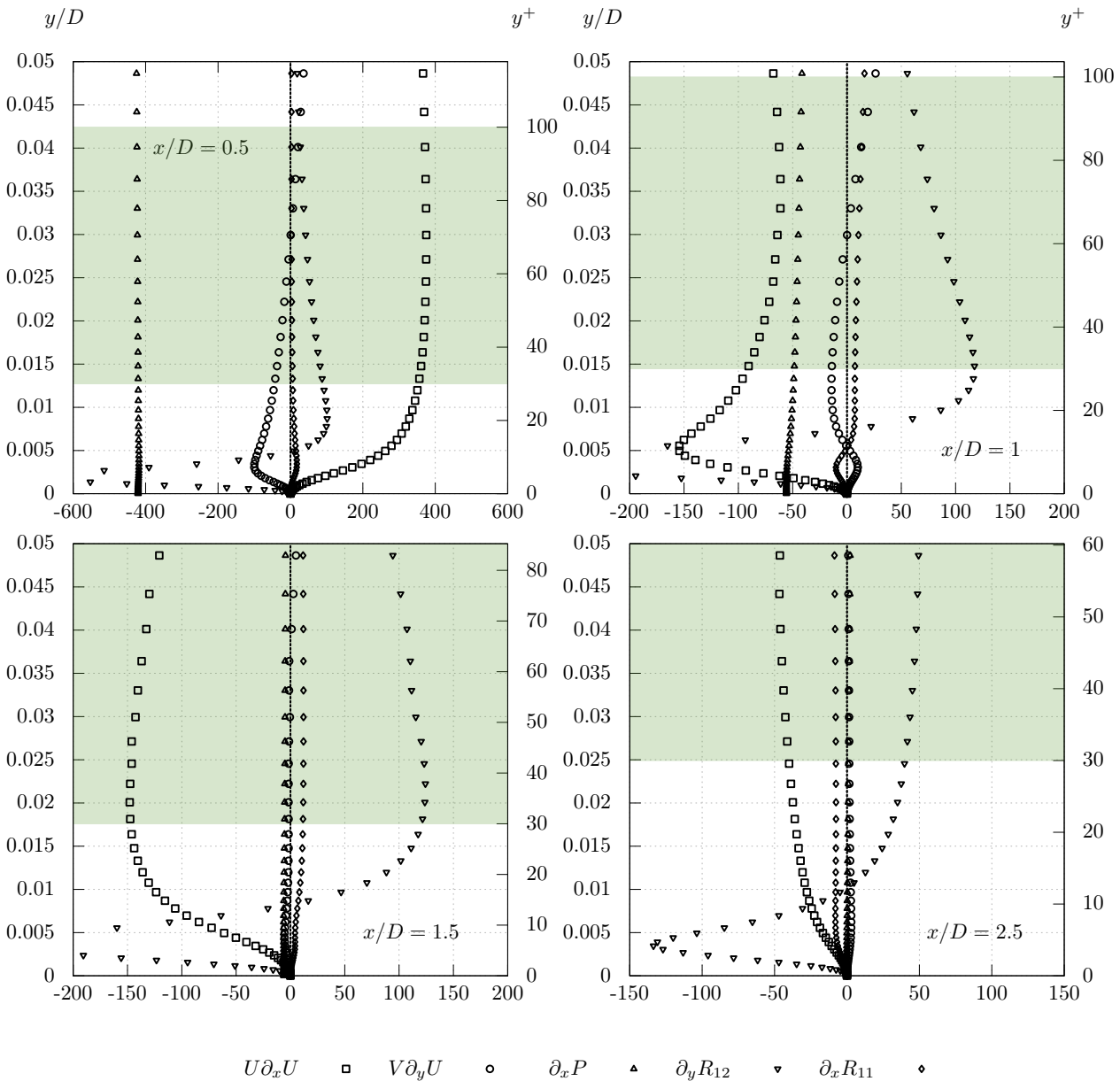


FIGURE 3.11 – Jet axisymétrique impactant une plaque plane à $Re = 23000$. Bilans de QDM suivant x.

Pour se convaincre de l'effet de l'introduction de termes « hors équilibres » dans $\widetilde{U}^+$, la nouvelle loi (équation 3.40) ainsi que la loi de Popovac et Hanjalić (équation 3.41) sont tracées dans la figure (3.12) et comparées aux résultats obtenus avec le modèle EB-RSM en adhérence sur le cas d'un jet axisymétrique impactant une plaque plane. Le coefficient λ (équation 3.43) est dans chaque cas estimé *a posteriori* à partir du calcul utilisant le modèle EB-RSM :

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^+ &= \widetilde{U}^+(y^+, \lambda_{\text{EB-RSM}}) \\ \widetilde{U}^+_{PH} &= \widetilde{U}^+_{PH}(y^+, \lambda_{\text{EB-RSM}}, U^+_{\text{EB-RSM}}) \end{aligned} \tag{3.45}$$

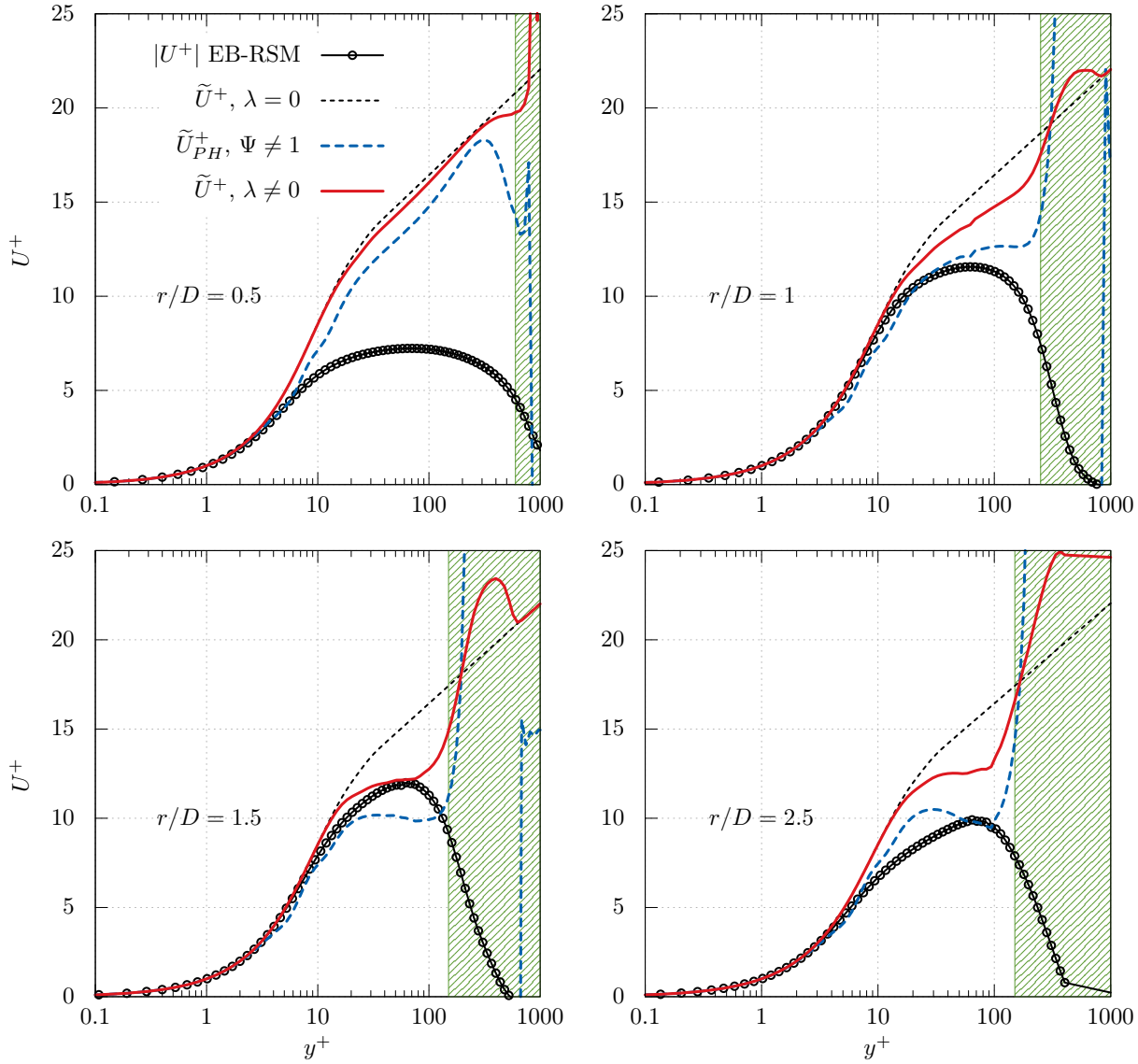


FIGURE 3.12 – Jet axisymétrique impactant une plaque plane à $Re = 23000$. Profils dans la direction normale à la paroi pour différentes positions r/D. Test *a priori* de la loi (3.40), avec la loi de Popovac et Hanjalic (3.41) et des données de calculs EB-RSM en adhérence.

De manière générale, les deux lois permettent d'obtenir un profil de U^+ un peu plus proche de son profil réel. Malgré tout, il n'est pas possible de reproduire certains effets comme pour le profil en $r/D = 0.5$, proche du point d'impact pour lequel la physique en jeu est beaucoup plus complexe que les hypothèses émises pour la construction des lois. On retrouve ici les conclusions apportées précédemment : termes inertiels et de gradient de pression étant en équilibre, on ne dévie que très peu de la loi logarithmique. En revanche, à mesure que la couche limite se redéveloppe, le terme λ devient important et on observe une déviation importante de la loi logarithmique. Les zones hachurées en vert sur la figure illustrent le domaine de non validité qualitatif de ces lois.

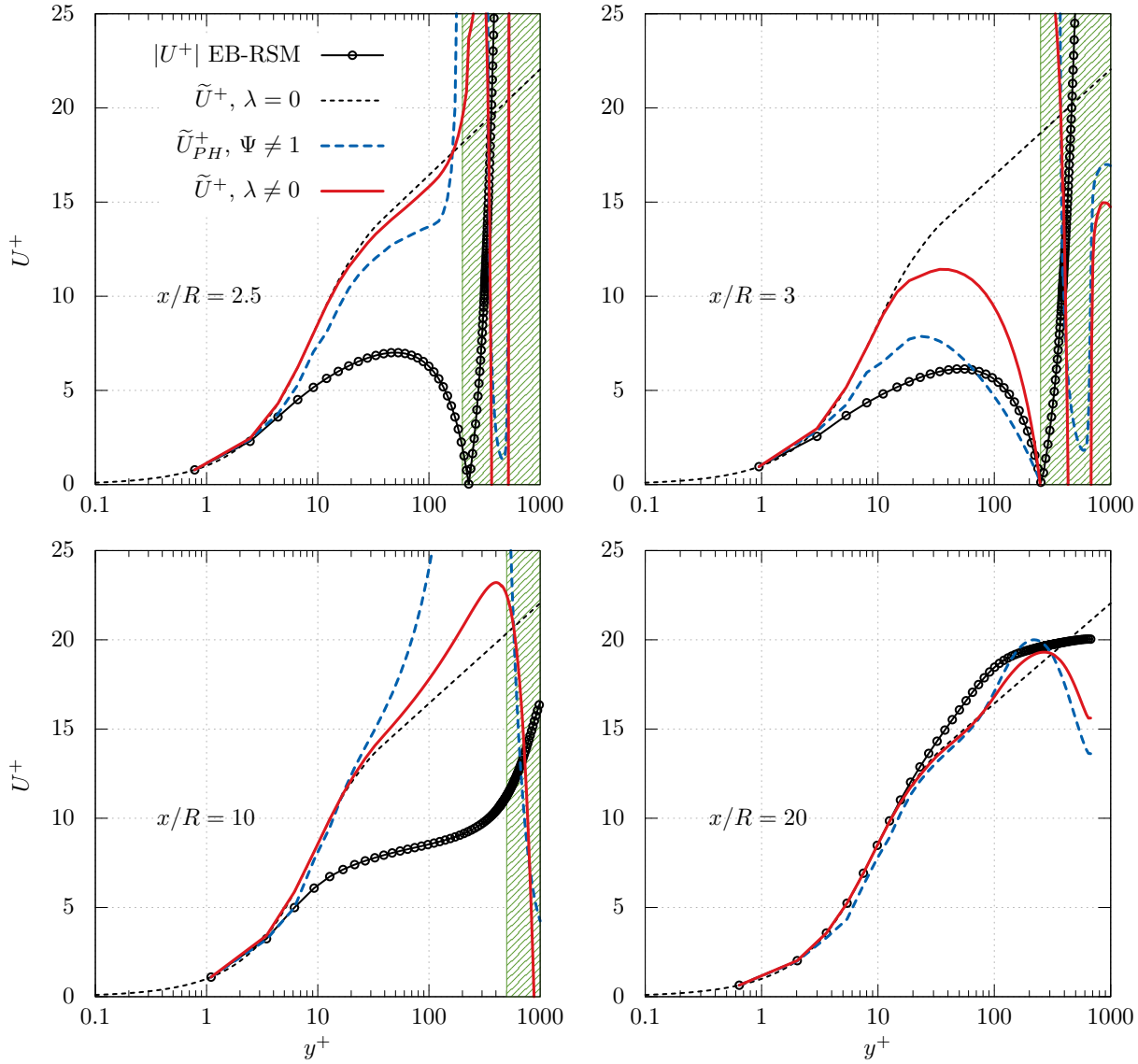


FIGURE 3.13 – Ecoulement en aval d'un diaphragme $Re = 25000$. Test *a priori* de la loi (3.40), avec la loi de Popovac et Hanjalić (3.41) et des données de calculs EB-RSM en adhérence.

Le même test a été conduit pour l'écoulement en aval d'un diaphragme. Ce cas présentant une zone de recirculation, la figure (3.13) présente des profils de la valeur absolue de la vitesse. Les lois offrent une légère amélioration des profils analytiques au sein de la zone de recirculation ($x/R = 2.5$ et 3) mais sont incapables de prédire correctement la zone en aval du recollement du profil ($x/R = 10$). Lorsque le profil se redéveloppe, on tend à nouveau vers une loi logarithmique standard ($x/R = 20$).

Il est difficile de conclure quant à la supériorité de la nouvelle loi ou de la loi de Popovac et Hanjalić. Bien que cette dernière semble plus en accord avec le modèle EB-RSM au sein de la zone de recirculation du diaphragme, la nouvelle loi présente une légère amélioration sur le

cas du jet en impact. Il est à noter qu'il est tout a fait possible de faire dégénérer la nouvelle loi vers des résultats similaires à la loi de Popovac et Hanjalić : il suffit pour cela de prendre le coefficient devant le terme λ égal à 1 (comme le suggère l'équation (3.42)).

3.2.2 Loi de paroi pour le paramètre α

α est le paramètre de pondération utilisé dans l'EB-RSM de manière à relier le comportement homogène et le comportement de proche paroi des grandeurs turbulentes. Ce paramètre est solution de l'équation elliptique :

$$\begin{cases} \alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1 \\ \alpha|_w = 0 \end{cases} \tag{3.46}$$

avec L l'échelle de longueur intégrale

$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}; C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{3.47}$$

La figure (3.14) illustre le comportement de ce paramètre pour différents calculs de canal plan pleinement développés et pour une large plage de nombres de Reynolds turbulents ($10^2 < Re_\tau < 10^5$). On peut remarquer une quasi indépendance de ce paramètre au nombre de Reynolds turbulent.

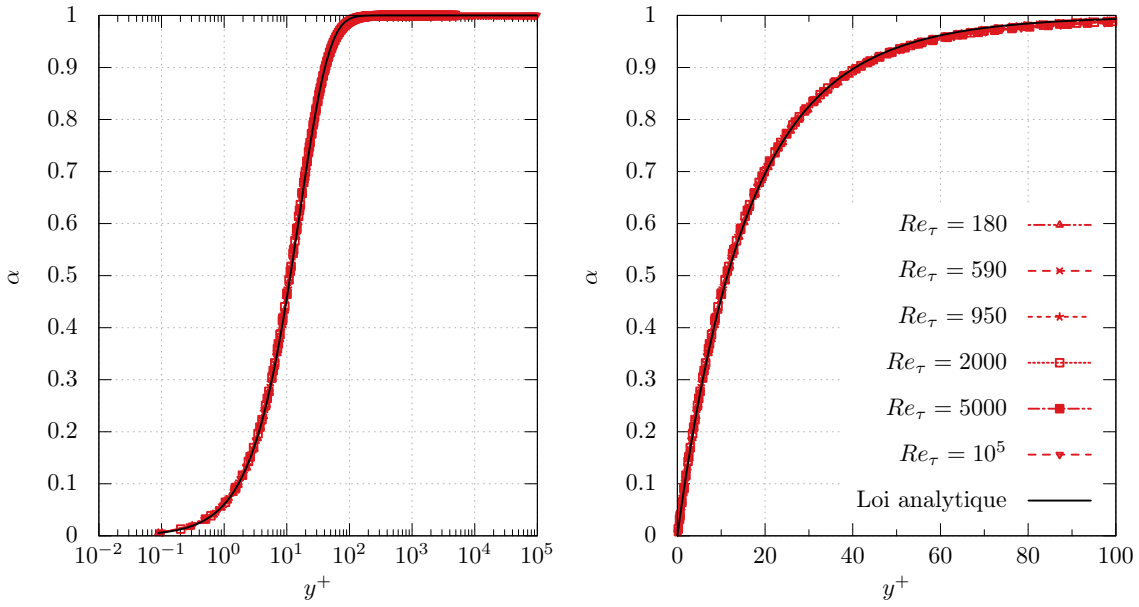


FIGURE 3.14 – Profil du paramètre α pour différents calculs en canal pleinement turbulent avec le modèle EB-RSM $Re_\tau \in \{180, 590, 950, 2000, 5000, 10^5\}$. ***A gauche :*** Profils en échelle logarithmique. ***A droite :*** Profils en proche paroi avec échelle linéaire.

Il est donc légitime de construire une loi analytique fonction de y^+ pour α. Partant alors de l'observation que si L était constant, la solution de l'équation (3.46) serait :

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\frac{y}{L}\right) \tag{3.48}$$

on propose d'introduire une variation linéaire dans l'expression de L. Cette variation linéaire est fixée de manière à interpoler au mieux les données EB-RSM en canal plan. On aboutit ainsi à l'expression suivante pour α :

$$\widetilde{\alpha} = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{16 + 0.04y^+}\right) \tag{3.49}$$

Comme en témoigne la figure (3.14), cette loi montre une excellente concordance avec les données EB-RSM en canal.

3.2.3 Loi de paroi pour le taux de dissipation ε

De manière à prescrire la valeur du taux de dissipation au sein de la première cellule de proche paroi il est nécessaire de construire une loi de paroi pour ε. Les comportements en proche paroi et en zone homogène pour ε sont respectivement définis par les relations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_w(y^+) &= 2\nu\frac{k_p}{y^2} \\ \varepsilon_h(y^+) &= \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Ces comportements sont bien connus mais le comportement de ε en zone homogène peut poser problème. En effet, l'expression, de la forme $1/y$, tend vers l'infini en proche paroi. Ceci rend l'établissement d'une loi relativement compliqué. On adopte donc la même approche que pour la construction de la loi de vitesse pour définir la loi pour le taux de dissipation, à savoir :

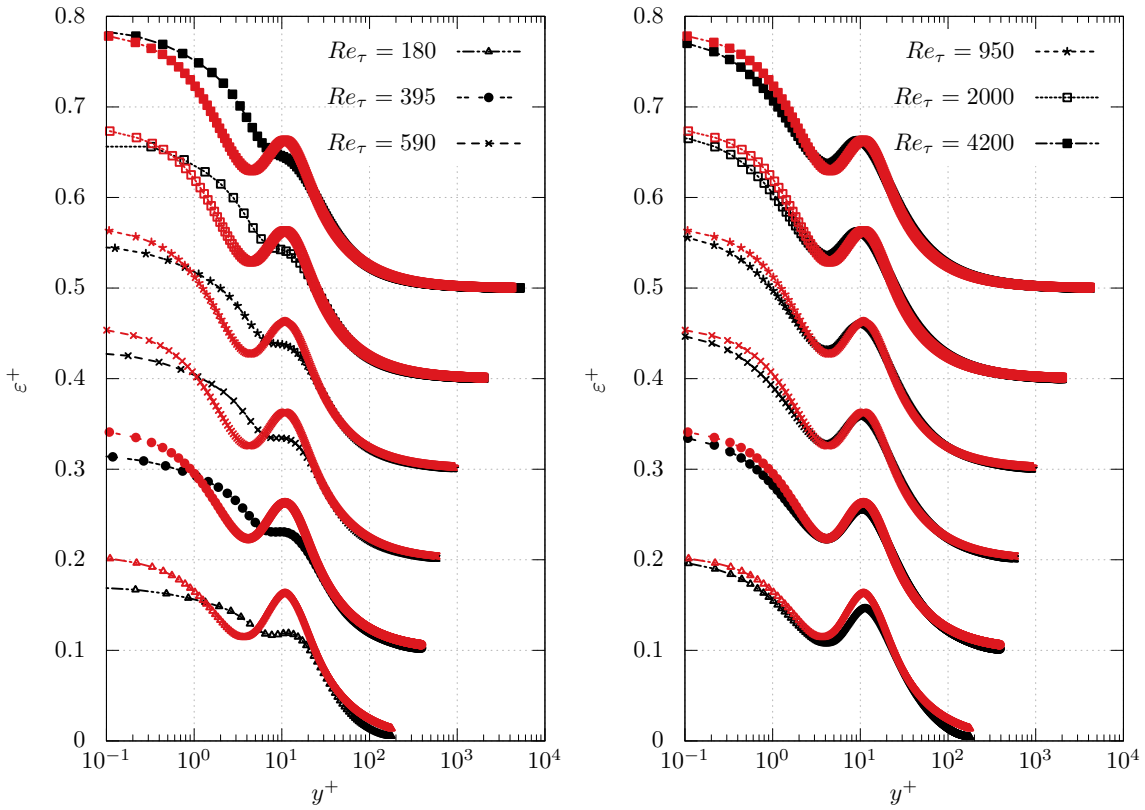
$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon}^+ &= f_\varepsilon\varepsilon_w + (1 - f_\varepsilon)d_\varepsilon\varepsilon_{log} \\ f_\varepsilon &= \exp\left(-\left(\frac{y^+}{C_{f_\varepsilon}}\right)^{3/2}\right) \\ d_\varepsilon &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{y_{0_\varepsilon}}\right)^{n_\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{3.51}$$

avec $C_{f_\varepsilon} = 4.0$, $n_\varepsilon = 2.1$ et $y_{0_\varepsilon} = 9$. Ce jeu de coefficient, comme pour la vitesse, est obtenu de manière relativement empirique et est celui qui reproduit au mieux la zone tampon. La figure (3.15) compare la loi de paroi avec les données DNS ainsi qu'avec les données issues de calcul EB-RSM en canal. On note un excellent accord entre la loi et les différents profils associés. Il est à noter que tout a été fait pour que la loi se rapproche du résultat du modèle, et non de ceux des données DNS comme semblent le suggérer Popovac et Hanjalic [Popovac 2007], Basara [Basara 2006] et Rahman et Siikonen [Rahman 2012].

3.2.4 Loi de paroi pour k et détermination du frottement à la paroi

La loi de paroi sur la vitesse $\widetilde{U}^+$ a pour but de fournir une estimation de la vitesse de frottement u_τ au sein de chaque cellule de proche paroi. Historiquement, la première stratégie fut de résoudre à chaque pas de temps le système implicite :

$$\frac{U_p^{(n)}}{u_\tau} = \widetilde{U}^+\left(\frac{y_p u_\tau}{\nu}\right) \tag{3.52}$$



a) Comparaison *a priori* avec DNS

b) Comparaison *a priori* avec EB-RSM

FIGURE 3.15 – ***a)*** Comparaison *a priori* de $\widetilde{\varepsilon}^+$ avec des données DNS en canal pour $Re_\tau \in \{180, 590, 950, 2000, 4200\}$ ***b)*** Comparaison *a priori* de $\widetilde{\varepsilon}^+$ avec des résultats de calcul EB-RSM en canal pour $Re_\tau \in \{180, 395, 590, 950, 2000, 4200\}$

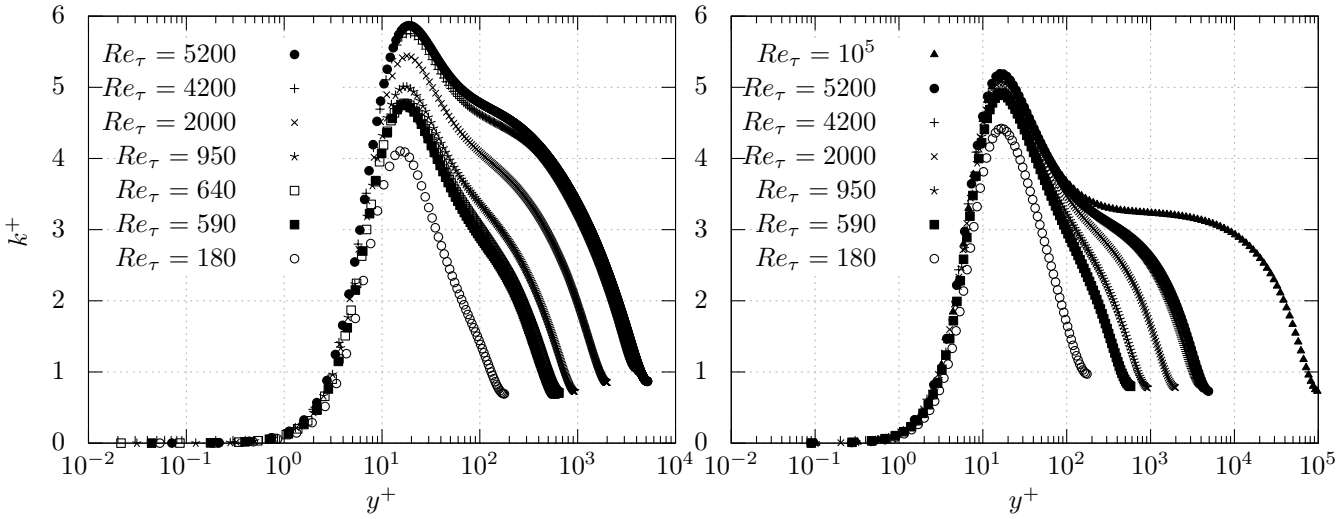
Mais la littérature (voir chapitre 2) montre qu'en présence d'écoulement complexe, il est nécessaire d'introduire une seconde échelle de vitesse basée sur la turbulence permettant d'avoir une échelle non nulle au point d'impact ou de recollement par exemple. Il est d'usage en CFD d'utiliser :

$$u_k = C_\mu^{1/4} \sqrt{k_p^{(n)}} \tag{3.53}$$

Cette échelle tire parti de l'invariance du rapport $\overline{uv}/k$ en zone logarithmique pour une couche limite pleinement turbulente. Cette hypothèse cesse cependant d'être vraie à mesure qu'on pénètre dans la zone tampon puis dans la sous-couche visqueuse. Il est donc faux d'utiliser une telle échelle indépendamment de la distance à la paroi. Diverses stratégies existent dans la littérature. Il est ainsi possible, et c'est le choix retenu dans *Code_Saturne* [Archambeau 2004] de faire converger u_k vers la valeur de u_τ à mesure qu'on se rapproche de la paroi :

$$u_k = \sqrt{(1-g) C_\mu^{1/2} k_p + g\nu \frac{U_p}{y_p}} \quad \text{avec} \quad g = \exp\left(-\frac{Re_y}{11}\right), \quad Re_y = \frac{\sqrt{k_p} y_v}{\nu} \tag{3.54}$$

Popovac et Hanjalić [Popovac 2007] proposent malgré tout de garder l'échelle $u_k = C_\mu^{1/4}\sqrt{k_p}$ indépendamment de savoir si l'on se trouve dans la zone logarithmique ou non. Cependant,



a) Données DNS de canaux b) Données EBRSM de canaux

FIGURE 3.16 – a) Profils de k^+ pour $Re_\tau \in \{180, 590, 640, 950, 2000, 4200, 5000\}$ b) Profils de k^+ pour le modèle EBRSM aux mêmes Reynolds.

si on souhaite avoir une bonne estimation de y^+ pour construire d'autre lois fonction de y^+ uniquement, ces approches ne sont pas optimales. Une alternative consiste à comprendre que l'équation (3.53) peut s'écrire :

$$\frac{k_p^{(n)}}{u_k^2} = C_\mu^{-1/2} \tag{3.55}$$

Billard et al. [Billard 2015] suggèrent alors de remplacer la fonction constante $C_\mu^{-1/2}$ par une fonction variable. Cette fonction dégénérerait vers $C_\mu^{-1/2}$ en zone logarithmique. Dans ce cas, u_k devient solution du système implicite :

$$\frac{k_p^{(n)}}{u_k^2} = \widetilde{k}^+\left(\frac{y_p u_k}{\nu}\right) \tag{3.56}$$

où $\widetilde{k}^+$ est une loi de paroi analytique sur l'énergie cinétique turbulente k. L'astuce consiste ici à traiter k de la même manière qu'on traite la vitesse. Il est cependant légitime de s'interroger sur l'existence d'une telle loi « universelle » pour k. En effet, alors qu'on a montré que cette loi existait pour la vitesse et que cette universalité est clairement visible sur les données DNS, qu'en est-il pour l'énergie turbulente ? De prime abord, la figure (3.16a) semble montrer qu'il n'existe aucun comportement universel. Certaines études récentes suggèrent même l'apparition d'un second pic lorsque $Re_\tau \to +\infty$ [Hoyas 2006] [Marusic 2010].

Cependant, la modélisation RANS est à l'heure actuelle dans l'impossibilité de prédire cette physique, due à des effets instationnaires complexes. Les calculs EB-RSM pour différents nombres de Reynolds de la figure (3.16b) montrent en effet que le pic de k n'augmente plus à partir d'une certaine valeur. En plus d'une certaine universalité du profil en proche paroi, on remarque, pour des nombres de Reynolds turbulents très élevés (le cas à $Re_\tau = 10^5$), que le profil de k tend vers

une constante : il est donc tout à fait légitime de chercher une loi « universelle » pour représenter les solutions de l'EB-RSM.

On part d'une hypothèse de viscosité turbulente :

$$\nu_t = f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.57}$$

Lorsque l'on se situe en *Haut-Reynolds*, la fonction f_μ est classiquement constante et égale à C_μ. Le comportement asymptotique de k à la paroi est en $O(y^{+2})$. De manière à assurer le bon comportement asymptotique de $\overline{uv}^+$ en $O(y^{+3})$, la fonction f_μ doit donc se comporter comme $1/y^+$ à la paroi (ε se comportant en $O(1)$). On fait donc l'hypothèse que f_μ peut se mettre sous la forme suivante :

$$f_\mu = f_1 \frac{C_w}{y^+} + (1 - f_1)\, C_\mu, \qquad f_1 \text{ fonction de } y^+ \tag{3.58}$$

où C_w est une constante à déterminer. A l'aide des données DNS disponibles en canal, il est possible de définir la fonction f_1. En effet, il est possible d'évaluer ν_t de la façon suivante :

$$\nu_t|_{DNS} = \frac{-R_{12}}{S} \tag{3.59}$$

Un travail d'optimisation permet alors d'obtenir la formule suivante pour f_1 :

$$f_1 = \exp\left[-\frac{y^+}{(39 + 0.2y^+)^2}\right] \tag{3.60}$$

Finalement, la loi de paroi pour f_μ est donnée en figure (3.17).

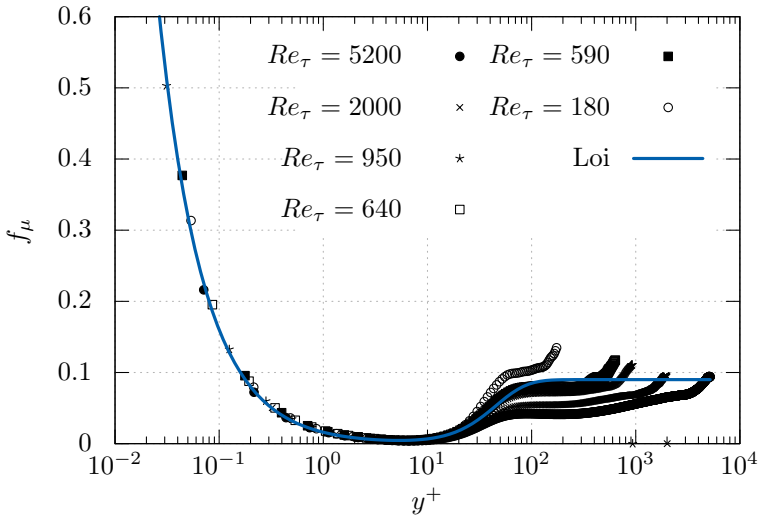


FIGURE 3.17 – Profils de f_μ pour $Re_\tau \in \{180, 590, 640, 950, 2000, 5200\}$ issus de données DNS en canal et loi (3.58).

On notera que pour déterminer f_μ, le choix a été fait d'utiliser les données DNS. En effet, le but est d'assurer un comportement en y^{+2} pour k. Or, les termes sources de l'équation de

transport pour les tensions de Reynolds assurent une condition en y^{+4} pour R_{12}, les données EB-RSM ne sont donc dans ce cas précis pas les bonnes candidates pour l'établissement de la loi de paroi de f_μ. Sous l'hypothèse (3.57) et avec l'expression de f_μ, il est donc possible d'exprimer la loi $\widetilde{k}^+$ comme solution de l'expression suivante :

$$\widetilde{P}^+ = f_\mu \frac{\widetilde{k}^{+2}}{\widetilde{\varepsilon}^+} \left(\frac{d\widetilde{U}^+}{dy^+} \right)^2 = f_\mu \frac{\widetilde{k}^{+2}}{\widetilde{\varepsilon}^+} \widetilde{S}^{+2} \tag{3.61}$$

Cette dernière équation est tout simplement l'expression de la production sous l'hypothèse de viscosité turbulente. En injectant alors la loi de paroi dégagée à la section précédente pour le taux de dissipation $\widetilde{\varepsilon}^+$, on obtient une équation du second degré sur l'énergie cinétique turbulente :

$$\widetilde{k}^{+2} - \underbrace{\left[\frac{2\widetilde{P}^+ f_\varepsilon}{f_\mu \widetilde{S}^{+2} y^{+2}} \right]}_{A_k} \widetilde{k}^+ - \underbrace{\left[\frac{\widetilde{P}^+ d_\varepsilon (1 - f_\varepsilon)}{\kappa f_\mu \widetilde{S}^{+2} y^+} \right]}_{B_k} = 0 \tag{3.62}$$

Finalement en tout point, on aboutit à la forme suivante pour $\widetilde{k}^+$:

$$\widetilde{k}^+ = \frac{A_k + \sqrt{A_k^2 + 4B_k}}{2} \tag{3.63}$$

qui est la seule solution admissible, l'autre solution étant négative. L'illustration de cette loi est donnée dans la figure (3.18). Elle fournit une excellente approximation du comportement de proche paroi de k et reproduit bien le pic se situant en zone tampon avant de recouvrer le comportement de la zone logarithmique en $C_\mu^{-1/2}$.

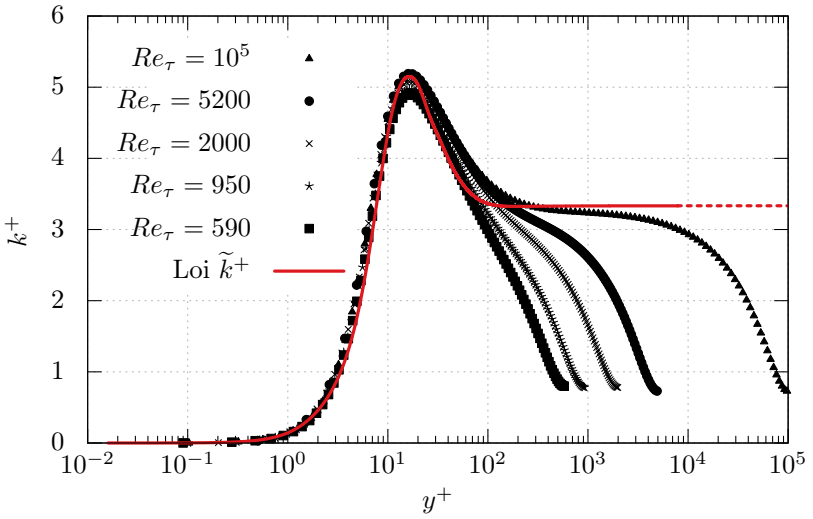


FIGURE 3.18 – Profils de k^+ pour $Re_\tau \in \{590, 950, 2000, 5200, 10^5\}$ issus de calculs EB-RSM en canal et loi de $\widetilde{k}^+$ (3.63).

Ainsi à chaque pas de temps n, un calcul permet d'établir le frottement en résolvant le système :

$$\begin{cases} \dfrac{k_p^{(n)}}{u_k^2} = \widetilde{k}^+\left(\dfrac{y_p u_k}{\nu}\right) \\ \dfrac{U_p^{(n)}}{u_\tau} = \widetilde{U}^+\left(\dfrac{y_p u_k}{\nu}\right) \\ \tau_w = \rho u_\tau u_k \end{cases} \tag{3.64}$$

Il est possible d'évaluer *a priori* le comportement de cette loi en utilisant des données DNS en canal. Pour chaque point, on calcule le coefficient de frottement τ_w estimé par la loi (3.64). Les résultats sont présentés en figure (3.19a) et comparés aux stratégies de Billard et al. [Billard 2015] et Popovac et Hanjalić [Popovac 2007]. Toutes les lois prédisent un frottement correct avec une erreur maximale de 17% pour Popovac et Hanjalić contre 9% pour Billard et al. et 3% pour la nouvelle approche. De manière générale, toutes les lois convergent vers le bon frottement sous-couche visqueuse, ce qui n'est pas surprenant, car en effet toutes les lois de vitesses sont construites de telle sorte que :

$$\frac{U_p}{u_\tau} = \frac{y_p u_k}{\nu} \qquad \Rightarrow \qquad \nu\frac{U_p}{y_p} = u_\tau u_k \tag{3.65}$$

Quelle que soit la seconde échelle de vitesse, on converge donc toujours vers le bon frottement. En revanche, cela ne garantit pas une bonne estimation de la distance adimensionnelle à la paroi $y_p u_k/\nu$, comme en témoigne la figure (3.19b) qui compare la valeur théorique de y^+ issue de la DNS et sa valeur estimée avec la vitesse de frottement u_k pour les différentes lois. Pour toutes les approches, l'estimation est correcte dans l'ensemble, avec une amélioration significative pour la nouvelle approche. En revanche, en très proche paroi ($y^+ < 1$), on remarque que les approches de Popovac et Hanjalić et Billard et al. prédisent une valeur de y^+ bien en dessous de sa valeur théorique. Le soin apporté au bon comportement asymptotique de $\widetilde{k}^+$ dans la nouvelle approche présentée ici, permet quant à elle une excellente prédiction de la valeur de y^+.

3.2.5 Lois de paroi pour les tensions de Reynolds

3.2.5.1 Modèles algébriques

Les modèles algébriques du second ordre sont des modèles pour lesquels un système d'équations algébriques est résolu de manière à connaître le tenseur d'anisotropie en tout point de l'écoulement. Associé à une équation de transport sur k, il est ainsi possible de connaître les tensions de Reynolds en tout point et à moindre frais (résolution d'une équation de transport au lieu de 6). Dans un premier temps rappelons que les équations de transport pour les tensions de Reynolds se mettent sous la forme :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_k\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} = P_{ij} + D_{ij}^{\nu} + D_{ij}^{T} + \Phi_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij} \tag{3.66}$$

Le tenseur d'anisotropie $\mathbf{b}$ se met sous la forme :

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{3.67}$$

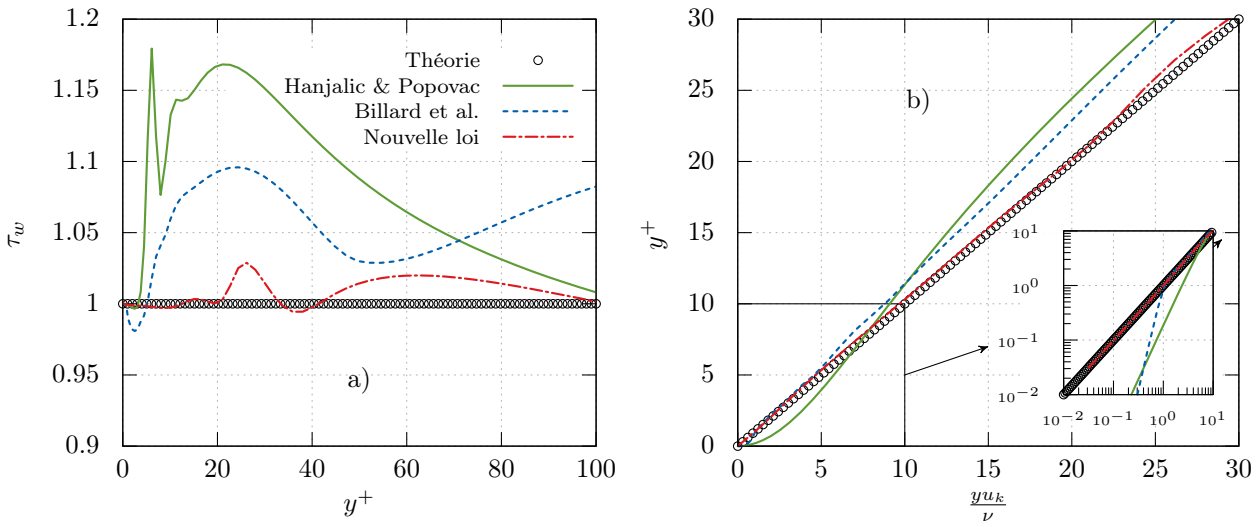


FIGURE 3.19 – ***a)*** Profil de τ_w issu de calcul *a priori* des données DNS de Hoyas et Jimenez [Hoyas 2006] à $Re_\tau = 950$, pour différentes lois de la littérature. ***b)*** Estimation de y_k^+ par rapport à la valeur théorique de y^+ pour les même lois.

Il est facile en dérivant cette expression de dégager une équation de transport pour les composantes du tenseur d'anisotropie :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2k}\frac{DR_{ij}}{Dt} - \frac{R_{ij}}{2k^2}\frac{Dk}{Dt} \tag{3.68}$$

On rappelle par ailleurs que l'équation de transport de k s'écrit quant à elle :

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + D \tag{3.69}$$

avec $P = \frac{1}{2}P_{ii}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}$ et $D = \frac{1}{2}D_{ii}$. Finalement il est possible de réécrire l'équation (3.68) :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2k}\left(P_{ij} + D_{ij} + \Phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} - \frac{R_{ij}}{k}P - \frac{R_{ij}}{k}D + \frac{R_{ij}}{k}\varepsilon\right) \tag{3.70}$$

On formule alors les hypothèses, dites d'équilibre faible, suivantes :

— Équilibre du tenseur d'anisotropie

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0 \tag{3.71}$$

— Alignement de la diffusion sur le tenseur d'anisotropie

$$\frac{D_{ij}}{D_{kk}} = \frac{R_{ij}}{R_{kk}} \tag{3.72}$$

En canal pleinement turbulent, la première hypothèse est rigoureusement vérifiée. La seconde fournit une approximation raisonnable de la diffusion. Sous ces hypothèses, l'équation (3.70) se met sous la forme :

$$\left(P_{ij} - \frac{R_{ij}}{k}P\right) + \Phi_{ij}^* - \left(\varepsilon_{ij} - \frac{R_{ij}}{k}\varepsilon\right) = 0 \tag{3.73}$$

On obtient finalement, après mise sous forme tensorielle, un système algébrique d'inconnue le tenseur d'anisotropie :

$$\left[\mathbf{P} - 2P\left(\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{I}\right)\right] + \mathbf{\Phi}^* - \left[\boldsymbol{\varepsilon} - 2\varepsilon\left(\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{I}\right)\right] = 0 \tag{3.74}$$

De manière à fermer le système précédent il est nécessaire d'introduire un modèle pour les tenseurs de redistribution et de dissipation. L'application du système au modèle EB-RSM est détaillée dans la suite.

Terme de production

Aucune modélisation n'est à introduire pour ce terme, son expression est l'expression exacte :

$$P_{ij} = -\left(R_{ik}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + R_{jk}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)$$

soit encore sous forme tensorielle :

$$\mathbf{P} = -2k\left((\mathbf{bS} + \mathbf{Sb}) + (\mathbf{Wb} - \mathbf{bW}) + \frac{4}{3}\mathbf{S}\right) \tag{3.75}$$

Terme de redistribution

L'EBRSM est le fruit d'une pondération entre un terme de redistribution homogène (Φ_h, issu du modèle SSG) et un terme de redistribution de proche paroi (Φ_w) :

$$\mathbf{\Phi}^* = (1-\alpha^3)\mathbf{\Phi}_w + \alpha^3\mathbf{\Phi}_h \tag{3.76}$$

Le terme de redistribution homogène se décompose en la somme d'un terme « lent » et d'un terme « rapide » :

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_h &= \mathbf{\Phi^1}_{SSG} + \mathbf{\Phi^2}_{SSG} \\
\mathbf{\Phi^1}_{SSG} &= -C_1\varepsilon\mathbf{b} \\
\mathbf{\Phi^2}_{SSG} &= -C_1^* P\mathbf{b} + \left(C_3 - C_3^* II^{1/2}\right)k\mathbf{S} \\
&+ C_4 k\left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bS}\}\mathbf{I}\right) \\
&+ C_5 k\left(\mathbf{Wb} - \mathbf{bW}\right)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

La forme tensorielle du terme de redistribution de proche paroi est quant à elle donnée par la relation :

$$\mathbf{\Phi}_w = 5\frac{\varepsilon}{k}\left(\mathbf{bM} + \mathbf{Mb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{M}\right) \tag{3.78}$$

avec le tenseur symétrique $\mathbf{M}$ s'écrivant :

$$M_{ij} = n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{3.79}$$

Terme de dissipation

De la même manière que pour le tenseur de redistribution, le tenseur de dissipation est issu d'une pondération entre un terme de dissipation homogène ($\boldsymbol{\varepsilon_h}$) et un terme de dissipation de proche paroi ($\boldsymbol{\varepsilon_w}$). Un modèle isotrope pour le tenseur homogène est employé :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \frac{2}{3}\varepsilon\mathbf{I} \tag{3.80}$$

Le modèle de Rotta est utilisé dans l'EB-RSM pour le tenseur de proche paroi :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_w = \varepsilon\left(2\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{I}\right) \tag{3.81}$$

Forme finale

En combinant tous ces termes de modélisation, l'équation (3.74) s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_4}\mathbf{b} - a_3\left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bS}\}\mathbf{I}\right) - a_2\left(\mathbf{Wb} - \mathbf{bW}\right) \\ - a_5\left(\mathbf{bM} + \mathbf{Mb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{M}\right) = a_1\mathbf{S} + \frac{a_5}{2}\mathbf{M} \end{aligned} \tag{3.82}$$

Les coefficients a_k sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(C_3 - C_3^* II^{1/2}\right)\alpha^3 \\ a_2 &= 1 - \frac{1}{2}C_5\alpha^3 \\ a_3 &= 1 - \frac{1}{2}C_4\alpha^3 \\ a_4 &= g\tau \\ a_5 &= \frac{5}{\tau}(1-\alpha^3) \\ g &= \left[\left(1 + \frac{C_1^*}{2}\alpha^3\right)\frac{P}{\varepsilon} + \left(\frac{13}{3} - \frac{C_1}{2}\right)\alpha^3 + \frac{13}{3} - 1\right]^{-1} \\ \tau &= \frac{k}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.83}$$

où les C_i sont les coefficients du modèle SSG et II est le second invariant du tenseur d'anisotropie[3]. Ce système peut constituer une alternative à la résolution d'équation de transport sur les tensions de Reynolds. Il est alors nécessaire de le coupler avec une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente k et une équation de transport sur le taux de dissipation ε. On notera cependant la dépendance des coefficients a_k à la production P, rendant le système non linéaire. Dans bien des cas, l'explicitation de ce terme en utilisant sa valeur issue de l'itération précédente rend le calcul extrêmement instable. De ce fait, la plupart des modèles algébriques n'utilisent pas le système précédent tel quel. Diverses hypothèses permettent ainsi de rendre le

3. Les invariants du tenseur d'anisotropie sont habituellement notés I,II et III et ont pour expression $I = \{\mathbf{b}\} = 0$, $II = -\left\{\mathbf{b^2}\right\}/2$ et $III = \left\{\mathbf{b^3}\right\}/3$. Voir par exemple dans [Pope 2000] et [Manceau 2015a].

système explicite et facilitent de ce fait la convergence du modèle. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Manceau [Manceau 2003] et Oceni [Oceni 2009] pour plus d'informations sur les modèles algébriques explicites.

Pour des raisons que l'on expliquera dans la suite, la formulation précédente est utilisée ici et on nomme ce modèle EB-IASM (*Elliptic Blending Implicit Algebraic Stress Model*). Il est possible de faire converger le modèle EB-IASM sur le cas d'un canal dont les résultats sont présentés en figure (3.20).

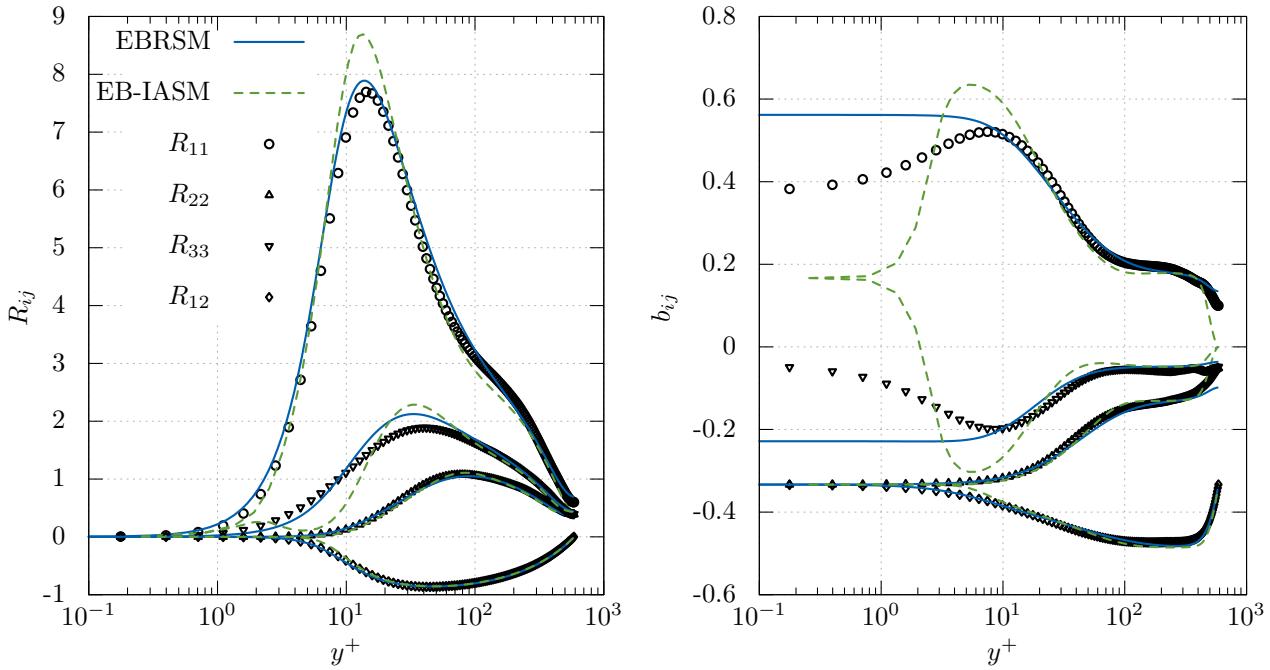


FIGURE 3.20 – Comparaison sur le cas d'un canal plan à $Re_\tau = 590$ du modèle EB-IASM avec un calcul EB-RSM et les données DNS de Hoyas et Jimenez.

La mise en défaut de l'hypothèse d'alignement des diffusions sur les tensions de Reynolds est ici clairement mise en évidence sur l'anisotropie en proche paroi : le modèle fournit des valeurs différentes de celles de l'EB-RSM. Cependant, il est important de noter que ces différences ne se reportent qu'à la marge sur les tensions de Reynolds. En effet, on observe, qualitativement, un bon accord entre les EB-IASM et EB-RSM sur les tensions de Reynolds.

Cette illustration fait poindre l'utilité d'un tel système : moyennant une bonne estimation de la valeur de l'énergie cinétique turbulente k, il est possible d'obtenir une estimation relativement correcte des tensions de Reynolds au travers de la résolution du système algébrique.

3.2.5.2 Application aux lois de parois

La plupart des lois de paroi utilisent l'hypothèse d'une diffusion nulle quelle que soit la localisation du premier point de calcul, se traduisant par la condition à la limite suivante sur les

tensions de Reynolds :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial n} = 0 \tag{3.84}$$

Cette hypothèse est cependant fausse en zone tampon et nécessite de prime abord un traitement plus fin. Cette idée est soutenue par Kalitizin et al. [Kalitzin 2004] : *« Bien que cette hypothèse soit vraie dans la sous couche visqueuse ainsi que dans la zone logarithmique, c'est loin d'être le cas dans la zone intermédiaire* $5 \leq y^+ \leq 30$. *C'est cette zone qui représente un challenge pour les méthodes adaptatives »* . Or, les hypothèses faites sur le système algébrique semblent contenir plus d'informations. En effet, l'hypothèse (3.72) ne suppose pas une diffusion nulle, mais un alignement de celle-ci sur le tenseur d'anisotropie. Une stratégie courante lors d'utilisation de lois de paroi sur maillage *Haut-Reynolds* avec des modèles du second ordre est justement de prescrire l'anisotropie au sein de la première cellule suivant des relations du type :

$$\frac{R_{11}}{k} = 1.098 \quad ; \quad \frac{R_{22}}{k} = 0.247 \quad ; \quad \frac{R_{33}}{k} = 0.655 \quad ; \quad -\frac{R_{12}}{k} = 0.255 \tag{3.85}$$

Ces constantes sont fortement « code-dépendantes », et sont à adapter au modèle utilisé. Il est en effet fréquent de trouver des valeurs de « calage » de l'anisotropie extraites de données expérimentales « universelles » (canal pleinement turbulent, Pope [Pope 2000]). Une meilleure pratique serait d'adapter ces valeurs au modèle utilisé. Par exemple, l'utilisateur aguerri, s'il utilise le modèle SSG, devrait imposer l'anisotropie suivante :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{-3C_5 - C_4 + 8}{6C_1^* + 6C_1} && \approx 0.1779 \\ b_{22} &= \frac{3C_5 - C_4 - 4}{6C_1^* + 6C_1} && \approx -0.1298 \\ b_{33} &= \frac{2C_4 - 4}{6C_1^* + 6C_1} && \approx -0.04808 \\ b_{12} &= f(C_i) && \approx -0.1523 \end{aligned} \tag{3.86}$$

En effet, ces valeurs sont les solutions exactes des équations du modèle SSG loin de la paroi, sous l'hypothèse $P = \varepsilon$ et $D_{ij} = 0$. Soit encore :

$$\frac{R_{11}}{k} = 1.022 \quad ; \quad \frac{R_{22}}{k} = 0.4070 \quad ; \quad \frac{R_{33}}{k} = 0.5705 \quad ; \quad -\frac{R_{12}}{k} = 0.3046 \tag{3.87}$$

En *Haut-Reynolds*, lorsque $D_{ij} = 0$, utiliser l'hypothèse (3.84), comme c'est aujourd'hui le cas dans *Code_Saturne*, ou imposer l'anisotropie à l'aide des relations (3.86) est donc strictement équivalent. On s'en convaincra facilement en examinant la figure (3.21), présentant le résultat d'un calcul de canal plan avec le modèle SSG de *Code_Saturne* utilisant comme conditions aux limites (3.84). On voit nettement que les valeurs des composantes de l'anisotropie convergent vers une valeur constante égale à celles décrites par le système (3.86).

On peut cependant, comme le suggère Kalitzin et al., s'attendre à ce que l'hypothèse (3.84) soit mise en défaut à mesure que l'on pénètre dans la zone tampon. L'utilisation du système algébrique (3.82), fournissant une anisotropie basée sur des hypothèses de diffusion moins fortes, semble donc moins restrictive.

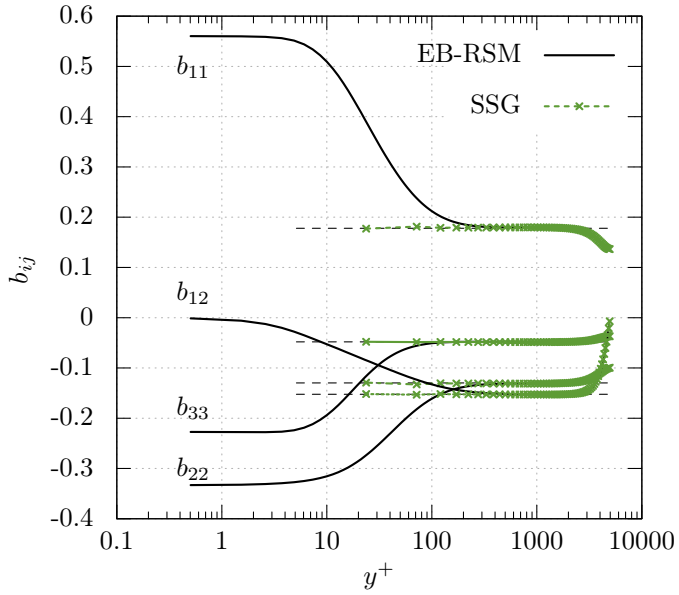


FIGURE 3.21 – Comparaison des valeurs du tenseur d'anisotropie d'un calcul de canal plan entre les modèles SSG et EB-RSM. Les traits pointillés sont les constantes du système (3.86).

L'utilisation du modèle algébrique décrit dans la section précédente va ainsi nous permettre d'obtenir une valeur de l'anisotropie quelle que soit la localisation de la première cellule de proche paroi. Il est possible de se faire une première idée du résultat de l'utilisation du système (3.82) en le résolvant, non plus couplé avec une équation de transport sur k, ε et α, mais couplé avec les lois analytiques dégagées précédemment sur ε, α, k et P. On obtient ainsi un reflet de l'utilisation du système en loi de paroi. On précise par ailleurs qu'en situation de canal pleinement développé :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{S}/2 & 0 \\ \widetilde{S}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{S}/2 & 0 \\ -\widetilde{S}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \tag{3.88}$$

De manière à prescrire k, P, α et ε, on utilise donc les lois décrites dans les sections précédentes :

$$\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}, \quad \alpha = \widetilde{\alpha}, \quad k = \widetilde{k}, \quad P = \widetilde{P} \tag{3.89}$$

Les résultats obtenus (présentés sur la figure (3.22)) sont très proches du modèle complet tel qu'il est présenté dans la section précédente. Le comportement du modèle est très proche du modèle EB-IASM en proche paroi. En zone logarithmique, lorsque $\alpha \sim 1$ et que le modèle dégénère vers le modèle SSG, on retrouve bien le comportement de l'anisotropie mis en évidence au travers des relations (3.86). Il pourrait être tentant d'utiliser ces valeurs d'anisotropie telles quelles et, grâce à la loi sur l'énergie cinétique turbulente $\widetilde{k}^+$, de calculer les tensions de Reynolds correspondantes. De prime abord, ces tensions sont d'ailleurs satisfaisantes comme en témoigne la figure (3.22b). Cependant, cette dernière approche reviendrait à avoir une formulation analytique pour déterminer les tensions de Reynolds :

$$R_{ij} = f_{ij}(y^+) \tag{3.90}$$

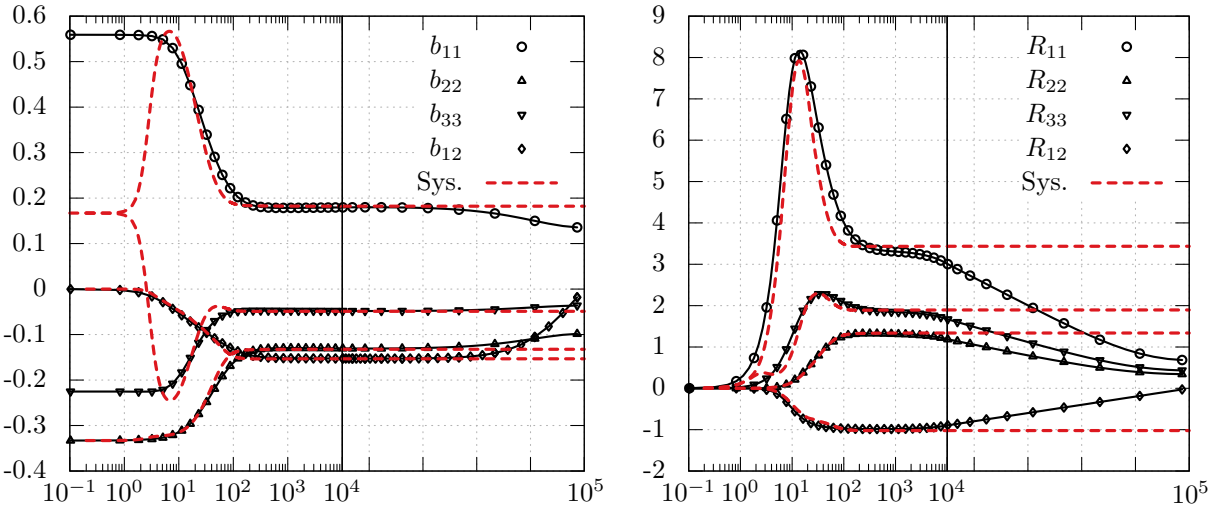


FIGURE 3.22 – ***a)*** Composantes du tenseur d'anisotropie issues d'un calcul EBRSM (symboles) et de la résolution du système algébrique (3.82) avec les lois (3.89) ***b)*** Tensions de Reynolds issues d'un calcul EB-RSM (symboles) et de la résolution du système algébrique.

In fine cela reviendrait à imposer de manière analytique l'énergie cinétique turbulente grâce au profil de $\widetilde{k}^+$. Ainsi, la vitesse de frottement u_k serait imposée analytiquement, ce qui reviendrait en quelque sorte à prescrire le frottement à la paroi. Ceci est absurde et ne peut constituer une solution. Il est donc nécessaire de laisser un degré de liberté supplémentaire dans le modèle. C'est pourquoi on réintroduit une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_s R_{kl}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_l}\right) + \nu\frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} \tag{3.91}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'une équation de transport sur k, problème classique dans la littérature pour les lois de paroi. Cette équation est résolue en imposant la condition à la limite de flux nul suivante :

$$\left.\frac{\partial k}{\partial n}\right|_w = 0 \tag{3.92}$$

Les termes sources de cette équation sont par ailleurs imposés à l'aide des lois pour la production $\widetilde{P}$ et la dissipation $\widetilde{\varepsilon}$. Cependant, conformément à ce que suggère la littérature, on préférera utiliser les valeurs moyennes suivantes :

$$\overline{P}^+ = \frac{1}{2y_p^+}\int_0^{2y_p^+} \widetilde{P} dy \qquad \text{et} \qquad \overline{\varepsilon}^+ = \frac{1}{2y_p^+}\int_0^{2y_p^+} \widetilde{\varepsilon} dy \tag{3.93}$$

Ces lois pour la production moyenne et la dissipation moyenne sont illustrées en figure (3.23). En pratique, ces valeurs sont calculées pour chaque cellule de proche paroi par une intégration numérique de $\widetilde{P}$ de $\widetilde{\varepsilon}$ avec une méthode du type « trapèze ». Ainsi, à chaque pas de temps, une fois la résolution du système algébrique effectuée, on déduit les tensions de Reynolds au moyen de la valeur de k issue de la résolution de l'équation de transport (3.91).

