Contribution à l'étude de l'échantillonnage non uniforme dans le domaine de la radio intelligente.

Samba Traore

▶ **To cite this version:**

Samba Traore. Contribution à l'étude de l'échantillonnage non uniforme dans le domaine de la radio intelligente.. Autre. CentraleSupélec, 2015. Français. NNT : 2015CSUP0023 . tel-01324511

HAL Id: tel-01324511

https://theses.hal.science/tel-01324511

Submitted on 1 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2015-23-TH

CentraleSupélec

Ecole Doctorale MATISSE

« Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Systèmes Electroniques »

THÈSE DE DOCTORAT

DOMAINE : STIC
Spécialité : Télécommunications

Soutenue le 9 Décembre 2015

par :

Samba TRAORE

Contribution à l'étude de l'échantillonnage non uniforme dans le domaine de la radio intelligente

Composition du jury :

Directeur de thèse :	Yves LOUËT	Professeur (CentraleSupélec)
Président du jury :	Oliver BERDER	Professeur (Université de Rennes 1)
Rapporteurs :	Marie CHABERT	Professeur (INP- ENSEEIHT- Toulouse)
	Dominique DALLET	Professeur (Laboratoire IMS - Bordeaux)
Examinateurs :	Laurent ROS	Maître de Conférences (Grenoble INP)
	Estêvão FERNANDEZ	Professeur (Université de Fortaleza, Brésil)

Table des matières

Table des matières **1**

Introduction **9**

1 La théorie de la conversion analogique numérique **17**

1.1 Introduction 17

1.2 La conversion analogique numérique basée sur l'échantillonnage uniforme . 19

1.2.1 Principe de fonctionnement 20

1.2.2 Erreur de quantification 21

1.2.3 Bruit de quantification 22

1.2.4 Architectures de convertisseurs 24

1.2.4.1 CAN à échantillonnage de Nyquist 24

1.2.4.2 Convertisseur à sur-échantillonnage 24

1.2.5 Paramètres d'évaluation des performances 25

1.2.5.1 Paramètres statiques 25

1.2.5.2 Paramètres dynamiques 27

1.2.6 Limitations des convertisseurs basés sur l'échantillonnage uniforme . 29

1.3 L'échantillonnage non uniforme (ou irrégulier) 30

1.3.1 Échantillonnage aléatoire dépendant d'un signal d'horloge 31

1.3.1.1 Jittered Random Sampling (JRS) [1] 31

1.3.1.2 Additive Random Sampling (ARS) [1] 32

1.3.1.3 La condition d'anti-repliement spectral 33

1.3.2 Échantillonnage aléatoire indépendant d'un signal d'horloge 37

1.3.2.1 L'échantillonnage par traversée de niveaux 37

1.3.3 Les conditions de reconstruction 37

1.3.3.1 Condition de Paley et Wiener [2] 38

1.3.3.2 Condition de Duffin et Schaeffer [3] 39

1.3.3.3 Condition de Feichtinger et Gröchenig [4] 39
1.3.3.4 Condition de Papoulis [5] 40
1.3.3.5 Condition de Landau [6] 41
1.4 L'échantillonnage compressé (Compressed Sampling) 42
1.4.1 Le convertisseur large bande modulé 42
1.4.1.1 Description du modèle 42
1.4.1.2 Équations d'état et reconstruction 43
1.4.1.3 Choix des paramètres du MWC 45
1.4.2 Le Multi-Coset 46
1.4.2.1 Description du modèle 46
1.4.2.2 Equation d'état et reconstruction 47
1.4.2.3 Choix des paramètres du Multi-Coset 48
1.5 Conclusion 49

2 Analyse spectrale pour la détection de spectres dans un contexte d'échantillonnage non-uniforme 51

2.1 Introduction 51
2.2 Analyse spectrale avec des échantillons uniformes 52
2.2.1 Méthodes non paramétriques 53
2.2.1.1 Périodogramme de Schuster 53
2.2.1.2 Périodogramme modifié 54
2.2.1.3 Périodogramme de Bartlett 55
2.2.1.4 Méthode de Welch 57
2.2.1.5 Corrélogramme de Blackman-Tukey 59
2.2.1.6 Méthode de Capon [7] 60
2.2.2 Méthodes paramétriques 61
2.2.2.1 Méthode MUSIC 61
2.2.2.2 Modèles auto régressif - modèle AR [8] 63
2.2.2.3 Modèles à moyennes ajustées - modèle MA [8] 64
2.2.2.4 Modèle auto régressif à moyenne ajustée - modèle ARMA [8] 64
2.2.3 Conclusion 64
2.3 Analyse Spectrale avec l'échantillonnage non-uniforme 65

2.3.1 Quelques méthodes d'analyse spectrale avec échantillons non-uniformes . . . 65
2.3.1.1 Périodogramme de Lomb-Scargle [9] . . . 65
2.3.1.2 Méthodes basées sur le ré-échantillonnage . . . 68
2.3.2 Vérification de la condition d'anti-repliement spectral des modes JRS et ARS . . . 69
2.3.2.1 Formulations analytiques . . . 69
2.3.2.2 Simulation des schémas d'échantillonnage W_{jrs} et W_{ars} . . . 70
2.3.3 Analyse spectrale appliquée à l'échantillonnage Multi-Coset . . . 74
2.3.3.1 Formulation analytique . . . 74
2.3.3.2 Le choix du motif d'échantillonnage . . . 76
2.3.3.3 Influence des paramètres du Multi-Coset . . . 79
2.4 Résultats de simulations . . . 81
2.4.1 Analyse spectrale d'un signal multibandes : Modes JRS et ARS . . . 82
2.4.2 Simulations pour l'échantillonnage Multi-Coset . . . 85
2.5 Conclusions . . . 88

3 Système d'échantillonnage non uniforme pour signaux à taux d'occupation spectral variables 89

3.1 Introduction . . . 89
3.2 Système d'échantillonnage non uniforme pour la radio intelligente . . . 91
3.2.1 Rappels . . . 93
3.2.1.1 Le modèle d'un signal multi-bande . . . 93
3.2.1.2 L'échantillonnage Multi-Coset . . . 94
3.2.2 Description du SENURI . . . 95
3.2.3 La Conversion Analogique Numérique non uniforme . . . 96
3.2.3.1 Principe de fonctionnement du CAN non uniforme . . . 97
3.2.3.2 Architecture du CAN non uniforme . . . 98
3.2.3.3 Équations d'état du processus d'échantillonnage non uniforme . . . 99
3.2.4 Détection de bandes libres avec des échantillons non uniformes . . . 101
3.2.4.1 Principe de fonctionnement du détecteur . . . 101
3.2.4.2 Évaluation des performances du détecteur de bande libre. 104

3.2.5 Bloc de Calcul du motif d'échantillonnage optimal et des instants d'échantillonnage . . . 104
3.2.5.1 Principe de fonctionnement . . . 105
3.2.5.2 Calcul du motif d'échantillonnage optimal . . . 106
3.2.5.3 Fréquence moyenne d'échantillonnage . . . 107
3.2.6 Bloc de reconstruction . . . 108
3.2.6.1 La reconstruction sans bruit hors cellules actives . . . 108
3.2.6.2 La reconstruction avec bruit hors cellules actives . . . 108
3.2.6.3 Schémas de reconstruction . . . 109
3.2.7 Évaluation de notre système d'échantillonnage non uniforme . . . 112
3.2.7.1 État de notre système dans la *phase d'adaptation* . . . 113
3.2.7.2 État de notre système dans la *phase de reconstruction* . . . 114
3.2.8 Conclusion . . . 115
3.3 Le Multi-Coset Adaptatif . . . 116
3.3.1 Principe de fonctionnement du Mutli-Coset Adaptatif . . . 117
3.3.2 La détection des changements de spectre . . . 118
3.3.3 Conclusion . . . 120

4 Évaluation des performances des systèmes d'échantillonnages proposés 121
4.1 Introduction . . . 121
4.2 Évaluation du bloc de détection de spectre . . . 122
4.2.1 Les contraintes liées à la méthode Bartlett . . . 123
4.2.2 Influence du paramètre α . . . 124
4.2.3 Influence du paramètre L . . . 126
4.2.4 Influence du bruit (SNR) . . . 127
4.2.5 Le choix du paramètres β pour les modes *Burst* et *AliasMin* . . . 128
4.2.6 Influence de P_{fa} sur la fréquence moyenne d'échantillonnage . . . 129
4.3 Évaluation du bloc de détection des changements de spectre . . . 131
4.3.1 Estimation de la période de changement de spectre (T_{cs}) . . . 132
4.4 Évaluation du bloc de Reconstruction . . . 133
4.4.1 Influence du bruit . . . 133
4.4.2 Variation de l'erreur quadratique moyenne dans le temps . . . 134
4.5 Comparaison du MC classique avec nos systèmes . . . 134
4.6 Conclusion . . . 137

Conclusion et perspectives **141**

Table des figures **145**

Liste des algorithmes **151**

Publications de l'auteur durant la thèse **155**

Glossaire **157**

Bibliographie **165**

Résumé

De nos jours, la majorité des Convertisseurs Analogiques Numériques (CAN) fonctionne en échantillonnant uniformément un signal d'entrée à une fréquence supérieure ou égale à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal d'entrée. Cela est dû au théorème de Shannon [10](appelé aussi théorème de WKS en hommage aux deux autres contributeurs Whittaker [11] et Kotelnikov [12]). Or dans un contexte de grandes bandes passantes, le nombre de bits nécessaire pour coder le signal est très important et la fréquence d'échantillonnage est très élevée entraînant ainsi une forte consommation d'énergie au niveau des CANs. Or, il arrive que le taux d'occupation de la bande à échantillonner varie aux cours du temps. Néanmoins, les CANs à échantillonnage uniforme fonctionneront toujours à la même fréquence avec la même consommation d'énergie. Afin d'augmenter l'efficacité énergétique, il serait donc intéressant de pouvoir adapter soit la fréquence d'échantillonnage soit le nombre de bits du CAN afin de réduire sa consommation d'énergie.

Dans ce cadre, les travaux présentés dans cette thèse visent principalement l'étude de deux nouveaux systèmes d'échantillonnage doués d'intelligence (basé sur l'échantillonnage non-uniforme périodique, une technique d'échantillonnage compressé) dans la réduction de la consommation d'énergie lors de la numérisation de signaux multibandes. Notre premier système d'échantillonnage que nous avons appelé le SENURI (pour Système d'Échantillonnage non-uniforme en Radio Intelligente) est constitué d'un bloc de CAN non-uniforme (un CAN uniforme piloté par une horloge non-uniforme), d'un bloc de détection de bande libre (qui fonctionne avec des échantillons provenant du CAN non-uniforme et dont le rôle est de déterminer l'emplacement des bandes contenues dans le signal d'entrée), d'un bloc de contrôle (permettant de choisir les instants d'échantillonnage du CAN non-uniforme ainsi que de la fréquence moyenne d'échantillonnage) et enfin d'un bloc de reconstruction(afin de reconstruire les échantillons aux rythmes uniformes). Le principe de fonctionnement du SENURI est basé sur celui de l'échantillonnage non-uniforme périodique, plus connu sous l'appellation Multi-Coset Sampling (MC). Il est capable d'adapter sa fréquence moyenne d'échantillonnage en fonction du taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner. Le second système est une version améliorée du premier et comporte un bloc de détection des instants de changement de spectre. Cela lui permet, contrairement du SENURI, de n'avoir d'aucune information sur les instants de changement du taux d'occupation spectral. Nos deux systèmes rentrent dans la catégorie des dispositifs radio intelligents.

Introduction

Évolution des systèmes de télécommunications

Jusqu'à la fin des années 80 l'essentiel des composants des systèmes de télécommunication était analogique, peu flexible et généralement dédié à la mise en œuvre et l'exploitation d'une forme d'onde spécifique dans une bande de fréquences prédéterminée. Modifier le comportement d'un matériel se révélait impossible à moins de devoir remplacer certains composants électroniques. Le début des années 90 est marqué par l'entrée du domaine des radiocommunications dans le monde du numérique avec des équipements composés de blocs mixtes analogiques et numériques. Ce changement de paradigme a permis d'offrir des standards utilisant non plus les modulations analogiques mais numériques. L'utilisation des modulations numériques offre des avantages majeurs par rapport aux modulations analogiques :

- les systèmes à modulations numériques tendent à être moins sensibles aux distorsions comme la diaphonie, les non linéarités ou encore le bruit ;
- les performances en terme de rapport signal à bruit sont largement meilleures dans le cas des modulations numériques. Cela confère aux systèmes un meilleur compromis bruit/largeur de bande spectrale ;
- les modulations numériques offrent une liberté complète du multiplexage de données, vidéo et voix pendant la même transmission ;
- l'intégration et le prix des équipements sont considérablement diminués par l'utilisation de techniques numériques de traitement du signal ;

Cela permet l'apparition de terminaux bon marché pour le grand public ainsi que de nouveaux services et l'augmentation des ressources en matière de puissance de calcul des équipements embarqués a favorisé l'émergence de nouveaux services très gourmands en débit (Internet, GPS, TV, Bluetooth, etc.). Afin de fournir, à un nombre croissant d'utilisateurs les services demandés, de nouvelles normes (DVB, DAB, ...) de communication

sans fils continuent de voir le jour.

Une norme est un ensemble de règles de conformité ou de fonctionnement légiféré par un organisme de normalisation mandaté, comme l'ISO au niveau international, l'UIT ou l'AFNOR. Comme la langue anglaise (« norme » se dit « standard » en anglais), nous ne ferons pas de différence entre norme et standard de communication. Aux États-Unis l'IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) est en charge de la gestion de la normalisation des réseaux. L'organisme européen de normalisation est l'ETSI (European Telecommunications Standards Institute).

Les spécifications relatives à une norme de communication sans fil sont nombreuses et touchent toutes les couches du modèle OSI, néanmoins nous pouvons citer quelques une relatives à la couche physique :

- Le type de modulation : il peut être analogique ou numérique, mono ou multi porteuse. Nous pouvons citer par exemple : la modulation d'amplitude (Amplitude Modulation - AM), la modulation d'amplitude en quadrature (Quadrature Amplitude Modulation - QAM), la modulation OFDM.
- La largeur de bande : c'est la bande de fréquence qui contient les informations utiles.
- La largeur du canal : la bande est découpée en sous bandes, ces sous bandes constituent les canaux.
- La technique de multiplexage : elle définit la façon dont les utilisateurs accèdent aux canaux. Nous pouvons citer par exemple : le CDMA, le TDMA et l'OFDMA.
- La sensibilité de référence ou puissance minimale de réception : c'est la puissance minimale à partir de laquelle le récepteur est capable de fonctionner correctement.
- La puissance de saturation : c'est la puissance maximale supportable par le récepteur.
- Les voies montantes et descendantes correspondent aux fréquences d'émission et de réception

Une fois les normes établies, des commissions distribuent ces fréquences aux utilisateurs selon la taille du réseau créé. Aux États Unis c'est la FCC (Federal Communications Commission), en France c'est l'Agence nationale des fréquences (ANFR). Cette allocation du spectre varie en fonction des états, régions, départements, etc.

De l'intelligence dans la radio

La prolifération des normes de radiocommunications et des services mobiles posent de nombreux problèmes, notamment l'interopérabilité des systèmes, l'accès aux ressources spectrales et les dépenses énergétiques. En effet, la plupart des terminaux mobiles (ordinateurs portables, smartphones, tablettes, etc.) disposent de moyens de connexion à un ou plusieurs réseaux sans fil (WiFi, Bluetooth, GSM, etc.). On parle alors de terminaux multi-standard. Cependant, la grande majorité de ces terminaux utilise un empilement de front-ends analogiques, chacun dédié au traitement d'un seul standard. Les terminaux à empilement de front-end présentent de nombreux problèmes, notamment de consommation d'énergie, d'encombrement ainsi que d'interopérabilité. Le développement de nouvelles architectures de terminaux susceptibles de recevoir plusieurs signaux utilisant des bandes et/ou des standards différents, à faible consommation, encombrement et à longue durée de vie est indispensable. La radio logicielle (SoftWare Radio - SWR) introduite par Joseph Mitola en 1993 [13], est vue comme une solution à ces problèmes. Elle vise à rendre les terminaux flexibles, reconfigurables et indépendants des normes. Le concept de radio logicielle repose sur la programmation logicielle de toutes les fonctionnalités de l'interface de radiocommunication, réalisée par des circuits matériels dédiés. Cette programmation doit définir : la fréquence porteuse, la largeur de bande du canal, la modulation ainsi que le codage.

Pour réduire le plus possible l'encombrement du terminal radio logiciel multistandard, il est nécessaire d'utiliser une seule architecture compacte, avec un étage de conversion analogique numérique très proche de l'antenne (voir Fig.1).

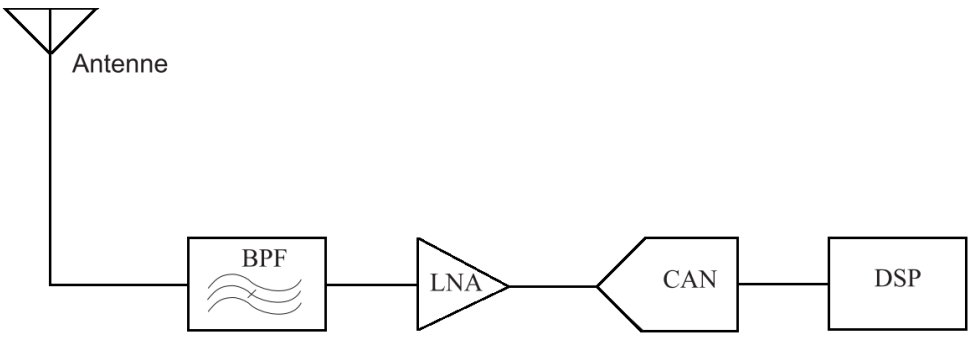


FIGURE 1 – L'architecture idéale d'un recepteur radio logicielle

Cette architecture devra alors pouvoir traiter plusieurs normes de communications radio avec des spécifications différentes, des canaux de communication à bande étroites ou larges, centrées sur des fréquences porteuses de quelques GHz et de forte dynamique (écart

entre la puissance minimale et la puissance maximale) jusqu'à 100 dB pour le GSM. De plus, le traitement numérique doit être adapté à la norme sélectionnée et donc répondre aux exigences de la modulation et des techniques d'accès. Le récepteur radio logicielle qui satisfait à toutes ces contraintes est difficilement réalisable, à cause de nombreuses limitations technologiques dû principalement au niveau de la numérisation. En effet, la numérisation des signaux dans le domaine RF (Radio Fréquence) nécessite de disposer d'un Convertisseur Analogique Numérique (CAN) répondant aux trois exigences suivantes :

— une fréquence d'échantillonnage très élevée,
— une très large bande passante,
— un très grand nombre de bits de codage.

De tels CANs consommeraient une quantité phénoménale d'énergie et généreraient un immense flot de données. Toutes ces contraintes, entre autres, ont poussé la communauté scientifique à définir un nouveau concept : celui de la radio logicielle restreinte (SDR, Software Defined Radio). Il se caractérise par une transposition de la bande passante sur une fréquence intermédiaire du signal avant la numérisation, ce qui permet de relâcher un peu les contraintes sur le CAN.

Les activités de recherche, dans le domaine de la SDR, à travers le monde ont pour objectif de faire tendre ce système vers la radio logicielle idéale. Ces recherches se focalisent sur trois thématiques : le développement de nouveaux circuits radio fréquence (front-end analogique), la proposition de nouvelles architectures de conversion analogique numérique (considérée comme le principal verrou de la radio logicielle) pour la numérisation du signal radio et l'amélioration des architectures reconfigurables et des algorithmes de traitement numérique des données pour une rapidité accrue.

L'abondance des normes et des services mobiles crée également le problème d'accès aux ressources spectrales. En effet, certaines bandes et réseaux (GSM, WiFi, etc) sont d'ores et déjà surchargées aux heures de pointe alors que d'autres sont rarement utilisées. Un rapport sur l'utilisation des fréquences de la FCC publié en 2002 [14] montre que dans plus de 70% des cas, le spectre est sous-utilisé à certains moments et à certains endroits. Des études similaires effectuées en France dans [15] [16] [17] ont abouti à la conclusion d'une sous-utilisation du spectre. L'idée a donc naturellement émergé de développer des outils permettant de mieux utiliser le spectre. Le concept de la radio intelligente est vu comme une solution à ce problème. Il a été proposé en 1999[18] et vise à donner à un équipement radio des moyens de mesurer les paramètres de son environnement et de s'y adapter, en fonction de son état interne, afin d'atteindre des objectifs prédéfinis. De façon

plus restrictive, un système est qualifié de radio intelligente ou radio opportuniste s'il est capable de détecter par lui-même des plages fréquentielles libres et de changer ses paramètres internes afin de répondre, d'une part, aux attentes de l'utilisateur et, d'autre part, aux contraintes de disponibilité des fréquences.
La Radio intelligente propose un partage du spectre entre un utilisateur dit primaire (détenteur de licence), et un utilisateur dit secondaire (non détenteur de licence). L'objectif principal de cette gestion du spectre consiste à obtenir un taux maximum d'exploitation du spectre radio. Pour ce faire, l'utilisateur secondaire doit être capable de détecter les bandes libres, de se configurer pour transmettre, de détecter le retour de l'utilisateur primaire et ensuite cesser de transmettre et chercher une autre bande libre.

Les problématiques

En radio intelligente, l'idéal serait de pouvoir travailler sur de larges plages fréquentielles or, d'après le théorème de Shannon[10], la fréquence d'échantillonnage des données traitées est liée à la bande d'observation considérée. En effet, la contrainte principale de l'échantillonnage uniforme est qu'on ne peut pas identifier de manière sûre les fréquences au-delà de la fréquence de f_{max}. Les fréquences supérieures à f_{max} sont repliées et ne peuvent donc pas être distinguées de celles présentes dans l'intervalle $[-f_{max}, f_{max}]$. On parle alors de recouvrement spectral ou aliasing. Cette limitation force les convertisseurs analogiques numériques (CAN) à échantillonnage uniforme à toujours fonctionner à la fréquence de Nyquist associée à la bande observée.
Dans un récepteur multistandard/multibande en radio intelligente, les CANs reçoivent des signaux radio fréquences larges bandes avec une dynamique très importante. Le nombre de bits nécessaire pour coder le signal est très important et la fréquence d'échantillonnage est très élevée entraînant ainsi une forte consommation d'énergie. Mais, il arrive que tous les standards ne soient pas utilisés en même temps. Ainsi, le taux d'occupation de la bande à échantillonner peut varier aux cours du temps. Néanmoins le CAN à échantillonnage uniforme fonctionnera toujours à la même fréquence avec la même consommation d'énergie. Pour augmenter l'efficacité énergétique, il serait donc intéressant de pouvoir adapter soit la fréquence d'échantillonnage ou le nombre de bits du CAN afin de réduire sa consommation d'énergie.
Deux approches existent dans la littérature pour pallier au problème de la fréquence d'échantillonnage uniforme :

— L'échantillonnage aléatoire (random sampling). C'est une technique permettant la suppression des répliques spectrales apparaissant avec un échantillonnage uniforme. Cette propriété d'anti-repliement (alias-free) spectral permet alors d'observer des plages fréquentielles beaucoup plus grandes que celles permises avec l'échantillonnage uniforme.

— L'échantillonnage compressé (compressed sampling) ou sous-nyquist (sub-nyquist sampling), est une technique d'acquisition de signaux large bande qui fonctionne à une fréquence inférieure à celle de Nyquist.

La première approche est exclusivement basée sur l'échantillonnage non-uniforme (irrégulier) tandis que la seconde peut être basée sur l'échantillonnage uniforme.

Dans ce cadre, les travaux présentés dans cette thèse visent principalement l'étude de deux nouveaux systèmes d'échantillonnage doués d'intelligence (basé sur l'échantillonnage non-uniforme périodique, une technique d'échantillonnage compressé) dans la réduction de la consommation d'énergie lors de la numérisation de signaux multibandes. Le second système est une version améliorée du premier.

Réduire la consommation d'énergie lors de la numérisation

De nos jours, dans les systèmes de communication, le traitement du signal se fait avec des données prisent au rythme uniforme de Nyquist. Ainsi, dans toutes ces techniques d'échantillonnage (aléatoire et compressé), la reconstruction des échantillons à la fréquence de Nyquist est indispensable, à moins de disposer d'un système de traitement numérique adapté aux échantillons non-uniforme et/ou compressé. Dans cette thèse nous nous plaçons dans le premier cas, le plus rependu dans la littérature.

La reconstruction dans les techniques d'échantillonnage compressé implique la connaissance des emplacements des bandes contenues dans le signal multi-bandes. Ainsi, dans tous les systèmes d'échantillonnage compressé (échantillonnage à une fréquence en dessous de Nyquist suivi de la reconstruction) proposés dans la littérature [19, 20, 21], les auteurs supposent au préalable la connaissance du nombre maximal de bandes(N) et de la largeur de bande maximale (B_{max}) contenue dans le signal. Ces hypothèses permettent de définir un système d'échantillonnage "aveugle" (aucune connaissance de l'emplacement des bandes utiles) qui utilise des algorithmes de *compressed sensing* (détection de bandes

à partir d'échantillons compressé) afin de localiser les bandes contenues dans le signal. Nous constatons clairement que ces systèmes ne sont adaptés que pour un certain type de signaux. Dans cette thèse, nous proposons un nouveau système d'échantillonnage flexible, totalement aveugle (aucune connaissance de N et de B_{max} n'est nécessaire a priori), permettant d'adapter la fréquence moyenne d'échantillonnage en fonction du taux d'occupation de la bande totale échantillonnée. Pour ce faire, nous considérons le problème de la conception d'un schéma d'échantillonnage efficace pour signaux multi-bandes à taux d'occupation spectral variable. Nous disons qu'un système d'échantillonnage est efficace lorsqu'il est doté des propriétés suivantes [22] :

1. La fréquence d'échantillonnage (moyenne) est la plus faible possible.
2. Il n'a aucune connaissance préalable des emplacements des bandes utiles.
3. Il peut être mis en œuvre avec les équipements disponibles sur le marché.

Dans cette thèse nous considérons qu'un signal est parcimonieux dans le domaine spectral lorsque son taux d'occupation spectral dans la bande totale considérée est faible.
A partir de précédents résultats sur l'échantillonnage non-uniforme périodique (Multi-Coset)[23, 24, 25, 26, 20, 21], nous proposons un nouveau schéma d'échantillonnage non-uniforme périodique appelé Système d'Échantillonnage non-uniforme en Radio Intelligente (SENURI). Il est constitué d'un seul échantillonneur non-uniforme, d'un algorithme de détection de bandes et d'un algorithme d'optimisation de la fréquence moyenne de l'échantillonneur non-uniforme [27]. Notre nouveau système permet de réduire le plus faiblement possible le nombre d'échantillons tout en garantissant une reconstruction avec un minimum d'erreurs. La fréquence moyenne d'échantillonnage du SENURI dépend uniquement du nombre de bandes contenues dans le signal d'entrée ainsi que de la largeur de chaque bande.

Organisation du document

Nos travaux de recherche seront présentés en quatre chapitres :

1. Le premier chapitre présentera les travaux antérieurs qui sont à la base de nos contributions, à savoir les études qui nous ont conduits à la proposition d'un nouveau système d'échantillonnage doué d'intelligence. Nous commencerons par exposer le principe de fonctionnement d'un convertisseur analogique numérique classique (qui échantillonne de façon uniforme) ainsi que ses limitations inhérentes. Par

la suite nous présenterons un état de l'art de quelques techniques d'échantillonnage non-uniforme (aléatoire ou non) ainsi qu'un bref aperçu de quelques conditions de reconstruction. Enfin, nous présenterons un bref état de l'art de quelques techniques d'échantillonnage compressif puis nous discuterons des avantages et inconvénients de ces différentes familles d'échantillonnage.

2. Dans le deuxième chapitre, nous effectuerons un état de l'art des techniques d'analyse spectrale utilisant des échantillons uniformes. Puis par la suite nous classifierons les techniques d'analyse spectrale utilisant des échantillons non-uniformes en deux catégories : celles nécessitant la reconstruction des échantillons uniformes (que nous appellerons *méthode indirecte*) et celles utilisant directement des échantillons irrégulier (*méthode directe*). Pour finir nous proposerons une nouvelle technique d'échantillonnage non-uniforme périodique. Cette nouvelle technique appelée le *AliasMin*, consiste à minimiser le niveau des repliements spectraux à l'intérieur de la bande utile.

3. Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de notre nouveau schéma d'échantillonnage appelé *Système d'Échantillonnage non-uniforme en Radio Intelligente* (SENURI). Dans un premier temps, nous présenterons le principe de fonctionnement de notre système ainsi que les blocs qui le composent. Nous montrerons que la fréquence moyenne de fonctionnement de notre nouveau système est liée au taux d'occupation spectral de la bande considérée. Puis nous discuterons de son efficacité énergétique. Dans un second temps, nous proposerons une version améliorée du SENURI en lui intégrant un détecteur de changement de spectre. Ce dernier permet au SENURI de savoir à quel moment se reconfigurer, le rendant ainsi totalement autonome et intelligent. Pour finir nous discuterons de son intégration dans un récepteur de type radio logicielle restreinte.

4. Dans le dernier chapitre, nous montrerons par la simulation les performances de nos nouveaux systèmes d'échantillonnage puis nous les comparerons avec l'architecture du Multi-Coset classique.

Chapitre 1

La théorie de la conversion analogique numérique

1.1 Introduction

Les convertisseurs analogiques numériques constituent l'interface fondamentale entre l'environnement physique, où les signaux sont analogiques, et les systèmes de traitement numérique. Ils sont présents dans la quasi-totalité des circuits mixtes qui contiennent une partie analogique et une partie numérique.

L'opération de conversion analogique numérique, appelée aussi numérisation, se fait en trois étapes distinctes : l'échantillonnage, la quantification et le codage. L'échantillonnage et la quantification peuvent être uniformes ou non uniformes.

En traitement du signal, l'échantillonnage permet de représenter un signal à temps continu par un signal à temps discret. Dans le domaine temporel, il consiste à multiplier le signal continu $x(t)$ par une somme d'impulsions de Dirac translatées aux instants d'échantillonnage (t_n), représentée par le peigne de Dirac $u(t)$ de l'équation (1.1) :

$$u(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} \delta(t - t_n). \tag{1.1}$$

Le signal échantillonné, $x_e(t)$ peut alors simplement s'écrire suivant l'équation (1.2) :

$$x_e(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} x(t_n)\delta(t - t_n). \tag{1.2}$$

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier de la fonction $u(t)$ (1.1) est donnée par l'équation (1.3) :

$$U(f) = \sum_{n=\mathbb{Z}} \exp(-j2\pi f t_n). \tag{1.3}$$

D'un point de vue spectral, l'opération d'échantillonnage correspond au produit de convolution entre les transformées de Fourier $X(f)$ du signal à temps continu $x(t)$ et de la fonction $U(f)$. Le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ est alors donné par l'équation (1.4) :

$$X_e(f) = X(f) * U(f) = \sum_{n=\mathbb{Z}} x(t_n) \exp(-j2\pi f t_n). \tag{1.4}$$

En partant de l'équation (1.1), l'ensemble des instants d'échantillonnage $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ caractérise la forme de la fonction $U(f)$ (voir équation 1.3). Ainsi selon la forme de la fonction d'échantillonnage $u(t)$ (le peigne de Dirac), donc selon la technique d'échantillonnage, le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ diffère. Il existe de nombreuses techniques d'échantillonnage dans la littérature [1, 10, 28, 29]. La plus connue et la plus utilisée est l'échantillonnage uniforme. Cependant l'utilisation d'une telle technique dans l'étage de numérisation d'un récepteur en radio (notamment de type radio intelligente) pose de nombreux problèmes, notamment une limitation de la fréquence d'échantillonnage dû au théorème de Shannon et/ou encore une forte consommation d'énergie due à une grande résolution. Il existe principalement deux approches dans la littérature permettant de contourner ces problèmes : l'échantillonnage aléatoire (*random sampling*) et l'échantillonnage compressé (*compressive sampling*).

Dans ce chapitre, nous allons donner une vue d'ensemble des différentes techniques d'échantillonnage existant dans la littérature ainsi que les contraintes liées à leur utilisation. Pour ce faire, nous commencerons par présenter dans la section-1.2 le principe de fonctionnement d'un convertisseur analogique numérique classique, c'est-à-dire qui fonctionne suivant le principe de l'échantillonnage uniforme. Puis dans la section-1.3, nous présenterons un état de l'art des techniques d'échantillonnage non uniforme (ou irrégulier) généralement rencontrées dans la littérature. Dans la section-1.4, nous présenterons un bref état de l'art des techniques d'échantillonnage permettant une acquisition compressée des signaux, l'échantillonnage compressé. Pour finir nous discuterons des avantages et inconvénients de ces différentes familles d'échantillonnage.