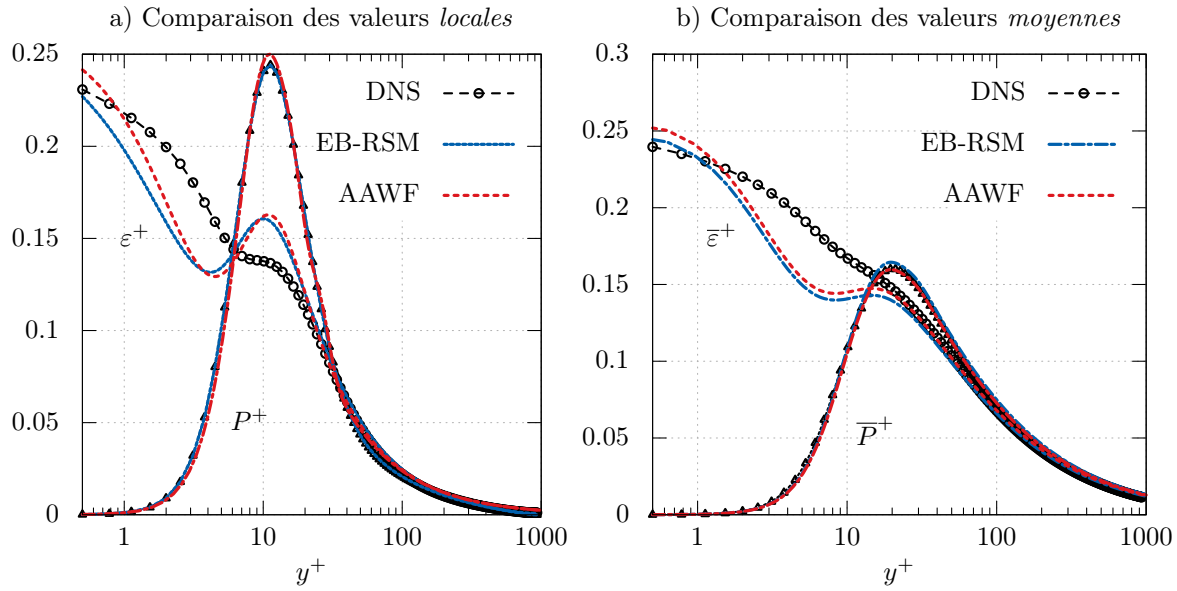


FIGURE 3.23 – ***a)*** Lois analytiques pour la production et la dissipation comparées aux valeurs extraites de données DNS et de calculs EBRSM. ***b)*** Lois analytiques pour la production moyenne et la dissipation moyenne, issues de l'intégration (3.93), comparées aux valeurs extraites de données DNS et de calculs EBRSM.

3.2.6 Méthode d'implémentation

L'approche proposée dans cette section propose donc d'imposer directement au sein de chaque cellule de proche paroi les valeurs du paramètre de pondération α, de la dissipation ε ainsi que des tensions de Reynolds R_{ij} à l'aide des lois de paroi $\widetilde{\alpha}$ (équation (3.49)), $\widetilde{\varepsilon}$ (équation (3.51)) et du système algébrique (3.82).

Ces lois sont imposées en suivant la méthodologie adoptée par Billard et al. [Billard 2015]. Le terme source suivant est ajouté aux équations de transport pour chaque variable au sein de chaque cellule de proche paroi :

$$S_\phi = \frac{1}{\tau}\left(\phi - \widetilde{\phi}\right) \tag{3.94}$$

avec

$$\tau = 10^{-5}T \tag{3.95}$$

où T est l'échelle de temps intégrale du modèle EB-RSM. Ce terme source agit en rappelant la solution de l'équation de transport vers la valeur issue de la loi de paroi au premier point de calcul.

Le schéma (3.24) décrit l'ensemble de la méthode présentée jusqu'ici. On nommera dans la suite ce modèle de paroi **modèle AAWF** (*Adaptive Algebraic Wall Function*).

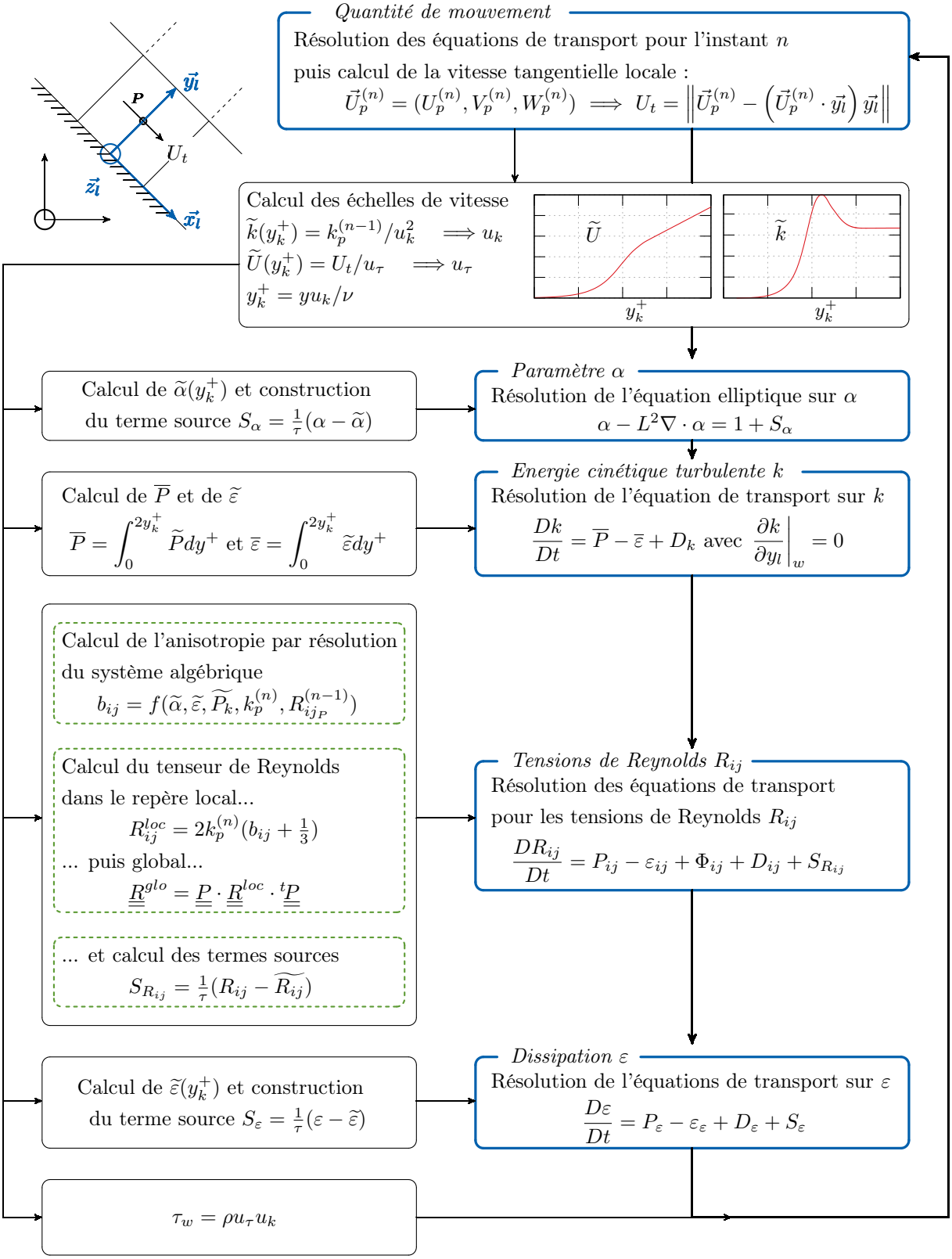


FIGURE 3.24 – Algorithme décrivant la mise en place des lois parois **AAWF** fondées sur la résolution d'une équation de transport sur k couplée à la résolution d'un système algébrique pour la prescription des tensions de Reynolds.

3.2.7 Une alternative au modèle algébrique

L'hypothèse majeure contenue dans l'approche décrite dans la section précédente concerne la diffusion (c'est d'ailleurs la seule hypothèse dans le cas d'un canal plan, l'équilibre du tenseur d'anisotropie étant vérifié). Cette approche semble naturelle puisqu'elle contient, *a priori*, plus d'informations que l'imposition d'un simple flux nul à la paroi qui conduit à une diffusion nulle. Il est cependant légitime de s'interroger sur l'intérêt d'une telle méthode par rapport à une méthode plus simple. On souhaite donc à présent obtenir les tensions de Reynolds en proche paroi non plus par résolution du système algébrique mais par résolution directe des équations de transport pour les tensions de Reynolds avec comme condition à la limite de paroi :

$$\left.\frac{\partial R_{ij}}{\partial y}\right|_{wall} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{R_{ij}^P - R_{ij}^F}{\overline{PF}} = 0 \tag{3.96}$$

où P est le centre de la cellule et F le centre de la face de bord associée. De manière à conserver le formalisme développé dans l'approche *AAWF*, on garde la structure consistant à résoudre une équation sur l'énergie cinétique turbulente k en plus des équations sur les tensions de Reynolds. Cette dernière est donc traitée de la même façon précédemment.

- Lois analytiques sur les termes sources moyens $\overline{P}$ et $\overline{\varepsilon}$
- Conditions aux limites de type Neumann homogène :

$$\left.\frac{\partial k}{\partial n}\right|_{w} = 0 \tag{3.97}$$

Pour que le modèle ainsi construit reste consistant avec ce qui est fait pour k, il serait nécessaire d'imposer également les valeurs moyennes des termes de productions $\overline{P_{ij}}$ et de dissipation $\overline{\varepsilon_{ij}}$. Il n'est cependant pas aisé de construire des lois analytiques moyennes sur les termes de production de tous les termes du tenseur de Reynolds. On fait donc l'hypothèse suivante :

$$\overline{P_{ij}} = P_{ij}\frac{\overline{P}}{P} \qquad \text{et} \qquad \overline{\varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij}\frac{\overline{\varepsilon}}{\varepsilon} \tag{3.98}$$

De cette manière, on s'assure que la relation suivante soit vérifiée :

$$\frac{1}{2}\left(\overline{P_{11}} + \overline{P_{22}} + \overline{P_{33}}\right) = \overline{P} \tag{3.99}$$

et donc que la trace des équations de transport des tensions de Reynolds soit bien égale à l'équation de transport résolue pour l'énergie cinétique turbulente k. On résout donc pour les tensions de Reynolds l'équation suivante, avec les termes sources modifiés :

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = \overline{P_{ij}} - \overline{\varepsilon_{ij}} + \Phi_{ij} + D_{ij}^{\nu} + D_{ij}^{t} \tag{3.100}$$

Il est intéressant de noter que la production de R_{12} se ramène dans un canal à la relation :

$$\overline{P_{12}} = P_{12}\frac{\overline{P}}{P} \Longleftrightarrow \overline{P_{12}} = \frac{R_{22}}{R_{12}}\overline{P} \tag{3.101}$$

Cette dernière expression est à rapprocher de la méthode décrite par Lardeau et Manceau [Lardeau 2014] qui fixe le rapport R_{22}/R_{12} à sa valeur en zone logarithmique, égale à -1.315.

Le schéma de la figure (3.25) décrit l'ensemble de la méthode présentée jusqu'ici. On nommera dans la suite ce modèle de paroi **modèle ASWF** (*Adaptive Standard Wall Function*).

3.3 Lois de paroi numériques ANWF

Cette section développe une approche totalement différente de celles abordées dans les parties précédentes. On se propose ici d'adapter au modèle EB-RSM les approches numériques (fondées sur les travaux pionniers de Craft et al. [Craft 2004]) faisant intervenir une intégration numérique d'équations simplifiées sur une sous-maille embarquée dans chaque cellule de paroi.

3.3.1 Stratégie

Le but de ces lois de paroi est similaire à celui des autres lois de paroi : estimer le frottement à la paroi (τ_w) ainsi que les différents termes sources et puits moyens des équations des grandeurs turbulentes (tels que production moyenne $\overline{P}$, dissipation moyenne $\overline{\varepsilon}$,...). Alors que les lois de paroi standards supposent des variations prédéfinies pour chaque variable au sein de chaque cellule de proche paroi (comme $\widetilde{U}$, $\widetilde{k}$ ou encore $\widetilde{\varepsilon}$ dans les lois de parois de type AAWF), les lois de parois numériques permettent d'obtenir ces profils par la résolution d'équations de transport simplifiées, de type couche limite, en utilisant une grille fine similaire à celle employée pour un modèle *Bas-Reynolds*, embarquée dans chaque cellule de proche paroi (voir le schéma (3.26)).

Cette approche diffère d'un traitement *Bas-Reynolds* standard car elle n'implique pas la résolution d'une équation de Poisson sur la pression et fournit une solution de proche paroi découplée de la solution sur le domaine complet. Le caractère 1D du problème permet ainsi de gagner un temps considérable sur la résolution du problème par rapport à une résolution tridimensionnelle.

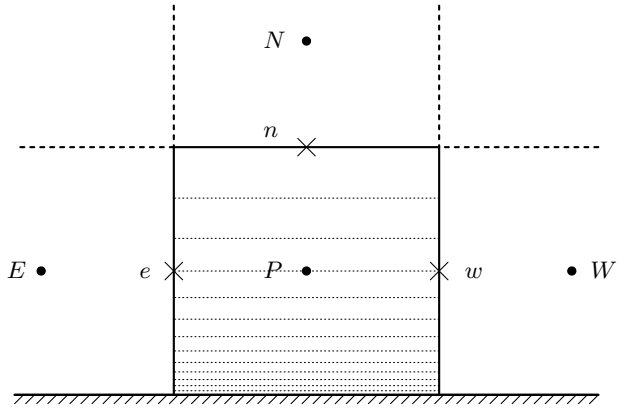


FIGURE 3.26 – Maillage de sous-maille dans une cellule de paroi pour les lois ANWF.

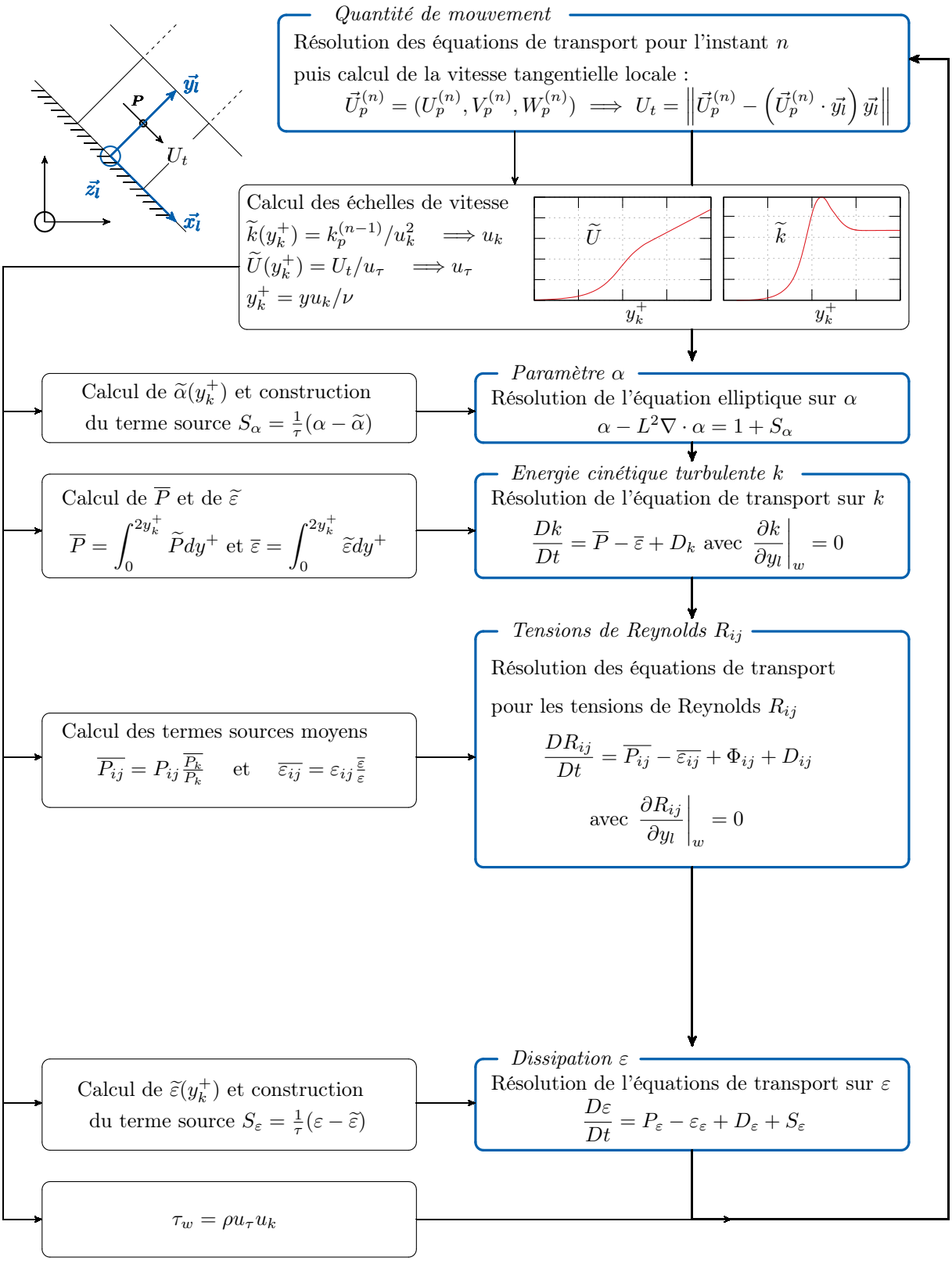


FIGURE 3.25 – Algorithme décrivant la mise en place des lois de paroi **ASWF** fondées sur la résolution d'équations de transport couplée à une modification des termes sources des tensions de Reynolds.

3.3.2 Équations de proche paroi

On fait les hypothèses suivantes :

— Seule l'équation de quantité de mouvement parallèle à la paroi est résolue

— La diffusion parallèle à la paroi est supposée négligeable devant la diffusion normale et transverse, *i.e.* :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \ll \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \tag{3.102}$$

— Le gradient de pression est supposé constant et égal au gradient cellule pour chaque cellule de proche paroi.

— Contrairement à ce qui est fait dans le modèle de Craft et al. [Craft 2004], on fait le choix de négliger la convection des grandeurs turbulentes :

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} = 0 \tag{3.103}$$

Sous ces hypothèses, les équations de transport de l'EB-RSM s'écrivent, dans le système de coordonnées local à la paroi :

- Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y} - R_{12}\right) \tag{3.104}$$

- Tenseur de Reynolds

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu + C_s R_{22}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial R_{ij}}{\partial y}\right) \tag{3.105}$$

  les tenseurs de production, dissipation et redistribution sont calculés en supposant que le tenseur de taux de déformation $\mathbf{S}$ se met sous la forme :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \tag{3.106}$$

- Dissipation

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu + C_s R_{22}\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) \tag{3.107}$$

- L'équation elliptique sur α reste inchangée

$$\alpha - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 1 \tag{3.108}$$

Les hypothèses (3.106) supposent que la production de turbulence est majoritairement assurée par le gradient normal de vitesse tangentielle. Cette hypothèse est fausse dans des cas d'écoulements complexes tel qu'un jet impactant sur une plaque plane. En effet, au niveau du point d'impact, il est facile de montrer que la production d'énergie cinétique s'écrit :

$$P_k = -\left(R_{22} - R_{11}\right)\frac{\partial V}{\partial y} \tag{3.109}$$

C'est sans doute, *a posteriori*, cette hypothèse qui rend, entre autres, l'utilisation particulièrement instable de ces lois sur le cas d'un jet impactant (paragraphe 4.1.3).

3.3.3 Termes convectifs et vitesse normale

Craft et al. [Craft 2004] proposent initialement dans leur modèle de calculer le terme convectif $\frac{\partial U}{\partial x}$ par un schéma upwind à partir des cellules de la sous maille amont ou aval (E ou W) . En utilisant l'équation de continuité,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{3.110}$$

on peut alors calculer numériquement le profil de vitesse normale V :

$$V(y) = \int_0^{y_n} -\frac{\partial U}{\partial x} dy \tag{3.111}$$

Cette façon de faire est sans aucun doute la plus robuste et la plus correcte mais pose cependant de nombreux problèmes lors de sa transposition à des maillages tridimensionnels, éventuellement non structurés. En effet, il conviendrait d'interpoler les profils de sous-mailles avoisinant la cellule considérée de manière à pouvoir effectivement calculer la variation suivant y du gradient tangentiel.

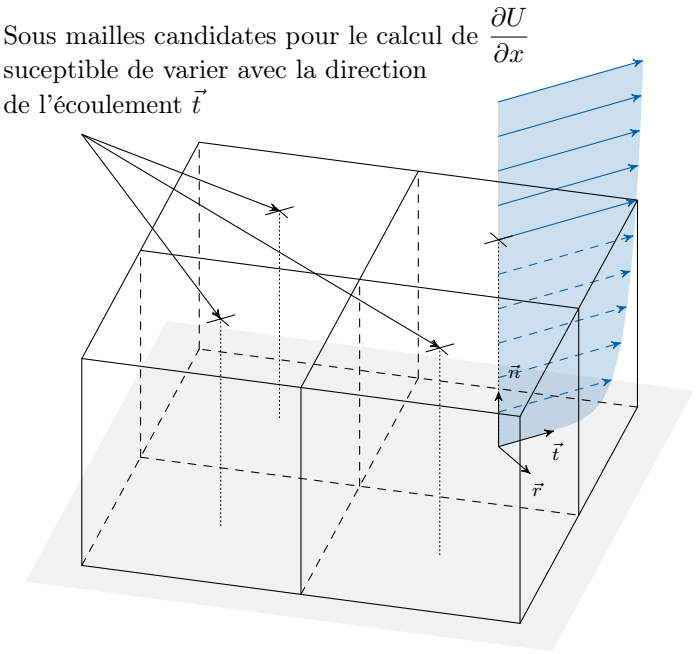


FIGURE 3.27 – Schéma illustrant la difficulté d'interpolation du gradient de vitesse tangentiel de sous maille lors d'utilisation de maillages complexes.

Ceci engendrerait une grande complexité de codage ainsi que de nombreuses difficultés de parallélisation. Une stratégie, proposée par Hickel et al. [Hickel 2012], dans un contexte LES, consiste alors à considérer que les termes convectifs sont entièrement équilibrés par le gradient

de pression en zone logarithmique et décroissent linéairement en sous-couche visqueuse :

$$\begin{aligned} \widetilde{U}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_P && \text{si} \quad y \geq y_{pg} \\ \widetilde{U}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg|_P \frac{y}{y_{pg}} && \text{si} \quad y < y_{pg} \end{aligned} \tag{3.112}$$

où y_{pg} est une distance définie de telle sorte que la distance normalisée y^*_{pg} suivante :

$$y^*_{pg} = y_{pg}\left(\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial P}{\partial x}\right)^{1/3} \tag{3.113}$$

soit constante et égale à 4.

Une autre proposition de [Hickel 2012] consiste à considérer :

$$\widetilde{U}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = \left(\frac{\widetilde{U}}{U_P}\right)^{3/2}\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_P \tag{3.114}$$

On propose aussi d'examiner l'estimation suivante du terme convectif :

$$\widetilde{U}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = \widetilde{U}\,\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_P \tag{3.115}$$

Cette dernière revient à considérer le gradient tangentiel constant au sein de la première cellule.

Ces trois propositions sont étudiées *a priori* à partir des données EB-RSM d'un jet impactant sur une plaque plane (figure (3.28)). Le point P est pris à $y/D = 0.025$, en zone logarithmique. On remarque facilement sur la figure (3.28) que l'hypothèse (3.112) est rapidement mise en défaut. Par ailleurs, l'apport de la formulation (3.114) n'est pas évidente et on considère alors dans la suite que le gradient tangentiel est constant au sein de la première cellule et égal à la valeur fournie par le modèle au point P :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_P = C \tag{3.116}$$

Ceci entraîne alors nécessairement la variation suivante pour la vitesse tangentielle V :

$$V(y) = \int_0^{y_n} -\frac{\partial U}{\partial x}dy = -Cy \tag{3.117}$$

On note cependant immédiatement une inconsistance avec l'effet de blocage de la composante normale, imposant à la paroi :

$$\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_w = 0 \tag{3.118}$$

Un approfondissement est nécessaire dans le traitement de la convection dans les équations de sous-mailles. On verra en effet dans le chapitre suivant que son traitement conditionne la bonne convergence du modèle.

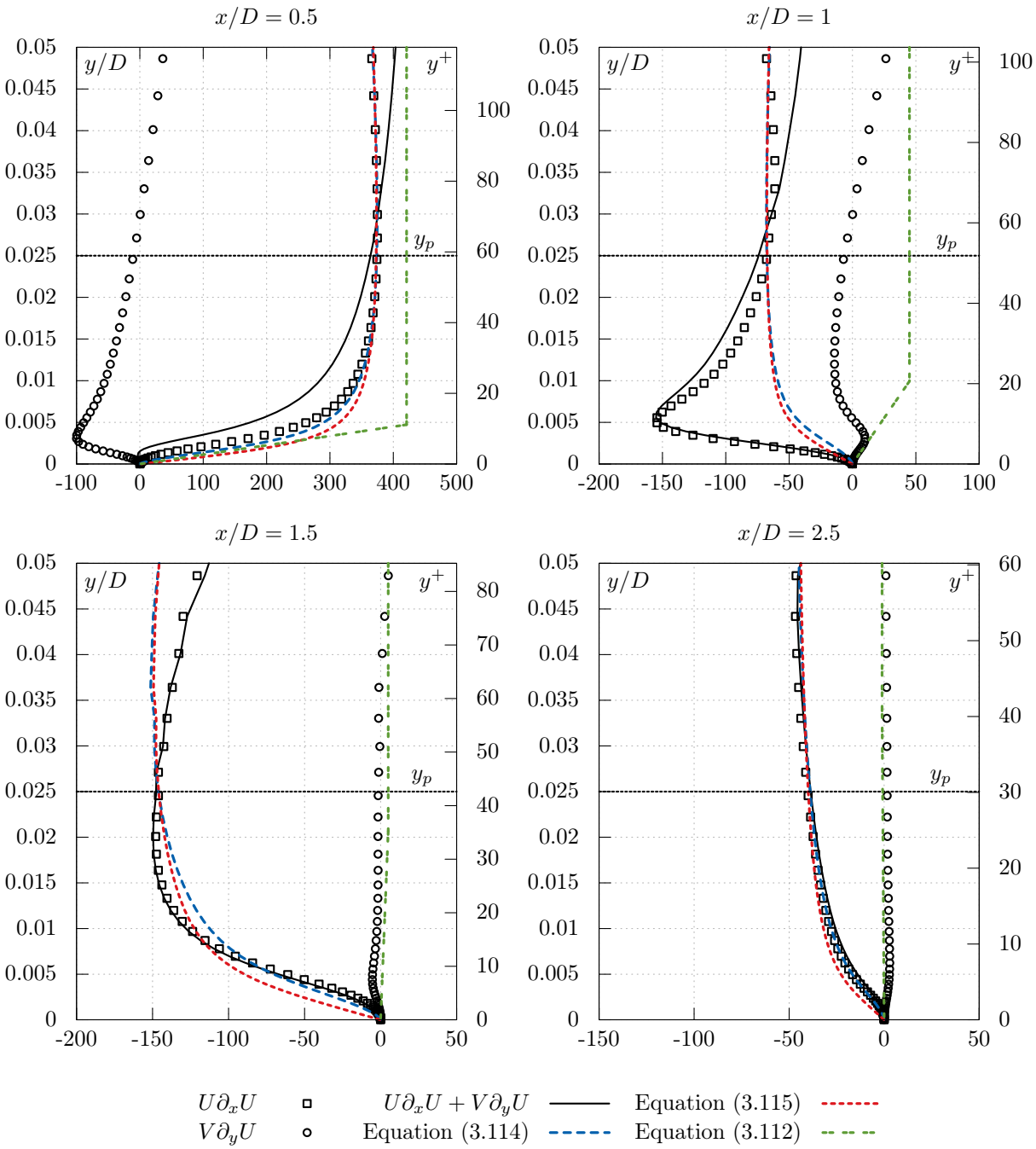


FIGURE 3.28 – Jet axisymétrique impactant une plaque plane à $Re = 23000$. Comparaison des termes inertiels de l'équation de quantité de mouvement suivant x issu de l'E-BRSM avec diverses estimations *a priori*.

3.3.4 Conditions aux limites de sous-mailles

Au niveau de la paroi, les conditions aux limites naturelles de non-glissement sont appliquées aux équations simplifiées, soit :

- $U = 0$
- $R_{ij} = 0$
- $\varepsilon = 2\nu k/y^2$

Les conditions aux limites supérieures sont déterminées en interpolant les variables sur la grille principale à l'aide des cellules P et N (voir figure 3.26), soit :

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_N) \tag{3.119}$$

3.3.5 Limitations

L'utilisation de maillages non structurés, comme c'est souvent le cas dans l'industrie, soulève de nombreuses questions auxquelles cette étude n'a pas permis de répondre. En effet, comment faut-il construire la grille de sous-maille et comment est-il légitime d'interpoler les valeurs des variables résolues au point n, condition à la limite nécessaire au calcul des équations simplifiées ?

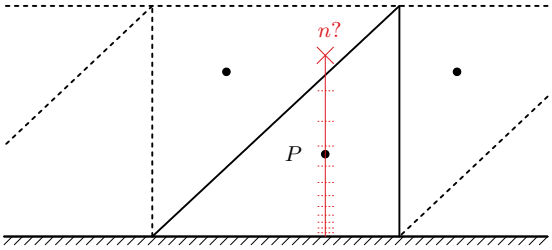


FIGURE 3.29 – Illustration de la situation à la paroi en présence d'une maille triangulaire

L'utilisation de cette approche suggère qu'il serait judicieux d'imposer des mailles de type « hexa » dans les couches limites le long des parois.

3.3.6 Résumé

Ainsi, à chaque itération et pour chaque cellule de proche paroi, les équations 1D du modèle sont résolues avec les hypothèses formulées plus haut et les conditions aux limites exposées dans la section précédente. On note par $\widetilde{\cdot}$, les profils issus de cette intégration 1D. Toutes les grandeurs nécessaires au calcul sont calculées grâce à ces profils.

- *Quantité de mouvement* : on calcule le gradient de vitesse normal à la paroi qui sert ensuite de condition à la limite sur la grille principale :

$$\nu \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_w = \nu \left.\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial y}\right|_w \tag{3.120}$$

- *Tensions de Reynolds* : on calcule les valeurs moyennes des termes sources de l'équation de transport le long de chaque cellule de paroi.

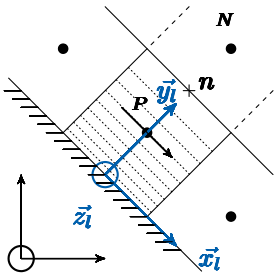
$$\overline{P_{ij}} = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \widetilde{P_{ij}} dy, \quad \overline{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \widetilde{\varepsilon_{ij}} dy, \quad \overline{\phi_{ij}} = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \widetilde{\phi_{ij}} dy \tag{3.121}$$

  On fait par ailleurs l'hypothèse de flux nul à la paroi :

$$\left.\frac{\partial R_{ij}}{\partial y}\right|_w = 0 \tag{3.122}$$

- *Dissipation et paramètre* α : les valeurs locales au point P issues des profils de sous maille sont extraites et imposées directement comme conditions aux limites pour ces deux variables :

$$\varepsilon_P = \widetilde{\varepsilon}(y_P) \qquad \alpha = \widetilde{\alpha}(y_P) \tag{3.123}$$



Grandeurs de sous-maille

Calcul des conditions aux limites de sous-maille $\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_N)$ passage dans le repère local $(\vec{x_l}, \vec{y_l}, \vec{z_l})$ puis calcul des gradients de pression et de vitesse tangentiels :

$$\frac{\partial P}{\partial x_l} = \vec{\nabla} P_p^{(n)} \cdot \vec{x_l} \qquad \frac{\partial U}{\partial x_l} = \vec{\nabla} U_p^{(n)} \cdot \vec{x_l}$$

Equation 1D de couche limite

Résolution des équations de type couche limite 1D pour le modèle EB-RSM. De manière générale résolution de :

$$U\frac{\partial \phi}{\partial x_l} + V\frac{\partial \phi}{\partial y_l} = \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y_l}\right) + S_\phi$$

Calcul du gradient normal de vitesse

$$\widetilde{\tau_w} = \mu \left.\frac{d\widetilde{U}}{dy_l}\right|_w$$

Quantité de mouvement

Résolution des équations de quantités de mouvement avec : $\mu \left.\frac{dU}{dy_l}\right|_w = \widetilde{\tau_w}$

Calcul de $\widetilde{\alpha}(y_P)$ puis du du terme source $S_\alpha = \frac{1}{\tau}(\alpha - \widetilde{\alpha})$

Paramètre α

Résolution de l'équation elliptique sur α

$$\alpha - L^2 \nabla \cdot \alpha = 1 + S_\alpha$$

Calcul de $\overline{P_{ij}} = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \widetilde{P_{ij}} dy$

Calcul de $\overline{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \widetilde{\varepsilon_{ij}} dy$

Calcul de $\overline{\Phi_{ij}} = \frac{1}{y_n}\int_0^{y_n} \widetilde{\Phi_{ij}} dy$

Tensions de Reynolds R_{ij}

Résolution des équations de transport pour les tensions de Reynolds R_{ij}

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = \overline{P_{ij}} - \overline{\varepsilon_{ij}} + \overline{\Phi_{ij}} + D_{ij}$$

avec $\left.\frac{\partial R_{ij}}{\partial y_l}\right|_w = 0$

Calcul de $\widetilde{\varepsilon}(y_P)$ et construction du terme source $S_\varepsilon = \frac{1}{\tau}(\varepsilon - \widetilde{\varepsilon})$

Dissipation ε

Résolution de l'équations de transport sur ε

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon + D_\varepsilon + S_\varepsilon$$

FIGURE 3.30 – Algorithme décrivant la mise en place des lois de paroi **ANWF** fondées sur la résolution d'équations 1D simplifiées au sein de chaque cellule de paroi.

3.4 Validation élémentaire

L'objectif de cette section est de présenter les résultats obtenus pour les trois modèles présentés dans la section précédente sur le cas de validation élémentaire du canal plan pleinement turbulent. Les résultats sont mis en regard de diverses autres stratégies adaptatives déjà disponibles pour d'autres modèles de turbulence.

3.4.1 Canal pleinement développé

Les résultats pour un canal turbulent purement 1D sont présentés dans cette section. Le nombre de Reynolds turbulent basé sur la vitesse de frottement u_τ est fixé à $Re_\tau = 950$. Un gradient de pression est imposé de manière à équilibrer le frottement théorique entrant dans la définition de Re_τ. Une série de 6 maillages de canaux a été générée avec une distance adimensionnelle à la paroi pour la première cellule de proche paroi $y_P^+ \in \{1, 5, 10, 30, 50, 100\}$.

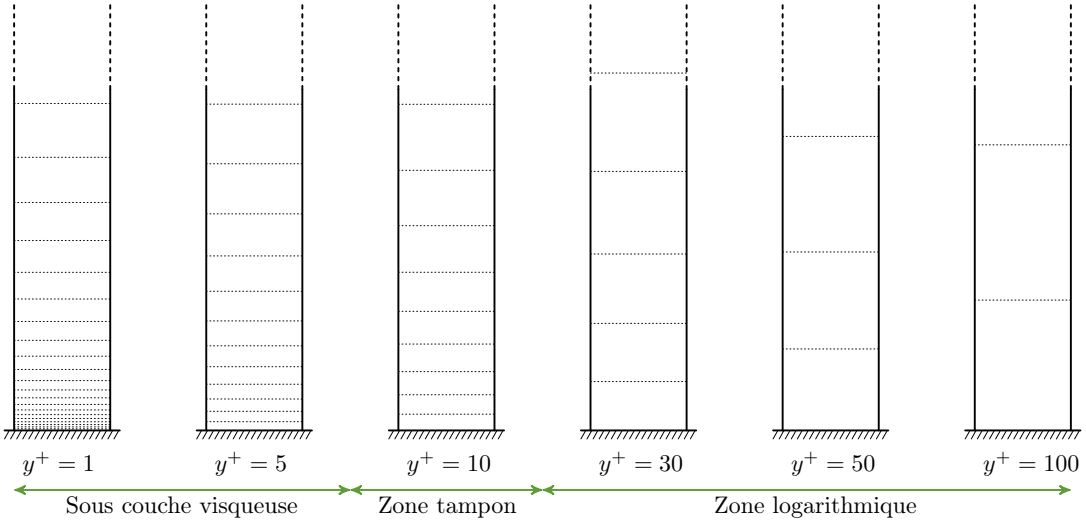


FIGURE 3.31 – Représentation schématique des différents maillages 1D mis en œuvre dans la simulation de canal plan turbulent pleinement développé.

Les figures (3.32) à (3.38) présentent les résultats obtenus pour les modèles AAWF, ASWF et ANWF pour la composante principale de vitesse ainsi que pour toutes les variables turbulentes. Les variables sont adimensionnées en utilisant les vitesses de frottements u_τ et u_k ainsi que la viscosité du fluide ν :

$$y^+ = \frac{y u_k}{\nu} \quad ; \quad U^+ = \frac{U}{u_\tau} \quad ; \quad k^+ = \frac{k}{u_k^2} \quad ; \quad \varepsilon^+ = \frac{\varepsilon \nu}{u_k^4}$$
$$R_{11}^+ = \frac{R_{11}}{u_k^2} \quad ; \quad R_{22}^+ + = \frac{R_{22}}{u_k^2} \quad ; \quad R_{33}^+ = \frac{R_{33}}{u_k^2} \quad ; \quad R_{12}^+ = \frac{R_{12}}{u_\tau u_k} \tag{3.124}$$

Ces modèles sont comparés à trois stratégies adaptatives relativement standard ou pouvant être trouvées dans la littérature :

- Le modèle AdWF [Billard 2015] appliqué au modèle de turbulence *Bl-v^2-k* (détaillé au paragraphe 2.5.5.6).
- Les « scalable wall functions » [Esch 2003a] (originellement proposées pour le modèle *k-ω-SST* et détaillées au paragraphe 2.5.5.3) appliquées au modèle de turbulence SSG.
- Les lois standards de *Code_Saturne* (détaillée au paragraphe 3.2.4, en particulier l'expression du frottement, équation (3.54), voir [*Code_Saturne* 2015]) appliquées au modèle de turbulence *k-ω-SST*.

Les lois de paroi AdWF sont les lois de paroi adaptatives les plus abouties disponibles dans la littérature pour les modèles de fermeture du premier ordre. Ces lois font la synthèse des approches des travaux de Kalitzin et al. [Kalitzin 2004] et Popovac et Hanjalić. Par ailleurs, le modèle *Bl-v^2-k* pour lequel ces lois sont construites est conceptuellement proche du modèle EB-RSM. En effet, ces deux modèles constituent la déclinaison au premier et au second ordre du concept de pondération elliptique.

Les lois standards disponibles dans *Code_Saturne* sont, depuis la version 3.0, capables de passer d'une formulation *Haut-Reynolds* à une formulation *Bas-Reynolds via* la pondération de l'équation (3.54). On choisit d'associer à ces lois un modèle, largement utilisé dans l'industrie, capable de reproduire la physique de proche paroi mais également connu pour son bon comportement *Haut-Reynolds* : le modèle *k-ω-SST*.

Enfin, les lois de paroi « scalable wall functions » sont associées au modèle SSG. Ces lois sont en effet un bon reflet de ce qui peut être fait dans l'industrie lorsqu'il n'est pas possible de maîtriser totalement le maillage et que l'on sait que certaines cellules de paroi sont en sous-couche visqueuse. Cette approche dégénère vers une approche *Haut-Reynolds* standard lorsqu'on se situe en zone logarithmique.

Interprétation des résultats

On constate sur la figure (3.32) que les trois approches présentées dans ce chapitre convergent toutes, sur maillage *Bas-Reynolds* vers le modèle EB-RSM de référence. Ceci est également valable pour les lois AdWF qui convergent vers le modèle *Bl-v^2-k* de référence. Cette conclusion est à nuancer pour les lois standard puisqu'on n'observe pas une parfaite convergence pour le maillage à $y^+ = 1$ avec une nette surestimation de la vitesse débitante. Les lois de paroi « scalable » permettent d'obtenir une « pseudo convergence » du modèle SSG sur maillage *Bas-Reynolds*, mais sans miracle, puisque la vitesse débitante est ici totalement fausse.

L'utilisation des différentes lois sur maillage à $y^+ = 10$ (zone tampon) met en avant le très bon comportement des approches AAWF, ASWF et ANWF. La figure (3.32e) montre que la pondération utilisée par les lois standards de *Code_Saturne*, conçues pour lier les comportements *Bas* et *Haut-Reynolds*, est moins efficace dans la zone tampon pour le modèle *k-ω-SST*.

Lorsque le premier point de calcul se situe en zone logarithmique ($y^+ = 30$ ou 50), toutes les approches donnent des résultats tout à fait acceptables. Bien que moins visibles sur la figure (3.32f), on notera l'apparition d'oscillations pour les modèles du second ordre (apparaissant dès $y^+ = 10$ puis s'amplifiant). Une explication de ce phénomène est donnée dans la suite et notamment sur la figure (3.41).

Les calculs effectués sur le maillage le plus grossier ($y^+ = 100$) sont discutables. En effet, au nombre de Reynolds étudié on se situe clairement en dehors de la zone de validité du modèle

(la zone logarithmique est très petite et on se situe déjà au-delà). Cette situation est cependant révélatrice de beaucoup de calculs industriels pour lesquels des contraintes de géométrie et de coût imposent parfois des mailles relativement grossières. Un doute subsiste alors sur la présence ou non d'une zone logarithmique. Ce cas atteste donc la robustesse de chaque approche pour un cas aux limites de sa validité. Le modèle AAWF impose, *via* le système algébrique (3.82), à la composante R_{12} de porter entièrement la contrainte turbulente soit :

$$R_{12}^{+} = -1 \tag{3.125}$$

Ce résultat est clairement visible sur la figure (3.35a) et a pour conséquence l'apparition d'oscillations sur le profil de vitesse de la figure (3.32a). Les hypothèses, plus lâches, de flux nul à la paroi du modèle ASWF permettent en revanche une meilleure estimation de R_{12} dans le cas de maillages très grossiers. Ceci se traduit par une meilleure prédiction de la vitesse sur la figure (3.32b).

Tous les modèles prévoient de manière correcte l'énergie cinétique turbulente comme le montre la figure (3.33a). On notera le très bon comportement des approches AAWF et ASWF en zone tampon, qui arrivent à reproduire en partie le pic d'énergie cinétique turbulente. Le modèle ANWF semble montrer des difficultés en zone tampon puisqu'on observe une surestimation du pic de k. De manière assez surprenante cependant, les modèles AAWF et ASWF donnent une bonne estimation de k même sur le maillage le plus grossier. Cette dernière conclusion est à nuancer pour le modèle AdWF présentant une nette sous estimation de k au premier point de calcul sur le même maillage.

Des conclusions relativement semblables peuvent être tirées pour les composantes diagonales du tenseur de Reynolds dont k est simplement la demi-trace.

L'estimation de la dissipation ε^{+} est donnée par la figure (3.34). Les mêmes conclusions que pour les grandeurs turbulentes peuvent être établies pour les modèles AAWF, ASWF et ANWF. Les trois approches captent de manière tout à fait convaincante les comportements *Bas-Reynolds* et *Haut-Reynolds* du modèle EB-RSM de référence. On note une très bonne estimation de la dissipation au sein de la zone tampon. Il est à noter que l'approche ANWF exhibe un comportement singulier en proche paroi pour cette variable. On remarque en effet une légère surestimation par rapport aux modèles AAWF et ASWF. Ceci provient du mauvais comportement de l'énergie cinétique turbulente déjà mis en avant précédemment.

Comparaison pour différents nombre de Reynolds turbulents

Les figures (3.39) et (3.40) présentent les résultats des méthodes AAWF, ASWF et ANWF pour 3 nombres de Reynolds différents. Pour chaque nombre de Reynolds sont présentés les résultats issus d'un maillage *Bas-Reynolds*, d'un maillage *Haut-Reynolds* ainsi que d'un maillage intermédiaire en zone tampon.

De manière générale, les trois lois se transposent bien aux deux nombre de Reynolds supplémentaires testés. On note cependant que les observations précédentes sont amplifiées sur le cas à $Re_\tau = 590$. En effet, on note la présence d'oscillations sur la composante R_{12}, dues au fait qu'à ce nombre de Reynolds très faible, la zone logarithmique est très peu étendue voire inexistante.

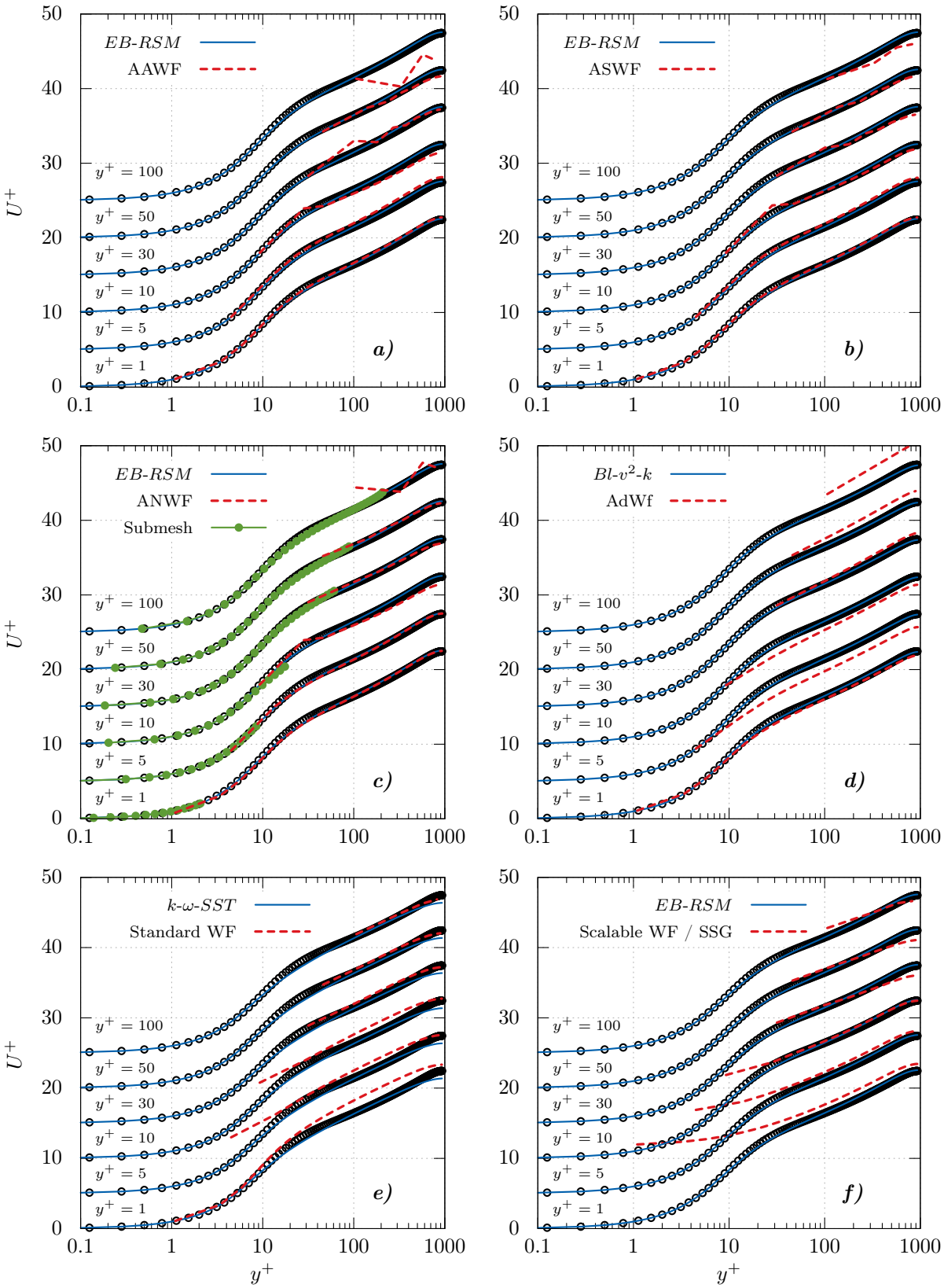


FIGURE 3.32 – Profils de U^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle Bl-v^2-k. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle k-ω-SST. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

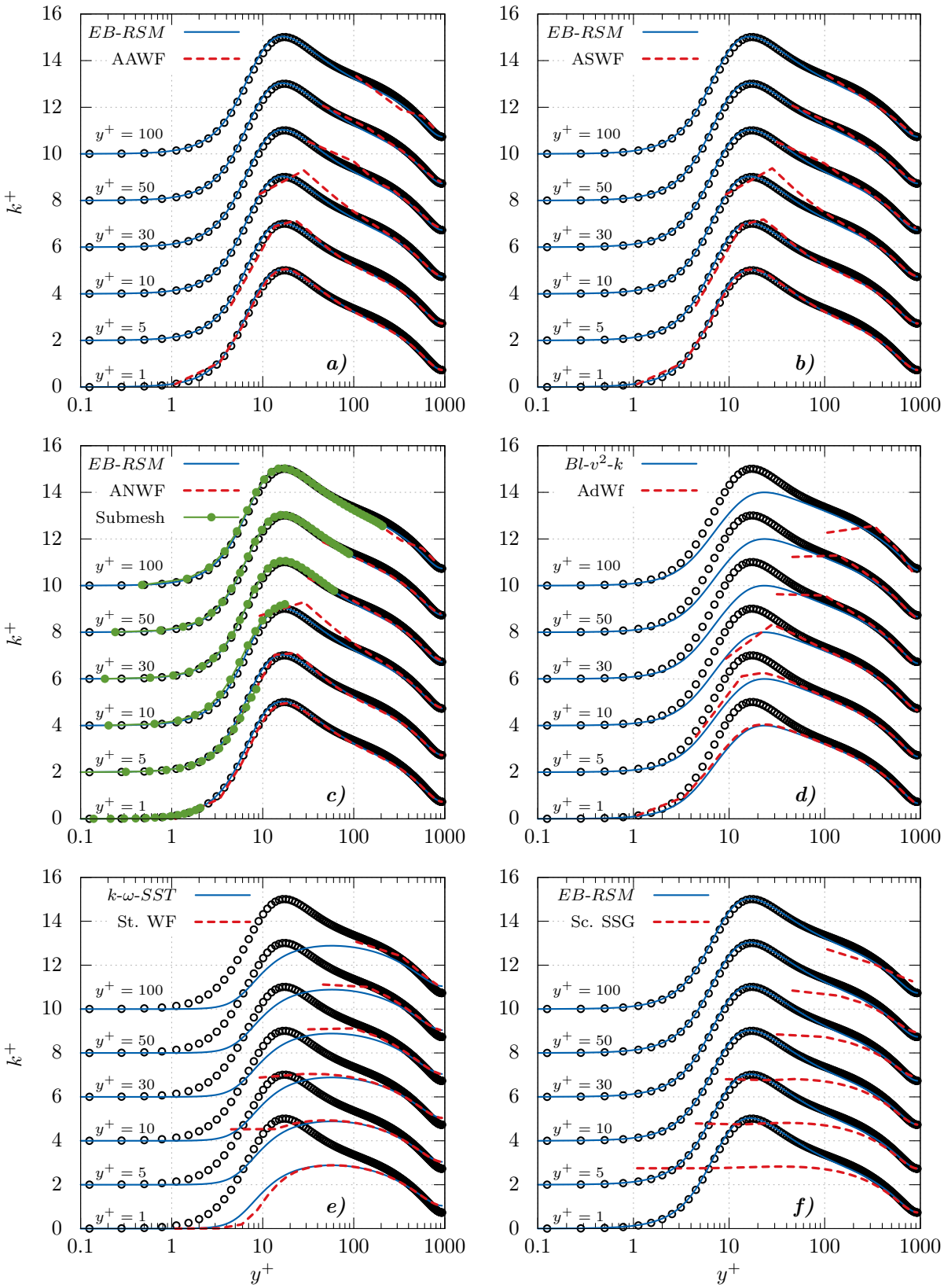


FIGURE 3.33 – Profils de k^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle Bl-v^2-k. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle k-ω-SST. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

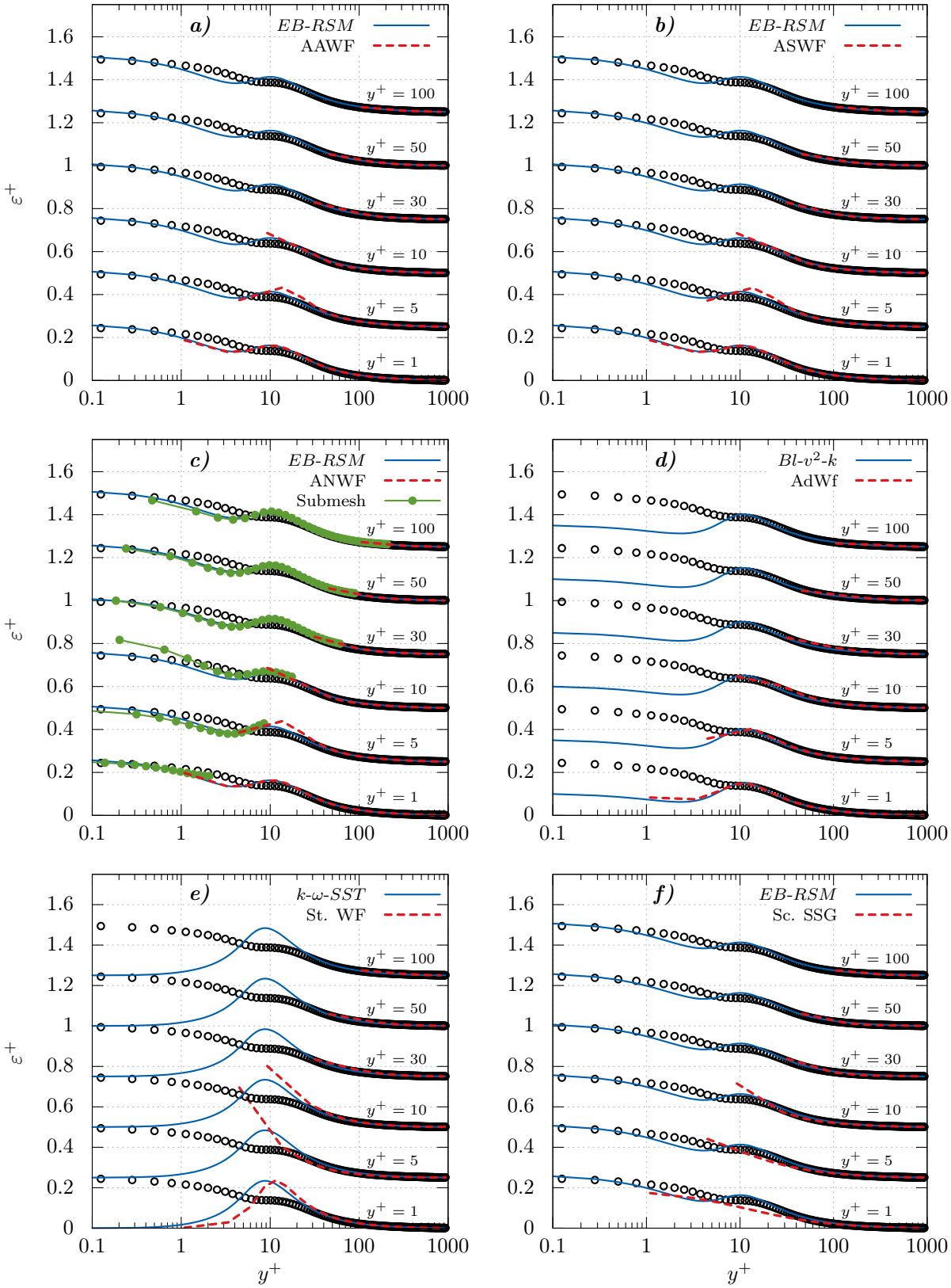


FIGURE 3.34 – Profils de ε^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle Bl-v^2-k. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle k-ω-SST. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

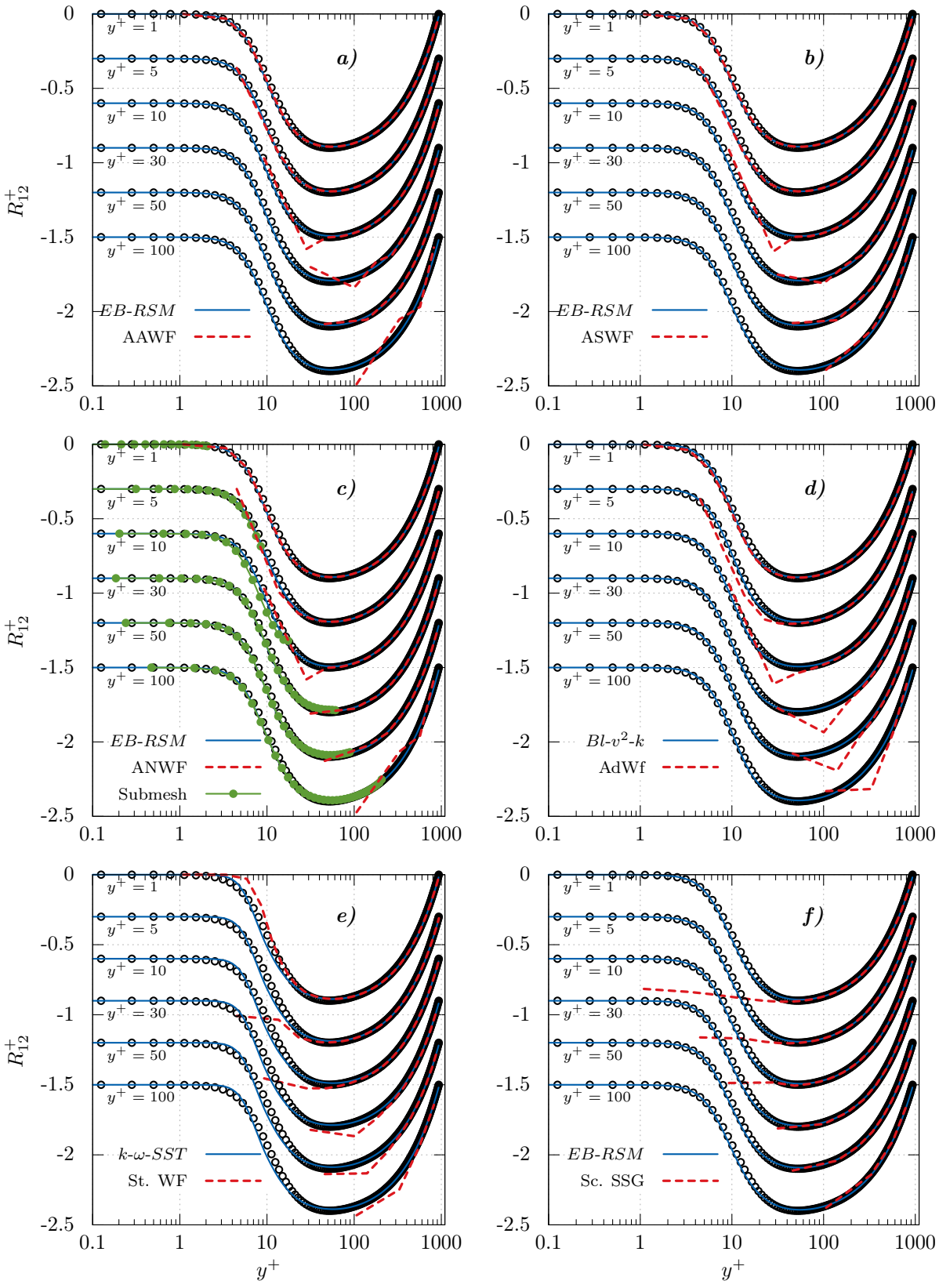


FIGURE 3.35 – Profils de R_{12}^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle *Bl-v^2-k*. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle *k-ω-SST*. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

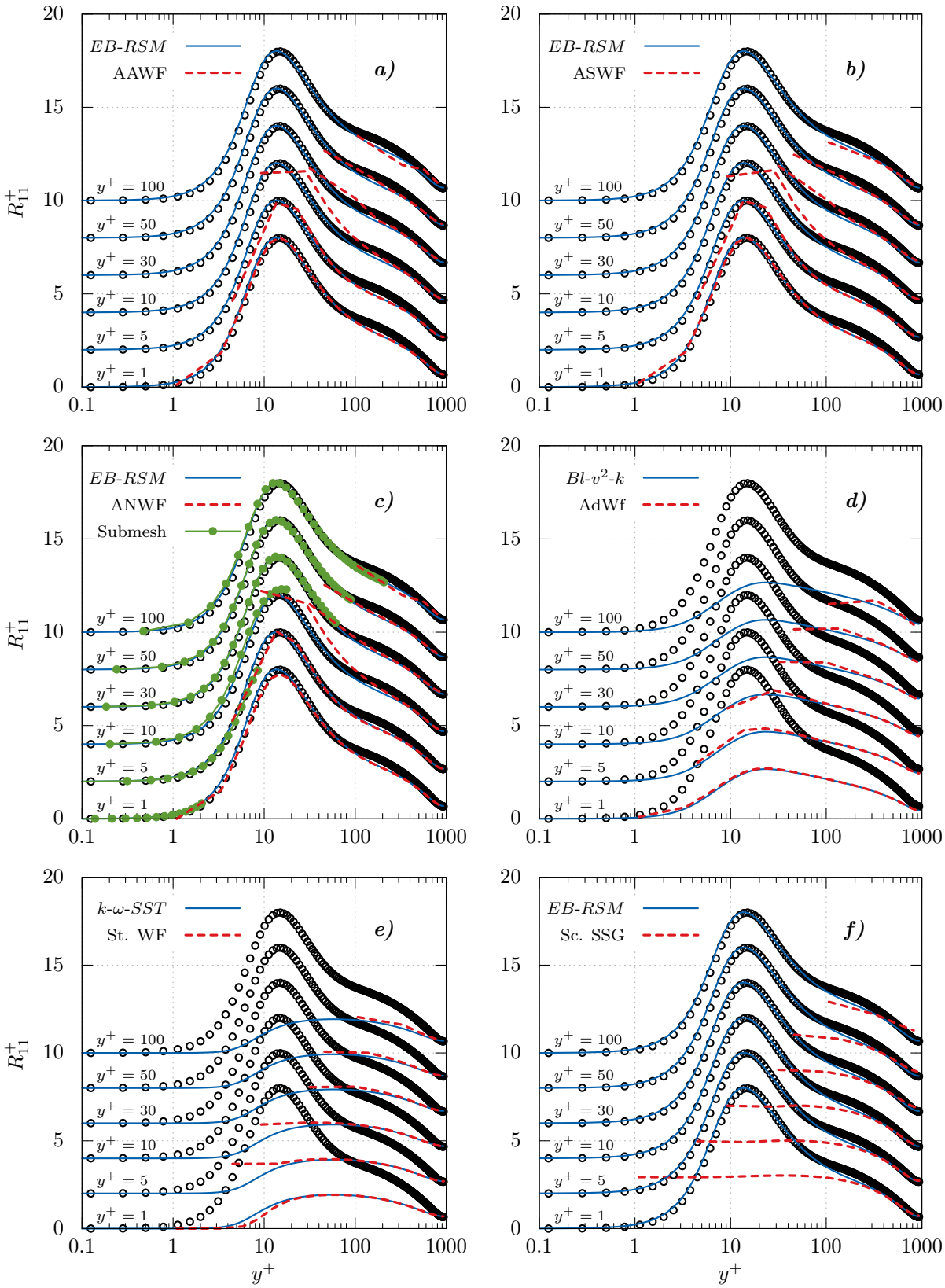


FIGURE 3.36 – Profils de R_{11}^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle *Bl-v²-k*. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle *k-ω-SST*. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