1.2 La conversion analogique numérique basée sur l'échantillonnage uniforme

Dans la quasi-totalité des convertisseurs analogiques numériques l'échantillonnage se fait de manière uniforme. L'échantillonnage uniforme, régulier ou périodique, consiste à représenter un signal, $x(t)$, continu dans le temps par ses valeurs $x(nT_e)$ prises aux instants uniforme $\{t_n = nT_e\}$, T_e est appelée période d'échantillonnage. Les équations (1.1), (1.3) et (1.4) deviennent respectivement :

$$u(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) \tag{1.5}$$

$$U(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - \frac{n}{T_e}) \tag{1.6}$$

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - \frac{n}{T_e}). \tag{1.7}$$

Le spectre du signal échantillonné est donc constitué de la fonction $X(f)$ ainsi que de ses images translatées aux multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage. Ainsi, il est facile de retrouver le théorème de Shannon [10](appelé aussi théorème de WKS en hommage aux deux autres contributeurs Whittaker [11] et Kotelnikov [12]) qui découle de la périodisation : un signal à temps continu à bande limité, de fréquence maximale f_{max} peut être reconstruit à partir d'observations régulières si l'occurrence de ces observations respecte la condition :

$$f_e = \frac{1}{T_e} \geqslant 2f_{max}. \tag{1.8}$$

En respectant la condition de Shannon, la périodisation n'introduit pas de repliement spectral (Aliasing). Restituer le signal d'origine ($x(t)$) revient donc à supprimer cette périodicité en enlevant les bandes images. Ceci peut être réalisé à l'aide d'un filtre passe bas idéal dont la réponse impulsionnelle est un sinus cardinal. Le signal $x(t)$ est donné alors par l'équation (1.9)

$$x(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} x(nT_e)\mathrm{sinc}(\pi f_e(t - nT_e)) \tag{1.9}$$

Toute la théorie du traitement du signal utilisée habituellement est basée sur ce résultat fondamental. Il avait déjà été formulé en premier lieu par Nyquist [30] dans les années

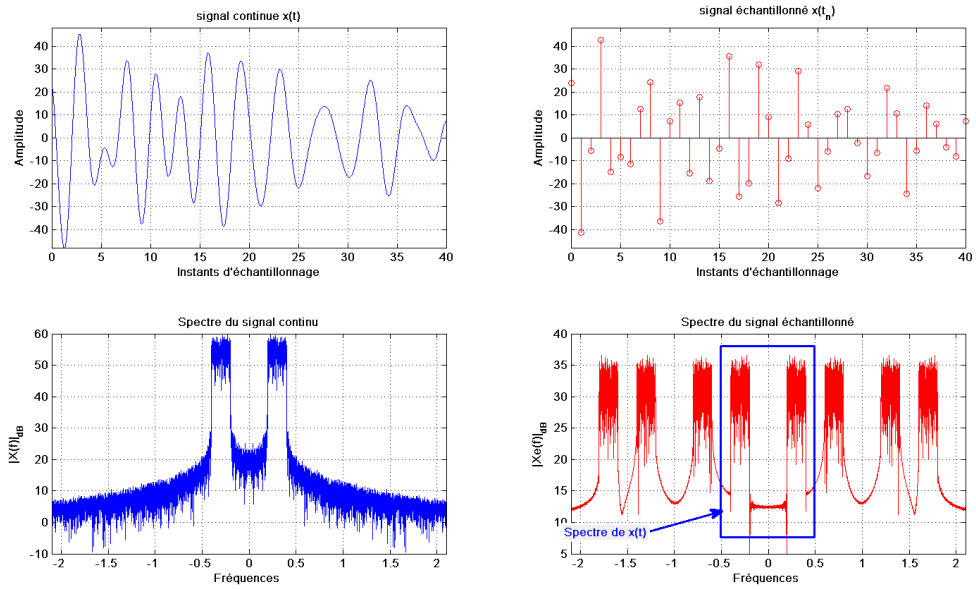


FIGURE 1.1 – Échantillonnage-blocage d'un signal continu

1920 ; c'est pourquoi, on parle souvent de la fréquence de Nyquist pour spécifier le double de la fréquence maximale : $F_{nyq} = 2f_{max}$.

1.2.1 Principe de fonctionnement

Le convertisseur analogique numérique, permet le passage d'un signal analogique continu $x(t)$ en temps et en amplitude à un signal discret en temps, $x(t_n)$, (échantillonnage) et en amplitude, x_n, (quantification).

En pratique, l'échantillonnage régulier consiste à maintenir, grâce à un échantillonneur bloqueur (*Sample and Hold* (S/H)), la valeur du signal analogique $x(t)$ pendant une durée appelée période d'échantillonnage (T_e). La valeur de T_e est choisie selon le théorème de Shannon. Le signal échantillonné bloqué obtenu, $x_{eb}(t)$, est continu par morceaux.

La quantification consiste à associer à $x_{eb}(t_n)$ une valeur binaire choisie dans un ensemble fini et prédéterminé de valeurs. Le pas de quantification et la précision du CAN dépendent du nombre de bits en sortie, appelé résolution. Pour un CAN à N bits, le nombre d'états possibles en sortie est 2^N, ce qui permet d'exprimer des signaux numériques de 0 à $2^N - 1$ en code binaire naturel. Un CAN est caractérisé également par la plage de variation acceptable du signal analogique d'entrée, appelée Pleine Echelle (Full Scale - FS) et que nous noterons V_{PE}. La pleine échelle est divisée en autant de plages d'égales dimensions (cas de la quantification uniforme) qu'il y a d'états possibles de la sortie numérique. Chaque plage est associée à un code numérique représentant le signal analogique d'entrée. Sur la figure 1.3, nous avons représenté la fonction de transfert idéale d'un CAN à 3 bits

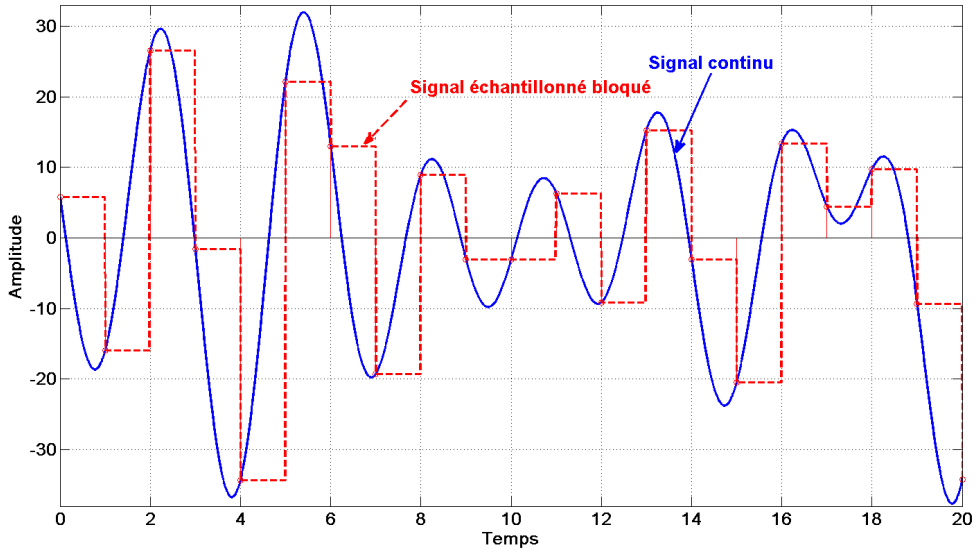


FIGURE 1.2 – Échantillonnage-blocage d'un signal continu

ayant une plage de conversion de V_{PE}. Il y a 8 états logiques, la plage de conversion est donc partagée en 8 portions égales correspondant chacune à un état logique de sortie. On définit le quantum, ou LSB (pour Least Significant Bit, le bit de poids faible) comme étant la dimension de ces plages. On le note q et l'obtient par :

$$q = \frac{V_{PE}}{2^N}. \tag{1.10}$$

Les tensions de seuil V_{Sk}, correspondant aux transitions entre les codes de sortie, sont telles que

$$V_{Sk} = kq, \tag{1.11}$$

ce qui correspond à une quantification linéaire par défaut.

1.2.2 Erreur de quantification

La double quantification, en temps et en amplitude consistant en une perte d'information du signal, nous conduit à la notion d'erreur de quantification. Elle est définie comme étant la différence entre la valeur du signal échantillonné et la valeur analogique d'entrée correspondant au code de sortie (correspondance donnée par la droite de transfert idéale). L'erreur de quantification s'exprime en LSB. Plus la résolution d'un CAN est élevée, plus la sortie numérique est une image précise du signal analogique d'entrée. Elle est inhérente à la conversion analogique/numérique (et inverse), et sera présente même si les convertisseurs sont considérés comme parfaits.

Un simple changement de convention, dans la fixation des tensions de seuil, permet de réduire l'erreur de quantification en valeur absolue. Ainsi, on utilisera plutôt la quantifi-

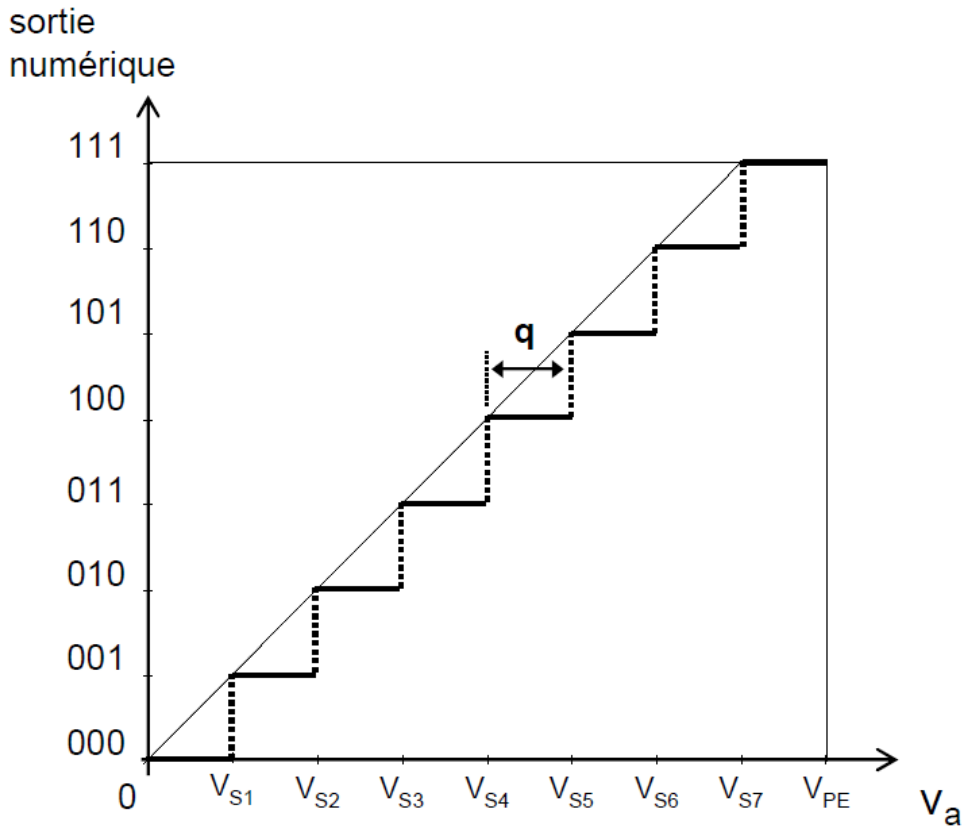


FIGURE 1.3 – Fonction de transfert d'un CAN 3 bits

cation linéaire centrée, pour laquelle la droite de transfert idéale passe par le centre des "marches" de la caractéristique (Figure 1.4)

La droite de transfert idéale coupe la caractéristique idéale de transfert pour $x_{eb} = k.q$ tel que $k \in \{1, ..., 2^N - 1\}$. On obtient la caractéristique pour une quantification linéaire centrée en décalant vers la gauche de $\frac{1}{2}$ LSB la caractéristique correspondant à une quantification linéaire par défaut.

Les caractéristiques précédentes sont celles de CAN unipolaires dont la tension analogique d'entrée est positive. Bien souvent, un même CAN peut être configuré également en mode bipolaire de façon à accepter une tension analogique d'entrée négative ou positive (la plage de variation est alors symétrique entre $-\frac{1}{2}V_{PE}$ et $\frac{1}{2}V_{PE}$).

1.2.3 Bruit de quantification

Le bruit de quantification B_ϵ est le facteur qui limite la précision des échantillons numériques. Celui-ci est défini par le rapport signal sur bruit (SNR - Signal-to-Noise Ratio), exprimé de la manière suivante :

$$\text{SNR} = \frac{P(x)}{P(B_\epsilon)}, \tag{1.12}$$

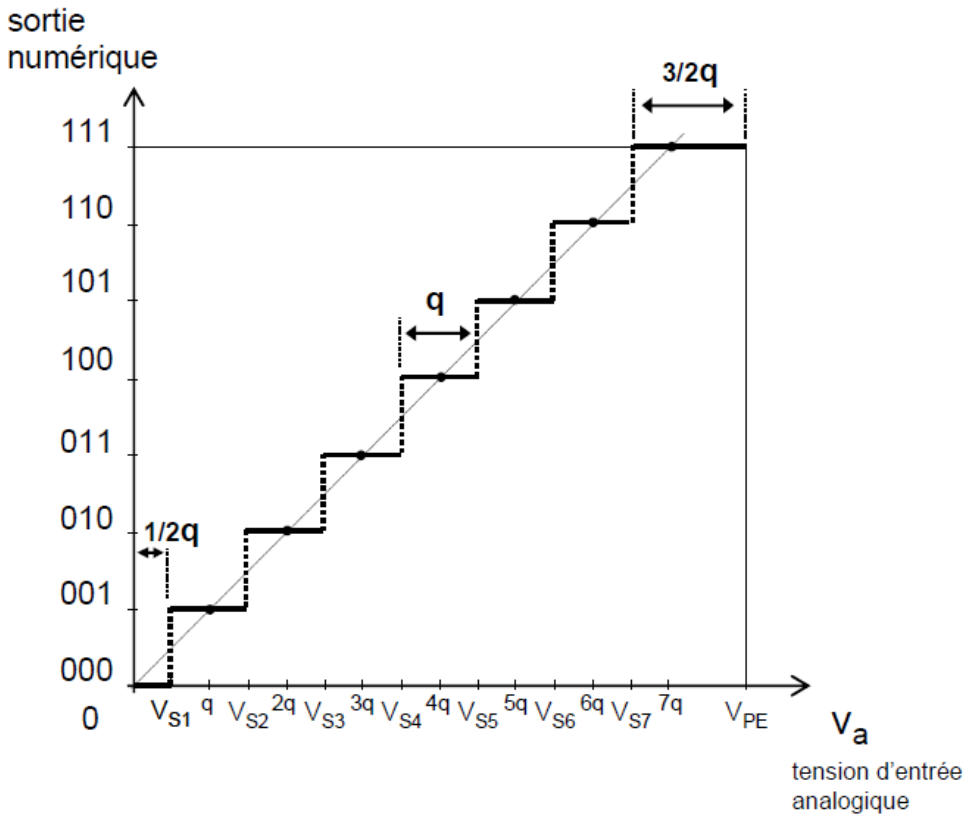


FIGURE 1.4 – Fonction de transfert d'un CAN 3 bits à quantification linéaire centrée

avec $P(x)$, la puissance du signal $x(t)$ et $P(B_\epsilon)$, la puissance du bruit de quantification. En supposant le signal d'entrée $x(t)$ rapidement variable, le bruit de quantification B_ϵ peut être considéré comme non corrélé avec ce dernier. Il est alors assimilable à un bruit blanc, de moyenne nulle, ayant une égale probabilité de se trouver dans l'intervalle $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$. Soit f_q sa densité de probabilité uniforme, elle s'écrit alors :

$$f_q = \frac{1}{q}.1_{[-\frac{q}{2},\frac{q}{2}]}. \tag{1.13}$$

Dans le cas général, où le signal d'entrée $x(t)$ a pour écart type σ_x, le rapport signal sur bruit devient :

$$\text{SNR} = 12(\frac{\sigma_x}{q})^2. \tag{1.14}$$

Cette relation générale est applicable à n'importe quel signal analogique. Par exemple, pour une sinusoïde d'amplitude maximale $A = \frac{2^N-1}{2}q$, le SNR en dB vaut :

$$\text{SNR}_{dB} = 6.02N + 1.76. \tag{1.15}$$

Cette définition du SNR est valable pour les CANs fonctionnant à la fréquence de Nyquist. Dans le cas d'un CAN fonctionnant avec un facteur de sur-échantillonnage (Over-Sampling

Ratio - OSR) égal à $\frac{f_{ech}}{F_{nyq}}$, le SNR en dB devient :

$$\text{SNR}_{dB} = 6.02N + 1.76 + 10log10(OSR). \tag{1.16}$$

1.2.4 Architectures de convertisseurs

On distingue deux grandes familles de CAN à échantillonnage régulier basées sur deux approches différentes de l'échantillonnage : les CAN classiques dont la fréquence d'échantillonnage est telle que le spectre du signal converti occupe quasiment toute la bande de Nyquist (Nyquist Rate ADC) et les CAN à sur échantillonnage (Oversampling ADC) dont seule une partie réduite du bruit de quantification affecte le signal converti.

1.2.4.1 CAN à échantillonnage de Nyquist

Les CANs classiques sont dits à échantillonnage de Nyquist (Nyquist Rate Converters) et leur fréquence d'échantillonnage est choisie du même ordre de grandeur que le double de la fréquence maximale contenue dans le signal échantillonné (ou bien évidement supérieure à $2f_{max}$). Ils sont basés sur deux principes de conversion, série ou parallèle et se subdivisent en trois sous-familles, les CAN série, les CAN parallèle et les CAN série - parallèle. La conversion dans un CAN série est effectuée pas à pas, il en est ainsi des CAN à intégration, à approximations successives et à redistribution de charges. La conversion parallèle consiste à comparer simultanément la valeur à convertir à tous les seuils, le nom donné à ces convertisseurs est CAN Flash. Les CAN série – parallèle combinent les deux approches afin de tirer parti de leurs avantages respectifs tout en limitant les effets de leurs défauts.

1.2.4.2 Convertisseur à sur-échantillonnage

Le recours à une fréquence d'échantillonnage supérieure de plusieurs ordres de grandeur à $2f_{max}$ permet d'accroître le rapport signal sur bruit d'un convertisseur. On notera également que le sur échantillonnage permet de relâcher les contraintes sur le design du filtre anti-repliement (coupure à Kf_e / 2). Les convertisseurs qui utilisent ce principe sont appelés convertisseurs à sur échantillonnage (oversampling converters). C'est le cas du convertisseur CAN sigma – delta.

1.2.5 Paramètres d'évaluation des performances

En plus de l'erreur systématique de quantification, les CANs présentent des défauts que l'on classe en paramètres statiques et dynamiques [31]

1.2.5.1 Paramètres statiques

Erreur d'offset (erreur de décalage)

Il s'agit de la différence entre la valeur nominale d'offset (l'origine de la fonction de transfert : le point 0) et la valeur actuelle d'offset définie comme la mi-largeur de la première marche de la caractéristique (voir figure 1.5), exprimée en LSB. Cette erreur translate globalement toute la caractéristique du convertisseur et peut facilement être compensée par des techniques usuelles de conception.

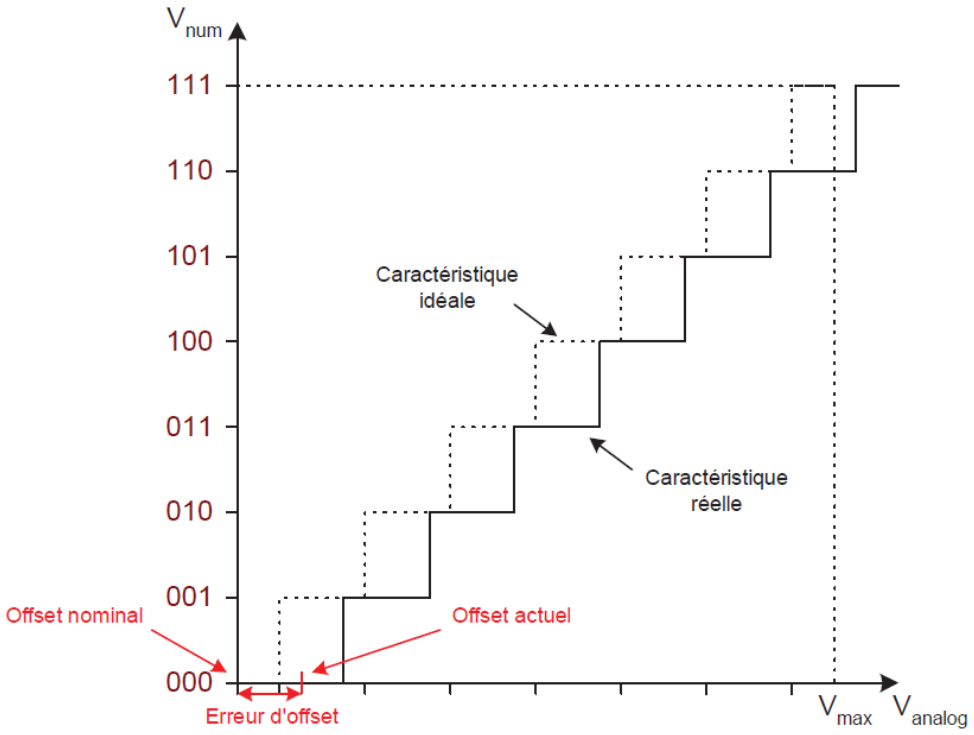


FIGURE 1.5 – Erreurs d'offset

Erreur de gain

L'erreur de gain permet de mesurer l'écart entre la pente de la caractéristique idéale de transfert et la pente de la caractéristique réelle obtenue par régression linéaire des centres des paliers (voir figure 1.6).

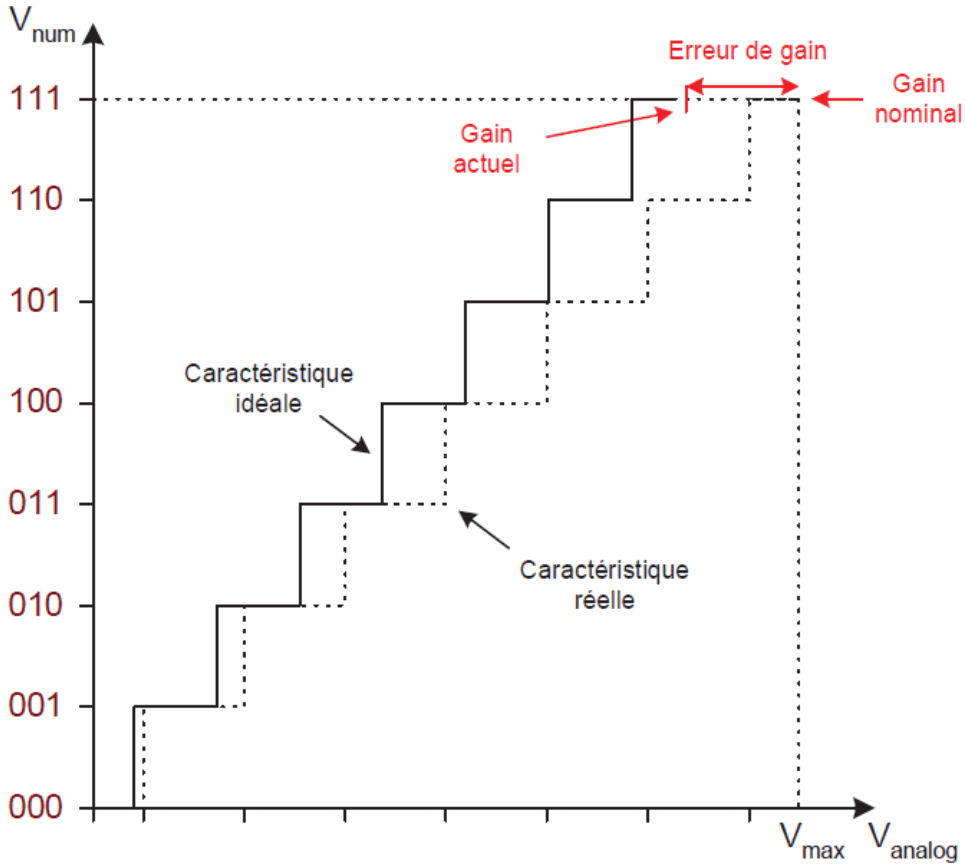


FIGURE 1.6 – Erreurs de gain

Les erreurs de non linéarité

Elles caractérisent les variations locales des tensions de seuil. On distingue les non linéarités différentielles (DNL pour Differential Non Linearity) et intégrales (INL pour Integral Non Linearity). Elles sont mesurées après annulation des erreurs d'offset et de gain et sont exprimées en LSB.

La DNL représente l'écart entre la dimension réelle d'un palier de la caractéristique de transfert réelle et la dimension idéale (1 LSB) :

$$\mathrm{DNL}(k) = \frac{(V_{Sk+1} - V_{Sk}) - q}{q}. \tag{1.17}$$

L'INL, est une représentation cumulative des DNL. Elle matérialise l'écart entre le centre d'un palier et la droite de transfert idéale :

$$\mathrm{INL}(k) = \frac{V_{Sk} - V_{Skideale}}{q} = \sum_{j \leqslant k} \mathrm{DNL}(j). \tag{1.18}$$

Erreur de code manquant

On parle d'erreur de code manquant quand un des codes de sortie n'apparaît jamais quelque soit la valeur de la tension analogique d'entrée. Si les DNL d'un CAN sont stric-

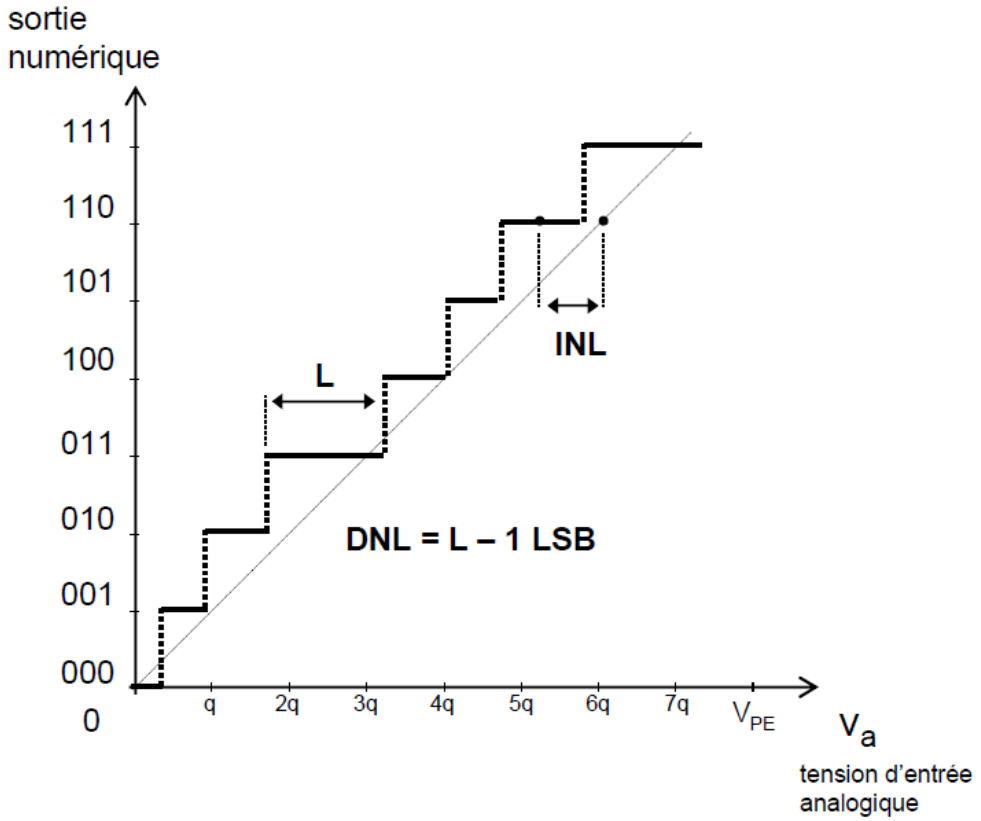


FIGURE 1.7 – Non linéarités différentielles et intégrales

tement comprises entre $-\frac{1}{2}$ LSB et $\frac{1}{2}$ LSB, il ne peut pas y avoir de code manquant.

Monotonicité

Il y a erreur de monotonicité lorsque les codes numériques en sortie ne se succèdent pas de façon croissante pour un signal d'entrée croissant.

1.2.5.2 Paramètres dynamiques

Les paramètres dynamiques permettent de mesurer la dégradation du signal numérique en sortie d'un CAN par rapport au signal analogique d'entrée. Ils sont mesurés par analyse spectrale. Le CAN caractérisé est soumis en entrée à un signal analogique sinusoïdal pleine échelle (généralement). Les défauts du CAN réel entraînent la présence de bruit et d'harmoniques du signal d'entrée en sortie. La figure 1.8 donne le spectre correspondant en sortie. On retrouve le fondamental d'amplitude a_1 à la fréquence f_{sin}, ainsi que des harmoniques d'amplitudes a_k aux fréquences $k.f_{sin}$. Il y a également présence de bruit (le bruit de quantification mais aussi le bruit créé par les différents défauts du CAN). On rencontre parfois également des raies dans le spectre qui émergent du niveau de bruit moyen à des fréquences non harmoniques de la sinusoïde d'entrée ; on les nomme *Spurious*

(**s** sur la figure 1.8).

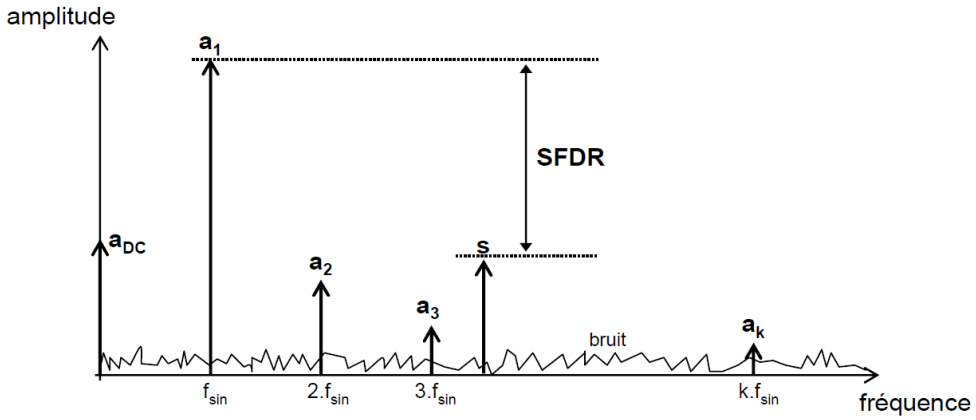


FIGURE 1.8 – Spectre en sortie pour la mesure des paramètres dynamiques

SINAD (Signal to Noise ratio And Distorsion)

Le SINAD représente le rapport entre la puissance du signal et la puissance comprise dans le bruit, les harmoniques et les éventuels spurious. Il est donné par l'équation 1.19 :

$$\text{SINAD} = \frac{P_{signal}}{P_{bruit} + P_{distorsion}}. \tag{1.19}$$

ENOB (Effective Number Of Bits)

Le ENOB, ou nombre de bits effectif en français, est défini comme le nombre de bits du CAN idéal qui donnerait le même SINAD que le CAN réel. Il est lié au SINAD par la relation (1.20) :

$$\text{SINAD}_{dB} = 6.02.\text{ENOB} + 1.76. \tag{1.20}$$

SFDR (Spurious Free Dynamic Range)

Le SFDR (voir figure 1.8) donne la plage de fonctionnement du CAN exprimée comme la distance (en dB) séparant l'amplitude du fondamental et l'harmonique ou spurious d'amplitude la plus élevée sur la bande de fréquence considérée (généralement du continu à $\frac{f_e}{2}$).

$$\text{SFDR}_{dB} = 20log_{10}\frac{a_1}{\max(a_k, s)} \tag{1.21}$$

Le SFDR s'exprime en dBc (dB below carrier).

Le Facteur de Mérite

Tous les paramètres décrits précédemment permettent de caractériser un convertisseur analogique-numérique. Cependant, afin de comparer les convertisseurs entre eux, un critère plus général, calculé à partir des paramètres vu précédemment, est communément adopté : le Facteur de Mérite (FoM - Figure of Merit).

$$\mathrm{FoM} = \frac{2^{\mathrm{ENOB}} B}{P_m}. \tag{1.22}$$

P_m est la puissance moyenne totale consommée par le CAN (en Watt), ENOB est le nombre effectif de bits et B est la bande effective du convertisseur (en Hz).

1.2.6 Limitations des convertisseurs basés sur l'échantillonnage uniforme

La diversité des normes traitées par l'architecture multibande fait que les signaux à l'entrée du convertisseur analogique numérique (CAN) occupent des bandes très importantes et présentent des dynamiques en amplitude élevées. Dans le cas d'un CAN à échantillonnage uniforme, nous devons respecter le théorème de Shannon/Nyquist. D'après ce théorème, un signal dont le support spectral est compris entre $-f_{max}$ et f_{max} peut être parfaitement reconstruit à partir d'échantillons pris uniformément à la fréquence $2f_{max}$. La contrainte principale de l'échantillonnage régulier est qu'on ne peut pas identifier de manière sûre les fréquences au-delà de la fréquence de f_{max}. Cette limitation force les convertisseurs analogiques numériques à échantillonnage uniforme à toujours fonctionner à la fréquence de Nyquist associée à la bande observée. Deux approches existent dans la littérature pour pallier le problème de la fréquence d'échantillonnage uniforme. La première est appelée échantillonnage aléatoire : elle permet, sous certaines conditions, la suppression des répliques spectrales apparaissant avec l'échantillonnage uniforme. La seconde est l'échantillonnage compressé : elle permet l'acquisition de signaux large bande, sous certaines conditions, à une fréquence inférieure à celle de Nyquist. La première approche est exclusivement basée sur l'échantillonnage non-uniforme (ou irrégulier) tandis que la seconde peut être basée sur l'échantillonnage uniforme. Dans les sections (1.3 et 1.4), nous présenterons un état de l'art de ces deux approches.

1.3 L'échantillonnage non uniforme (ou irrégulier)

Contrairement à l'échantillonnage uniforme où les instants d'échantillonnage sont équidistants, les instants d'échantillonnage de l'échantillonnage non uniforme sont comme son nom l'indique, irréguliers. La théorie qui en découle est donc différente de ce qui est habituellement utilisée. Beaucoup de théories ont été développées par des communautés différentes (Mathématiques, Électronique, Physique appliquée, Géophysique ...) et sont assez difficiles à synthétiser. Néanmoins, dans le cadre de cette thèse, nous pouvons classifier l'ensemble des techniques d'échantillonnage non uniforme en deux grandes familles :

— la première que nous appellerons *l'échantillonnage non uniforme et non aléatoire* ou encore *échantillonnage non uniforme déterministe* : il se caractérise par un ensemble d'instants d'échantillonnage $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ non uniformes mais totalement déterminés, c'est-à-dire qu'à chaque instant d'échantillonnage on est capable de connaître tous les autres instants,

— la seconde que nous appellerons *l'échantillonnage non uniforme et aléatoire* ou plus simplement *l'échantillonnage aléatoire* : ici, l'ensemble des instants d'échantillonnage $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est totalement aléatoire. C'est-à-dire qu'à l'instant d'échantillonnage t_n il est impossible de connaître les prochains instants $(t_{n+1}, t_{n+2}, ...)$.

Dans le domaine de la numérisation, il existe de nombreuses études sur l'échantillonnage non uniforme. Les premières ont été introduites avec la volonté de corriger les erreurs dues à l'utilisation d'un signal d'horloge déclenchant l'échantillonnage. Bien que généralement négligée, la fréquence de l'horloge subit toujours de petites variations appelées gigue (jitter en anglais) dont l'importance varie en fonction du système oscillant. L'idée d'utiliser l'échantillonnage aléatoire en radio communication est née avec la volonté de concevoir des terminaux mobiles multistandards de plus en plus petits avec une faible consommation d'énergie. Wojtiuk [32] et Sun [33] furent les premiers à étudier cette question. Les travaux d'Allier [34] et de Aeschlimann [35], ont montré que l'échantillonnage par traversée de niveaux permettait de réduire de façon très significative la consommation d'énergie dans un récepteur de radiocommunication. Ben-Romdhane a montré dans ses travaux [36] que l'utilisation de l'échantillonnage aléatoire dans un récepteur hybride homodyne/low-IF multistandard sans contrôle automatique de gain permettait de relâcher les contraintes sur le filtre d'anti-repliement. En plus de ces travaux sur l'utilisation de l'échantillonnage aléatoire, il existe de nombreux autres travaux dans le domaine de la détection de spectre [37, 38, 39].

Dans le cadre de cette thèse, nous présentons, dans cette section, un état de l'art des principaux convertisseurs analogiques numériques basés sur l'échantillonnage aléatoire. Il est à rappeler que l'échantillonnage aléatoire est un cas particulier de l'échantillonnage non uniforme (ou irrégulier). Il existe plusieurs techniques d'échantillonnage aléatoire dans la littérature. Pour plus de simplicité, nous les avons divisés en deux grandes catégories que sont :

1. Les techniques d'échantillonnage aléatoire dépendantes d'un signal d'horloge. Ce sont les plus repandues. Les systèmes de numérisation basés sur cette technique, sont constitués d'un convertisseur analogique numérique à échantillonnage uniforme auquel est appliqué une horloge aléatoire (ou pseudo-aléatoire). Ils peuvent profiter, sous certaines conditions, de la propriété d'anti-repliement spectrale.
2. Les techniques d'échantillonnage aléatoire indépendantes d'un signal d'horloge. Lors de la numérisation, l'échantillonnage est lié uniquement aux caractéristiques du signal d'entrée, ainsi ils échappent totalement au théorème de Shannon.

1.3.1 Échantillonnage aléatoire dépendant d'un signal d'horloge

Dans cette partie, nous présentons principalement les deux formes les plus connues de cette catégorie, à savoir : l'échantillonnage aléatoire constitué d'échantillons équi-répartis auxquels est ajouté un gigue (Jittered Random Sampling ou JRS) et l'échantillonnage aléatoire cumulatif (Additive Random Sampling ou ARS).

1.3.1.1 Jittered Random Sampling (JRS) [1]

Aux instants d'échantillonnage répartis uniformément est ajoutée une erreur délibérée obéissant à une loi de probabilité définie sur l'intervalle $[-0.5T, 0.5T]$. Les instants d'échantillonnage selon le mode JRS sont décrits par :

$$t_n = nT + \tau_n, 1 \leqslant n \leqslant \infty, \tag{1.23}$$

avec, $\mathbf{E}[t_n] = nT$ et $\mathrm{Var}[t_n] = \sigma^2$ où $\mathbf{E}[*]$ représente l'espérance mathématique, $\mathrm{Var}[*]$ la variance et T l'intervalle moyen entre deux instants d'échantillonnage. L'ensemble $\{\tau_n\}$ est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité de probabilité $p_1(\tau)$, de moyenne nulle et de variance σ^2.

La densité de probabilité des instants d'échantillonnages t_n en mode JRS est donnée par :

$$p_n(t) = p_1(t - nT). \tag{1.24}$$

La densité de probabilité du 1^{er} instant d'échantillonnage est exactement égale à $p_1(\tau)$. Les densités $p_n(t)$ dans le cas d'une distribution uniforme sont présentées dans la figure 1.9. Nous remarquons que toutes les densités sont identiques et que le passage d'une densité à une autre se fait par une translation d'une période T.

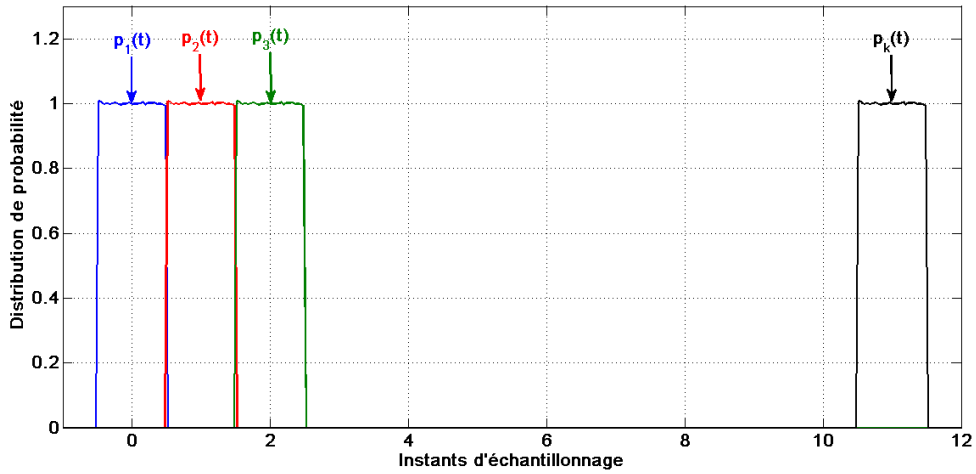


FIGURE 1.9 – Densité de probabilité $p_n(t)$ pour une distribution uniforme en mode JRS avec $T = 1$s

1.3.1.2 Additive Random Sampling (ARS) [1]

Dans le cas où l'intervalle de temps entre deux instants d'échantillonnage successifs suit une loi de probabilité définie sur $[0.5T, 1.5T]$, l'échantillonnage est dit aléatoire cumulatif (ARS, Additive Random Sampling). Les instants d'échantillonnage selon le mode ARS sont décrits par l'équation (1.25) :

$$t_n = t_{n-1} + \tau_n = t_0 + \sum_{i=1}^{n} \tau_i, 1 \leqslant n \leqslant \infty \tag{1.25}$$

avec, $E[t_n] = kT$ et $\mathrm{Var}[t_n] = n\sigma^2$. Pour $k = 0$, nous attribuons à t_0 une valeur constante avec $p_0 = \delta(t)$. L'instant t_n est alors obtenu en cumulant une à une les variables aléatoires τ_n.

La densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires s'écrit sous la forme d'un produit de convolution, la densité de probabilité de t_n est donnée par l'équation (1.26) :

$$p_n(t) = \overset{n}{\underset{i=1}{\circledast}} p_i(t). \tag{1.26}$$

L'opérateur $\circledast$ représente l'opération du produit de convolution. Dans ce cas, l'opération est effectuée n fois pour obtenir $p_n(t)$. La densité $p_1(t)$ du premier instant d'échantillonnage t_1 est exactement égale à densité de probabilité $p_1(\tau)$.

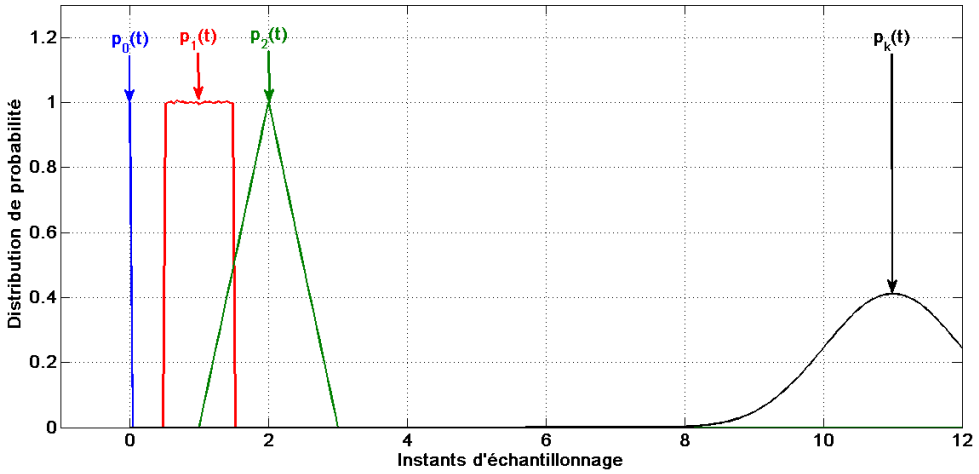


FIGURE 1.10 – Densité de probabilité $p_n(t)$ pour une distribution uniforme en mode ARS avec $T = 1$s

1.3.1.3 La condition d'anti-repliement spectral

Les distributions communément utilisées en échantillonnage aléatoire sont les distributions uniforme, gaussienne et exponentielle. La distribution d'échantillonnage doit modéliser un phénomène d'échantillonnage réel, il est donc nécessaire que les instants d'échantillonnage t_k soient pris dans un ordre croissant :

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k \ldots < t_n \text{ avec } \lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty \tag{1.27}$$

et $kT - \frac{T}{2} \leqslant t_k < kT + \frac{T}{2}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$

Bilinski et Mikelsons dans [40] ont défini un processus ponctuellement stationnaire comme un processus où la probabilité ponctuelle $p(t)$ d'un instant d'échantillonnage est la même à tout instant. En d'autres termes, un processus est ponctuellement stationnaire si la densité de probabilité d'échantillonnage ponctuelle $p(t)$ est proche de la moyenne de la fréquence d'échantillonnage f_s :

$$p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = \frac{1}{T}. \tag{1.28}$$

Pour comprendre le sens de la densité $p(t)$, supposons qu'une fenêtre temporelle Δt parcourt l'axe du temps t. Si Δt tend vers 0, la densité de probabilité $p(t)$, à tout instant, est égale à la probabilité qu'un instant d'échantillonnage soit dans cette fenêtre Δt. La stabilité peut être atteinte pour toute la séquence ou après un certain délai de stationnarité T_d. Ce délai dépend du mode d'échantillonnage, de la distribution de probabilité des instants d'échantillonnage et des conditions initiales de la séquence d'échantillonnage [40]

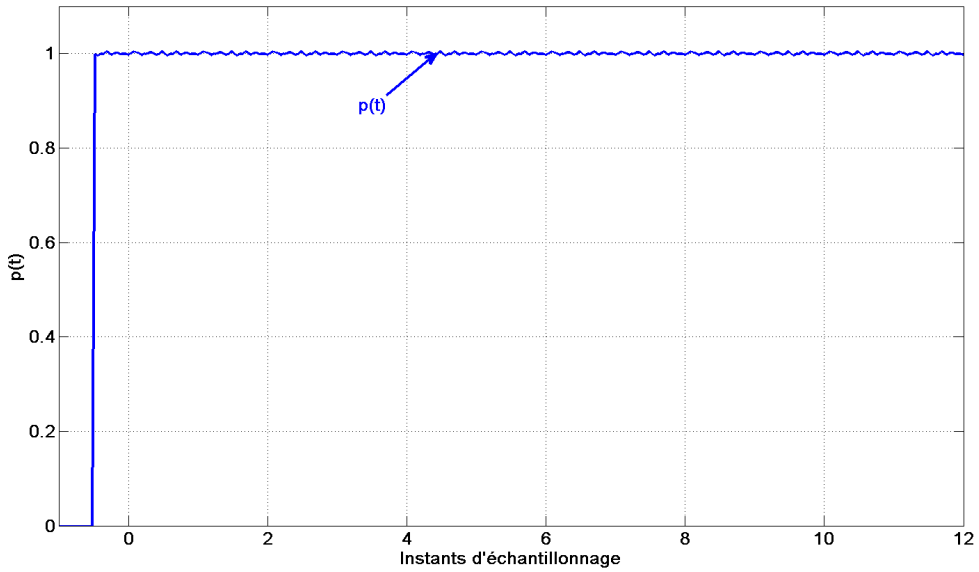


FIGURE 1.11 – Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution uniforme en mode JRS

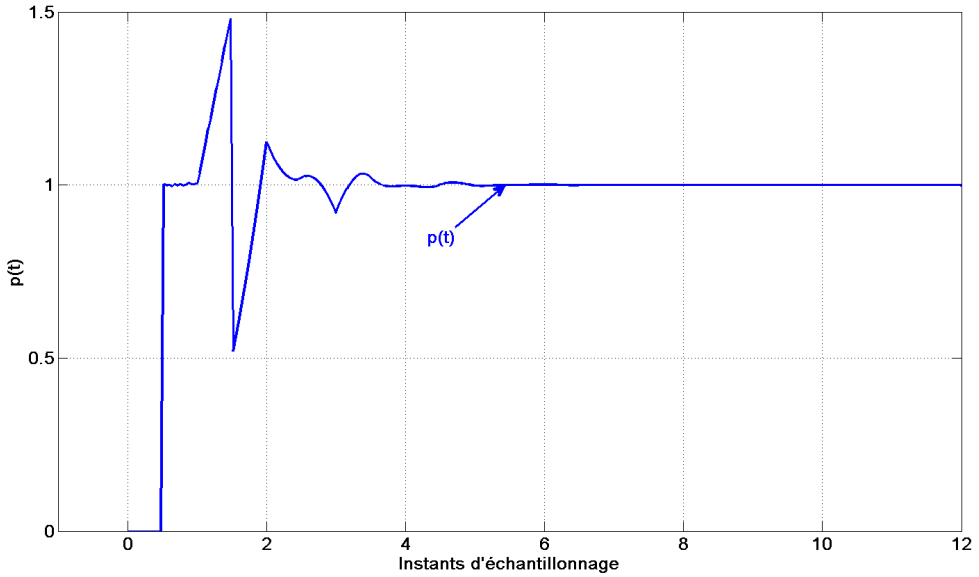


FIGURE 1.12 – Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution uniforme en mode ARS

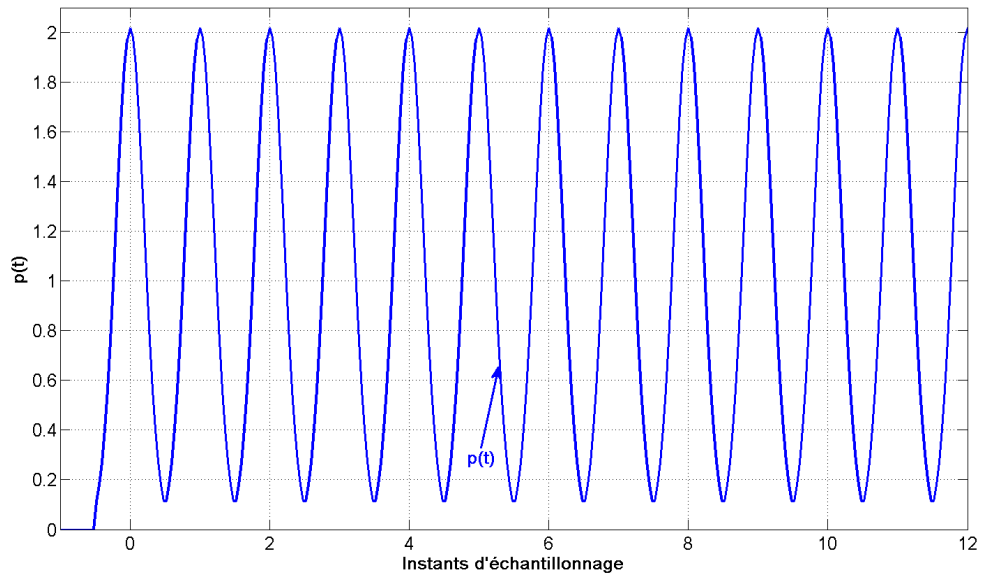


FIGURE 1.13 – Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution gaussienne en mode JRS, $\frac{\sigma}{T} = 0.2$

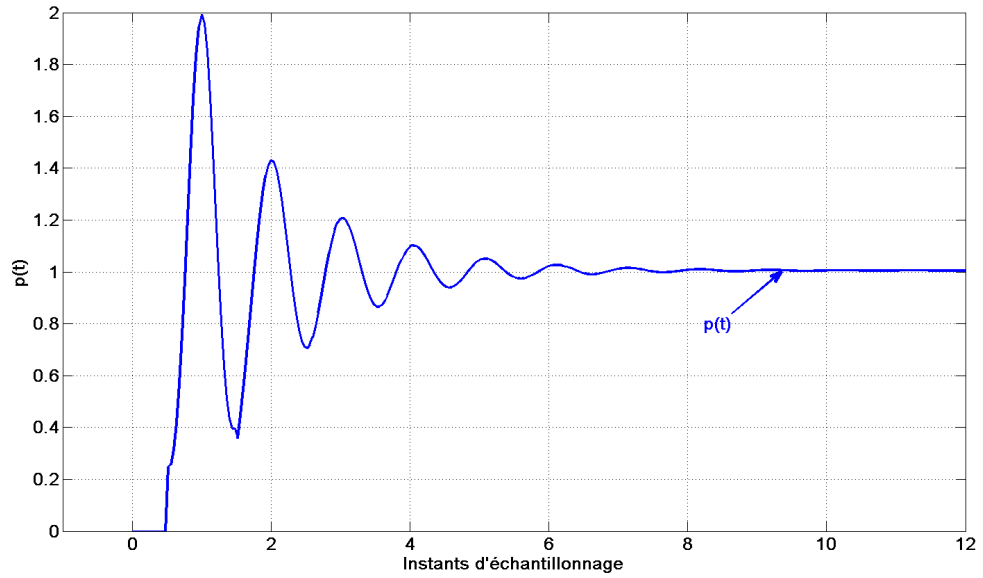


FIGURE 1.14 – Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution gaussienne en mode ARS, $\frac{\sigma}{T} = 0.2$

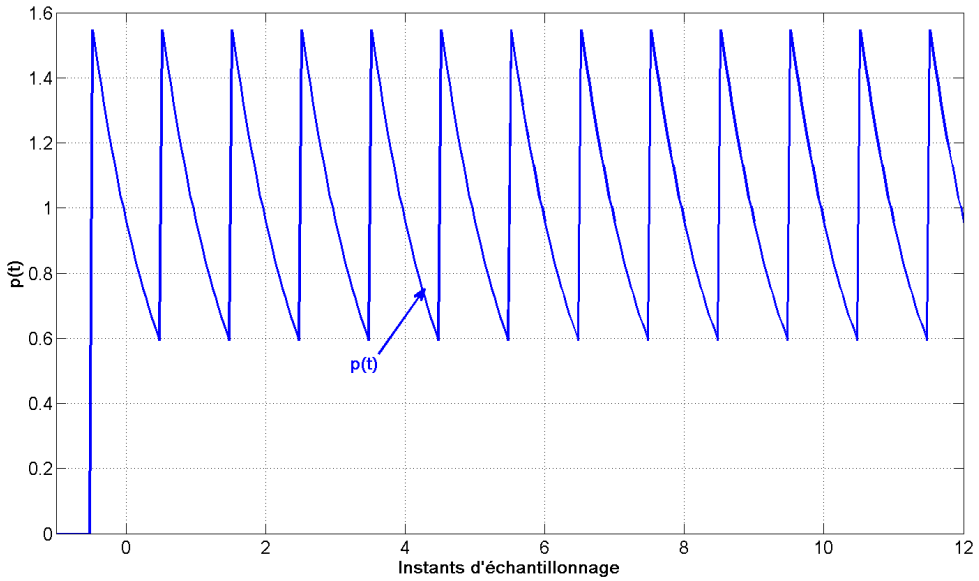


FIGURE 1.15 – Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution de Poisson en mode JRS, $\lambda = T$

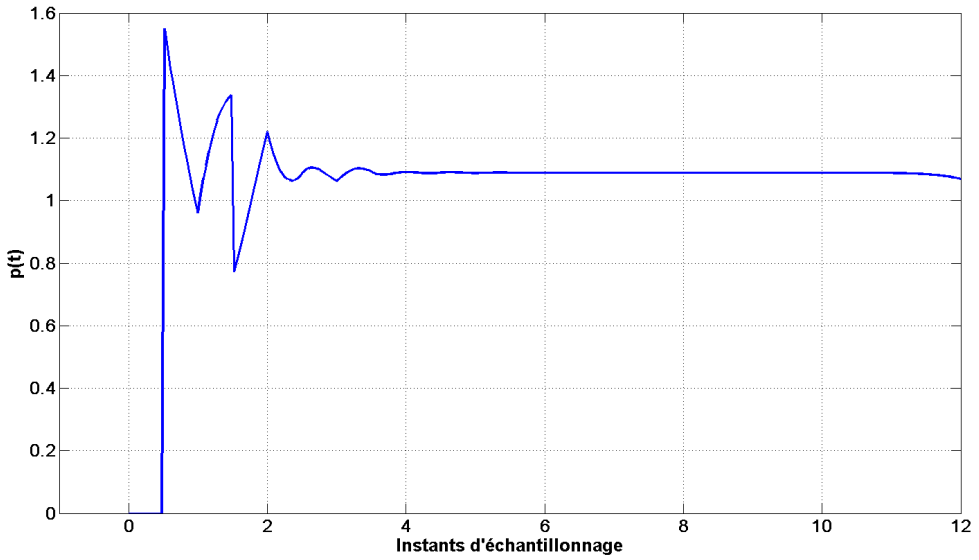


FIGURE 1.16 – Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution de Poisson en mode ARS, $\lambda = T$

A partir des figures 1.11-1.12-1.13-1.14-1.15-1.16, nous constatons clairement que l'échantillonnage aléatoire en mode ARS respecte la condition d'anti-repliement spectrale donné dans l'expression 1.28 quelque soit la distribution de probabilité (uniforme, gaussienne ou poisson). Toutefois, nous constatons que cette condition n'est respectée que pour la distribution uniforme en mode JRS.

1.3.2 Échantillonnage aléatoire indépendant d'un signal d'horloge

Nous définissons l'échantillonnage indépendant d'un signal d'horloge comme l'ensemble des techniques d'échantillonnage s'appuyant sur les caractéristiques temporelles du signal d'entrée, notamment les zones de faibles variations où un échantillonnage uniforme prélève des données redondantes. Dans la littérature nous trouvons principalement l'échantillonnage par traversée de niveaux.

1.3.2.1 L'échantillonnage par traversée de niveaux

Le principe est de considérer le temps entre la traversée des niveaux d'amplitudes données. Les niveaux de quantification sont donc uniformément répartis selon l'amplitude du signal d'entrée et un échantillon est considéré uniquement lorsque le signal V_{in} traverse l'un d'eux (voir Figure 1.17). Le temps $\mathbf{Dt}_i$ écoulé entre deux échantillons b_i et b_{i-1} étant continu, il doit être codé en numérique. Ceci est la cause d'une quantification en temps. En effet, le temps est enregistré en fonction de la résolution temporelle du circuit numérique dédié à cette tâche. La sortie numérique de l'encodeur est constituée d'un mot dont la première partie code le temps et la deuxième le sens de traversée du niveau (vers le haut ou vers le bas).

1.3.3 Les conditions de reconstruction

La reconstruction d'un signal échantillonné irrégulièrement rassemble deux aspects distincts dans la littérature. Le premier concerne les résultats théoriques permettant de reconstruire le signal continu initial. Ces méthodes sont très complexes et mettent souvent en œuvre un formalisme mathématique assez lourd. Le deuxième aspect de la reconstruction concerne en fait le ré-échantillonnage du signal régulièrement dans le temps selon la fréquence de Nyquist. Une multitude de méthodes ont été proposées[41, 42, 2, 43], elles peuvent être itératives ou non, prendre place dans le domaine temporel et/ou fréquentiel...

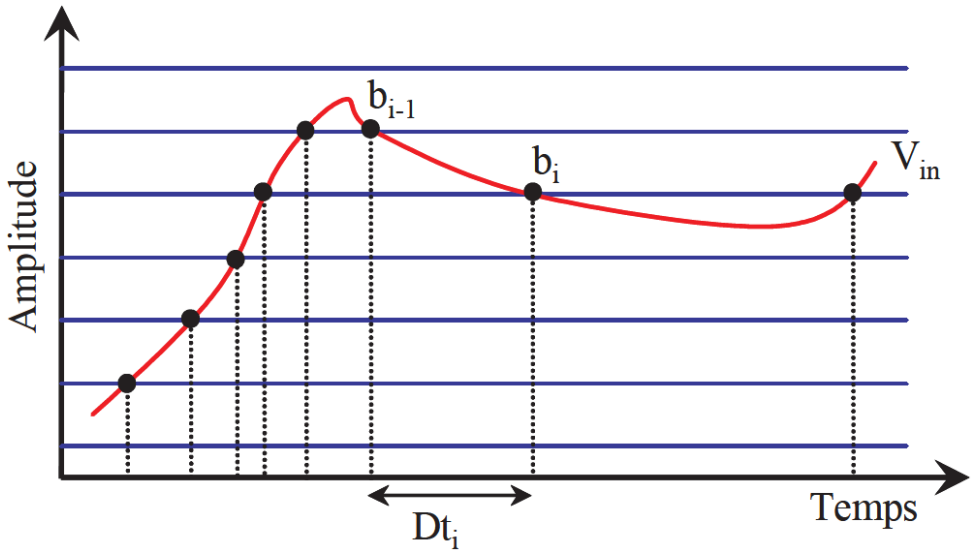


FIGURE 1.17 – Échantillonnage par traversée de niveaux

En correspondance au théorème de Shannon dans l'échantillonnage régulier, de nombreux théorèmes ont été démontrés concernant l'échantillonnage non uniforme dans le temps [44].

Dans cette partie, nous présenterons une liste non exhaustive des principales conditions de reconstruction.

1.3.3.1 Condition de Paley et Wiener [2]

Ils ont montré qu'un signal à bande limitée de fréquence maximale F_{max} échantillonné irrégulièrement à des instants connus $\{t_n\}$ pouvait être reconstruit grâce à un ensemble de fonction $\{g_n(t)\}$ tel que :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(t_n) g_n(t), \tag{1.29}$$

si les instants d'échantillonnage respectaient la condition suivante :

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - \frac{n}{2F_{max}}| \leqslant L \leqslant \infty. \tag{1.30}$$

Dans le cas de l'échantillonnage régulier, les fonctions g_n sont directement des sinus cardinaux (obtenus par transformée de Fourier Inverse d'un filtre passe bas idéal). Levinson dans [45] a donné une formulation des fonctions g_n dans le cas général basé sur l'interpolation de Lagrange :

$$g_n(t) = \frac{g(t)}{g'(t)(t-t_n)} \ avec\ g(t) = (t-t_0) \prod_{n\in\mathbb{Z}^*} (1 - \frac{t}{t_n}), \tag{1.31}$$

où t_0 est l'instant initial.

1.3.3.2 Condition de Duffin et Schaeffer [3]

Ils ont introduit la théorie des $frames$. Un $frame$ est un ensemble de fonctions $\{g_n\}$ appartenant à un espace de Hilbert H (introduisant le produit scalaire noté $<.,.>$) satisfaisant la relation suivante :

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< x, g_n >|^2 \leqslant B\|x\|^2, \forall x \in H, \tag{1.32}$$

où A et B sont deux constantes strictement positives à déterminer. Duffin et Schaeffer ont alors montré que s'il existe trois paramètres $L > 1, \alpha, 0 < \epsilon < 1$ tels que tous les instants d'échantillonnage vérifient les conditions $|t_n - t_m| \leqslant \alpha$ pour $n \neq m$ et $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - \frac{n}{2F_{max}}| \leqslant L \leqslant \infty$ alors les deux constantes A et B peuvent être déterminées en fonction de L, α et ϵ :

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(t_n)|^2 \leqslant B\|x\|^2. \tag{1.33}$$

Le paramètre le plus important L a été borné par Kadec. Il a en effet montré qu'il est possible de reconstruire le signal si les instants d'échantillonnage irréguliers ne sont pas déviés de plus de 25% du point idéal, c'est-à-dire en posant $L = \frac{1}{4}\frac{1}{2F_{max}}$. Dans la littérature, ce résultat est présenté comme le théorème de Kadec 1/4. Finalement le théorème de Paley-Wiener et de Kadec a été reformulé maintes fois notamment par Beutler et Yao pour tendre vers une relation simple généralisant le théorème de Shannon :

$$\bar{F}_e = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{2N+1}{\sum_{-N}^{N} dt_n} \right) \geqslant 2F_{max}. \tag{1.34}$$

où $\bar{F}_e$ represente la fréquence moyenne d'échantillonnage et dt_n les intervalles de temps entre les échantillons.

Le signal peut alors être reconstruit si la fréquence d'échantillonnage moyenne est supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal. Appelé communément théorème de Beutler, ce résultat introduit la notion de densité d'échantillonnage qui avait permis à Nyquist d'anticiper le théorème de Shannon. Si l'échantillonnage est suffisamment dense, le signal sera reconstructible.

1.3.3.3 Condition de Feichtinger et Gröchenig [4]

Ils ont proposé de généraliser la théorie de l'échantillonnage à partir des $frames$. Pour une séquence d'instants d'échantillonnage $\{t_n\}$ vérifiant la condition $|t_n - t_m| \leqslant \alpha > 0$ pour $n \neq m$, alors l'ensemble de fonction $\{\mathcal{T}_{t_n} sinc_{f_{max}}\}\, s$ (où $\mathcal{T}_{t_n}$ est l'opérateur de translation)

est un $frame$ si la relation (1.34) est vérifiée. La réciproque est également vraie. Ainsi pour reconstruire le signal, ils introduisent l'opérateur de $frame$ S défini par :

$$Sx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < x, g_n > g_n. \tag{1.35}$$

permettant de définir une série :

$$x^{(0)} = Sx \; et \; x^{(m)} = x^{(m-1)} + \lambda S(x - x^{(m-1)}) \; pour \; m > 0. \tag{1.36}$$

Au départ, le signal est reconstruit grossièrement à partir des échantillons $x(t_n)$ sur la base des fonctions g_n du $frame$ puis l'erreur est intégrée successivement. Au final le signal d'origine est reconstruit avec une erreur bornée $\|x - x^{(m)}\| \leqslant \gamma^{m+1}\|x\|$. Cependant les auteurs admettent que l'application de ce théorème est limitée par l'absence d'estimateurs pour le calcul des bornes A et B d'autant plus qu'ils influencent les performances en terme de stabilité et de convergence :

$$\lambda = \frac{2}{A+B} \; et \; \gamma = \frac{B-A}{A+B}. \tag{1.37}$$

Ils proposent donc des algorithmes itératifs de reconstruction où chaque méthode est étudiée en fonction du paramètre de relaxation λ et du taux de convergence γ. On peut citer notamment la méthode des poids adaptés basée sur des $frames$ pondérés où les bornes A et B ne dépendent uniquement que de l'intervalle de temps le plus grand et de la fréquence maximale du signal : Si

$$\delta = sup_{n\in\mathbb{Z}}(t_{n+1} - t_n) < \frac{1}{2f_{max}}, \tag{1.38}$$

alors

$$A = (1 - \frac{\delta}{2f_{max}}) \; et \; B = (1 + \frac{\delta}{2f_{max}}). \tag{1.39}$$

1.3.3.4 Condition de Papoulis [5]

Il a démontré qu'un signal à bande limitée peut être reconstruit à partir des échantillons de m systèmes linéaires et invariant dans le temps échantillonnés à $\frac{1}{m}$ fois la fréquence de Nyquist (bien que localement chaque système soit sous-échantillonné, la fréquence d'échantillonnage moyenne de l'ensemble des systèmes réunis est égale à la fréquence de Nyquist). En généralisant les travaux de Papoulis, Eldar [46] est parvenue à implémenter la relation de Levinson (équation 1.31). Ainsi, dans le cas particulier d'un échantillonnage non uniforme périodique, elle propose d'utiliser un banc de filtres à temps continu pour reconstruire le signal ou à temps discret pour interpoler les échantillons.

1.3.3.5 Condition de Landau [6]

Soit $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ une classe de signaux continus à valeurs réelles, à énergie finie et à bande limitée dans un sous-ensemble $\mathcal{B} = [-\frac{F_{nyq}}{2}, \frac{F_{nyq}}{2}]$, définie par :

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \left\{x(t) \in L^2(\mathbb{R}) : X(f) = 0, \forall f \notin \mathcal{B}\right\} \tag{1.40}$$

où

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-j2\pi ft}dt, \tag{1.41}$$

est la transformée de Fourier du signal $x(t)$.
On appelle *support spectral* de $x(t) \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$, l'ensemble $\mathcal{F}$, défini par :

$$\mathcal{F} = \{f : X(f) \neq 0, \forall f \in \mathcal{B}\} \tag{1.42}$$

pour un signal multibandes, c'est à dire constitué de N sous bandes. Le support spectral est défini par :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{N}[a_i, b_i] \cup [-b_i, -a_i] \tag{1.43}$$

où a_i et b_i représentent les limites des bandes contenues dans $\mathcal{B}$. Nous définissons l'envergure spectrale de $\mathcal{F}$ comme le plus petit intervalle pouvant contenir $\mathcal{F}$. Il se calcule de la manière suivante :

$$\lambda(\mathcal{F}) = 2\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) \tag{1.44}$$

On dit que $\mathcal{F}$ est dit compressible lorsque $\frac{\lambda(\mathcal{F})}{F_{nyq}} < 1$. Sinon $\mathcal{F}$ est dit non-compressible. Par la suite nous désignerons par $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ la classe de signaux $x(t) \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ ayant un support spectral $\mathcal{F}$ compressible.
En 1967, Landau généralise le théorème de Beutler en montrant qu'il est toujours possible d'échantillonner un signal de classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ à une fréquence inférieure à F_{nyq}. La condition de reconstruction exacte des échantillons uniformes à la fréquence de Nyquist est la connaissance exacte des emplacements des bandes contenues dans le signal échantillonné, en d'autres termes avoir la parfaite connaissance de $\mathcal{F}$. La fréquence de Landau, c'est-à-dire la plus petite fréquence permettant l'acquisition d'un signal de classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ et sa reconstruction exacte aux instants de Nyquist est égale à :

$$f_{Laudau} = \lambda(\mathcal{F}) \tag{1.45}$$

Ce résultat ouvre la voie à l'échantillonnage compressé.