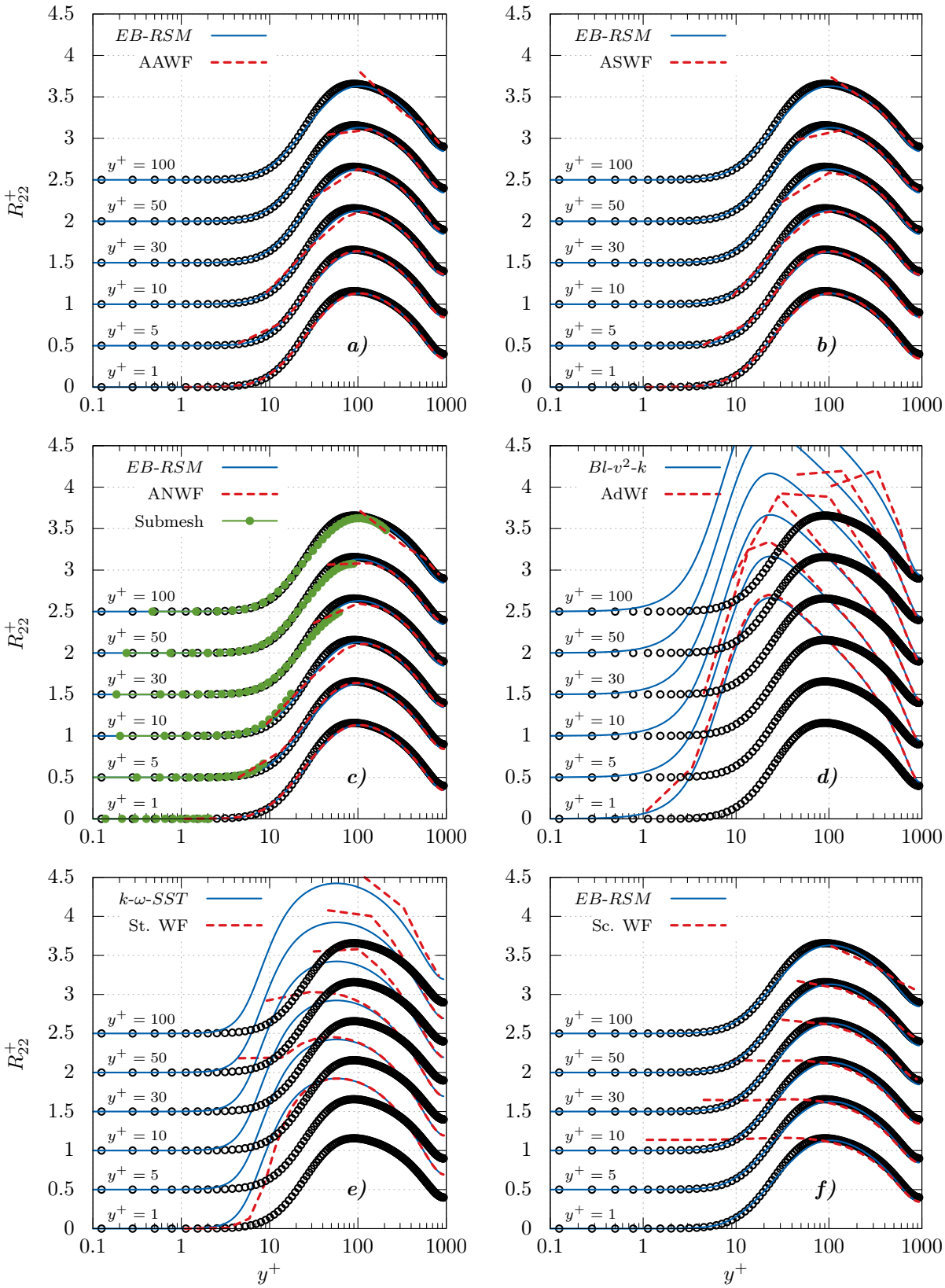


FIGURE 3.37 – Profils de R_{22}^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle Bl-v^2-k. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle k-ω-SST. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

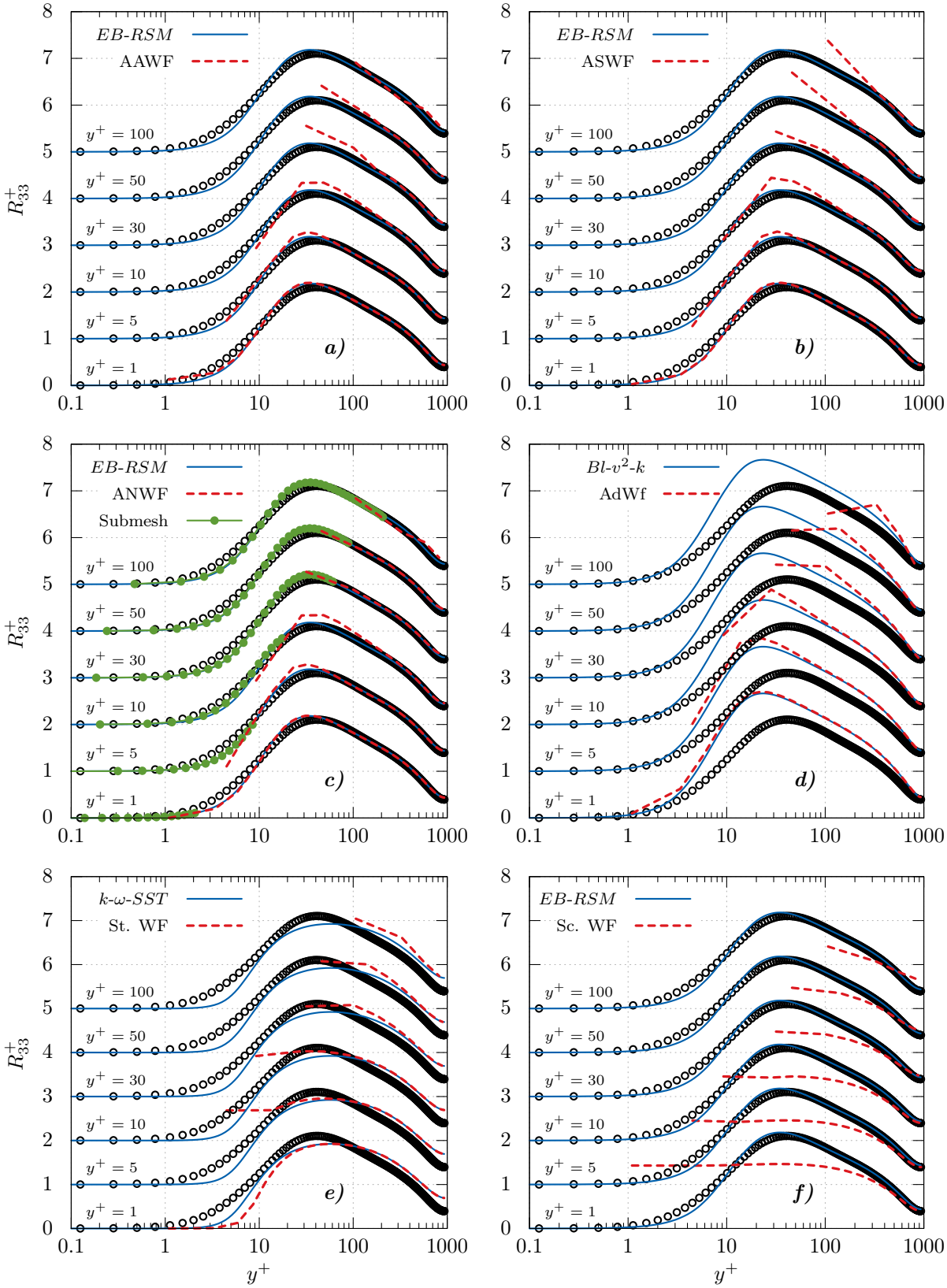


FIGURE 3.38 – Profils de R_{33}^+, ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle Bl-v^2-k. ***e)*** Lois de paroi standard *Code_Saturne* et modèle k-ω-SST. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

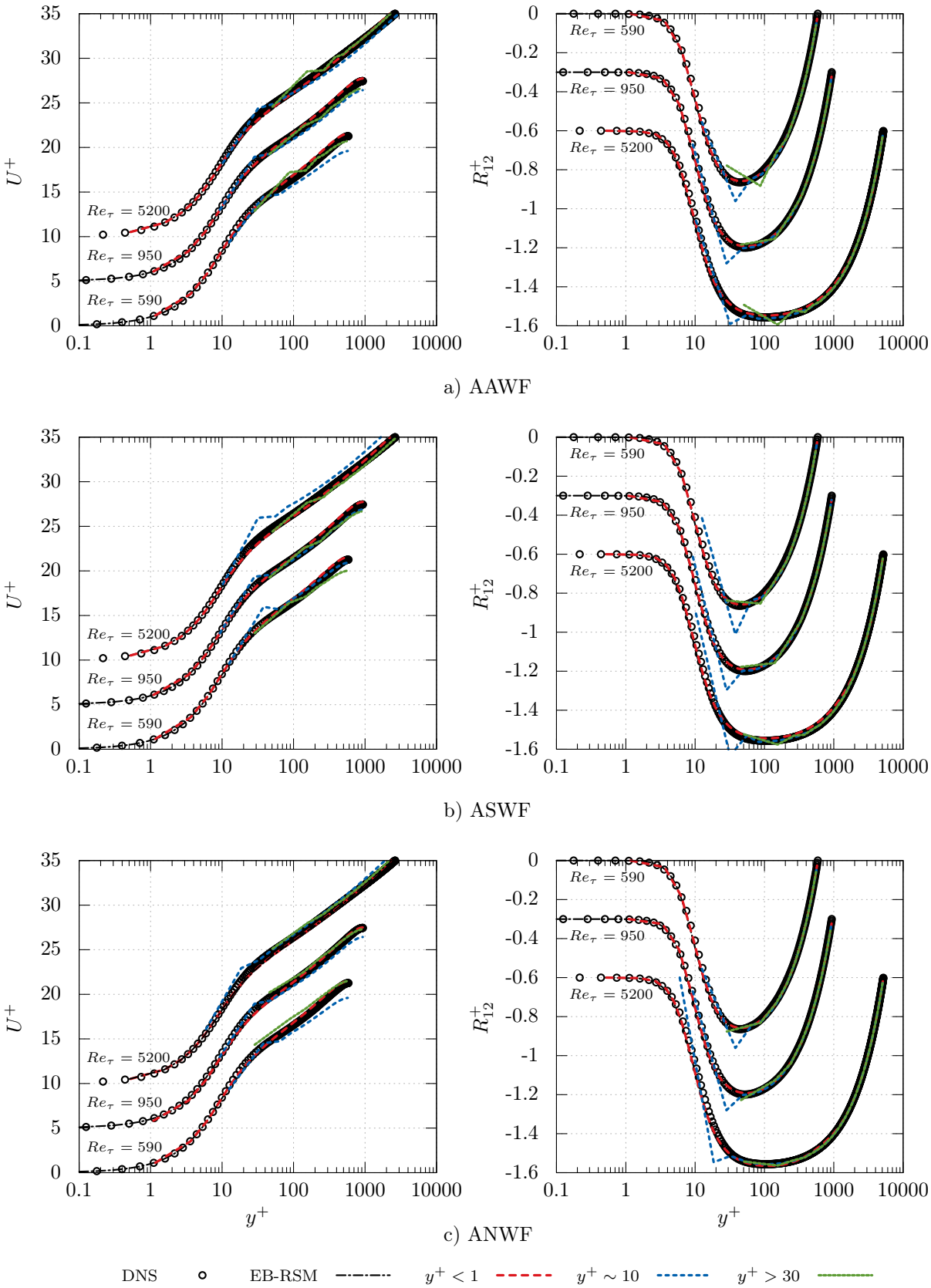


FIGURE 3.39 – Comparaison des lois AAWF, ASWF et ANWF pour $Re_\tau \in \{590, 950, 5200\}$ et pour des maillages *Bas-Reynolds*, *Haut-Reynolds* et en zone tampon. Données DNS : [Moser 1999], [Hoyas 2006], [Lee 2015].

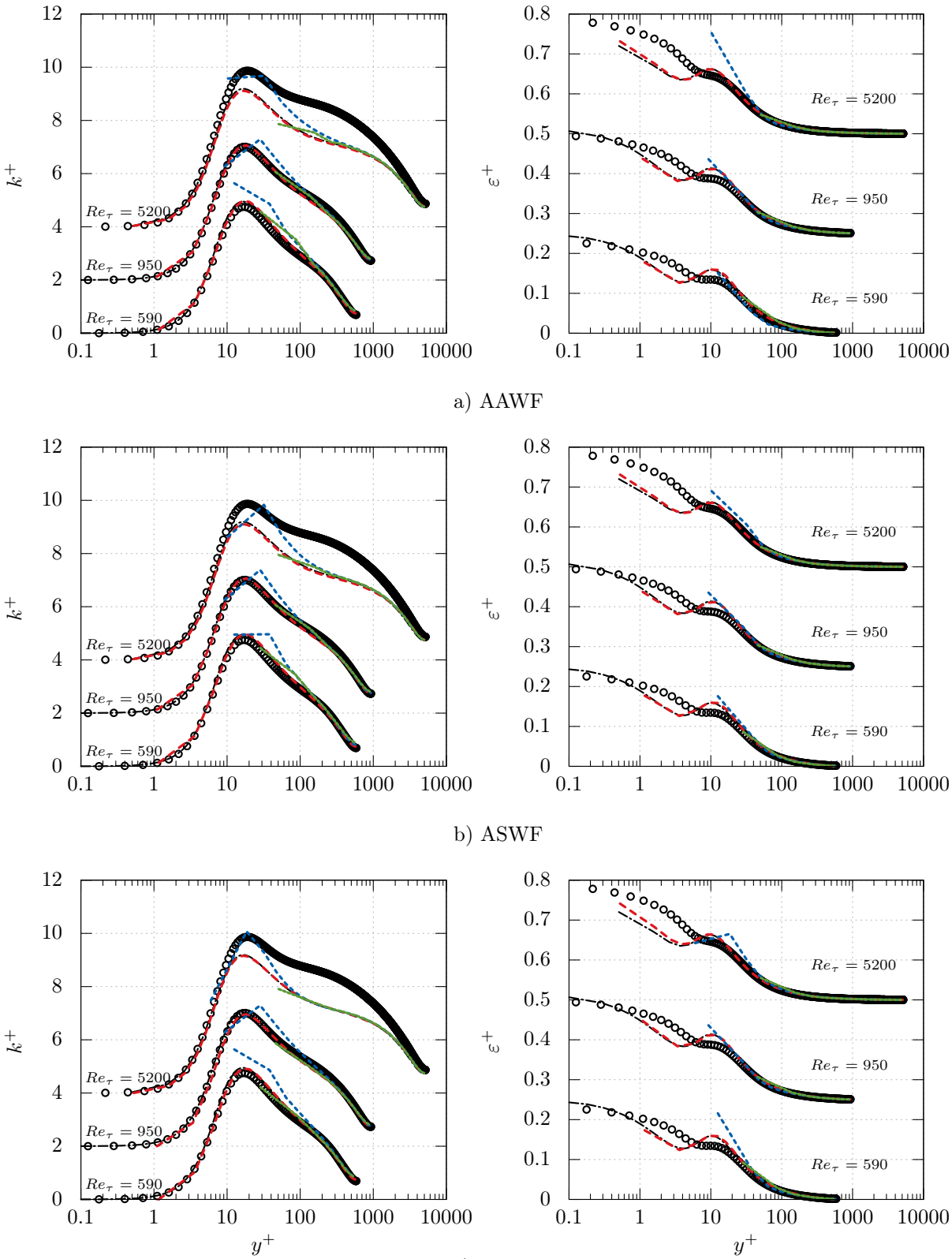


FIGURE 3.40 – Comparaison des lois AAWF, ASWF et ANWF pour $Re_\tau \in \{590, 950, 5200\}$ et pour des maillages *Bas-Reynolds*, *Haut-Reynolds* et en zone tampon. Données DNS : [Moser 1999], [Hoyas 2006], [Lee 2015].

Cette oscillation, systématiquement présente en zone tampon, fut déjà remarquée par Kalitzin et al. [Kalitzin 2004] et est due au maillage trop grossier employé dans cette zone pour capter des phénomènes à fort gradient. En effet, si l'on utilise un maillage très raffiné au dessus de la première maille, la figure (3.41) montre clairement qu'il est possible de faire disparaître toute oscillation. On récupère ainsi un profil de vitesse en parfaite adéquation avec le modèle EB-RSM standard pour les lois de paroi AAWF.

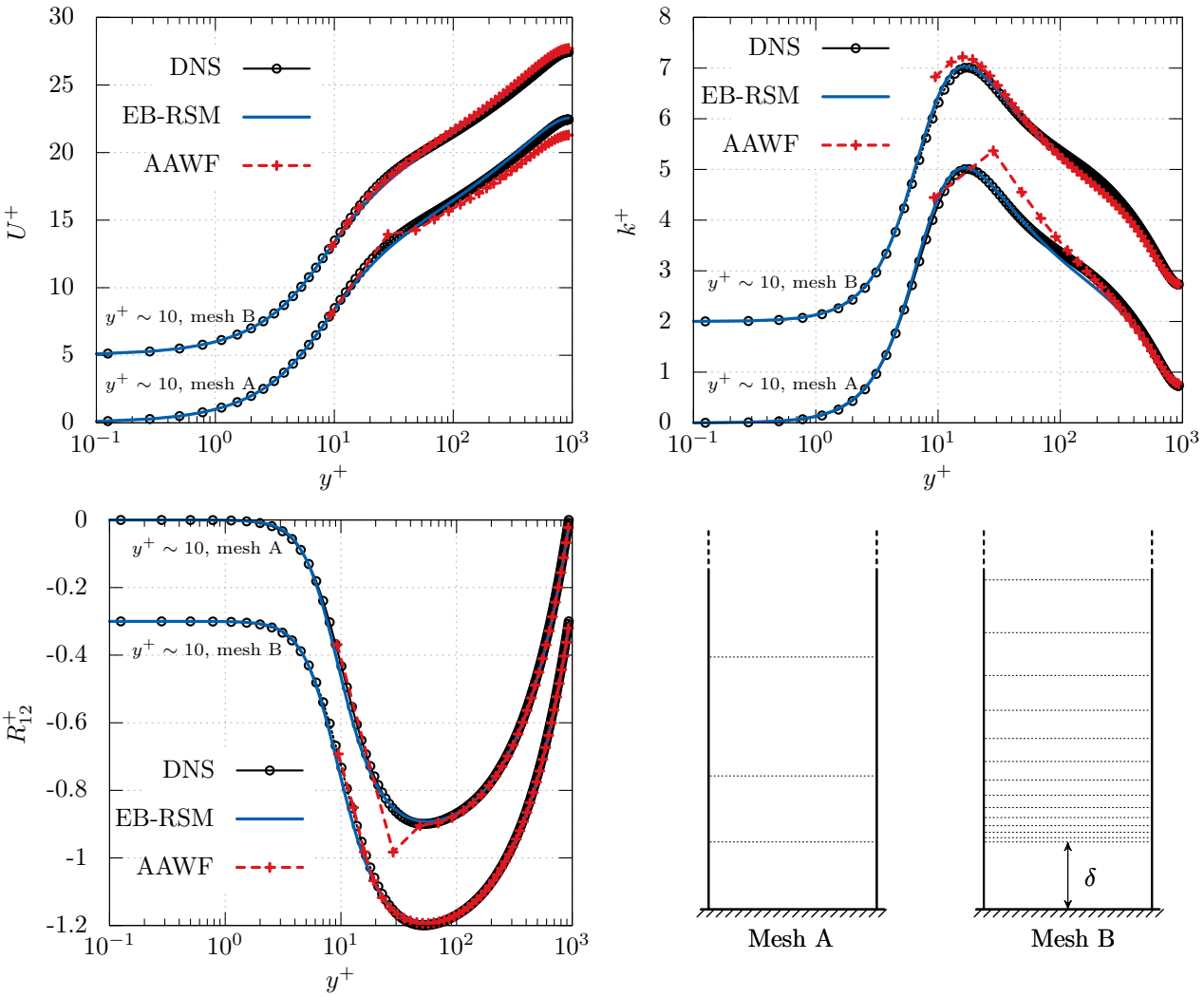


FIGURE 3.41 – Comparaisons des lois AAWF pour $Re_\tau = 950$ avec premier point de calcul en zone tampon sur deux types de maillage (A et B). Données DNS : [Hoyas 2006].

3.4.2 Crazy Channel

La robustesse des méthodes est à présent testée pour le même canal pleinement turbulent que dans la section précédente ($Re_\tau = 950$) mais pour un maillage 2D avec un élargissement progressif de la taille de maille en paroi. Les profils en entrée sont issus de calculs précurseurs

fins pour chaque modèle, une condition de type Neumann est imposée en sortie du domaine. Le maillage, dont une représentation schématique est donnée en figure (3.42), est graduellement contracté au centre du canal de manière à élargir les cellules de proche paroi. La distribution théorique de y_P^+ correspondante est donnée sur la même figure : on passe, sur $25h$ et de manière non linéaire, de $y^+ = 1$ à $y^+ = 50$.

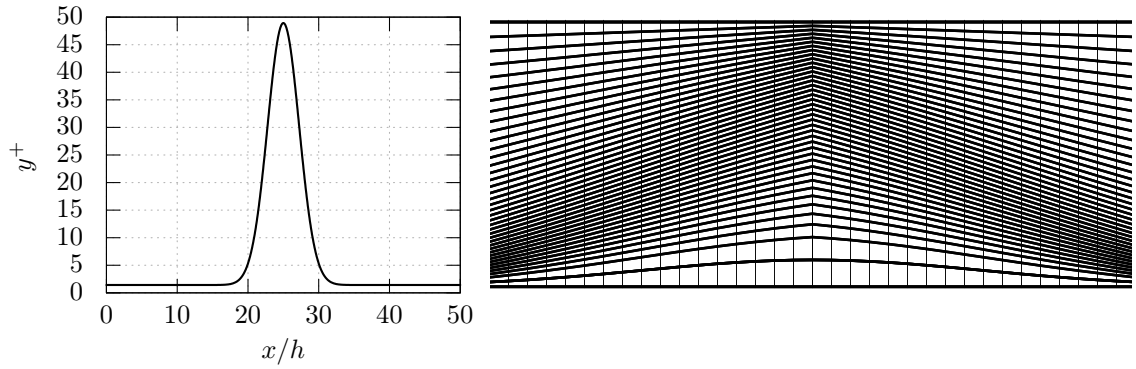


FIGURE 3.42 – Maillage distordu utilisé (zoom sur la partie centrale) pour le calcul de l'écoulement d'un canal pleinement développé et variation de y^+ correspondante.

On compare, dans un premier temps, la prédiction du frottement à la paroi dans les figures (3.43) et (3.44). On voit très nettement que tous les modèles de turbulence utilisés en adhérence (ItW : Integrated to the Wall) échouent totalement à prédire le frottement : l'erreur commise est d'au moins 200%. On voit ainsi l'intérêt d'avoir un traitement particulier pour ce type de maillages. Les modèles AAWF, ASWF et ANWF prédisent tous un frottement relativement correct avec d'excellents résultats pour le modèle AAWF ne présentant au maximum que 18% d'erreur. Les autres stratégies permettent également d'obtenir des valeurs de frottement relativement bonnes en comparaison des modèles ItW correspondant. On notera que le modèle ANWF est légèrement inférieur aux autres approches sur la prédiction du coefficient de frottement lorsque le maillage repasse de $y^+ = 50$ à $y^+ = 1$.

La figure (3.45) présente les profils de vitesse issus des différentes approches le long du canal ($x/h = 5, 15, 20, 25, 30$). Par soucis de clarté, sont également représentés les modèles de référence intégrés jusqu'à la paroi sur maillage 1D pour ce même nombre de Reynolds turbulent. Alors que les modèles AAWF et ANWF préservent les profils de vitesse, et ce même lorsque le premier point de calcul se situe en zone tampon, le modèle ASWF montre de mauvais résultats sur le profil de vitesse en $x/h = 30$, après la déformation du maillage. Le comportement du modèle AdWF est également relativement bon. Celui-ci, tout comme l'approche ASWF, ne permet cependant pas une bonne estimation de la vitesse en aval de la déformation ($x/h = 30$).

Les lois de paroi standard couplées au modèle k-ω-SST ne donnent pas de résultats satisfaisants sur ce cas. Il est intéressant de noter que cette mauvaise estimation des profils de vitesse est en opposition avec les conclusions tirées précédemment pour le coefficient de frottement prédit par cette approche.

Enfin, les « scalable wall functions », couplées au modèle SSG, sont sans surprise incapables de fournir une estimation correcte des profils de vitesse lorsque le maillage se situe dans une zone *Bas-Reynolds*.

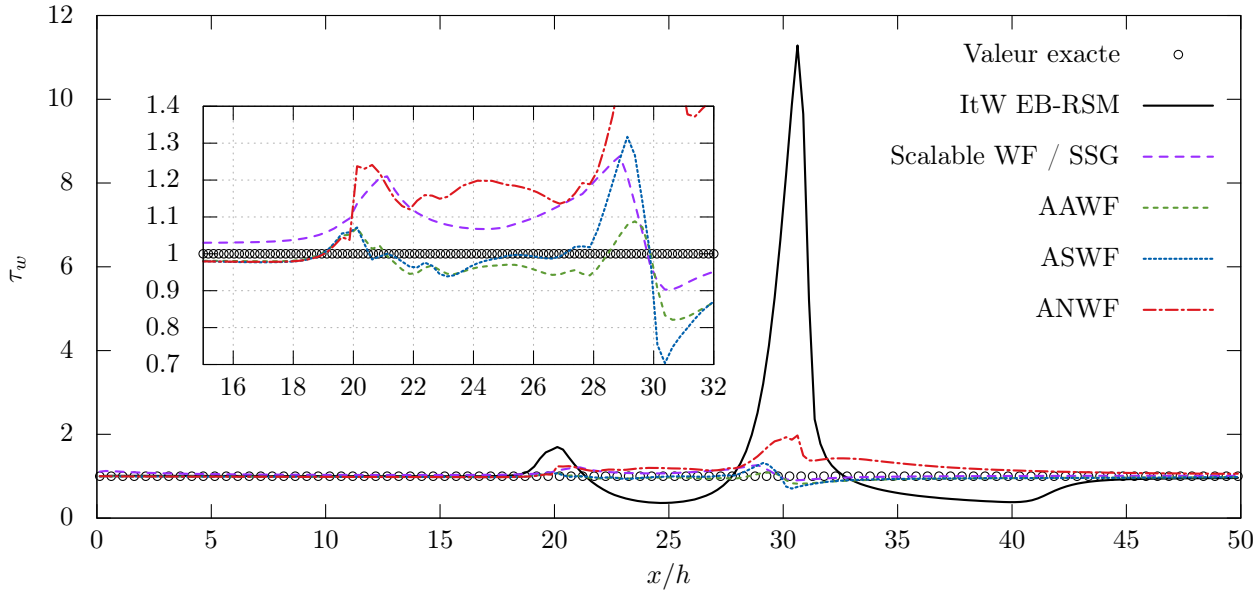


FIGURE 3.43 – Comparaison du frottement prédit par les modèles AAWF, ASWF, ANWF et « scalable » sur maillage 2D distordu.

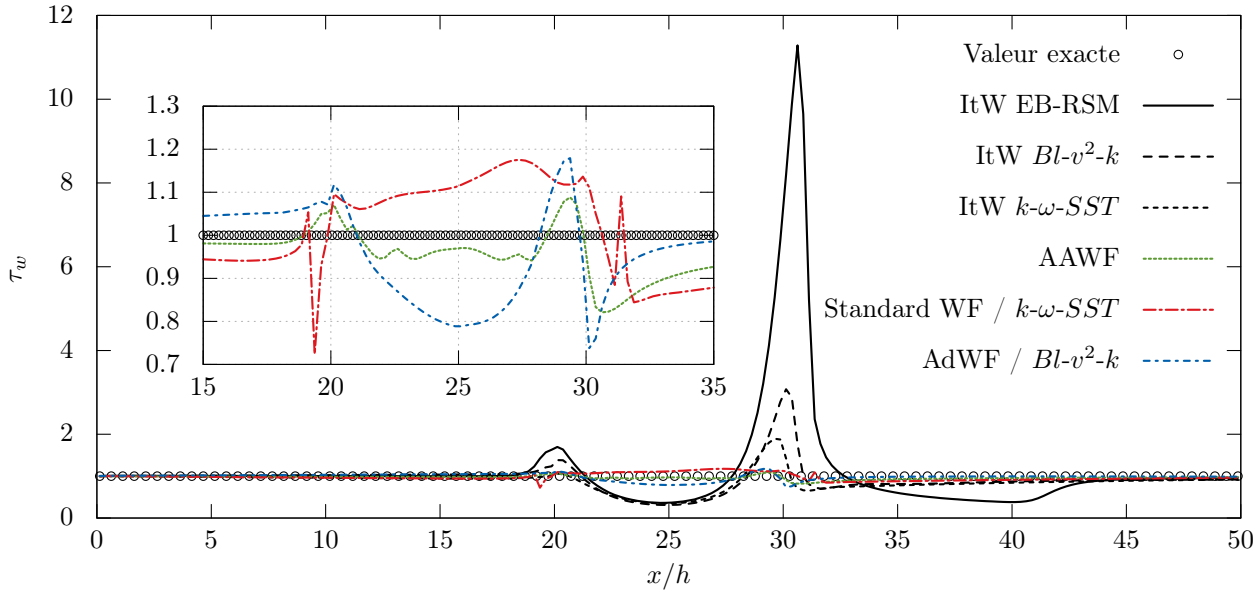


FIGURE 3.44 – Comparaison du frottement prédit par les modèles AAWF (EBRSM), AdWF (Bl-v^2-k), et standard (k-ω-SST) sur maillage 2D distordu.

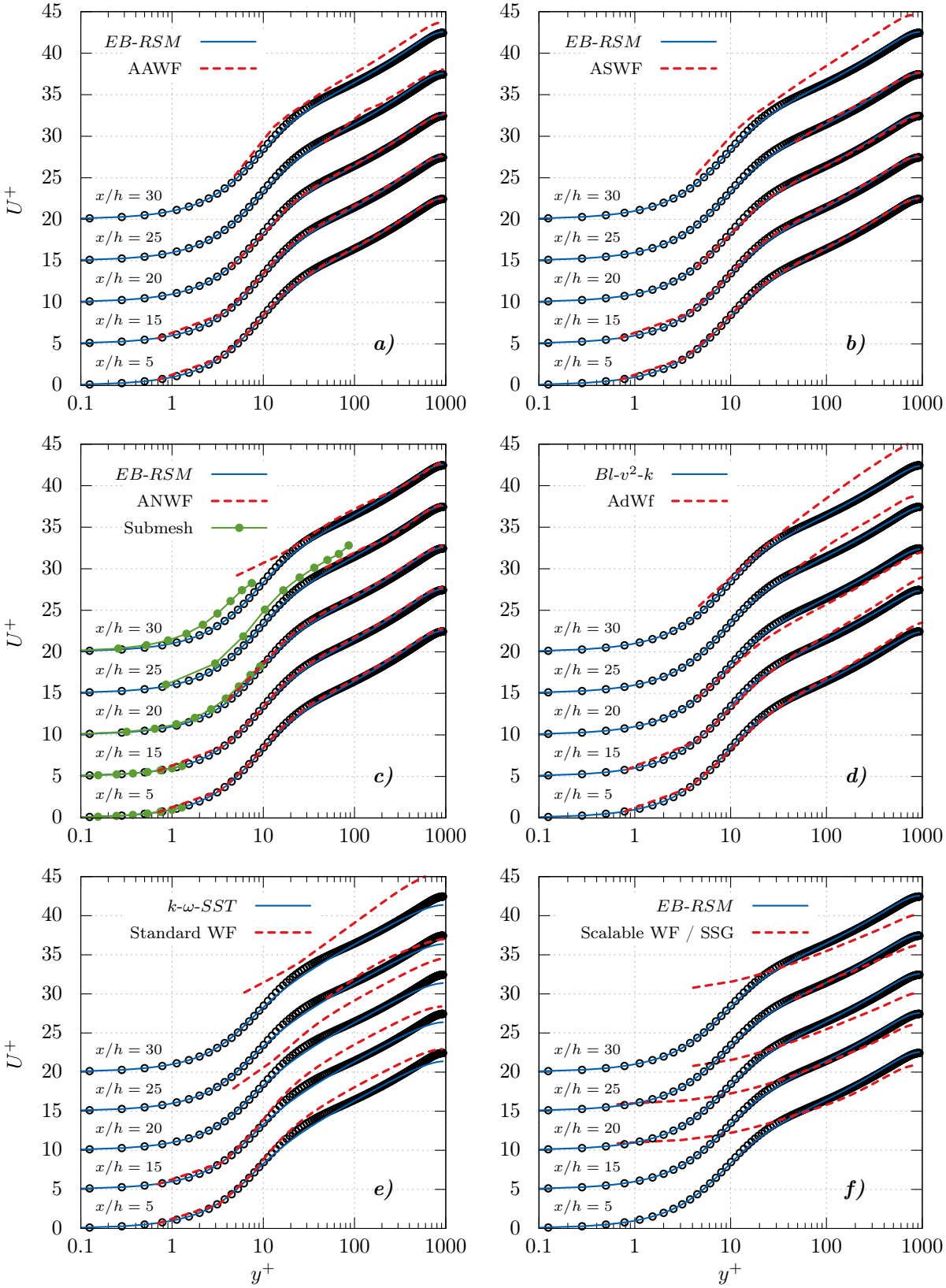


FIGURE 3.45 – ***a)*** AAWF (schéma 3.24). ***b)*** ASWF (schéma 3.25). ***c)*** ANWF (schéma 3.30). ***d)*** AdWF [Billard 2015] et modèle $Bl\text{-}v^2\text{-}k$. ***e)*** Lois de paroi standard Saturne et modèle $k\text{-}\omega\text{-}SST$. ***f)*** « Scalable wall functions » et modèle SSG.

3.5 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis de présenter trois nouvelles lois de paroi adaptatives pour le modèle EB-RSM. Les deux premières se basent sur un concept classique de loi de paroi (lois analytiques pour les variables) alors que la dernière propose d'intégrer numériquement des équations de transport simplifiées.

Toutes ces approches ont été testées et validées sur le cas d'un canal plan turbulent pleinement développé. Les résultats des trois approches se sont montrés en bonne adéquation avec le modèle EB-RSM de référence en comparaison à d'autres stratégies existantes. Par ailleurs, la robustesse de ces approches a été testée et vérifiée sur le cas d'un canal plan 2D sur un maillage dont les mailles de paroi passent continûment d'une zone *Bas-Reynolds* à une zone *Haut-Reynolds*.

Le chapitre suivant s'intéresse aux comportements des approches développées dans cette thèse sur des configurations académiques présentant des phénomènes plus complexes tels que point d'impact et séparation.

Chapitre 4

Applications à des configurations académiques

Sommaire

4.1 Jet impactant axisymétrique 121
4.1.1 Description du cas 121
4.1.2 Résultats en *Bas-Reynolds* 123
4.1.3 Résultats en *Haut Reynolds* 127
4.1.4 Raffinement localisé 137
4.1.5 Convergence en maillage 139
4.1.6 Conclusion sur le cas du jet impactant 143
4.2 Marche descendante 144
4.2.1 Description du cas 144
4.2.2 Résultats en *Bas-Reynolds* 144
4.2.3 Résultats en *Haut-Reynolds* 148
4.2.4 Raffinement localisé 153
4.3 Conclusion du chapitre 156

Cette partie s'attache à montrer les résultats des approches présentées dans le chapitre 3 dans le cas d'applications académiques classiques. Le cas d'un jet impactant sur une plaque plane est traité de manière détaillée avant d'examiner les résultats issus de calculs à l'aval d'une marche descendante. Ces deux études ont été réalisées avec la version 4.0 de *Code_Saturne*. Les maillages nécessaires au calcul du jet impactant ont été réalisés avec le logiciel *ANSYS Icem CFD*. Les maillages de la marche descendante sont issus du logiciel *Gmsh*.

4.1 Jet impactant axisymétrique

4.1.1 Description du cas

Les jets impactant sont un bon moyen d'augmenter les transferts de chaleur entre un fluide et une paroi solide. Il s'agit d'un cas test très documenté et souvent étudié de par sa physique relativement complexe et éloignée de la couche limite standard. Ce cas n'en reste pas moins un exemple couramment utilisé dans l'industrie pour des processus de refroidissement. De ce fait, beaucoup d'études aussi bien expérimentales, comme l'étude de Baughn et Shimizu [Baughn 1989], que numériques, comme les calculs LES de Hadziabdić et Hanjalić [Hadziabdić 2008], ont été réalisées pour en étudier la phénoménologie. La structure de l'écoulement dépend cependant beaucoup de

paramètres comme les conditions aux limites d'injection (nombre de Reynolds, turbulence,...), la distance d'impact ou encore le confinement de l'écoulement.

Le jet impactant est ici caractérisé par un nombre de Reynolds (basé sur le diamètre D du tube d'injection et sur la vitesse débitante d'injection U_b) $Re = 23000$ et par une distance d'impact $H = 2D$. Le schéma (4.1) donne une illustration de la situation. On ne simulera qu'une portion d'angle $\theta = 1^o$, le cas étant axisymétrique, avec une seule cellule dans la direction azimutale. Les conditions aux limites sont les suivantes :

- *Entrée* : Une méthode de recyclage pour chaque modèle utilisé est prescrite en entrée de manière à obtenir un profil pleinement développé pour le jet en sortie de buse.
- *Sortie* : Des conditions de sortie de type Neumann homogène sont imposées.
- *Paroi haute* : Les faces de la paroi haute sont traitées avec des conditions de symétrie (voir [*Code_Saturne* 2015]) .

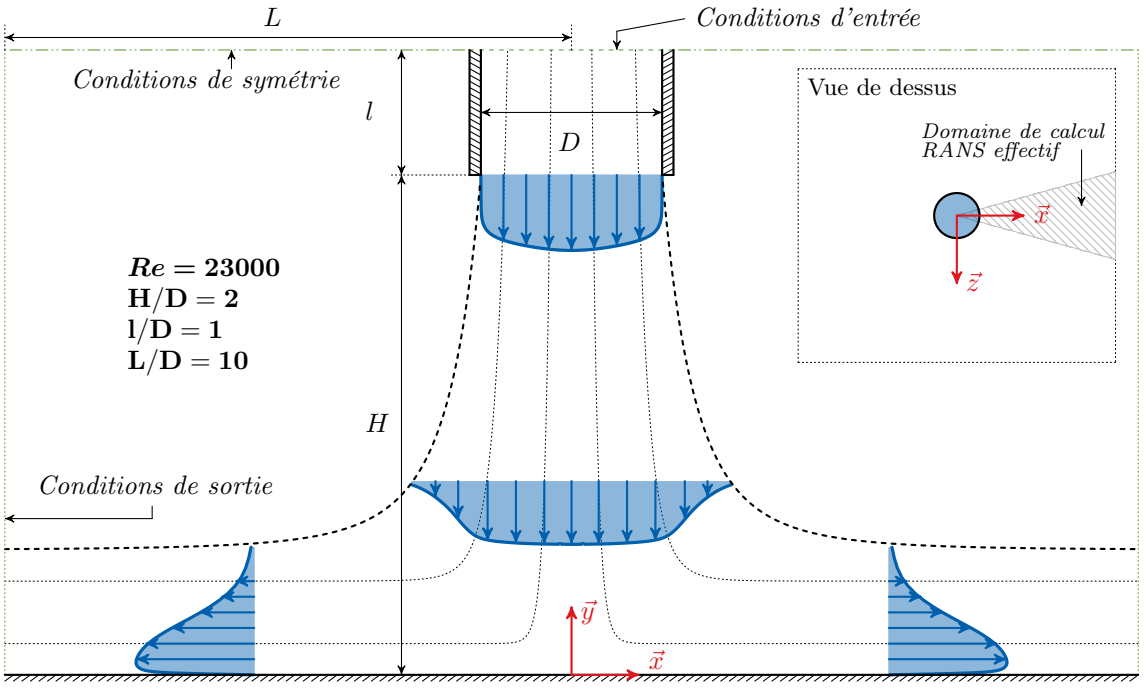


FIGURE 4.1 – Représentation schématique (non à l'échelle) du cas du jet en impact sur une plaque plane.

La paroi inférieure est chauffée par un flux thermique constant que l'on notera ϕ_w. Les parois du tube d'injection sont elles considérées adiabatiques et la température du fluide en sortie d'injection est uniforme, constante et notée T_b. Outre les profils des différentes variables, on s'intéressera également dans la suite au coefficient de frottement, noté C_f et au nombre de Nusselt, noté Nu, et définis comme suit :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_b^2} \quad \text{et} \quad Nu = \frac{\phi_w D}{\lambda(T_f - T_b)} \tag{4.1}$$

où T_f est la température de paroi et λ la conductivité thermique du fluide. Le coefficient de frottement C_f traduit l'intensité locale du frottement visqueux à la paroi et le nombre de Nusselt traduit l'intensité locale du transfert thermique entre le fluide et le solide.

On s'appuiera tout au long de l'étude sur les données expérimentales de Baughn et Shimizu [Baughn 1989] ainsi que sur les résultats numériques issus des calculs LES de Hadziabdić et Hanjalić [Hadziabdić 2008].

4.1.2 Résultats en *Bas-Reynolds*

On s'intéresse dans un premier temps, par soucis de cohérence, à la comparaison de trois modèles en adhérence avec les données expérimentales ainsi que les données LES. Dans toutes les sections suivantes, on comparera les modèles avec lois de paroi à leurs versions intégrées jusqu'à la paroi et associées mais on abandonnera toute comparaison avec les références expérimentales et LES pour des raisons de clarté. Les lecteur se référera alors à cette section pour juger du bon comportement du modèle de base. Comme pour la validation en canal des lois de paroi au chapitre 3, trois modèles RANS *Bas-Reynolds* de référence sont testés :

- Le modèle k-ω-SST,
- Le modèle Bl-v^2-k,
- Le modèle EB-RSM.

Malgré l'existence de modélisations plus précises et plus avancées pour les modèles du second ordre (travaux de Frédéric Dehoux [Dehoux 2012]), les flux thermiques turbulents de l'équation de transport pour la température sont traités pour l'EB-RSM à l'aide d'un modèle GGDH (*Generalized Gradient Diffusion Hypothesis*). Les deux modèles du premier ordre traitent les flux thermiques turbulents à l'aide d'un modèle SGDH (*Simple Gradient Diffusion Hypothesis*) avec un nombre de Prandtl turbulent $Pr_t = 0.9$.

Les figures (4.2) et (4.3) montrent les profils de vitesse et des composantes du tenseur de Reynolds. On observe une bonne prédiction des profils de vitesse pour les trois modèles testés. On notera cependant que les données LES semblent ne pas correspondre aux mesures expérimentales notamment en $x/D = 1.5$ et $x/D = 2$. L'EB-RSM semble de ce fait plus proche des données LES. Cette observation se confirme lors de l'examen des tensions de Reynolds ou l'on note clairement un désaccord entre les mesures et les données LES, en proche paroi, pour les profils $x/D = 1.0, 1.5, 2.0$. Ne disposant pas des conditions exactes de sortie d'injecteur pour l'expérience, un doute persiste sur la correspondance des travaux de Baughn et Shimizu [Baughn 1989] avec les calculs.

De manière générale, l'EB-RSM reproduit très bien les phénomènes de proche paroi, tel que le premier pic sur R_{11} en proche paroi. Les modèles à viscosité turbulente sont quant à eux dans l'impossibilité de reproduire ce phénomène. Les niveaux de turbulence produits par l'EB-RSM sont globalement plus élevés que ceux prédits par l'expérience ou la LES, on observe notamment une nette surévaluation de la composante normale du tenseur de Reynolds R_{22} proche du point d'impact. Ce comportement affecte directement la prédiction du nombre de Nusselt à la paroi. On remarque en effet sur la figure (4.4b) une surestimation de plus de 100% du nombre de

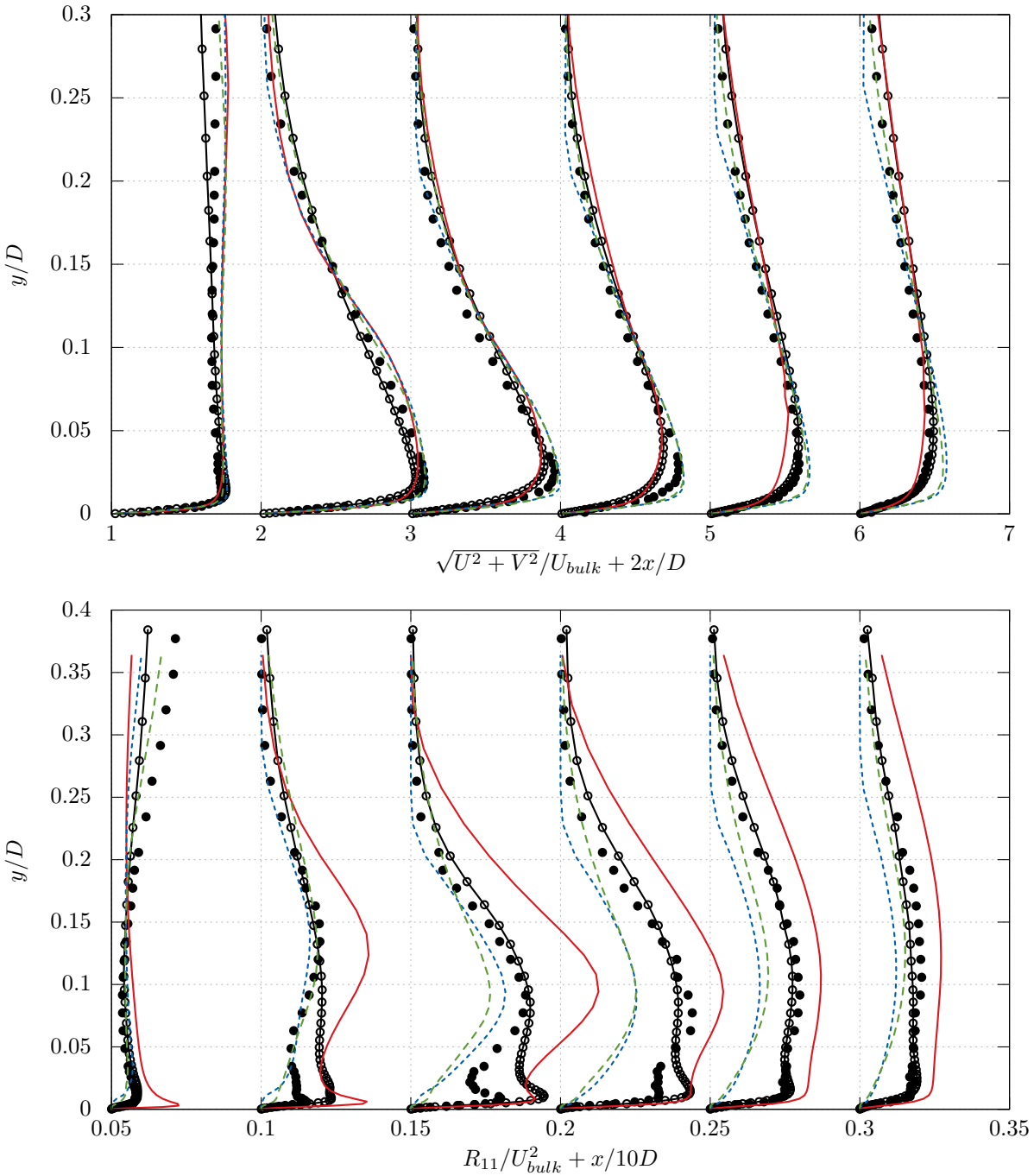


FIGURE 4.2 – Comparaison des profils de la vitesse (en haut) et de R_{11} (en bas) avec (de gauche à droite) $x/D = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données expérimentales de Baughn et Shimizu (•) et données LES de Hadziabdić et Hanjalić (—o—).

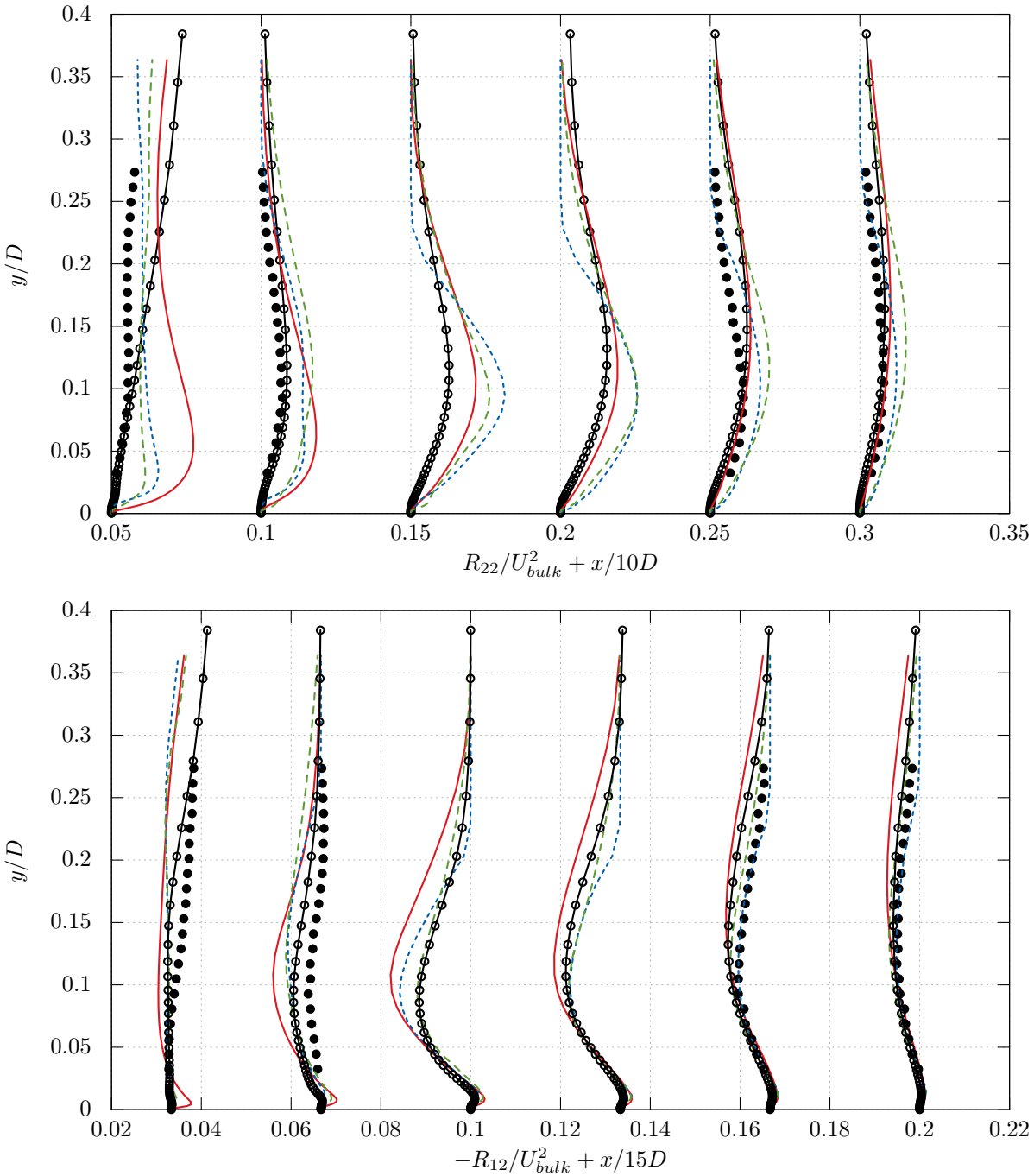


FIGURE 4.3 – Comparaison des profils de R_{22} (en haut) et de R_{12} (en bas) avec (de gauche à droite) $x/D = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données expérimentales de Baughn et Shimizu (•) et données LES de Hadziabdić et Hanjalić (—o—).

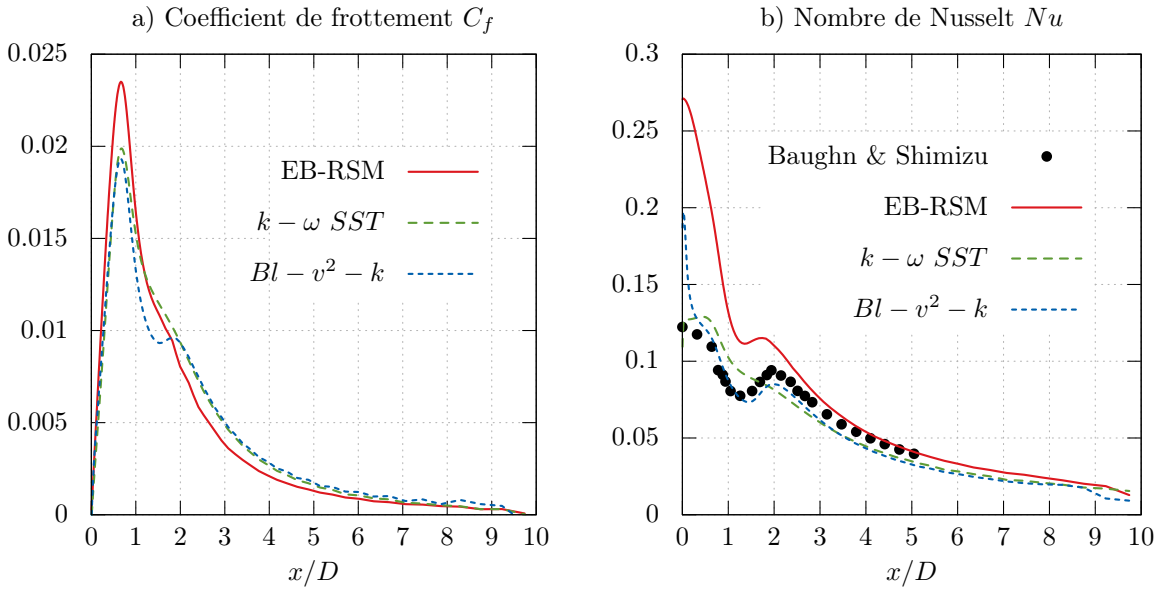


FIGURE 4.4 – ***a)*** Comparaison du coefficient de frottement C_f, pas de données de références. ***b)*** Comparaison du nombre de Nusselt.

Nusselt au niveau du point d'impact pour l'EB-RSM. Ce comportement est connu et a déjà été observé auparavant [Manceau 2014]. Malgré une surestimation équivalente pour Nu au point d'impact, le modèle Bl-v^2-k montre un excellent accord avec les données expérimentales sur le nombre de Nusselt. Le comportement du modèle k-ω-SST s'avère également relativement bon.

Le coefficient de frottement à la paroi d'impact donné sur la figure (4.4a) ne dispose pas de données de références mais les données issues des calculs RANS serviront par la suite pour évaluer les différentes lois de paroi. On note une bonne adéquation entre les modèles sur cette grandeur, avec un pic légèrement plus élevé prédit par l'EB-RSM.

Le comportement observé proche du point d'impact pour les modèles de type k-ε est un problème bien connu dans la littérature. De nombreuses corrections *ad hoc* ont été publiées de manière à corriger ce comportement. La plus célèbre d'entre elles est la correction de Yap [Yap 1987], consistant en l'introduction d'un terme source dans l'équation de dissipation :

$$Y_\varepsilon = \max\left[0.83\frac{\varepsilon^2}{k}\left(\frac{k^{3/2}/\varepsilon}{2.5y}-1\right)\left(\frac{k^{3/2}/\varepsilon}{2.5y}\right)^2, 0\right] \tag{4.2}$$

Cette correction vise à moduler la longueur caractéristique des gros tourbillons, en la ramenant vers sa valeur d'équilibre si elle s'en éloigne trop. Mais ces corrections sont bien souvent très qualitatives et font intervenir la distance à la paroi ce qui n'est pas souhaitable, en particulier dans le cadre d'un code non structuré. Bien souvent ces corrections ne sont par ailleurs pas suffisantes. En effet, considérons la production d'énergie cinétique turbulente :

$$P = \frac{1}{2}P_{ii} = -R_{ik}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \tag{4.3}$$

Le long de l'axe central, proche du point d'impact, cette expression prend la forme :

$$P = -R_{11}\frac{\partial U}{\partial x} - R_{22}\frac{\partial V}{\partial y} - R_{33}\frac{\partial W}{\partial z} \tag{4.4}$$

car, par symétrie, les composantes extra-diagonales du tenseur de Reynolds sont nulles sur cet axe. Par ailleurs, étant donné que, par continuité, $\partial_x U = \partial_z W = -\frac{1}{2}\partial_y V$ et, par symétrie, $R_{11} = R_{33}$, il est possible de réécrire l'équation (4.4) comme suit :

$$P = -(R_{22} - R_{11})\frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.5}$$

Dans le cas des modèles à viscosité turbulente, les composantes du tenseur de Reynolds sont calculées suivant l'hypothèse de Boussinesq :

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{2}{3}k - 2\nu_t\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2}{3}k + \nu_t\frac{\partial V}{\partial y} \\ R_{22} &= \frac{2}{3}k - 2\nu_t\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ces dernières équations amènent alors à l'expression suivante pour la production d'énergie cinétique turbulente :

$$P = 3\nu_t\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \tag{4.7}$$

De l'énergie turbulente est donc générée en excès au point d'impact, entraînant des transferts thermiques plus importants que la réalité. En effet, le terme $R_{22} - R_{11}$ de l'équation (4.5) est faible et atténue normalement l'importance du terme $\partial_y V$, ce qui n'est plus le cas avec l'équation (4.7). Cette interprétation est inhérente aux modèles à viscosité turbulente. On trouve ainsi de nombreuses corrections visant à modifier l'expression de la production de manière à diminuer celle ci proche des points d'impact. Il est en revanche plus surprenant d'observer le même phénomène pour l'EB-RSM, le calcul de la production ne pouvant être incriminé puisque son expression est exacte.

Des travaux sont à mener dans le futur pour comprendre et corriger ce phénomène. On peut cependant affirmer qu'il ne s'agit probablement pas d'un problème de modélisation de la proche paroi mais plutôt d'un problème dans la modélisation des termes de redistribution ou de dissipation. Cette dernière piste a d'ailleurs fait l'objet de quelques études avec l'introduction de la contrainte de réalisabilité de Durbin, dont l'illustration pourra être trouvée en annexe. Dans toute la suite, on conservera comme modèle de référence le présent calcul EB-RSM, et ce malgré ce mauvais comportement au niveau du point d'impact.

4.1.3 Résultats en *Haut Reynolds*

On s'intéresse à présent à un calcul purement *Haut-Reynolds* du cas du jet en impact. Le maillage au sein du tube d'injection aussi bien que le long de la paroi a une taille de première maille assurant une localisation de chaque premier point de calcul au sein de la zone logarithmique. La figure (4.5) compare le maillage utilisé dans cette section avec celui utilisé pour la présentation des résultats en adhérence dans le paragraphe précédent.

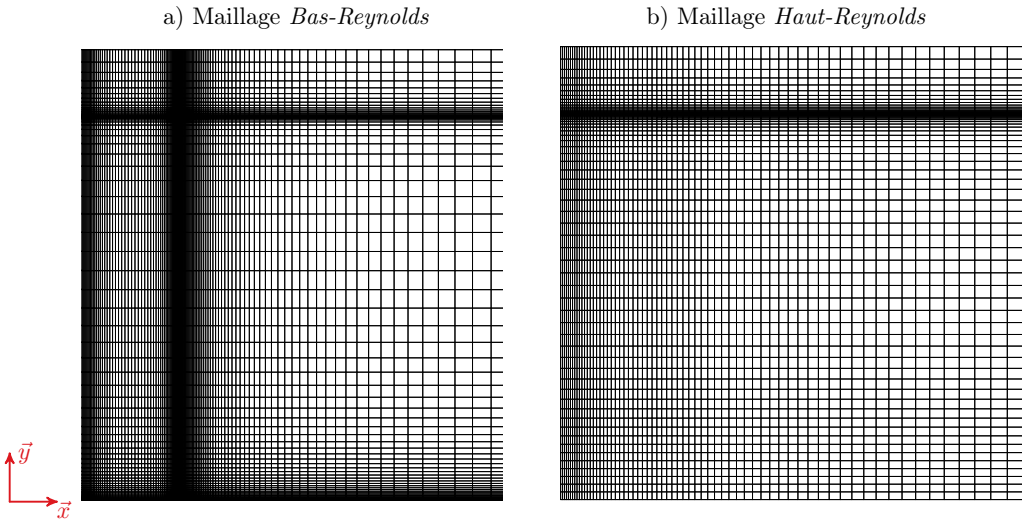


FIGURE 4.5 – Comparaison des maillages *Haut* et *Bas* Reynolds. ***a)*** Maillage *Bas-Reynolds* utilisé pour les calculs en adhérence type EB-RSM. ***b)*** Maillage *Haut-Reynolds* dans lequel pour le raffinement de la paroi d'impact et de la paroi d'injection $y^+_{max} \sim 40$

4.1.3.1 Loi de vitesse standard

Dans un premier temps, on s'intéresse aux résultats issus des mêmes modèles que ceux utilisés au paragraphe 3.4.1 du chapitre 3 (canal plan), à savoir :

— Nouvelles approches AAWF,ASWF et ANWF pour l'EB-RSM.
— Lois de paroi standard et modèle k-ω-SST.
— Lois de paroi « scalable » et modèle SSG.
— Lois de paroi AdWF de Billard et al. et modèle Bl-v^2-k.

Les nouvelles approches AAWF, et SWF sont ici testées en utilisant la loi standard sur la vitesse (sans prise en compte de termes sources de gradient de pression ou de convection) exprimée au paragraphe 3.2.1 du chapitre 3. Les figures (4.6) et (4.7) montrent les profils de vitesse ainsi que le profil d'énergie cinétique turbulente pour chaque modèle de paroi utilisé. Dans chaque cas, on compare les résultats à ceux du modèle intégré jusqu'à la paroi correspondant. On rappelle que les données expérimentales de Baughn et Shimizu [Baughn 1989] ainsi que sur les résultats numériques issus des calculs LES de Hadziabdić et Hanjalić [Hadziabdić 2008] ne sont plus tracés.