1.4 L'échantillonnage compressé (Compressed Sampling)

La conversion analogique numérique classique basée sur l'échantillonnage uniforme n'est pas toujours adaptée aux signaux de classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, à savoir des signaux à bande limitée, dont la transformée de Fourier s'étend sur plusieurs intervalles distincts. En effet d'après, la condition de Laudau [6], l'échantillonnage des signaux à support spectral compressé peut se faire à la fréquence de Laudau donné dans l'équation 1.45. Lin et Vaidynathan [24] proposent sur ce principe une méthode de reconstruction parfaite pour un échantillonnage non uniforme périodique fonctionnant à la fréquence de Landau, avec la connaissance du support spectral. Venkataramani et Bresler [26] ont proposé un système semi-aveugle : l'échantillonnage est basé sur l'échantillonnage non uniforme périodique aveugle, dont la conception ne nécessite pas la connaissance de l'emplacement des bandes. Cependant, la reconstruction est effectuée à l'aide d'un banc de filtre non-aveugle obligeant les connaissances du support spectral. Les travaux sur la démodulation aléatoire [47] ont inspiré Mishali et Eldar, qui ont proposé un schéma d'échantillonnage aveugle [19] permettant un échantillonnage compressé et une parfaite reconstruction.

Dans cette partie du document, nous étudierons les principales techniques d'échantillonnage compressé ainsi que les méthodes de reconstructions associées.

1.4.1 Le convertisseur large bande modulé

1.4.1.1 Description du modèle

Le Convertisseur Large Bande Modulé est un système d'échantillonnage compressé inspiré des travaux de Kirolos sur la démodulation aléatoire [47]. Il a été proposé par Mishali et Eldar dans [19] sous appellation *Modulated Wideband Converter - MWC*. C'est un système d'échantillonnage compressé multi-canal conçu pour acquérir en temps continu des signaux de la classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$. Il se compose de m étages où le signal d'entré $x(t)$ est multiplié par un signal aléatoire périodique $p_i(t), i = 1, ..., m$, appelée fonction de mixage, puis filtré par un filtre passe bas avant d'être échantillonné uniformément à une fréquence inférieure à F_{nyq} (Voir Figure 1.18).

Les fonctions de mixage $p_i(t)$ sont des extensions périodiques distinctes, d'ondes carrées aléatoires de durée finie prenant les valeurs $\{-1, +1\}$, définie telles que :

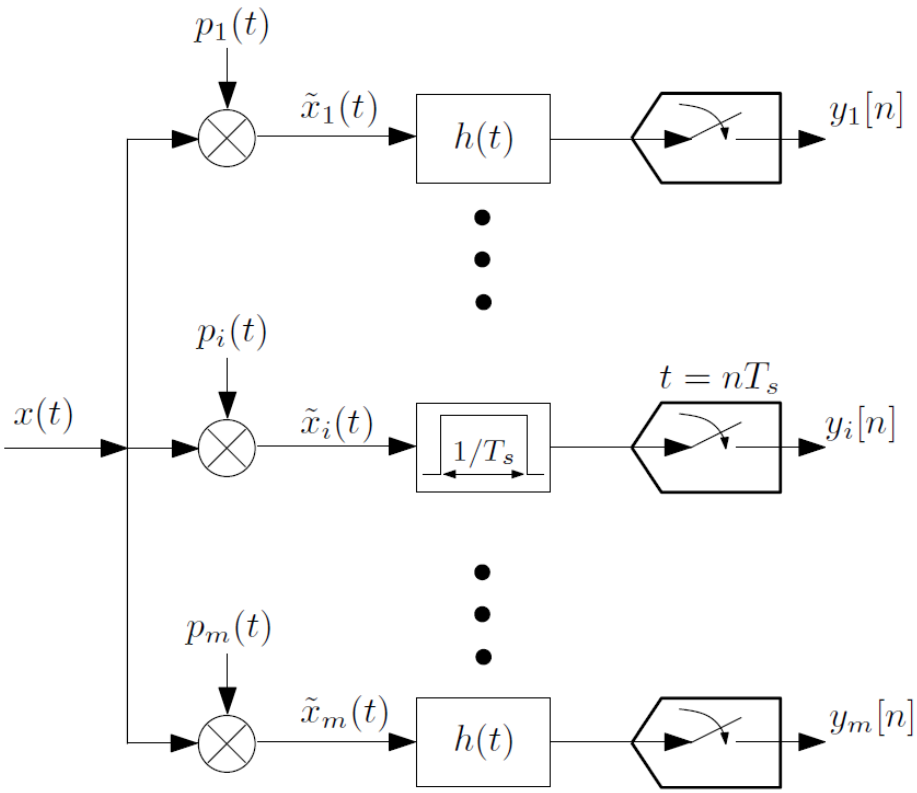


FIGURE 1.18 – Le Convertisseur large bande modulé (MWC) [19]

$$p_i(t) = \alpha_{ik},\ k\frac{T_p}{M} \leqslant t \leqslant (k+1)\frac{T_p}{M},\ 0 \leqslant k \leqslant M-1, \tag{1.46}$$

avec $\alpha_{ik} = \{-1, +1\}$ et $p_i(t + nT_p) = p_i(t)$.

La réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre est comprise dans l'intervalle $\mathcal{B}_s = [-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}]$.

Le signal $\tilde{x}_i(t)$ après filtrage ne contiendra que les fréquences contenues dans $\mathcal{B}_s$.

1.4.1.2 Équations d'état et reconstruction

Les séquences $y_i[n]$ obtenues après échantillonnage à la fréquence f_s du signal $\tilde{x}_i(t)$ filtré par $h(t)$, ont pour transformée de Fourier :

$$Y_i(\exp(j2\pi f T_s)) = \sum_{l=-L_0}^{L_0} c_{il} X(f - l f_p), f \in \mathcal{B}_s \tag{1.47}$$

où L_0 est choisi tel que :

$$L_0 = \left\lceil \frac{F_{nyq} + f_s}{2f_p} \right\rceil - 1. \tag{1.48}$$

En posant $L = 2L_0 + 1$ l'équation 1.47 peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}\mathbf{z}(f), f \in \mathcal{B}_s \tag{1.49}$$

Où $\mathbf{y}(f)$ est un vecteur de taille m donné par :

$$\mathbf{y}(f) = \begin{bmatrix} Y_1(\exp(j2\pi f T_s)) \\ \vdots \\ Y_i(\exp(j2\pi f T_s)) \\ \vdots \\ Y_m(\exp(j2\pi f T_s)) \end{bmatrix}, \quad f \in \mathcal{B}_s. \tag{1.50}$$

Le vecteur des inconnues $\mathbf{z}(f)$ est donné par :

$$\mathbf{z}(f) = \begin{bmatrix} X(f + (0 - L_0)f_p) \\ \vdots \\ X(f + (r - L_0)f_p) \\ \vdots \\ X(f + (L - L_0 - 1)f_p)) \end{bmatrix}, \quad f \in \mathcal{B}_s \tag{1.51}$$

Le $il^{\text{ème}}$ élément de la matrice $\mathbf{A}$ de taille $(m \times L)$ est donné par :

$$\mathbf{A}_{il} = c_{i,-l} = c_{il}^*, \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant L \tag{1.52}$$

avec

$$c_{il} = d_l \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_{ik} \theta^{lk} \tag{1.53}$$

où

$$d_l = \begin{cases} \frac{1}{M} & l = 0 \\ \frac{1-\theta^l}{2j\pi l} & l \neq 0 \end{cases} \tag{1.54}$$

et $\theta = \exp(-\frac{j2\pi}{M})$. En prenant $M = L$, nous pouvons réécrire la matrice $\mathbf{A}$ comme suite :

$$\mathbf{A} = \mathbf{SFD} \tag{1.55}$$

avec $\mathbf{D}$ une matrice diagonale de taille $(L \times L)$ définie par :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{L_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{-L_0} \end{bmatrix}. \tag{1.56}$$

$\mathbf{F}$ est une matrice de Fourier de taille $(M \times M)$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est donnée par :

$$\overline{\mathbf{F}}_i = \left[\theta^{0.i}, \theta^{1.i}, \ \dots, \ \theta^{(M-1).i}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{1.57}$$

F est donnée par :

$$\mathbf{F} = \left[\overline{\mathbf{F}}_{-L_0},\ \ldots,\ \overline{\mathbf{F}}_{L_0}\right]. \tag{1.58}$$

S est une matrice aléatoire de taille $(m \times M)$ dont le $ik^{\text{ème}}$ élément est donné égal à α_{ik}.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mM} \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

Reconstruire le signal $x(t)$ à partir des séquences $y_i[n]$ passe par la résolution de l'équation 1.49.

La relation 1.51, indique que les éléments inconnus du vecteur $\mathbf{z}(f)$ sont créés par un filtrage passe-bande du signal d'origine aux fréquences $-\frac{f_s}{2} + (r - L_0)f_p \leqslant f < \frac{f_s}{2} + (r - L_0)f_p$. Si le spectre du signal $X(f)$ est découpé en L cellules indexées de 0 à $L-1$, chaque cellule correspondrait à la ligne associée au vecteur $\mathbf{z}(f)$, pour $f \in \mathcal{B}_s$.

1.4.1.3 Choix des paramètres du MWC

Le MWC dans sa version proposée par Michali et Eldar dans [19] est un système très rigide. Il ne permet la reconstruction que d'un certain type de signaux de la classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$. Le choix des paramètres du MWC implique d'avoir un certain nombre d'informations sur $x(t)$. En supposant L un entier quelconque supérieur à zéro et en prenant $f_s = f_p = F_{nyq}/L$ et α_{ik} aléatoire, nous pouvons distinguer deux cas possibles :

- Lorsque la localisation des bandes contenues dans $x(t)$ est connue, nous nous trouverons dans le cas "non-aveugle". L'ensemble des index spectraux et les paramètres d'échantillonnage sont calculables en exploitant les informations sur le spectre du signal.
- Dans le cas aveugle, Michali et Eldar supposent connus le nombre maximal de bande pouvant être contenues dans $x(t)$ ainsi que leur largeur maximale. Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ sont inconnus. Toutefois, il est possible de calculer la valeur maximale q_{max} que peut atteindre $\mathcal{K}$. Ainsi, m est pris égal q_{max}. Les valeurs de $\mathcal{K}$ peuvent être calculées grâce à des algorithmes de *compressed sensing* tel que l'OMP (*Orthogonal Matching Pursuit*) .

1.4.2 Le Multi-Coset

1.4.2.1 Description du modèle

L'échantillonnage non uniforme périodique, plus connu sous l'appellation *Multi-Coset Sampling* (MC) permet d'échantillonner à une fréquence moyenne inférieure à la fréquence de Nyquist, en capturant une quantité d'information suffisante pour la reconstruction exacte du signal $x(t)$ [26, 21]. Le schéma descriptif du MC est constitué de p branches, chacune contenant un retard $\Delta_i = c_i T$ suivi d'un échantillonneur uniforme fonctionnant au rythme $T_s = LT$ (Fig.1.19).

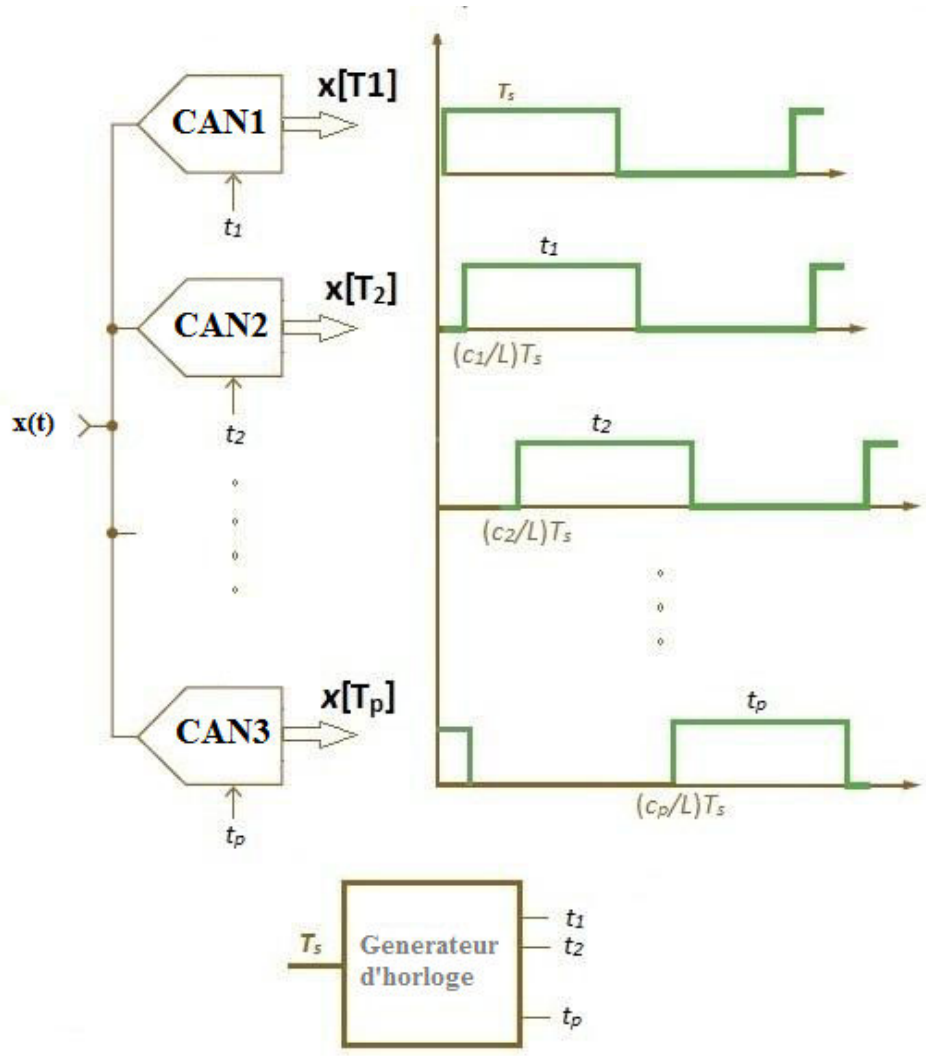


FIGURE 1.19 – Schéma descriptif du multi-coset

Il existe plusieurs méthodes d'implémentation matérielle de l'échantillonnage MC dans la littérature. La plus connues est constituée de p CANs en parallèle, chacun fonctionnant uniformément à une période $T_s = LT$ et un décalage de l'instant d'échantillonnage par $c_i T$ (voir figure 1.19)

Il a été proposé dans [48] un schéma Mutli-Coset dans lequel les échantillonneurs uniformes fonctionnent à des fréquences différentes (SMRS, Synchronous Mutlirate Sampling). Dans [49] l'auteur part de la SMRS pour définir un schéma utilisant deux échantillonneurs, le $Dual - Sampling$, fonctionnant à des périodes premières entre elles.

Le signal d'entrée $x(t)$ est échantillonné non-uniformément aux instants $t_i(n) = (nL+c_i)T$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $n \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble $\mathcal{C} = \{c_i\}$ contient p entiers distincts provenant de $\mathbb{L} = \{0, 1, \ldots, L-1\}$. Il est désigné comme le modèle d'échantillonnage du couple (L, p) avec $0 \leqslant c_i < c_2 < ... < c_p \leqslant L-1$.

1.4.2.2 Equation d'état et reconstruction

En définissant la $i^{éme}$ séquence d'échantillons, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, par

$$x_i[n] = \begin{cases} x[nT] & , \quad n = mL + c_i, m \in Z \\ 0 & , \quad par\ ailleurs \end{cases} \tag{1.60}$$

la transformée de Fourier $X_i(e^{j2\pi fT})$ de $x_i[n]$ est liée à $X(f)$, la transformée de Fourier de $x(t)$, par l'expression matricielle suivante [50] :

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}\mathbf{s}(f), f \in [0, \frac{1}{LT}[\tag{1.61}$$

où $\mathbf{y}(f)$ est un vecteur de taille $(p \times 1)$ dont le $i^{ème}$ élément est donné par

$$y_i(f) = X_i(f)\exp(-j2\pi f c_i T), f \in [0, \frac{1}{LT}[, \tag{1.62}$$

$\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ est une matrice de taille $(p \times L)$ dont le $(i,l)^{ème}$ élément est donné par

$$[\mathbf{A}_{\mathcal{C}}]_{il} = \frac{1}{LT}\exp(j2\pi\frac{c_i}{L}(l - \frac{L}{2})), f \in [0, \frac{1}{LT}[\tag{1.63}$$

où $0 \leqslant l \leqslant L-1$.

Le vecteur $\mathbf{s}(f)$ de dimension $L \times 1$ dans (1.61) représente le vecteur des inconnues dont le $l^{ème}$ élément est donné par

$$s_l(f) = X(f + \frac{l - \frac{L}{2}}{LT}), f \in [0, \frac{1}{LT}[. \tag{1.64}$$

La reconstruction de $x(t)$ reviendra à résoudre l'équation linéaire 1.61.

La relation 1.64, indique que les éléments inconnus du vecteur $\mathbf{s}(f)$ sont créés par un filtrage passe-bande du signal d'origine sur la plage $\frac{r}{LT} \leqslant f < \frac{r+1}{LT}$, suivi d'un décalage fréquentiel vers la gauche de $\frac{r}{LT}$ unité. En d'autres termes, si le spectre du signal, $X(f)$ est découpé en L cellules indexées de 0 à $L-1$, chaque cellule correspondrait à la ligne associée au vecteur $\mathbf{s}(f)$, pour $f \in \mathcal{B}_0$.

1.4.2.3 Choix des paramètres du Multi-Coset

Dans l'échantillonnage non-uniforme, les paramètres T, L, p et $\mathcal{C}$ doivent être soigneusement choisis pour une parfaite reconstruction. Les critères les plus importants dans le choix de ces paramètres sont, une fréquence d'échantillonnage minimale et une reconstruction parfaite. En fait, il s'avère que, sauf dans le cas où le système d'échantillonnage et l'algorithme de reconstruction sont très soigneusement conçus et optimisés, la sensibilité à de petites erreurs peut être si grande que même si la reconstruction parfaite est possible avec des données parfaites, le signal sera corrompu et deviendra méconnaissable dans les situations pratiques [20]. Dans cette partie, nous allons montrer comment choisir les paramètres d'échantillonnages du Multi-Coset.

La période d'échantillonnage de base T :

Nous rappelons que les signaux traités sont à bande limitées de fréquence maximale $\frac{fnyq}{2}$. Afin d'éviter le phénomène de repliement spectral, quelque soit $\mathcal{F}$ [20], la période d'échantillonnage de base doit être inférieure ou égale à $\frac{1}{F_{nyq}}$:

$$T \leqslant \frac{1}{F_{nyq}} \tag{1.65}$$

Choix du nombre de branche p du MC :

Pour L fixé, un entier quelconque généralement pair, l'équation 1.61 est inversible si et seulement si $L \geqslant p \geqslant q \geqslant 0$. Le paramètres p doit être supérieur ou égal au nombre de cellules actives après un découpage du spectre, $X(f)$, de $x(t)$ en L morceaux.
Connaissant le nombre maximal de bandes N_{max} ainsi que la largeur maximale des bandes B_{max} pouvant être contenues dans $x(t)$, il est possible de calculer la valeur maximale q_{max} que peut atteindre la cardinalité de $\mathcal{K}$. Ainsi, en prenant $p = q_{max}$, il est possible d'échantillonner $x(t)$ avec une fréquence moyenne égale à :

$$F_{moy} = (\frac{p}{L})F_{nyq} = 4 \times N_{max} \times B_{max} \tag{1.66}$$

Motif d'échantillonnage $\mathcal{C}$:

Le motif d'échantillonnage est un ensemble de p éléments parmi L, compris entre 0 et $L-1$. Le choix d'un bon modèle d'échantillonnage permet d'optimiser les marges d'erreurs dues aux repliements spectraux et à la sensibilité au bruit, dans les processus de reconstruction.

Nous savons maintenant que lors de la reconstruction, la pseudo-inverse de la matrice $A_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ existe si et seulement si $A_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ est une matrice de rang plein en colonne (full rang colomn). Par conséquent le motif d'échantillonnage qui rendrait $A_{\mathcal{C}}$ de rang plein en colonne, appelé motif d'échantillonnage universel [50], ainsi la matrice $A_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ deviendrait de rang plein en colonne aussi. Ceci est le premier critère dans le choix du modèle d'échantillonnage $\mathcal{C}$.

Dans la pratique le membre gauche de l'équation 1.61, sera perturbé, du fait que le signal $x(t)$ n'est pas parfaitement à bande limitée, et en raison des erreurs de quantification ou de bruit de phase. Par ailleurs, la stabilité numérique ou le conditionnement de $A_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ posent de véritables problèmes. Par conséquent, un motif d'échantillonnage qui conduirait à un bon conditionnement de $A_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$, est le second critère dans le choix de $\mathcal{C}$ [23].

Un mauvais choix de $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i=1}^{p}$, modèle d'échantillonnage du couple (L, p), engendre une sensibilité aux erreurs si grande que même si la reconstruction parfaite était possible avec des données parfaites, le signal serait corrompu et deviendrait méconnaissable dans la pratique.

Nous constatons enfin qu'après le choix des paramètres d'échantillonnage, le schéma d'échantillonnage (Fig.1.19) reste ensuite inchangé quelque soit le spectre de $x(t)$. De ce fait la reconstruction n'est possible que pour un certain type de signaux.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de fonctionnement d'un convertisseur analogique numérique à échantillonnage uniforme dans la section 1.2. Nous avons discuté des limitations que peut rencontrer ce genre de convertisseur dans le contexte de la radio intelligente. Dans la section 1.3 et 1.4, nous avons présenté un bref état de l'art pour l'échantillonnage aléatoire et compressé. Pour finir nous avons discuté des avantages et inconvénients de ces différentes familles d'échantillonnage. Nous avons classifié l'ensemble des techniques d'échantillonnages que nous avons rencontré durant cette thèse sur la figure 1.20. Dans le chapitre suivant, nous commencerons par effectuer un état de l'art des différentes techniques d'analyse spectrales. Puis nous montrerons par la simulation la propriété d'anti-repliement spectral des modes JRS et ARS. Pour finir nous proposerons une nouvelle technique d'échantillonnage non uniforme périodique permettant de réduire le niveau des repliements spectraux à l'intérieur de la bande utile dans le cadre de l'échantillonnage non uniforme périodique, communément appelé Multi-Coset.

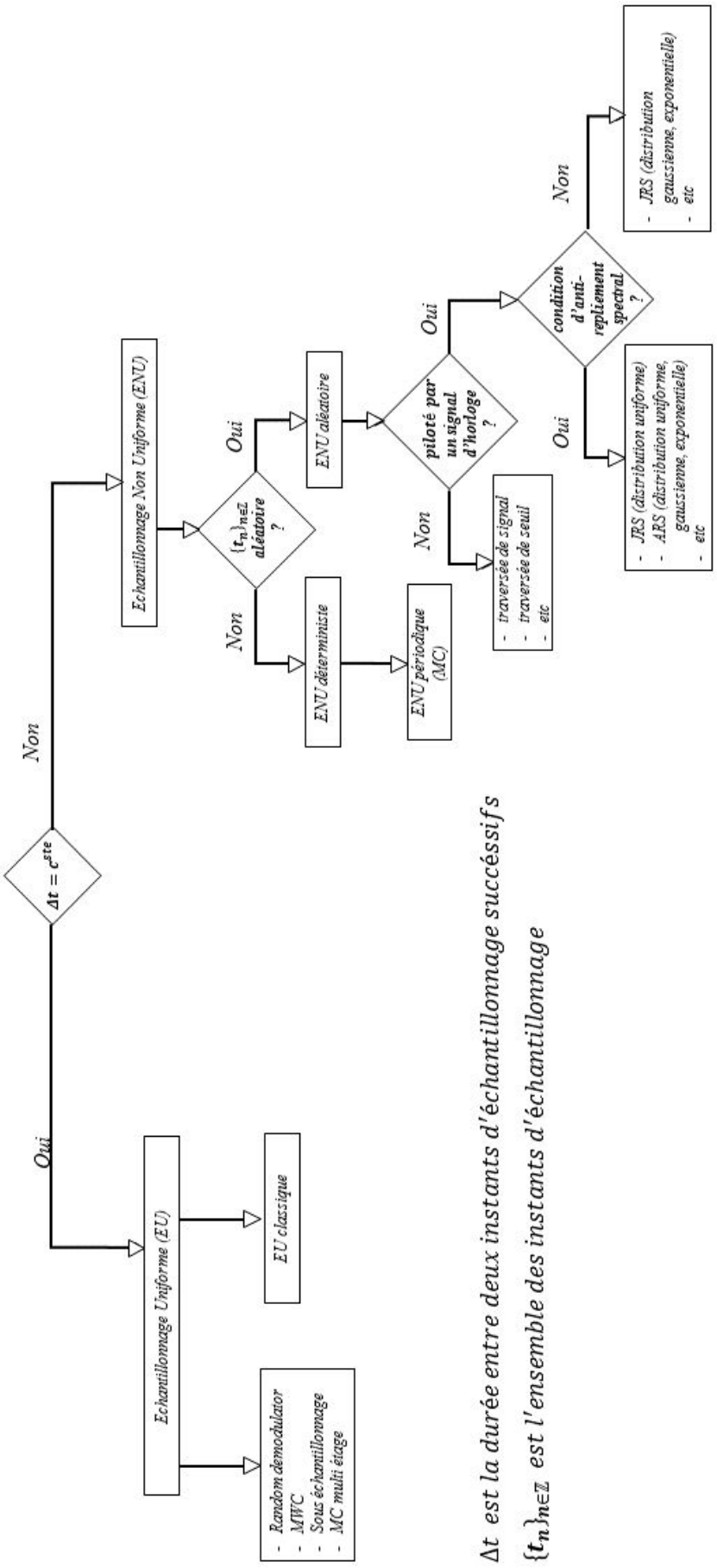


FIGURE 1.20 – Classification des techniques d'échantillonnage rencontrées dans la littérature

Chapitre 2

Analyse spectrale pour la détection de spectres dans un contexte d'échantillonnage non-uniforme

2.1 Introduction

Les systèmes de radiocommunication traitent des signaux analogiques ou numériques de nature très variées. Une façon de connaître ces signaux est d'observer leurs *allures en fonction du temps*, $x(t)$. Cette démarche bien que naturelle n'est pas forcément la meilleure. En effet, les systèmes électroniques sont souvent plus sensibles à la puissance ou à la fréquence des signaux et la représentation du signal sous la forme *puissance en fonction de la fréquence* permet, dans bien des cas, d'extraire plus rapidement les informations qui réside dans ces derniers.

L'analyse spectrale consiste à associer à un signal $x(t)$ une fonction $S_x(f)$ appelée Densité Spectrale de Puissance (DSP). En théorie, la DSP d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation, et l'estimer revient donc à estimer l'autocorrélation du signal $x(t)$. En pratique, il y a deux difficultés majeures :

— le nombre de données pour estimer $S_x(f)$ est toujours très limité et

— le signal $x(t)$ est généralement bruité.

De très nombreuses méthodes d'estimation spectrale existent dans la littérature [51, 52, 53, 54, 55]. Ces méthodes traitent des données acquises de façon uniforme ou non.

Un terminal radio intelligente est un dispositif capable de prendre connaissance de son environnement radio (les fréquences de communication entre autres) afin d'ajuster ses pa-

ramètres de fonctionnement pour mieux répondre aux besoins de l'utilisateur. Ici, l'analyse spectrale permettra à l'équipement radio intelligent de connaître les canaux de communication qui sont en cours d'utilisation et ceux qui ne le sont pas. Nous appellerons cela la détection de spectre (*spectrum sensing*).

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il existait plusieurs techniques d'échantillonnage non-uniforme (aléatoire, non aléatoire ou compressif). L'échantillonnage non-uniforme aléatoire (l'échantillonnage aléatoire) possède sous certaines conditions la propriété d'anti-repliement spectrale, ce qui permet d'observer des plages fréquentielles beaucoup plus grandes que celles permises par l'échantillonnage régulier. L'échantillonnage irrégulier compressif permet, sous certaines conditions, de réduire très sensiblement la fréquence moyenne d'échantillonnage tout en garantissant la reconstruction du signal aux instants uniformes.

Dans cette partie du document, nous commencerons par présenter dans la section 2.2 les différentes méthodes d'analyse spectrale (Méthodes paramétriques et non paramétriques) ainsi que leurs avantages et inconvénients. Nous débuterons la section-2.3 par la présentation de quelques méthodes d'analyse spectrale qui utilisent des échantillons non-uniformes (sous-section-2.3.1) puis dans la sous-section-2.3.2 nous validerons par la simulation la condition d'anti-repliement spectrale évoquée dans la sous-section-1.3.1.3 du chapitre précédent et enfin dans la sous-section-2.3.3 nous expliquerons comment l'échantillonnage non-uniforme périodique (le Multi-Coset) permet de réduire la fréquence moyenne d'échantillonnage tout en garantissant une bonne qualité d'analyse spectrale. Dans la section-2.4 nous présenterons des résultats de simulation. Dans la section 2.5 nous conclurons ce chapitre en expliquant comment l'échantillonnage non-uniforme peut contribuer à réduire la consommation d'énergie lors de la détection de spectre dans le contexte de la radio intelligente.

2.2 Analyse spectrale avec des échantillons uniformes

Dans la littérature, il existe de nombreuses méthodes d'analyse spectrale généralement regroupées en deux grandes familles. La première contient des méthodes dites classiques ou non paramétrique. Elles n'utilisent aucune connaissance a priori sur le signal mise à part les observations de ce dernier. La seconde contient des méthodes dites paramétriques, et utilise un modèle paramétrique décrivant le signal, modèle à partir duquel il est facile d'obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance. Les paramètres du modèle

sont adaptés en fonction des données recueillies.

2.2.1 Méthodes non paramétriques

Considérons un processus discret $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ aléatoire stationnaire du second ordre de moyenne nulle et dont la fonction d'auto-corrélation est :

$$r_{xx}(m) = \mathbf{E}\left[x^*(n)x(n+m)\right] = r^*_{xx}(-m). \tag{2.1}$$

On s'intéresse tout d'abord à des méthodes non paramétriques, c'est-à-dire ne reposant pas sur un modèle a priori du signal. Sous les hypothèses de signaux stationnaires et ergodiques, la densité spectrale de puissance est définie par :

$$S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m)\exp(-j2\pi fmT) = \lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left[\frac{1}{N}\left\|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi fnT)\right\|^2\right]. \tag{2.2}$$

On suppose disposer de N échantillons $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ du signal $x(t)$ pris aux instants uniformes $\{t_n = nT\}_{n=0}^{N-1}$, avec T la période d'échantillonnage. Nous cherchons à estimer la densité spectrale de puissance de $x(t)$ à partir de ces données. Il existe deux grandes classes d'estimation non paramétrique ou classique du spectre, chacune étant liée à l'une des égalités dans l'équation (2.2) : le *périodogramme* et le *corrélogramme*.

2.2.1.1 Périodogramme de Schuster

Le périodogramme est un estimateur de la densité spectrale de puissance qui utilise directement le signal $x(n)$. Il fut introduit en 1898 par Schuster [56] et s'exprime selon l'équation 2.3.

$$\hat{S}_P(f) = \frac{1}{N}\left\|\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-j2\pi fnT)\right\|^2. \tag{2.3}$$

A partir de l'équation 2.3 il est possible de donner une relation générale du périodogramme de Schuster, en remplaçant l'ensemble des instants d'échantillonnage $\{nT\}_{n=0}^{N-1}$ par une forme quelconque. Ainsi, nous obtenons :

$$\hat{S}_{Pg}(f) = \frac{1}{N}\left\|\sum_{n=0}^{N-1}x(t_n)\exp(-j2\pi ft_n)\right\|^2 \tag{2.4}$$

où les instants d'échantillonnage t_n sont quelconques. Il est à noter que lorsque $\{t_n = nT\}_{n=0}^{N-1}$, les expressions 2.4 et 2.3 sont identiques.

Du fait de la troncature du signal, le périodogramme correspond à la convolution du spectre original S_x par transformée de Fourier $W_{rect}(f)$ d'une fenêtre rectangulaire. Ce qui fait de lui un estimateur biaisé :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\hat{S}_P(f)\right] &= S_x * W_{rect}(f) \\ &\neq S_x.\end{aligned}$$

où $\mathbf{E}[*]$ représente la fonction espérance mathématique.
Cependant, la fenêtre en sinus cardinal tend vers une impulsion de Dirac quand N tend vers l'infini, le périodogramme est alors asymptotiquement non-biaisé

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\left[\hat{S}_P(f)\right] = S_x. \tag{2.5}$$

Néanmoins, sa variance ne tend pas vers zéro quand N tend vers l'infini [7]. Ce qui fait de lui un estimateur non consistant

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{var}\left[\hat{S}_P(f)\right] \neq 0. \tag{2.6}$$

Le fait de tronquer le signal induit deux phénomènes principaux :

- élargissement des pics, impliquant une perte de résolution fréquentielle ; il est impossible de discriminer deux pics de fréquences très proches ;
- apparition de lobes secondaires, impliquant une perte de résolution en amplitude ; il est impossible d'observer des pics de faibles amplitudes au voisinage d'un pic de forte amplitude.

Pour minimiser les effets de la troncature, on peut remplacer la fonction porte (fenêtre rectangulaire) par une fonction de pondération appelée fonction d'apodisation. Ceci permet soit de réduire la largeur du lobe principal, soit d'atténuer les lobes secondaires, donnant ce qu'on appelle le périodogramme modifié.

2.2.1.2 Périodogramme modifié

La fenêtre rectangle dans l'équation du périodogramme simple est remplacée par une fonction d'apodisation $w(n)$ dans le périodogramme modifié. Ainsi, l'équation (2.3) dévient :

$$\hat{S}_{P.m}(f) = \frac{1}{NU}\left\|\sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)\exp(-j2\pi fnT)\right\|^2 \tag{2.7}$$

où

$$U = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|w(n)|^2 \tag{2.8}$$

est une constante introduite pour que $\hat{S}_{P.m}(f)$ soit asymptotiquement non-biaisé.