De manière générale, on observe un bon accord avec les modèles *Bas-Reynolds* pour tous les traitements de paroi sur la vitesse. Les nouvelles approches se comportent relativement bien. On notera cependant l'apparition d'oscillations, du même ordre que celles observées lors du calcul du canal pleinement développé au chapitre précédent, lorsque la couche limite se redéveloppe ($x/D = 2.5, 3$). Ceci n'est pas à attribuer aux lois de paroi, étant donné que le calcul SSG exhibe un comportement identique. Ce phénomène n'est pas visible pour un modèle du premier ordre, ceci probablement grâce à l'expression de la contrainte turbulente à l'aide de la viscosité

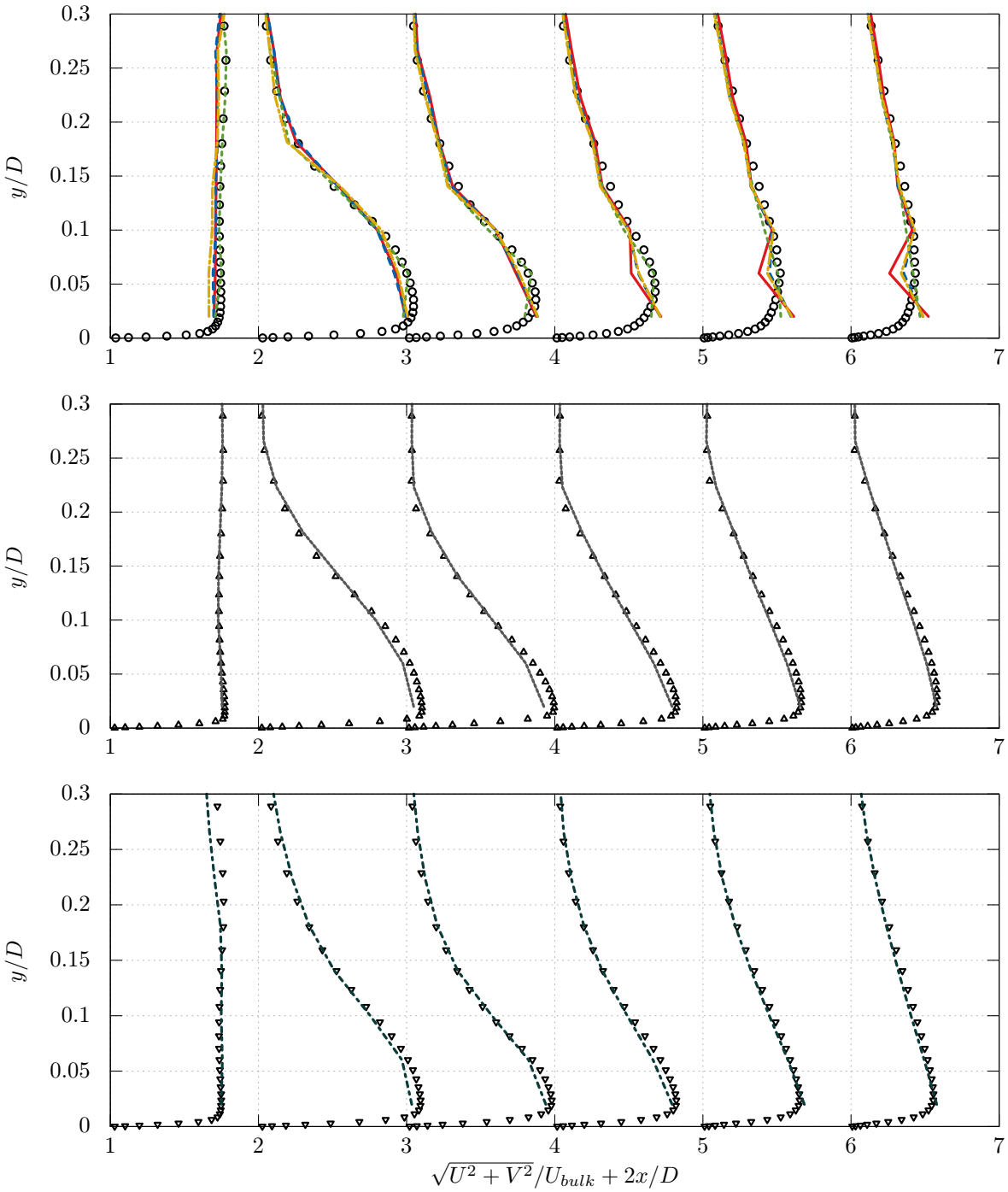


FIGURE 4.6 – Profils de vitesse avec (de gauche à droite) $x/D = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ ***En haut :*** Calcul EB-RSM en adhérence (○) et lois de paroi AAWF (———), ASWF (- - - - -), ANWF (- - - - - - - -) et « scalable wall functions » SSG (-·-·-·-). ***Au milieu :*** Calcul *Bl-v^2-k* en adhérence (△) et lois de paroi AdWF (·····). ***En bas :*** Calcul *k-ω-SST* en adhérence (▽) et lois de paroi standards (- - - - - - - -)

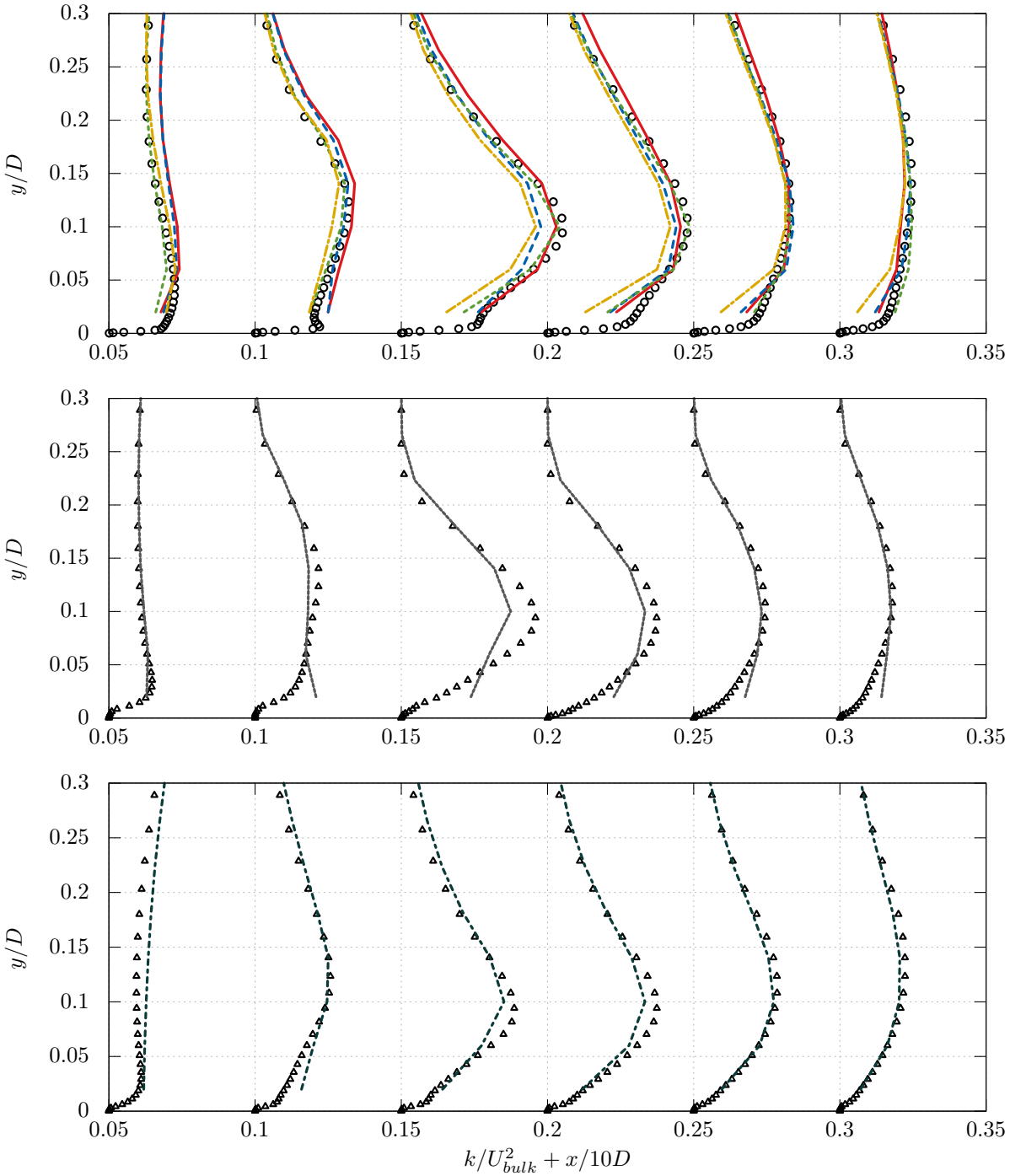


FIGURE 4.7 – Profils d'énergie cinétique turbulente avec (de gauche à droite) $x/D = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ ***En haut :*** Calcul EB-RSM en adhérence (∘) et lois de paroi AAWF (———), ASWF (- - - - -), ANWF (·------·) et « scalable wall functions » SSG (—·—·—). ***Au milieu :*** Calcul Bl-v^2-k en adhérence (▵) et lois de paroi AdWF (·····). ***En bas :*** Calcul k-ω-SST en adhérence (▿) et lois de paroi standards (·-·-·-·)

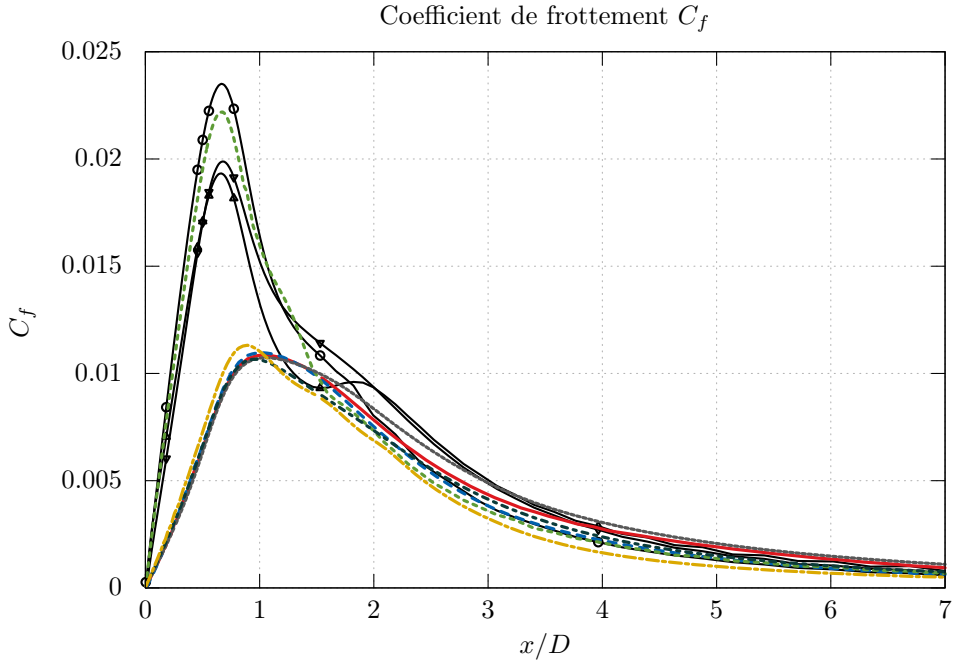


FIGURE 4.8 – Coefficient de frottement. Même légende que pour les figures (4.6) et (4.7).

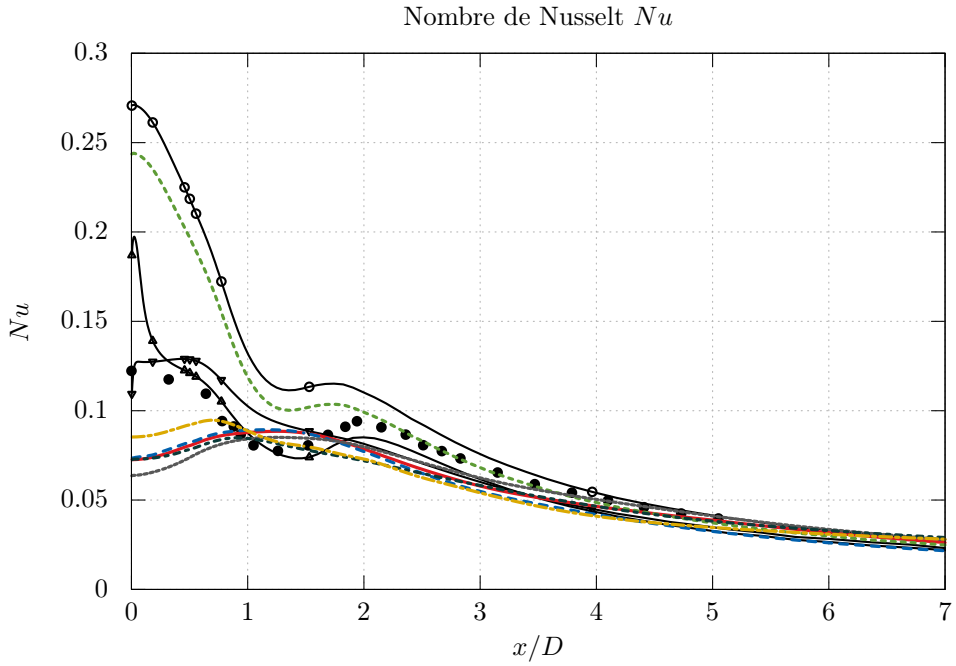


FIGURE 4.9 – Nombre de Nusselt le long de la paroi d'impact. Même légende que pour les figures (4.6) et (4.7) avec comme références les données expérimentales de Baughn et Shimizu (•)

turbulente.

Il est intéressant de regarder les grandeurs évaluées à la paroi, puisque ce sont bien souvent les valeurs d'intérêt. La figure (4.8) compare les coefficients de frottement de chaque modèle de paroi. Tous les modèles, à l'exception du modèle ANWF, donnent des résultats *quasi* identiques : on observe une sous estimation du pic de frottement de l'ordre de 50%. Par ailleurs, très proche du point d'impact, ces mêmes modèles sont incapables de prédire la pente du frottement. Mais ces résultats sont loin d'être une réelle surprise. En effet, il n'est pas possible d'espérer faire mieux avec l'utilisation de lois de paroi « à l'équilibre » en *Haut-Reynolds*. Pour s'en convaincre, il est possible d'extraire les profils de la composante U de la vitesse et de l'énergie cinétique turbulente k du calcul EB-RSM en adhérence pour $x/D \in [0:10]$ et la valeur y/D correspondant à la taille de première maille du maillage Haut-Reynolds. Il est ainsi possible d'utiliser ces profils pour calculer *a priori* la valeur du coefficient de frottement prédite par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{k_p}{u_k^2} = \widetilde{k}^+\left(\dfrac{y_p u_k}{\nu}\right) \\ \dfrac{U_p}{u_\tau} = \widetilde{U}^+\left(\dfrac{y_p u_k}{\nu}\right) \\ \tau_w = \rho u_\tau u_k \end{cases}$$

Ce système est celui utilisé par les lois de paroi dans le cadre de la plupart des modèles *Haut-Reynolds*. Seule la façon dont sont exprimées les lois $\widetilde{U}^+$ et $\widetilde{k}^+$ change. Le frottement issu de ce calcul *a priori* est donné dans la figure (4.10).

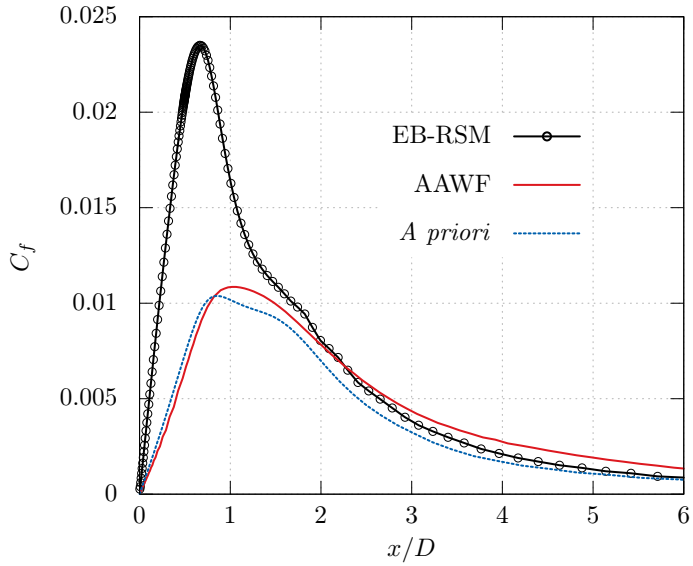


FIGURE 4.10 – Coefficient de frottement le long de la paroi d'impact.

On remarque immédiatement la très forte similitude entre le profil AAWF et le profil *a priori*, ce qui tend bien à prouver que c'est la loi de paroi qui dicte le comportement du coefficient de frottement ainsi que du nombre de Nusselt. Il n'est donc pas étonnant que d'une part, tous les modèles (sauf l'approche ANWF sur laquelle on reviendra) échouent à reproduire le modèle

en adhérence, et que d'autre part tous les modèles fournissent des prédictions relativement semblables.

Les résultats fournis par le modèle issu de l'intégration numérique d'équations 1D embarquées sur une sous-maille de paroi (ANWF) sont les seuls reproduisant de manière satisfaisante les résultats EB-RSM. On note une bonne adéquation sur les profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente (figures (4.6) et (4.7)) ainsi qu'une excellente prédiction du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt (figure (4.8)) par par rapport à l'EB-RSM.

Il est par ailleurs instructif de regarder de plus près les prédictions des approches AAWF, ASWF et ANWF adimensionnées en échelles internes pour les profils proches du point d'impact. Dans la figure (4.11) sont ainsi présentés les profils de U^+, R_{11}^+, R_{22}^+ et R_{12}^+ pour $x/D = 0.5, 1, 1.5$ respectivement. Sans surprise, pour les lois de paroi AAWF et ASWF et pour toutes les positions, la loi utilisée sur la vitesse force la valeur de la vitesse adimensionée à se situer sur la loi logarithmique. On mesure ici l'hypothèse erronée qui est faite en supposant la vitesse à l'équilibre (pas de convection, gradient de pression faible), et le coefficient de frottement sous évalué obtenu en figure (4.8) trouve ici un éclaircissement supplémentaire. Cette observation reste vraie pour le modèle AAWF et les tensions de Reynolds mais plus pour le modèle ASWF. Les lois numériques ANWF, permettant une prise en compte plus fine des termes sources de l'équation de quantité de mouvement suivant x (gradient de pression, convection,...) dévient clairement de la loi logarithmique et sont en parfaite adéquation avec le modèle EBRSM. La même tendance est observée pour les composantes du tenseur de Reynolds pour lesquelles l'approche ANWF permet d'obtenir des profils extrêmement proches de ceux de l'EB-RSM.

On notera que, pour les lois AAWF, les composantes du tenseur de Reynolds tendent au premier point de calcul vers la solution analytique du système algébrique montrée dans la figure (3.22) du chapitre 3. L'approche AAWF est donc simplement l'extension de ce qui est fait pour le traitement sur la vitesse : le système algébrique fournit, quelle que soit la localisation du premier point, une valeur analytique des tensions de Reynolds adimensionnées. Ces lois ne sont simplement pas explicites mais issues de la résolution locale d'un système d'équations algébriques.

Le modèle ANWF est malheureusement particulièrement instable et difficile à faire converger, en particulier pour de grandes valeurs de y^+. Ceci est très certainement dû au caractère explicite temporel des équations résolues dans la sous maille 1D ainsi qu'au traitement de la vitesse tangentielle V. Malgré ces résultats très prometteurs et ouvrant des perspectives en terme de modélisation de la paroi, cette approche souffre donc encore de lacunes qu'il convient de combler : un important travail est nécessaire et n'a pu être réalisé durant cette thèse par manque de temps. C'est pourquoi dans la suite, les résultats de cette approche ne seront plus utilisés.

4.1.3.2 Prise en compte des effets de pression et des effets convectifs

On souhaite maintenant s'intéresser à l'influence de la prise en compte des effets de pression et des effets convectifs dans la loi de paroi pour la vitesse établie au paragraphe 3.2.1.3. On rappelle ici que cette loi de paroi, notée $\widetilde{U}^+$, est conçue de telle sorte qu'elle offre la possibilité d'inclure des effets « hors équilibre » de type gradient de pression et convection. Ainsi la loi, en zone logarithmique, inclue dans la pondération s'écrit :

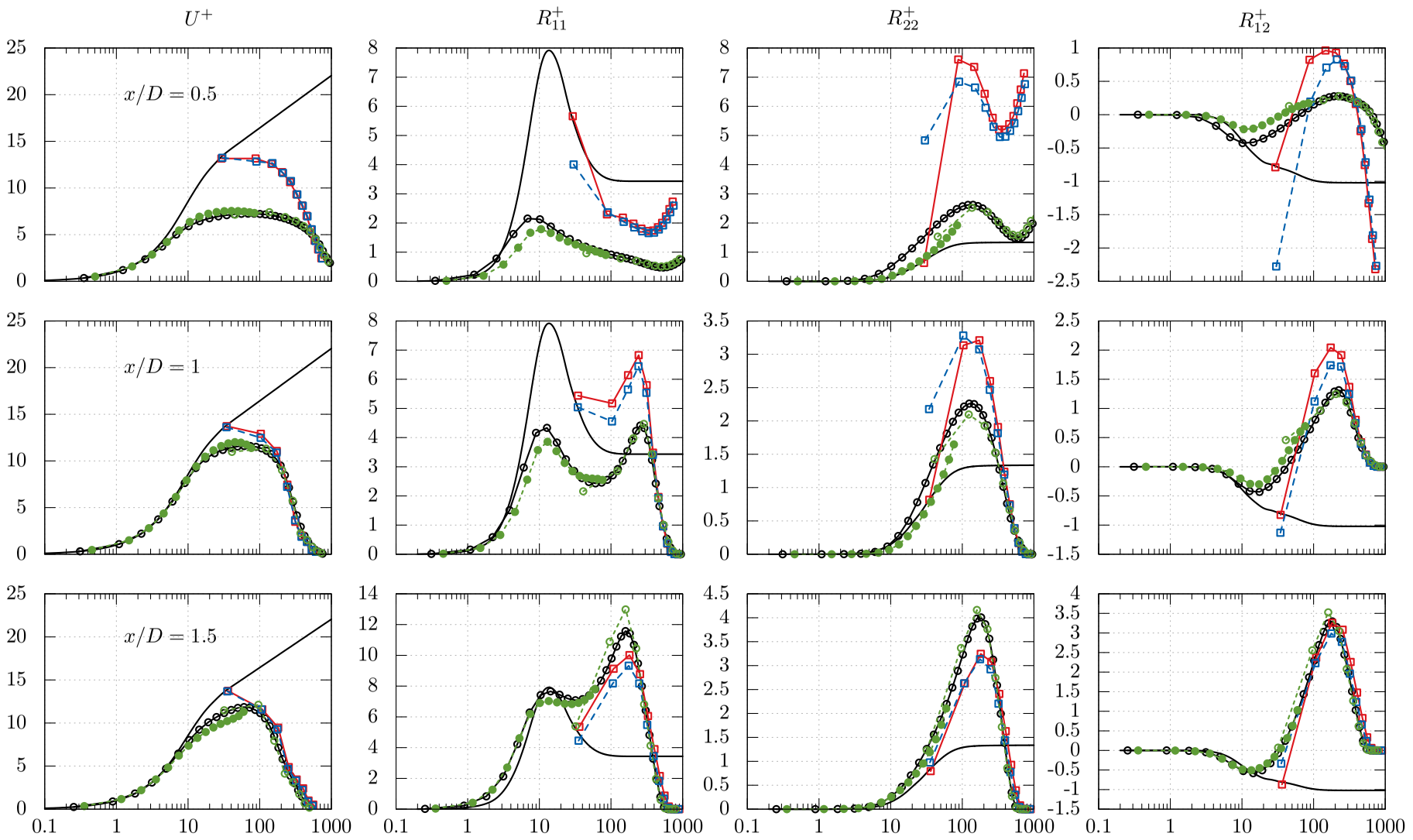


FIGURE 4.11 – Profils de vitesse, et composantes du tenseur de Reynolds adimensionnés. ***En haut*** : Profils en $x/D = 0.5$. ***Au centre*** : Profils en $x/D = 1$. ***En bas*** : Profils en $x/D = 1.5$. Légende : EB-RSM (—o—) AAWF (—□—) ASWF (- -□- -) ANWF (---○---) ANWF (sous maille) (—●—) et lois de paroi (———)

$$\widetilde{U}^+ = \frac{1}{\kappa}\left(\ln(y^+) + \frac{1}{2}\lambda y^+\right) + B \tag{4.8}$$

Le terme λ peut contenir tous les termes usuellement considérés nuls. Par exemple si on prend en compte le gradient de pression et la convection on a :

$$\lambda = \frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + U\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\nu}{u_\tau^3}C_U \tag{4.9}$$

On rappelle également que Popovac et Hanjalić proposent la loi suivante pour la vitesse :

$$\widetilde{U}^+_{PH} = \frac{1}{\kappa\psi}\ln\left(Ey^+\right) \quad \text{avec} \quad \psi = 1 - \frac{\lambda y^+}{\kappa U^+} \tag{4.10}$$

Il est possible d'inclure dans le terme λ soit uniquement les effets du gradient de pression, soit les effets du gradient de pression et de la convection. On étudie les deux possibilités dans la suite.

Gradient de pression seul

Beaucoup d'auteurs ont tenté d'incorporer des effets de pression au sein de la loi de paroi. Ceci revient à considérer que le terme λ dans la loi de paroi ne contient que les effets liés au gradient de pression soit :

$$\lambda = \frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\right) \tag{4.11}$$

La figure (4.12) présente les résultats de l'approche AAWF utilisant la loi décrite par l'équation (4.8) avec ($\lambda \neq 0$) et sans prise en compte du gradient de pression ($\lambda = 0$).

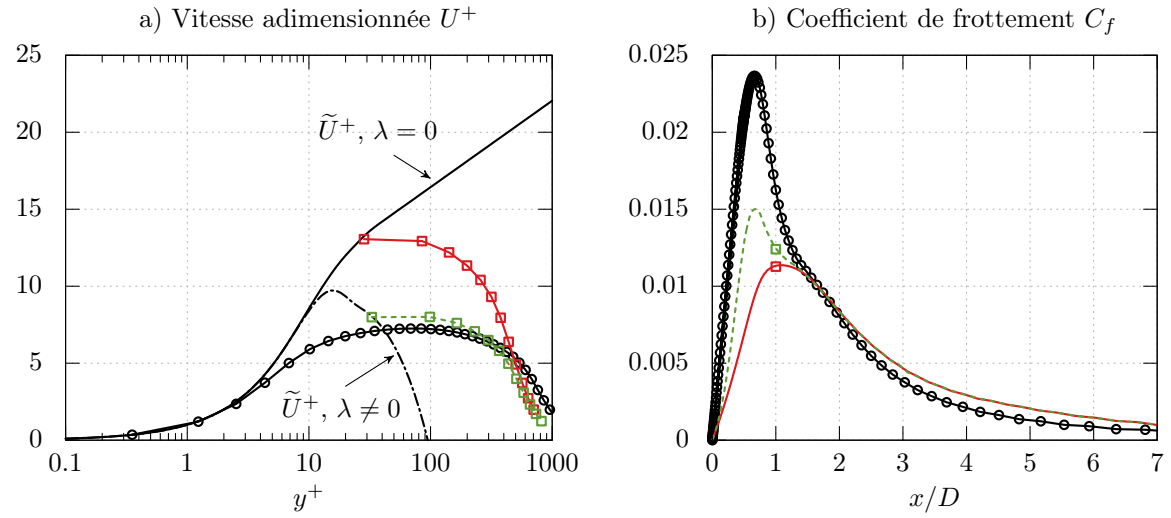


FIGURE 4.12 – ***A gauche :*** Profil de vitesse adimensionnée pour le jet impactant en $x/D = 0.5$. ***A droite :*** Coefficient de frottement le long de la paroi d'impact. Légende : EB-RSM (—o—), approche AAWF avec $\lambda = 0$ (—□—) et approche AAWF avec $\lambda \neq 0$ (---□---).

On note une nette amélioration de la prédiction du coefficient de frottement (4.12b) avec notamment une localisation et une intensité du pic mieux prévues. On comprend cette amélioration en observant le profil de vitesse adimensionné (4.12a) : la loi pour laquelle le terme λ n'est pas nul dévie significativement de la loi logarithmique permettant au calcul *Haut-Reynolds* de s'aligner avec le calcul EB-RSM de référence (le premier point de calcul se situe sur la loi de paroi $\widetilde{U}^+$ associée). Au delà de $x/D = 2$, le gradient de pression devient très faible et on ne remarque donc aucun effet du terme λ sur le redéveloppement de la couche limite.

Malgré ces bons résultats il est légitime de s'interroger sur la consistance de la méthode employée ici. En effet, comme on l'a montré au paragraphe 3.2.1.3 du chapitre 3, pourquoi serait-il plus légitime d'inclure le terme de gradient de pression tangentiel plutôt que les effets convectifs, ces termes s'équilibrant dans beaucoup de cas [Hickel 2012] ?

Gradient de pression et convection

On considère à présent que le terme λ contient les effets de pression du paragraphe précédent, associé aux effets convectifs locaux (on ne considérera que le terme de convection tangentielle) :

$$\lambda = \frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + U\frac{\partial U}{\partial x}\right) \tag{4.12}$$

La figure (4.13) présente les résultats de l'approche AAWF utilisant la loi décrite par l'équation (4.8) avec ($\lambda \neq 0$) et sans effet « hors équilibres » ($\lambda = 0$). On présente par ailleurs les résultats de l'approche AAWF utilisant la loi sur U^+ de Popovac et Hanjalić (équation (4.10), $\psi \neq 1$).

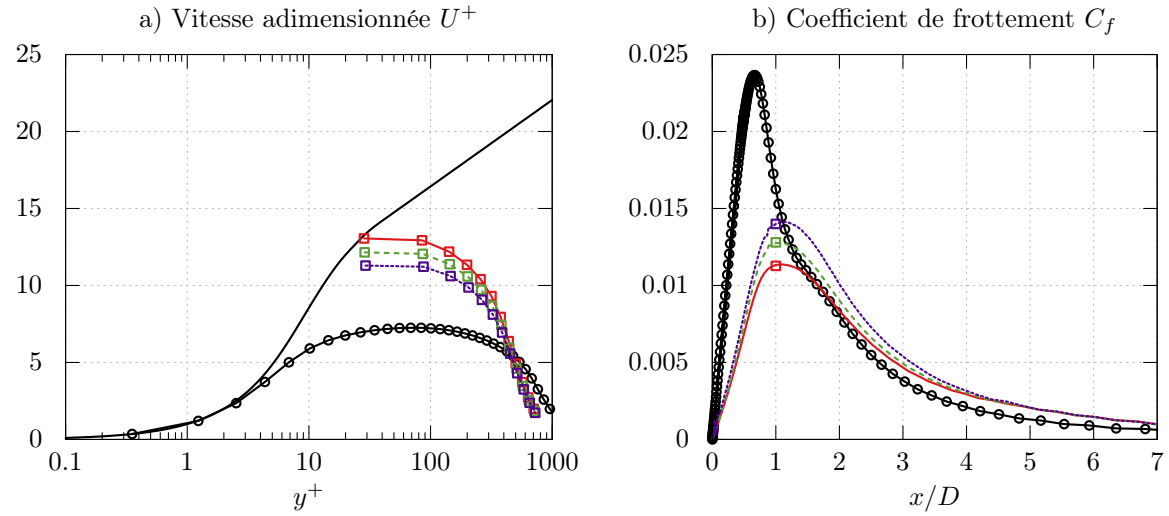


FIGURE 4.13 – ***A gauche :*** Profil de vitesse adimensionné pour $x/D = 0.5$. ***A droite :*** Coefficient de frottement le long de la paroi d'impact. Légende : Calcul EB-RSM (—o—), approche AAWF avec $\lambda = 0$ (—□—), approche AAWF avec $\lambda \neq 0$ (---□---), approche AAWF utilisant la loi de vitesse de Popovac & Hanjalic avec $\psi \neq 1$ (·····□·····).

L'amélioration des résultats n'est ici plus aussi nette. En effet, contrairement aux résultats décrits au paragraphe précédent, la position du pic du coefficient de frottement n'est corrigée par aucune des approches, de la même manière que la pente du coefficient de frottement très proche du point d'impact n'est pas améliorée. Ces résultats ne sont pas surprenants si l'on se réfère aux tests *a posteriori* effectués au paragraphe 3.2.1.3 du chapitre 3 pour le cas du jet impactant : gradient de pression et convection s'équilibrent et le terme λ est donc *quasi* nul proche du point d'impact. On note cependant un effet en terme de valeur maximale atteinte par le coefficient de frottement. Les deux approches montrent une amélioration par rapport au cas ou $\lambda = 0$, avec un léger avantage pour la loi de Popovac et Hanjalić permettant une déviation plus importante de la loi logarithmique (figure (4.13a)), améliorant d'autant C_f. Cependant, cette dernière loi s'est avérée très délicate à employer. En effet, le terme ψ de l'équation (4.10) inclut une division par la vitesse locale :

$$\psi = 1 - \frac{\lambda y^+}{\kappa U^+} = 1 - \frac{C_U y_p}{\kappa U_p u_\tau} \tag{4.13}$$

Ainsi, au niveau du point d'impact pour lequel $U_p \to 0$, l'utilisation de cette loi demande d'importantes précautions sous peine de rendre le calcul particulièrement instable.

4.1.4 Raffinement localisé

L'une des forces des modèles adaptatifs est la possibilité d'inclure des raffinements locaux au sein d'un même maillage, autrement dit la coexistence de zones *Bas-Reynolds* et *Haut-Reynolds*. On s'intéresse ainsi dans ce paragraphe au raffinement localisé du tube d'injection. En effet, la littérature indique que la qualité des résultats peut fortement dépendre de la qualité de résolution du jet sortant du tube. Il est donc possible d'obtenir une résolution comparable à celle de l'EB-RSM en sortie de tube d'injection tout on conservant une zone *Haut-Reynolds* le long de la paroi d'impact. La figure (4.14) présente les trois types de maillage utilisés.

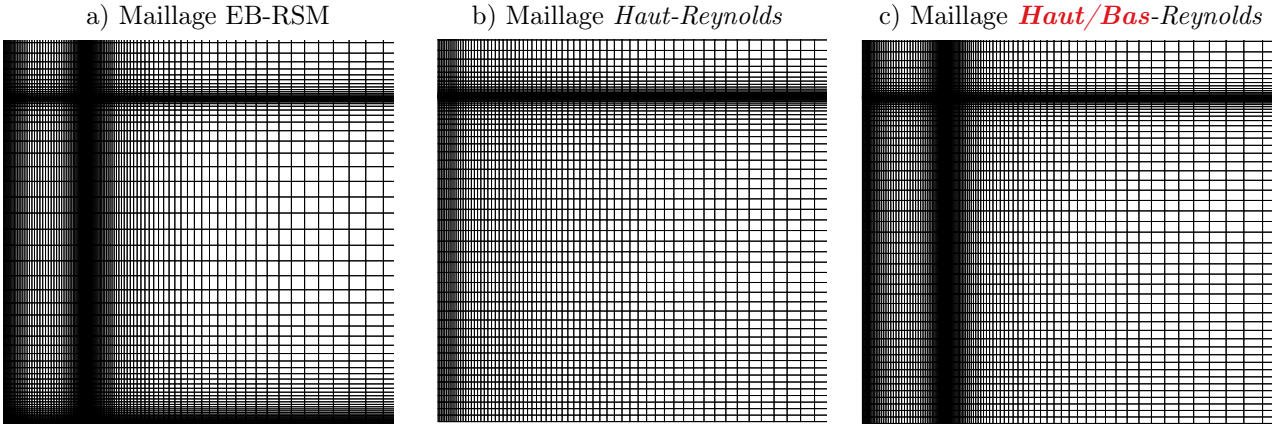


FIGURE 4.14 – Comparaison des maillages. ***a)*** Maillage complètement *Bas-Reynolds* utilisé pour les calculs en adhérence type EB-RSM. ***b)*** Maillage complètement *Haut-Reynolds*. ***c)*** Maillage *Haut/Bas-Reynolds* (raffinement de la paroi d'impact $y_P^+ \sim 40$, raffinement de la paroi d'injection $y_P^+ \sim 0.1$).

Sur la figure (4.15) sont comparés les profils longitudinaux de vitesse et d'énergie cinétique turbulente en aval de la sortie du tube d'injection pour différentes distances à la paroi d'impact. On remarque sans surprise que lorsque l'injection est raffinée, on prédit le développement du jet de sortie de manière bien plus proche de l'EB-RSM. Les quantités venant impacter sur la paroi sont donc plus proches de l'EB-RSM, en témoigne le profil d'énergie cinétique turbulente à $y/D = 0.25$ faisant état d'une intensité turbulente plus élevée que l'EB-RSM lors de l'utilisation du maillage *Haut-Reynolds*.

Cette propriété est extrêmement intéressante puisqu'elle permet, suivant le zone d'intérêt, de raffiner localement le maillage pour espérer monter en précision localement.

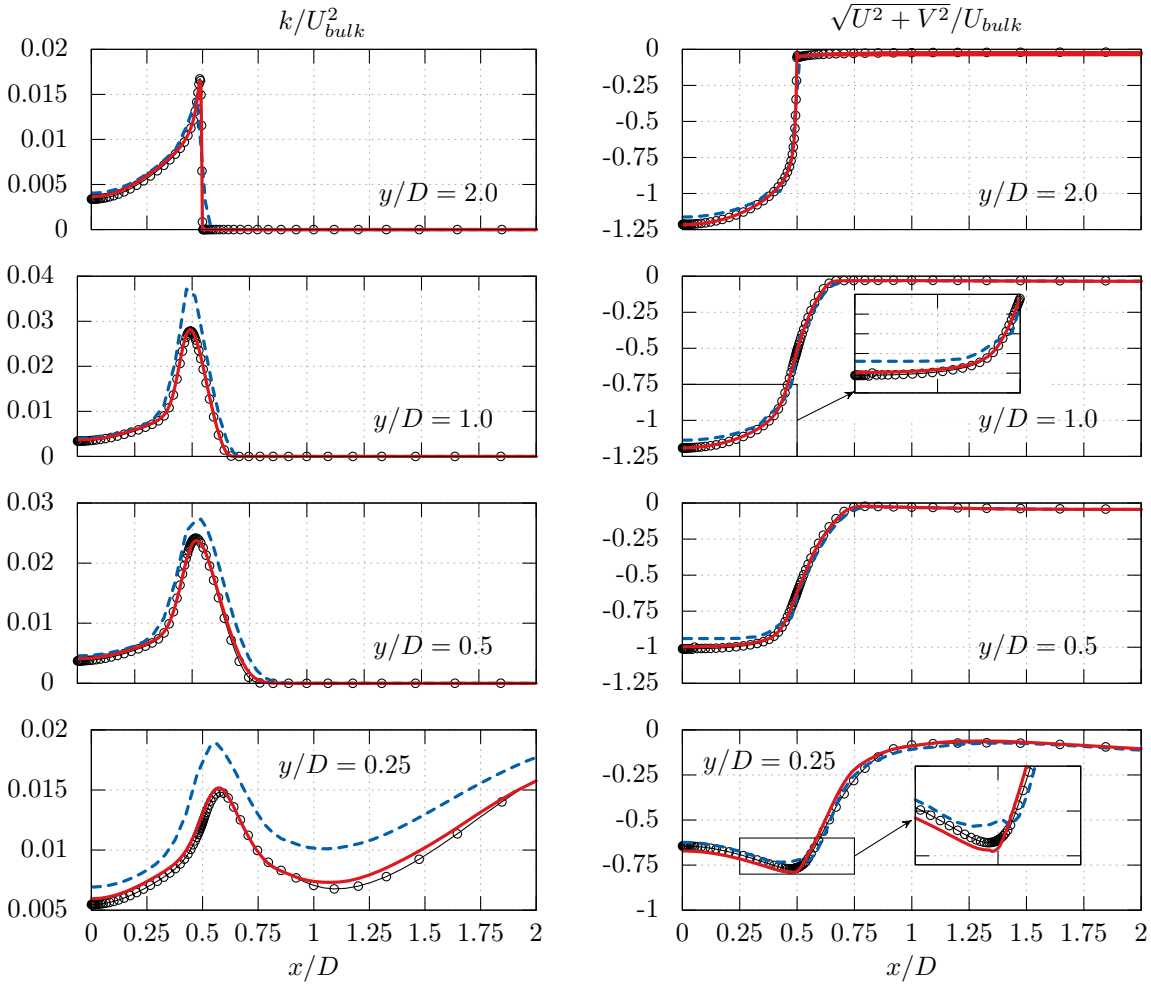


FIGURE 4.15 – ***A gauche :*** Comparaison de profils longitudinaux d'énergie cinétique turbulente pour différentes distances à la paroi d'impact. ***A droite :*** Comparaison de profils longitudinaux de vitesse pour différentes distances à la paroi d'impact. Légende : Calcul EB-RSM (—o—), approche AAWF sur maillage *Haut-Reynolds* (- - - - -) et approche AAWF sur maillage *Haut/Bas-Reynolds* (———)

Les résultats montrés ici ne concernent que l'approche AAWF, puisqu'il n'y a aucune différence en adhérence entre les différentes approches. Dans ce cas particulier du jet en impact, l'amélioration de la prédiction d'évolution du jet impactant ne modifie qu'à la marge les grandeurs d'intérêt que sont le coefficient de fortement et le nombre de Nusselt. Ce n'est bien évidemment pas le cas tout le temps et on verra dans le paragraphe suivant tout l'intérêt de cette possibilité de raffinement localisé.

4.1.5 Convergence en maillage

On garde le maillage *Haut/Bas-Reynolds* utilisé dans la section précédente et, toute chose égale par ailleurs, on s'intéresse à présent à la convergence en maillage des approches adaptatives. Huit maillages sont ainsi définis allant, au niveau de la paroi d'impact, de $y^+_{max} = 0.05$ à $y^+_{max} = 100$. Ces maillages sont identifiés dans le tableau suivant.

Type	Maillage	y^+_{max}	Légende
Bas-Reynolds	A	0.05	
	B	1	
Buffer	C	5	
	D	10	
Haut-Reynolds	E	20	
	F	40	
	G	80	
	H	100	

Dans un premier temps, on présente en figure (4.16) des profils issus de l'approche AAWF pour la vitesse et l'énergie cinétique turbulente sur trois maillages (un maillage en adhérence A, un maillage en zone tampon D et un dernier maillage en zone logarithmique F). On observe une convergence rapide vers le calcul EB-RSM. En effet, le maillage D ($y^+_{max} = 10$) offre déjà d'excellents résultats. Par ailleurs, les oscillations numériques observées précédemment sur le maillage F sont toujours présentes mais disparaissent à mesure que l'on raffine. Le même comportement est observé sur la convergence de l'approche ASWF (non montré ici).

En plus de ces profils, il est aussi intéressant de regarder comment se comportent les grandeurs évaluées à la paroi et directement impactées par la loi de paroi. La figure (4.17) présente l'évolution du coefficient de frottement ainsi que du nombre de Nusselt pour l'approche AAWF sur les maillages A-H. On observe une convergence régulière vers les résultats EB-RSM, mais on notera que malgré de bons profils de vitesses, le maillage D en zone tampon sous estime encore C_f et Nu d'environ 25%. De la même manière, quand bien même le premier point de calcul se situe à la limite de la sous couche visqueuse, la résolution du maillage C ne permet pas de capter le comportement du modèle EB-RSM pour le nombre de Nusselt au point d'impact.

La précision a donc un prix, et les lois de paroi ne font pas de miracle. Si on désire obtenir des résultats de confiance, il est nécessaire de raffiner le maillage jusqu'en $y^+ = 1$.

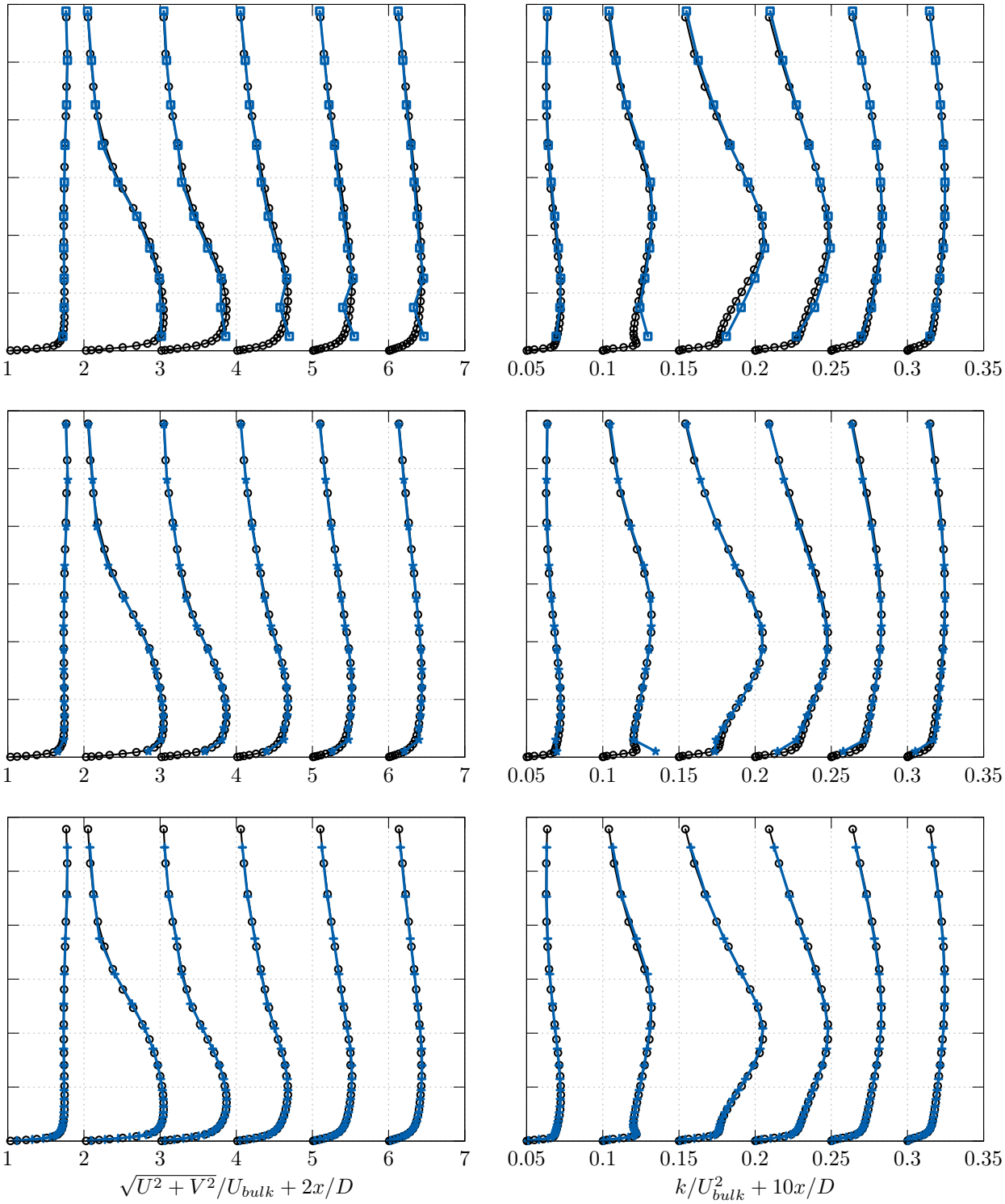


FIGURE 4.16 – Profils de vitesse (à gauche) et d'énergie cinétique turbulente (à droite) avec l'approche AAWF pour ***En haut :*** maillage F. ***Au milieu :*** maillage D. ***En bas :*** maillage B. Comparaison avec l'EB-RSM.

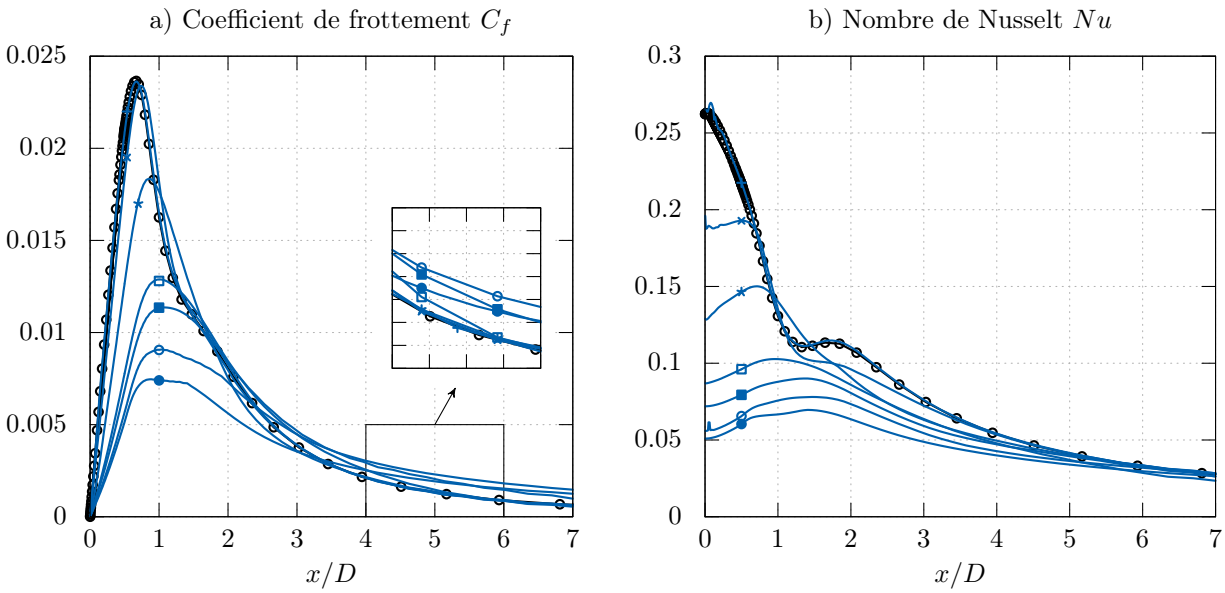


FIGURE 4.17 – Calculs AAWF sur les maillages A-H et comparaison avec un calcul EB-RSM.

Comme dans le paragraphe précédent, il est intéressant pour comprendre le mécanisme d'action des lois de paroi de regarder les profils adimensionnés des variables du modèle. C'est pourquoi sont tracés sur la figure (4.18) les profils adimensionnés de vitesse et des composantes du tenseur de Reynolds en $x/D = 0.5$. Comme il a été noté dans la section précédente, on remarque immédiatement que les premiers points de calcul sont situés sur le profil analytique des lois qui ont servi au calcul. Ces lois sont toutes en accord avec l'EB-RSM en adhérence et assurent donc la bonne convergence de l'approche lorsque le maillage est raffiné. L'approche ASWF n'est pas montrée mais elle fournit des résultats sensiblement identiques comme le montrait déjà la figure (4.11).

Le même principe a été appliqué en $x/D = 0.5$ pour les approches AdWF du modèle Bl-v^2-k ainsi que pour l'approche « Scalable wall functions » du modèle SSG. On rappelle que dans le cas de l'approche AdWF, Billard et al. [Billard 2015] font le choix d'utiliser la loi de Reichardt comme profil de vitesse :

$$\widetilde{U}^+_{Rei} = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa y^+) + 7.8\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11}\exp\left(-\frac{y^+}{3}\right)\right] \tag{4.14}$$

Dans le cas des lois de paroi « scalable », la loi de vitesse est définie comme suit (cf. paragraphe 2.5.5.3) :

$$\widetilde{U}^+_{Sca} = \max\left[y^+_{lim}, \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + B\right] \tag{4.15}$$

avec

$$y^+_{lim} = 10.88 \tag{4.16}$$

dans *Code_Saturne*. Alors que l'approche AdWF converge nettement vers le modèle Bl-v^2-k, on voit qu'il est difficile de parler de convergence pour les « scalable wall functions ». Dans ce

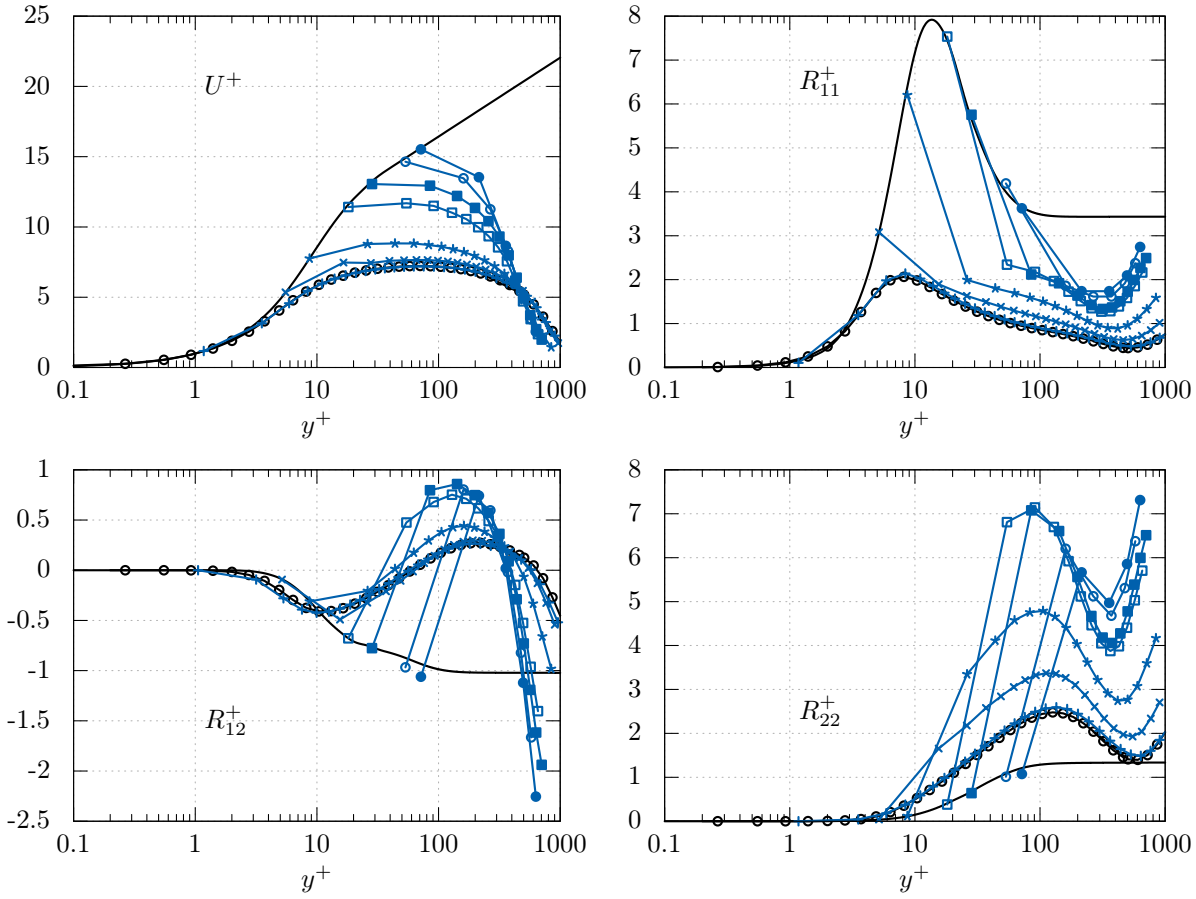


FIGURE 4.18 – Profils adimensionnés en $x/D = 0.5$ pour les maillages A-H (AAWF)

a) *Bl-v²-k* avec AdWF b) SSG avec *scalable wall function*

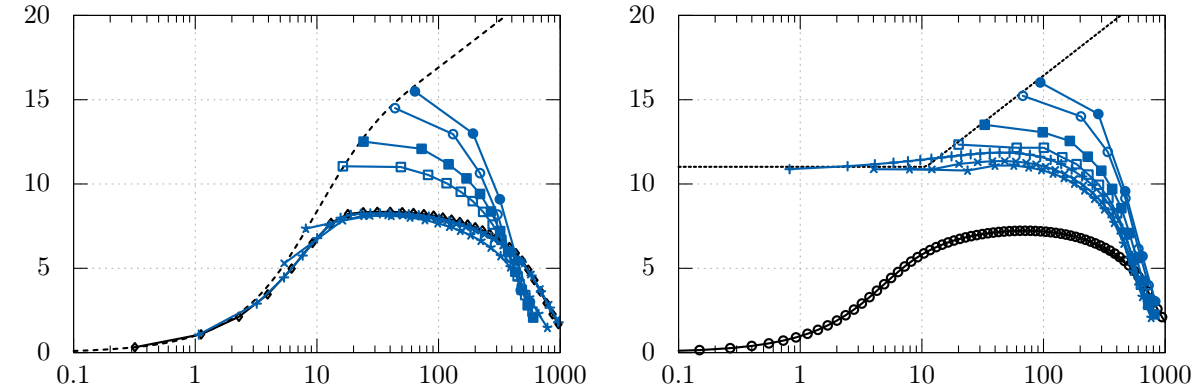


FIGURE 4.19 – ***a)*** Profils de vitesse adimensionnée en $x/D = 0.5$ pour les maillages A-H avec l'approche AdWF [Billard 2012], comparés à $\widetilde{U}^+_{Rei}$ (- - - - -) et au modèle *Bl-v²-k* (—▲—). ***b)*** Profils de vitesse adimensionnés en $x/D = 0.5$ pour les maillages A-H avec l'approche « scalable wal function » appliquée au modèle SSG, comparés à $\widetilde{U}^+_{Sca}$ (·····) et au modèle EB-RSM (—o—).

dernier cas, tout se passe comme si on bornait la zone logarithmique. Ces lois ne sont en réalité pas adaptatives au sens ou elles ne convergent pas et que l'on n'augmente pas la précision du calcul en raffinant le maillage. Il s'agit plutôt d'une façon d'éviter de faire diverger un calcul et ce quand bien même quelques points pourraient être localisés en sous-couche visqueuse. L'utilisateur aguerri n'utilisera donc ces lois que sur un maillage *Haut-Reynolds* lorsqu'il a éventuellement un doute sur la qualité de celui-ci (quelques mailles *Bas-Reynolds*).

4.1.6 Conclusion sur le cas du jet impactant

L'étude de ce cas a montré le bon comportement des modèles AAWF, ASWF et ANWF sur maillage *Haut-Reynolds* par rapport au modèle EB-RSM de base. La stratégie ANWF est clairement supérieure à toutes les autres approches de loi de paroi, notamment pour la prédiction du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement. Malheureusement, cette approche nécessite une étude plus approfondie car elle s'est montrée particulièrement instable lors des calculs et particulièrement difficile à faire converger. Cette approche très prometteuse nécessite donc de plus amples investigations. C'est pourquoi, dans toute la suite, cette approche ne sera plus utilisée.

Sans inclusion des termes « hors équilibres », les lois de parois, indépendamment de l'approche, se comportent toutes plus ou moins de la même façon et on a montré que ce résultat était prévisible. Les nouvelles approches AAWF et ASWF offrent toutefois la possibilité de prendre en compte la convection ainsi que le gradient de pression local. Malgré une amélioration nette des résultats lors de la prise en compte du gradient de pression seul, cette approche n'est pas consistante avec l'équation de quantité de mouvement. L'addition du terme convectif donne des résultats moins intéressants mais comparables à ceux obtenus avec une lois de la littérature du même type. La différence flagrante entre les approche AAWF et ASWF d'un coté et ANWF de l'autre, met en lumière les limites des approches à lois de paroi : jusqu'à quel point est-il possible de décrire de manière analytique la solution des équations RANS ?

En réalité, il n'est guère possible de faire beaucoup mieux, en *Haut-Reynolds*, que les hypothèses qui ont été formulées au départ (équilibre, longueur de mélange,...). C'est pourquoi les résultats de modèles complètement *Haut-Reynolds* pour la prédiction de grandeurs mesurées à la paroi (Nusselt, C_f,...) sont à prendre avec prudence.

La force de l'approche présentée dans cette thèse tient justement du fait qu'il est possible de s'affranchir totalement et localement de ces hypothèses très réductrices : on peut, à souhait, raffiner le maillage dans les zones pour lesquelles les hypothèses de loi de paroi sont très fausses, et ainsi converger vers la solution du modèle d'origine, mais rester en mode *Haut-Reynolds* dans les zones de moindre intérêt. Le raffinement localisé du jet a été réalisé dans un but pédagogique : on souhaitait montrer le potentiel de la méthode. Dans un contexte industriel, on souhaiterait plutôt faire l'inverse : raffiner la paroi d'impact (soumise à une physique très particulière) et déraffiner le maillage dans le jet (pour lequel l'écoulement n'est finalement pas si loin de l'équilibre). C'est précisément dans cette optique plus pragmatique d'améliorer localement la prédiction des grandeurs d'intérêt qu'a été traité le cas suivant de la marche descendante.

4.2 Marche descendante

4.2.1 Description du cas

Le cas de la marche descendante est une illustration parfaite d'un phénomène ayant lieu dans quasiment tous les écoulements complexes : détachement et recollement d'une couche limite. Ce cas, de même que le cas précédent, est un cas très bien documenté. On s'appuiera tout au long de l'étude sur les données expérimentales de Driver et Seegmiler [Driver 1985]. Dans cette expérience, une couche limite turbulente arrive en entrée d'un domaine de hauteur $8H$ et passe au dessus d'une marche de hauteur H comme le montre le schéma (4.20). Les conditions aux limites sont les suivantes :

- *Entrée* : On s'appuie sur le profil expérimental de la composante U de la vitesse en $x/H = -4$ pour trouver les conditions d'entrée adéquates à la reproduction de l'expérience de Driver et Seegmiler. En pratique, on force ce profil en $x/H = -4$ (par terme source) pour tous les calculs et on laisse libres les autres composantes du modèle utilisé (turbulence,...). On obtient ainsi la solution complète du modèle pour ce profil de vitesse donné.
- *Sortie* : Des conditions de sortie de type Neumann homogène sont imposées.

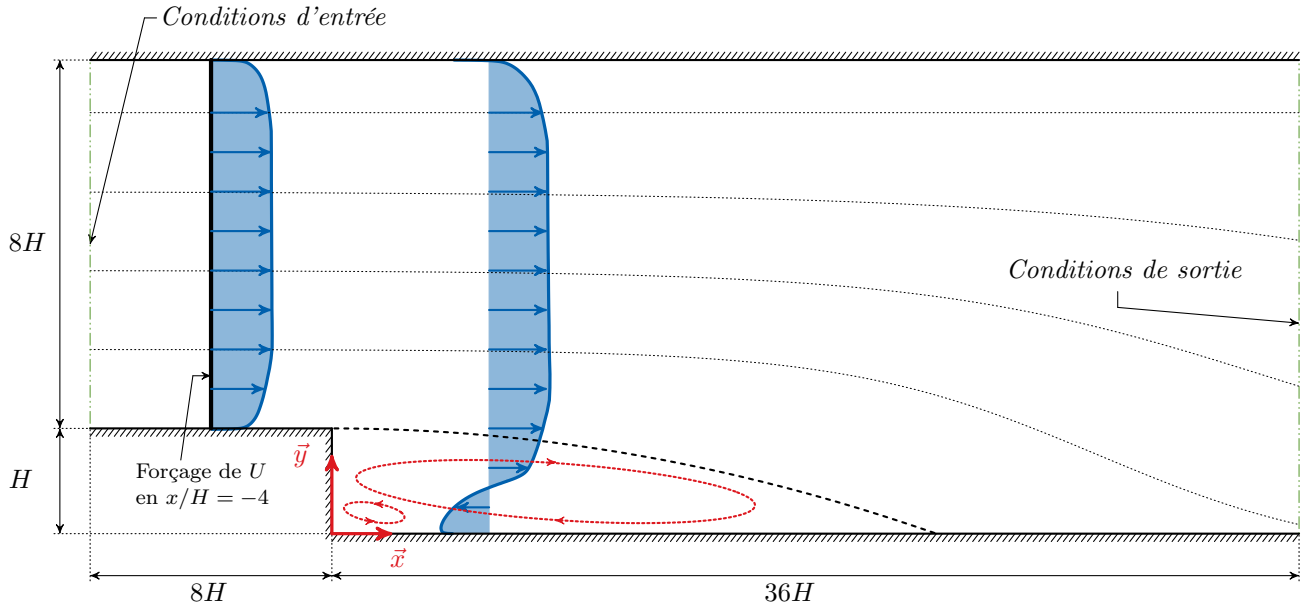


FIGURE 4.20 – Représentation schématique (non à l'échelle) du cas de la marche descendante

4.2.2 Résultats en *Bas-Reynolds*

Comme dans l'étude précédente, on s'intéresse dans un premier temps aux solutions en adhérence de trois modèles de référence, que l'on comparera aux données expérimentales :

- Le modèle k-ω-SST,
- Le modèle Bl-v^2-k,

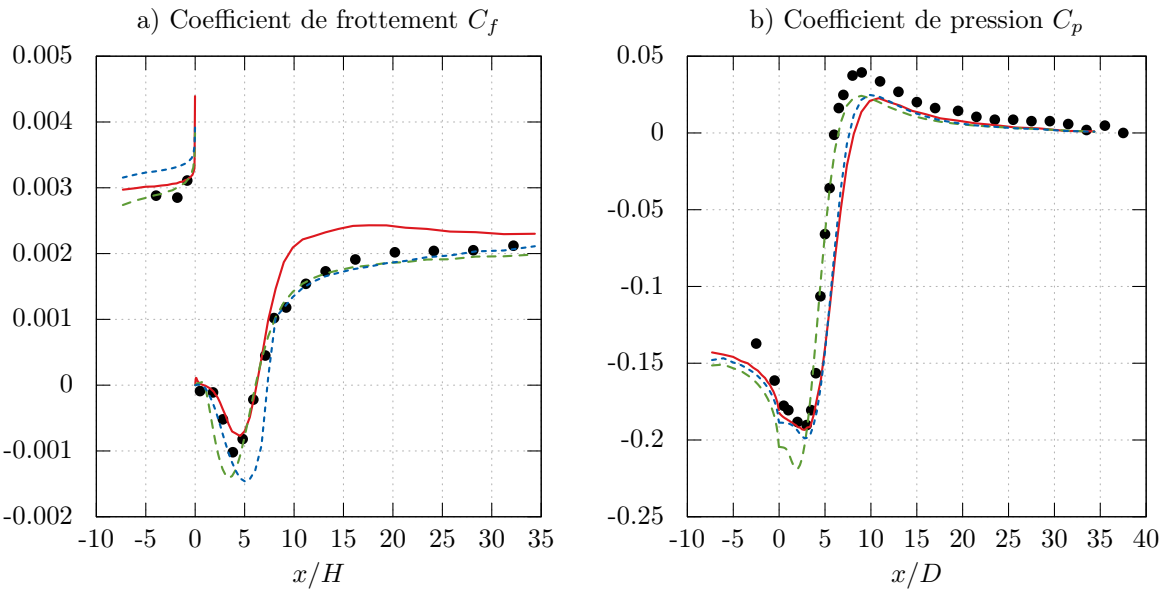


FIGURE 4.21 – ***a)*** Comparaison du coefficient de frottement C_f ***b)*** Comparaison du coefficient de pression C_p. Légende : EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données expérimentales de Driver et Seegmiler (•).

- Le modèle EB-RSM.

Dans toutes les sections suivantes, on comparera les modèles de lois de paroi à leur modèle de référence mais on abandonnera toutes comparaisons avec les références expérimentales. Le lecteur se référera alors à cette section pour juger du bon comportement du modèle de base.

La figure (4.21a) illustre le coefficient de frottement le long de la paroi inférieure. L'EB-RSM se montre légèrement supérieur dans la zone de recirculation en terme d'intensité du coefficient de frottement. En revanche celui-ci est clairement inférieur aux deux autres modèles lors du redéveloppement ($x/H > 10$) de la couche limite en aval du point de recollement de la zone de recirculation. La prédiction de la longueur de recirculation est relativement bonne quant à elle pour les modèles EB-RSM et k-ω-SST. Le modèle Bl-v^2-k tend à surestimer cette longueur de recirculation. On notera également que le modèle EB-RSM est le seul à voir la création de la bulle de recirculation secondaire, proche de $x/H = 0$. On note par ailleurs que le modèle k-ω-SST surestime l'intensité de la recirculation principale. Ceci est certainement lié avec la surestimation de la dépression au sein de la recirculation montrée par la figure (4.21b). Les modèles EB-RSM et Bl-v^2-k estiment quant à eux le coefficient de pression le long de la paroi avec plus de précision.

Les figures (4.22) et (4.23) montrent les profils de vitesse et des composantes du tenseur de Reynolds. On remarque immédiatement la concordance parfaite des résultats sur la vitesse en $x/H = -4$, ce qui est normal puisqu'à cet endroit, on force le profil à « coller » à l'expérience. Au même endroit, on peut observer les solutions de chaque modèle pour ce profil de vitesse donné.

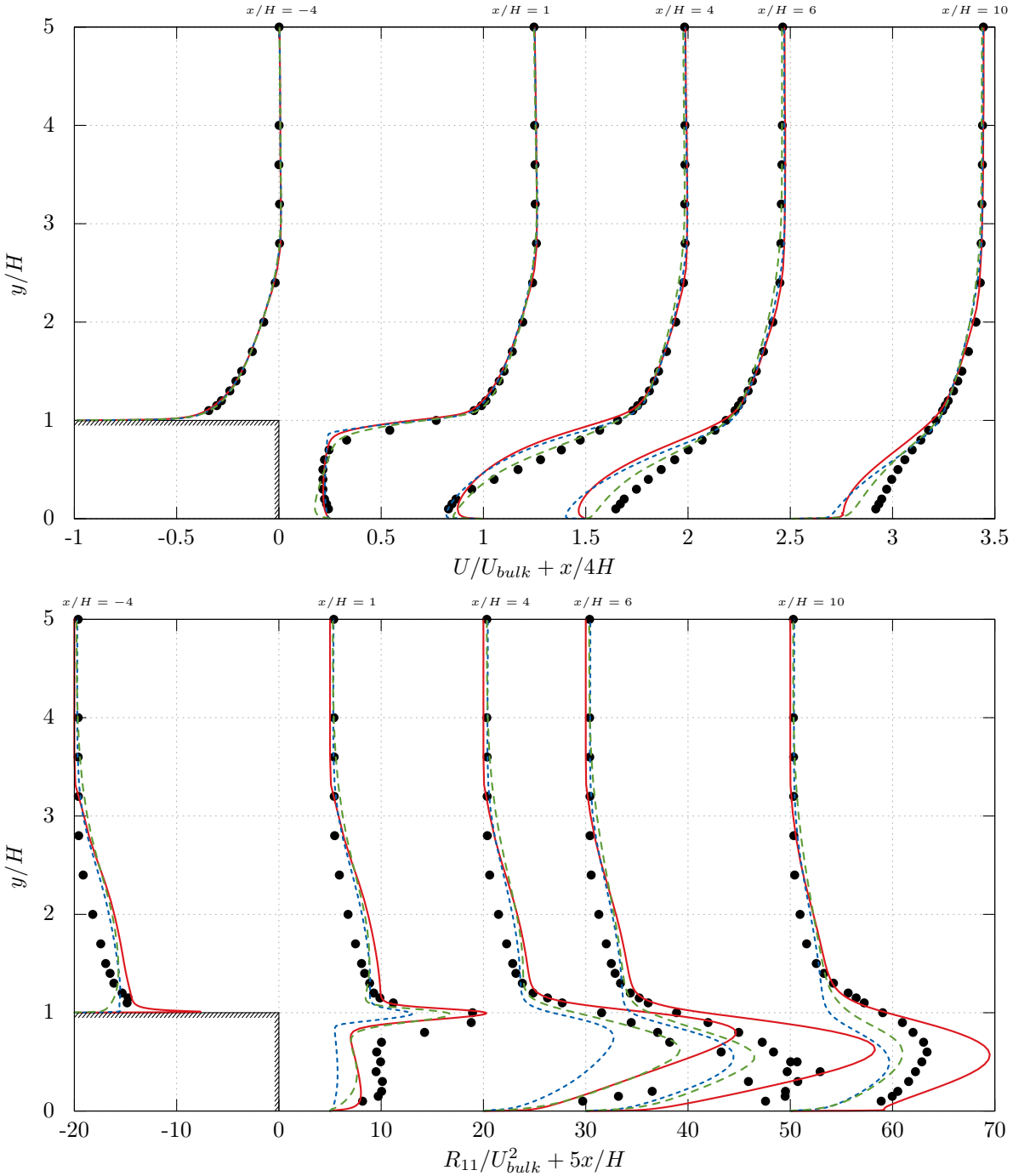


FIGURE 4.22 – Comparaison des profils de la vitesse (en haut) et de R_{11} (en bas) avec (de gauche à droite) $x/H = -4, 1, 4, 6, 10$ pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données expérimentales de Driver et Seegmiler (•).

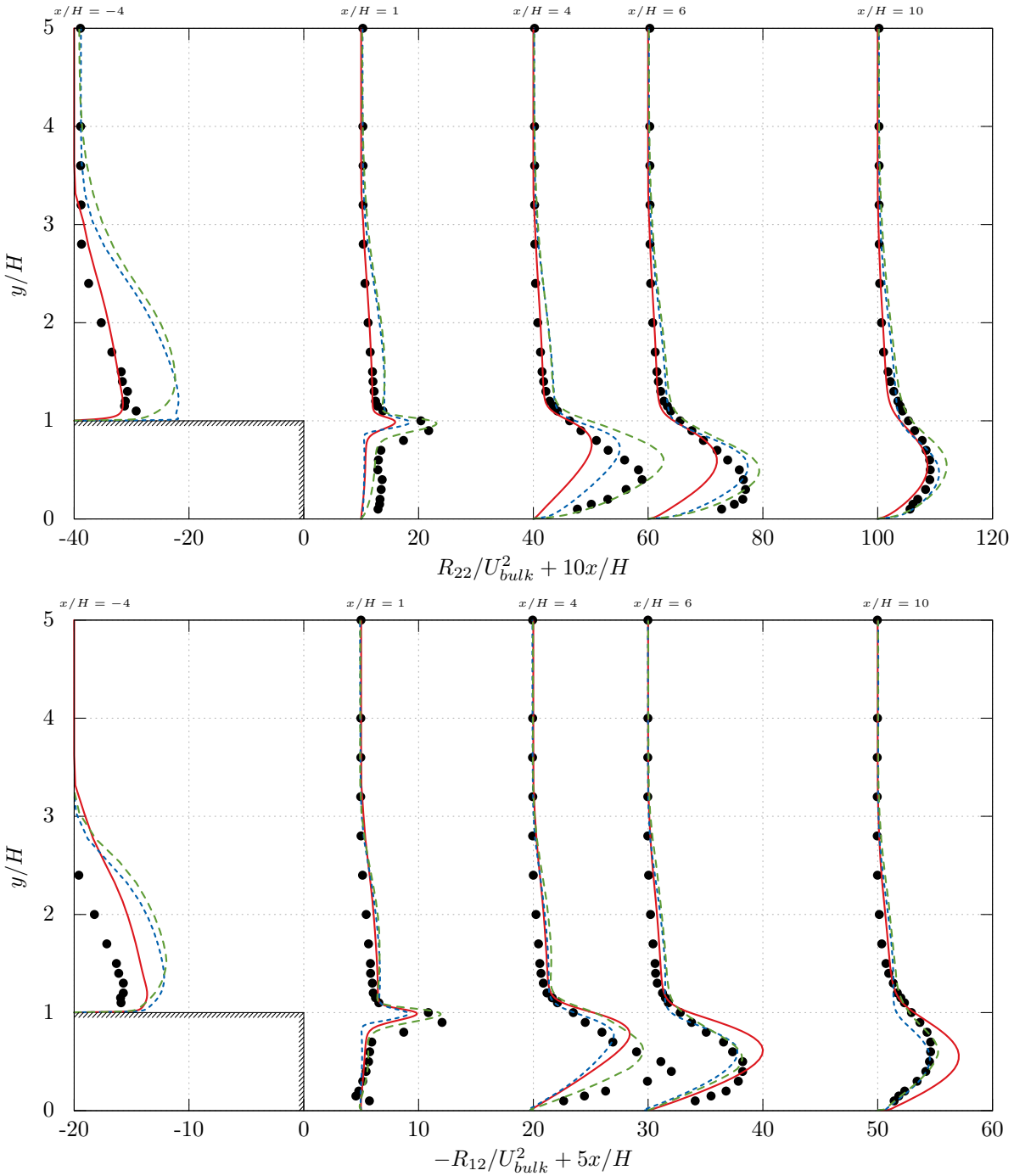


FIGURE 4.23 – Comparaison des profils de R_{22} (en haut) et de R_{12} (en bas) avec (de gauche à droite) $x/H = -4, 1, 4, 6, 10$ pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données expérimentales de Driver et Seegmiler (•).

Ce procédé a été jugé le plus consistant pour comparer les modèles à l'expérience. La prédiction de la vitesse est en bonne adéquation avec l'expérience au sein de la zone de recirculation. En revanche, on observe une mauvaise prédiction lors du redéveloppement de la couche limite turbulente avec une nette sous estimation de la vitesse en $x/H = 10$ (un peu moins marquée pour le modèle k-ω-SST).

Les grandeurs turbulentes en amont de la marche sont globalement mieux prédites par le modèle EB-RSM. En aval de la marche, on note une franche sous-estimation de R_{12} dans la couche cisaillée décollée par les modèles EB-RSM et Bl-v^2-k. Ceci a pour conséquence directe un recollement trop tardif. Les résultats sont globalement plus satisfaisants avec le modèle k-ω-SST, mais ceci est probablement, en grande partie, dû à la surestimation de R_{12} à l'entrée qui a un rôle favorable après le décollement. De manière générale, le modèle Bl-v^2-k tend à sous-estimer toutes les tensions de Reynolds alors que le modèle EB-RSM se montre clairement trop anisotrope, ce qui empêche le redéveloppement correct de la couche limite après le recollement.

4.2.3 Résultats en *Haut-Reynolds*

On s'intéresse à présent à un calcul du cas de la marche descendante purement *Haut-Reynolds*. La figure (4.24) donne une illustration de la différence de qualité entre le maillage employé dans cette approche et celui utilisé pour les calculs en adhérence. Le maillage utilisé ici assure un premier point de calcul localisé dans la zone logarithmique avec une valeur adimensionelle y_p^+ de l'ordre de 40 à 50.

a) Maillage *EB-RSM* b) Maillage *Haut-Reynolds*

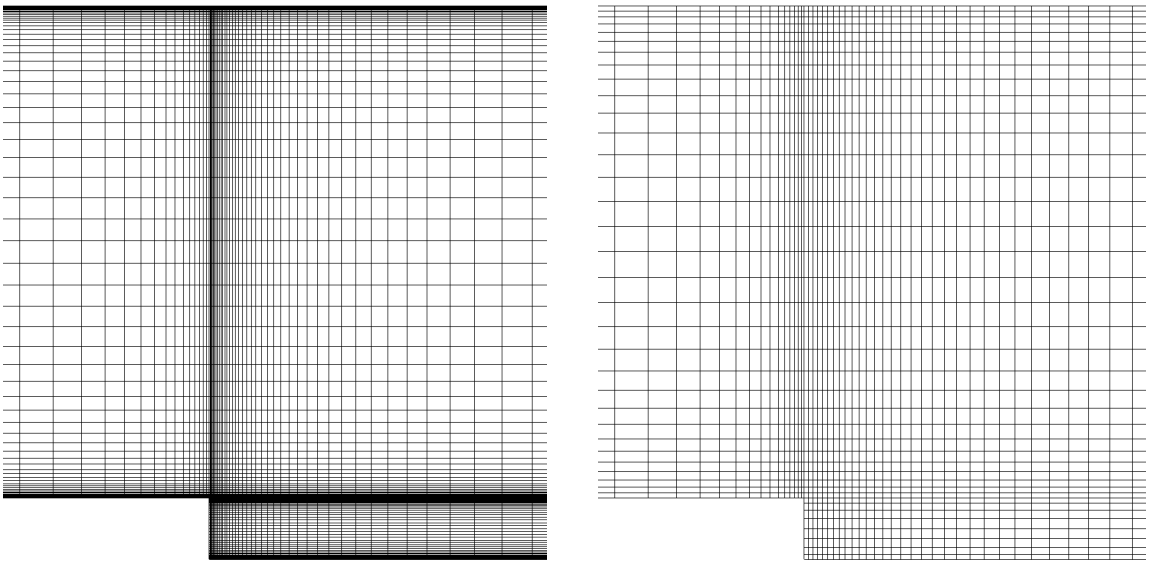


FIGURE 4.24 – Comparaison des maillages. ***a)*** Maillage *Bas-Reynolds* dans lequel $y_P^+ \sim 0.5$. ***b)*** Maillage *Bas-Reynolds* utilisé pour l'EB-RSM dans lequel $y_P^+ \sim 50$.

On s'intéresse ici aux résultats issus des mêmes modèles que ceux employés sur le cas du jet en impact :

— Nouvelles approches AAWF et ASWF pour l'EB-RSM,
— Lois de paroi standard et modèle k-ω-SST,
— Lois de paroi « Scalable wall fucntions » et modèle SSG,
— Lois de paroi AdWF de Billard et al. et modèle Bl-v^2-k.

Les nouvelles approches AAWF et ASWF sont ici testées en utilisant la loi standard sur la vitesse exprimée au paragraphe 3.2.1 du chapitre 3. L'approche ANWF, faute de stabilité et de développements suffisants, a été laissée de coté et nécessitera des travaux pour être adaptée à ce cas.

La figure (4.25) présente les résultats du coefficient de frottement le long de la paroi inférieure. En amont de la marche, tous les modèles de parois prévoient très bien le frottement. En aval de la marche, les modèles SSG, ASWF et AAWF donnent des résultats relativement similaires : prédiction d'un frottement moins intense que le modèle EB-RSM au sein de la recirculation et sous estimation de la longueur de recirculation. Le coefficient de frottement issu du modèle k-ω-SST *Haut-Reynolds* est en bonne adéquation avec le modèle k-ω-SST intégré jusqu'à la paroi. On observe cependant également la prédiction d'un frottement moins intense que le modèle *Bas-Reynolds* correspondant. La même conclusion peut être tirée pour le modèle Bl-v^2-k et les lois de parois AdWF.

Les figures (4.26) et (4.27) montrent quant à elles les profils de la composante axiale de la vitesse ainsi que les profils de l'énergie cinétique turbulente pour chaque modèle de paroi utilisé. Dans chaque cas, on compare les résultats au modèle intégré jusqu'à la paroi correspondant. On remarque immédiatement l'excellent comportement de tous les modèles sur le profil en $x/H = -4$ en amont de la marche (la couche limite est proche de l'équilibre). Les hypothèses formulées pour le canal sont donc confirmées et tous les modèles de paroi arrivent à récupérer de manière convaincante les profils du modèle *Bas-Reynolds* qui leur sont associés.

En aval de la marche, les profils de vitesse semblent globalement bien prédit par les modèles. Le profil en $x/H = 1$, premier profil extrait juste en amont de la marche en pleine zone de recirculation, s'avère le plus difficile à prédire pour tous les modèles de parois. Ce n'est pas étonnant car c'est dans cette zone que les hypothèses d'équilibre sont les plus mises en défaut. Cette observation est à nuancer pour approches AAWF et ASWF, qui se montrent légèrement supérieures dans la zone de recirculation.

On notera cependant l'apparition d'oscillations numériques dans les profils des approches du second ordre lors du redéveloppement de la couche limite après la recirculation. La même observation avait été faite sur le cas du jet en impact et ce problème nécessite des approfondissements.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées de l'observation de l'énergie cinétique turbulente sur la figure (4.27). On observe une bonne concordance de toutes les lois de paroi en amont de la marche, mais celles-ci ont plus de difficultés à prédire les profils de k au sein de la zone de recirculation.

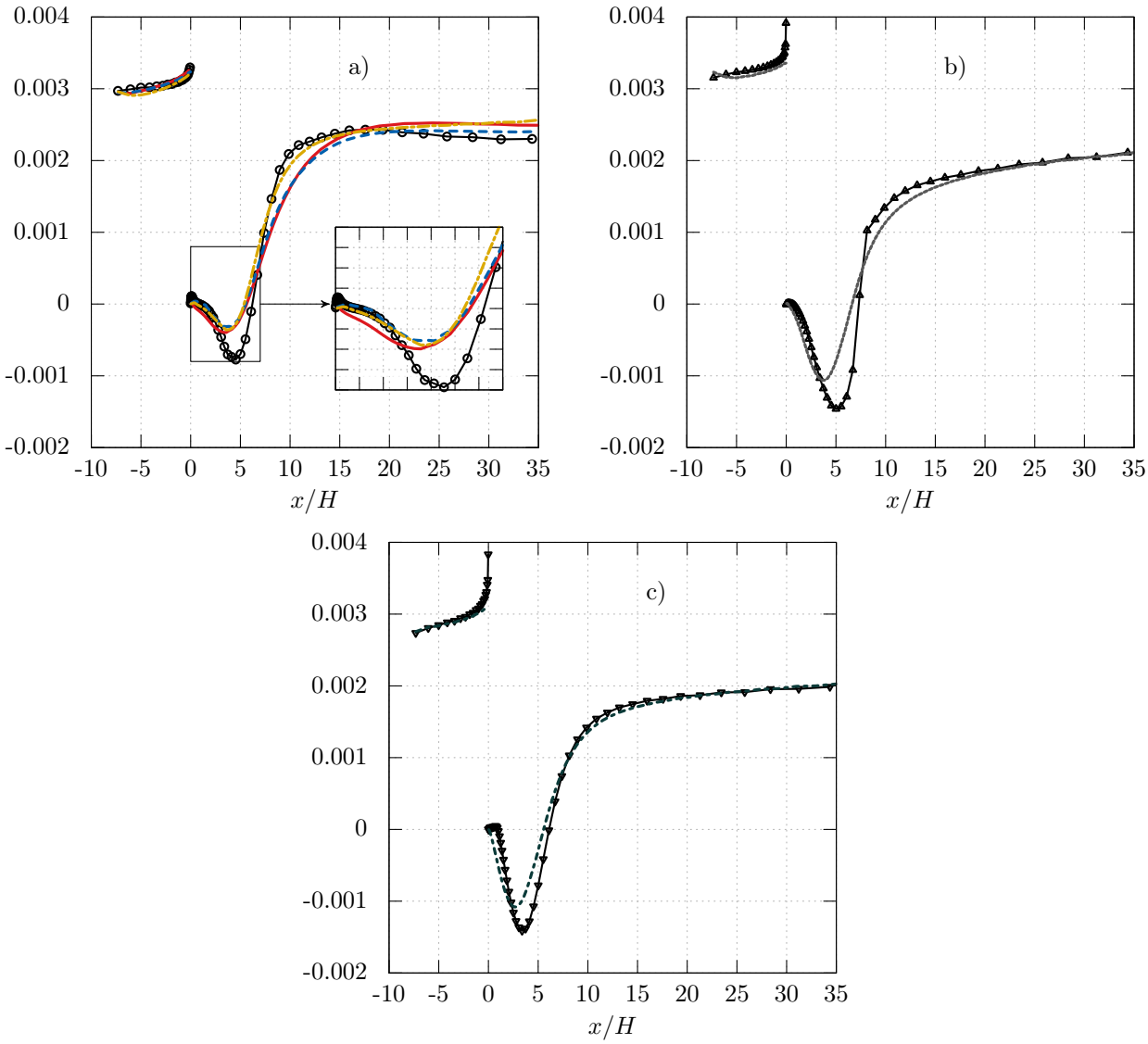


FIGURE 4.25 – Coefficient de frottement C_f pour ***a)*** : EB-RSM en adhérence (—o—) et lois de paroi AAWF (———), ASWF (- - - - -) et « scalable wall functions » SSG (-·-·-), ***b)*** : Bl-v^2-k en adhérence (—▲—) et lois de paroi AdWF (·····), ***c)*** : k-ω-SST en adhérence (—▼—) et lois de paroi standard (-·-·-).

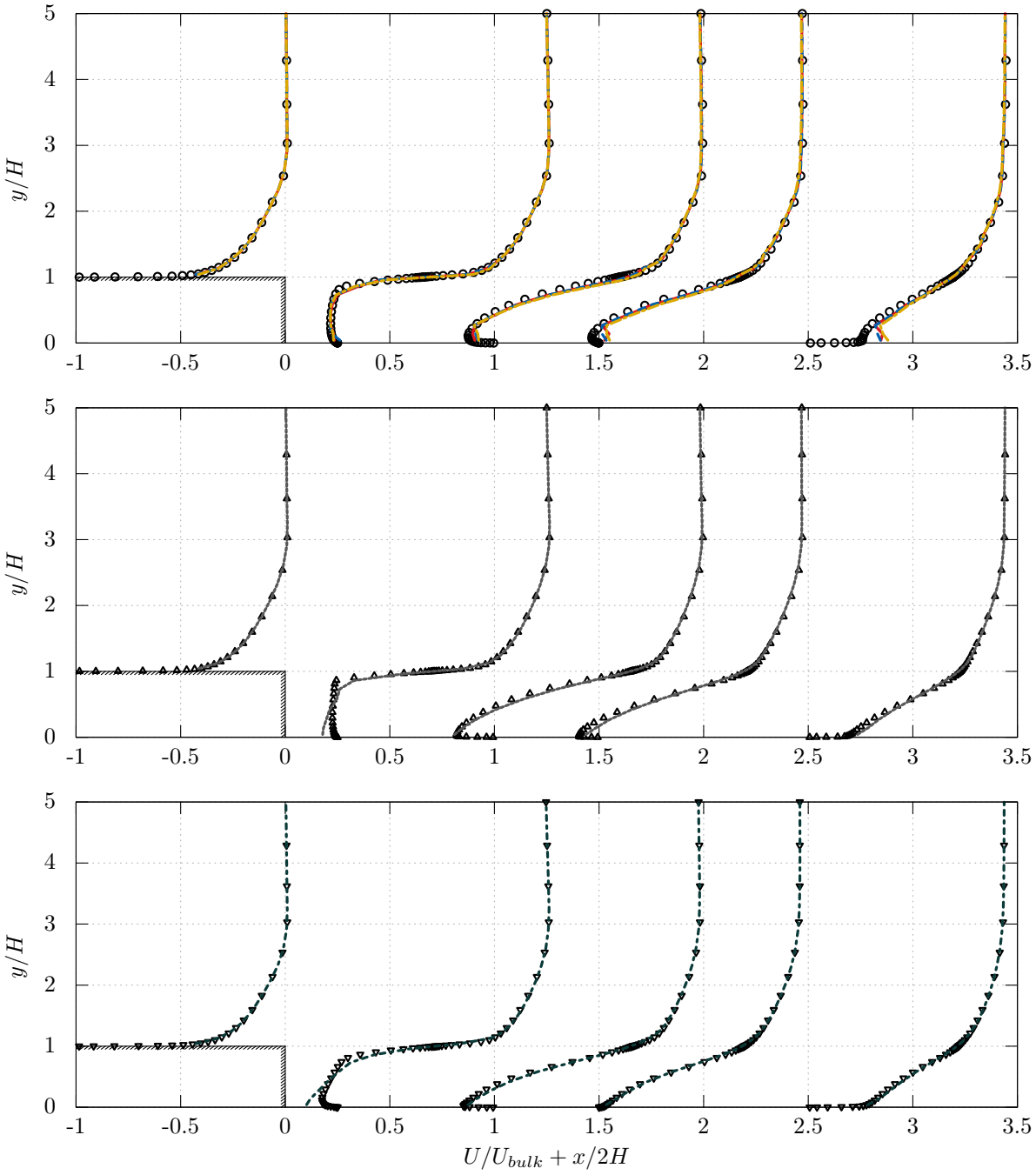


FIGURE 4.26 – ***En haut :*** Calcul EB-RSM en adhérence (—o—) et lois de paroi AAWF (——), ASWF (- - - - -) et « scalable wall functions » SSG (-·-·-). ***Au milieu :*** Calcul Bl-v^2-k en adhérence (—▲—) et lois de paroi AdWF (·····). ***En bas :*** Calcul k-ω-SST en adhérence (—▼—) et lois de paroi standard (----------).

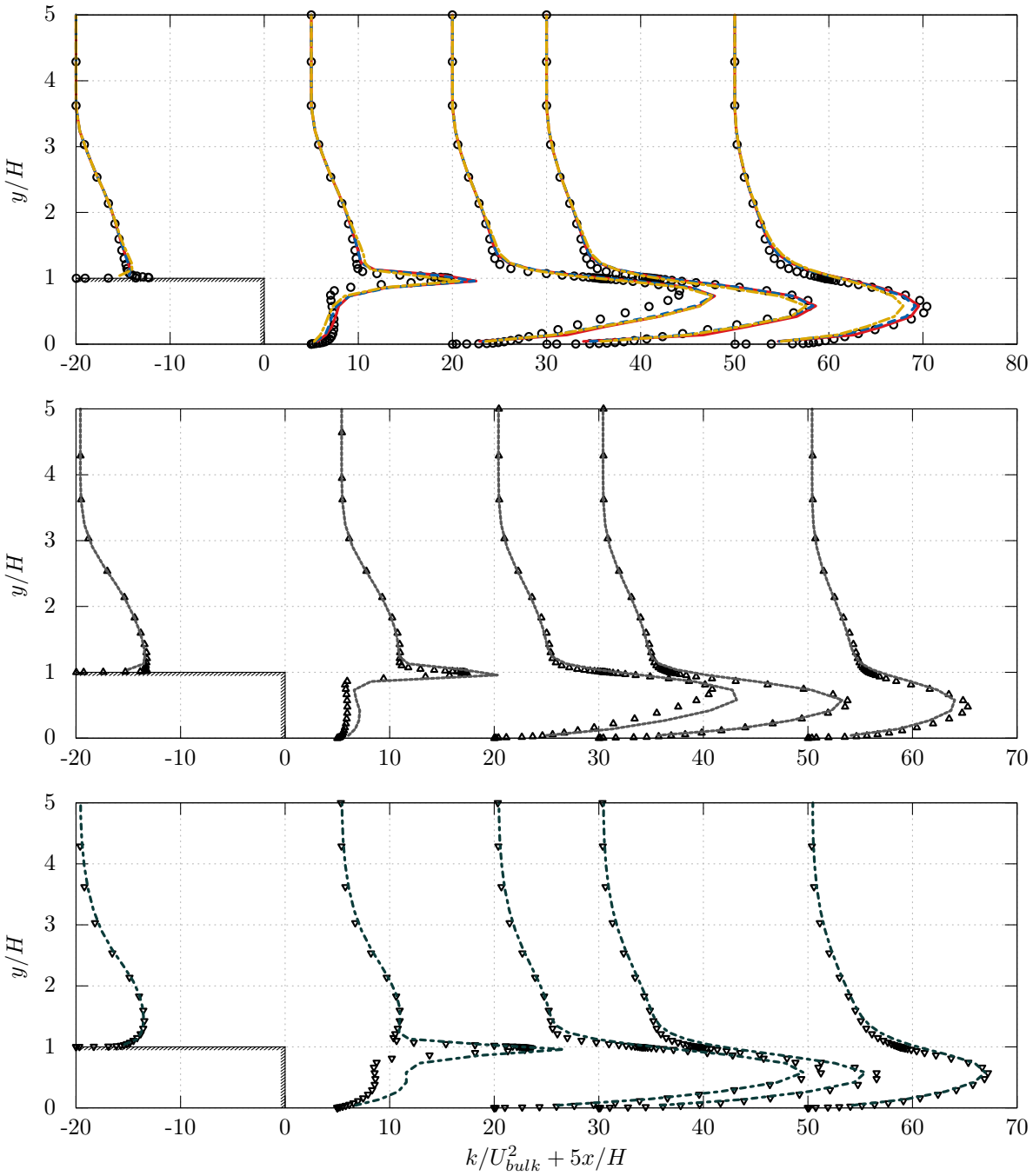


FIGURE 4.27 – ***En haut :*** Calcul EB-RSM en adhérence (—o—) et lois de paroi AAWF (———), ASWF (- - - - -) et « scalable wall functions » SSG (-·-·-). ***Au milieu :*** Calcul Bl-v^2-k en adhérence (—▲—) et lois de paroi AdWF (·····). ***En bas :*** Calcul k-ω-SST en adhérence (—▼—) et lois de paroi standard (·-·-·-).

4.2.4 Raffinement localisé

Comme il l'a été montré dans la section précédente pour le cas de l'étude du jet en impact sur une plaque plane, l'utilisation de lois de paroi, de par les hypothèses qu'elles impliquent sur l'écoulement, est extrêmement restrictive et il n'est pas possible d'attendre d'un calcul grossier qu'il fournisse des résultats proches de celui d'un calcul en adhérence lorsque l'écoulement est complexe. La force des lois de paroi dites adaptatives est la possibilité de s'affranchir localement, au sein d'un même calcul, des hypothèses de loi de paroi et de dégénérer vers la solution du modèle de référence en adhérence. Il est ainsi possible d'introduire sur le cas de la marche un raffinement caractéristique d'approches *Bas-Reynolds* en aval de la marche tout en gardant une résolution grossière dans la partie amont. La figure (4.28b) illustre le maillage ainsi obtenu.

a) Maillage *Haut-Reynolds* b) Maillage ***Haut/Bas**-Reynolds*

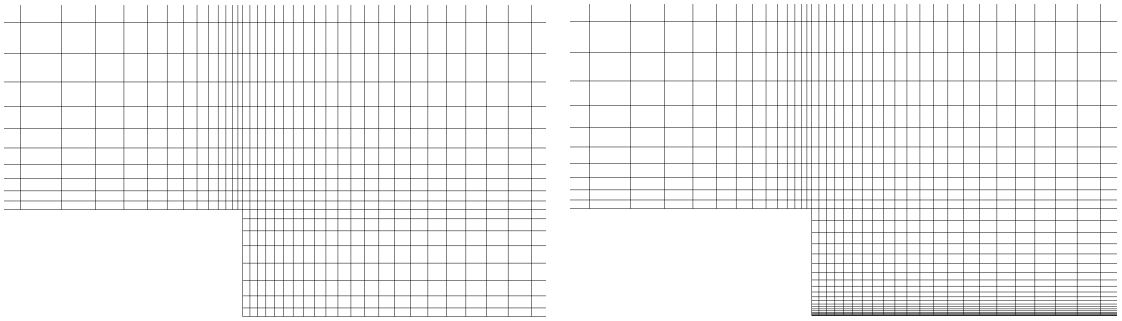


FIGURE 4.28 – Comparaison des maillages. ***a)*** Maillage *Haut-Reynolds* dans lequel $y_P^+ \sim 50$. ***b)*** Maillage *Haut/Bas-Reynolds* (raffinement de la paroi en amont de la marche $y_P^+ \sim 50$, raffinement de la paroi en aval de la marche $y_P^+ \sim 1$).

Bien entendu, la prédiction de la physique de la zone de recirculation est étroitement liée à ce qui se passe au-dessus et notamment la prédiction de la zone de cisaillement à l'interface entre la recirculation et l'écoulement principal. Dans les deux types de maillage, les mailles sont relativement grossières dans cette zone et l'on ne peut légitimement pas s'attendre à ce que le maillage *Haut/Bas Reynolds* reproduise les résultats de l'EB-RSM de manière exacte. On espère simplement améliorer qualitativement les résultats dans cette zone en s'affranchissant de toute hypothèse de paroi, celle-ci s'ajoutant dans le cas d'approche complètement *Haut-Reynolds* à la mauvaise prédiction du cisaillement.

La figure (4.29) présente les résultats du coefficient de frottement le long de la paroi inférieure pour le modèles AAWF sur différents types de maillages. On a également ajouté sur cette figure l'approche AAWF avec loi de paroi « hors équilibre » ($\lambda \neq 0$, avec terme source de gradient de pression et de convection) sur maillage *Haut Reynolds* pour en voir les effets sur cette configuration.

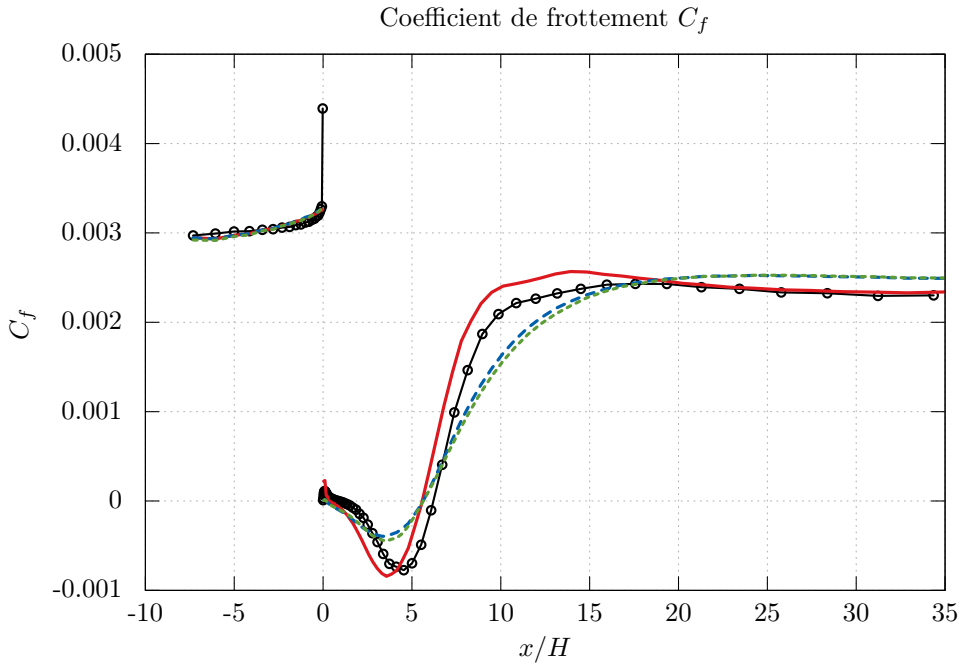


FIGURE 4.29 – Coefficient de frottement le long de la paroi pour différents maillages. Légende : Calcul EB-RSM (—o—), approche AAWF sur maillage *Haut-Reynolds* (- - - - -), approche AAWF sur maillage *Haut/Bas-Reynolds* (———) et approche AAWF sur maillage *Haut-Reynolds* avec termes sources ($\lambda \neq 0$ dans $\widetilde{U}^+$) (·------·).

On s'aperçoit que le modèle AAWF est nettement plus performant sur le maillage *Haut/Bas Reynolds*. Il permet en effet de prédire un C_f en zone de recirculation plus proche de celui du modèle EB-RSM. Par ailleurs on observe également un meilleur redéveloppement de la couche limite sur le maillage *Haut/Bas Reynolds*. L'écart persistant existant entre l'EB-RSM et le modèle AAWF sur maillage *Haut/Bas Reynolds* est sans doute à attribuer au maillage grossier de la zone de cisaillement au niveau de la marche. On s'aperçoit également sur la figure (4.29) que la prise en compte des effets de gradient de pression et de convection n'a que peu d'influence sur ce cas de la marche descendante. Cette observation confirme les conclusions de Popovac et Hanjalić sur le même cas, l'utilisation de la loi (4.10) ne conduisant pour les auteurs à aucune amélioration significative pour C_f. Par ailleurs, le coût de calcul supplémentaire engendré par le maillage *Haut/Bas Reynolds* est faible par rapport au maillage *Bas Reynolds* car le raffinement suivant x a été conservé identique au maillage *Haut Reynolds*. Il est donc plus judicieux de raffiner le maillage que de chercher à introduire des effets « hors équilibre » pour prédire avec précision la zone de recirculation.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées en regardant les profils adimensionnés de la figure (4.30). A gauche se trouvent les profils en amont de la marche en $x/H = -4$. On voit que l'on se situe nettement en zone logarithmique et que l'approche AAWF fournit d'excellents résultats par rapport à l'EB-RSM. A droite se trouvent les profils en $x/H = 4$. On voit tout de suite la supériorité de l'approche Haut/Bas Reynolds, puisque l'utilisation de ce maillage permet

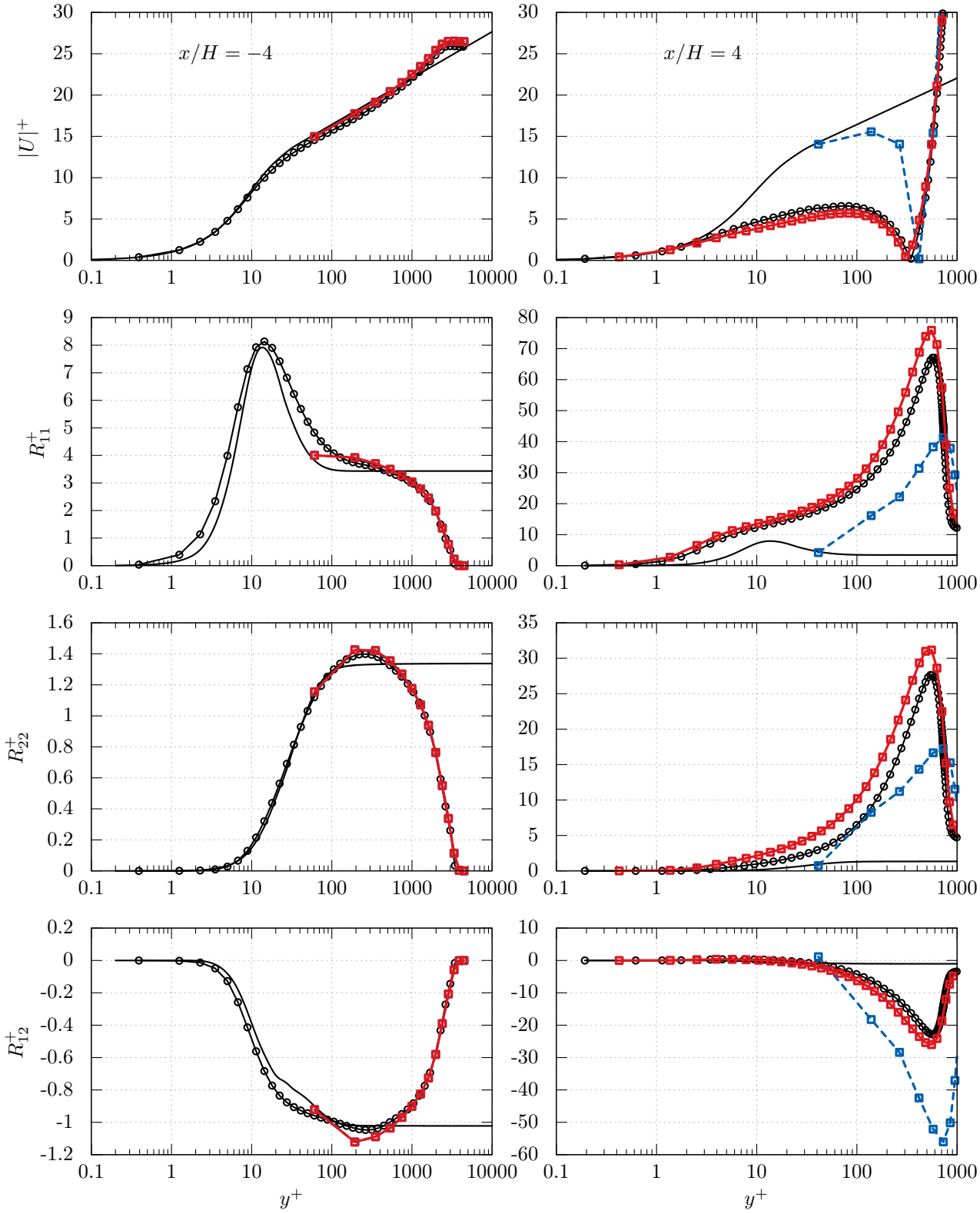


FIGURE 4.30 – Comparaison de profils de vitesse et des composantes du tenseur de Reynolds pour différents maillage. Légende : Calcul EB-RSM (—o—), approche AAWF sur maillage *Haut-Reynolds* (--▫--), approche AAWF sur maillage *Haut/Bas-Reynolds* (—▫—) et loi de paroi associée (———).

d'obtenir des profils bien plus réalistes. On entrevoit d'ailleurs immédiatement que les hypothèses faites pour construire les lois de paroi (écoulement de canal pleinement développé) sont complètement fausses ici puisque sur la figure (4.30) se trouve également, en trait noir plein, les lois de paroi associées à chaque variable ($\widetilde{U}^+$,...). Ces lois, fixant les valeurs des premiers points de calcul, sont clairement loin de la situation réelle.

4.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a démontré le bon comportement des approches AAWF et ASWF proposées dans cette thèse. Sur le cas d'écoulements complexes (impact, recirculation,...) on a montré que, pour des calculs purement *Haut-Reynolds*, ces approches donnent des résultats similaires aux lois de paroi existantes (lois standard, « scalable wall funcions », AdWF,...).

La possibilité d'introduction de termes sources, tels que gradient de pression et convection, dans la loi de paroi pour la vitesse permet dans certaines situations d'augmenter la précision des calculs, notamment sur les grandeurs de paroi comme le coefficient de frottement ou le nombre de Nusselt. Ces améliorations sont cependant légères et confirment les observations *a posteriori* effectuées au paragraphe 3.2.1.3 du chapitre 3.

L'approche ANWF offre des résultats clairement supérieurs aux autres approches sur le cas du jet impactant axisymétrique. La finesse de résolution de l'équation de quantité de mouvement (qui n'est plus intégrée analytiquement à l'aide d'hypothèse simplificatrices comme la loi sur $\widetilde{U}^+$ dans les approches AAWF et ASWF) permet une estimation des profils de vitesse et des grandeurs de paroi (C_f et Nu) en très bonne adéquation avec le modèle EB-RSM de référence. Mais cette stratégie ne s'est pas montrée suffisamment robuste pour s'appliquer sur tous les maillages testés ainsi que sur d'autres cas comme celui de la marche descendante. Le caractère temporel explicite des équations intégrées dans chaque maille de paroi ainsi que le traitement de la convection normale doivent être repensés. Cette approche est toutefois très prometteuse pour l'avenir des lois de paroi.

La possibilité de raffiner le maillage de paroi dans certaines zones importantes comme la recirculation de la marche descendante est clairement avantageuse. Les approches présentées ici permettent en effet la coexistence de zone *Bas-Reynolds* et *Haut-Reynolds* au sein du même maillage. L'utilisateur peut, avec un certain degré de confiance, forcer l'adhérence dans les zones importantes de manière à s'affranchir des hypothèses de lois de paroi. Ceci s'est révélé relativement efficace lors du raffinement de l'aval de la marche descendante.

Le chapitre suivant s'attache à mettre en avant les forces et faiblesses des approches présentées dans cette thèse sur un cas d'application industriel : le cas d'un débitmètre à diaphragme.

Chapitre 5

Cas industriel : débitmètre à diaphragme

Sommaire

5.1 Description du cas 157
5.2 Résultats en *Bas-Reynolds* 159
5.3 Résultats en *Haut Reynolds* 162
5.4 Raffinement localisé 171
5.5 Convergence 173
5.6 Conclusion sur le cas du diaphragme 174

Cette partie atteste de l'applicabilité et de l'intérêt des approches développées sur un cas à portée industrielle. On présente le comportement des modèles utilisés en adhérence puis on s'intéresse au comportement des nouvelles approches en raffinant le maillage.

5.1 Description du cas

Un débitmètre à diaphragme est un dispositif communément utilisé dans l'industrie et en particulier au sein du parc nucléaire d'EDF pour mesurer le débit d'un fluide au sein d'une conduite. Ces dispositifs simples et efficaces sont très utilisés car très documentés et encadrés par une norme pour leur utilisation (ISO 5167 [ISO 2003]). Cette dernière garantit un niveau d'incertitude acceptable pour leur utilisation industrielle. La CFD commence cependant à jouer un rôle clé dans le calcul de certaines grandeurs sur ce type de configurations, étant donné la difficulté à satisfaire certaines contraintes imposées par la norme (présence de coude ou d'embranchement, longueur en amont,...). Il serait en effet très coûteux, si ce n'est impossible, de réaliser des expériences pour toutes les configurations comme les nombres de Reynolds mis en jeu sur ce type d'écoulement sont très élevés ($Re \sim 10^5 - 10^6$). De ce fait, l'approche RANS est la seule approche raisonnable à moyen terme.

Une étape préliminaire de validation des approches RANS sur les diaphragmes a été réalisée par Benhamadouche et al. [Benhamadouche 2015] sur un cas à Reynolds modéré ($Re = 25000$). Ces travaux présentent un calcul de validation LES très fin et s'appuient sur les résultats expérimentaux de Shan et al. [Shan 2013]. Différents modèles RANS ont été testés et des études de sensibilité au maillage ont par la suite été menées sur cette configuration. Les résultats ont été comparés aux données LES à des fins de validation [Benhamadouche 2014b].

On s'intéresse dans cette partie à l'application des lois de paroi proposées dans cette thèse sur la configuration étudiée par Benhamadouche et al. La figure (5.1) donne une représentation schématique 2D de la situation (le cas étant axisymétrique) et une vue générale de la géométrie 3D est donnée en figure (5.2). Les paramètres physiques sont les suivants :

Variable	Symbole	Unité	Valeur
Densité	ρ	$kg \cdot m^{-3}$	996.65
Viscosité dynamique	μ	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$	$8.54 \cdot 10^{-4}$
Diamètre principal	D	m	0.046
Diamètre du rétrécissement	d	m	0.0285
Épaisseur du diaphragme	t	m	0.005
Vitesse débitante dans la conduite principale	U_b	$m \cdot s^{-1}$	0.466

Le fluide est accéléré au travers du diaphragme comme schématisé sur la figure (5.1). On définit le coefficient de perte de charge C_D par la relation :

$$C_D = \frac{1}{\varepsilon} U_b \sqrt{1-\beta^4} \sqrt{\frac{\rho}{2\Delta P_D}} \tag{5.1}$$

Cette relation est utilisée en pratique pour déterminer expérimentalement le débit circulant dans la conduite. Concrètement ce dernier est évalué par la relation :

$$U_b = \frac{C_D}{\sqrt{1-\beta^4}} \varepsilon \sqrt{\frac{2\Delta P_D}{\rho}} \tag{5.2}$$

Le coefficient de compressibilité ε est égal à 1 dans le cas de la présente étude étant donné que les vitesses impliquées conduisent à des nombres de Mach bien inférieurs à 0.3. Le paramètre β représente le ratio entre le diamètre D de la conduite et le diamètre d du rétrécissement et vaut 0.62. La chute de pression ΔP_D est calculée à partir de mesures $1D$ en amont du rétrécissement et $0.5D$ en aval (mesures prises à partir des points A et B de la figure (5.1) respectivement). Le coefficient de décharge C_D est usuellement calculé en utilisant l'équation de Reader-Harris/Gallagher (voir ISO 5167-2, 2003), fonction de la géométrie, du nombre de Reynolds et de la localisation des sondes de prise de pression. Ainsi, la norme ISO 5167-2 (2003) estime pour la présente géométrie un coefficient de décharge de 0.628 ± 0.005.

Une autre grandeur d'intérêt est le coefficient de perte de charge singulière ξ. Ce dernier est physiquement défini par la relation :

$$\xi = \frac{2\Delta P}{\rho U_b^2} \tag{5.3}$$

La perte de pression ΔP, dans le cas du coefficient ξ, est calculée à partir de mesures $6D$ en amont du rétrécissement et $2D$ en aval (mesures prises à partir des points A et B de la figure (5.1) respectivement). Ce coefficient est également évalué par la norme ISO 5167-2 (2003) comme fonction du coefficient de décharge :

$$\xi_{ISO} = \left[\frac{\sqrt{1-\beta^4\left(1-C_{D,ISO}^2\right)}}{C_{D,ISO}\beta^2} \right]^2 \tag{5.4}$$

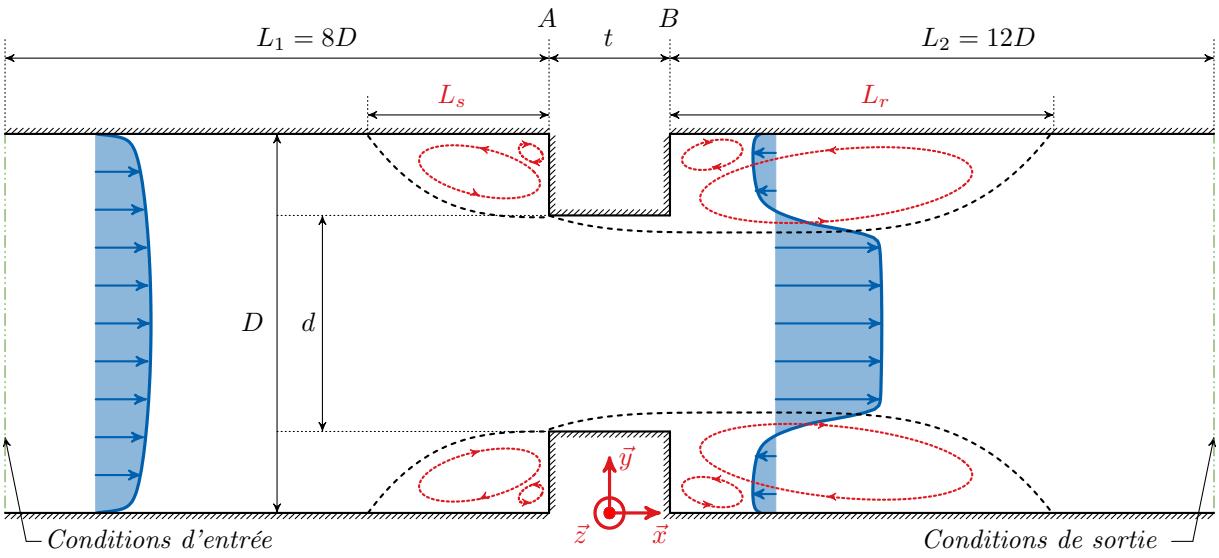


FIGURE 5.1 – Représentation schématique (non à l'échelle) du cas du diaphragme.

Ce dernier dans le cas de la présente étude est alors estimé à 8.71 ± 0.07.

Dans le cas de simulations numériques il est possible de confronter chaque modèle à la norme en calculant directement les coefficients de décharge C_D et de perte de charge singulière ξ. Ainsi, Benhamadouche et al. arrivent aux résultats suivants, en très bon accord avec la norme :

	ISO 5167-2 (2003)	LES
C_D	0.628 ± 0.005	0.632
ξ	8.71 ± 0.07	8.64

Application à la simulation RANS

Dans la suite, on s'intéressera principalement aux calculs du coefficient de décharge et de perte de charge singulière dans le cas de la simulation RANS de cette étude. Le domaine possède les caractéristiques géométriques définies dans la figure (5.1). Les conditions aux limites sont les suivantes :

- *Entrée* : L'entrée du domaine se situe $8D$ en amont du rétrécissement. Une méthode de recyclage est utilisée de manière à obtenir un profil pleinement développé en entrée de domaine.
- *Sortie* : La sortie du domaine se situe $12D$ en aval du rétrécissement. Des conditions de sortie standard de type Neumann homogène sont imposées.

5.2 Résultats en *Bas-Reynolds*

On s'intéresse dans un premier temps, par soucis de cohérence, à la comparaison de trois modèles en adhérence aux données expérimentales ainsi qu'aux données LES. On abandonnera alors par la suite toute comparaison avec les références expérimentales et LES pour des raisons

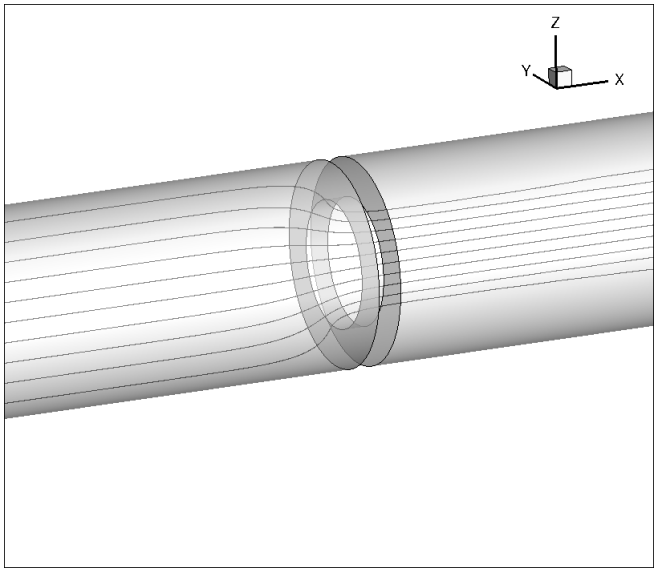


FIGURE 5.2 – Visualisation 3D de la géométrie du diaphragme aux alentours de la contraction.

de clarté. Le lecteur se référera alors à cette section pour juger du bon comportement du modèle de base. Comme précédemment, trois modèles RANS *Bas-Reynolds* de référence sont testés :

- Le modèle k-ω-SST,
- Le modèle Bl-v^2-k,
- Le modèle EB-RSM.

Le maillage utilisé dans cette section assure un premier point de paroi avec une valeur de adimensionnelle $y_P^+ \sim 1$ dans tout le domaine typique d'un maillage *Bas-Reynolds*. On s'intéresse dans un premier temps aux grandeurs globales définies dans le paragraphe précédent (coefficient de décharge C_D et perte de charge singulière ξ) ainsi qu'à la distance de séparation en amont du rétrécissement (distance L_s mesurée à partir du point A sur la figure (5.1)) et la longueur de réattachement principale en aval du rétrécissement (distance L_r mesurée à partir du point B sur la figure (5.1)). Les résultats des trois modèles testés sont présentés dans le tableau suivant :

	ISO 5167-2 (2003)	LES	EBRSM	k-ω-SST	Bl-v^2-k
Coefficient de décharge C_D	0.628 ± 0.005	0.632	0.626	0.636	0.6311
Perte de charge ξ	8.71 ± 0.07	8.64	9.09	8.50	9.44
Distance de séparation L_s	-	0.46	0.46	0.44	0.47
Longueur de réattachement L_r	-	3.92	4.79	5.89	7.69

Ces valeurs sont en adéquation et confirment les travaux issus de [Benhamadouche 2014b]. Les coefficients de décharges sont raisonnablement bien prédits par l'ensemble des modèles testés, traduisant la bonne estimation de la pression en aval du diaphragme proche du rétrécissement. Dans tous les cas, sauf pour le modèle k-ω-SST se situant un peu au-dessus, cette grandeur

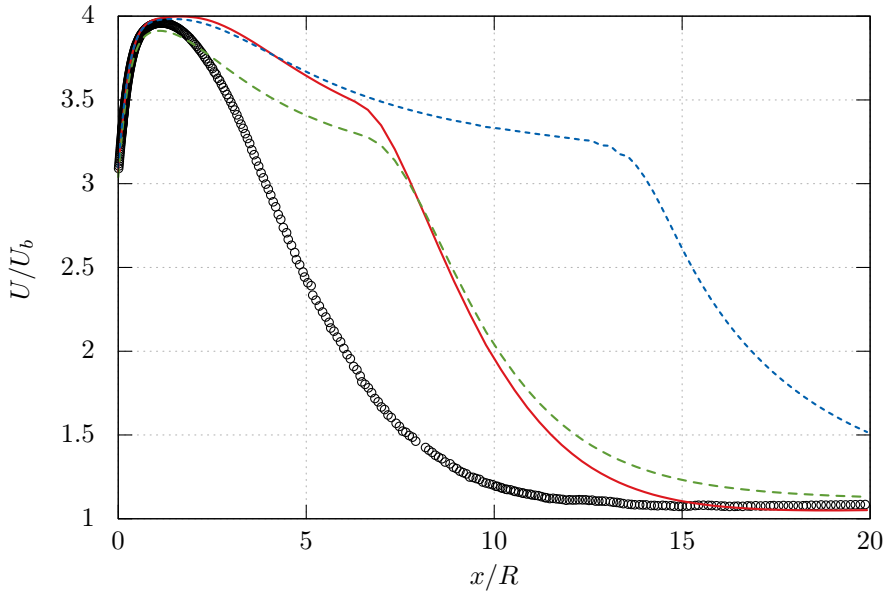


FIGURE 5.3 – Vitesse adimensionnée au centre de la conduite pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (·------·). Références : Données LES de Benhamadouche et al. (∘).

d'intérêt se situe dans les limites fixées par la norme ISO 5167-2 (2003). Les conclusions ne sont pas les mêmes pour le coefficient ξ qui de manière générale est surestimé par tous les modèles. Ceci tend à prouver que la couche limite redéveloppe moins vite dans tous les cas. Cette dernière observation est corroborée par la figure (5.3) présentant la vitesse adimensionnée sur l'axe central : aucun des modèles n'est capable de prédire correctement le retour vers une couche limite développée.

Les résultats obtenus avec le modèle Bl-v^2-k sont très surprenants, notamment pour la zone de réattachement qui est largement surestimée. Il faudrait plus d'analyses et d'investigations pour expliquer ce mauvais comportement.

La figure (5.4a) illustre le coefficient de frottement le long de la paroi. Le modèle k-ω-SST est en bonne adéquation avec les données LES au niveau de la prédiction de l'intensité de la zone de recirculation ainsi qu'au niveau de la localisation du pic. Le modèle EB-RSM est quant à lui le seul modèle captant de manière convaincante les recirculations secondaires apparaissant en amont et en aval du rétrécissement et dont l'intensité, au regard de la LES, est loin d'être négligeable. La figure (5.4b), présentant le coefficient de pression le long de la paroi, confirme la tendance systématique de tous les modèles à prédire un retour tardif vers une couche limite développée. Malgré ce comportement, le modèle k-ω-SST donne des résultats plus proche de la LES.

La figure (5.5) présente les profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente le long de la conduite pour différentes localisations ($x/D = -5, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 1, 3, 5$). Les figures (5.6) à (5.7) présentent les profils EB-RSM des composantes du tenseur de Reynolds. La vitesse est adimensionnée par la vitesse débitante U_b et les grandeurs turbulentes sont adimensionnées par

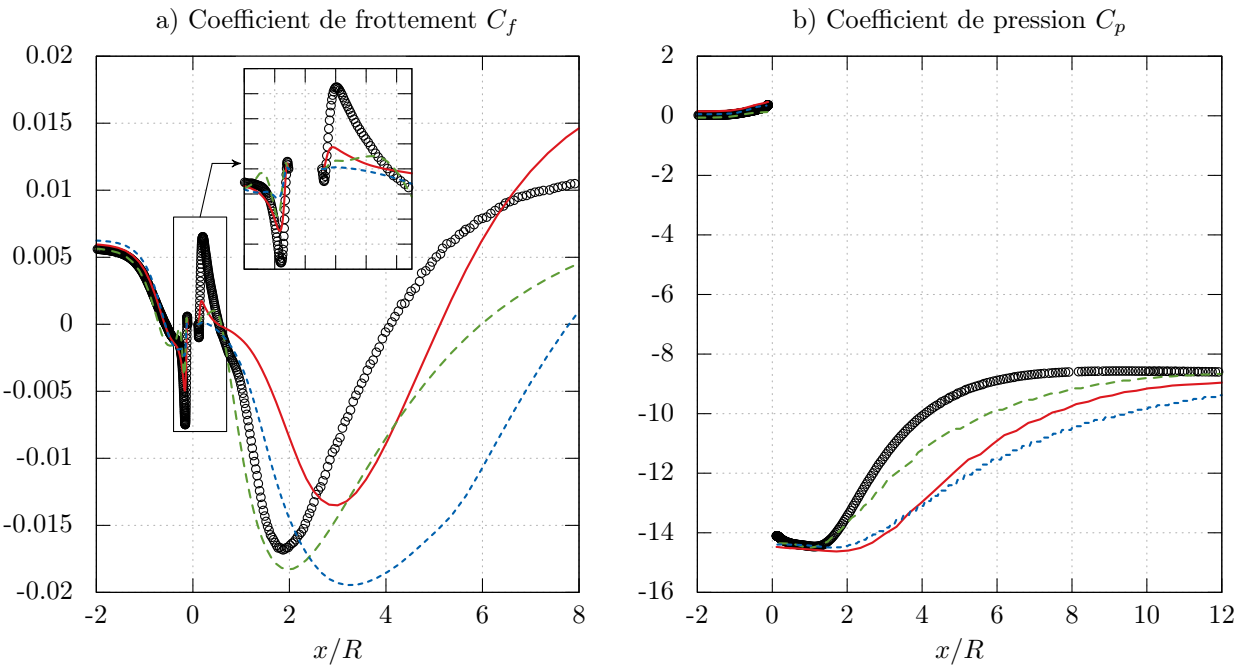


FIGURE 5.4 – ***a)*** Comparaison du coefficient de frottement C_f ***b)*** Comparaison du coefficient de pression C_p pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données LES de Benhamadouche et al. (∘).

le carré de la vitesse U_b^2.

En amont du rétrécissement, tous les modèles prédisent de manière correcte la vitesse, même au sein de la recirculation due à la présence du rétrécissement. Les résultats sont également acceptables sur la partie aval, mais on distingue cependant nettement la zone centrale de sur-vitesse observée sur la figure (5.3). La prédiction de l'énergie turbulente est moins en accord avec les données LES, notamment en aval du rétrécissement où k est constamment sous-estimée.

L'observation des composantes du tenseur de Reynolds pour l'EB-RSM permet de tirer les même conclusions. Le modèle se comporte de manière excellente en amont du rétrécissement, même après la séparation. En revanche, les composantes du tenseur de Reynolds sont, de manière générale, nettement sous estimées en aval.