A partir de l'équation 2.7, il est également possible de donner une version générale du périodogramme de Schsuter modifié. Nous obtenons ainsi l'expression suivante :

$$\hat{S}_{Pg.m}(f) = \frac{1}{NU_g} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} w(t_n)x(t_n)\exp(-j2\pi f t_n) \right\|^2 \tag{2.9}$$

où

$$U_g = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |w(t_n)|^2. \tag{2.10}$$

Comme nous l'avons déjà dit dans la sous-section précédente, l'analyse spectrale se fait avec un nombre N limité d'échantillons, ce qui consiste à tronquer le signal. La troncature a pour effet la convolution du spectre du signal par un sinus cardinal, transformée de Fourier de la fonction d'apodisation rectangulaire. La fonction *sinus cardinal* est composée d'un lobe principal et de plusieurs lobes secondaires (voir figure 2.2). La largeur du lobe principal ainsi que l'amplitude des lobes secondaires peuvent nuire à l'interprétation du spectre. En effet, les lobes secondaires peuvent conduire les pics de fortes amplitudes à masquer les pics de plus faibles amplitudes, d'autre part la largeur des pics (du lobe principal) peut empêcher de séparer deux pics de fréquences très proches. La distance minimale entre deux pics fréquentiels distinguables est désignée par le terme *résolution spectrale*. Elle correspond à la largeur, ΔB, à -3dB du lobe principale de la fonction apodisation utilisée. De même, la différence maximale d'amplitude entre deux pics voisins distinguables est appelée *résolution en amplitude*, et équivaut à l'amplitude, ΔH, du premier lobe secondaire de la fonction apodisation.

Les figures 2.1 et 2.2 illustrent, respectivement, les formes temporelles et fréquentielles des fonctions Rectangle, Hamming, Hanning et Blackman.

La variance du périodogramme modifié est approximativement la même que celle du périodogramme. Elle est pratiquement indépendante de N et proportionnelle à $S_x(f)$. Afin de diminuer cette variance, on utiliser un périodogramme moyenné ou périodogramme de Bartlett.

2.2.1.3 Périodogramme de Bartlett

Le périodogramme de Bartlett [57] consiste à moyenner plusieurs périodogrammes de Shuster. La figure 2.3 illustre le principe du périodogramme de Bartlett.

En divisant l'ensemble des N données en K_{bart} segments de longueur M_{bart}, nous définis-

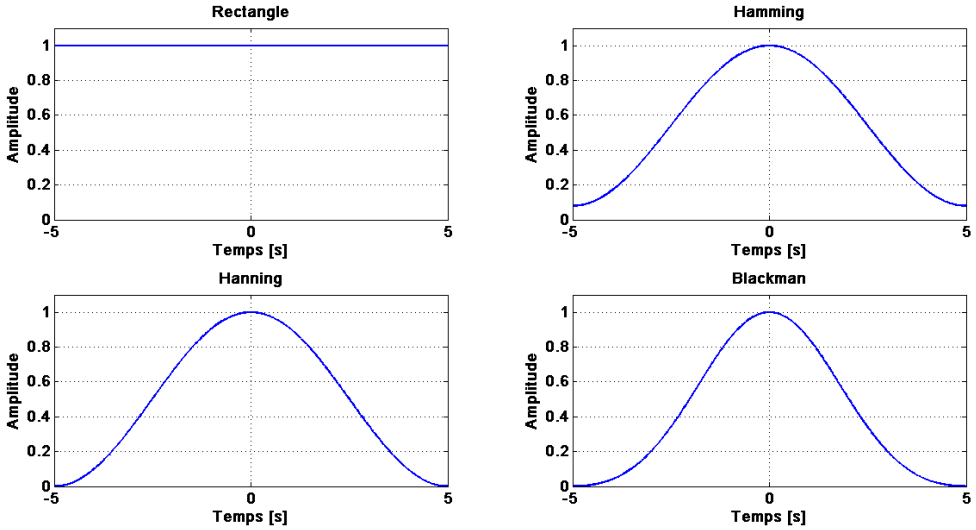


FIGURE 2.1 – Formes temporelles de quelques fonctions de pondération

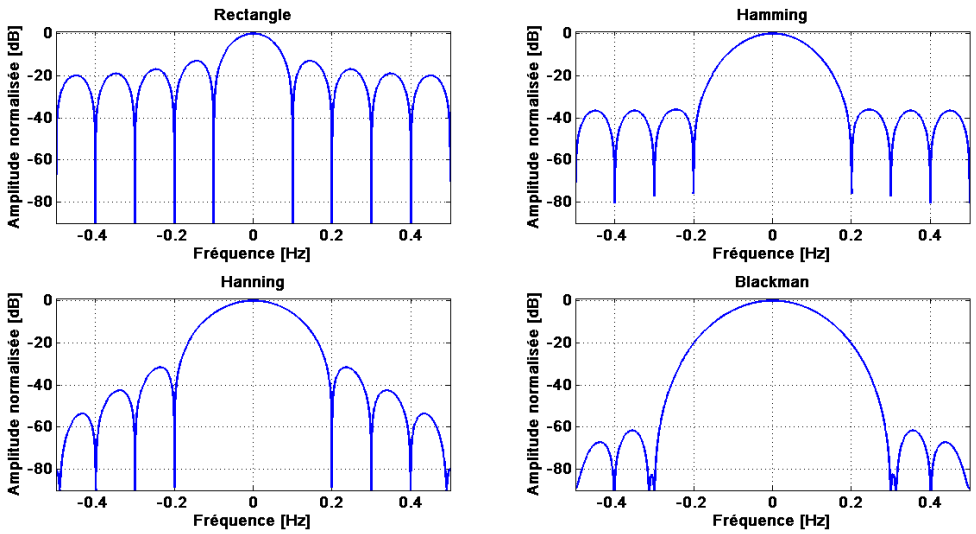


FIGURE 2.2 – Formes fréquentielles de quelques fonctions de pondération

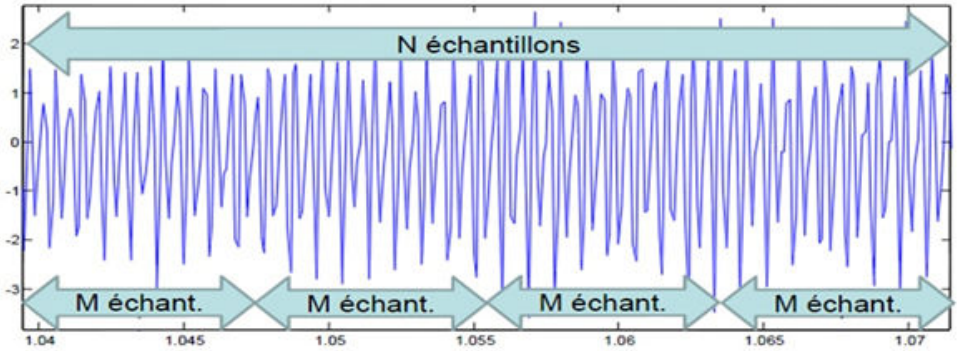


FIGURE 2.3 – Périodogramme de Bartlett

sons les séquences élémentaires $x^{(i)}_{M_{bart}}(k)$ par 2.11 :

$$x^{(i)}_{M_{bart}}(k) = x(iM_{bart} + k), i = 0, ..., K_{bart} - 1, \text{ et } k = 0, ..., M_{bart} - 1. \tag{2.11}$$

La densité spectrale de puissance de chaque séquence est estimée par (2.12) :

$$\hat{S}^{(i)}_B(f) = \frac{1}{M_{bart}} \left\| \sum_{n=0}^{M_{bart}-1} x^{(i)}_{M_{bart}}(n) \exp(-j2\pi fnT) \right\|^2 \tag{2.12}$$

et on effectue la moyenne :

$$\hat{S}_B(f) = \frac{1}{K_{bart}} \sum_{i=0}^{K_{bart}-1} \hat{S}^{(i)}_B(f). \tag{2.13}$$

Du fait des K_{bart} moyennes, la variance est presque divisée par K_{bart} : néanmoins, les tranches étant plus courtes, la résolution n'est plus que $1/K_{bart}$.
La forme générale de l'expression du périodogramme de Bartlett (voir équation 2.13) sera donnée par l'équation 2.14 :

$$\hat{S}_{Bg}(f) = \frac{1}{K_{bart}M_{bart}} \sum_{i=0}^{K_{bart}-1} \left\| \sum_{n=0}^{M_{bart}-1} x(t_i[n]) \exp(-j2\pi f t_i[n]) \right\|^2 \tag{2.14}$$

où

$$t_i[n] = t_{(iM_{bart}+n)}, i = 0, ..., K_{bart} - 1, \text{ et } n = 0, ..., M_{bart} - 1. \tag{2.15}$$

2.2.1.4 Méthode de Welch

En 1967, Welch propose deux modifications de la méthode de Bartlett [58]. La première est de permettre aux séquences $x_i(n)$ de se recouvrir et la seconde est de rajouter une fenêtre à chacune de ces séquences, produisant ainsi un ensemble de périodogrammes modifiés qui sont ensuite moyennés.

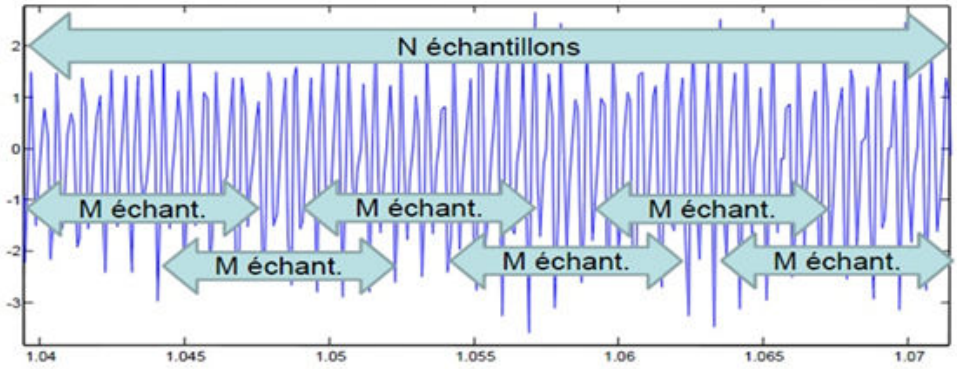


FIGURE 2.4 – Périodogramme de Welch

En supposant que les séquences successives sont décalées de $D \leqslant L$ échantillons et que chacune d'entre elles soit de longueur L, la $i^{ème}$ séquence est donnée par :

$$x_i(n) = x(n + iD), n = 0, 1, ..., L - 1. \tag{2.16}$$

Ainsi, la quantité de recouvrement (overlap) entre $x_i(n)$ et $x_{i+1}(n)$ est $L - D$ points, et si K séquences couvrent les N données du signal, alors $N = L + D(K - 1)$.

On peut maintenir la même résolution (longueur de section) que la méthode de Bartlett tout en doublant le nombre de périodogrammes modifiés qui sont moyennés, réduisant ainsi la variance.

La méthode de Welch peut s'écrire directement en fonction de $x(n)$:

$$\hat{S}_W(f) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left\| \sum_{n=0}^{L-1} x(n + iD)w(n) \exp(-j2\pi fnT) \right\|^2 \tag{2.17}$$

ou en fonction du périodogramme.

Une généralisation de l'équation 2.17 du péridogramme de Welch, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\hat{S}_{Wg}(f) = \frac{1}{KM} \sum_{i=0}^{K-1} \left\| \frac{1}{U_g(i)} \sum_{n=0}^{M-1} x(t_i[n])w\left(t_i[n] - iDT\right) \exp(-j2\pi f t_i[n]) \right\|^2 \tag{2.18}$$

où

$$U_g(i) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left| w\left(t_i[n] - iDT\right) \right|^2 \tag{2.19}$$

avec

$$t_i[n] = t_{(iD+n)}. \tag{2.20}$$

T représente la période de Nyquist associée à la bande considérée.

2.2.1.5 Corrélogramme de Blackman-Tukey

Une autre approche consiste à utiliser la définition du spectre à partir de la fonction de corrélation. On estime alors le spectre comme :

$$\hat{S}_{BT}(f) = \sum_{m=-M}^{M} \hat{r}_{xx}(m) \exp(-j2\pi f m T) \tag{2.21}$$

où $\hat{r}_{xx}$ est un estimateur de la fonction de corrélation, donné par (2.22) ou (2.23) :

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} x^*(k)x(k+m) \tag{2.22}$$

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-m-1} x^*(k)x(k+m). \tag{2.23}$$

L'estimateur (2.22) est biaisé alors que (2.23) est non biaisé. Blackman-Tuckey ont suggéré de prendre M de l'ordre de 10% de N. L'application d'une fenêtre est possible pour diminuer la variance sur l'estimation de la fonction de corrélation.
En effet, on a :

$$\hat{S}_{BT}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(m) \exp(-j2\pi f m T). \tag{2.24}$$

Or, la variance sur $\hat{r}_{xx}(m)$ augmente lorsque m se rapproche de N : c'est pourquoi on n'utilise que M points de corrélation. Néanmoins, quand M diminue, le biais augmente, nous avons donc un dilemme biais-variance.

Cette méthode souffre d'une :

- faible résolution (en $1/N$) d'où la difficulté de retrouver deux raies très proches pour des signaux de courte durée.
- difficulté à retrouver des signaux de faibles amplitudes par rapport à ceux de fortes amplitudes.
- lobes secondaires dû au fenêtrage.
- estimation non consistante de la Densité Spectrale de Puissance.

La méthode présente les avantages suivants :

- algorithmes très rapides et peu coûteux en calcul (FFT).
- spectre estimé proportionnel à la puissance.
- comportement robuste sur un large éventail de signaux.

2.2.1.6 Méthode de Capon [7]

Cette méthode cherche un filtre adapté dont la réponse vaut 1 pour chaque fréquence f et 0 ailleurs. On cherche donc à conserver la puissance à une fréquence f, tout en minimisant les puissances aux autres fréquences. Si le signal contient une composante à cette fréquence, elle sera rehaussée par rapport aux autres composantes. Une fois ce filtre obtenu, la puissance à sa sortie $S_{Capon}(f)$ montre des pics aux fréquences présentes dans le signal.

Soit $A = [a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{N-1}]^T$ le vecteur des coefficients du filtre. La sortie $y(n)$ du filtre s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) \tag{2.25}$$

ou plus simplement sous forme matricielle :

$$y(n) = H^T X(n) \tag{2.26}$$

avec

$$X(n) = [x(n)\ x(n-1)\ ...\ x(n-N+1)]^T. \tag{2.27}$$

Le filtre A doit minimiser

$$\mathbf{E}\left[|y(n)|^2\right] = A^H R_N A \tag{2.28}$$

sous contrainte

$$A^T E(f) = 1, \tag{2.29}$$

avec

$$R_N = \mathbf{E}\left[X(n)X(n)^T\right] \tag{2.30}$$

et

$$E(f) = [1\ \exp(j2\pi f)\ ...\ \exp(j2(N-1)\pi f)]. \tag{2.31}$$

Le vecteur A qui satisfait ces conditions est donné par 2.32 :

$$A = \frac{R^{-1}E}{E^H(f)R^{-1}E(f)} \tag{2.32}$$

La puissance en sortie du filtre est prise comme "estimateur spectral" et est donné par (2.33) :

$$S_{Capon}(f) = \frac{1}{E^H(f)R^{-1}E(f)} \tag{2.33}$$

La méthode de Capon ne nécessite aucune hypothèse à priori sur le signal. De plus, elle permet en général d'obtenir une meilleure résolution que le périodogramme, notamment

pour de faibles valeurs de N. Mais cette méthode souffre d'un coût de calcul supérieur aux estimateur précédents.

Alternative à l'analyse classique, l'analyse spectrale paramétrique présuppose donc une connaissance particulière du phénomène observé. Elle consiste en deux étapes. Dans un premier temps, on sélectionne un modèle : les paramètres du modèle sont alors estimés de façon à approximer au mieux la séquence de signal observée. Enfin, on réécrit la DSP (ou la corrélation) directement en fonction des paramètres.

2.2.2 Méthodes paramétriques

Contrairement à l'analyse spectrale "classique", c'est-à-dire liée à la transformée de Fourier (comme le périodogramme ou le corrélogramme), l'analyse spectrale paramétrique est basée sur la connaissance ou l'hypothèse d'un modèle mathématique du signal à analyser. On cherche alors à estimer les paramètres de ce modèle à partir des échantillons du signal, ce qui donne accès à une connaissance très complète du signal, et en particulier à son spectre, en remplaçant les paramètres inconnus du modèle par ceux estimés à partir des N échantillons du signal dont on dispose.

Le corrélogramme ou le périodogramme estiment une version biaisée du spectre, directement à partir des échantillons du signal. En revanche, les modélisations paramétriques permettent d'obtenir des estimateurs non biaisés du spectre, pourvu que l'estimation des paramètres soit sans biais.

2.2.2.1 Méthode MUSIC

La méthode MUSIC (MUltiple Signal Classification) fut introduite initialement par Schmidt [59], dans le domaine du traitement d'antennes. Elle fait l'hypothèse d'un signal constitué d'un mélange de p exponentielles complexes et d'un bruit blanc $b(n)$ de variance σ^2, donné par l'équation (2.44) :

$$y(n) = x(n) + b(n) = \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(j2\pi f_k nT) + b(n), \quad n = 0, ..., N-1. \tag{2.34}$$

Considérons la matrice d'auto-corrélation d'ordre M :

$$\mathbf{R}_{yy}^{M} = \begin{pmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(-1) & \dots & r_{yy}(-M+1) \\ r_{yy}(1) & r_{yy}(0) & \dots & r_{yy}(-M+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{yy}(M-1) & r_{yy}(M-2) & \dots & r_{yy}(0) \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

avec

$$\begin{aligned} r_{yy}(m) &= \mathbf{E}\left[y^*(n)y(n+m)\right], \quad m = 0, ..., M-1 \\ &= \sum_{k=1}^{p} P_k \exp(j2\pi m f_k) + \sigma^2\delta(m), \end{aligned} \tag{2.36}$$

où $P_k = |a_k|^2$. On peut réécrire 2.35 comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^{M} &= \mathbf{R}_{xx}^{M} + \mathbf{R}_{bb}^{M} \\ &= \sum_{k=1}^{p} P_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \tag{2.37}$$

avec

$$\mathbf{s}_k = \left[1,\ \exp(j2\pi f_k),\ ...,\ \exp(j2\pi(M-1)f_k\right]^T, \tag{2.38}$$

où $\mathbf{s}_k$ est appelé vecteur signal. La matrice d'auto-corrélation s'écrit comme la somme d'une matrice "signal" et d'une matrice "bruit" (en l'occurence $\sigma^2\mathbf{I}$). Par définition, la matrice "signal" est de rang p et sa décomposition en vecteurs-valeurs propres s'écrit :

$$\mathbf{R}_{xx}^{M} = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \tag{2.39}$$

où $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_p > \lambda_{p+1} = ... = \lambda_M = 0$ et $\mathbf{v}_k$ constituent une base orthonormée. Les vecteurs propres principaux $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ engendrent l'espace signal : ils engendrent le même espace que les vecteurs signaux (2.38). Les vecteurs $\mathbf{v}_{p+1}, ..., \mathbf{v}_M$ engendrent le sous-espace bruit. On a, de plus :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^{M} &= \mathbf{R}_{xx}^{M} + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H + \sigma^2 \sum_{k=1}^{M} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \\ &= \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \sigma^2)\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H + \sigma^2 \sum_{k=p+1}^{M} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Les vecteurs propres principaux de la matrice d'auto-corrélation bruitée sont associés aux valeurs propres $\lambda_k + \sigma^2$ alors que les vecteurs propres de l'espace bruit sont associés à σ^2.

Une propriété importante est que les vecteurs signaux engendrent le même espace que les vecteurs propres principaux, et sont orthogonaux aux vecteurs du sous-espace bruit :

$$\mathbf{s}_i^H \left(\sum_{k=p+1}^{M} \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0 \tag{2.41}$$

La méthode MUSIC est en fait une généralisation de la méthode de Pisarenko [60] au cas où le sous-espace bruit est choisi de dimension supérieur à 1. C'est un estimateur de spectre et non une densité spectrale de puissance à proprement dit. Elle consiste à chercher les maxima d'une fonction du type :

$$S(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M} \alpha_k |\mathbf{e}^H(f)\mathbf{v}_k|^2} \tag{2.42}$$

avec

$$\mathbf{e}(f) = \left[1,\ \exp(j2\pi f),\ ...,\ \exp(j2\pi(M-1)f)\right]^T. \tag{2.43}$$

Sachant que théoriquement lorsque $f = f_i$, le dénominateur est nul, c'est le choix des α_k qui conditionne l'estimateur :

$$S_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M} |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_k|^2} = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^{M} \mathbf{e}^H(f) \left[\sum_{k=p+1}^{M} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right] \mathbf{e}(f)} \tag{2.44}$$

2.2.2.2 Modèles auto régressif - modèle AR [8]

Le signal $x(n)$ est supposé être prédictible en fonction d'un certain nombre de ses valeurs antérieures.

Il peut donc s'écrire :

$$x(n) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x(n-i) + b(n), \tag{2.45}$$

où les coefficients $(\alpha_i)_{i=1}^N$ constituent les paramètres du modèle et où $b(n)$ est un bruit blanc décorrélé de $x(n)$ de variance σ^2 et représentant l'erreur de prédiction.

La transformée en Z de cette équation donne alors :

$$X(Z) \left(1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z^{-i} \right) = B(Z) \tag{2.46}$$

Le signal $x(n)$ peut donc être vu comme le résultat du passage d'un bruit blanc $b(n)$ de variance σ^2 à travers un filtre de fonction de transfert $H(Z)$, avec :

$$H(Z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z^{-i}}. \tag{2.47}$$

La connaissance des paramètres α_i permet de calculer la densité spectrale de puissance $S_{ar}(f)$:

$$S_{ar}(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \exp(-j2\pi f_i)\right|}. \tag{2.48}$$

2.2.2.3 Modèles à moyennes ajustées - modèle MA [8]

Le signal $x(n)$ est supposé pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire d'échantillons décorrélés entre eux, ce qui peut se formaliser comme une combinaison linéaire d'échantillons d'un bruit blanc $b(n)$:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{M} \beta_i b(n-i). \tag{2.49}$$

Le signal $x(n)$ peut donc être vu comme le résultat du passage d'un bruit blanc $b(n)$ à travers un filtre de fonction de transfert $H(Z)$, avec :

$$H(Z) = \sum_{i=0}^{M} \beta_i Z^{-i}. \tag{2.50}$$

La densité spectrale de puissance du signal $x(n)$ s'écrit alors :

$$S_{ma}(f) = \left|\sum_{i=1}^{N} \beta_i \exp(-j2\pi f_i)\right|. \tag{2.51}$$

2.2.2.4 Modèle auto régressif à moyenne ajustée - modèle ARMA [8]

Le modèle ARMA est une combinaison des modèles AR et MA où le signal $x(n)$ est supposé pouvoir s'écrire en fonction de N valeurs passées et de M échantillons d'un bruit blanc décorrélé.

$$x(n) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x(n-i) + \sum_{i=1}^{M} \beta_i b(n-i) \tag{2.52}$$

d'où

$$S_{arma}(f) = \left|\frac{\sum_{i=1}^{M} \beta_i \exp(-j2\pi f_i)}{1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \exp(-j2\pi f_i)}\right|. \tag{2.53}$$

2.2.3 Conclusion

Dans cette partie nous avons donné un aperçu des principales techniques d'analyse spectrales utilisées lorsque nous disposons d'échantillons uniformes. Dans la section suivante, nous expliquerons comment ces techniques peuvent être adaptées aux échantillons non-uniformes.

2.3 Analyse Spectrale avec l'échantillonnage non-uniforme

Il existe plusieurs techniques d'analyse spectrale propres à l'échantillonnage non-uniforme, d'autres états de l'art peuvent être trouvés dans [52, 53, 54, 55].
Dans cette partie, nous allons nous contenter de présenter les techniques que nous avons eu à utiliser durant cette thèse. Pour se faire nous distinguons deux classes de méthodes d'analyse spectrale :

- les méthodes que nous appelons "directes" : elles estiment la densité spectrale de puissance directement à partir des échantillons non-uniformes et
- les méthodes dites "indirecte" ou à re-échantillonnage : elles procèdent d'abord à un ré-échantillonnage ou une reconstruction du signal non uniformément échantillonné aux instants réguliers (généralement à la fréquence de Nyquist associé au signal). Ainsi il devient possible d'appliquer simplement les méthodes classiques d'analyses spectrales vues dans la section 2.2.

Dans la première sous-section de cette partie, nous allons dresser une liste non exhaustive de quelques méthodes d'analyse spectrale que nous avons eu à utiliser durant cette thèse. Dans la deuxième sous-section, nous appliquerons quelques une de ces techniques sur l'échantillonnage aléatoire (en mode JRS et ARS) afin de visualiser la propriété d'anti-repliement spectral de cette technique d'échantillonnage. Les résultats obtenus seront comparés aux résultats théoriques. Dans la troisième sous-section, nous partirons de la technique d'échantillonnage non-uniforme périodique (le Multi-Coset) pour proposer une méthode permettant la réduction des repliement spectraux à l'intérieur de la bande utile, Ceci dans le but d'améliorer la qualité de l'analyse spectrale lorsque l'on a un nombre réduit d'échantillons. Nous finirons par quelques simulations.

2.3.1 Quelques méthodes d'analyse spectrale avec échantillons non-uniformes

2.3.1.1 Périodogramme de Lomb-Scargle [9]

La méthode de Lomb-Scargle (Lomb 1976 et Scargle 1982 [61]) permet de définir un périodogramme invariant par translation temporelle pour des échantillons non-uniformes ; le principe de son algorithme est basé sur l'interpolation des données avec une série d'harmoniques, en utilisant la méthode des moindres carrés (least-square fitting).

Pour des données $\{t_n, x_n\}_{n=0}^{N-1}$ acquises à partir d'un signal $x(t)$ irrégulièrement échantillonné, considérons le modèle sinusoïdal suivant :

$$x_n = a\cos(2\pi f t_n) + b\sin(2\pi f t_n) + \epsilon_n, n = 0, ..., N-1 \tag{2.54}$$

et le problème de l'estimation de ses paramètres $\theta = [a, b, f]$. Sous forme matricielle, l'équation (2.54) devient :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(f)\mathbf{s} + \epsilon \tag{2.55}$$

en notant $\mathbf{x} = [x_0, ..., x_{N-1}]^t$, $\epsilon = [\epsilon_0, ..., \epsilon_{N-1}]^t$, $\mathbf{s} = [a, b]^t$ et $\mathbf{R}(f)$ la matrice $N \times 2$ formée par les N lignes $[\cos(2\pi f t_n), \sin(2\pi f t_n)]_{n=0,...,N-1}$.

En supposant les perturbations ϵ_n indépendantes et distribuées selon une même loi de probabilité p_ϵ, et sous l'hypothèse supplémentaire de perturbations gaussiennes centrées et de variance connue σ_ϵ^2 la fonction de vraisemblance du modèle (2.54) est donnée par :

$$L(\mathbf{x}; f, \mathbf{s}) = \frac{1}{(\sigma_\epsilon\sqrt{2\pi})^N} \exp\left[\frac{1}{2\epsilon_\epsilon^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{R}(f)\mathbf{s}\|\right]. \tag{2.56}$$

Les paramètres θ maximisant cette vraisemblance sont ceux minimisant le terme de moindres carrés

$$I(f, \mathbf{s}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{R}(f)\mathbf{s}\|^2. \tag{2.57}$$

Pour une fréquence f donnée, la valeur de $\mathbf{s}$ minimisant (2.57) est donnée par :

$$\hat{\mathbf{s}}(f) = (\mathbf{R}(f)^t\mathbf{R}(f))^{-1}\mathbf{R}(f)^t\mathbf{x} \tag{2.58}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{CC}(f) & \mathbf{CS}(f) \\ \mathbf{CS}(f) & \mathbf{SS}(f) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos(2\pi f t_n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin(2\pi f t_n) \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

où

$$\mathbf{CC}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f t_n), \tag{2.60}$$

$$\mathbf{CS}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f t_n)\sin(2\pi f t_n) \tag{2.61}$$

et

$$\mathbf{SS}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f t_n). \tag{2.62}$$

L'injection de $\hat{\mathbf{s}}(f)$ dans l'équation (2.57) permet ainsi d'obtenir un terme ne dépendant que de f :

$$I(f, \hat{\mathbf{s}}(f)) = \|\mathbf{x} - \mathbf{R}(f)\hat{\mathbf{s}}(f)\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \hat{\mathbf{s}}(f)^H \mathbf{R}(f)^H \mathbf{x}, \tag{2.63}$$

dont la minimisation en f revient à maximiser

$$J(f) \hat{=} \hat{\mathbf{s}}(f)^H \mathbf{R}(f)^H \mathbf{x}. \tag{2.64}$$

Afin de simplifier l'écriture de ce terme Lomb dans [9] propose de modifier le modèle sinusoïdal (2.54) en introduisant un décalage τ

$$x_n = a\cos(2\pi f(t_n - \tau)) + b\sin(2\pi f(t_n - \tau)) + \epsilon_n, n = 0, ..., N-1 \tag{2.65}$$

et de choisir τ, pour une fréquence f fixée, de manière à annuler les termes extra-diagonaux $\mathbf{CS}(f)$ de la matrice $\mathbf{R}(f)\mathbf{R}(f)^H$ ainsi modifiée, soit τ tel que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f(t_n - \tau)) \sin(2\pi f(t_n - \tau)) = 0. \tag{2.66}$$

Cet artifice permet alors d'écrire l'équation (2.64) sous forme simplifiée :

$$J(f) = \frac{[\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos(2\pi f(t_n - \tau))]^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f(t_n - \tau))} + \frac{[\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin(2\pi f(t_n - \tau))]^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f(t_n - \tau))} = 2S_{LS}(f) \tag{2.67}$$

avec

$$\tau = \frac{1}{4\pi f} \tan^{-1}\left(\frac{\sum_n \sin(4\pi f t_n)}{\sum_n \cos(4\pi f t_n)}\right) \tag{2.68}$$

qui est la définition du périodogramme de Lomb-Scargle, où le facteur 1/2 permet d'identifier cette définition de celle du périodogramme de Schuster (voir equation 2.3). La valeur de f maximisant $J(f)$ est donc la fréquence correspondant au maximum de la vraisemblance du modèle (2.65), et les amplitudes associées $\hat{\mathbf{s}}(f)$ se déduisent a posteriori de la relation (2.59).

Durant cette thèse, nous avons beaucoup utilisé la méthode d'estimation spectrale de Lomb [27], [62], [63] [64]. Mais cette méthode présente l'inconvénient d'être très complexe, ce qui n'est pas très pratique pour la réduction de la consommation d'énergie. Dans ce document, nous ne ferons aucune étude sur cette méthode. Nous proposons aux lecteurs de se référer à nos publications pour plus d'informations.

2.3.1.2 Méthodes basées sur le ré-échantillonnage

Soient N échantillons non-uniformes $\{x(t_n)\}_{n=0}^{N-1}$, d'un signal continu $x(t)$, pris aux instants $\{t_n\}_{n=0}^{N-1}$ dans l'intervalle $[T_a, T_b]$. On définit $x_r(t)$ un signal ré-échantillonné à partir du couple $\{x_n, t_n\}_{n=0}^{N-1}$ par :

$$x_r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) K(t, t_n), t \in [T_a, T_b]\,, \tag{2.69}$$

où $K(.)$ est appelée fonction d'interpolation. Ci-dessous une liste non exhaustive de quelques fonctions d'interpolation communément utilisées :

Sinus cardinal

$$K(t, t_n) = \frac{\sin\left(\pi(t - t_n)B_1\right)}{\pi(t - t_n)B_1}, \tag{2.70}$$

où B_1 représente la moitié de la largeur de la bande à analyser.

Gausienne :

$$K(t, t_n) = \frac{1}{b_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(t - t_n)^2}{2b_2^2}\right), \tag{2.71}$$

où $b_2 = \frac{1}{4B_1}$.

Laplacienne :

$$K(t, t_n) = \frac{1}{2b_3} \exp\left(\frac{-|t - t_n|}{b_3}\right), \tag{2.72}$$

où $b_3 = \frac{1}{4B_1}$.

Rectangulaire :

$$K(t, t_n) = \begin{cases} \frac{1}{2b_4} & |t - t_n| \leqslant b_4 \\ 0 \quad , & \text{par ailleurs} \end{cases} \tag{2.73}$$

où $b_4 = \frac{1}{4B_1}$.

De la même manière que dans l'équation (2.69), différentes fonctions d'interpolation peuvent être utilisées afin d'estimer les séquences d'autocorrélation $r_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$. L'équation générale est donnée par :

$$\hat{r}_{xx}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_i) x(t_j) K(\tau, t_i - t_j), \tau \in [T_a, T_b]\,. \tag{2.74}$$

Pour toutes ces méthodes d'interpolation, l'utilisateur se doit de bien choisir la fonction d'interpolation ainsi que ses paramètres.

2.3.2 Vérification de la condition d'anti-repliement spectral des modes JRS et ARS

Dans cette sous-section nous allons vérifier par la simulation les conditions d'anti-repliements spectraux évoquées dans le chapitre 1. Pour ce faire, nous appliquerons quelques techniques d'analyse spectrale vues dans la sous-section précédente aux modes d'échantillons JRS et ARS.
En supposant que l'analyse spectrale se fasse avec un nombre limité d'échantillonnage, nous pouvons écrire les spectres S_{xjrs} et S_{xars} des modes JRS et ARS comme suit :

$$S_{xjrs}(f) = (S_x * W_{jrs} * W)(f) \tag{2.75}$$

$$S_{xars}(f) = (S_x * W_{ars} * W)(f) \tag{2.76}$$

avec S_x le spectre de $x(t)$, $W(f)$ la transformée de Fourier de la fenêtre d'apodisation, W_{jrs} et W_{ars} représentant, respectivement, le spectre du schéma d'échantillonnage des modes JRS et ARS comme indiqué dans les équations (2.75) et (2.76).