5.3 Résultats en *Haut Reynolds*

On s'intéresse à présent à un calcul purement *Haut-Reynolds* du cas du diaphragme. En effet, étant donné les nombres de Reynolds très élevés des configurations industrielles, il n'est pas possible d'effectuer des simulations *Bas-Reynolds*. Cette section a donc pour but d'évaluer le comportement des lois de paroi sur la prédiction des grandeurs d'intérêt, afin d'attester (ou non) de leur pertinence. Une étude de sensibilité au maillage sur un cas similaire réalisée au sein d'EDF par [Benhamadouche 2014b] avait permis de tirer des conclusions quant à la grande sensibilité des calculs *Haut-Reynolds*. Le maillage utilisé le long de la paroi prévoit une taille

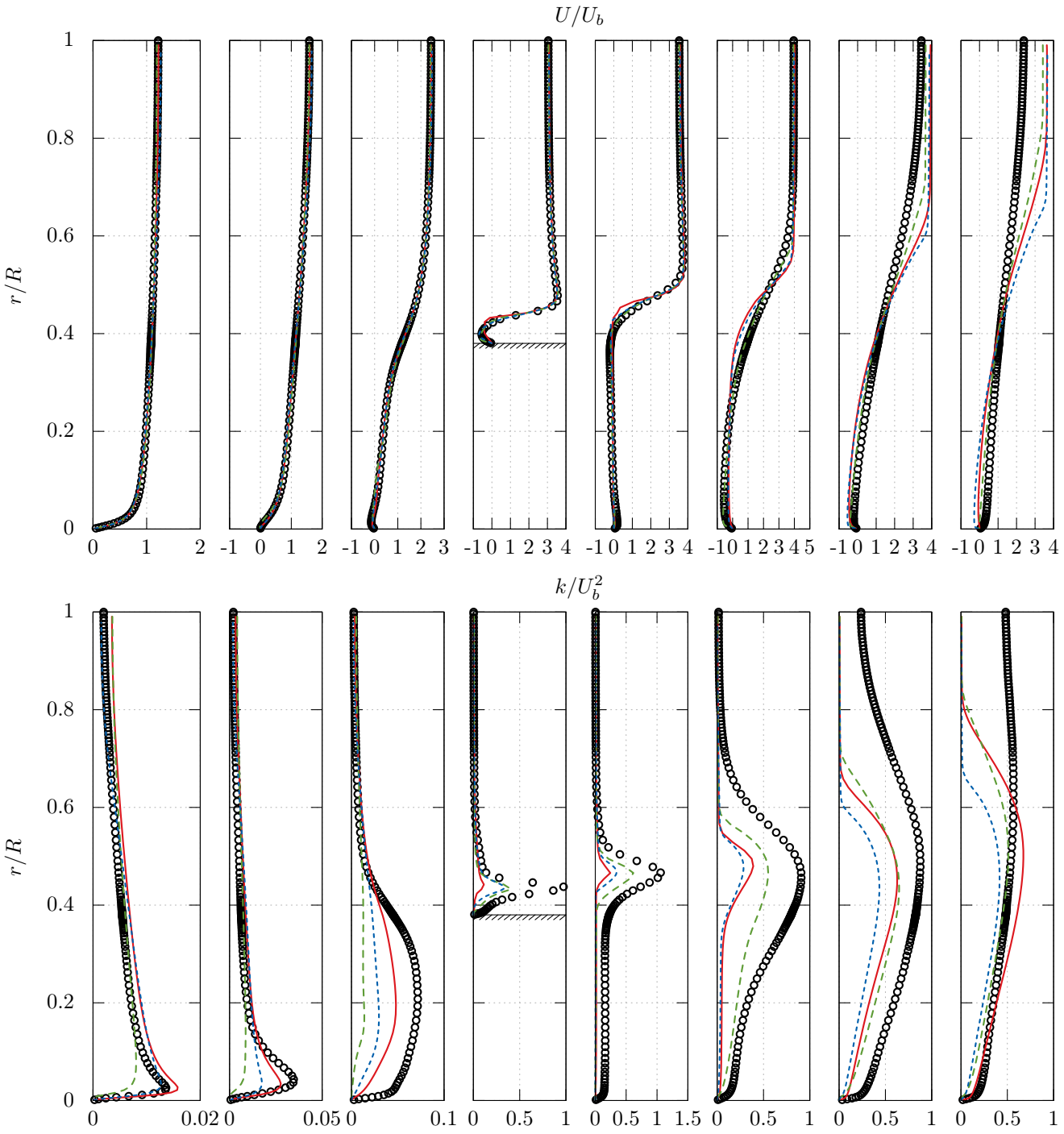


FIGURE 5.5 – Comparaison des profils de la vitesse (***en haut***) et de l'énergie cinétique turbulente k (***en bas***) avec (de gauche à droite) $x/D = -5, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 1, 3, 5$ pour les modèles EBRSM (———), k-ω-SST (- - - -) et Bl-v^2-k (-------). Références : Données LES de Benhamadouche et al. (—o—).

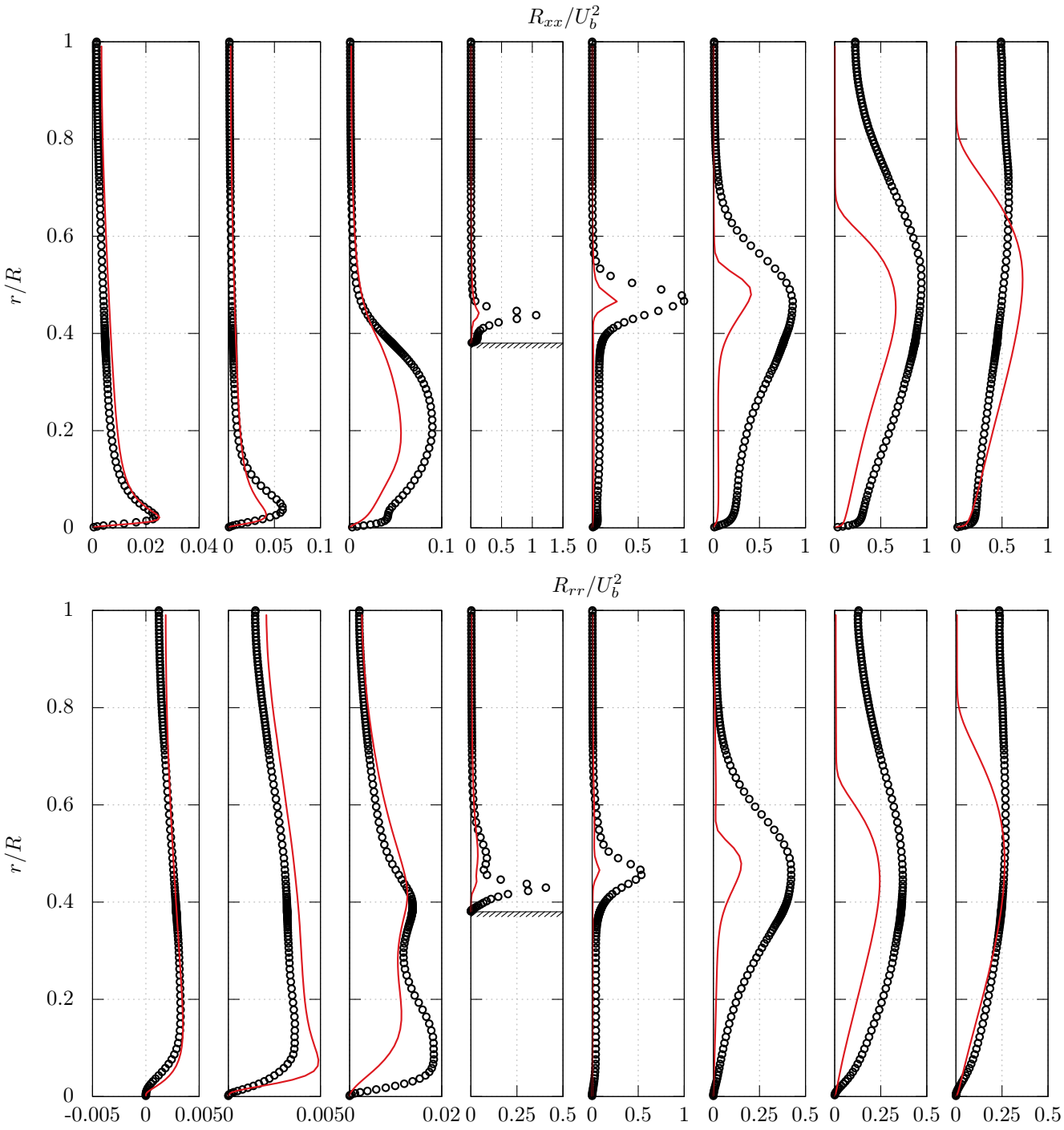


FIGURE 5.6 – Comparaison des profils de R_{xx} (***en haut***) et de R_{rr} (***en bas***) avec (de gauche à droite) $x/D = -5, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 1, 3, 5$ pour le modèle EB-RSM (———). Références :Données LES de Benhamadouche et al. (—o—).

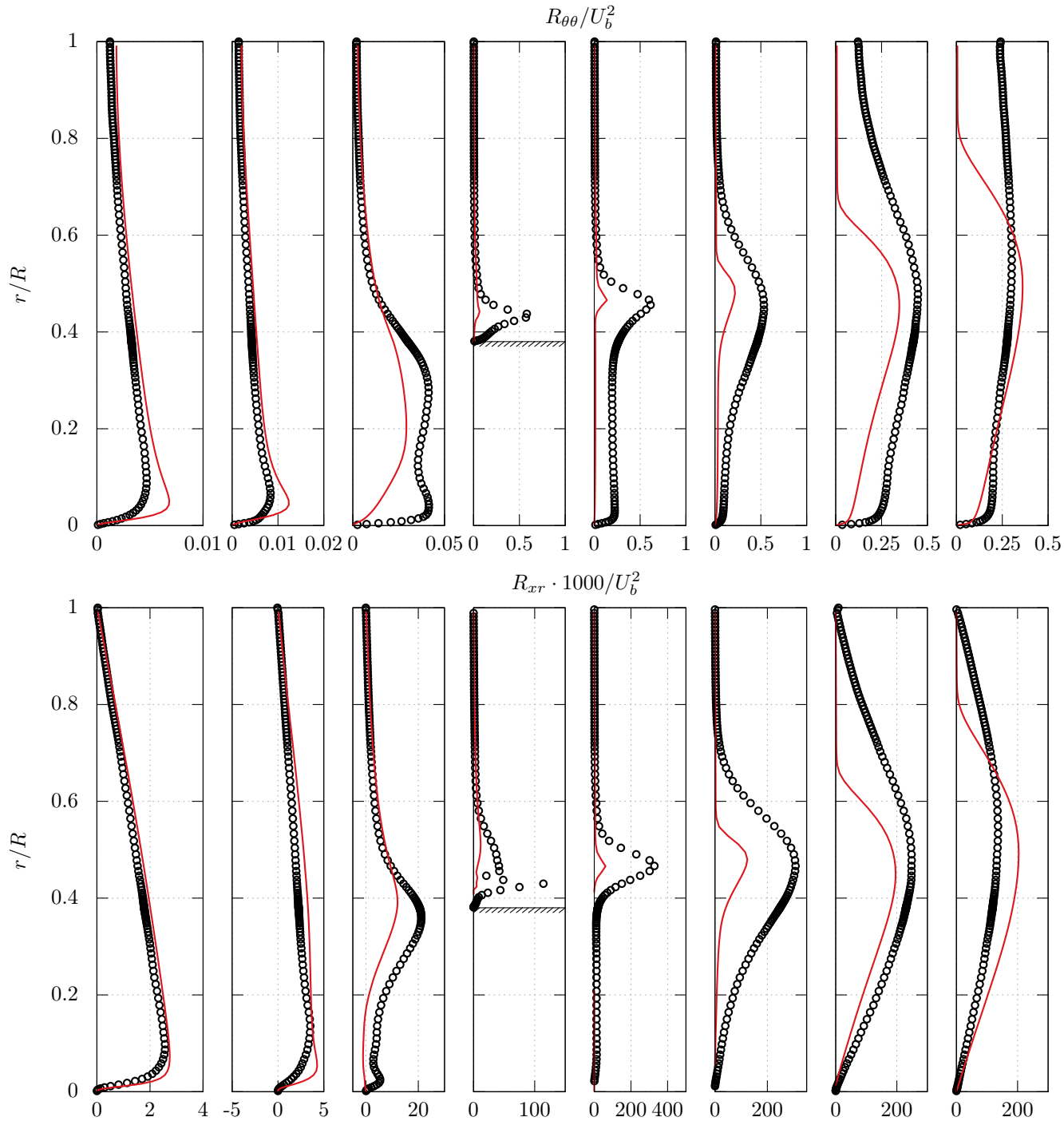


FIGURE 5.7 – Comparaison des profils de $R_{\theta\theta}$ (***en haut***) et de R_{xr} (***en bas***) avec (de gauche à droite) $x/D = -5, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 1, 3, 5$ pour le modèle EB-RSM (———). Références :Données LES de Benhamadouche et al. (—o—).

de première maille assurant une localisation de chaque premier point de calcul à la paroi au sein de la zone logarithmique. La figure (5.8) donne un aperçu de la différence de raffinement entre le maillage *Haut-Reynolds* utilisé ici et le maillage de type *Bas-Reynolds* (utilisé dans le paragraphe précédent).

a) Maillage EB-RSM b) Maillage *Haut-Reynolds*

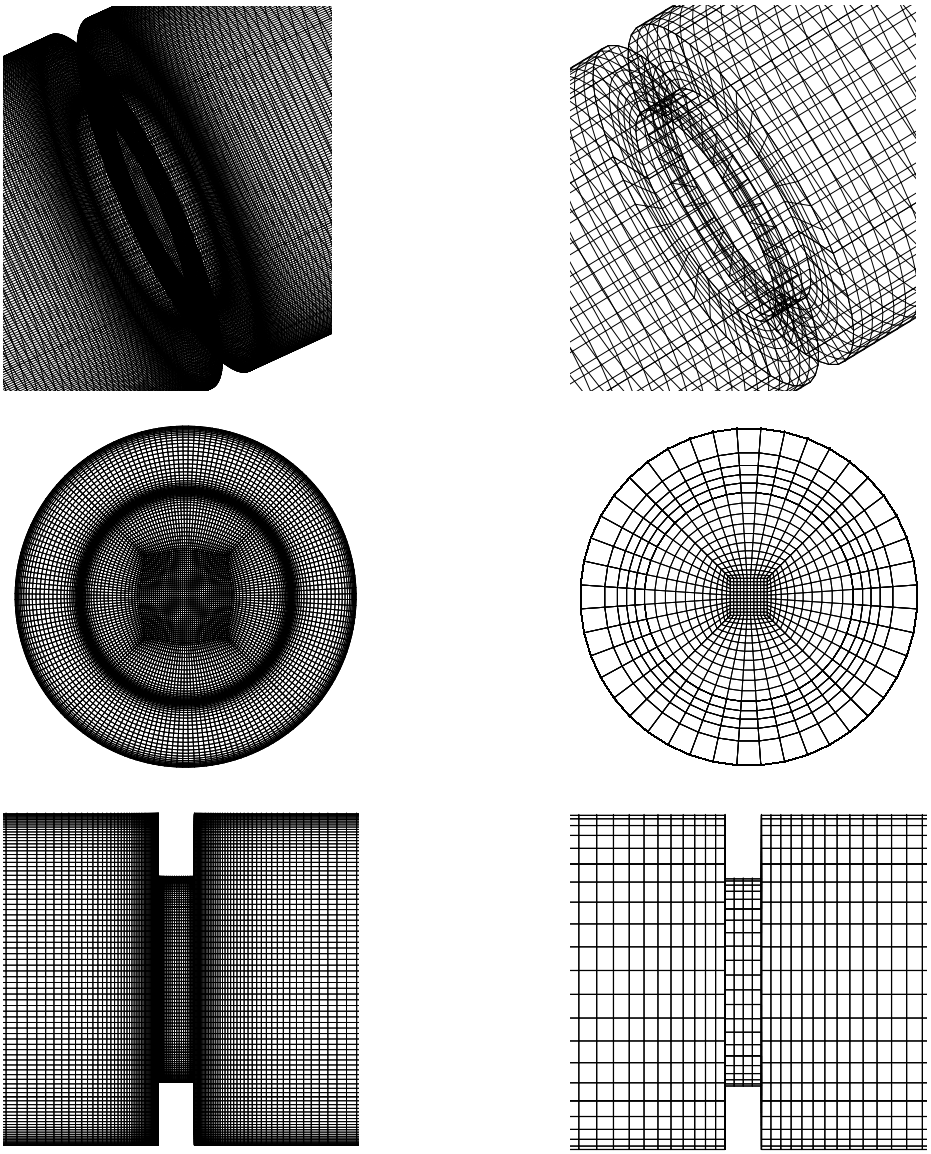


FIGURE 5.8 – Comparaison qualitative des maillages utilisés lors de la simulation d'un calcul EB-RSM fin et d'un calcul *Haut-Reynolds*.

On s'intéresse aux résultats issus des modèles suivants :

— Nouvelles approches AAWF et ASWF pour l'EB-RSM,

— Lois de paroi standard et modèle k-ω-SST,
— Lois de paroi « scalable wall functions » et modèle SSG.

Les nouvelles approches AAWF et ASWF sont dans un premier temps testées en utilisant la loi standard (sans inclusion de termes sources de type gradient de pression ou convection, *ie*, $\lambda = 0$) sur la vitesse exprimée au paragraphe 3.2.1 du chapitre 3. Le modèle SSG est quant à lui utilisé avec les lois de paroi de type « scalable » de *Code_Saturne*. Étant donné la configuration *Haut-Reynolds* étudiée dans ce paragraphe, l'utilisation des « Scalable wall functions » est équivalente aux lois de paroi standards.

Le tableau suivant présente les valeurs des coefficients de décharge et de perte de charge singulière ainsi que les longueurs de réattachement pour chaque approche :

	AAWF	ASWF	SSG	k-ω-SST
Coefficient de décharge C_D	0.690	0.698	0.692	0.689
Perte de charge ξ	7.61	7.47	7.63	7.42
Distance de séparation L_s	0.05	-	0.09	0.01
Longueur de réattachement L_r	3.99	3.99	3.94	4.89

Le coefficient C_D est surestimé par la totalité de approches, de la même manière que ξ est largement sous-estimé. On reviendra sur ces résultats dans le paragraphe 5.5. Ces observations sont corroborées par la figure (5.9), présentant le coefficient de frottement le long de la paroi. Les lois de paroi couplées au modèles k-ω-SST donnent de bons résultats mais toutes les approches du second ordre échouent à prédire précisément la recirculation en aval du rétrécissement.

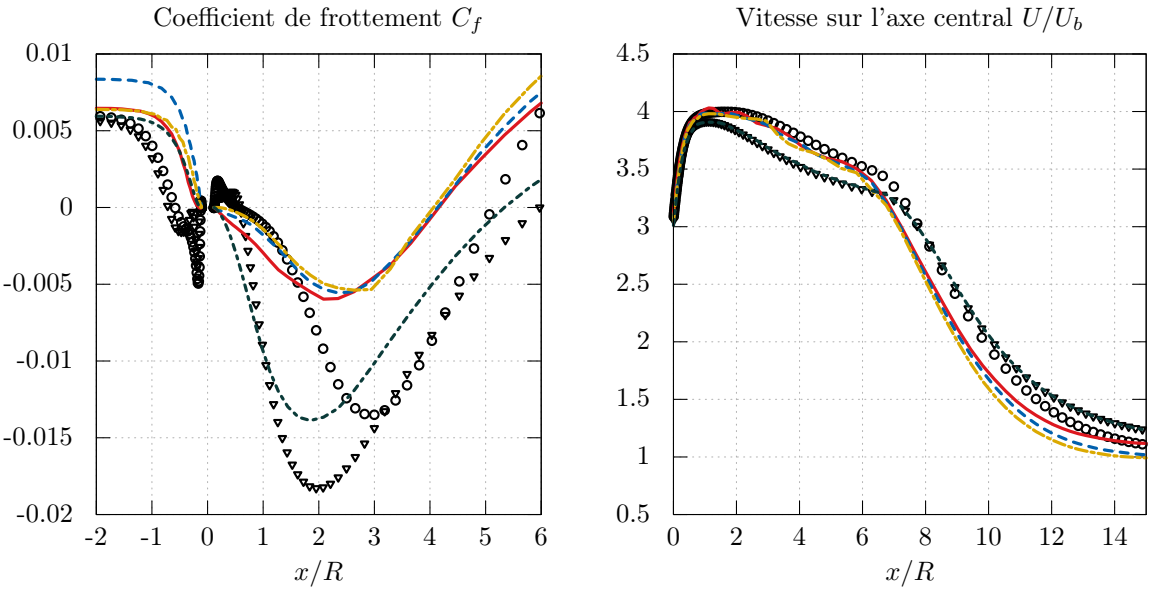


FIGURE 5.9 – ***a)*** Coefficient de frottement. ***b)*** Vitesse sur l'axe central. *Légende* : EB-RSM (∘), lois de paroi AAWF (———), lois de paroi ASWF (- - - - -), lois de paroi standards (SSG) (-·-·-·-), k-ω-SST (▿) et lois de paroi standard (k-ω-SST) (·-·-·-·-)

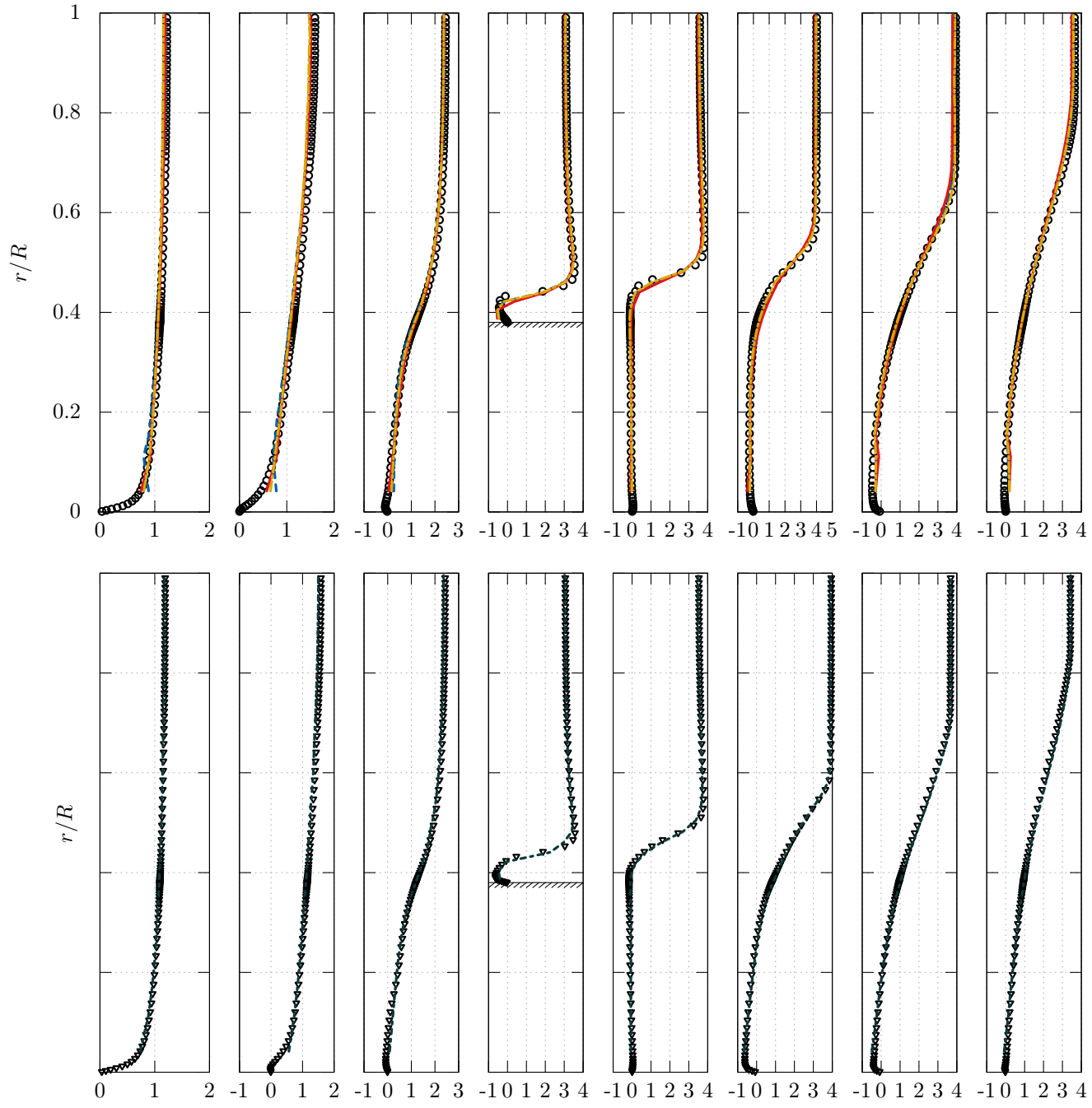


FIGURE 5.10 – Profils de vitesse U/U_b pour ***En haut :*** Calcul EB-RSM en adhérence (—o—) et lois de paroi AAWF (——), ASWF (- - - - -) et « scalable wall functions » SSG (-·-·-). ***En bas :*** Calcul k-ω-SST en adhérence (—▾—) et lois de paroi standard (·-·-·-·).

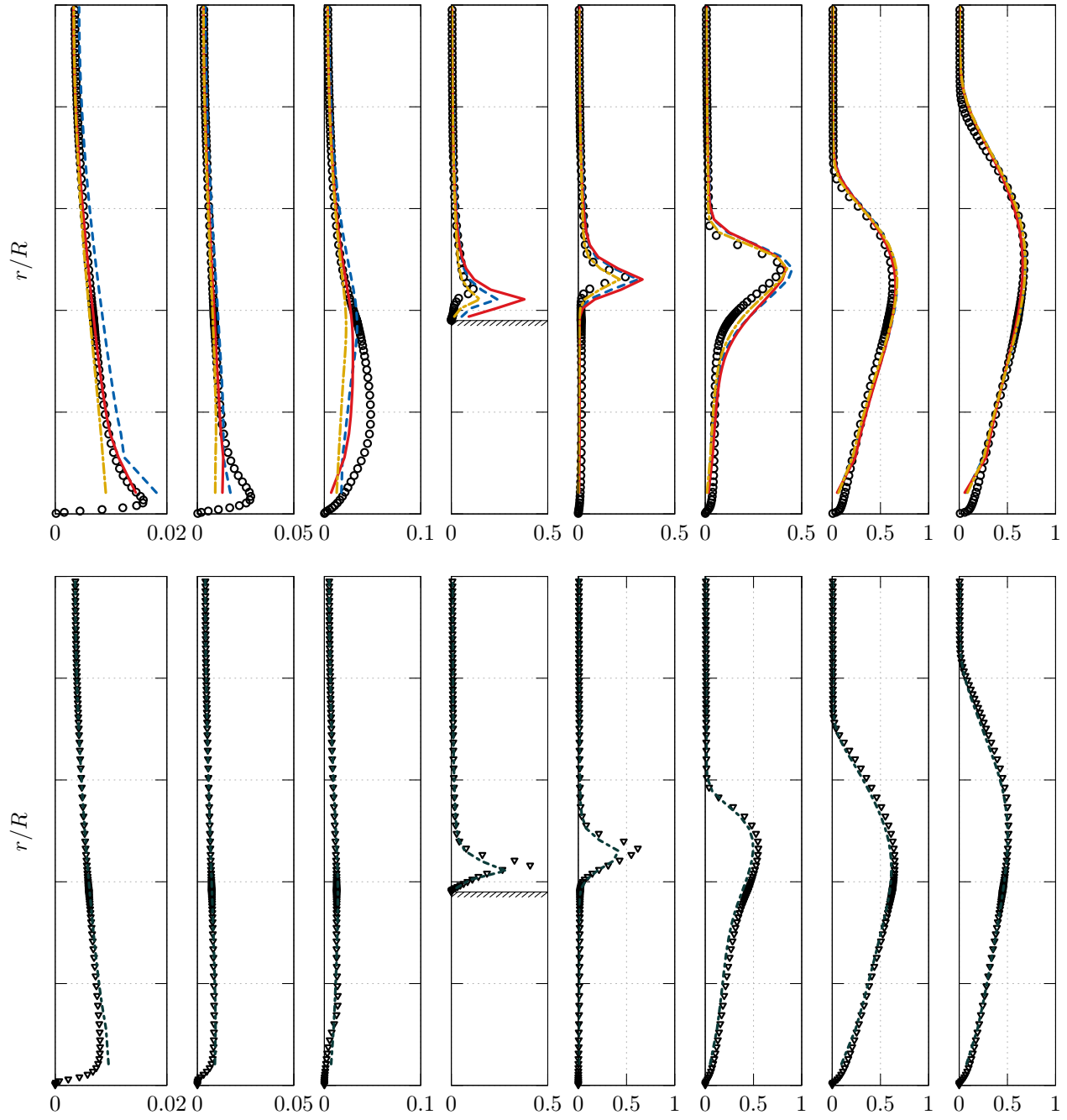


FIGURE 5.11 – Profils de vitesse k/U_b^2 pour ***En haut :*** Calcul EB-RSM en adhérence (——o——) et lois de paroi AAWF (——), ASWF (- - - - -) et « scalable wall functions » SSG (-·-·-·). ***En bas :*** Calcul k-ω-SST en adhérence (——▾——) et lois de paroi standard (·-·-·-·-·).

La même observation générale peut être faite sur la vitesse axiale sur l'axe central : au niveau du rétrécissement, les modèles se comportent aussi bien que l'EB-RSM mais échouent à prédire un redéveloppement correct. Cette observation est à nuancer pour les lois standards couplées au modèle k-ω-SST qui s'en sortent mieux.

Pour avoir une idée plus précise du comportement de chaque approche, il est intéressant de regarder les figures (5.10) et (5.11), qui montrent les profils de vitesse ainsi que les profils d'énergie cinétique turbulente pour chaque modèle de paroi utilisé. Dans chaque cas, on compare les résultats au modèle intégré jusqu'à la paroi. On remarque d'emblée sur les profils de vitesse de la figure (5.10) l'excellent comportement qualitatif de toutes les lois de paroi. Cette observation se généralise mais est à nuancer sur les profils d'énergie cinétique turbulente. On remarquera sur la figure (5.11) qu'en entrée de domaine, le modèle AAWF s'adapte parfaitement au comportement du modèle EB-RSM : l'approche AAWF est faite pour reproduire parfaitement ce type d'écoulement de par les hypothèses qu'elle met en jeu, il n'est donc pas surprenant que celle-ci soit supérieure. On voit par ailleurs que le modèle SSG couplé aux « scalable wall functions » se comporte mieux dans l'orifice, mais ceci est en grande partie dû à la forte sous-estimation de k en entrée (compensation d'erreur).

Prise en compte des effets de pression et d'inertie

Il avait été vu lors de tests *a posteriori* sur des calculs EB-RSM au chapitre 3, que la prise en compte d'effets « hors équilibres » dans la loi de paroi sur la vitesse $\widetilde{U}^+$ pouvait potentiellement améliorer la prédiction du frottement au sein de la recirculation. La loi de paroi suivante pour $\widetilde{U}^+$ a donc été utilisée :

$$\widetilde{U}^+ = \frac{1}{\kappa}\left(\ln(y^+) + \frac{1}{2}\lambda y^+\right) + B \tag{5.5}$$

Le terme λ contient tous les termes usuellement considérés nuls (équation (4.9)).

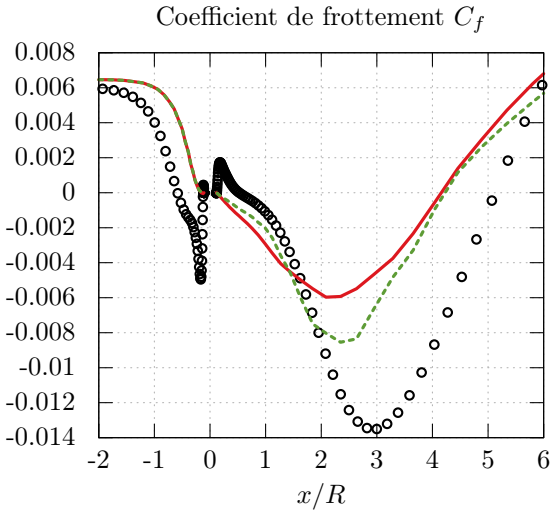


FIGURE 5.12 – Coefficient de frottement le long de la paroi. Légende : Calcul EB-RSM (—o—), approche AAWF avec $\lambda = 0$ (———) et approche AAWF avec $\lambda \neq 0$ (- - - - - - - -)

Cette modification a été utilisée avec le même maillage que celui utilisé pour les calculs *Haut-Reynolds* précédents. La figure (5.12) présente l'évolution du coefficient de frottement le long de la paroi avec l'introduction du terme λ et le compare aux résultats *Haut-Reynolds* précédent ainsi qu'au modèle EB-RSM.

On observe une amélioration de la prédiction du frottement au sein de la zone de recirculation, ce qui confirme les observations *a posteriori* du chapitre 3. En revanche, la prédiction de la longueur de recirculation n'est pas modifiée par l'introduction du terme λ. Les coefficients de décharge et de perte de charge singulière sont eux aussi impactés à la marge par l'introduction de ce terme. On se retrouve ainsi confronté aux mêmes problèmes que ceux rencontrés dans les cas test précédents : les hypothèses qui ont permis de bâtir les lois de paroi sont extrêmement fortes. Malgré une amélioration notable par l'inclusion de termes pour relaxer ces hypothèses, la loi de paroi contraint toujours fortement les grandeurs d'intérêt.

Il est donc sûrement préférable de s'affranchir localement de ces hypothèses. C'est l'objet du paragraphe suivant qui montre qu'à coût relativement réduit, on gagne sensiblement en précision en s'affranchissant de lois de paroi en aval du rétrécissement .

5.4 Raffinement localisé

A partir des observations des calculs *Haut Reynolds*, il est possible d'observer que l'écoulement $1D$ en amont du rétrécissement (le point de prise de pression amont pour la mesure du coefficient de décharge) est relativement proche de l'équilibre (relativement au point de prise de pression aval). Les lois de paroi témoignent dans cette zone d'un bon comportement et reproduisent un coefficient de frottement et un profil de vitesse de manière tout à fait correcte. En revanche, la prise de pression avale se situe au sein de la zone de recirculation et souffre du maillage grossier utilisé, en témoigne la figure (5.9). On propose donc ici de construire un maillage *Haut/Bas Reynolds* de manière à garder la souplesse des lois de paroi en amont du rétrécissement mais s'affranchissant des hypothèses trop restrictives de celles-ci en aval du rétrécissement. Le maillage *Haut-Reynolds* a été raffiné dans la direction normale à la paroi avec une résolution similaire à celle du maillage EB-RSM. Les raffinements azimutaux et axiaux sont quant à eux laissés inchangés de manière à ne pas augmenter significativement le nombre total de mailles. Une illustration de ce nouveau maillage est donnée par la figure (5.13).

Le tableau suivant présente les caractéristiques du maillage en comparaison des maillages EB-RSM et *Haut-Reynolds* ainsi que le coefficient de décharge obtenu pour chaque configuration. Le maillage *Haut/Bas-Reynolds* présente un nombre de mailles deux fois plus important que le maillage *Haut-Reynolds*, mais 15 fois moins important que le maillage EB-RSM. La distribution de y^+ correspondante le long de la paroi est donnée sur la figure (5.14a).

Type	Nombre de mailles	Distance normale à la paroi [mm]	**Coefficient C_D**
Haut-Reynolds	0.25×10^6	2.5	0.690
Haut/Bas Reynolds	0.40×10^6	2.5/0.043	0.646
Bas-Reynolds	7×10^6	0.043	0.626

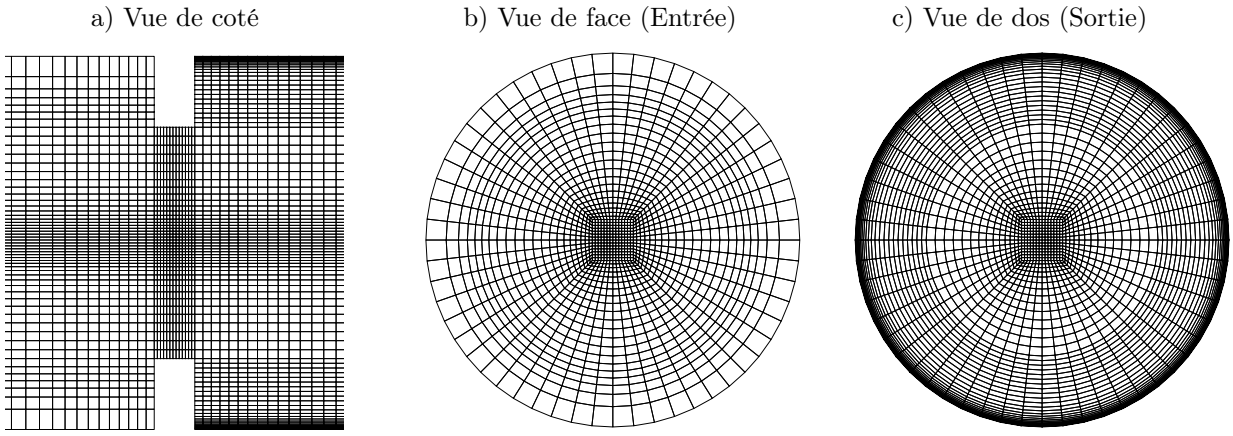


FIGURE 5.13 – Visualisation du maillage *Haut/Bas-Reynolds* dans lequel le raffinement de la paroi en amont du rétrécissement est de l'ordre de $y_P^+ \sim 50$ et le raffinement de la paroi en aval du rétrécissement est de l'ordre de $y_P^+ \sim 1$.

La prédiction du coefficient C_D est bien meilleure sur maillage *Haut/Bas-Reynolds*. En effet, l'erreur commise passe de 10% sur maillage *Haut-Reynolds* à 3.5% sur le nouveau maillage. Cette nette amélioration se constate également sur la prédiction du coefficient de frottement de la figure (5.14b). Le maillage *Haut/Bas Reynolds* permet de distinguer la zone de recirculation secondaire et de mieux capter la recirculation principale (intensité et longueur de réattachement).

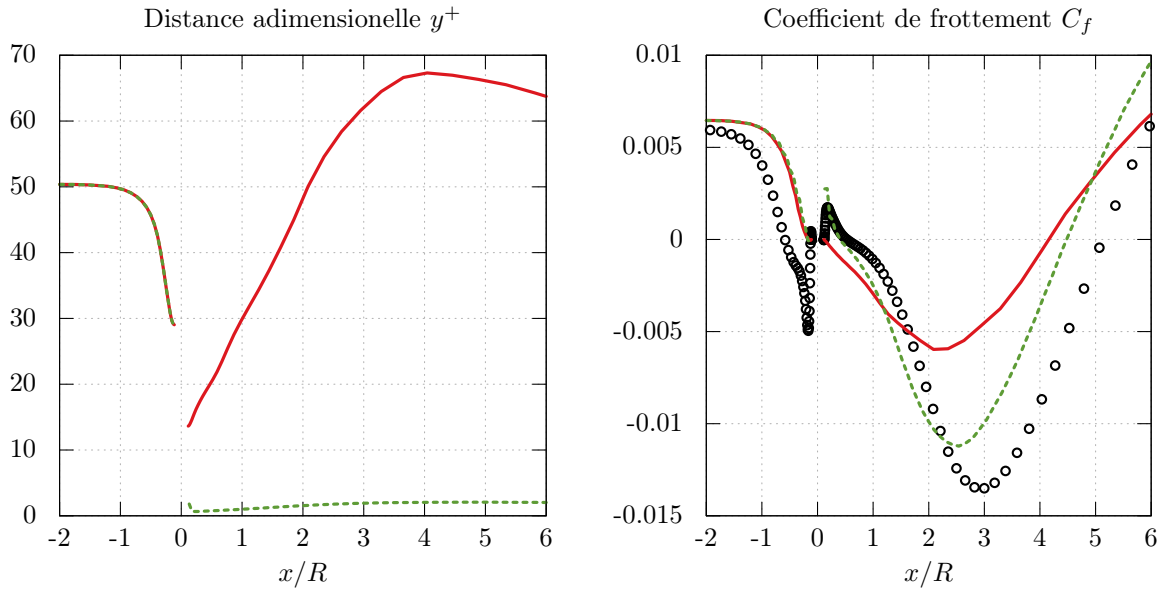


FIGURE 5.14 – Distribution de y^+ et coefficient de frottement le long de la paroi. Légende : Calcul EB-RSM (—o—), approche AAWF sur maillage *Haut-Reynolds* (———) et approche AAWF sur maillage *Haut/Bas-Reynolds* (- - - - - - - -)

Si on met en regard ces résultats avec ceux obtenus par l'inclusion de termes « hors équilibres », on remarque qu'à moindre coût (le temps de calcul supplémentaire reste très petit devant celui d'un calcul EB-RSM) il est possible d'obtenir de bien meilleurs résultats. Plutôt que d'essayer de relaxer les hypothèses de lois de paroi par l'inclusion d'effet de pression et de convection, il est ainsi possible et certainement préférable, si cela est possible, de s'affranchir totalement de ces hypothèses en raffinant localement le maillage.

5.5 Convergence

Pour terminer l'étude, un test de convergence en maillage a été mené de manière à attester de le bonne convergence et de l'adaptativité des modèles proposés. On dispose d'une série de 11 maillages tridimensionnels progressivement raffinés. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau suivant :

Type	Maillage	Nombre de mailles	Distance normale à la paroi [mm]
Haut-Reynolds	A	4.7×10^4	3.3
	B	1.1×10^5	3.2
	C	2.5×10^5	2.5
	D	5.6×10^5	1.95
	E	1.3×10^6	1.5
Buffer	F	1.4×10^6	0.91
	G	1.4×10^6	0.73
	H	1.5×10^6	0.51
Bas-Reynolds	I	1.5×10^6	0.073
	J	3.1×10^6	0.056
	K	7.0×10^6	0.043

La figure (5.15) présente l'évolution des coefficients de décharge C_D et des coefficients de perte de charge singulière ξ en fonction du maillage utilisé pour les approches AAWF, ASWF et lois de paroi standard associées au modèle k-ω-SST. Le maillage utilisé est repéré par sa valeur de y^+ en amont du rétrécissement calculée par le modèle (noté y_a^+ dans la légende). Ces approches sont à mettre en regard des résulats EB-RSM et SSG.

Le modèle EB-RSM a été lancé sur les trois maillages *Bas-Reynolds* ainsi que sur un maillage dont les premières mailles de paroi sont situées en zone tampon. On voit que le modèle converge lorsque le maillage est raffiné. En revanche le caractère non adapté du maillage de type *Buffer* pour ce modèle est caractérisé par une mauvaise prédiction des coefficients d'intérêt. Les traits pointillés associés au modèle EB-RSM sur la figure (5.15) représentent la zone de non validité du modèle EB-RSM.

De la même manière le modèle SSG avec lois de paroi standard est testé sur les 5 maillages *Haut-Reynolds*. On observe une très grande sensibilité du modèle pour les deux coefficients d'intérêt C_D et ξ. Ce modèle a également été testé sur des maillages plus fin. Cette zone de non validité du modèle SSG est, elle aussi, illustrée par des traits pointillés sur la figure (5.15).

Les approches AAWF et ASWF ont été conçues pour s'adapter au type de maillage rencontré. Leur domaine de validité est donc aussi bien la sous-couche visqueuse que la zone logarithmique. Ceci se traduit sur la figure (5.15) par un raccordement continu du comportement *Haut-Reynolds* du modèle SSG et du comportement *Bas-Reynolds* du modèle EB-RSM, tout en évitant les comportements erratiques des modèles SSG et EB-RSM dans leur domaine de non validité respectifs.

Le modèle k-ω-SST présente un comportement similaire. Il a cependant été plus difficile d'obtenir une convergence en adhérence pour ce modèle et des tests sur des maillages plus fin sont à envisager.

Enfin, les résultats issus du modèle SSG associé aux « scalable wall functions » pour des maillages sortant de la zone de validité du modèle SSG sont donnés sur la figure (5.15). Sans surprise, les résultats ne sont pas bons. Ce type de lois de paroi est donc à manipuler avec précaution.

On a par ailleurs également représenté sur la figure (5.15) les résultats obtenus avec un maillage *Haut/Bas Reynolds*. Ceci permet d'illustrer le très bon comportement du modèle AAWF sur des maillages où coexistent des zones grossières et raffinées.

5.6 Conclusion sur le cas du diaphragme

Cette étude a permis de mettre en lumière la grande sensibilité des lois de paroi à deux grandeurs particulièrement importantes pour l'industrie : le coefficient de décharge et le coefficient de perte de charge singulière. Ainsi, suivant que l'on se situe à $y^+ = 20$ ou à $y^+ = 50$ il existe une variation de ces coefficients de 10 à 15%. Il est donc nécessaire d'avoir conscience que la confiance que l'on peut avoir sur les résultats d'un calcul *Haut-Reynolds* sur ce type de configuration est toute relative. Il est nécessaire d'effectuer des études sur plusieurs maillages de manière à examiner la sensibilité du modèle.

L'étude de ce cas à également permis de montrer l'adaptativité des approches AAWF et ASWF proposées dans cette thèse. Les deux approches convergent vers le modèle EB-RSM de référence. Il est d'ailleurs intéressant de noter que dès $y^+ = 10$ on observe une relativement bonne adéquation des modèles avec l'EB-RSM.

Enfin, la possibilité d'utilisation de maillages *Haut* et *Bas-Reynolds* s'est révélée particulièrement efficace puisqu'à moindre coût on observe une amélioration significative de l'estimation de C_D et ξ pour l'approche AAWF. Ceci ouvre des perceptives pour les futures applications industrielles.

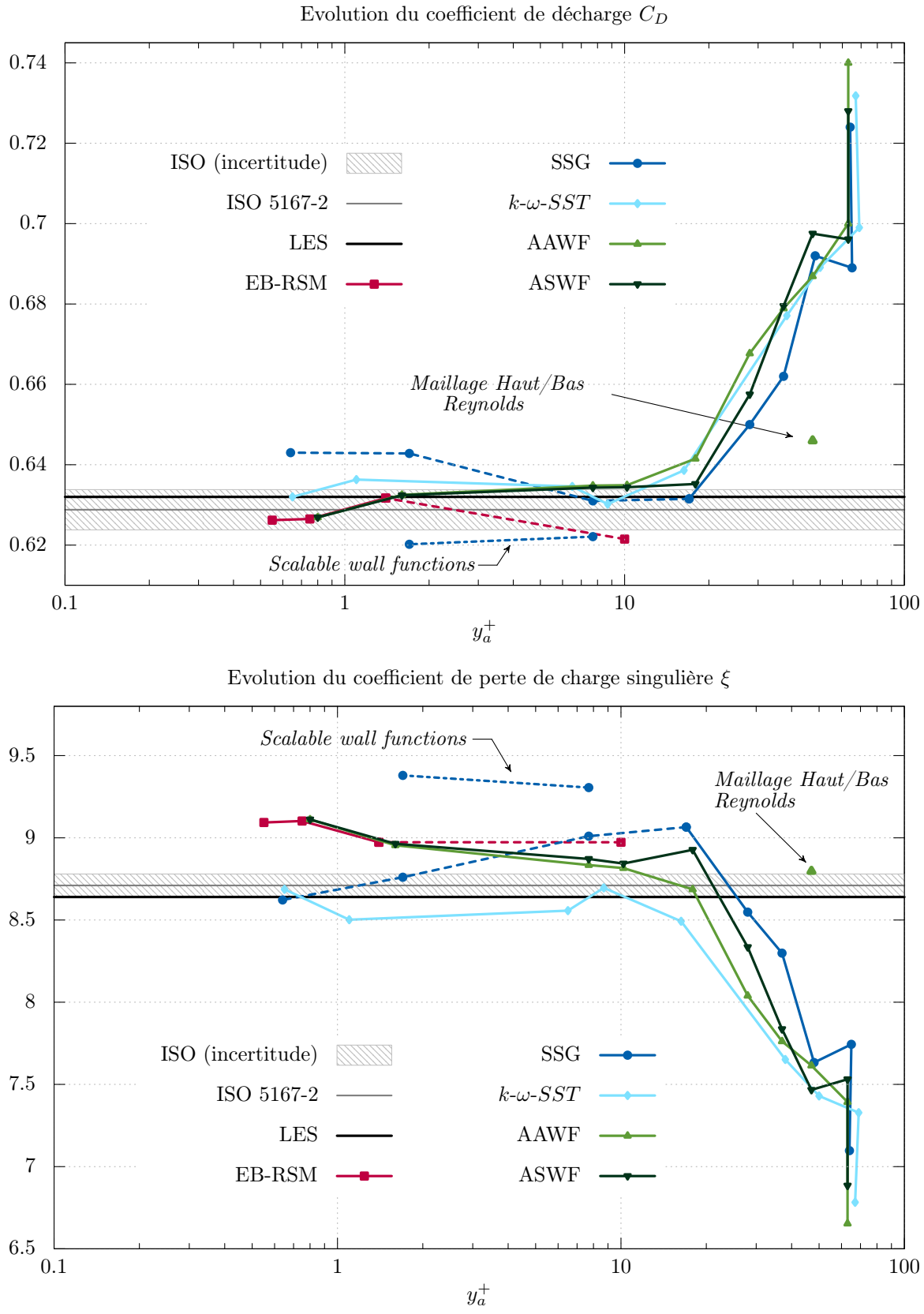


FIGURE 5.15 – ***En haut :*** Évolution du coefficient de décharge C_D pour différents maillages en fonction de y_a^+. ***En bas :*** Évolution du coefficient de perte de charge singulière ξ pour différents maillages en fonction de y_a^+.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Conclusions

L'objectif principal de ces travaux était l'établissement de lois de paroi adaptatives pour le modèle EB-RSM (*Elliptic Blending Reynolds Stress Model*). Une recherche bibliographique relativement exhaustive a permis de mettre en avant le manque de données et de lois dont souffrent les modèles RANS du second ordre. Il existe en effet des stratégies bien documentées concernant les modèles du premier ordre de type k-ε, et le développement de lois de paroi adaptatives pour ce type de modèles a fait l'objet de plusieurs publications durant les dernières années.

Un corollaire de cet axe principal de recherche était dans un premier temps la remise en question puis la tentative d'amélioration des lois de paroi usuelles, notamment concernant la vitesse. En effet, les hypothèses restrictives de couche limite pleinement développée sont dans beaucoup de cas très loin des situations rencontrées en proche paroi dans un contexte industriel.

Trois approches ont été proposées et étudiées dans cette thèse pour répondre à ces problématiques. La première, nommée *AAWF* (*Adaptive Algebraic Wall Function*) propose une méthode originale de détermination des conditions aux limites pour les tensions de Reynolds *via* la résolution d'un système issu d'une modélisation algébrique. La seconde, nommée *ASWF* (*Adaptive Standard Wall Function*) et conceptuellement proche de la première, s'affranchit de la résolution de ce système et modifie les termes sources des équations de transport des tensions de Reynolds. Ces deux approches sont associées à une loi de paroi analytique pour la vitesse, construite à partir d'arguments physiques, et permettant la prise en compte de termes sources, comme le gradient de pression et la convection, l'autorisant à sortir du cadre restrictif de la couche limite pleinement développée. Dans le cas d'un canal plan turbulent pleinement développé, pour lequel ces lois ont été construites, ces deux approches montrent d'excellents résultats. L'étude de cas académiques présentant des écoulements complexes (jet impactant axisymétrique et marche descendante) a mis en avant les bons résultats de ces deux lois, dont le comportement est relativement similaire. L'utilisation d'une loi de vitesse améliorée (avec prise en compte de termes sources) a montré une légère amélioration des résultats dans certains cas, en comparaison d'une loi de vitesse standard.

Par ailleurs, ces deux approches permettent non seulement la convergence en maillage avec l'utilisation de lois de paroi, mais permettent surtout d'assurer des résultats non dégradés par la coexistence de zone *Haut* et *Bas* Reynolds au sein du même maillage. Plus encore, l'étude d'un débitmètre à diaphragme a montré que l'utilisation de maillages *Haut/Bas Reynolds* pouvait constituer une vraie stratégie d'amélioration de l'estimation de certaines grandeurs. Il est en effet tout à fait possible de raffiner le maillage dans les zones pour lesquelles on n'a que peu de

confiance sur l'utilisation de lois de paroi.

La confiance que l'on peut mettre dans le concept de loi de paroi est en effet toute relative. De nombreuses études *a posteriori* menées dans cette thèse ont montré qu'il était illusoire de vouloir reproduire le comportement d'un modèle *Bas-Reynolds* dans certaines zones d'un écoulement. A défaut de pouvoir mieux faire, la loi de paroi fait l'hypothèse que l'écoulement de proche paroi se situe proche des conditions d'une couche limite pleinement développée et il ne faut donc pas essayer de faire prédire à un calcul *Haut-Reynolds* des choses qu'il ne peut intrinsèquement pas voir. La précision des résultats a de ce fait un prix, et les lois de paroi, malgré quelques améliorations significatives, comme la prise en compte de termes sources de gradient de pression, ne peuvent pas faire de miracles. Si on désire obtenir des résultats de confiance, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux limites naturelles des modèles et de raffiner le maillage jusqu'en $y^+ = 1$.

Fort de cette constatation, on propose dans cette thèse une troisième approche, nommée *ANWF* (*Adaptive Numerical Wall Function*). Cette stratégie permet, sous certaines hypothèses, d'intégrer numériquement les équations monodimensionnelles associées à l'EB-RSM sur une sous-grille embarquée sur chaque cellule de proche paroi. Donnant des résultats similaires aux approches AAWF et ASWF sur le cas du canal pleinement développé, cette stratégie s'est montrée nettement supérieure sur le cas du jet impactant axisymétrique. En effet, elle permet la prise en compte naturelle de phénomènes difficiles à intégrer aux lois de paroi standard (tels que le terme instationnaire, le gradient de pression, la convection, ...) tout en s'affranchissant d'une coûteuse résolution tridimensionnelle. On se situe donc à mi-chemin entre les lois de paroi de type AAWF et ASWF et l'intégration de type *Bas-Reynolds*. Cette approche souffre encore de son manque de maturité et son utilisation n'a pu être généralisée à d'autres cas. Des travaux plus poussés mériteraient d'être réalisés pour généraliser ce concept très prometteur.

Perspectives

Les travaux de cette thèse ont permis de mieux comprendre le fonctionnement des lois de paroi et d'en appréhender les avantages mais aussi les limitations. Les trois approches originales proposées dans cette thèse répondent à une problématique industrielle importante liée à l'absence de maîtrise totale des maillages employés. Les approches AAWF et ASWF sont mûres pour une utilisation plus large mais l'approche ANWF, qui n'a pu être testée davantage par manque de temps, mérite de plus amples investigations.

Par ailleurs, cette thèse fournit une première application à la thermique des lois de paroi adaptatives. Cependant, la modélisation des flux thermiques turbulents et de la variance de la température est au cœur des préoccupations de l'industriel qu'est EDF, de par les contraintes qu'ils engendrent lors de situations telles que le choc froid ou la fatigue thermique. Des travaux ont été menés dans ce sens par Frédéric Dehoux [Dehoux 2012] pour une approche *Bas-Reynolds*. Il est maintenant nécessaire d'étendre le travail fait pour la dynamique dans cette thèse à la modélisation avancée des flux thermiques turbulents et de la variance de la température. Cette extension pourra s'appuyer sur de nombreuses données de référence bientôt disponibles, notamment pour les transferts thermiques conjugués, sur des cas de canaux plans (DNS/LES) et de jets impactant (DNS).

Annexe A

Loi de paroi pour la température

De la même manière qu'une loi de paroi sur la vitesse est nécessaire pour prescrire des conditions aux limites adéquates pour les équations de quantité de mouvement, une loi de paroi pour la température est également indispensable. On définit alors la température adimensionnelle par la relation suivante :

$$T^+ = \frac{T - T_w}{T^*} \tag{A.1}$$

où T_w représente la température de la face et T^* l'échelle d'adimensionnement de la température. Celle-ci est généralement définie par la relation :

$$T^* = \frac{\phi_w}{\rho C_p u^*} \tag{A.2}$$

avec ρ la masse volumique du fluide, C_p la capacité thermique, ϕ_w le flux thermique à la paroi et u^* une échelle caractéristique de la vitesse du fluide. Généralement, l'échelle u^* est prise égale à l'échelle construite à l'aide de l'énergie cinétique turbulente u_k (voir chapitre 3, paragraphe 3.2.4), garantissant un niveau de transfert thermique acceptable aux points d'impact par exemple.

Il est tout a fait possible d'étendre les travaux exposés pour la loi de vitesse $\widetilde{U}^+$ (voir chapitre 3, paragraphe 3.2.1) à la température. On propose ainsi la loi suivante pour T^+ :

$$\begin{aligned}
T^+ &= f T_w + (1-f) T_{log} \\
f(y^+) &= \exp\left(-Pr \frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+3}\right) \\
T_w(y^+) &= Pr\, y^+ \\
T_{log}(y^+) &= d(y^+)\left[2.12 \ln(y^+) + \beta(Pr)\right] \\
d(y^+) &= 1 - \exp\left(-Pr^{3/4}\left(\frac{y^+}{y_0}\right)^n\right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

avec les mêmes constantes que pour la loi de vitesse :

$$C_{\overline{uv}} = 1.0674 \cdot 10^{-3} \qquad n = 2.25 \qquad y_0 = 14.5 \tag{A.4}$$

ainsi que la constante de la loi logarithmique de température :

$$\beta(Pr) = \left(3.85 Pr^{1/3} - 1.3\right)^2 + 2.12 \ln(Pr) \tag{A.5}$$

Cette proposition est à comparer à la loi de Howard [Howard 2012]. Celui-ci s'appuie sur les travaux de Reichardt [Reichardt 1951] et propose l'expression suivante pour la température

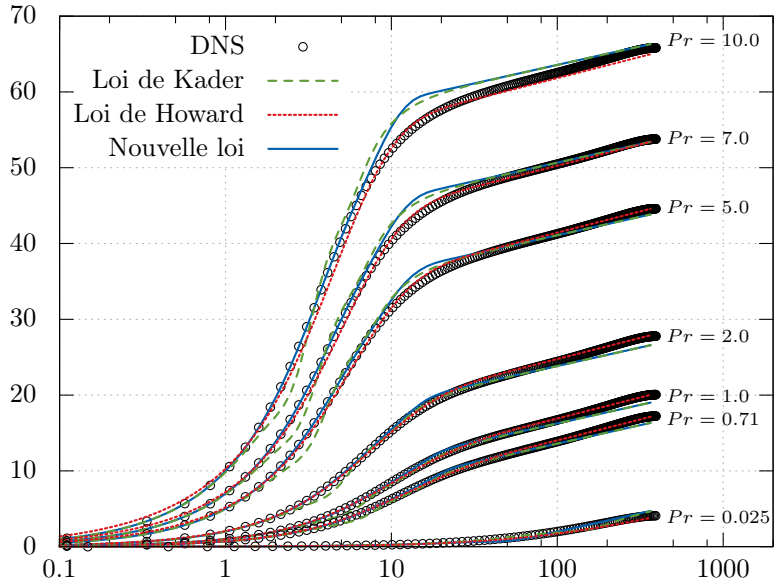


FIGURE A.1 – Comparaison de la loi de Howard [Howard 2012], de Kader [Kader 1981] et de la nouvelle loi (A.3) avec les données DNS de Kawamura et al. à $Re_\tau = 395$ pour différents nombres de Prandtl [Kawamura 1998].

adimensionnée :

$$T^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(1+Pr\kappa y^+\right) + C(Pr)\left[1-\exp\left(-Pr^{0.5}\frac{y^+}{11}\right) - Pr^{0.3}\frac{y^+}{11}\exp\left(-Pr^{0.125}\frac{y^+}{3}\right)\right] \tag{A.6}$$

avec

$$C(Pr) = \left[\left(\sqrt{7.8}+1.3\right)Pr^{0.3} - 1.3\right]^2 \tag{A.7}$$

Il est également important de rappeler les travaux précurseurs de Kader [Kader 1981], qui propose la loi continue suivante pour la température :

$$T^+ = f_1\left[Pry^+\right] + f_2\left[2.12\ln(y^+) + \beta(Pr)\right] \tag{A.8}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 &=& \exp(-\Gamma) \\ f_2 &=& \exp(-1/\Gamma) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \Gamma(y^+) = \frac{0.01y^{+4}}{1+5y^+} \tag{A.9}$$

Une illustration de ces trois lois est donnée en figure (A.1) pour un nombre de Reynolds turbulent $Re_\tau = 395$ et pour $Pr \in \{0.025, 0.71, 1, 2, 5, 7, 10\}$. Ce lois sont comparées aux données DNS de Kawamura et al. [Kawamura 1998]. On notera que pour des nombres de Prandtl modérés (~ 1), la nouvelle loi proposée ainsi que la loi de Howard se comportent de manière excellente et montrent des résultats supérieurs à l'approche de Kader en zone tampon. Pour de faibles nombres de Prandtl, ces conclusions restent vraies mais lorsque le nombre de Prandtl augmente on remarque la légère surestimation de température prédite par la nouvelle approche. La loi de Howard se montre globalement supérieure dans cette gamme de nombre de Prandtl.

Annexe B

Formulation de l'EB-RSM

La fermeture complète des équations de transport de l'EB-RSM (*Elliptic Blending Reynolds Stress Model*) pour les tensions de Reynolds est donné par :

- Échelles intégrales de la turbulence :
  - Échelle de longueur :
$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}; C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{B.1}$$
  - Échelle de temps :
$$T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}; C_T\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right) \tag{B.2}$$
- Coefficient de pondération elliptique α :
$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1 \tag{B.3}$$
  avec $\alpha(y=0) = 0$.
- Vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$:
$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\alpha}{||\nabla\alpha||} \tag{B.4}$$
- Taux de dissipation ε_{ij} :
$$\varepsilon_{ij} = (1-\alpha^3)\varepsilon_{ij}^w + \alpha^3\varepsilon_{ij}^h \tag{B.5}$$
  - Contribution homogène (isotrope) :
$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{B.6}$$
  - Contribution pariétale :
$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon \tag{B.7}$$
  - Le taux de dissipation $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}$ est solution de l'équation de transport :
$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + U_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{C'_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{C_s}{\sigma_\varepsilon}\overline{u_k u_l}T\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) + \nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_k\partial x_k} \tag{B.8}$$
  avec $\varepsilon(y=0) = 2\nu\lim_{y\to 0}\frac{k}{y^2}$
- Corrélation vitesse-gradient de pression ϕ_{ij}^* :
$$\phi_{ij}^* = (1-\alpha^3)\phi_{ij}^w + \alpha^3\phi_{ij}^h \tag{B.9}$$

— Contribution homogène (isotrope) :

$$\begin{aligned}\phi_{ij}^{h} = &-(C_1\varepsilon + C_1^* P)b_{ij} + \left(C_3 - C_3^*\sqrt{b_{kl}b_{kl}}\right)kS_{ij} \\ &+ C_4 k\left(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{kl}S_{kl}\delta_{ij}\right) \\ &+ C_5 k\left(b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}\right)\end{aligned} \tag{B.10}$$

— Contribution pariétale :

$$\phi_{ij}^{w} = -5\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_i u_k}n_j n_k + \overline{u_j u_k}n_i n_k - \frac{1}{2}\overline{u_k u_l}n_k n_l(n_i n_j + \delta_{ij})\right) \tag{B.11}$$

Les conditions aux limites de paroi pour la vitesse moyenne et les tensions de Reynolds sont les conditions d'adhérence. Par ailleurs les différentes constantes utilisées dans le modèle sont :

$$\begin{gathered}C_1 = 3.4, \quad C_1^* = 1.8, \quad C_3 = 0.8, \quad C_3^* = 1.3, \quad C_4 = 1.25, \quad C_5 = 0.4, \\ C_L = 0.125, \quad C_\eta = 80, \quad C_T = 6, \\ C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1}\left(1 + A_1^P(1-\alpha^3)\frac{P}{\varepsilon}\right), \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad A_1^P = 0.1, \\ C_{\varepsilon 1} = 1.83, \quad \sigma_\varepsilon = 1.15, \quad C_S = 0.22\end{gathered} \tag{B.12}$$

Annexe C

Introduction de la contrainte de réalisabilité dans l'EB-RSM

L'étude du jet impactant axisymétrique du chapitre 4 a montré une nette surestimation du nombre de Nusselt au niveau du point d'impact pour le modèle EB-RSM. Ce problème est bien connu pour les modèles du premier ordre et on a montré qu'il existe différentes stratégies pour pallier ce problème. La contrainte de réalisabilité introduite par Durbin [Durbin 1996] pour le modèle $\overline{v^2}$-f avait originellement pour but de contrôler la production au niveau des points d'impact en minimisant l'échelle intégrale de temps intervenant dans l'expression de la viscosité turbulente :

$$T_h = \min\left(\frac{k}{\varepsilon},\ \frac{ak}{\sqrt{6}C_\mu|S|\overline{v^2}}\right) \tag{C.1}$$

Ainsi la production n'évolue plus de manière quadratique avec le gradient de vitesse aux points d'impact comme le suggère l'analyse du chapitre 4 paragraphe 4.1.2 mais de manière linéaire.