2.3.2.1 Formulations analytiques

Wojtiuk a donné dans [32], les formes analytiques de W_{jrs} et W_{ars} selon les équation (2.77) et (2.78) :

$$W_{jrs}(f) = \frac{1}{T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T})|\Phi_1(\frac{n}{T})|^2 + \frac{1}{T}\left(1-|\Phi_1(f)|^2\right) \tag{2.77}$$

$$W_{ars}(f) = \frac{1}{T^2}\delta(f) + \frac{1}{T}\Re\left[\frac{1+\Phi_1(f)}{1-\Phi_1(f)}\right], \tag{2.78}$$

où T représente la période moyenne d'échantillonnage et $\Phi_1(f)$ la fonction caractéristique de la distribution des instants d'échantillonnage.

Cas du JRS On constate dans l'équation (2.77) que W_{jrs} est constitué d'une partie continue et d'une partie discrète. Le terme discret représente l'opération de repliement spectral de la composante principale pondérée par $|\Phi_1(\frac{n}{T})|^2$ aux multiples de la fréquence moyenne d'échantillonnage. Ce terme tend à supprimer la composante principale lorsque $|n|$ augmente. Il est à noter que pour $n = 0$, nous avons un pic en $f = 0$ avec une amplitude $\frac{1}{T^2}$. Ce terme reproduit le spectre S_x. La composante continue dans l'équation (2.77) est une somme de bruit large bande. Elle est nulle à l'origine car $\Phi_1(0) = 1$ et tend vers $1/T$ lorsque $f \to \pm\infty$.

Cas de ARS On constate dans l'équation (2.78) que W_{ars} est également constitué d'une partie continue et d'une partie discrète. Mais contrairement à W_{jrs} qui a une partie discrète bien distincte, celle de W_{ars} existe comme une condition limite de la composante continue.

2.3.2.2 Simulation des schémas d'échantillonnage W_{jrs} et W_{ars}

Dans un premier temps, nous avons simulé les schémas d'échantillonnage W_{jrs} et W_{ars}, c'est à dire les spectres des fonctions d'échantillonnage des mode JRS et ARS, dans le but de les comparer avec leurs formes théorique données par les équations (2.77) et (2.78). Pour ce faire, nous avons utilisé le périodogramme de Schuster donné par l'équation (2.3). Les simulations ont été effectuées à une fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e = 500$ MHz pour les distributions uniforme, gaussienne (avec $\sigma = 0.2T_e$) et exponentielle (avec $\lambda = T_e$). Il est à rappeler que les instants d'échantillonnage pour le mode JRS sont donnés par $\{t_n = nT_e + \epsilon_n\}_{n=0}^{N-1}$ avec $-0.5T_e \leqslant \epsilon_n < 0.5T_e$ (voir équation 1.23, chapitre 1). Pour le mode ARS, nous avons $\{t_n = t_{n-1} + \epsilon_n\}_{n=0}^{N-1}$ (voir équation 1.25, chapitre 1).
Nous avons utilisé un nombre d'échantillons $N = 10^5$ que nous avons moyenné sur 100. Les résultats ainsi obtenus sont très satisfaisants et concordent parfaitement avec ceux énoncés dans le chapitre précédent (voir sous-section.1.3.1.3).

Simulation du schéma d'échantillonnage W_{jrs} : Sur la figure 2.5, nous constatons clairement que l'utilisation du mode JRS avec une distribution uniforme conduit à une suppression des réplicas spectraux, normalement attendus aux multiples de la fréquence d'échantillonnage. En contrepartie, nous avons une apparition du bruit large bande, évoqué précédemment, tendant vers une valeur limite égale à F_e.
La figure 2.6 nous montre que l'utilisation du JRS avec une distribution gaussienne ($\sigma = 0.2T_e$) ne permet pas la suppression des replicas spectraux mais juste une atténuation de plus en plus importante aux multiples de la fréquence d'échantillonnage. Nous observons également une apparition du bruit large bande qui tend aussi vers une valeur limite égale à F_e.
Sur la figure 2.7 nous pouvons observer que le mode JRS avec une distribution exponentielle ($\lambda = T_e$) ne permet pas non plus suppression des replicas spectraux. Une atténuation de plus en plus importante au fil des multiples de la fréquence d'échantillonnage est observable ainsi que l'apparition du bruit d'échantillonnage, qui tend vers une valeur limite égale à F_e.

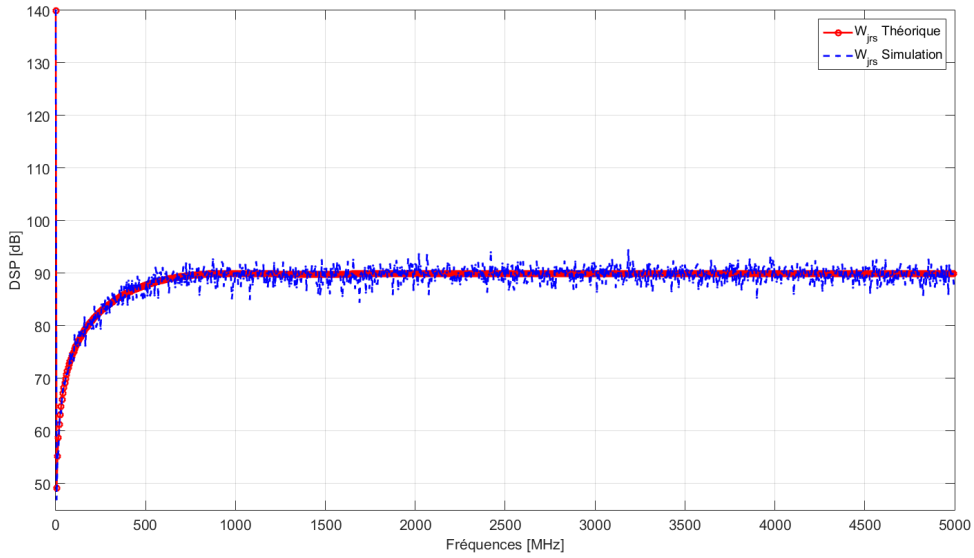


FIGURE 2.5 – W_{jrs}, distribution uniforme, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz

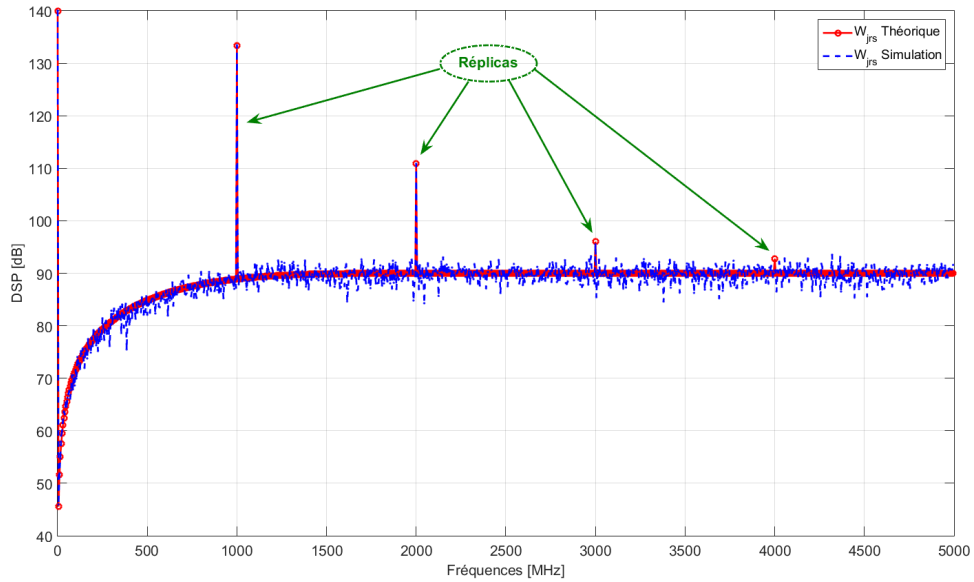


FIGURE 2.6 – W_{jrs}, distribution gaussienne, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz

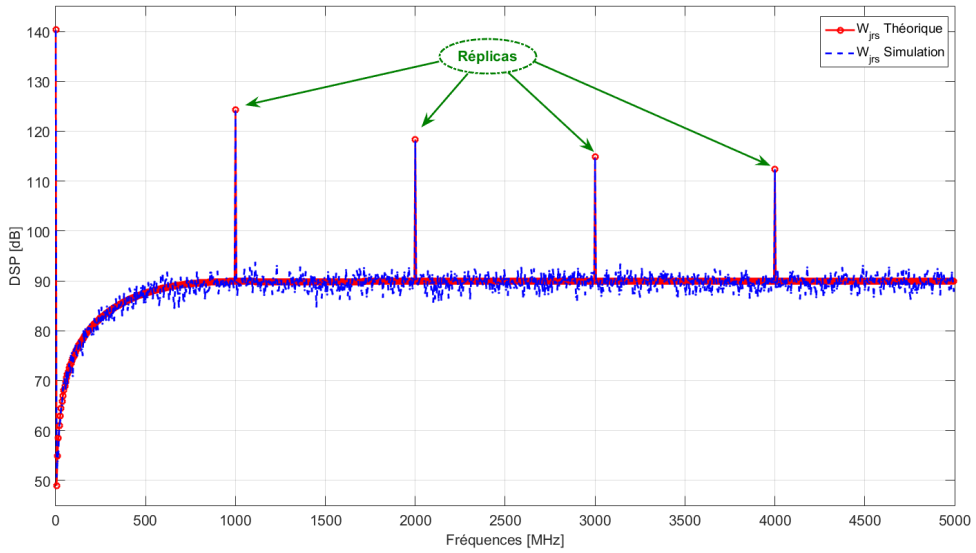


FIGURE 2.7 – W_{jrs}, distribution exponentielle, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz

Simulation du schéma d'échantillonnage W_{ars} : Dans toutes les figures 2.8, 2.9 et 2.10, nous constatons clairement que l'utilisation du ARS permet une suppression totale de tous les replicas spectraux indépendamment de la distribution. L'inconvénient réside dans l'apparition d'un bruit d'échantillonnage, qui tend vers une valeur limite égale à F_e.

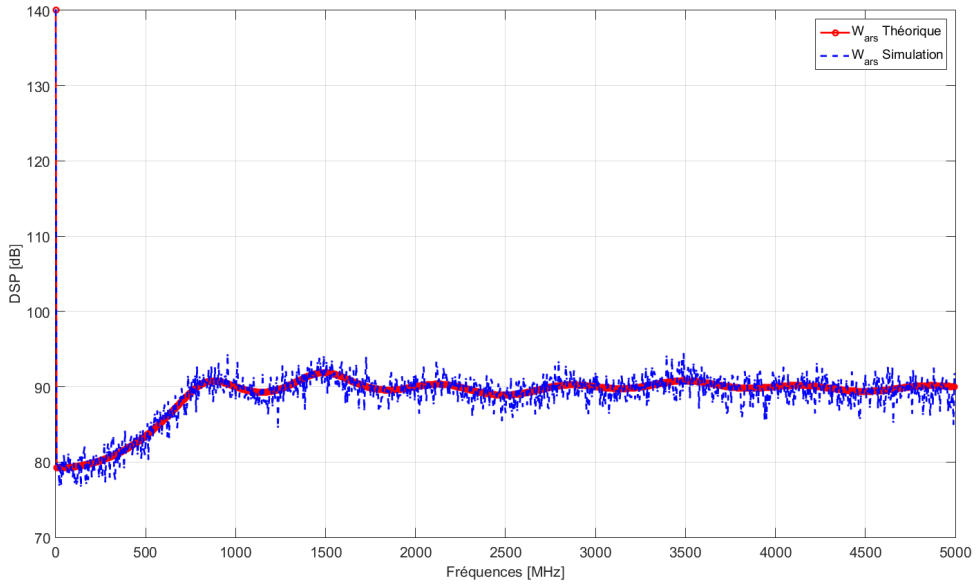


FIGURE 2.8 – W_{ars}, distribution uniforme, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz

A travers les différentes simulations réalisées, nous avons pu observer la propriété d'anti-repliement spectrale des modes JRS et ARS. Nous avons vu que le mode ARS conserve la propriété d'anti-repliement spectrale quelque soit la distribution utilisée (uniforme,

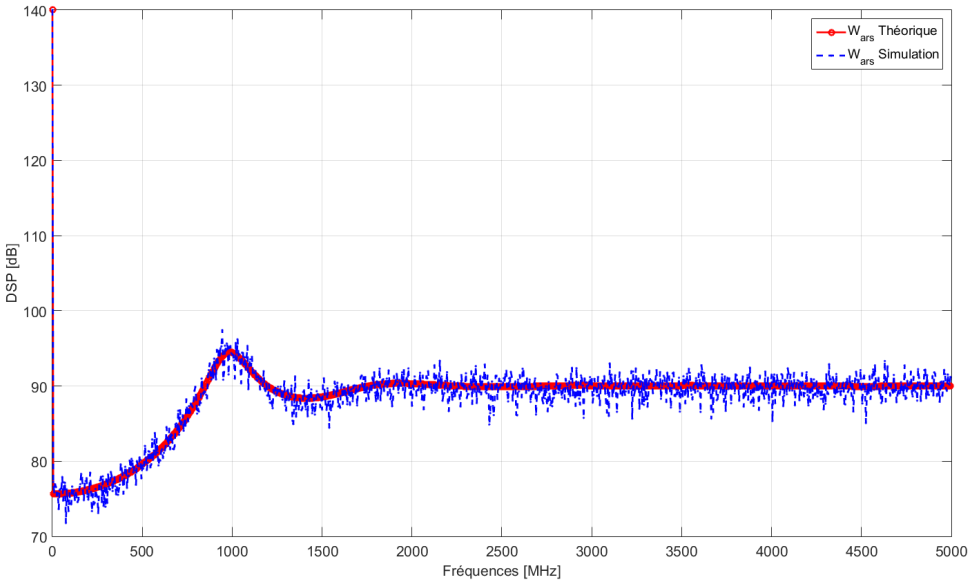


FIGURE 2.9 – W_{ars}, distribution gaussienne, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz

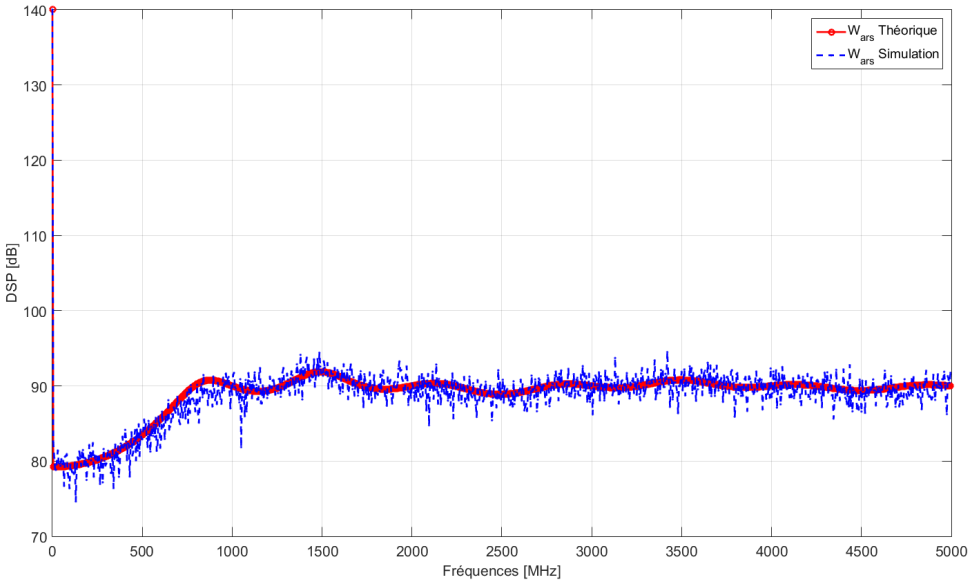


FIGURE 2.10 – W_{ars}, distribution exponentielle, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz

gaussienne et exponentielle), ce qui n'est pas le cas pour le mode JRS (anti-repliement spectrale uniquement pour la distribution uniforme).

Pour conclure, nous pouvons dire que cette technique, d'échantillonnage aléatoire avec propriété d'anti-repliement spectral, peut être utilisée dans l'analyse spectrale de signaux large bande, ce qui est très intéressant pour l'application au domaine de la radio intelligente dans le domaine de la radio intelligente. De plus, il a été montré à plusieurs reprises que la réduction de la fréquence d'échantillonnage d'un CAN classique permet de réduire sa consommation d'énergie. Ainsi, en faisant piloter un CAN classique (qui a une fréquence d'échantillonnage élevée) par un signal d'horloge non uniforme aléatoire de manière à respecter les conditions d'anti-repliement spectral et en supposant que les échantillons non uniformes recueillis sont comme des échantillons uniformes avec certains éléments nuls à certains instants. Il serait facile de montrer que l'utilisation de l'échantillonnage aléatoire combinée avec la méthode d'analyse spectrale Bartlett (qui utilise la FFT) pourrait permettrait de réduire la consommation d'énergie lors de l'analyse spectrale de signal large bande.

Dans la sous-section suivante, nous présenterons dans un premier temps l'échantillonnage Multi-Coset. Cette technique, contrairement à celles précédemment vues, ne possède pas la propriété d'anti-repliement spectrale. Mais, elle présente l'avantage de donner une estimation du spectre avec peu d'échantillons et cela en utilisant l'algorithme FFT. Dans un second temps nous proposerons une méthode permettant de choisir les instants d'échantillonnage de façon à améliorer la qualité de l'analyse spectrale.

2.3.3 Analyse spectrale appliquée à l'échantillonnage Multi-Coset

2.3.3.1 Formulation analytique

Dans cette partie, nous allons appliquer quelques techniques d'analyse spectrale, vues dans les sous sections précédentes, sur la technique d'échantillonnage dénommée le Multi-Coset. Il est à rappeler que le Multi-Coset est une technique d'échantillonnage non-uniforme périodique qui consiste à prendre sur une grille uniforme de taille L, p éléments suivant un motif d'échantillonnage $\mathcal{C}$ (voir chapitre 1). Il est possible de définir la fonction d'échantillonnage u_{mc}, caractérisant l'ensemble des instants d'échantillonnage $\{t_n\}$, par l'équation 2.79 :

$$u_{mc}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \delta(t - kT), \tag{2.79}$$

où, T est la période d'échantillonnage et $\alpha_k \in \{0, 1\}$ un ensemble défini par :

$$\alpha_k = \alpha_{(k+iL)}, 0 \leqslant k \leqslant p-1, 0 \leqslant i < \infty, \tag{2.80}$$

α_k est L-périodique. La fonction d'échantillonnage u_{mc} en décomposable est série de Fourier ainsi nous pouvons écrire :

$$u_{mc}(t) = \sum_{n=\mathbb{Z}} A_n \exp(j2\pi \frac{n}{LT} t) \tag{2.81}$$

avec

$$A_n = \frac{1}{LT} \int_0^{LT} u_{mc}(t) \exp(-j2\pi \frac{n}{LT} t) dt \tag{2.82}$$

$$= \frac{1}{LT} \sum_{k=0}^{L-1} \alpha_k \exp(-j2\pi \frac{n}{L} k). \tag{2.83}$$

Il est à noter que A_n est L-périodique ($A_n = A_{(n+iL)}$ avec $i \in \mathbb{Z}$) et symétrique ($A_n = A_{-n}$) lorsque L est pair.

Le schéma d'échantillonnage $U_{mc}(f)$, c'est à dire la transformée de Fourier de la fonction d'échantillonnage $u_{mc}(t)$ est donné par (2.84) :

$$U_{mc}(f) = \sum_{n=\mathbb{Z}} A_n \delta(f - \frac{n}{LT}). \tag{2.84}$$

Le spectre $X_{mc}(f)$ du signal, $x(t)$, échantillonné en mode Multi-Coset s'écrit comme suite :

$$X_{mc}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n X(f - \frac{n}{LT}), \tag{2.85}$$

avec $X(f)$ le spectre de $x(t)$.

A partir des équations (2.84) et (2.85), il est facile de constater que le Multi-Coset n'est pas une technique possédant la propriété d'anti-repliement spectral. Mais toutefois il est possible de l'utiliser pour l'analyse spectrale. En effet les A_n n'ont pas tous la même valeur et dépendent des α_k, qui dépendent de la position des p éléments à prélever dans la grille de taille L. Ainsi le choix d'un bon motif d'échantillonnage $\mathcal{C}$ permet d'avoir une meilleure estimation spectrale. Nous reviendrons sur le choix de ce motif dans la sous-section suivante.

2.3.3.2 Le choix du motif d'échantillonnage

Ici, nous allons nous focaliser sur le choix de $\mathcal{C}$ dans le cadre de l'analyse spectrale de signaux multibande et à bande limitée dans l'intervalle $[-f_{max}, f_{max}]$, avec f_{max} la fréquence maximale contenue dans le signal. Pour ce faire, nous allons d'abord rappeler que l'analyse spectrale, avec des échantillons uniformes, se fait avec un nombre N limité d'échantillons, ce qui consiste à tronquer le signal. La troncature a pour effet la convolution du spectre du signal par un sinus cardinal, transformée de Fourier de la fonction d'apodisation rectangulaire.

Comme nous l'avons déjà dit en haut, l'échantillonnage Multi-Coset peut être résumé en :

- échantillonner le signal continu de façon uniforme à la fréquence $1/T$,
- diviser l'ensemble des échantillons recueillis en des blocs de taille L (que nous appellerons *Bloc Multi-Coset*),
- et ne garder que p échantillons dans chaque bloc.

Ceci peut être vu dans le cadre de l'analyse spectrale comme le remplacement de la fonction de pondération rectangulaire, w_{rect}, de durée γLT par une *fonction d'apodisation Multi-Coset* définie par 2.86 :

$$w_{mc}(t) = w_{rect}(t)u_{mc}(t). \tag{2.86}$$

D'un point de vue spectral, la transformée de Fourier, $W_{mc}(f)$, de $w_{mc}(t)$, lorsque w_{rect} est centrée sur zéro, est donnée par (2.87) :

$$W_{mc}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n sinc\left(\pi\gamma LT\left(f - \frac{n}{LT}\right)\right), \tag{2.87}$$

où $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, les A_n sont donnés par l'équation (2.83). Il est à noter que l'équation (2.87) a été obtenue avec l'utilisation d'une porte rectangulaire, $w_{rect}(t)$. Cette dernière peut être remplacée par une porte quelconque (Hanning, Hamming, Blackman, etc). Pour simplifier nous n'utiliserons que la porte rectangle. Nous sommes toutefois conscients de l'influence de la fonction porte sur la qualité de l'analyse spectrale.

A partir de l'équation (2.87) nous pouvons dire que plus γ est grand, plus les raies apparaissant aux multiples entiers de la fréquence $1/LT$ sont mieux localisées. Afin de visualiser ce résultat, nous avons choisi le motif d'échantillonnage, $\mathcal{C}$, suivant le mode *Burst*. Ce mode consiste à choisir les p premiers éléments du *bloc Multi-Coset*, comme l'indique la figure 2.11.

Sur la figure (2.12), nous avons tracé pour différentes valeurs de γ, le spectre de la fonction $W_{mc}(f)$ correspondant au mode Burst pour $L = 32$ et $p = 22$ ainsi que les valeurs

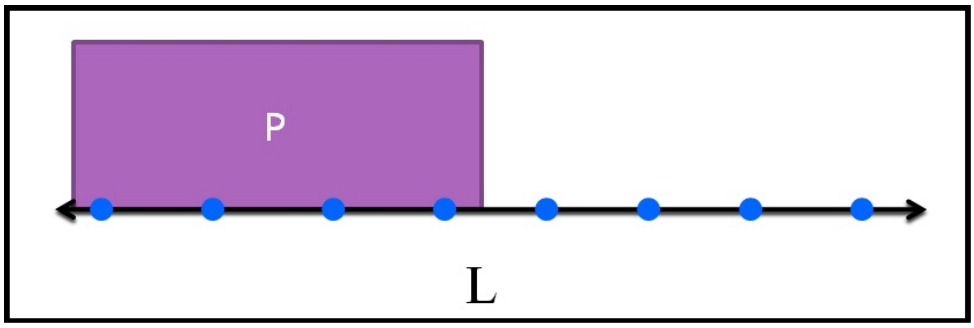


FIGURE 2.11 – Motif d'échantillonnage en mode *Burst*

du module au carré des $\{|A_n|^2, 0 \leqslant n \leqslant 16\}$. Il est à rappeler que, d'après l'équation (2.83), l'ensemble $\{A_n, -\infty \leqslant n \leqslant \infty\}$ est L-périodique et symétrique ($A_n = A_{-n}$). Il est également possible de choisir les p éléments de façon aléatoire ; nous appellerons

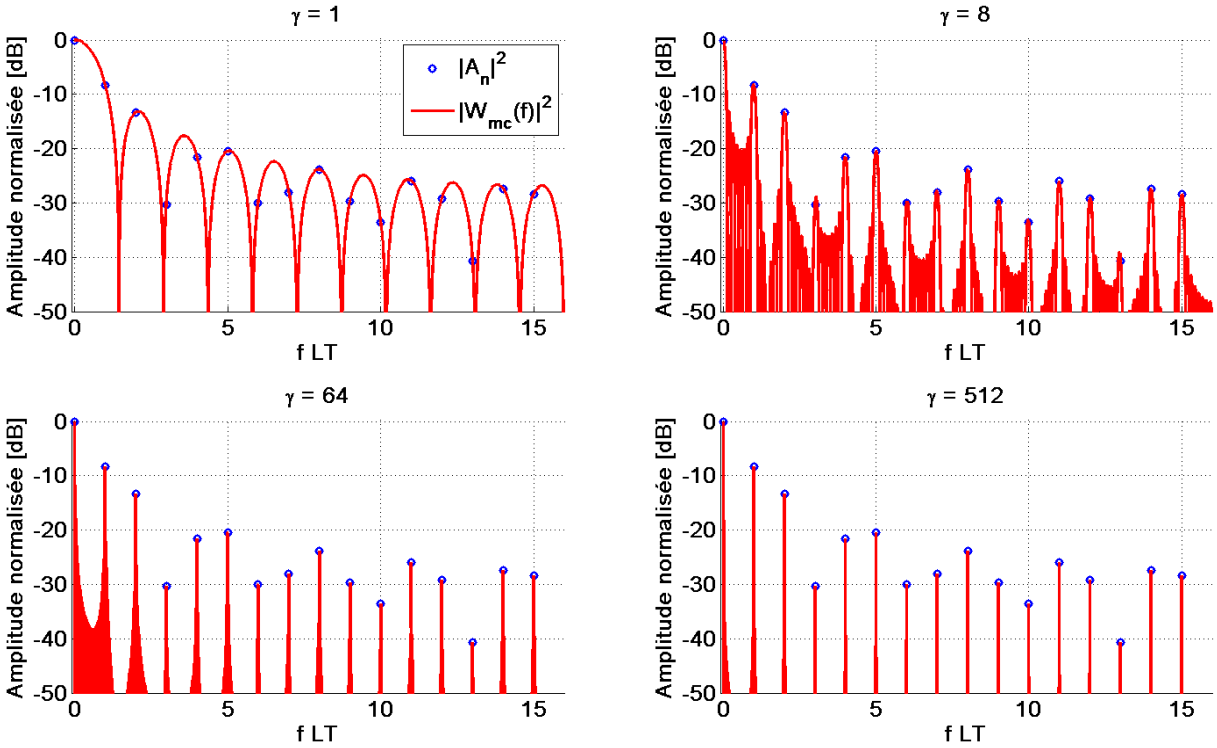


FIGURE 2.12 – Spectre de la fonction de pondération en mode Burst, $L = 32$, $p = 22$

alors ce mode de choix : mode *rand*. Il est clair que suivant les tirages, les valeurs des $\{|A_n|^2, 1 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$ ne sont pas les mêmes et peuvent être assez grandes, ce qui nuit gravement à la qualité de l'analyse spectrale, à cause des repliements spectraux. Il en découle que pour un γ assez grand, une minimisation de l'ensemble $\{|A_n|^2, 1 \leqslant n \neq \frac{L}{2}\}$ permet une meilleure estimation spectrale. Ainsi, bien choisir l'ensemble des A_n revient donc à choisir $\mathcal{C}$ de manière à minimiser l'ensemble $\{A_n, 1 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$, c'est-à-dire minimiser l'amplitude des repliements spectraux apparaissant aux multiples de $\frac{F_e}{L}$ (voir équation

2.85). Pour ce faire nous avons développé un algorithme permettant de choisir dans un ensemble $\mathbb{L} = \{0, 1, ..., L-1\}$, les p éléments de l'ensemble $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, ..., c_{(p-1)}\}$ de façons à minimiser la valeur maximale de l'ensemble $\{|A_n|^2, 1 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$. Nous avons appelé ce mode de choix le mode *AliasMin*. Nous nous sommes inspirés de l'algorithme du *Sequential Forward Selection*, présenté dans [21].

Algorithme 1 : Algorithme *AliasMin*

Entrées : L , p *et* $\mathcal{K}$

Sortie : $\mathcal{C}$

Initialisation :

$\mathcal{C} \leftarrow \varnothing$

$\mathcal{C}_s \leftarrow \{0, 1, ..., L-1\}$

$m \leftarrow 1$

$F \leftarrow$ une matrice de taille $(\frac{L}{2} \times L)$ dont le $(l,q)^{ème}$ élément est $[\exp(-j2\pi lq/L)]_{l,q}$ pour $1 \leqslant l \leqslant \frac{L}{2}$ et $0 \leqslant q \leqslant L-1$

Traitement :

Tant que : $m \leqslant p$ **faire**

2 $n \leftarrow 1$

Tant que : $n \leqslant L - m + 1$ **faire**

3 $v \leftarrow$ un vecteur de taille L ayant 1 aux positions correspondant à l'ensemble $\{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_s(n)\}$ et zéro ailleurs.

$\mathcal{C}_{opt} \leftarrow \arg\min[\max(Fv)]$

$n \leftarrow n + 1$

4 **Fin**

5 $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{opt}$

$\mathcal{C}_s \leftarrow \mathcal{C}_s - \{\mathcal{C}_{opt}\}$

$m \leftarrow m + 1$

6 **Fin**

Sur la figure (2.13), nous avons tracé pour différentes valeurs de γ, le spectre de la fonction $W_{mc}(f)$ correspondant au mode AliasMin pour $L = 32$ et $p = 22$ ainsi que les valeurs du module au carré des $\{|A_n|^2, 0 \leqslant n \leqslant 16\}$. Il est facile d'observer que plus γ augmente plus les raies apparaissant aux multiples entiers, n, de la fréquence $\frac{1}{LT}$ sont mieux localisées.

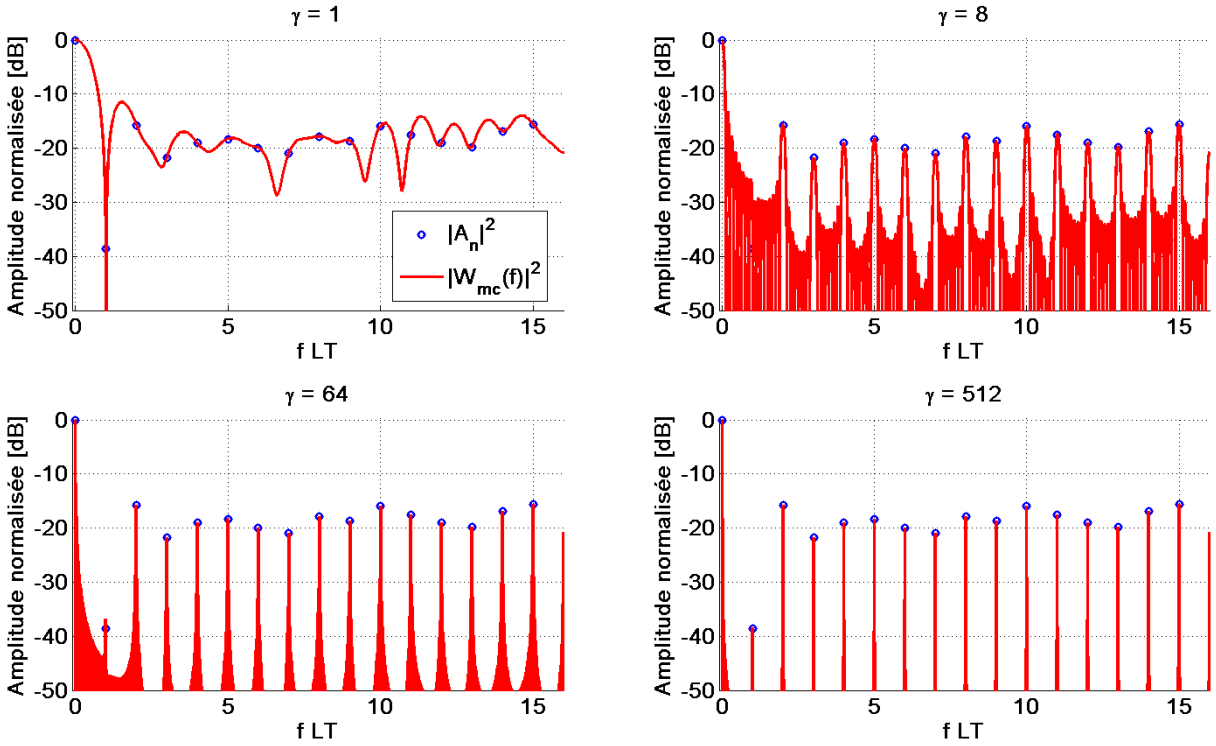


FIGURE 2.13 – Spectre de la fonction de pondération en mode AliasMin, $L = 32$, $p = 22$

2.3.3.3 Influence des paramètres du Multi-Coset

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'influence des paramètres L et p de l'échantillonnage Multi-Coset sur les valeurs de l'ensemble $\{|A_n|^2, 1 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$. Il est à noter que la valeur de $|A_0|^2$ est indépendante de l'ensemble $\mathcal{C}$ et constitue la plus grande valeur de cet ensemble.