La production étant calculée de manière exacte avec les modèles RANS du second ordre il n'est pas possible de modifier celle-ci. En revanche, la détermination du taux de dissipation ε est fondée sur plus d'empirisme. On propose donc d'introduire la contrainte de réalisabilité de Durbin au sein de l'échelle intégrale de temps du modèle EB-RSM, de telle sorte que :

$$T = \max\left(T_h,\ C_T\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right) \tag{C.2}$$

Cette échelle intervenant directement dans l'équation de transport du taux de dissipation ε, on espère ainsi augmenter localement ε et ainsi minimiser la production de turbulence occasionnant la surestimation du nombre de Nusselt au point d'impact d'un jet axisymétrique. On définit T_h par l'expression suivante :

$$T_h = \min\left(\frac{k}{\varepsilon},\ \frac{ak}{\sqrt{6}C_\mu|S|R_{ij}n_in_j}\right) \tag{C.3}$$

où $R_{ij}n_in_j$ représente la composante normale à la paroi du tenseur de Reynolds avec n_k la k-ième composante du vecteur normal à la paroi (déterminé par la relation (B.4)). De manière à garder un modèle pleinement consistant cette contrainte est étendue à l'échelle de longueur intégrale. On redéfinit ainsi l'échelle L suivant la relation :

$$L = C_L\max\left(L_h,\ C_\eta\frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{C.4}$$

avec

$$L_h = \min\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon},\ \frac{k^{3/2}}{\sqrt{6}C_\mu|S|R_{ij}n_in_j}\right) \tag{C.5}$$

Un calcul en adhérence avec le modèle EB-RSM a ainsi été réalisé sur le cas du jet en impact. La figure (C.1) compare le nombre de Nusselt issu d'un calcul EB-RSM incluant la contrainte de réalisibilité de Durbin dans les échelles intégrales L et T avec le calcul EB-RSM standard du chapitre 4. On rappelle également les valeurs issues de l'expérience de Baughn et Shimizu [Baughn 1989] ainsi que les profils issus des calculs k-ω-SST et Bl-v^2-k.

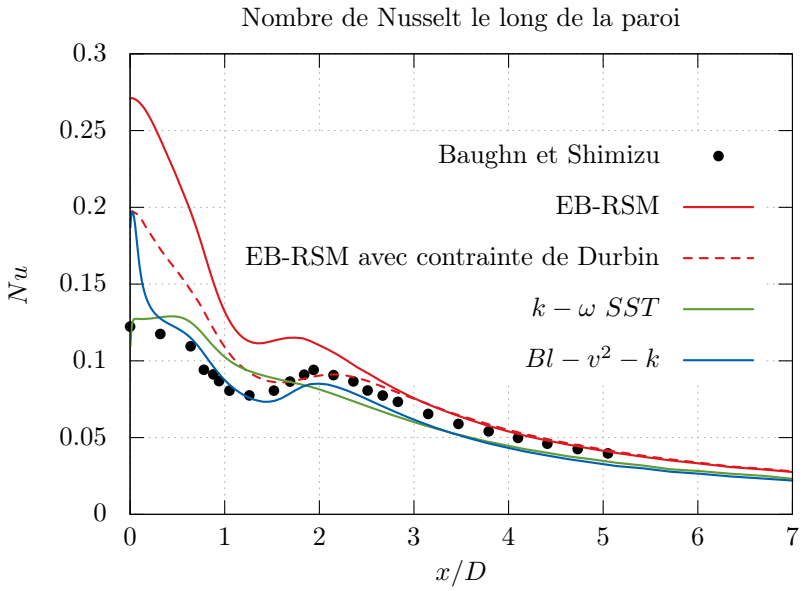


FIGURE C.1 – Nombre de Nusselt le long de la paroi pour différents modèles de turbulence *Bas-Reynolds* en comparaison des données expérimentales.

On observe bien un diminution significative du nombre de Nusselt au niveau du point d'impact. Par ailleurs on notera que la modification des échelles de temps et de longueur ne modifie pas le comportement de l'EB-RSM lors du redéveloppent de la couche limite. L'effet de cette contrainte est donc bénéfique au niveau du point d'impact. On observe cependant toujours une nette surestimation du nombre de Nusselt. De la turbulence est sans doute générée en excès dans cette zone, entraînant une augmentation des transferts thermiques. Rappelons que le long de l'axe de symétrie, on peut écrire la production d'énergie cinétique turbulente :

$$P_k = -(R_{22} - R_{11})\frac{\partial V}{\partial y} \tag{C.6}$$

Il est alors intéressant d'examiner les profils des grandeurs mises en jeu dans cette équation. La figure (C.2) illustre les profils de vitesse, de R_{11}, R_{22} et P_k en proche paroi le long de l'axe central de symétrie. On remarque immédiatement la forte surproduction d'énergie turbulente du modèle EB-RSM standard. Celle-ci est directement corrélée à la surestimation de la composante normale du tenseur de Reynolds R_{22}. L'effet de l'introduction de la contrainte de réalisabilité de Durbin dans T et L se manifeste par une diminution significative de la production, elle même due à une diminution de l'intensité de R_{11} et R_{22}.

Cependant, on note que dans tous les cas on a quand même $R_{22} >> R_{11}$ et on génère ainsi trop de turbulence proche du point d'impact. C'est pour cette raison que malgré les mo-

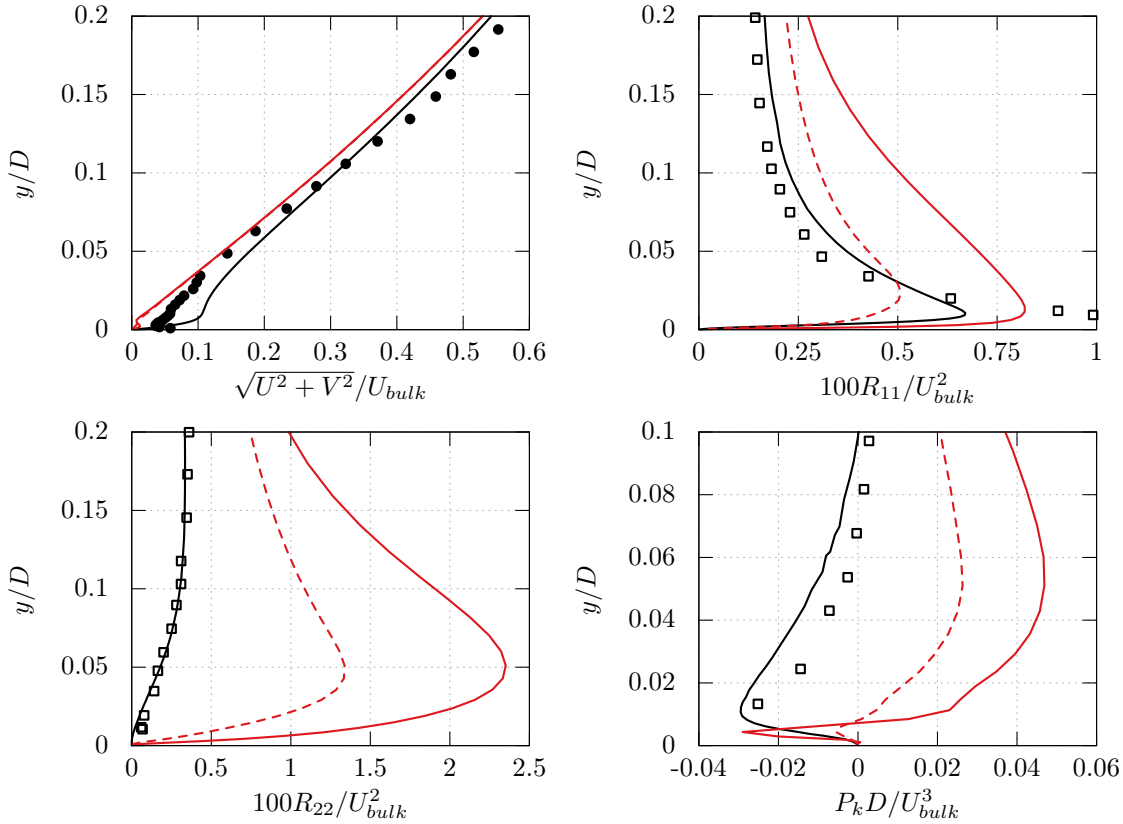


FIGURE C.2 – Profil de vitesse, R_{11}, R_{22} et P_k en proche paroi le long de l'axe central de symétrie pour le cas d'un jet impactant. *Légende* : EB-RSM standard (———), EB-RSM avec modification des échelles L et T (- - - - -), données LES de Hadziabdić et Hanjalić [Hadziabdić 2008] (———), données expérimentales de Geers et al. [Geers 2004] (▫), données expérimentales de Baughn et Shimizu [Baughn 1989] (•)

difications apportées à l'EB-RSM on observe toujours une nette surestimation du nombre de Nusselt au point d'impact. Des travaux sont à mener dans le futur pour comprendre et corriger ce phénomène. On peut cependant affirmer qu'il ne s'agit probablement pas d'un problème de modélisation de la proche paroi mais plutôt d'un problème dans la modélisation des termes de redistribution.

Annexe D

Présentation de *Code_Saturne*

Code_Saturne est un code de mécanique des fluides généraliste pouvant simuler des écoulements laminaires ou turbulents, incompressibles ou faiblement dilatables, sur des maillages structurés ou non structurés (voir Archambeau et al. [Archambeau 2004]) développé par EDF. Ce code, « *open source* », est disponible à l'adresse suivante `http://code-saturne.org/`. Le code est massivement parallèle et dispose de modules permettant la prise en compte de physiques particulières. On distingue ainsi, entre autres, un module atmosphérique, un module de magnétohydrodynamique, un module de turbomachine ou encore un module d'ALE pour l'interaction fluide structure, etc.

On se borne ici à une présentation brève du module de base de *Code_Saturne* ainsi que de la discrétisation utilisée pour la résolution des équations. Le code résout les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible avec les équations éventuelles des modèles de turbulence et permet également la résolution d'équations de transport de scalaires comme la température où la concentration d'une espèce.

Un θ-schéma est utilisé pour l'intégration temporelle. Celle-ci est associée à une méthode de type prédiction/correction et la méthode des volumes finis colocalisés pour la discrétisation spatiale.

Code_Saturne résout les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement d'un fluide Newtonien incompressible sous la forme :

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\mathrm{div}}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) = -\underline{\mathrm{grad}} p + \underline{\mathrm{div}}\left(\mu_e \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{u}\right) - \underline{\mathrm{div}}(\rho \underline{\underline{R}}) + \underline{S} \tag{D.1}$$

$$\underline{\mathrm{div}}(\underline{u}) = 0 \tag{D.2}$$

On a dans ces équations :

- $\mu_e = \mu + \rho \nu_t$ pour les modèles à viscosité turbulente/viscosité de sous-maille et $\mu_e = \mu$ dans le cas laminaire ou pour les modèles RANS du second ordre.
- $\underline{\underline{R}} = 0$ dans le cas laminaire ou pour les modèles à viscosité turbulente/de sous-maille et $\underline{\underline{R}}$ est le tenseur de Reynolds dans le cas des modèles RANS du second ordre.
- $\underline{S}$ représente les termes sources éventuelles tels que terme de flottabilité, force de Coriolis, etc.

Sont également résolut les équations de transport des variables turbulentes ainsi que les éventuelles équations de transport d'un scalaire ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\mathrm{div}}(\phi \underline{u}) = \underline{\mathrm{div}}(\kappa_e \underline{\mathrm{grad}} \phi) + S_\phi \tag{D.3}$$

où κ_e peut également contenir un terme turbulent pour la modélisation des flux turbulents et un terme moléculaire et S_ϕ représente les éventuelles termes sources de l'équation.

Intégration temporelle

La marche en temps de l'algorithme est basée sur la méthode de prédiction-correction (Versteeg & Malalasekara [Versteeg 1995]). A chaque itération, on réalise d'abord une étape de prédiction à l'aide d'un θ-schéma. La prédiction de la vitesse, notée $\widetilde{\underline{u}}^{(n+1)}$, est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\rho\frac{\widetilde{\underline{u}}^{(n+1)}-\underline{u}^{(n)}}{\Delta t}+\underline{\mathrm{div}}\left(\widetilde{\underline{u}}^{(n+\theta)}\otimes\rho\underline{u}^{(n)}\right)-\underline{\mathrm{div}}\left(\mu_e\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\widetilde{\underline{u}}^{(n+\theta)}\right)=-\underline{\mathrm{grad}}p^{(n+\theta-1)}+\underline{A}^{n+\theta_S} \quad \text{(D.4)}$$

avec

$$\underline{A}=-\underline{\mathrm{div}}(\rho\underline{\underline{R}})+\underline{S} \quad \text{(D.5)}$$

$$\widetilde{\underline{u}}^{(n+\theta)}=\theta\widetilde{\underline{u}}^{(n+1)}+(1-\theta)\,\underline{u}^{(n)} \quad \text{(D.6)}$$

et l'exposant $n+\theta_S$ indiquant une procédure d'extrapolation des termes sources non détaillée ici. Le champ prédit n'est cependant pas à divergence nulle. La seconde étape consiste alors à calculer l'incrément $(\delta\underline{u})^{(n+1)}$ tel que $\underline{u}\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\underline{u}}+\delta\underline{u}$ satisfasse la contrainte de continuité (équation (D.2)). Le bilan de quantité de mouvement permet alors de voir qu'après l'étape de prédiction :

$$\rho(\delta\underline{u})^{(n+1)}\approx-\Delta t\underline{\mathrm{grad}}(\delta p)^{(n+1)} \qquad \text{avec} \qquad (\delta p)^{(n+1)}=p^{(n+1)}-p^{(n)} \quad \text{(D.7)}$$

En prenant la divergence de cette dernière équation, on résout finalement à l'étape de correction l'équation de Poisson suivante sur l'incrément de pression :

$$\underline{\mathrm{div}}\left(\Delta t\underline{\mathrm{grad}}(\delta p)^{(n+1)}\right)=\underline{\mathrm{div}}\left(\rho\widetilde{\underline{u}}^{(n+1)}\right) \quad \text{(D.8)}$$

On peut ainsi par la suite déterminer $p^{(n+1)}$ puis $\underline{u}^{(n+1)}$ avec l'équation (D.7).

Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est de type volumes finis colocalisés (vitesse, pression ainsi que tous les scalaires résolus aux mêmes points). La valeur discrète ϕ_i de la variable ϕ au centre de gravité I d'une maille Ω_i représente :

$$\phi_i=\frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i}\phi dV \quad \text{(D.9)}$$

La face commune à deux cellules Ω_i et Ω_j est notée F_{ij} et son centre de gravité F. La valeur discrète de ϕ en F, notée ϕ_{ij} représente un approximation de :

$$\phi_{ij}=\frac{1}{|F_{ij}|}\int_{F_{ij}}\phi dS \quad \text{(D.10)}$$

On note également O l'intersection entre la droite (IJ) et la face F_{ij} ainsi que I' (resp. J') le projeté orthogonal de I (resp. J) sur la normale à F_{ij}. Cette normale est dirigée par le vecteur unitaire $\underline{n}_{ij}$ extérieur à Ω_i. Ces notations sont récapitulées dans la figure (D.1).

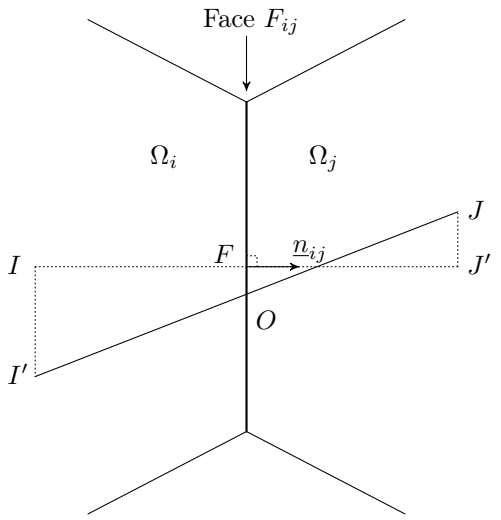


FIGURE D.1 – Notations des grandeurs géométriques au sein d'une cellule de calcul.

Phase de prédiction

Le théorème de la divergence permet d'écrire la discrétisation spatiale suivante pour l'équation de prédiction (D.4) :

$$\frac{\rho|\Omega_i|}{\Delta t}\left(\widetilde{\underline{u}}_i^{(n+1)} - \underline{u}_i^{(n)}\right) + \sum_{j\in V(i)} \widetilde{\underline{u}}_{ij}^{(n+\theta)} \left(\rho \underline{u}\cdot\underline{n}\right)_{ij}^{(n)} |F_{ij}| - \sum_{j\in V(i)} \left(\mu_e \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\widetilde{\underline{u}}\cdot\underline{n}\right)_{ij}^{(n+\theta)} |F_{ij}| = -|\Omega_i|\underline{G}_i(p)^{(n+\theta-1)} + |\Omega_i|\underline{A}_i^n \tag{D.11}$$

où $V(i)$ représente l'ensemble des cellules voisines de la cellule i. L'opérateur gradient G au centre de la cellule i pour une variable quelconque ϕ s'écrit :

$$\underline{G}_i(\phi) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} \underline{\mathrm{grad}}\phi dV = \frac{1}{|\Omega_i|}\sum_{j\in V(i)} \int_{F_{ij}} \phi \underline{n} dS \tag{D.12}$$

et peut également être discrétisé comme suit :

$$\underline{G}_i(\phi) = \frac{1}{|\Omega_i|}\sum_{j\in V(i)} \mathcal{I}_{ij}(\phi)|F_{ij}|\underline{n}_{ij} dS \tag{D.13}$$

avec $\mathcal{I}_{ij}(\phi)$ un opérateur d'interpolation pour la variable ϕ au centre de gravité des faces. Cet opérateur est d'ordre deux et exprimé à l'aide de l'opérateur gradient lui même, de manière à prendre en compte les maillages non orthogonaux dans lesquels $I \neq I'$:

$$\mathcal{I}_{ij}(\phi) = \alpha_{ij}\phi_i + (1-\alpha_{ij})\phi_j + \frac{1}{2}\underline{OF}\cdot\left(\underline{G}_i(\phi) + \underline{G}_j(\phi)\right) \tag{D.14}$$

avec

$$\alpha_{ij} = \frac{\underline{FJ'}\cdot\underline{n}_{ij}}{\underline{I'J'}\cdot\underline{n}_{ij}} \tag{D.15}$$

La discrétisation de l'équation (D.13) est donc implicite. En pratique un processus itératif est utilisé pour inverser cette équation.

Dans la partie convective de l'équation (D.11), le flux de masse $(\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)}$ est connu de l'itération précédente. Le terme $\widetilde{\underline{u}}_{ij}^{(n+\theta)}$ doit lui être évalué au centre de chaque face. Plusieurs possibilités sont offertes en terme de schéma pour l'évaluation d'une valeur discrète ϕ_{ij} au centre des faces :

— Schéma « upwind » (ordre 1) :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^{u} = \phi_{f_{ij}} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi_{f_{ij}} = \phi_i & \text{si} \quad (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} \geq 0 \\ \phi_{f_{ij}} = \phi_j & \text{si} \quad (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n)} < 0 \end{cases} \tag{D.16}$$

— Schéma « centré » (ordre 2)

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^{c} = \mathcal{I}_{ij}(\phi) \tag{D.17}$$

— Schéma pondéré (pondération entre schémas d'ordre 1 et 2) :

$$\phi_{ij} = \beta \phi_{ij}^{u} + (1-\beta)\phi_{ij}^{c} \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < 1 \tag{D.18}$$

Dans la partie diffusive de l'équation (D.11), les flux sont approchés aux faces par la relation :

$$\left(\nu_e \underline{\underline{\text{grad}}} \widetilde{\underline{u}} \cdot \underline{n}\right)_{ij} = \mathcal{G}_{n,ij}(\widetilde{\underline{u}}) \tag{D.19}$$

avec $\mathcal{G}_{n,ij}$ l'opérateur de gradient normal aux faces discrétisé par :

$$\mathcal{G}_{n,ij}(\phi) = \frac{\phi_{j'} - \phi_{i'}}{\underline{IJ} \cdot \underline{n}_{ij}} \tag{D.20}$$

et $\phi_{i'}$ (resp. $\phi_{j'}$) l'interpolation d'ordre 1 de ϕ_i (resp. ϕ_j) en I' (resp. J') suivant la formule :

$$\phi_{i'} = \phi_i + \underline{II'} \cdot \underline{G}_i(\phi) \tag{D.21}$$

Phase de correction

L'équation (D.8) peut se discrétiser de la façon suivante :

$$\Delta t \sum_{j \in V(i)} \left(\underline{\text{grad}}(\delta p) \cdot \underline{n}\right)_{ij}^{(n+1)} |F_{ij}| = \sum_{j \in V(i)} (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij}^{(n+1)} |F_{ij}| \tag{D.22}$$

Le membre de gauche est exprimé à l'aide de l'opérateur $\mathcal{G}_{n,ij}$. Dans le membre de droite on a :

$$(\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij} = (\rho \underline{u} \cdot \underline{n})_{ij} + \mathcal{F}_{ij} \tag{D.23}$$

où $\mathcal{F}_{ij}$ est un terme appelé filtre de Rhie et Chow [Rhie 1983] et permettant d'éviter le découplement de la vitesse et de la pression pouvant amener à des oscillations non physiques. Pour plus de détails sur ce filtre on pourra se référer à la documentation théorique de *Code_Saturne* [*Code_Saturne* 2015].

Annexe E

Publications

E.1 Adaptive Wall Treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress Model

Publication présentée au congrès 10^{th} *Engineering, Turbulence, Modelling and Measurments (ETMM) conference (16-21 septembre 2014, Marbella, Espagne)*

ADAPTIVE WALL TREATMENT FOR THE ELLIPTIC BLENDING REYNOLDS STRESS MODEL

***Jean-Francois Wald*[1,2], *Sofiane Benhamadouche*[1] *and Rémi Manceau*[2]**

[1] ***EDF R&D, Fluid Mechanics, Energy and Environment Dept., 6 quai Watier, 78401 Chatou, France***

[2] ***Departement of applied mathematics, CNRS-University of Pau-Inria, IPRA, avenue de l'université, 64013 Pau, France***

jean-francois.wald@edf.fr

1 Introduction

Wall functions are widely used in CFD in order to significantly reduce the computational cost compared to so called Low-Reynolds number formulations. They are, however, particularly restrictive in terms of meshing as they require the first calculation point to fall into the logarithmic region. Industrial simulations of internal flows, such as the ones encountered in nuclear applications, are particularly challenging due to their inherent complexity that makes it difficult to satisfy those conditions everywhere.

Several proposals were formulated in the literature that aim at improving and generalizing wall treatments. Chieng and Launder [1] improve the classical wall function strategy by accounting for a linear variation of the shear stress and the turbulent kinetic energy in the first near wall cell. A more general formulation of this strategy was developed by Craft *et al.* [2], who derive Wall Functions (WFs) on the basis of an assumed eddy viscosity distribution through this cell. A refined approach, also due to Craft *et al.* [3], proposes the integration all the simplified transport equations over a fine embedded subgrid within the first cell. Kalitzin [4] developed an adaptive strategy based on curve-fitting of the variables using splines.

Another strategy, widely used in CFD, consists in using a blending of the wall-limiting and fully turbulent expressions for various flow variables. The blending functions ensure a smooth transition between the two layers and provide accurate conditions for the first cell even if it lies in the buffer region. Esch and Menter [5] proposed a quadratic blending of the wall shear stress to provide adequate boundary conditions for the $k-\omega$ model. Popovac and Hanjalić [6] developed a compound wall treatment (CWT) that reduces to either the "Integration to the wall" (ItW) or the "Wall function" approach, depending on the location of the first near-wall cell. Basara [7], followed by Rahman and Siikonen [8], used the same blending method and attempted to improve the prediction of the production and the dissipation rate.

The present study focuses on a new algebraic adaptive wall treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress Model (EB-RSM) by extending some of those recently proposed approaches. Blending functions that ensure a correct asymptotic behaviour at the wall for the velocity and the turbulent variables are introduced and boundary conditions are prescribed at the first near-wall cell. The approach shows very promising results on fully developed channel flows, comparable to what is obtained using a numerical integration down to the wall.

2 The EB-RSM for ItW

Adaptive Wall Treatment requires the use of a turbulence model integrable down to the wall. As attention is directed towards Second Moment Closures, the EB-RSM [9] is chosen. It is a robust model able to reproduce the near-wall physics. The transport equations for the turbulent variables are

$$\frac{D\overline{u_iu_j}}{Dt} = P_{ij} + \Phi^*_{ij} - \varepsilon_{ij} + D^\nu_{ij} + D^T_{ij}, \quad (1)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C^*_{\varepsilon_1}P - C_{\varepsilon_2}\varepsilon}{\tau} + D^\nu_\varepsilon + D^T_\varepsilon, \quad (2)$$

where P_{ij} is the exact production term, the turbulent diffusion term is expressed using the Daly-Harlow model and the redistribution Φ^*_{ij} and dissipation ε_{ij} terms are expressed as a blending of models valid in the fully turbulent and the wall regions,

$$\Phi^*_{ij} = (1-\alpha^3)\Phi^h_{ij} + \alpha^3\Phi^w_{ij}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1-\alpha^3)\frac{\overline{u_iu_j}}{k}\varepsilon + \frac{2}{3}\alpha^3\varepsilon\delta_{ij}, \quad (4)$$

where the superscript h denotes the homogeneous part, taken from Speziale, Sarkar and Gatski [10] and w the wall part, as proposed by Manceau and Hanjalić [9]. The elliptic equation solved for the blending parameter α is

$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1. \quad (5)$$

Finally, the integral time scale and length scale are

given by

$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right),$$
$$\tau = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right). \quad (6)$$

The so-called E term in the ε equation, proposed by Jones and Launder (1972) and originally introduced used in the EB-RSM [9], is replaced, for numerical stability reasons, by a variable $C^*_{\varepsilon_1}$ coefficient of the form [17]

$$C^*_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1}\left(1 + A_1(1-\alpha^3)\frac{P}{\varepsilon}\right). \quad (7)$$

The original values of the coefficients of the SSG are used. Other coefficients are

C_η	C_L	C_T	A_1	C_{ε_2}	C_{ε_1}
80.0	0.122	6.0	0.1	1.83	1.44

3 Adaptive Algebraic Wall Treatment

Velocity U

Low-Reynolds number formulations are relevant as long as the first node is located in the viscous sublayer ($y^+ \leq 5$). However, when this point is in the fully turbulent region ($y^+ \geq 30$), natural boundary conditions become inappropriate and the use of wall functions is unavoidable. The principle of Adaptive Wall Treatment (AWT) is to provide wall boundary conditions valid whatever the first node location [6] [8]. Continuous laws for all the variables are then necessary and can be obtained, for example, by blending the viscous region (noted F_w) and the fully turbulent behaviour (F_{log}).

Many analytical laws of the wall valid throughout the whole boundary layer were proposed, starting from the pioneering work of Reichardt [11] and Spalding [12]. Although they fit perfectly experimental data, none of them would be applicable to non equilibrium flows. More recently Popovac and Hanjalić proposed such a law using Kader's blending [6].

The natural boundary conditions at a wall $u = v = 0$ and $\partial v/\partial y = 0$ lead to the asymptotic behaviour for u and v

$$\begin{cases} u = & a_1 y + a_2 y^2 + O(y^3) \\ v = & b_2 y^2 + O(y^3) \end{cases}$$

Without any hypothesis, the asymptotic behaviour of $\overline{uv}^+$ can then be expressed as $\overline{uv}^+ = \overline{a_1 b_2} y^{+3} + O(y^{+4})$. Since $\overline{uv}$ is virtually independent of the friction Reynolds number Re_τ, as confirmed by available channel flow DNS data [13, 14], $\overline{a_1 b_2}$ is assigned hereafter the constant value $\overline{a_1 b_2} = C_{\overline{uv}} = 1.0674 \times 10^{-3}$.

Introducing the expansion of $\overline{uv}^+$ in the streamwise momentum equation of a 1D channel flow at equilibrium leads to the asymptotic behaviour for U^+

$$U^+ = y^+ - \underbrace{\frac{y^{+2}}{2Re_\tau}}_{\Delta_2(y^+)} - \underbrace{\frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+4}}_{\Delta_4(y^+)} + O(y^{+5}). \quad (8)$$

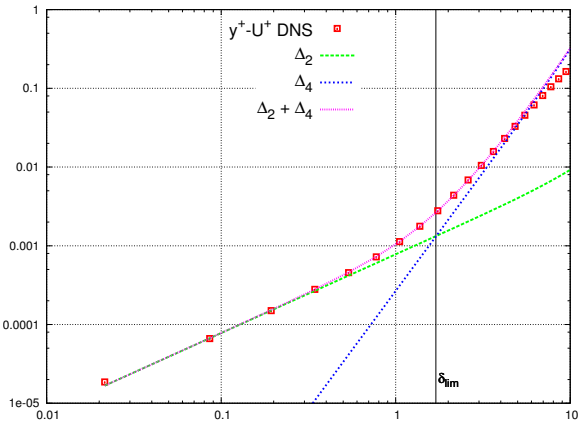


Figure 1: Comparison of the terms of the asymptotic development of U^+,DNS at $Re_\tau = 640$ [15]

Here, a twofold objective is aimed at:

(i) deriving a near-wall law whose validity extends further to the wall than the leading order approximation $U^+ = y^+$;

(ii) proposing a "universal" law for U^+, i.e., preserving its independence of the friction Reynolds number.

It then important to compare the weight of the higher order terms (Δ_2 and Δ_4) in equation (8).

The profile of $(U^+ - y^+)$ is extracted from the DNS data of Kasagi [15]. This data, normalized by U^+, represent the relative contribution of the nonlinear terms in the Taylor series expansion of U^+ at the wall. Fig. 1 shows that this contribution is negligible for $y+ < 5$, such that $U^+ = y^+$ is a good approximation. Beyond $y^+ = 5$, as long as $\Delta_2 + \Delta_4$ is close to $y^+ - U^+$, higher order terms ($O(y^+5)$) remain negligible. An interesting feature is that, the separate contributions of Δ_2 and Δ_4 to $y^+ - U^+$ are dominant in different regions: below $y^+ = \delta_{lim}$, the term of order 2, Δ_2, is dominant, but in this region, $y^+ - U^+$ is very small (the linear approximation is accurate), such that the contribution of Δ_2 to U^+ is below 0.3%; above $y^+ = \delta_{lim}$, Δ_4 is the dominant nonlinear term, and gradually becomes significant beyond $y^+ = 5$.

Two conclusions can be drawn from this analysis:

(i) Since it represents a minor part of U^+ when $y^+ < \delta_{lim}$ and is dominated by Δ_4 when $y^+ > \delta_{lim}$, the term Δ_2, which depends on Re_τ, can be neglected everywhere.

(ii) Taking into account the term Δ_4 extends the validity of the polynomial approximation of U^+ without introducing a dependence in Re_τ.

Consequently, the following blended law is proposed:

$$\begin{aligned} U^+ &= f_u F_w + (1-f_u) F_{log}, \\ f_u(y^+) &= \exp\left(-\frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+3}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

where $F_w(y^+) = y^+$. The introduction of the term Δ_4/y^+ in the exponential function yields the asymptotic behaviour of U^+ at the wall

$$U^+ = y^+ - \frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+4} + O(y^{+5}), \tag{10}$$

which is Eq. (8) in which the Reynolds number dependent term, Δ_2, is neglected.

The blending function being defined, one could be tempted to use for F_{log} the standard log law. However, Eq. (9) can be recast as

$$f_u = \frac{U^+ - F_{log}}{F_w - F_{log}} \tag{11}$$

Since they cross at $y^+ = 11$, using the linear law for F_w and the standard log law for F_{log} requires the use of a blending function f_u singular at this location. This problem can be circumvented by using

$$\begin{aligned} F_{log}(y^+) &= d_u(y^+)\left[\frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B\right], \\ d_u(y^+) &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{y^+}{y_0}\right)^n\right] \end{aligned} \tag{12}$$

where $y_0 = 14.5$ and $n = 2.25$. The introduction of the damping function d_u in front of the standard log law gets rid of the intersection of F_w and F_{log}, thus avoiding the singularity. Figure 2 compares the proposed law with standard ones, as well as the blended law proposed by Popovac and Hanjalić[6]. It is clearly seen, in particular focusing on the velocity gradient, that the present proposal, by accounting for higher order terms in the Taylor series expansion of U^+ at the wall, significantly improves the reproduction of the profiles in the buffer layer.

Reynolds Stresses $\overline{u_i u_j}$

Instead of solving the Reynolds stress equations in the near-wall cell and imposing a boundary condition at the cell face adjacent to the wall, it is proposed here to impose the components of the Reynolds stress tensor $\overline{u_i u_j}$ in the first cell evaluated from an Algebraic Stress Model derived from the EB-RSM (EB-ASM [16]). When used in the whole domain, the EB-ASM model solves equations for k, ε and α, and evaluated the Reynolds stresses by locally solving a system of algebraic equations.

This system is derived from Eq. (1), by introducing the anisotropy tensor $b_{ij} = \overline{u_i u_j}/(2k) - \delta_{ij}/3$ and by using the weak equilibrium hypotheses,

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{D^\nu_{ij} + D^T_{ij}}{D^\nu_{kk} + D^T_{kk}} = \frac{\overline{u_i u_j}}{\overline{u_k u_k}}, \tag{14}$$

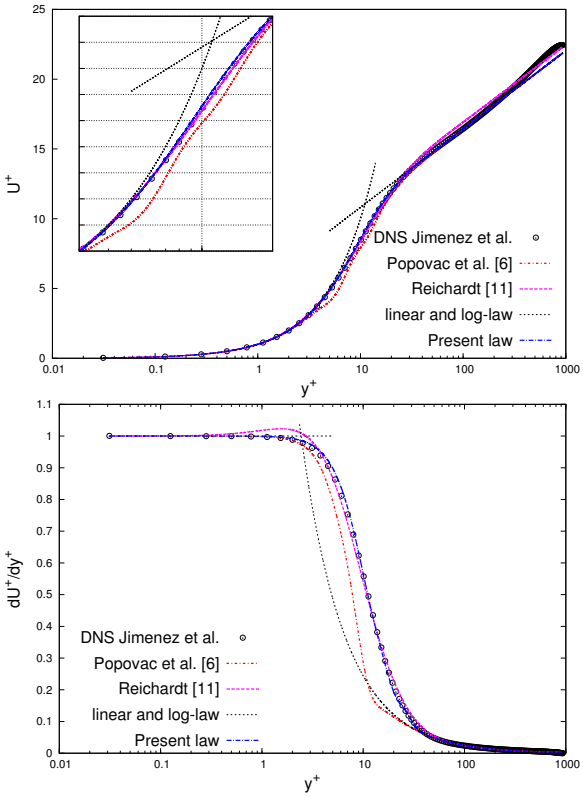


Figure 2: Comparison of the present law with that of Popovac et al.[6] and Reichardt, at $Re_\tau = 950$ [14]

which yields an algebraic system of equations for the anisotropy tensor

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_4}\mathbf{b} - a_3\left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bS}\}\mathbf{I}\right) \\ + a_2\left(\mathbf{Wb} - \mathbf{bW}\right) \\ - a_5\left(\mathbf{bM} + \mathbf{Mb} - \frac{2}{3}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{I} - \frac{1}{2}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{M}\right) \\ = a_1\mathbf{S} + \frac{a_5}{2}\mathbf{M}, \end{aligned} \tag{15}$$

where $\mathbf{S}$ and $\mathbf{W}$ are the mean strain and mean rotation rate tensors, respectively. They are given by the velocity law described in (9) and illustrated in figure 2. $\mathbf{M}$ is the deviatoric part of a "wall normal tensor" [16]

$$M_{ij} = n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{16}$$

where $\mathbf{n}$ is the wall normal vector. Coefficients a_k are functions of α, k, ε, P and the constants used in the

EB-RSM:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(C_3 - C_3^*\sqrt{II}\right)\alpha^3 \\
a_2 &= 1 - \frac{1}{2}C_5\alpha^3 \\
a_3 &= 1 - \frac{1}{2}C_4\alpha^3 \\
a_4 &= g\tau \\
a_5 &= \frac{5}{\tau}(1-\alpha^3) \\
g &= \left[\left(1 + \frac{C_1^*}{2}\alpha^3\right)\frac{P}{\varepsilon} + \left(\frac{13}{3} - \frac{C_1}{2}\right)\alpha^3 + \frac{10}{3}\right]^{-1} \\
\tau &= \frac{k}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

The non linear term $\sqrt{II} = \sqrt{b_{kl}b_{kl}}$ involved in the coefficient a_1 is treated explicitly, i.e., evaluated at the previous iteration. At each time step, the resolution of this system at the first near wall node provides all the components of the anisotropy tensor. Given the anisotropy at the first near-wall cell, it is then possible, if appropriate boundary conditions are defined for all the other turbulent variables involved in this system (the turbulent kinetic energy k, the dissipation rate ε, the production P and the parameter α), to obtain the Reynolds stress, to be imposed in the resolution of equation (1).

Dissipation ε

The same principle as for the velocity is used for the dissipation rate. ε is fixed at the first near-wall cell using a blending function, which blends the near wall and fully turbulent standard behaviour as

$$
\varepsilon = f_\varepsilon\left[2\nu\frac{k}{y^2}\right] + (1-f_\varepsilon)d_\varepsilon\left[\frac{u_\tau^3}{\kappa y}\right] \tag{18}
$$

with d_ε and f_ε blending functions of y^+ only, constructed as (9), where d_ε plays the same role as d_u in the velocity law,

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon(y^+) &= \exp\left(-\left(\frac{y^+}{7}\right)^{3/2}\right), \\
d_\varepsilon(y^+) &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{10.5}\right)^{3/2}\right).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

It is to be noted that this law is chosen in order to closely fit the wall-resolved EB-RSM results rather than DNS data, since the objective is to correctly reproduce behaviour of the model in the buffer layer.

Parameter α

In order to identify a wall law for the elliptic blending parameter α, it is useful to remark that, for the case of a constant length scale L, the analytical solution of Eq. (5) is

$$
\alpha = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{L}\right). \tag{20}
$$

Although L, modelled by Eq. (6), is not a constant, using a linearly variable L in this equation, under the form

$$
\alpha = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{16.5 + 0.04y^+}\right), \tag{21}
$$

leads to an excellent approximation of α, as can be seen in Fig. 4 that compares this analytical law with the parameter α obtained from an *a priori* channel flow analysis.

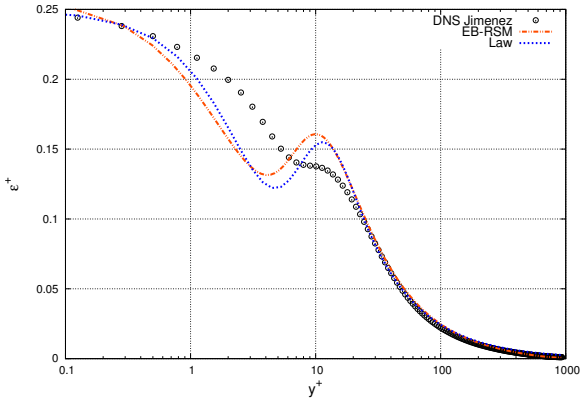


Figure 3: Comparison of the ε blended law with a full EB-RSM resolution and DNS at $Re_\tau = 950$ [14]

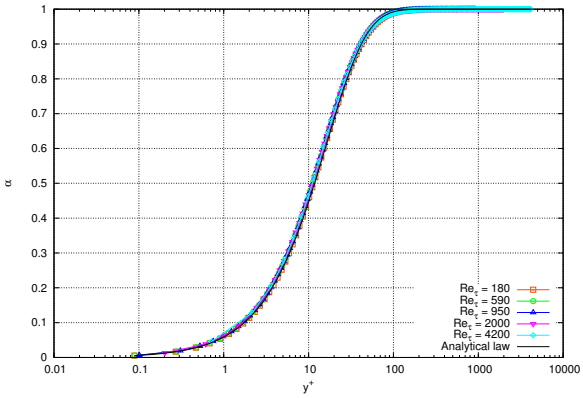


Figure 4: Comparison of the analytical law (21) with the blending parameter α extracted from DNS data for various Reynolds numbers.

Turbulent Kinetic Energy k

In order to compute the Reynolds stresses from the anisotropy tensor via Eq. (15), it is necessary to evaluate the turbulent energy k independently of the Reynolds stresses. For this purpose, the eddy viscosity hypothesis is introduced,

$$
\nu_t = f_\mu k^2/\varepsilon, \tag{22}
$$

which yields an expression for turbulent production

$$
P = f_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2. \tag{23}
$$

Introducing expression (19) for ε in this equation yields the local second order polynomial equation for

k

$$k^2 - \left[\frac{2\nu P f_\varepsilon}{f_\mu \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 y^2}\right] k - \left[P d_\varepsilon (1-f_\varepsilon)\frac{u_\tau^3}{\kappa y}\right] = 0 \quad (24)$$

In order for this equation to provide an approximation for k, the damping function f_μ and the kinetic energy production P are required. Two analytical laws for these quantities are proposed in the following sections.

Damping function f_μ.

Since k behaves as y^{+2} in the vicinity of the wall, f_μ must behave as $1/y^+$ in order to ensure the correct behaviour in y^{+3} of $\overline{uv}$. Therefore, the blending function for f_μ is introduced,

$$f_\mu = f_1 \frac{C_w}{y^+} + (1-f_1) C_\mu. \quad (25)$$

An *a priori* analysis of channel flow DNS data, shown in figure 5, suggests to the following set of equations and constants :

$$\begin{aligned} f_1 &= \exp\left[-\left(\frac{y^+}{39+0.2y^+}\right)^2\right], \\ C_w &= 0.016, \\ C_\mu &= 0.09, \end{aligned} \quad (26)$$

such a way that f_μ reaches the standard value $C_\mu = 0.09$ far from the wall.

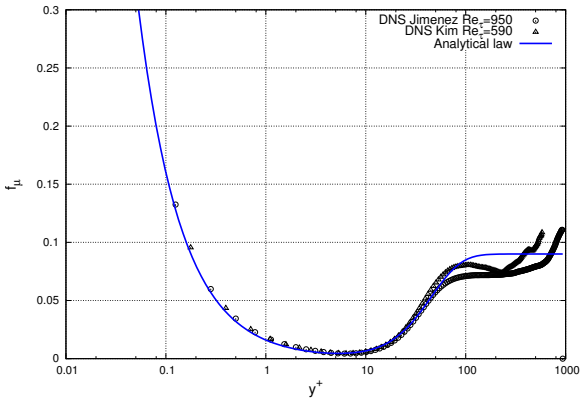


Figure 5: Comparison of the analytical law derived for f_μ with the *a priori* evaluation of f_μ from DNS data.

Production P.

Since, production writes

$$P^+ = -\overline{uv}^+ \frac{dU^+}{dy^+}, \quad (27)$$

under the assumption that the total shear remains constant from the wall up to the log layer,

$$\frac{dU^+}{dy^+} - \overline{uv}^+ = 1, \quad (28)$$

equation (27) yields

$$P^+ = \frac{dU^+}{dy^+}\left(\frac{dU^+}{dy^+} - 1\right). \quad (29)$$

The law derived above for the velocity thus provides the law for the production. Figure 6 shows very good agreement of this law with the DNS data of Hoyas and Jimenez [14], and a significant improvement compared to previous proposals.

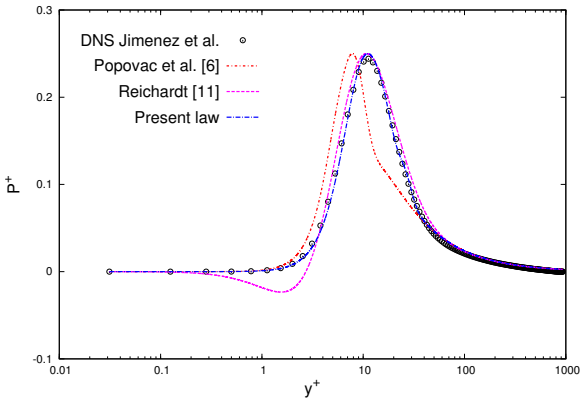


Figure 6: Comparison with the DNS data of Hoyas and Jimenez at $Re_\tau = 950$ [14] of the analytical law derived for P^+, using the velocity law (9)–(10)–(12), and the laws from Popovac *et al.* [6] and Reichardt [11].

Final law for k.

Using these laws for f_μ and P, Eq. (24) can be solved to obtain k. It can be seen in Fig. 7 that the profile of k^+ in the wall region is correctly reproduced, and the standard asymptote $k = 1/\sqrt{C_\mu}$ is recovered far from the wall. However, some small wiggles appearing in the blended law for U^+ are amplified by spatial derivation and are observed near the peak of k. Although this weakness is of minor importance in practice, future work will be devoted towards the improvement of this behaviour. It is worth emphasizing that turbulence models available in the literature, and in particular the EB-RSM, are not able to reproduce the correct sensitivity to the Reynolds number of the turbulent energy profile k^+. Since the wall functions developed herein are aimed at reproducing at best the results given by the underlying turbulence model in wall-resolved computations, such a dependence is not considered.

4 Adaptive Numerical Wall Function

As an alternative to algebraic wall functions, and following previous work of Craft *et al.* [3] (*UMIST-N* wall functions), a numerical adaptive wall treatment (NAWT) is proposed. Wherever the first calculation node is located, the one dimensional form of the EB-RSM is solved on a sub-mesh embedded in the first wall control volume. Consistently with the previous

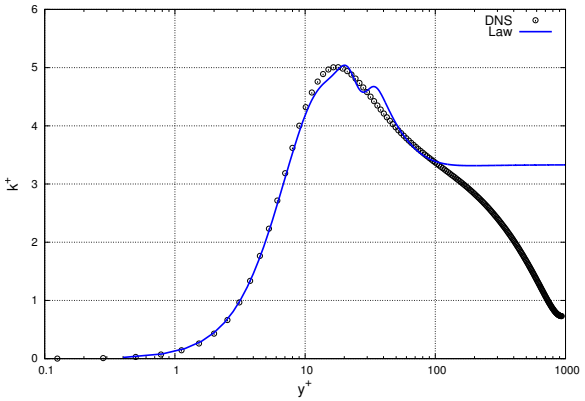


Figure 7: Comparison of the law developed for k^+ with DNS data of Hoyas and Jimenez at $Re_\tau = 950$ [14].

algebraic strategy, the value of the variables are then imposed in the first cell. This strategy is schematically described in figure 8. One can notice that with a 1D

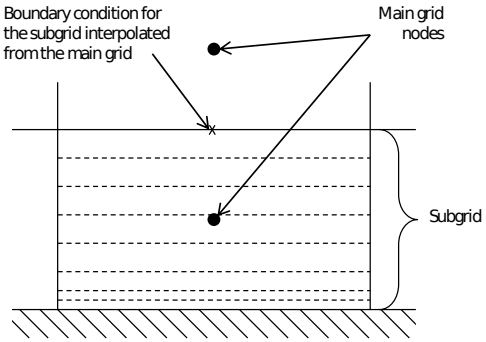


Figure 8: Arrangement of the subgrid in the near wall cell.

assumption between the first calculation node and the wall, we cannot obtain better results than the ones obtained with this approach.

5 Results

Both the numerical (NAWF) and algebraic (AAWF) approaches described above are tested in several fully developed channel flows. Figures 9, 10 and 11 show the results for different locations of the first near wall cell ($y^+ = 1, 5, 10, 30, 50$) at $Re_\tau = 590$, in comparison with the DNS data of Moser *et al.* [13]. For all meshes, the obtained profiles agree very well with the reference data. The most notable difference obtained in these computations is the presence of a kink in the profiles of the variables, mostly when the first point lies in the buffer layer. This is not due to the wall functions themselves, but rather to the coarse discretization of the transport equations in the few coarse cells adjacent to the first cell: this discretization error vanishes with refinement, i.e., when all the cells

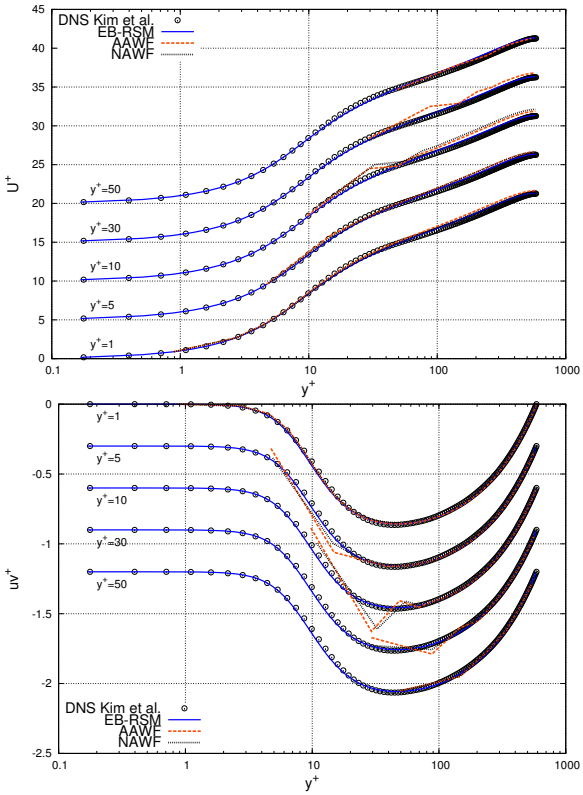


Figure 9: Prediction of U^+ and $\overline{uv}^+$

but the first one are refined (not shown here). Figure 12 presents the velocity for three different turbulent Reynolds number at three different locations for the AAWF approach and confirms the quality of the results.

The behaviour of the law in the buffer layer is particularly satisfactory. The exposed strategy can indeed reproduce the bump of the dissipation rate and shows very good prediction of the turbulent kinetic energy and the mean velocity around $y^+ = 10$. It can be seen that both strategies show equivalent results in this channel flow configuration. It is however expected that, in non equilibrium configurations, the integration over a subgrid (NAWF) will lead to better agreement with experimental data [3], such that future work will be devoted to the introduction of non-equilibrium effects in the analytical algebraic wall functions.

6 Conclusions

Adaptive wall functions for the EB-RSM, based on either algebraic relations or a numerical 1D integration, are introduced. They are applicable whatever the position of the first cell centre and show good agreement with the wall-resolved EB-RSM results for all the variables on channel flow configurations. Further work is in progress to make these wall functions sensitive to pressure gradient and streamwise acceleration effects, in order to address more complex validation

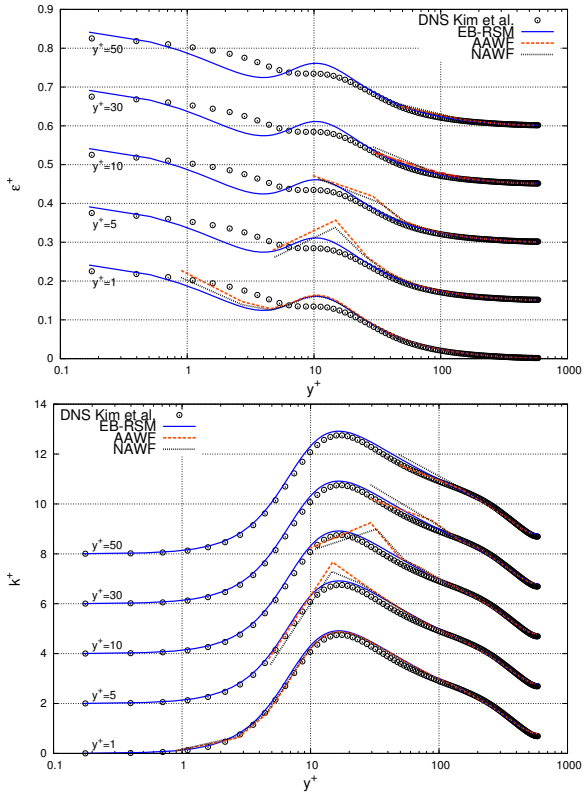


Figure 10: Prediction of k^+ and ε^+

test cases.

References

[1] Chieng CC, Launder BE, 1980, On calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 3, pp. 189207

[2] T.J. Craft, A.V. Gerasimov, H. Iacovides, B.E. Launder, 2002, Progress in the generalisation of wall function treatment, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 148-160.

[3] T.J. Craft, S.E. Gant, H. Iacovides and B.E. Launder, 2004, A new wall function strategy for complex turbulent flows, *Numer. Heat Transfer, B*, Vol. 45, pp. 301-317.

[4] G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, P. Durbin, 2005, Near-wall behaviour of RANS turbulence models and implications for wall functions, *J. Comput. Phys.*, Vol. 420, pp. 265-291

[5] T. Esch and F.R. Menter , 2003,Heat transfer predictions based on two-equation turbulence models with advanced wall treatment, *Turbu. Heat Mass Transf.*, Vol. 4, pp. 633-640

[6] M. Popovac and K. Hanjalić, 2007, Compound wall treatment for RANS computation of complex turbulent flows and heat transfer, *Flow Turb. Comb.*, Vol. 78, pp. 177-202.

[7] B. Basara, 2006, Eddy viscosity transport model based on elliptic relaxation approach, *AIAA Journal*, Vol. 44, pp. 16861690

[8] M.M. Rahman and T. Siikonen, 2012, Compound wall treatment with low-Re turbulence model, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 68, pp. 706-723.

[9] R. Manceau and K. Hanjalić, 2002, Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence clo-

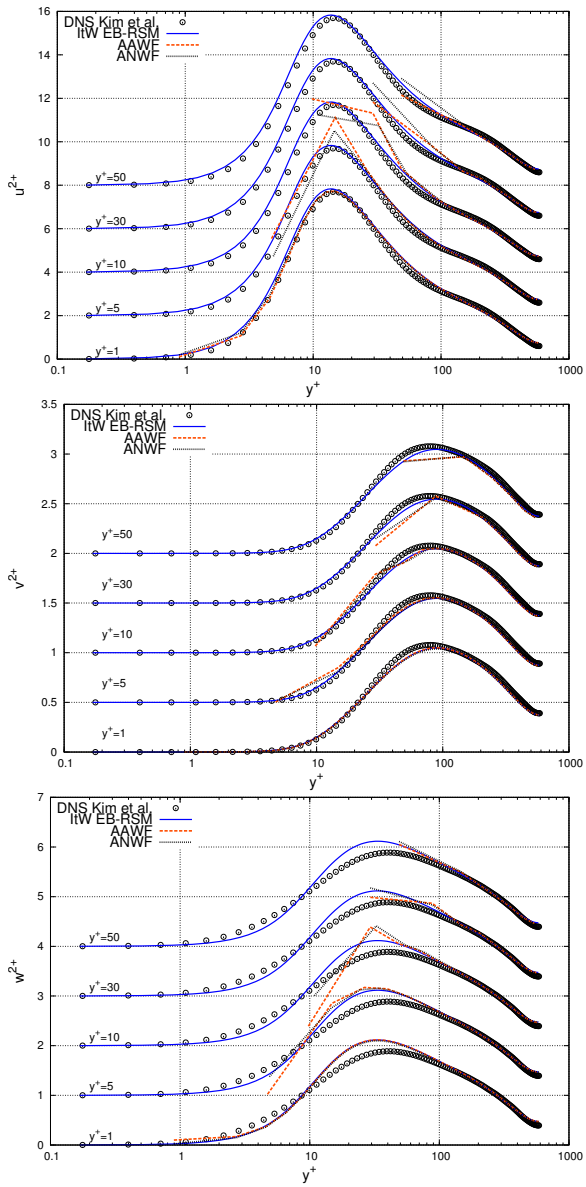


Figure 11: Prediction of $\overline{u^2}$,$\overline{v^2}$ and $\overline{w^2}$

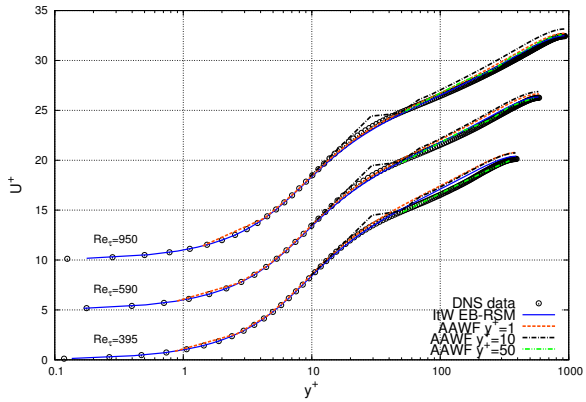


Figure 12: Velocity U^+, compared with DNS of Moser *et al.* [13] and Hoyas and Jimenez [14]

sure, *Phys. of Fluids*, Vol. 14, pp. 744-754.

[10] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski, 1991, Modeling the pressurestrain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach, *J.Fluid Mech.*, Vol. 227, pp. 245

[11] H. Reichardt, 1951, Vollstandige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Z. angew. Math. Mech.*, Vol. 31, pp. 208219

[12] D. B. Spalding, 1961, A Single Formula for the Law of the Wall , *J. Appl. Mech.*, Vol. 28, pp. 455-458.

[13] R. D. Moser, J. Kim and N. N. Mansour, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$, *Phys. of Fluids*, Vol. 11, pp. 943-945.

[14] S. Hoyas and J. Jimenez, 2006, Scaling of velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2000$", *Phys. of Fluids*, Vol. 18, 011702.

[15] Iwamoto, K., Suzuki, Y., and Kasagi, N., 2002, Reynolds Number Effect on Wall Turbulence: Toward Effective Feedback Control, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 678-689.

[16] A.G. Oceni, Modélisation algébrique explicite à pondration elliptique pour les écoulements turbulents en présence de paroi, 2009, *PhD Thesis*.

[17] F. Dehoux, Y. Lecocq, S. Benhamadouche, R. Manceau and L.-E. Brizzi, 2012, Algebraic modeling of the turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach. Application to forced and mixed convection regimes, *Flow Turbul. Combust.*, Vol. 88, pp. 77-100.

E.2 Adaptive Wall Treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress Model

Publication présentée au congrès 36^{th} *International Association for Hydro-Environment Engineering and Research (IAHR) World Congress* (28 juin-3 juillet 2015, La Haye, Pays-Bas)

E-proceedings of the 36th IAHR World Congress
28 June – 3 July, 2015, The Hague, the Netherlands

ADAPTIVE WALL TREATMENT FOR THE ELLIPTIC BLENDING REYNOLDS STRESS MODEL

JEAN-FRANCOIS WALD[(1) (2)], SOFIANE BENHAMADOUCHE[(1)] & REMI MANCEAU[(2)]

[(1)] *EDF Research and Development, Fluid Mechanics Energy and Environment Dept., 6 Quai Watier, 78401 Chatou,FRANCE*
jean-francois.wald@edf.fr, sofiane.benhamadouche@edf.fr

[(2)] *Department of Applied Mathematics, CNRS-University of Pau-INRIA, IPRA, Avenue de l'Université, 64013 Pau, FRANCE*
remi.manceau@univ-pau.fr

ABSTRACT

Adaptive wall functions for the Low-Reynolds Number second moment closure turbulence model (EB-RSM for Elliptic Blending Reynolds Stress Model) have been derived in the present work to be used in industrial configurations for incompressible flows. The wall functions are implemented through the use of an algebraic system of equations for the Reynolds Stresses and of blended analytical laws for other quantities. On fine grids (y^+<1), the approach yields results consistent with an integrated solution to the wall. On coarse grids (y^+>30) the results are those of a High-Reynolds Number turbulence model whereas, with intermediate refinements, the results are not deteriorated, which is not the case of standard approaches. Moreover, non equilibrium effects due to pressure gradient are introduced in the wall functions. Detailed numerical results obtained on a 1D and 2D Channel Flows with various refinements and on a backward facing step with a mesh representative of an industrial refinement are presented.

Keywords: Wall functions, EB-RSM, RANS

1. INTRODUCTION

As they entirely solve turbulent boundary layers, Low-Reynolds Number RANS models offer a level of details that allows very fine CFD investigations. However, they are sometimes impossible to set up because of the difficulty to obtain a sufficiently refined mesh at the wall or simply because the Reynolds number is too high. That is why wall functions are widely used in CFD in order to significantly reduce the meshing complexity and computational cost of a simulation compared to the so called Low-Reynolds Number formulations. Though more flexible, they are also particularly restrictive in terms of meshing as they require the first calculation point to fall into the logarithmic region. Industrial simulations of internal flows, such as the ones encountered in nuclear applications, such as the flow through fuel assemblies or in the upper plenum of the nuclear vessel, are particularly challenging due to their inherent complexity that makes those conditions difficult to satisfy everywhere.

Several High-Reynolds Number RANS models are intrinsically designed for wall functions as they are not able to take into account wall effects (SSG model, standard k-ε). On the other hand, Low Reynolds number models (v2-f, EB-RSM) cannot be applied to High-Reynolds Number configurations. However, during the past years, several authors have been actively looking for a unified formulation that would allow a model to be used independently of the local wall refinement.

Several proposals were formulated in the literature aiming at improving and generalizing wall treatments. Chieng and Launder [1] improve the classical wall function strategy by accounting for a linear variation of the shear stress and the turbulent kinetic energy in the first near wall cell. A more general formulation of this strategy was developed by Craft et al. [2], who derive Wall Functions (WFs) on the basis of an assumed eddy viscosity distribution through this boundary cell. A refined approach, also due to Craft et al.[3], proposes the integration of the simplified transport equations over a fine embedded subgrid within the first cell. Kalitzin [4] developed an adaptive strategy based on curve-fitting of the variables using splines. Following those steps, Billard et al. [5] propose an adaptive wall treatment strategy for the Bl-v2-k model, more suitable for industrial applications. They obtain very good results both on academic and industrial test cases. Another strategy, close to the latter and widely used in CFD, consists in using a blending of the wall-limiting and fully turbulent expressions for various flow variables. The blending functions ensure a smooth transition between linear and logarithmic layers and provide accurate conditions for the first cell even if it lies in the buffer region. Esch and Menter [6] propose a quadratic blending of the wall shear stress in order to provide adequate boundary conditions for the k-ω model. Popovac and Hanjalić [7] developed a compound wall treatment (CWT) that reduces to either the "Integration to the wall" (ItW) or the "Wall function" approach, depending on the location of the first near-wall cell. Basara [8] followed by Rahman

and Siikonen [9], use the same blending method and attempte to improve the prediction of the production and the dissipation rate.

In a recent communication [10], a standard one velocity scale Adaptive Wall Treatment has been presented for the Elliptic Blending Reynolds Stress model. It was validated on a one dimensional channel flow and showed promising results. The present study focuses on this new algebraic adaptive wall treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress Model (EB-RSM) by extending some of the recently proposed approaches. Pressure gradient effect is introduced in the strategy as well as a second velocity scale, indispensable for industrial applications.

2. THE EBRSM FOR INTEGRATION TO THE WALL

2.1 Original model

Adaptive Wall Treatment requires the use of a model that can be integrated down to the wall. Recent developments only focused on eddy viscosity models. Attention in the present work is directed towards second moment closure models, as they are more suitable for nuclear applications where one encounters various swirling flows and other complex physics. The EB-RSM model [11] was chosen as it is a robust model able to accurately reproduce wall physics. The transport equations for the turbulent variables are:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + \phi_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij} + D_{ij}^{\nu} + D_{ij}^{T} \ , \tag{1}$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon_1}^{*} P - C_{\varepsilon_2}\varepsilon}{\tau} + D_{\varepsilon}^{\nu} + D_{\varepsilon}^{T} \ , \tag{2}$$

where P_{ij} denotes the exact production term. The turbulent diffusion term is expressed using the Daly-Harlow model and the redistribution ϕ_{ij}^{*} and the dissipation ε_{ij} are expressed as a blending of models valid in fully turbulent and the wall regions,

$$\phi_{ij}^{*} = (1-\alpha^3)\phi_{ij}^{h} + \alpha^3 \phi_{ij}^{w} \ , \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij} = (1-\alpha^3)\varepsilon_{ij}^{h} + \alpha^3 \varepsilon_{ij}^{w} \ , \tag{4}$$

The superscript *h* denotes the homogeneous part, far from the wall, taken from Speziale, Sarkar and Gatski [12] and *w* the wall part, as proposed by Manceau and Hanjalić. The elliptic equation solved for the blending parameter α is

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \ . \tag{5}$$

Finally, the integral time and length scales are respectively given by

$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/2}}\right) , \tag{6}$$

$$\tau = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right), \tag{7}$$

The so called E-term in the equation of ε proposed by Jones and Launder (1972) and originally introduced in the EBRSM, is replaced for numerical stability reasons by a variable $C_{\varepsilon_1}^{*}$ coefficient of the form [20]

$$C_{\varepsilon_1}^{*} = C_{\varepsilon_1}\left(1 + A_1(1-\alpha^3)\frac{P}{\varepsilon}\right) , \tag{8}$$

The original values of the coefficient of the SSG are used. The other coefficients are given in the following table

C_η	C_L	C_T	A_1	C_{ε_1}	C_{ε_2}
80.0	0.122	6.0	0.1	1.83	1.44

2.2 Adaptation of the EBRSM for the use of Wall Functions with a second velocity scale

2.2.1 Need for a second velocity scale

In a previous work, an adaptive wall strategy was derived with success for one velocity scale wall functions. This strategy was based on a standard iterative process over a continuous analytical equation for the velocity,

$$\frac{U}{u_\tau} = \mathrm{F}\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) , \tag{9}$$

to get the shear velocity u_τ. Here *y* is the distance to the wall of the first computation cell, *U* the velocity at this point and ν the kinematic viscosity. Once this scale was obtained proper boundary conditions for all the quantities were prescribed. In particular, the Reynolds Stresses were imposed at the first near wall cell.