Nous allons, dans un premier temps étudier l'influence de la variation de p, pour L fixé, sur les valeurs de l'ensemble $\{|A_n|^2, 1 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$.

Sur la figure (2.14), nous avons tracé les valeurs de l'ensemble $\{|A_n|^2, 0 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$ pour le mode Burst avec $L = 32$ pour différentes valeurs de p. Nous observons que le rapport entre $|A_1|^2$ et $|A_0|^2$ est décroissant lorsque p augmente. Pour la suite, nous définissons de façon générale ce rapport par l'équation (2.88)

$$\Delta H = \max\left\{\frac{|A_n|^2}{|A_0|^2}, 1 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\right\}. \tag{2.88}$$

Sur la figure (2.15), nous pouvons observer les différentes valeurs de l'ensemble $\{|A_n|^2, 0 \leqslant n \leqslant \frac{L}{2}\}$ pour le mode AliasMin avec $L = 32$ pour différentes valeurs de p. Nous constatons que contrairement au mode *Burst* les valeurs de $\{A_n\}$ correspondant au mode *AliasMin* ne présente pas une pente décroissante. Toutefois, ce mode permet d'avoir un ΔH beaucoup plus faible que pour le mode Burst.

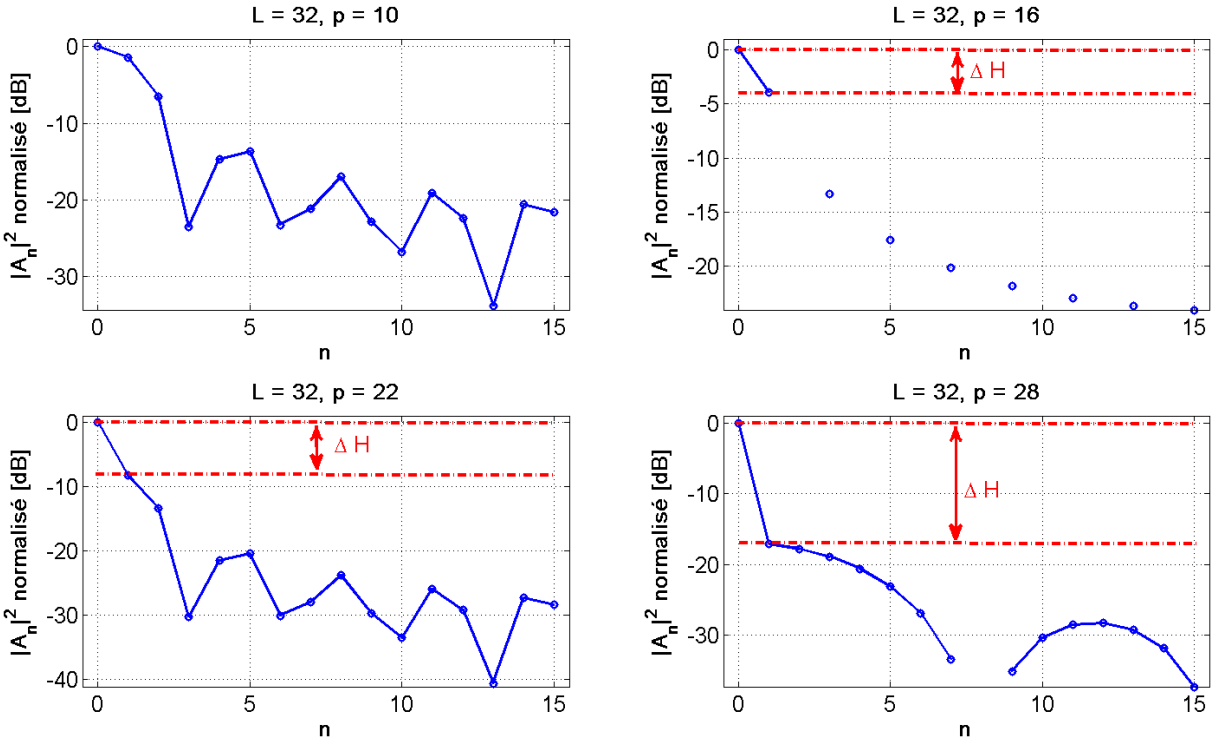


FIGURE 2.14 – Variation de $\{|A_n|^2\}$ en fonction de n pour le mode *Burst*

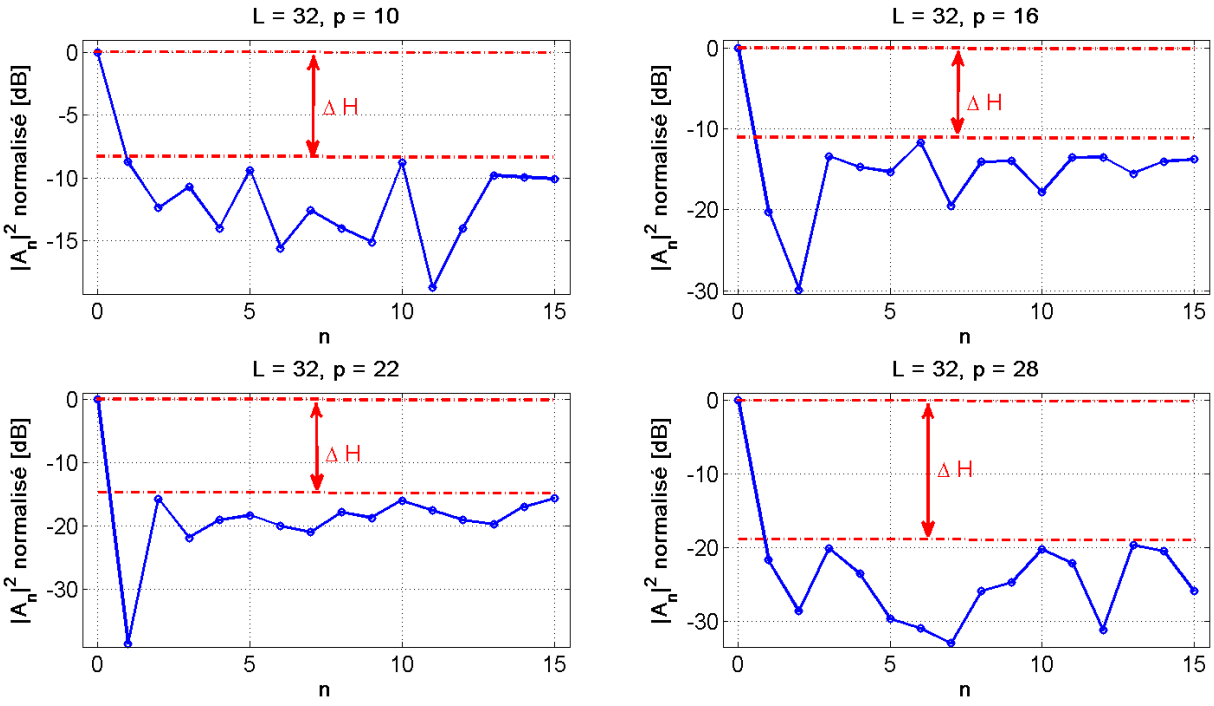


FIGURE 2.15 – Variation de $\{|A_n|^2\}$ en fonction de n pour le mode *AliasMin*

Nous allons maintenant étudier pour les modes Burst et AliasMin, la variation de ΔH en fonction de L et $\alpha = \frac{p}{L}$.

Sur la figure (2.16), nous avons tracé pour le mode Burst ΔH en dB en fonction de α pour $L = 100$, 200, 300 et 400. Nous pouvons constater que ΔH décroit lorsque α croit quelque soit la valeur de L. Nous constatons également que lorsque α est fixe la variation de L n'a quasiment aucune influence. Par exemple pour $\alpha = 0.6$, ΔH ne décroit que très légèrement lorsque L augmente.

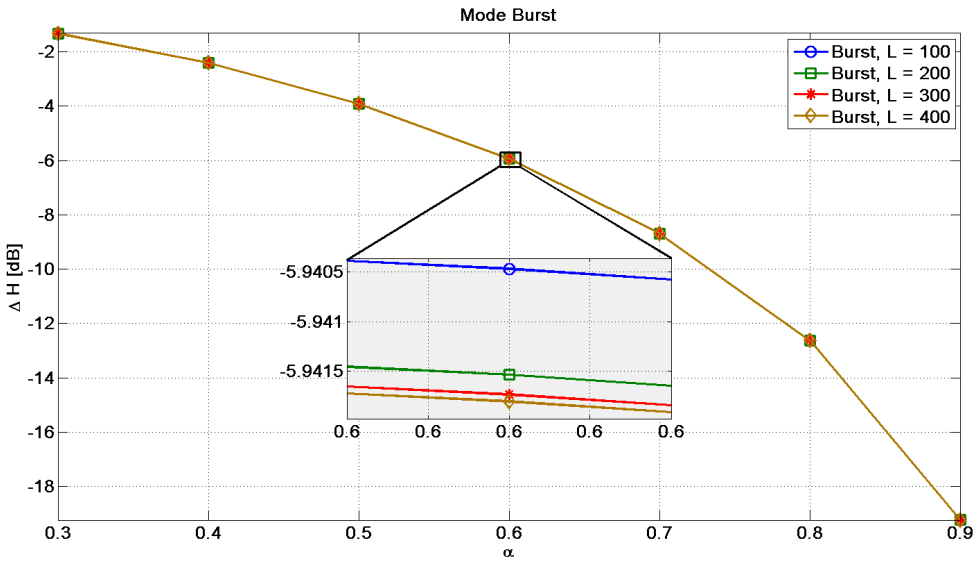


FIGURE 2.16 – Variation de ΔH en fonction de α pour le mode *Burst* : L prend plusieurs valeurs

Sur la figure (2.17), nous avons tracé pour le mode AliasMin ΔH (en dB) en fonction de α pour $L = 100$, 200, 300 et 400. Nous constatons que lorsque α augmente la valeur de ΔH diminue quelque soit la valeur de L. Nous pouvons également constater que la valeur de ΔH décroit lorsque L augmente quelque soit la valeur de α.

Ces résultats nous indiquent que pour les modes *Burst* et *AliasMin*, l'augmentation du nombre d'échantillons à prélever (p) permet de réduire ΔH. Il est à noter que dans le cas de l'échantillonnage uniforme classique $\Delta H_{dB} = -\infty$.

2.4 Résultats de simulations

Après avoir simulé les schémas d'échantillonnage W_{jrs} et W_{ars} dans un premier temps, nous allons maintenant procéder à la simulation d'un signal multibandes constitué de 6 canaux de largeur 20MHz chacun, dont les symboles numériques sont issus d'une constellation de type 16-QAM pour un facteur de rolloff égal à 0. La bande considérée varie de

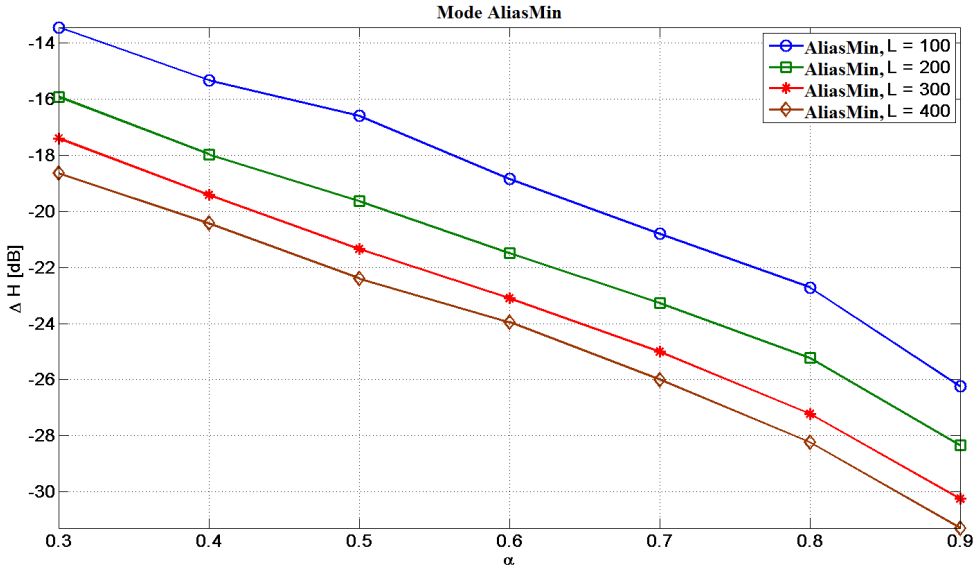


FIGURE 2.17 – Variation de ΔH en fonction de α pour le mode *AliasMin*

0 à 300 MHz pour une fréquence d'échantillonnage de 600MHz. Les fréquences porteuses des différents canaux sont : 15 ; 50 ; 100 ; 200 ; 250 et 285 MHz.

Paramètres des modes JRS et ARS Nos simulations ont été effectuées pour les distributions : uniforme, gausienne ($\sigma = 0.2T_e$) et exponentielle ($\lambda = T_e$), avec les périodogrammes de Bartlett généralisés. Pour $F_e = 600$ MHz nous avons pris $N = 10^5$ échantillons, que nous avons découpé en $K = 10^2$ séquences de taille $M = 10^3$.

Paramètres pour l'échantillonnage Multi-Coset Nos simulations ont été effectuées avec un nombre d'échantillons $N = 2^{17}$ pour différentes valeurs de L, p et $\alpha = p/L$.

2.4.1 Analyse spectrale d'un signal multibandes : Modes JRS et ARS

Sur la figure 2.18, nous avons tracé, S_{xjrs}, la DSP correspondant à l'utilisation du mode JRS pour différentes distributions (Uniforme, Gaussienne et exponentielle). La fréquence d'échantillonnage moyenne F_e est égale à 600 MHz, celle de Nyquist. Nous constatons clairement que les bandes contenues dans le signal sont bien localisées dans l'intervalle [0, 300] MHz. Au-delà de cet intervalle, l'utilisation de la distribution uniforme ne présente pas l'apparition de repliements spectraux ce qui n'est pas le cas pour les autres distributions. Sur la figure 2.19, nous avons tracé S_{xjrs} pour différentes fréquences d'échantillonnage (600, 420 et 240 MHz) en utilisant la distribution uniforme pour un SNR de 10 dB. Nous

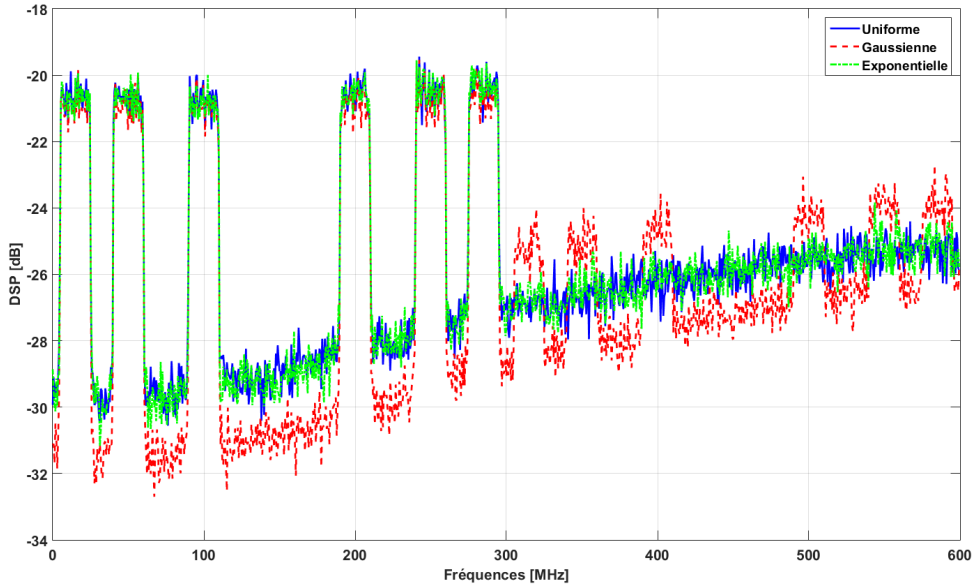


FIGURE 2.18 – S_{xjrs} pour différentes distributions, $F_e = 600$ MHz, SNR = 10 dB

observons que la diminution de F_e ne modifie pas la localisation des bandes dans l'intervalle [0, 300] MHz. Néanmoins nous constatons une augmentation du bruit d'échantillonnage.

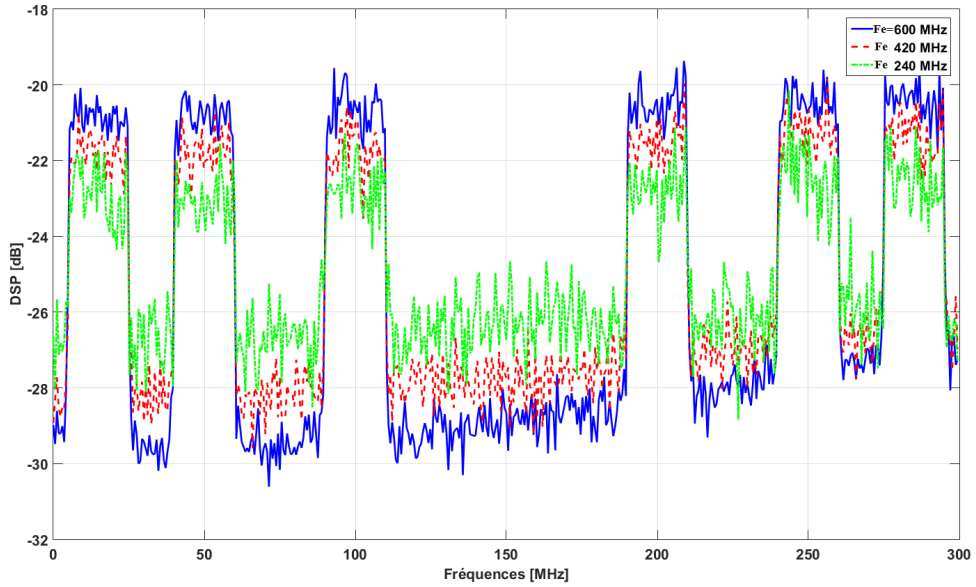


FIGURE 2.19 – S_{xjrs} pour différentes fréquences d'échantillonnage, distribution uniforme, SNR = 10 dB

A partir des figures 2.18 et 2.19 nous pu observer la propriété d'anti repliement spectral pour la distribution uniforme, l'atténuation des réplicas spectraux aux multiples de la fréquence d'échantillonnage pour les distributions gaussienne et exponentielle, tout cela au détriment d'une énorme perte de dynamique. Nous tenons à dire qu'il est probable que l'absence apparente de replicas dans le cas de la distribution exponentielle (voir figure

2.18) soit due à une atténuation des réplicas beaucoup plus importantes dans le cas d'une distribution exponentielle que pour une distribution gaussienne.

Sur les figures 2.20 et 2.21, nous constatons que quelque soit la distribution utilisée, le mode ARS permet une suppression totale de tous les réplicas spectraux au détriment d'une énorme perte de dynamique, plus ou moins importante selon les distributions, à l'intérieur de l'intervalle [0, 300] MHz. Il est à noter que la dynamique du mode ARS et meilleure que celle du mode JRS.

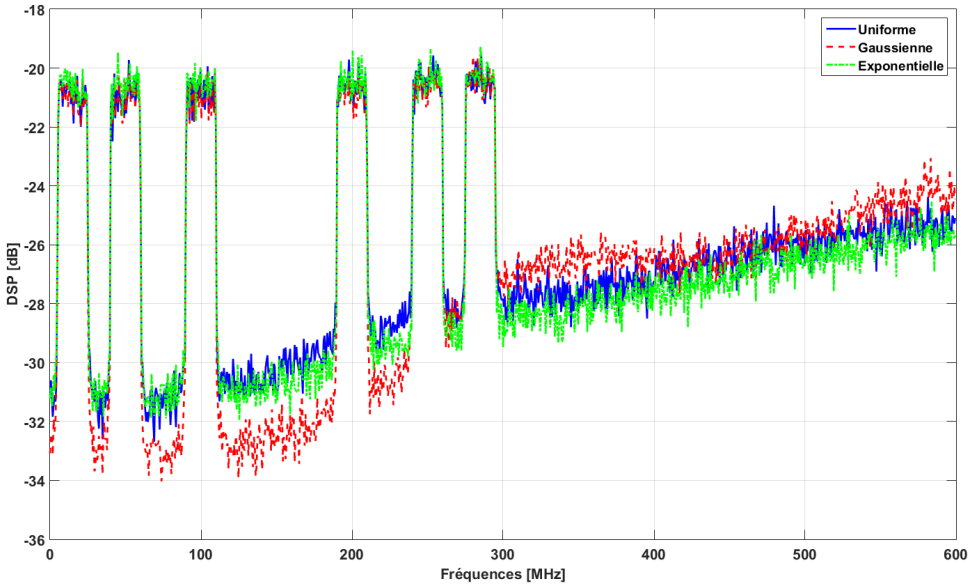


FIGURE 2.20 – S_{xars} pour différentes distributions, F_e = 600 MHz, SNR = 10 dB

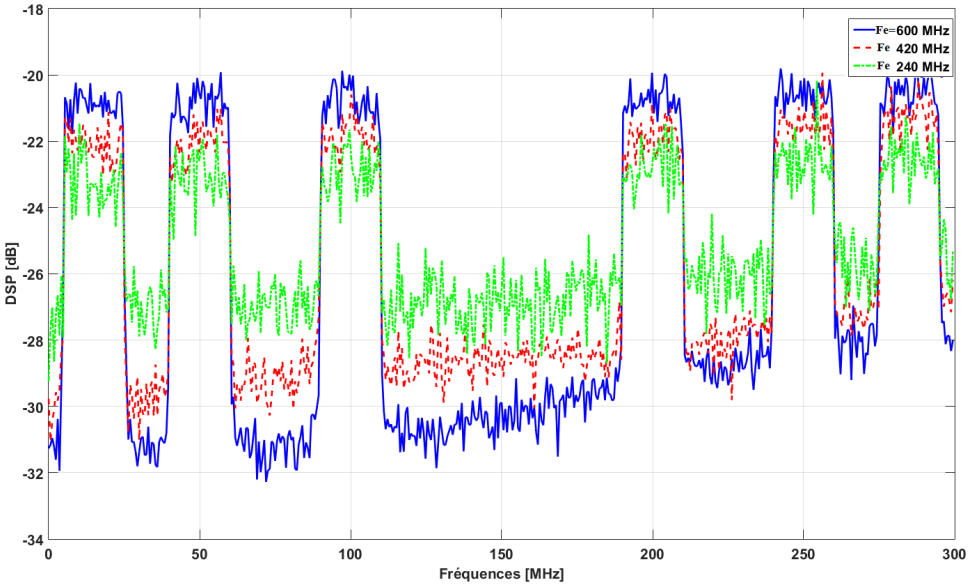


FIGURE 2.21 – S_{xars} pour différentes fréquences d'échantillonnage, distribution uniforme, SNR = 10 dB

2.4.2 Simulations pour l'échantillonnage Multi-Coset

Influence du paramètre L Sur la figure 2.22, nous avons tracé les DSP (S_{xmc}) correspondant aux modes *Burst* et *AliasMin* pour différentes valeurs de L et $\alpha = 0.7$ avec un SNR de 10 dB. Nous pouvons observer que pour $L = 32, 64$ et 128 le mode AliasMin présente de meilleures performances que le mode *Burst* et que pour $L = 1024$ le mode *Burst* est nettement meilleur que *AliasMin*.

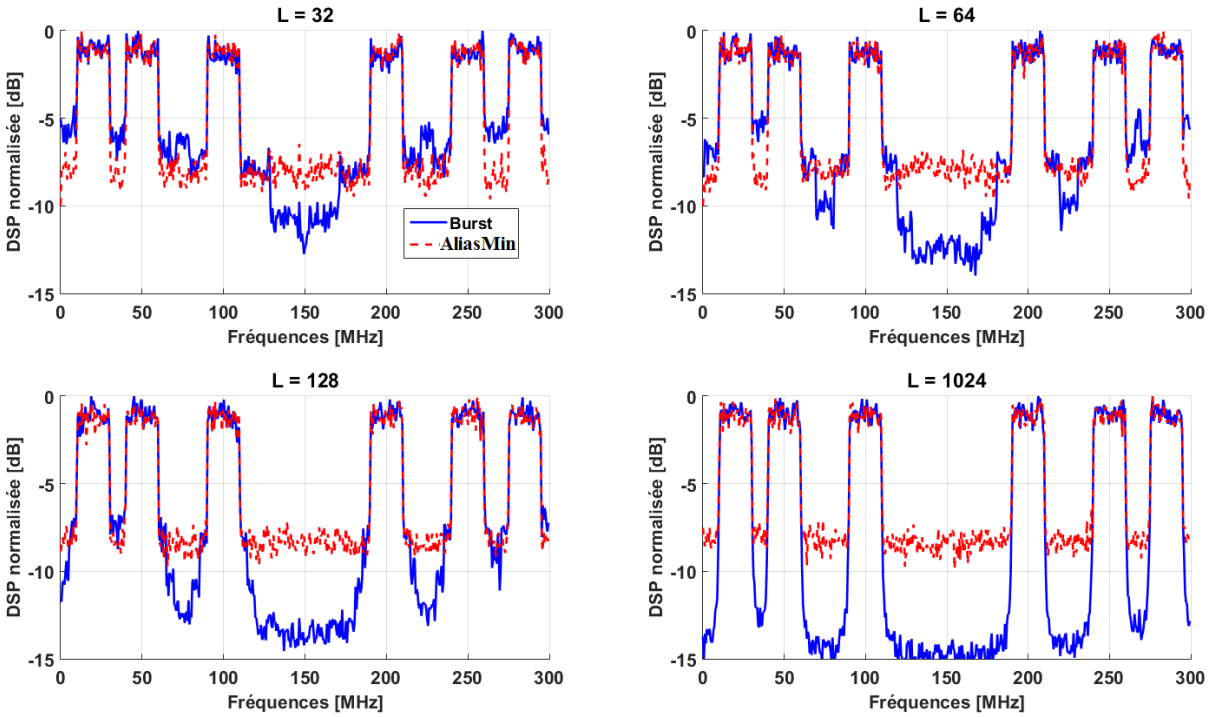


FIGURE 2.22 – Influence de la variation de L sur S_{xmc} pour les modes Burst et AliasMin, $\alpha = 70\%$ et SNR = 10 dB.

Influence du paramètre p Sur les figure 2.23 et 2.24, nous avons tracé pour $L = 128$ et SNR = 10 dB la DSP correspondant au mode *Burst* et *AliasMin* pour différentes valeurs de p. Nous observons que l'augmentation de p permet d'avoir de meilleures dynamiques.

Influence du paramètre SNR Maintenant nous allons nous intéresser à l'influence du SNR sur la qualité de l'analyse spectrale. Pour ce faire nous avons tracé sur les figures 2.25 et 2.25 la DSP correspondant aux modes *Burst* et *AliasMin*. Nous constatons que pour le mode Burst (Figure 2.25) la variation du SNR influence énormément la dynamique tandis que le mode *AliasMin* présente de faibles variations de la dynamique lorsque le SNR est supérieur à 10 dB.

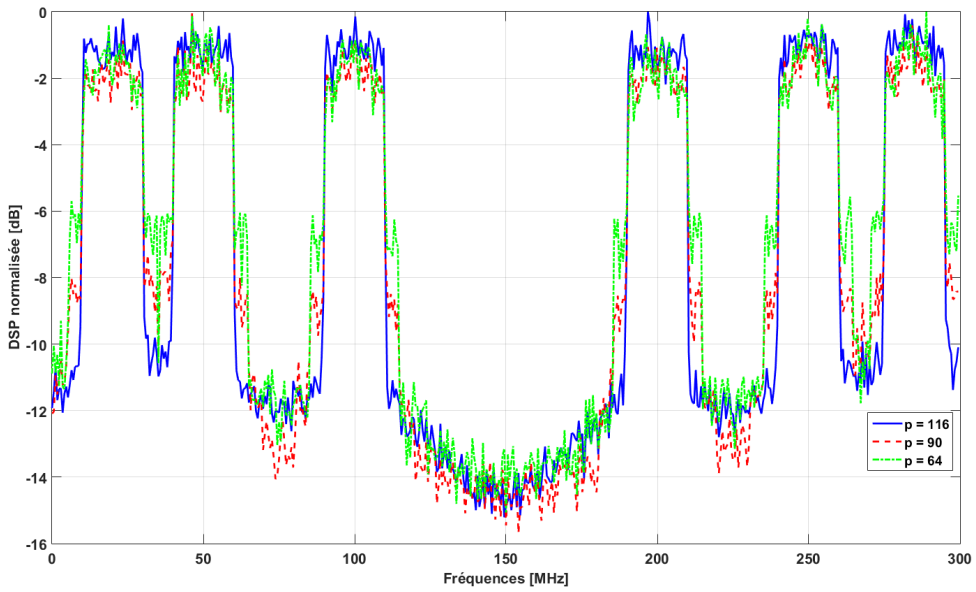


FIGURE 2.23 – Influence de la variation de p sur S_{xmc} pour le mode Burst, $L = 128$ et SNR = 10 dB.

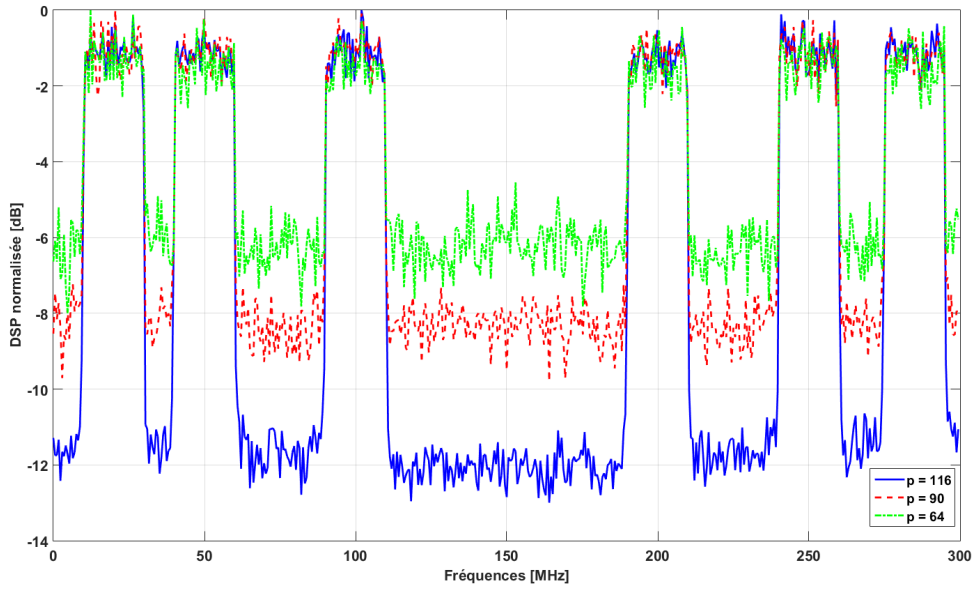


FIGURE 2.24 – Influence de la variation de p sur S_{xmc} pour le mode AliasMin, $L = 128$ et SNR = 10 dB.

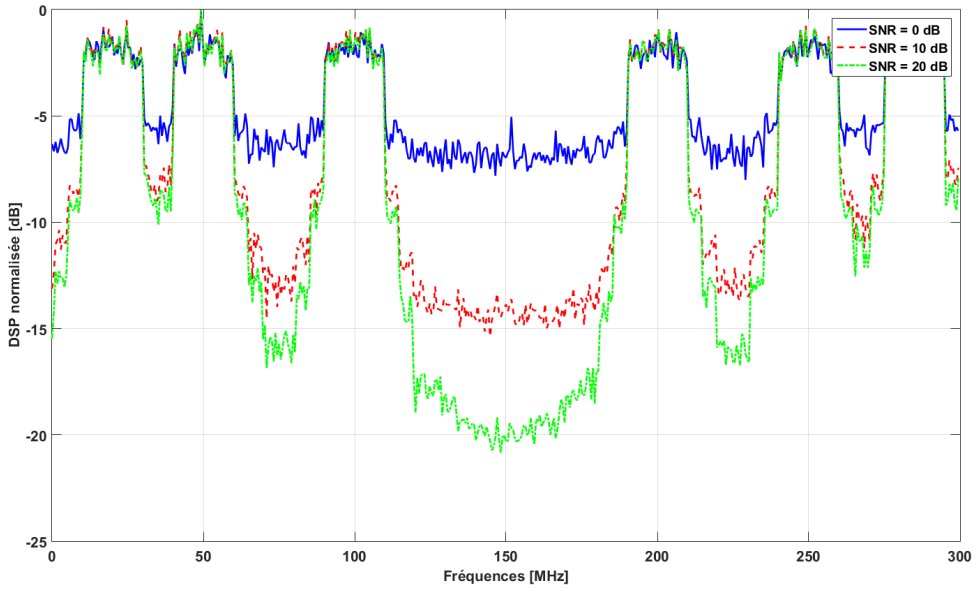


FIGURE 2.25 – Influence de la variation du SNR sur S_{xmc} pour le mode Burst, $p = 90$ et $L = 128$

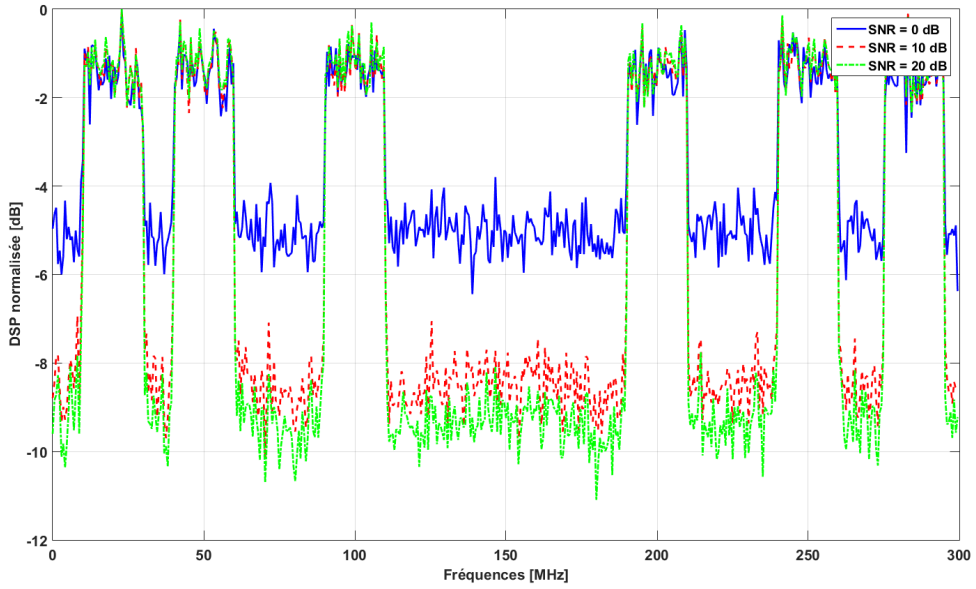


FIGURE 2.26 – Influence de la variation du SNR sur S_{xmc} pour le mode AliasMin, $p = 90$ et $L = 128$

2.5 Conclusions

Dans cette partie, nous avons présenté un état de l'art des techniques d'analyse spectrale propre à l'échantillonnage uniforme. Puis nous avons vu comment adapter ces techniques aux échantillons non-uniformes. Par la suite, nous avons pu observer la propriété d'anti-repliement spectral de l'échantillonnage aléatoire avec les modes JRS et ARS. Nous pouvons donc dire que l'utilisation de l'échantillonnage non uniforme aléatoire avec le mode JRS (pour une distribution uniforme) ou le mode ARS (avec une distribution uniforme, gaussienne ou exponentielle) combinée avec une méthode d'estimation spectrale pour échantillons uniformes pourrait permettre de réduire considérablement la consommation d'énergie lors de l'analyse spectrale dans le contexte de la radio intelligente.