A common practice in CFD is the introduction of a second velocity scale u_k based on the turbulent kinetic energy. The second scale has the advantage of removing non-physical behavior occurring at stagnation point, as in the case of an impinging jet for example.

2.2.2 Alternative EBRSM model

The strategy presented in [10] is not compatible with the introduction of a second velocity scale. The turbulent kinetic energy being the trace of the Reynolds Stress tensor, it is indeed prescribed at the first cell rather than free. It is thus necessary to solve an equation for the turbulent kinetic energy in the first cell letting this degree of freedom.

As $k = \frac{1}{2}R_{ii}$, one can get the transport equation for the turbulent kinetic energy $\frac{Dk}{Dt} = \frac{1}{2}\frac{DR_{ii}}{Dt}$. The following EB-RSM model definition is then strictly equivalent to the one described in the previous section (the equivalence of the boundary conditions are not discussed in the present work):

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + \phi^*_{ij} - \varepsilon_{ij} + D^\nu_{ij} + D^T_{ij} \ , \ \text{if } (i,j) \neq (3,3) \tag{10}$$

$$R_{33} = 2k - R_{11} - R_{22} \tag{11}$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + D^\nu_k + D^T_k \tag{12}$$

where $P_k = 0.5P_{ij}$, $D^\nu_k = 0.5D^\nu_{ii}$ and $D^T_k = 0.5D^T_{ii}$. The trace of the redistribution tensor is zero. The choice has been made here to substitute the equation for R_{33} with the one from *k* but one could choose either the equation for R_{11} or R_{22}, which would lead to a strictly equivalent model.

As an equation is solved for the turbulent kinetic energy, it is this formulation that will be used for the development of Adaptive Wall treatment in next sections.

3. THE ADAPTIVE ALGEBRAIC WALL FUNCTIONS (AAWF)

3.1 Derivation of Wall Functions

Low-Reynolds number formulations are relevant as long as the first node is located in the viscous sublayer ($y^+ < 5$). However, when this point is in the fully turbulent region ($y^+ > 30$), natural boundary conditions become inappropriate and the use of wall functions is unavoidable. The principle of Adaptive Wall Treatment (AWT) is to provide valid wall boundary conditions whatever the first node location. Continuous laws for all several variables and source terms of the EB-RSM are thus necessary.

3.1.1 The velocity U

The authors recently proposed [10] a new law of the wall for the velocity. This law ensures the reproduction of the correct behavior of the velocity near the wall. Moreover it significantly improves the reproduction of the velocity profile in the buffer layer, compared to several existing laws. The law writes

$$U^+ = f_u F_w + (1 - f_u) F_{log} \ , \tag{13}$$

with

$$F_w = y^+ \tag{14}$$

$$F_{log} = d_u \left[\frac{1}{\kappa}\ln(y^+) + B\right] \tag{15}$$

$$d_u = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{y_0}\right)^n\right) \tag{16}$$

$$f_u = \exp\left(-\frac{C_{\overline{uv}}}{4}y^{+3}\right) \tag{17}$$

where $C_{\overline{uv}} = 1.0674 \cdot 10^{-3}$, $y_0 = 14.5$, $n = 2.25$, $\kappa = 0.41$ and $B = 5.2$. B and κ are the standard constants of the logarithmic law.

Many analytical laws of the wall valid throughout the whole boundary layer were proposed, starting from the pioneering work of Reichardt [13] and Spalding [14]. Although they fit perfectly experimental data, none of them would be applicable to non equilibrium flows. Popovac and Hanjalić [7] proposed such a law using Kader's blending. Assuming linear variation of the eddy viscosity, they derived a law for the velocity by integrating the 1D stream-wise momentum equation of a Channel Flow. All non equilibrium terms, usually considered to be zero, were taken constant in the first computational cell. Starting from this idea, sensitivity to pressure gradient is introduced in the proposed law. Let first write the 1D stream-wise momentum equation:

$$0 = -\frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\right) + \frac{d^2U^+}{dy^{+2}} - \frac{dR_{12}^+}{dy^+}. \tag{18}$$

With $\lambda = \frac{dP^+}{dx^+} = \frac{\nu}{u_\tau^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}\right)$, Eq. (18) can be integrated with respect to y^+as

$$\frac{dU^+}{dy^+} - R_{12}^+ = 1 + \lambda y^+ \ . \tag{19}$$

It is then reasonable to consider in the logarithmic region that the viscous shear stress is negligible compared to the turbulent one. This can be translated by the following assertion:

$$\frac{dU^+}{dy^+} \ll R_{12}^+ \ . \tag{20}$$

Using a mixing length hypothesis

$$R_{12}^+ = (\kappa y^+)^2 \left(\frac{dU^+}{dy^+}\right)^2 , \tag{21}$$

Townsend [15] proposed to integrate equation (19) in the log zone. Here, taking $\lambda = 0$ would lead to the standard log law. The non equilibrium effects are taken into account with the assumption $1 \gg \lambda y^+$. This is justified by the fact that if the pressure gradient is too strong, the logarithmic wall and more precisely the mixing length assumption given by equation (21) is not true anymore. Equation (19) then writes in the logarithmic region:

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{\sqrt{1+\lambda y^+}}{\kappa y^+} \ , \tag{22}$$

The latter equation yields to the following expression for the velocity:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\left[\ln(y^+) - 2\ln\left(\frac{\sqrt{1+\lambda y^+}+1}{2}\right) + 2\left(\sqrt{1+\lambda y^+} - 1\right)\right] + B \ . \tag{23}$$

Finally, knowing that $1 \gg \lambda y^+$, the following asymptotic development can be obtained:

$$-2\ln\left(\frac{\sqrt{1+\lambda y^+}+1}{2}\right) + 2\left(\sqrt{1+\lambda y^+} - 1\right) = \frac{1}{2}\lambda y^+ + o(y^+) \ . \tag{24}$$

Combining equations (23) and (24) leads to

$$U_{log}^{+} = \frac{1}{\kappa}\left[\ln(y^{+}) + \frac{1}{2}\lambda y^{+}\right] + B\,. \tag{25}$$

Although the assumption $1 \gg \lambda y^{+}$ has been made previously, no limitation of the pressure gradient will be applied in practice. The non equilibrium continuous law for the velocity derived from [10] then finally writes:

$$U^{+} = f_u F_w + (1 - f_u) F_{log}\,, \tag{26}$$

with

$$F_w = y^{+} \tag{27}$$

$$F_{log} = d_u \left(\frac{1}{\kappa}\left[\ln(y^{+}) + \frac{1}{2}\lambda y^{+}\right] + B \right) \tag{28}$$

$$d_u = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^{+}}{y_0}\right)^{n}\right) \tag{29}$$

$$f_u = \exp\left(-\frac{C_{\overline{uv}}}{4} y^{+3}\right) \tag{30}$$

Figure 1 shows the non dimensional velocity profile given by eq. (26) for a channel flow at at $Re_\tau = 950$ [16] ($Re_\tau = u_\tau H/\nu$, where *H* is the channel half-width) compared to other analytical profiles and to DNS results. It can be seen that eq. (26) with $\lambda = 0$ gives a velocity profile that perfectly fits DNS data in particular in the buffer region which is not the case of all the analytical formulas (note that the EB-RSM itself fits perfectly DNS data). Figure 2 illustrates the effect of taking into account the pressure gradient $(\lambda \neq 0)$ compared to the standard approach. $(\lambda = 0)$. There is no doubt that the latter approach improves the results in regions submitted to strong adverse pressure gradients.

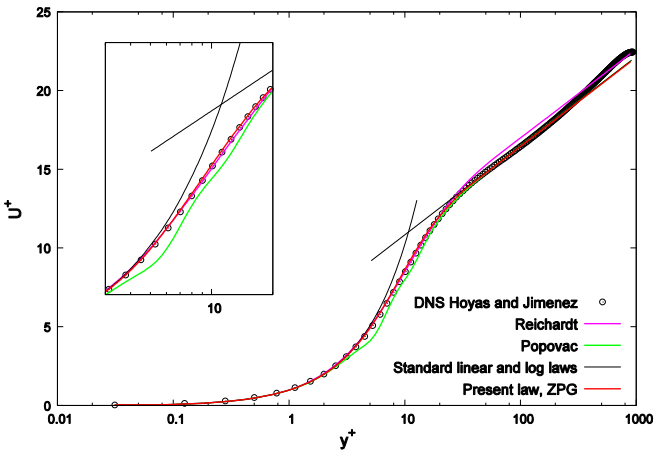


Figure 1 : On the top a comparison of the present law for zero pressure gradient with that of Popovac [6] and Reichardt [13], channel flow at $Re_\tau = 950$[16]

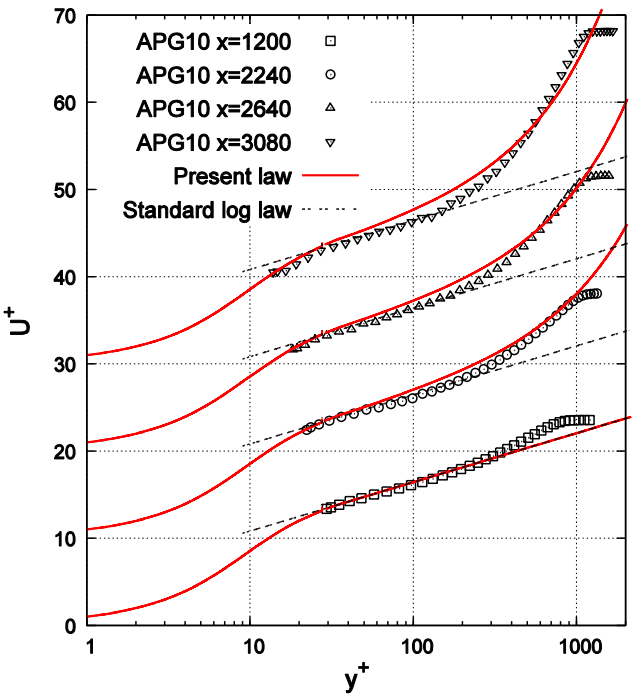


Figure 2 : On the right, comparison of the present law with the experimental data of Marusić and Perry[17] for an Adverse Pressure Gradient flow at different locations.

3.1.2 The dissipation ε

The local value of the dissipation is prescribed at the first near wall cell through an analytical law. It is recalled here [10] :

$$\varepsilon^{+} = f_\varepsilon \left[2\frac{k^{+}}{y^{+}}\right] + (1 - f_\varepsilon) d_\varepsilon \frac{1}{\kappa y^{+}} \tag{31}$$

with f_ε and d_ε blending functions of y^{+}only (see [10] for details):

$$f_\varepsilon = \exp\left(-\left(\frac{y^+}{7}\right)^{3/2}\right), \tag{32}$$

$$d_\varepsilon = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{10.5}\right)^{2}\right), \tag{33}$$

An illustration of this law is given in figure 3. It is to be noted that this law closely fit the wall-resolved EB-RSM results rather than DNS data, since the objective is to correctly reproduce the behavior of the model in the buffer layer. Through the use of the turbulent kinetic energy in this relation, a dependence on the turbulent Reynolds number is introduced close to the wall.

3.1.3 The turbulent kinetic energy k

The turbulent kinetic energy is solved on the whole domain with homogeneous Neumann boundary conditions at walls:

$$\left.\frac{\partial k}{\partial n}\right|_{wall} = 0 \tag{34}$$

It is however necessary to prescribe an appropriate value of the production and the dissipation at the first cell when solving *k* transport equation (Eq. (12)). Equation (31) giving ε^+ and the following equation giving the production term,

$$P^+ = \frac{dU^+}{dy^+}\left(1 - \frac{dU^+}{dy^+}\right) \tag{35}$$

are used to compute the mean values of the production and the dissipation in the first computational cell:

$$\bar{P}^+(y^+) = \frac{1}{y^+}\int_0^{y^+} P^+ \, dy^{+*} \ , \tag{36}$$

$$\bar{\varepsilon}^+(y^+) = \frac{1}{y^+}\int_0^{y^+} \varepsilon^+ \, dy^{+*} \ . \tag{37}$$

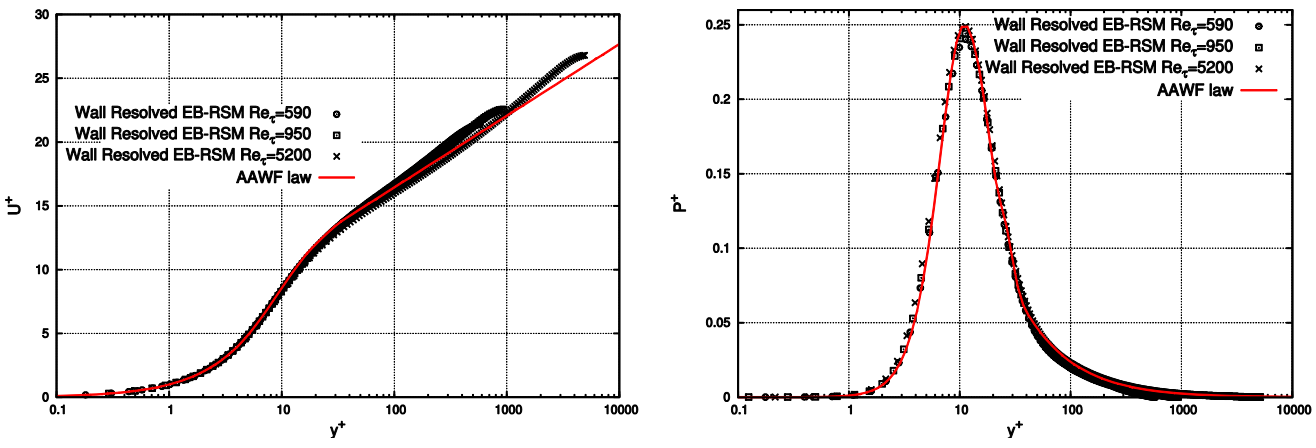
Mean values of production and dissipation are imposed at the first cell rather than local values in order to better reproduce the buffer layer behavior of *k* and to be coherent with the finite volume numerical approach utilized in the present work. An illustration of those analytical laws is given in figure 3.

3.1.4 The parameter α

Showing a quasi independence to the turbulent Reynlods Number in channel flow computations, a simple analytical law has been derived for *α* in [10]:

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y^+}{16.5 + 0.04y^+}\right)\right) \tag{38}$$

It leads to an excellent approximation of *α* whatever the Reynolds number, as can be seen in figure 3 that compares this analytical law with the parameter *α* obtained from a wall-resolved EB-RSM computation.



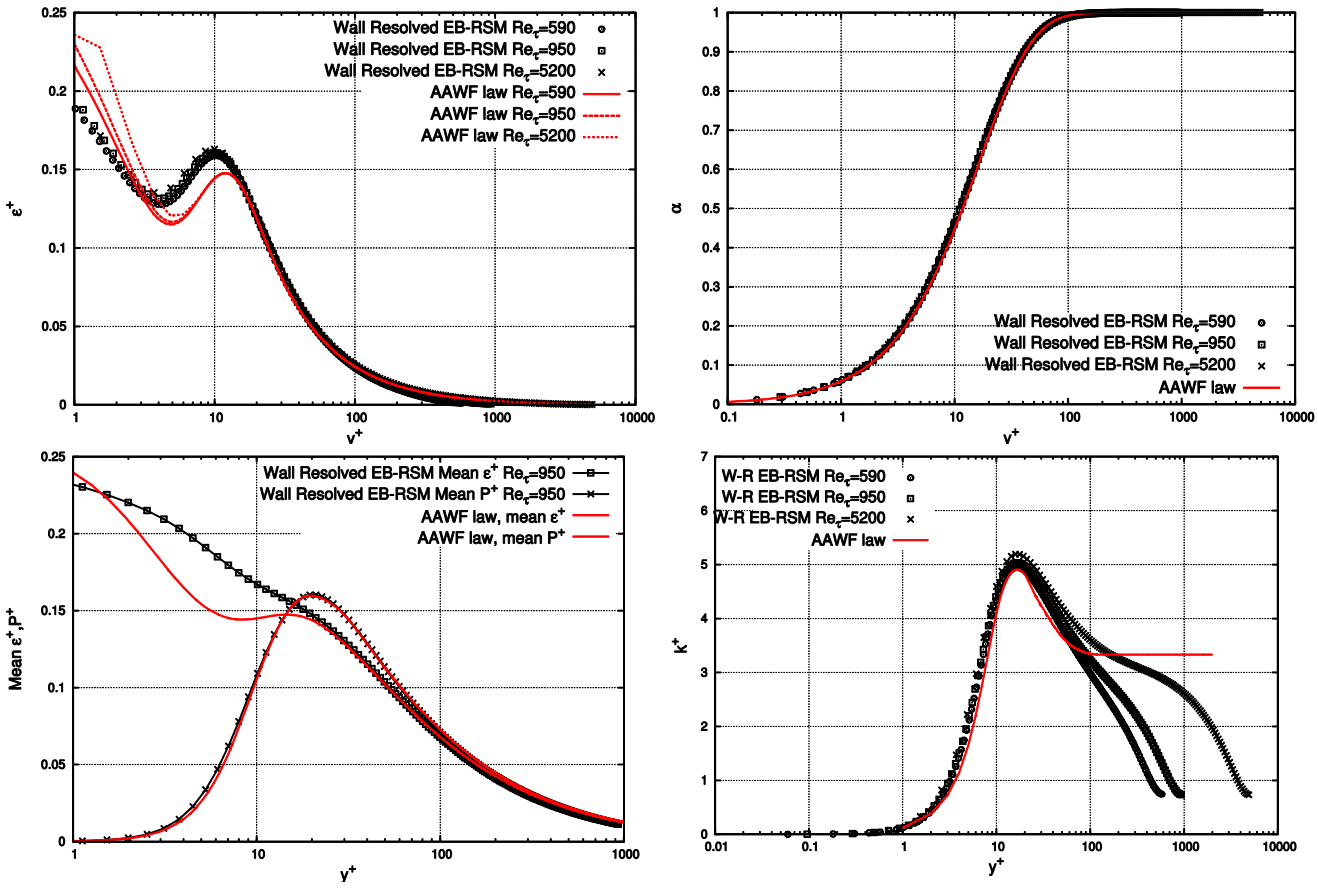


Figure 3 : Wall functions employed in the AAWF EB-RSM. They are compared with wall resolved EB-RSM with $Re_\tau \in \{590,950,5200\}$ for $U^+, P^+, \varepsilon^+, \bar{P}^+, \bar{\varepsilon}^+$ performed with Code_Saturne [18].

3.1.5 The Reynolds Stresses R_{ij}

Instead of solving the Reynolds Stress equations in the near-wall cell and imposing a boundary condition at the cell adjacent to the wall, it was proposed in [10] to impose the components of the Reynolds Stress tensor R_{ij} in the first cell evaluated from an Algebraic Stress Model derived from the EB-RSM (EB-ASM [19]). When used in the whole domain, the EB-ASM model solves equations for k, ε and α, and evaluated the Reynolds stresses by locally solving a system of algebraic equations. This system writes:

$$-\frac{1}{a_4}\mathbf{b} - a_3\left(\mathbf{bS}+\mathbf{Sb}-\frac{2}{3}\{\mathbf{bS}\}\mathbf{I}\right) + a_2(\mathbf{Wb}-\mathbf{bW}) \\ - a_5\left(\mathbf{bM}+\mathbf{Mb}-\frac{2}{3}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{I}-\frac{1}{2}\{\mathbf{bM}\}\mathbf{M}\right) = a_1\mathbf{S}+\frac{a_5}{2}\mathbf{M} \tag{39}$$

b and **S** are the mean strain and mean rotation rate tensors, respectively. M is the deviatoric part of a wall normal tensor[19]. Coefficients a_k are functions of k, ε, P, α and the constants used in the EB-RSM:

$$a_1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(C_3 - C_3^*\sqrt{II}\right)\alpha^3 \tag{40}$$

$$a_2 = 1-\frac{1}{2}C_5\alpha^3$$

$$a_2 = 1-\frac{1}{2}C_4\alpha^3$$

$$a_4 = g\tau$$

$$a_5 = \frac{5}{\tau}(1-\alpha^3)$$

$$g = \left[\left(1+\frac{C_1^*}{2}\alpha^3\right)\frac{P}{\varepsilon}+\left(\frac{13}{3}-\frac{C_1}{2}\right)\alpha^3+\frac{10}{3}\right]^{-1}$$

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}$$

The non linear term $\sqrt{II} = \sqrt{b_{kl}b_{kl}}$ is treated explicitly, i.e. evaluated at the previous iteration. At each time step, the resolution of the system at the first near wall node provides all components of the anisotropy tensor. Given the anisotropy at the first cell it is then possible, if appropriate boundary conditions are defined for the other quantities involved in the system (the turbulent kinetic energy k, the dissipation ε, the production P, the parameter α), to obtain the Reynolds Stresses, to be imposed in the resolution of equation (10).

3.2 Introduction of a second velocity scale

Scalings are necessary as the wall functions presented in the present study are dimensionless. The whole methodology is similar to what is done with the standard "two velocity scale wall function". Two velocity scales are thus introduced and are used for the scaling of the velocity and the turbulent kinetic energy:

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau} \quad and \quad k^+ = \frac{k}{{u_k}^2} \tag{41}$$

The kinetic energy based velocity scale u_k is used to scale the wall distance $y_k^+ = yu_k/\nu$ and u_k can therefore be computed by iteratively solving, at each time step, the following equations:

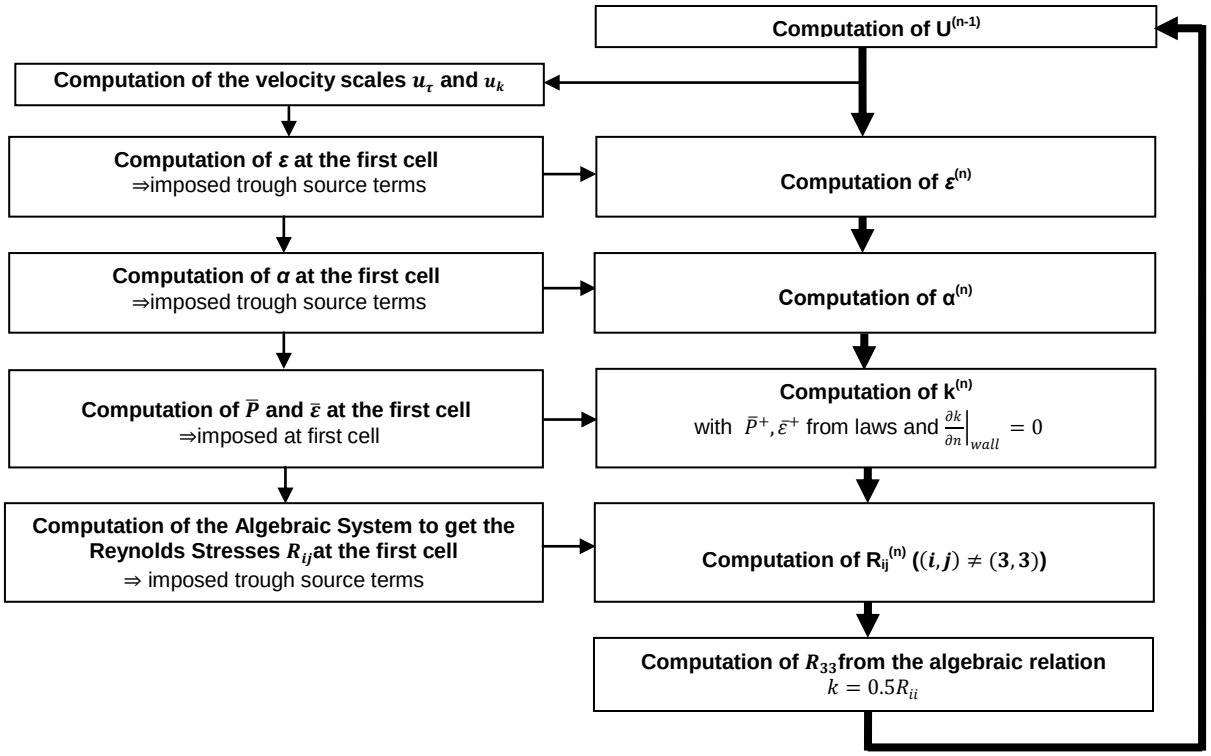
$$\begin{cases} k^+(y_k^+) = \dfrac{k}{u_k} \\ y_k^+ = \dfrac{yu_k}{\nu} \end{cases} \tag{42}$$

where k^+ comes from the law described in figure 3. This approach was originally proposed by Billard et al. [5] and shows a good estimation of u_k. The calculated value of u_k can then be used to evaluate the wall shear stress $\tau_w = u_\tau u_k$ to be prescribed as a boundary condition in the momentum equation. The dimensionless wall distance can also be calculated to evaluate the different dimensionless turbulent variables and source terms described in section 3. Those terms are then scaled using:

$$\varepsilon^+ = \varepsilon\frac{\nu}{u_k^4} \qquad \bar{\varepsilon}^+ = \bar{\varepsilon}\frac{\nu}{u_k^4} \qquad P^+ = P\frac{\nu}{(u_\tau u_k)^2} \qquad \bar{P}^+ = \bar{P}\frac{\nu}{(u_\tau u_k)^2} \tag{43}$$

3.3 Summary

The following chart summarizes the global methodology presented in the present study. The left column explains what is done at the first cell whereas the right one described the general algorithm at each time step. When a variable is said to be imposed through a source term, this means that it is imposed at the computational node of the first cell at the wall.

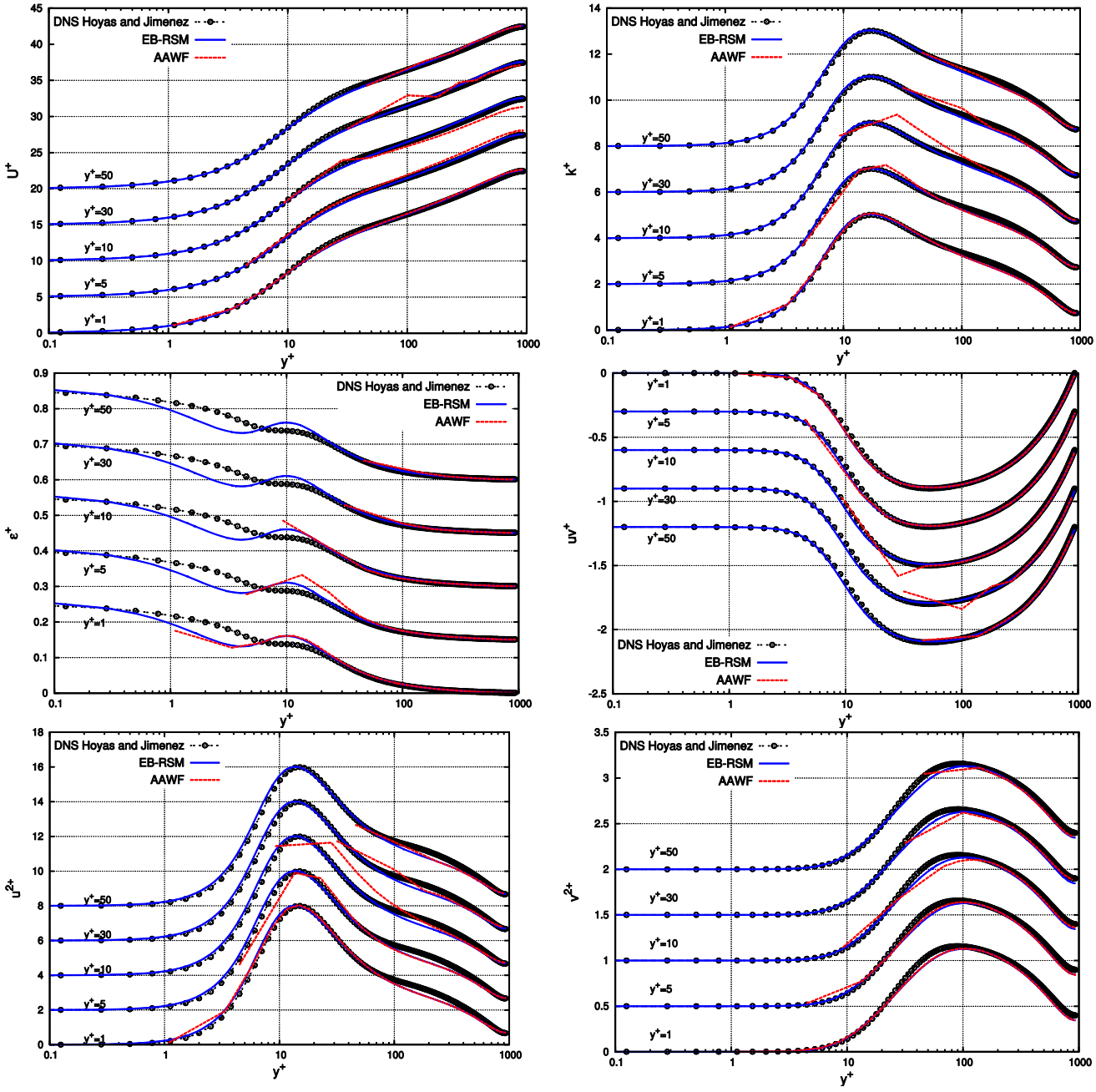


4. RESULTS

4.1 Channel Flow

The algebraic approach (AAWF) described above is tested in a steady plane channel flow. Computations were performed with the open-source (www.code-saturne.org) unstructured collocated finite volume industrial code *Code_Saturne* [18] developed at EDF using several grid refinements in which the first near-wall node was ranging from $y_P^+ = 1$ to $y_P^+ = 50$. Figure 4 shows the results at $Re_\tau = 950$ in comparison with the DNS data from Hoyas and Jimenez [16] and the wall resolved EBRSM.

For all mesh sizes, the obtained profiles agree very well with the reference data. The most notable difference between the references and their computed results is the presence of a kink in the profiles of the variables, mostly when the first point lies in the buffer layer. This is not due to the wall functions themselves, but rather to the coarse discretization of the transport equations in the few coarse cells adjacent to the first cell: this discretization error vanishes if one refines the mesh above the first computational node, i.e., when all the cells but the first one are refined. This is illustrated in figure 6 where the results obtained with mesh B completely agree with the reference.



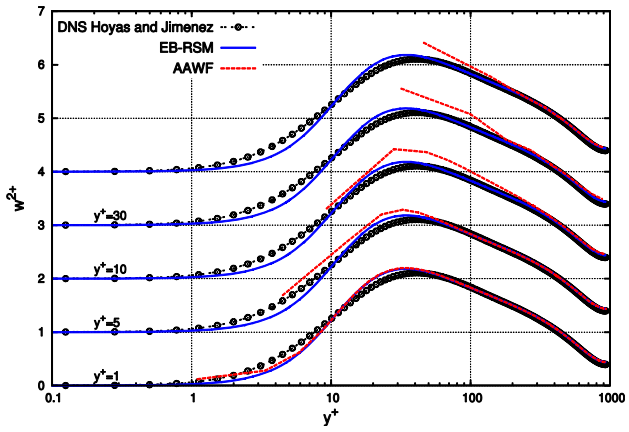


Figure 4 : Prediction of $U^+, \varepsilon^+, R_{11}^+, R_{22}^+, R_{33}^+, R_{12}^+$ and k^+ for the AAWF wall functions whit $y_P^+ \in \{1,5,10,30,50\}$, compared with wall-resoplved EB-RSM and DNS data of Hoyas and Jimenez at $Re_\tau = 950$ [16]

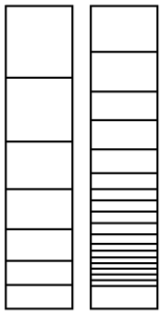
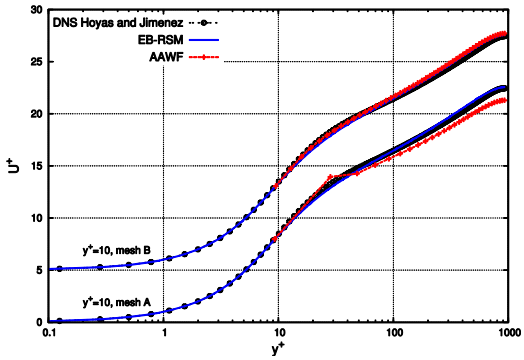


Figure 5 : Type of mesh used for the computations.



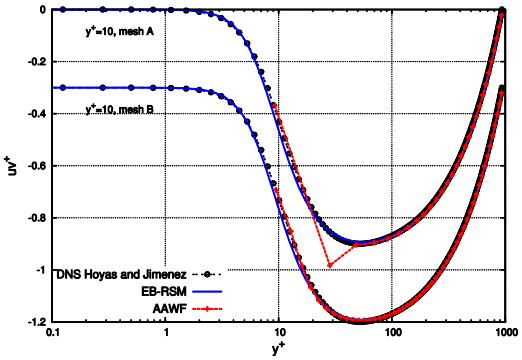
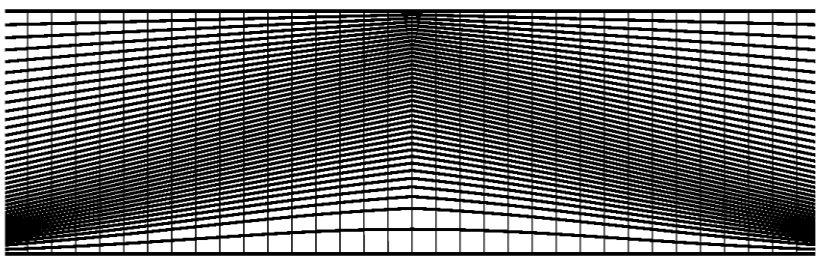


Figure 6 : Illustration of the discretization error introduced in the computation when the mesh is very coarse: when the refined mesh B is used, the kink in the variables vanishes.

4.2 2D Channel Flow

The case of a two-dimensional channel flow is considered. The friction Reynolds Number is $Re_\tau = 950$. Prescribed inlet profiles are the one taken from a precursor one dimensional periodic steady channel flow on a fine grid. To assess the AAWF, the mesh is built to obtain a non uniform distribution of the wall distance in the first cell. Figure 8 shows the distribution of y_P^+ along the stream-wise direction and figure 9 isolates the grid for $20 < x/H < 30$.

Near the inlet the refinement is typical for a Low-Reynolds Number model mesh, whereas further downstream the refinement is progressively shifted to that of a High-Reynolds Number one ($y_P^+ > 25$).



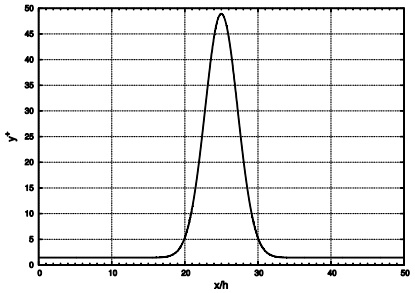


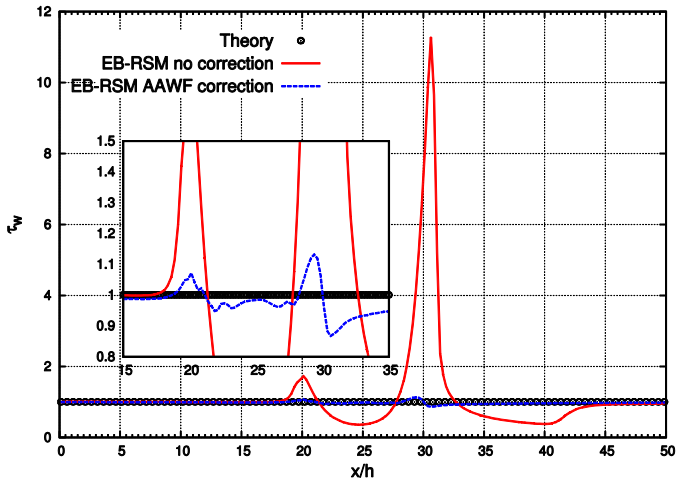
Figure 7 : Mesh used for the computation (only the part $20 < x/H < 30$ is represented) and the corresponding refinement distribution along the strea-mwise direction.

Figure 8a. compares the wall shear stress computed with the AAWF wall functions and the one given by the model with no correction (standard EB-RSM). On this type of mesh, the EB-RSM with no correction strongly deteriorates the prediction of the wall shear stress, which is normal given that the model uses non-slip boundary conditions. The latter is predicted with a maximum error of 12% when AAWF wall functions are employed. Those results are consistent with the one obtained by Billard and al. [5] on the same type of mesh for the Elliptic Blending eddy viscosity model. Figure 8b. compares the velocity profiles at different locations of the channel flow with the adaptive wall treatment proposed herein to those obtained with the EB-RSM. There is a very good agreement wherever the profile is located: there are no strong deformations of the velocity profiles by the mesh.

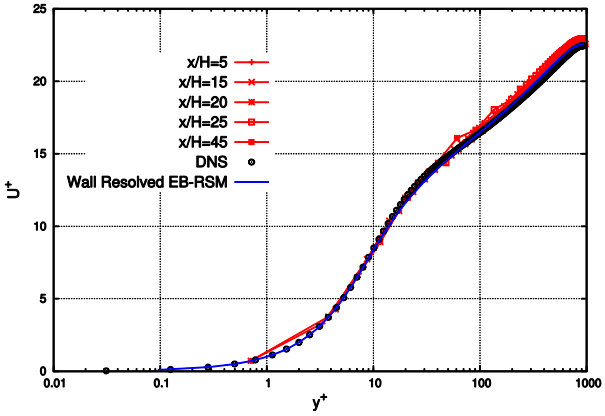
4.3 Flow over a backward facing step

For testing the AAWF approach in separating flows, the flow behind a backward facing step at Reynolds *Re=36000* based on the step height is considered. Skin friction coefficient results are presented and compared to experimental investigation by Driver and Seegmiller [21] in figure 9. Both AAWF wall function with $\lambda = 0$ and $\lambda \neq 0$ (i.e. sensitivity of the wall function to the local pressure gradient) are presented and compared to an integrated-to-the-wall EB-RSM. The mesh used for the AAWF method is a fully High Reynolds mesh whereas that of standard EB-RSM is fully Low-Reynolds ($y^+ < 1$ everywhere).

All the presented methods show a fairly good general agreement. There is no big effect in the present case of taking into account the pressure-gradient. This was already noticed by Popovac et al. [6], the backward facing step being more dominated by the shear layer enveloping the separation bubble than by local wall effects. This test has been only carried out to test the usability of the adaptive wall treatment proposed in the present work on a more complex test-case than the channel flow. Further investigations are ongoing.



a) Distribution of the wall shear stress along the stream-wise direction



b) Velocity profles obtained with AAWF at different cross section locations

Figure 8 : Results obtained on a 2D non uniform Channel Flow with the AAWF approach

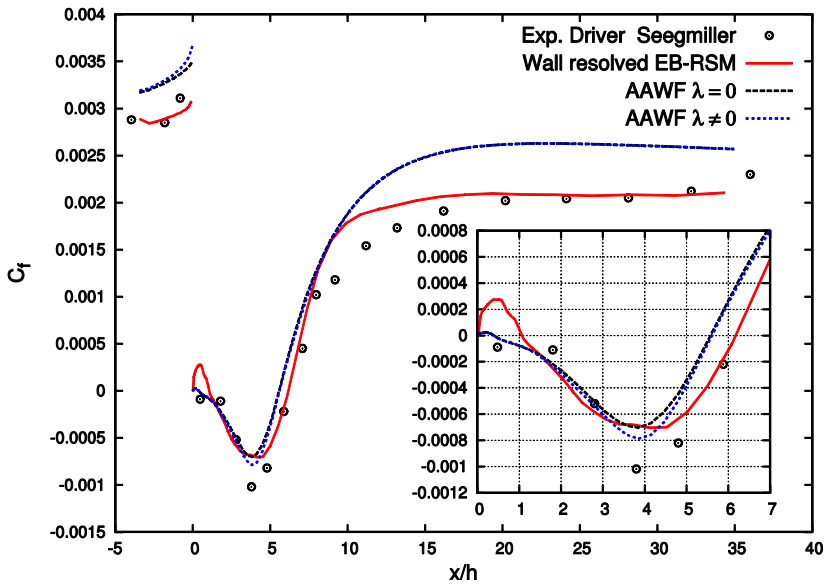


Figure 9 : Skin friction coefficient distribution along the stream-wise direction for the backward facing step. The step is located at $x/h = -4$. Numerical results are compared with experimental data of Driver and Seegmiller.

5. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

Wall treatment remains one of the weakest points in industrial simulations of turbulent flows. Adaptive wall functions for the EB-RSM, based on algebraic relations are introduced. They are applicable in complex non-equilibrium flows irrespective of whether the first near wall cell falls in the viscous sublayer, in the logarithmic layer or in the buffer layer.

It has been tested on several configuration including fully developed 1D/2D Channel Flows, using different grid refinement, and a backward facing step in an "industrial mode". The approach shows good results on all the configurations compared to the reference data. Ongoing computations will combine different "hybrid" grid refinement for the backward facing step to emphasize the advantage of AAWF over more conventional approaches.

The strength of the present approach relies on the coupling of a precise and robust second moment closure model with flexible wall functions. Indeed, instead of conventional wall functions, that implies equilibrium assumptions, a more general method is proposed in this study that makes wall functions sensitive to non-equilibrium effects. More adequate test cases will be undertaken to shed the light on this non equilibrium term (round impinging jet).

ACKNOWLEDGMENT

The authors thank the French National Research Agency for its contribution in funding the present study (CIFRE 2012/1467).

REFERENCES

[1] Chieng C.C., Launder B.E, 1980, On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 3, pp. 189-207

[2] T.J. Craft, A.V. Gerasimov, H. Iacovides and B.E. Launder, 2002, Progress in the generalization of wall functions treatment, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 148-160

[3] T.J. Craft, S.E. Gant, H. Iacovides and B.E. Launder, 2004, A new wall function strategy for complex turbulent flows, *Numer. Heat Transfer*, B, Vol. 45, pp. 301-317

[4] G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, and P. Durbin, 2005, Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions*, J. Comput. Phys*., Vol. 420, pp. 265-291

[5] F. Billard, K. Osman and D.R. Laurence, 2012, Development of adaptive wall functions for an elliptic-blending model, *ICHMT DIGITAL LIBRARY ONLINE*

[6] T. Esch and F.R. Menter, 2003, Heat transfer predictions based on two-equation turbulence model with advanced wall treatment, *Turb. Heat Mass Transfer*, Vol. 4, pp. 633-640

[7] M. Popovac and K. Hanjalić, 2007, Compound wall treatment for RANS computation of complex turbulent flows and heat transfer, *Flow Turb. Comb.*, Vol. 78, pp. 177-202

[8] N. Basara, 2006, Eddy viscosity transport model based on elliptic relaxation approach, *AIAA Journal*, Vol. 44, pp. 1686-1690

[9] M.M. Rahman and T. Siikonen, 2012, Compound wall treatment with Low-Re turbulence model, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 68, pp. 706-723

[10] J.-F. Wald, S. Benhamadouche and R. Manceau, 2014, Adaptive wall treatment for the Elliptic Blending Reynolds Stress model, In *Proceedings of the 10th ETMM conference, Marbella, Spain*.

[11] R. Manceau and K. Hanjalić, 2002, Elliptic Blending model: A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure, *Phys. of Fluids*, Vol. 14, pp. 744-754

[12] C.G. Speziale, S. Sarkar and T.B. Gatski, 1991, Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 227, pp. 245

[13] H. Reichardt, 1951, Vollstandige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Z. angew. Math. Mech.*, Vol. 31, pp. 208–219

[14] D. B. Spalding, 1961, A Single Formula for the "Law of the Wall*", J. Appl. Mech.*, Vol. 28, pp. 455-458.

[15] A. A. Townsend, 1961, Equilibrium layers and wall turbulence, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 61, pp. 97-120

[16] S. Hoyas and J. Jimenez, 2006, Scaling of velocity fluctuations in turbulent channels up to Re_τ=2000, *Phys. of Fluids*, Vol. 18

[17] I. Marusić and A.E. Perry, 1995, A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers. Part 2: Further experimental support, *J. Fluid. Mech*., Vol. 298, pp. 389-407

[18] F. Archambeau, N. Mechitoua and M. Sakiz, 2004, A finite volume method for the computation of turbulent incompressible flows, *Int. J. on Finite Volumes*, 1(1)

[19] A.G. Oceni, Modélisation algébrique explicite à pondération elliptique pour les écoulements turbulents en présence de paroi, 2009, *PhD Thesis*

[20] F. Dehoux, Y. Lecocq, S. Benhamadouche, R. Manceau and L.-E. Brizzi, 2012, Algebraic modeling of the turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach. Application to forced and mixed convection regimes, *Flow Turbul. Combust.*, Vol. 88, pp. 77-100.

[21] D.M. Driver and H.L. Seegmiller, 1985, Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow, *AIAA Journal*, Vol.. 23, p. 163

Bibliographie

[Amano 1984] R.S. Amano. *Development of a turbulence nearwall model and its application to separated and reattached flows.* Numerical Heat Transfer, vol. 7, pages 59–75, 1984. (Cité en pages 40, 41, 42 et 58.)

[Archambeau 2004] F. Archambeau, N. Mechitoua et M. Sakiz. *Code_ Saturne : A Finite Volume Code for the Computation of Turbulent Incompressible flows.* Internation Journal on Finite Volume, 2004. (Cité en pages 5, 47, 79 et 187.)

[Baldwin 1978] B. S. Baldwin et H. Lomax. *Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows.* AIAA Journal, vol. 78, page 257, 1978. (Cité en page 12.)

[Basara 2006] B. Basara. *Eddy viscosity transport model based on elliptic relaxation approach.* AIAA Journal, vol. 44, pages 1686–1690, 2006. (Cité en pages 55 et 78.)

[Baughn 1989] J.W. Baughn et S. Shimizu. *Heat transfer measurement from a surface with uniform heat flux and an impinging jet.* ASME Journal of Heat Transfer, vol. 111, pages 1096–1098, 1989. (Cité en pages 121, 123, 128, 184 et 185.)

[Benhamadouche 2014a] S. Benhamadouche. *On the (U)RANS and LES approaches for turbulent incompressible single phase flows in nuclear engineering applications.* In E-proceedings of the 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics - Nureth 16, 30 Aout - 4 Septembre, Chicago, USA, 2014. (Cité en pages 58 et 61.)

[Benhamadouche 2014b] S. Benhamadouche, W.J. Malouf et M. Arenas. *Effects of spatial discretisation and RANS turbulence modelling on the numerical simulation of a flow through a square-edged orifice in a rounc pipe.* In E-proceedings of the 36th IAHR World Congress 28 June - 3 July, 2015, The Hague, the Netherlands, 2014. (Cité en pages 157, 160 et 162.)

[Benhamadouche 2015] S. Benhamadouche, M. Arenas et W. J. Maloouf. *Wall-Reolsved Large Eddy Simulation of a flow through a square-edged orifice in a round pipe at* $Re = 25000$. Nuclear Engineering and Design, A paraitre, 2015. (Cité en pages 27, 28, 29, 30 et 157.)

[Billard 2012] F. Billard et D. Laurence. *Development of a turbulence nearwall model and its application to separated and reattached flows.* International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 33, pages 45–58, 2012. (Cité en pages 15 et 142.)

[Billard 2015] F. Billard, D. Laurence, K. Osman et S. Utyuzhnikov. *Adaptive Wall Functions for an Elliptic Blending Eddy Viscosity Model Applicable to Any Mesh Topology.* Flow, Turbulence and Combustion, vol. 94, pages 817–842, 2015. (Cité en pages 55, 59, 80, 83, 91, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 118 et 141.)

[Bradshaw 1967] P. Bradshaw, D. H. Ferriss et N.P. Atwell. *Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation.* Journal of Fluid Machanics, vol. 28, pages 593–616, 1967. (Cité en pages 34 et 58.)

[Cebeci 1974] T. Cebeci et A.M.O. Smith. Analysis of turbulent boundary layers, volume 23. Academic Press, 1974. (Cité en page 12.)

[Chassaing 2000] P. Chassaing. Turbulence en mécanique des fluides. nalayse du phénomèe en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur. Toulouse, France, Cépaduès-Editions, *Collection Polytech.*, 2000. (Cité en page 12.)

[Chedevergne 2010] F. Chedevergne. *Advanced wall model for aerothermodynamics.* International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 31, pages 916–924, 2010. (Cité en page 58.)

[Chieng 1980] C.C. Chieng et B.E. Launder. *On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion.* Numerical Heat Transfer, vol. 3, pages 189–207, 1980. (Cité en pages 37 et 38.)

[Chou 1945] P. Y. Chou. *On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation.* Quart. of Appl. Math., vol. 3, pages 38–54, 1945. (Cité en page 18.)

[Ciofallo 1989] M. Ciofallo et W.M. Collins. *k-ε predictions of heat transfer in turbulent recirculating flows using an improved wall treatment.* Numerical Heat Transfer, vol. 15, pages 21–47, 1989. (Cité en page 40.)

[Craft 2002] T.J. Craft, A. V. Gerasimov, H. Iacovides et B. E. Launder. *Progress in the generalisation of wall function treatments.* Int. J. Heat Fluid Flow, vol. 23, pages 148–160, 2002. (Cité en pages 42, 43, 46 et 58.)

[Craft 2004] T.J. Craft, S. E. Gant, H. Iacovides et B. E. Launder. *A new wall function strategy for complex turbulent flows.* Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 45, pages 301–318, 2004. (Cité en pages 57, 59, 94, 96 et 97.)

[Cruz 1998] D. O. A. Cruz et A. P. S. Freire. *On single limits and the asymptotic behaviour of separating turbulent boundary layers.* International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 41, no. 14, pages 2097–2111, 1998. (Cité en page 29.)

[Cruz 2000] D. O. A. Cruz et A. P. S. Freire. *A Law of the Wall Formulation for Recirculating Flows.* Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, vol. 22, no. 1, 2000. (Cité en page 29.)

[Daly 1970] B. J. Daly et F. H. Harlow. *Transport equations in turbulence.* Physics of Fluids, vol. 13, pages 2634–2649, 1970. (Cité en pages 19 et 21.)

[Dehoux 2012] F. Dehoux. *Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle.* PhD thesis, Université de Poitiers, 2012. (Cité en pages 3, 19, 123 et 178.)

[Driest 1956] E. R. Van Driest. *On turbulent flow near a wall.* Journal of Aeronautical Sciences, vol. 23, no. 11, pages 1007–1011, 1956. (Cité en pages 12 et 30.)

[Driver 1985] D.M. Driver et H.L. Seegmiller. *Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow.* AIAA Journal, vol. 23, page 163, 1985. (Cité en page 144.)

[Durbin 1993] P. A. Durbin. *A Reynolds stress model for near wall-wall turbulence.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 249, pages 465–498, 1993. (Cité en page 19.)

[Durbin 1996] P.A. Durbin. *On the k-ε stagnation-point anomaly.* International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 17, pages 89–90, 1996. (Cité en page 183.)

[Esch 2003a] T. Esch et F.R. Menter. *Heat transfer Predictions based on two-equation turbulence models with advanced wall treatment.* In Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, pages 633–640, 2003. (Cité en pages 49 et 104.)

[Esch 2003b] T. Esch, F.R. Menter et W. Vieser. *Heat transfer predictions based on two-equation turbulence models.* In Proc. 6th ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference,Hawaii, 2003, 2003. (Cité en page 49.)

[Flageul 2015] C. Flageul. *Création de bases de données fines par simulation directe pour les effets de la turbulence sur les transferts thermiques pariétaux.* PhD thesis, Université de Poitiers, 2015. (Cité en page 3.)

[Fluent 2013] ANSYS Fluent. *Chapitre 4 : Turbulence.* Theory Guide, page 88, 2013. (Cité en page 47.)

[Geers 2004] L.F.G. Geers, M.J. Tummers et K. Hanjalić'. *Experimental investigation of impinging jet arrays.* Experiments in Fluids, vol. 36, pages 946–958, 2004. (Cité en page 185.)

[George 2007] W. K. George. *Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows ?* Philosophical Transactions of the Royal Society A, vol. 365, pages 789–806, 2007. (Cité en page 27.)

[Gosman 1967] A. D. Gosman, W. M. Pun, A. K. Runchal, D. B. Spalding et M. Wolfshtein. Heat and mass transfer in recirculating flows. Academic Press, New York, 1967. (Cité en page 35.)

[Hadziabdić 2008] M. Hadziabdić et K. Hanjalić. *Vortical structures and heat transfer in a round impinging jet.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 596, pages 221–260, 2008. (Cité en pages 121, 123, 128 et 185.)

[Hanjalic 2004] K. Hanjalic, M. Popovac et M. Hadziabdic. *A robust near-wall elliptic-relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD.* Int. J. Heat Fluid Flow, vol. 25, pages 1047–1051, 2004. (Cité en pages 14 et 52.)

[Hickel 2012] S. Hickel, E. Touber, J. Bodart et J. Larsson. *A parametrized non-equilibrium wall-model for large-eddy simulation.* In Proceedings of the Summer Program 2012, Center for Turbulence Research, 2012. (Cité en pages 73, 97, 98 et 136.)

[Howard 2012] R. J. A. Howard. *A wall heat transfer function for equilibirum flows - combination of Reichardt and Kader profiles with Wang type scaling.* In Begel House, editeur, Proc. 7th Int. Cong. Turbulence, Heat and Mass Transfer (THMT), pages 345–348, 2012. (Cité en pages 179 et 180.)

[Hoyas 2006] S. Hoyas et J. Jimenez. *Scaling of velocity fluctuations in turbulent channels up to* $Re_\tau = 2000$. Physics of Fluids, vol. 18, 2006. (Cité en pages 50, 52, 55, 57, 69, 70, 71, 80, 84, 113, 114 et 115.)

[Iacovides 2012] H. Iacovides. *Lecture notes in Current Practice and Recent Developments in Wall Functions, Part 1*, 2012. (Cité en pages 42 et 46.)

[Iacovides 2013] H. Iacovides, B. Launder et D. Laurence ans A. West. *Alternative strategies for modelling flows over in-line tube banks.* In Proc. 8th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP), Poitiers, France, 2013. (Cité en page 47.)

[ISO 2003] *Measurment of fluid flow by means of pressure differential devices inserted in circular cross-section conduits.* 2003. (Cité en page 157.)

[Iwamoto 2002] K. Iwamoto, Y. Suzuki et N. Kasagi. *Reynolds number effect on wall turbulence : toward effective feedback control.* Physics of Fluids, vol. 23, page 678, 2002. (Cité en pages 23, 25 et 64.)

[Johnson 1982] R.W. Johnson et B.E. Launder. *Discussion of "On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion".* Numerical Heat Transfer, vol. 5, pages 493–496, 1982. (Cité en page 39.)

[Jones 1972] W.P. Jones et B.E. Launder. *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence.* Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 15, pages 301–314, 1972. (Cité en page 15.)

[Kader 1981] B. A. Kader. *Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers.* Internartional Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 24, pages 1541–1544, 1981. (Cité en pages 31, 48, 52 et 180.)

[Kalitzin 2004] G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino et P. Durbin. *Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions.* Journal of Computational Physics, vol. 204, pages 265–291, 2004. (Cité en pages 50, 51, 58, 88, 104 et 115.)

[Karman 1930] T. Von Karman. *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.* Nachr. Ges. Wiss. Math-Phys Klasse Göttingen, vol. 5, pages 58–76, 1930. (Cité en page 21.)

[Kawamura 1998] H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe et K. Yamamoto. *DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid.* International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 19, pages 482–491, 1998. (Cité en page 180.)

[Lardeau 2014] S. Lardeau et R. Manceau. *Computations of complex flow configurations using a modified Elliptic-Blending Reynolds-Stress model.* In Proc. 10th ERCOFTAC Int. Symp. on Eng. Turb. Modelling and Measurements, Marbella, Spain, 2014. (Cité en page 94.)

[Launder 1974] B. E. Launder et D. B. Spalding. *The Numerical Computation of Turbulent Flow.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 3, no. 2, pages 269–289, 1974. (Cité en pages 12 et 36.)

[Laurence 2005] D. R. Laurence, J. C. Uribe et S. V. Utyuzhnikov. *A robust formulation of the v^2-f model.* Flow, Turbulence and Combustion, vol. 73, pages 169–185, 2005. (Cité en page 14.)

[Lee 2015] M. Lee et R. D. Moser. *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 5200$.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 774, pages 395–415, 2015. (Cité en pages 25, 26, 32, 65, 113 et 114.)

[Manceau 2002] R. Manceau et K. Hanjalic. *Elliptic Blending Model : A New Near-Wall Reynolds-Stress Turbulence Closure.* Phys. Fluids, vol. 14, no. 2, pages 744–754, 2002. (Cité en page 19.)

[Manceau 2003] R. Manceau. *Accounting for wall-induced Reynolds stress anisotropy in Explicit Algebraic Stress Models.* In Proc. 3rd Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Sendai, Japan, 2003. (Cité en page 87.)

[Manceau 2014] R. Manceau, R. Perrin, M. Hadziabdić' et S. Benhamadouche. *Investigation of the interaction of a turbulent impinging jet and a heated, rotating disk.* Phys. Fluids, vol. 26, no. 3, 2014. (Cité en pages 62 et 126.)

[Manceau 2015a] R. Manceau. Industrial codes for cfd. http ://remi.manceau.perso.neuf.fr, 2015. (Cité en pages 4 et 86.)

[Manceau 2015b] R. Manceau. *Recent progress in the development of the Elliptic Blending Reynolds-stress model.* Int. J. Heat Fluid Fl., vol. 51, pages 195–220, 2015. (Cité en pages 19 et 21.)

[Marusic 2010] I. Marusic, B.J. McKeon, P.A. Monkewitz, H.M. Nagib, A.J. Smits et K.R. Sreenivasan. *Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers : Recent advances and key issues.* Phys. Fluids, vol. 22, no. 065103, 2010. (Cité en page 80.)

[Marusic 2013] I. Marusic, J.P. Monty, M. Hultmark et A.J. Smits. *On the logarithmic region in wall turbulence.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 716, no. 065103, 2013. (Cité en page 27.)

[Menter 1994] F. R. Menter. *Two-equation eddy-viscosity models for engineering applications.* AIAA Journal, vol. 68, pages 1598–1605, 1994. (Cité en page 13.)

[Millikan 1938] C. B. Millikan. *A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes.* In Wiley, editeur, Proc. 5th Int. Cong. Applied Mechanics, pages 386–392, 1938. (Cité en page 21.)

[Moser 1999] R. D. Moser, J. Kim et N. N. Mansour. *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$.* Physics of Fluids, vol. 11, no. 4, pages 943–945, 1999. (Cité en pages 25, 33, 113 et 114.)

[Nagano 1998] Y. Nagano, T. Tsuji et T. Houra. *Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient.* International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 19, pages 563–572, 1998. (Cité en pages 72 et 73.)

[Oceni 2009] Abdou Gafari Oceni. *Modélisation algébrique explicite à pondération elliptique pour les écoulements turbulents en présence de paroi.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2009. (Cité en page 87.)

[Panton 1997] R. L. Panton. *A Reynolds Stress Function for Wall Layers.* Journal of Fluids Engineering, vol. 119, pages 325–330, 1997. (Cité en page 63.)

[Pope 1975] S. Pope. *A more general effective viscosity hypothesis.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 72, pages 331–340, 1975. (Cité en page 11.)

[Pope 2000] S. Pope. Turbulent flows. Cambridge University Press, 2000. (Cité en pages 47, 86 et 88.)

[Popovac 2007] M. Popovac et K. Hanjalic. *Compound Wall Treatment for RANS Computation of Complex Turbulent Flows and Heat Transfer.* Flow Turbulence Combust., vol. 78, pages 177–202, 2007. (Cité en pages 31, 52, 54, 55, 59, 69, 70, 71, 72, 78, 79 et 83.)

[Prandtl 1930] L. Prandtl. *Zur Turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten.* Ergeb. Aerod. Versuch Göttingen, vol. 4, 1930. (Cité en page 21.)

[Rahman 2012] M. M. Rahman et T. Siikonen. *Compound wall treatment with low-Re turbulence models.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 68, pages 706–723, 2012. (Cité en pages 55 et 78.)

[Reichardt 1951] H. Reichardt. *Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen.* Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 31, pages 208–219, 1951. (Cité en pages 30, 69, 70, 71 et 179.)

[Rhie 1983] C.M. Rhie et W.L. Chow. *Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation.* AIAA Journal, vol. 11, pages 1525–1532, 1983. (Cité en page 190.)

[Rotta 1951] J. C. Rotta. *Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz.* Zeitschrift für Physik, vol. 129, pages 547–572, 1951. (Cité en pages 18 et 20.)

[Shan 2013] F. Shan, A. Fujishiro, T. Tsuneyoshi et Y. Tsuji. *Particle image velocimetry measurments of flow field behind a circular square-edged orifice in a round pipe.* Experiment in Fluids, vol. 54, no. 6, pages 1–18, 2013. (Cité en page 157.)

[Shih 1999] T. Shih, L. A. Povinelli, N. Liu, M. Potapczuk et J. L. Lumley. *A Generalized Wall Function.* NASA technical report 1999-209398, 1999. (Cité en page 28.)

[Skote 2002] M. Skote et D. S. Henningson. *Direct numerical simulation of separated turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 471, pages 107–136, 2002. (Cité en pages 28, 29 et 71.)

[Spalart 2000] P.R. Spalart. *Strategies for turbulence modelling and simulations.* International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 21, pages 252–263, 2000. (Cité en page 2.)

[Spalding 1961] D. B. Spalding. *A Single Formula for the Law of the Wall.* J. Appl. Mech, vol. 38, no. 3, pages 455–458, 1961. (Cité en page 31.)

[Spalding 1967] D. B. Spalding. *Heat transfer from turbulent separated flows.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 27, pages 97–109, 1967. (Cité en page 35.)

[Speziale 1991] C. G. Speziale, S. Sarkar et T. B. Gatski. *Modeling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence : an Invariant Dynamical Systems Approach.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 227, pages 245–272, 1991. (Cité en pages 18 et 33.)

[Stratfort 1959] B.S. Stratfort. *The prediction of separation of the turbulent boundary layer.* Journal of Fluid Machanics, vol. 5, pages 1–16, 1959. (Cité en page 27.)

[Suga 2013] K. Suga, Y. Ishibashi et K. Kuwata. *An analytical wall-function for recirculating and impinging turbulent heat transfer.* Internartional Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 41, pages 45–54, 2013. (Cité en page 46.)

[Tennekes 1972] H. Tennekes et J. L. Lumley. A first course in turbulence. MIT Press, 1972. (Cité en page 27.)

[*Code_Saturne* 2015] *Code_Saturne. Code_Saturne 4.0 Theory Guide.* page 136, 2015. (Cité en pages 104, 122 et 190.)

[Townsend 1961] A. A. Townsend. *Equilibirum layers and wall turbulence.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 11, pages 97–120, 1961. (Cité en page 28.)

[Versteeg 1995] H.K. Versteeg et W. Malalasekera. An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method. Longman Scientific and Thechnical, 1995. (Cité en page 188.)

[Wilcox 1988] D. C. Wilcox. *Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models.* AIAA Journal, vol. 26, pages 1299–1310, 1988. (Cité en page 13.)

[Wosnik 2000] M. Wosnik, L. Castillo et W. K. George. *A theory for turbulent pipe and channel flows.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 421, pages 115–145, 2000. (Cité en page 27.)

[Yap 1987] C.R. Yap. *Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows*. PhD thesis, Faculty of Technology, University of Manchester, 1987. (Cité en page 126.)