Dans cette partie du document, nous avons aussi proposé pour l'échantillonnage Multi-Coset une méthode permettant de bien choisir les instants d'échantillonnage, de manière à minimiser les amplitudes des repliements spectraux (qui apparaissent aux multiples de la fréquence $\frac{F_e}{L}$ dans le cadre du MC). Ceci permet alors d'améliorer la qualité de l'analyse spectrale lorsque l'on veut utiliser moins d'échantillons que l'échantillonnage uniforme à la fréquence de Nyquist. Nous avons appelé cette nouvelle technique d'échantillonnage le mode *AliasMin*. Il est à rappeler que les échantillons obtenus avec le mode *AliasMin* sont comme des échantillons uniformes au rythme de Nyquist dont certains éléments valent zéros. Ceci fait qu'il est très facile de lui appliquer une méthode d'analyse spectrale pour échantillons uniformes.

Les techniques d'échantillonnages non uniforme présentées dans cette section, permettent de réduire le nombre d'échantillons lors de la numérisation de signaux multibandes larges bandes. Ce qui permet de réduire la consommation d'énergie des CANs lors de la numérisation. Dans le chapitre suivant nous allons présenter de nouveaux systèmes d'échantillonnage dotés d'un bloc d'analyse spectrale (dans lequel nous utiliserons le mode *AliasMin*) leur permettant de fonctionner avec une fréquence très inférieure à celle de Nyquist tout en garantissant l'intégrité de l'information contenue dans le signal.

Chapitre 3

Système d'échantillonnage non uniforme pour signaux à taux d'occupation spectral variables

3.1 Introduction

Un terminal radio logicielle multistandard idéal, est constitué d'une architecture compacte avec un étage de conversion analogique numérique très proche de l'antenne (voir figure 1). Il est capable de traiter plusieurs normes de communications radio avec des spécifications différentes. Ces CANs numérisent des signaux larges bandes avec une grande dynamique et ont une forte consommation d'énergie. Mais, il arrive que tous les standards ne soient pas utilisés en même temps. Ainsi, le taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner peut varier aux cours du temps en fonction des besoins de l'utilisateur. Il peut également varier selon la position géographique du terminal. Néanmoins avec un CAN classique, c'est à dire qui fonctionne de façon uniforme, la numérisation se fera toujours à la même fréquence. Afin d'augmenter l'efficacité énergétique des CANs, il serait donc intéressant d'adapter la fréquence de numérisation en fonction du taux d'occupation spectral de la bande à numériser.

Dans ce chapitre nous proposons un nouveau système de numérisation basé sur le principe de l'échantillonnage non uniforme. Son principe de fonctionnement est celui de l'échantillonnage non uniforme périodique appelé Multi-Coset (MC), une technique d'échantillonnage compressé vu dans le chapitre 1. Notre nouveau système permet de réduire la fréquence moyenne d'échantillonnage d'un CAN classique (uniforme) lorsque la bande à

numériser n'est pas pleine, en ne le faisant fonctionner qu'à certains instants spécifiques. Cela permet une réduction de la consommation énergétique lors de la numérisation.
Afin de montrer une éventuelle possibilité d'une implémentation pratique de notre système, nous proposons l'architecture de récepteur radio logicielle restreinte présentée sur la figure (3.1). Elle possède un bloc *Traitement analogique* constitué d'un bloc *Traitement*

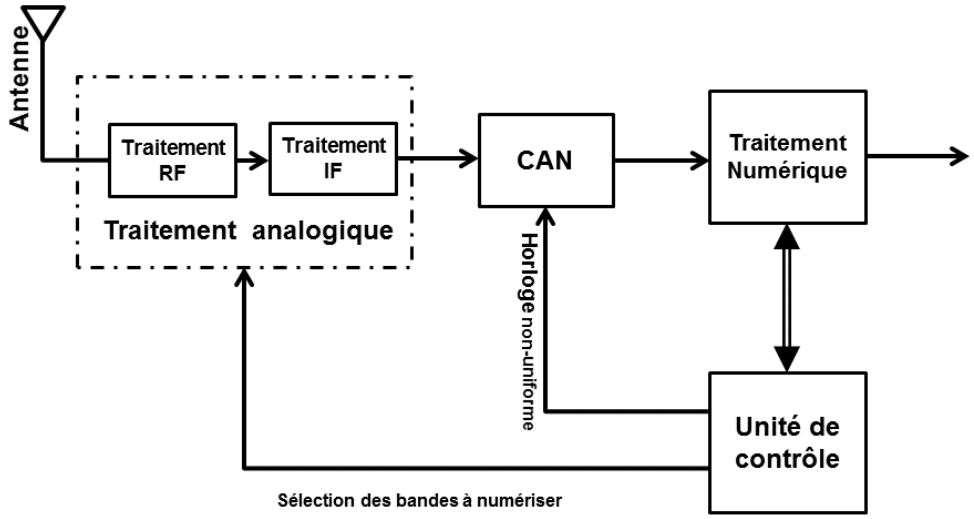


FIGURE 3.1 – Architecture proposée d'un récepteur radio logicielle restreinte avec pilotage par une horloge non uniforme

RF dans lequel sera effectué un Traitement Radio Fréquence (amplification et filtrage) et d'un bloc *Traitement IF* où aura lieu le Traitement en Fréquence Intermédiaire (Transposition fréquentielle, filtrage, etc). L'ensemble du bloc *Traitement analogique* doit assurer un fonctionnement multibande et multistandard au récepteur radio logicielle. Ainsi, une description pratique du signal à l'entrée du CAN est le modèle multi-bande où le support fréquentiel du signal réside à l'intérieur de plusieurs intervalles continus dans un spectre large mais nul ailleurs. Le bloc de Conversion Analogique-Numérique (CAN) présenté sur la figure (3.1) est pilotable par une horloge non uniforme et possède un mode standby dans lequel nous supposons une consommation d'énergie quasiment nulle. Enfin le bloc *unité de contrôle* permet de sélectionner à partir du bloc *Traitement analogique* les bandes utiles selon les besoins d'un utilisateur (choix d'un ou de plusieurs standards en particulier) ou après une analyse spectrale (filtrage des plages fréquentielles non utiles). L'*unité de contrôle* permet aussi d'agir sur le bloc CAN à l'aide d'une horloge non uniforme afin d'adapter sa fréquence d'échantillonnage. Il communique également avec le bloc *Traitement numérique* afin de connaître non seulement l'emplacement exact des plages fréquentielles à filtrer mais aussi d'assurer une reconstruction, avec un minimum d'erreur,

à une fréquence uniforme des échantillons non uniformément recueillis.

Il est à noter que l'objectif principal de ce chapitre n'est pas de montrer une quelconque supériorité en terme d'efficacité énergétique du schéma de la figure 3.1 par rapport à un autre. Il s'agit de mettre en évidence qu'à partir de cette architecture il devient possible de réduire la consommation énergétique d'un CAN lors de la phase de numérisation de signaux multibande constitués de standard de communication différents. Pour ce faire, nous commencerons par présenter dans la section 3.2 le principe de fonctionnement de notre nouvelle proposition appelée Système d'Échantillonnage Non-Uniforme en Radio Intelligente (SENURI) et expliquerons comment il détecte la localisation spectrale des bandes utiles, dans la bande totale à numériser. Par la suite nous mettrons en évidence comment la réduction de la fréquence moyenne d'échantillonnage, c'est à dire du nombre moyen d'échantillons prélevé, permet de réduire la consommation d'énergie du CAN. Dans la section 3.3, nous présenterons une version améliorée du SENURI que nous appellerons *le Multi-Coset Adaptatif (MCA)*. Ce nouveau système possède toutes les caractéristiques du SENURI. Mais contrairement au SENURI, pour lequel nous supposons la connaissance des instants de changement du taux d'occupation spectral, le MCA possède un bloc de détection de changement spectral, ce qui permet de connaitre les instants de reconfiguration du système.

3.2 Système d'échantillonnage non uniforme pour la radio intelligente

Conformément au théorème de Whittaker-Kotelnikov-Shannon-Nyquist [44, 30], un signal dont le support spectral est compris entre $-\frac{F_{nyq}}{2}$ et $\frac{F_{nyq}}{2}$ peut être parfaitement reconstruit à partir d'échantillons prélevés à la fréquence F_{nyq}. Numériser un signal très large bande constitué de standards de communication différents à la fréquence de Nyquist demanderait une forte consommation d'énergie au niveau des Convertisseurs Analogique Numérique. Afin de réduire la fréquence moyenne d'échantillonnage, le nombre d'échantillons prélevé et par conséquent la consommation d'énergie au niveau des CANs, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la question d'une fréquence d'échantillonnage sous-Nyquist. Ainsi dans [20], l'échantillonnage Sous-Nyquist pour les signaux parcimonieux multi-bandes analogiques, appelé Convertisseur Large bande Modulé (Modulated Wideband Converter (MWC)), se composant de plusieurs étages où chaque étage utilise une fonction de mixage

différente suivie par un filtre passe bas et un échantillonnage uniforme basse fréquence, a été étudié. Les conditions de la reconstruction parfaite du signal analogique à la sortie du MWC y sont également évoquées. Similairement, [19] discute de l'échantillonnage non uniforme périodique plus connu sous l'appellation « Multi-Coset ». Le Multi-Coset montre que la reconstruction parfaite est possible lorsque la bande est bien localisée.

Il existe plusieurs méthodes d'implémentation de l'échantillonnage Multi-Coset dans la littérature. La plus connue est constituée de plusieurs branches, chacune contenant un retard suivi d'un échantillonneur uniforme fonctionnant à la même fréquence, inférieure à celle de Nyquist. Récemment il a été proposé dans [48] un schéma Mutli-Coset dans lequel les échantillonneurs uniformes fonctionnent à des fréquences différentes (Synchronous Mutlirate Sampling (SMRS)). Les auteurs de [49] se basent sur le principe du SMRS pour définir un schéma utilisant un très faible nombre d'échantillonneurs uniformes, le « Dual-Sampling ». Dans le « Dual-Sampling » les deux échantillonneurs fonctionnent à des périodes premières entre elles.

Les architectures d'implémentation de l'échantillonnage Multi-Coset qui existent dans la littérature présentent toutes l'inconvénient être rigide et non flexible, car constituées d'un empilement de CANs classiques. Par ailleurs le nombre de CANs qui les composent est liée à la connaissance du nombre maximale (N_{max}) de bandes pouvant être contenues dans le signal d'entrée, ainsi que de leur largeur maximale (B_{max}). De plus, ces architectures fonctionnent toujours à la même fréquence d'échantillonnage et comme elles ont besoins de la connaissance des emplacements des bandes pour la reconstruction des échantillons uniforme (Voir, chapitre 1, conditions de Landau), elles utilisent en permanence un système de détection de bande. Ce qui constitue un problème majeur en matière d'efficacité énergétique.

Dans [22], M. Mishali propose la définition d'un système d'échantillonnage efficace. Le système est doté des propriétés suivantes :

1. La fréquence d'échantillonnage (moyenne) peut être la plus faible possible.
2. Le système n'a aucune connaissance préalable des emplacements des bandes contenues dans le signal d'entrée.
3. Le système peut être mis en œuvre avec les dispositifs existants.

A partir de cette définition du système d'échantillonnage efficace, nous présentons dans cette section, deux systèmes d'échantillonnage aveugle (c'est-à-dire qu'ils n'ont aucunes connaissance préalable sur le spectre du signal d'entrée). Nos systèmes sont capables de

retrouver par eux même toutes les informations contenues dans le signal à échantillonner afin de réduire le plus possible leurs fréquences moyenne d'échantillonnage, en prélever le moins d'échantillons possible.

Dans la sous-section 3.2.1, nous commencerons par présenter un rappel sur le modèle du signal multibande ainsi que du principe de fonctionnement de l'échantillonnage Multi-Coset (MC) classique. Dans la sous-section 3.2.2, nous présenterons un premier système d'échantillonnage aveugle, que nous avons appelé le SENURI (pour Système d'Échantillonnage Non-Uniforme en Radio Intelligente) dans [62] et DSB-NUS (pour Dynamic Signal Branch- Non UNiform Sampler) dans [27, 63, 64]. Il est constitué d'un seul échantillonneur non-uniforme, d'un algorithme de détection de bandes à l'intérieur de la bande passante du signal et d'un algorithme permettant la minimisation de la fréquence moyenne de l'échantillonneur non-uniforme tout en assurant la reconstruction des échantillons aux instants réguliers de Nyquist. Par la suite, nous verrons que le SENURI a une fréquence d'échantillonnage qui est proportionnelle au taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner. Mais dans le cas où l'emplacement des bandes contenues dans le signal d'entrée venait à changer dans le temps, le SENURI à besoin de connaitre les instants de changement pour être optimal. Cette limitation nous à pousser à proposer un second système d'échantillonnage, qui est en fait une amélioration du SENURI. Nous l'avons appelé le MCA (pour Multi-Coset Adaptatif), il dispose d'un algorithme de détection des changements de spectre. Son principe de fonctionnement sera présenté dans la sous-section 3.3.

3.2.1 Rappels

3.2.1.1 Le modèle d'un signal multi-bande

Soit $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ une classe de signaux continus à valeurs réelles, à énergie finie et à bande limitée dans un sous-ensemble $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \left\{x(t) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) : \mathbf{X}(f) = 0, f \neq \mathcal{B}\right\}, \tag{3.1}$$

où $\mathcal{B} = [-\frac{F_{nyq}}{2}, \frac{F_{nyq}}{2}]$ et $\mathbf{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2pift}dt$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$. On appelle *Support Spectral*, l'ensemble $\mathcal{F}$ définit par :

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{N}[-b_i, -a_i] \cup [a_i, b_i] \tag{3.2}$$

avec N le nombre de bandes contenues dans $\mathcal{B}, \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$.

3.2.1.2 L'échantillonnage Multi-Coset

L'échantillonnage *Multi-Coset* ou *periodic non-uniform sampling* permet d'échantillonner à une fréquence inférieure à celle de Nyquist, en capturant une quantité d'information suffisante pour la reconstruction exacte du signal $x(t)$ [26].

Afin d'avoir une fréquence d'échantillonnage minimale, une erreur minimale et une reconstruction optimale, nous choisissons d'abord une période adaptée T, inférieure ou égale à celle de Nyquist associée au signal d'entrée et les entiers L et p tel que $L \geqslant p > 0$. Nous échantillonnons le signal $x(t)$ non-uniformément aux instants $t_i(n) = (nL + c_i)T$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathcal{C} = \{c_i\}$ contient p entiers distincts provenant de $\mathbb{L} = \{0, 1, \ldots, L-1\}$. Il est désigné comme le modèle d'échantillonnage du couple (L, p) [26, 50].

Le procédé peut être vu, au premier abord, comme l'échantillonnage uniforme du signal au rythme T, puis une sélection de p échantillons parmi L, prélevés périodiquement. Les échantillons qui sont conservés dans chaque bloc sont spécifiés par l'ensemble $\mathcal{C}$ avec $0 \leqslant c_1 < c_2 < ... < c_p \leqslant L-1$.

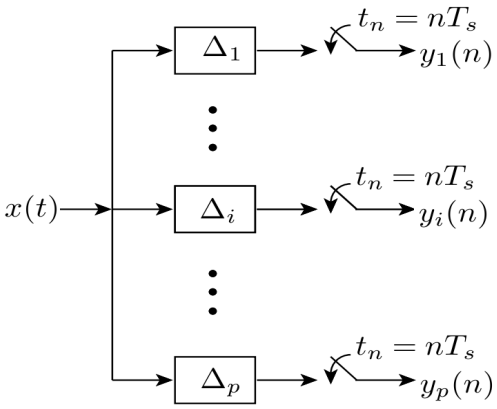


FIGURE 3.2 – Principe de l'échantillonnage Multi-Coset

Le système d'échantillonnage MC est constitué d'un nombre p de branches. Sur la figure 3.2, chacune dispose d'un décalage $\Delta_i = C_i T$ suivi d'un CAN fonctionnant uniformément à la période $T_s = LT$.

Par ailleurs, il s'avère que la sensibilité à de petites erreurs peut être si grande que même si la reconstruction parfaite est possible avec des données parfaites, le signal sera corrompu et deviendra méconnaissable dans les situations pratiques[20]. Le bon choix de l'ensemble $\mathcal{C}$ permet d'optimiser les marges d'erreurs dû aux repliements spectraux et à la sensibilité au bruit dans les processus de reconstruction [21]

Nous constatons clairement qu'après le choix des paramètres d'échantillonnage, le schéma d'échantillonnage de la Figure 3.2 restera inchangé peu importe le signal d'entrée. De ce fait la reconstruction optimale n'est possible que pour un certain type de signaux. Dans la section suivante nous présenterons un nouveau système d'échantillonnage basé sur le Multi-Coset, capable de re-calculer les paramètres optimaux d'échantillonnage suivant le signal d'entrée.

3.2.2 Description du SENURI

Le terme radio intelligente est fréquemment utilisé pour définir un système capable de prendre conscience de son environnement et de tirer profit de cette information pour adapter sa communication. Parfois, il est considéré de façon plus restrictive comme un système disposant d'une grande agilité en fréquence pour explorer les opportunités qui peuvent exister dans le spectre[65]. Notre proposition appelée ici SENURI (figure 3.3) cadre parfaitement avec cette définition et fonctionne en deux phase : *phase d'adaptation* (interrupteur sur la position 1) et la *phase de reconstruction* (interrupteur sur la position 2).

Lorsque le système est dans sa *phase d'adaptation*, nous supposons qu'il n'a aucune information sur le signal d'entrée $x(t)$, c'est-à-dire une non connaissance du nombre total de sous bandes (N) contenues dans la bande globale, leurs emplacements ainsi que leurs largeurs. De ce fait le système n'a aucune information sur le taux d'occupation de la bande à numériser. Afin d'avoir ces informations, il procède à une analyse spectrale en utilisant les échantillons non uniformes provenant du CAN non uniforme. Dans le bloc *détection de spectre avec des échantillons non uniformes*, que nous avons appelé NUSS (Non Uniform Spectrum Sensing) dans [27] et [63], le système commence d'abord par estimer la densité spectrale de puissance, puis estime le *Support Spectral* ($\mathcal{F}$) du signal d'entrée en délimitant les bandes utiles à l'aide d'un seuil. Enfin il calcule l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$) (nous reviendrons sur cette notion dans la sous-section 3.2.4).

Dans le bloc *Calcul du motif d'échantillonnage optimal et des instants d'échantillonnage du NUS*, appelé OASRS (Optimal Average Sampling Rate Search) dans [27] et [63], le système exécute un algorithme permettant de déterminer le motif d'échantillonnage optimal ($\mathcal{C}$) en fonction de l'entier L, de la période $T = \frac{1}{F_{nyq}}$ et de l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$). Connaissant l'ensemble $\mathcal{K}$, nous définissons les instants de fonctionnement de notre CAN non uniforme.

Lorsque l'interrupteur est dans la position 2, notre système fonctionne dans en *phase de reconstruction*. Il procède alors à la reconstruction des échantillons uniformes au rythme de Nyquist à partir des échantillons non uniformes délivrés par le CAN non uniforme, de l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$) et des motifs d'échantillonnage ($\mathcal{C}$). Le schéma de reconstruction utilisé est celui du Multi-Coset Classique, présenté dans la sous-section 3.2.6.

Il est à noter que le passage de la *phase d'adaptation* (où le système cherche à connaître les caractéristique du signal d'entrée) à la *phase de reconstruction* (où il reconstruit les échantillons uniformes au rythme de Nyquist) se fait successivement. C'est-à-dire que chaque *phase d'adaptation* est suivie par une *phase de reconstruction*.

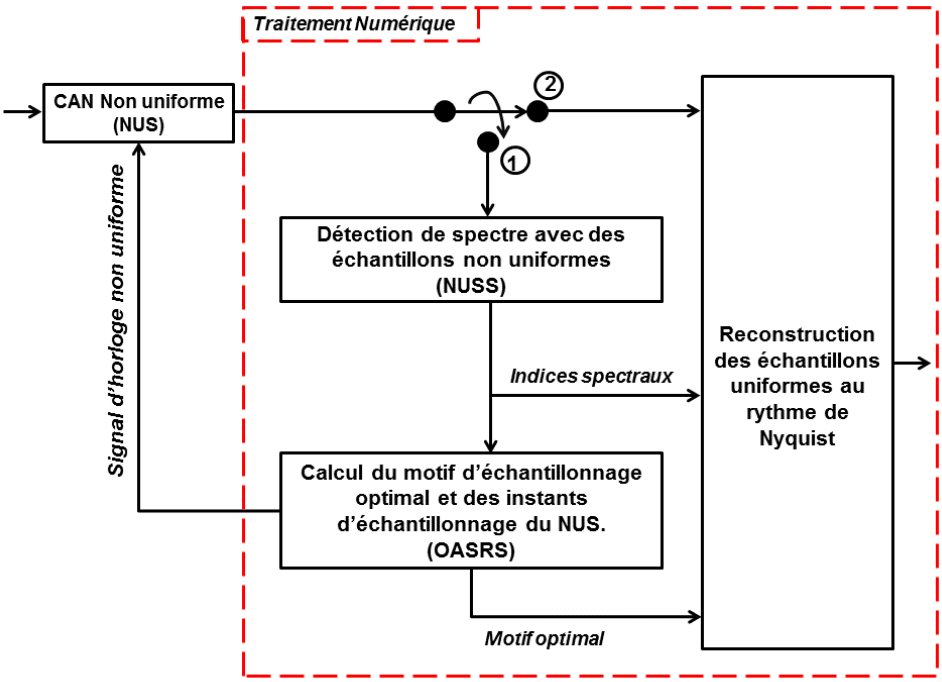


FIGURE 3.3 – Systèmes d'échantillonnage non uniforme en Radio intelligente.

Une rapide comparaison entre les figures 3.3 et 3.1, nous permet de dire que le bloc OASRS et le bloc *Unité de contrôle* font exactement le même travail.

Dans les sous sections suivantes, nous présentons plus en détail le fonctionnement des différents blocs présents dans notre nouveau système d'échantillonnage.

3.2.3 La Conversion Analogique Numérique non uniforme

Comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre 1, l'opération de conversion analogique numérique, appelée aussi numérisation, se fait en trois étapes distinctes : l'échantillon-

nage, la quantification et le codage. Les deux dernières étapes peuvent être rassemblées en une seule et être vues comme la véritable opération de numérisation. Le processus d'échantillonnage, consiste uniquement à prélever, à certains instants de manière uniforme ou non, la valeur du signal analogique et à la maintenir durant tout le processus de numérisation.

Dans cette sous-section, nous allons présenter le principe de fonctionnement du CAN non uniforme présent sur la figure 3.3 ainsi que les équations qui décrivent le processus d'échantillonnage lorsque ce dernier se comporte comme un échantillonneur Multi-Coset. Nous désignons par CAN non uniforme, un Convertisseur Analogique Numérique pour lequel le processus d'échantillonnage se fait à des instants irréguliers.

3.2.3.1 Principe de fonctionnement du CAN non uniforme

Pour que le CAN non uniforme (Non Uniform Sampler, NUS) présent dans la figure 3.3 récupère les mêmes échantillons que le Multi-Coset classique (voir figure 3.2), il faut que l'ensemble de ses instants d'échantillonnage $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ soient définis de la manière suivante :

$$t_m = t_{m-1} + \tau_m = t_0 + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \qquad m \geqslant 1 \tag{3.3}$$

où t_0 est le premier instant d'échantillonnage et l'ensemble $\mathcal{T} = \{\tau_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ la durée entre deux instants d'échantillonnage successifs. Cet ensemble doit être défini de manière à avoir $(\tau_m = \tau_{(ip+m)}, \forall i \in \mathbb{N})$. Il est à remarquer que contrairement au Multi-coset classique (voir figure 3.2), où p représente le nombre de branches, ici c'est le nombre d'échantillons à prélever parmi L (voir sous-section 3.2.1.2). Les valeurs des τ_m sont liées à l'ensemble des motifs d'échantillonnage $(\mathcal{C})$ par l'équation (3.4) :

$$\tau_m = \begin{cases} (c_m - c_{m-1})T & , \quad 1 \leqslant m \leqslant p-1 \\ (L - c_{p-1} + c_0)T & , \quad m = p \end{cases} \tag{3.4}$$

Nous rappelons que l'ensemble $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i=0}^{p-1}$ contient p entiers distincts pris dans l'ensemble $\{0, 1, ..., L-1\}$.

En posant $t_0 = c_0 T$, l'équation (3.3) s'écrira comme :

$$t_m = c_0 T + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \qquad m \geqslant 1 \tag{3.5}$$

L'ensemble des instants d'échantillonnage $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, ainsi obtenu, décrit un échantillonnage non uniforme pseudo aléatoire de type additif (*Additive Pseudo Random Sampler*). Le

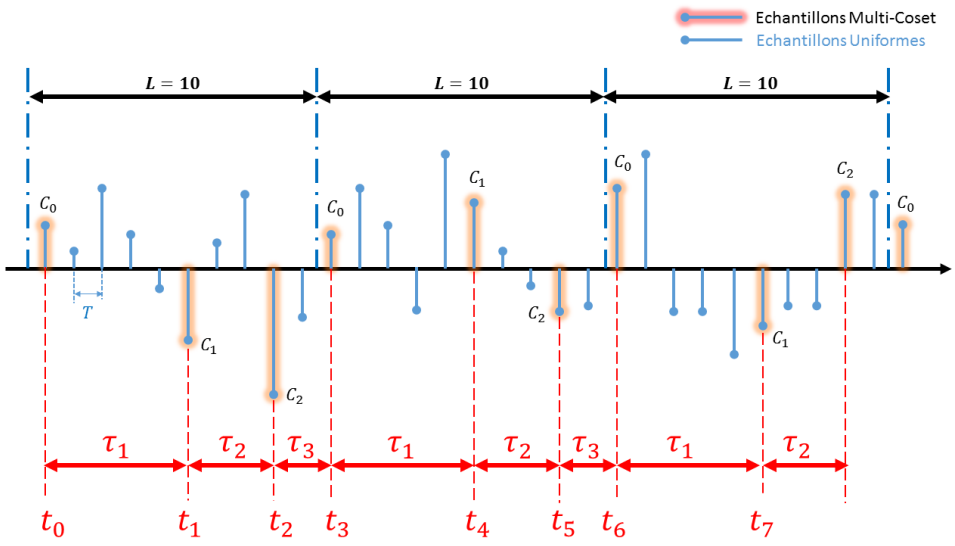


FIGURE 3.4 – L séquences consécutives uniformément espacées d'échantillons prélevés à la fréquence de Nyquist et les p échantillons MC correspondants.

processus d'échantillonnage ne s'effectuera qu'à certains instants bien précis. Il est donc aisé d'imaginer notre CAN non uniforme comme étant un CAN classique qui ne fonctionne qu'à certains instants connus d'avance. Ceci à pour avantage de nous offrir la possibilité de réduire la consommation d'énergie lors de la numérisation à condition de bien choisir l'architecture du CAN.

3.2.3.2 Architecture du CAN non uniforme

Plusieurs architectures de CAN non uniformes obtenues à partir d'un CAN traditionnel piloté par une horloge non uniforme existent dans la littérature [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 29]. Les signaux d'horloge sont généralement obtenus en transformant un signal d'horloge uniforme à l'aide d'un circuit électronique, très souvent peu consommateur d'énergie.

La quasi-totalité des CANs non uniformes rencontrés dans la littérature sont dédiés à l'échantillonnage aléatoire pour sa propriété d'anti-repliement spectrale (voir, chapitre 1 et 2). Dans [19], les auteurs préconisent pour la première fois l'utilisation de l'échantillonnage non uniforme pour le Multi-Coset. Mais ils n'ont malheureusement pas proposé d'architecture. Jusqu'à présent aucune étude approfondie n'a été faite sur les architectures de CAN non uniforme permettant à l'échantillonnage MC d'avoir une meilleure efficacité énergique lors de la numérisation. Notre objectif, dans ce document de thèse, n'est pas d'en faire une, mais d'émettre l'idée d'une politique de gestion de la tension d'alimentation du CAN en fonction de ses instants d'échantillonnage. Nous proposons de réduire le plus

possible la consommation énergétique du CAN en dehors des instants d'échantillonnage. De nos jours de nombreux CANs disponibles sur le marché possèdent un mode *standby* ou mode *power-down*. Dans ce mode le CAN est mis en veille, et ne consomme quasiment pas d'énergie. Nous pouvons également imaginer l'utilisation d'un CAN flash. Ce type de CAN étant très rapide nous pouvons l'éteindre en dehors des instants d'échantillonnage.

3.2.3.3 Équations d'état du processus d'échantillonnage non uniforme

Suivant l'approche de l'échantillonneur MC classique présentée dans le chapitre 1, nous exprimons les échantillons non uniformes $x(t_m)$ à la sortie du bloc NUS en terme de séquences périodiques $x_i[n] = x(t_{(np+i)})$, où $0 \leqslant i \leqslant p-1$. La transformée de Fourier, $X_i(f)$, de la séquence $x_i[n]$ est liée à la transformée de Fourier $X(f)$ du signal d'entrée $x(t)$ par l'équation (3.6), lorsque L est pair ou par l'équation (3.7), lorsque L est impair.

$$X_i(f) = \frac{1}{LT}\exp(j2\pi f c_i T) \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} X(f + \frac{n}{LT})\exp(j2\pi \frac{c_i}{L} n), \quad f \in [0, \frac{1}{LT}[\tag{3.6}$$

$$X_i(f) = \frac{1}{LT}\exp(j2\pi f c_i T) \sum_{n=\frac{-L+1}{2}}^{\frac{L-1}{2}} X(f + \frac{n}{LT})\exp(j2\pi \frac{c_i}{L} n), \quad f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[\tag{3.7}$$

A noter que $x(t) \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$, c'est à dire que $X(f) \neq 0 \ \forall f \in [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$. Les équations (3.6) et (3.7) peuvent être mises sous forme matricielle pour donner respectivement les équations (3.8) et (3.9) .

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}\mathbf{s}(f), \quad f \in [0, \frac{1}{LT}[\tag{3.8}$$

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}\mathbf{s}(f), \quad f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[\tag{3.9}$$

Dans les équations (3.8) et (3.9) $\mathbf{y}(f)$ est un vecteur de valeurs complexes de dimension $p \times 1$ dont le i^e élément est donné par l'équation (3.10)

$$y_i(f) = X_i(f)\exp(-j2\pi f c_i T) \tag{3.10}$$

avec $f \in [0, \frac{1}{LT}[$ lorsque L est pair et $f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[$ pour L impair.
La matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ de valeurs complexes et de dimension $p \times L$ a pour $(i,l)^e$ élément les équations (3.11) et (3.12) respectivement pour L pair et impair.

$$[\mathbf{A}_{\mathcal{C}}]_{il} = \frac{1}{LT}\exp(j2\pi \frac{c_i}{L}(l - \frac{L}{2})) \tag{3.11}$$

$$[\mathbf{A}_{\mathcal{C}}]_{il} = \frac{1}{LT}\exp(j2\pi\frac{c_i}{L}(l + \frac{-L+1}{2})) \tag{3.12}$$

A noter que $\mathbf{s}(f)$ dans les équations (3.8) et (3.9) contient les valeurs du signal $x(t)$ (le vecteur des inconnues) de dimension $L \times 1$ dont le l^e élément est donné par l'équation 3.13 ou l'équation 3.15 selon la parité de L.

$$s_l(f) = X(f + \frac{l - \frac{L}{2}}{LT}) \quad f \in [0, \frac{1}{LT}[\tag{3.13}$$

$$s_l(f) = X(f + \frac{l + \frac{-L+1}{2}}{LT}) \quad f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[\tag{3.14}$$

Les équations (3.13) et (3.15) indiquent que, si le spectre $X(f)$ est divisé en L cellules indexées de 0 à $L-1$, alors chaque cellule correspond à une ligne du vecteur $\mathbf{s}(f)$ (voir figure 3.5).

La figure 3.5 montre que lorsque la bande à échantillonner n'est pas pleine, certaines cellules (lignes du vecteur $\mathbf{s}(f)$ peuvent être vide d'énergie. Ces cellules sont appelées cellules non actives. A partir de la connaissance de l'emplacement de ces cellules il est devient possible de résoudre l'équation (3.9) en supprimant les lignes et les colonnes correspondants respectivement à celles du vecteur $s(f)$ et la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$.

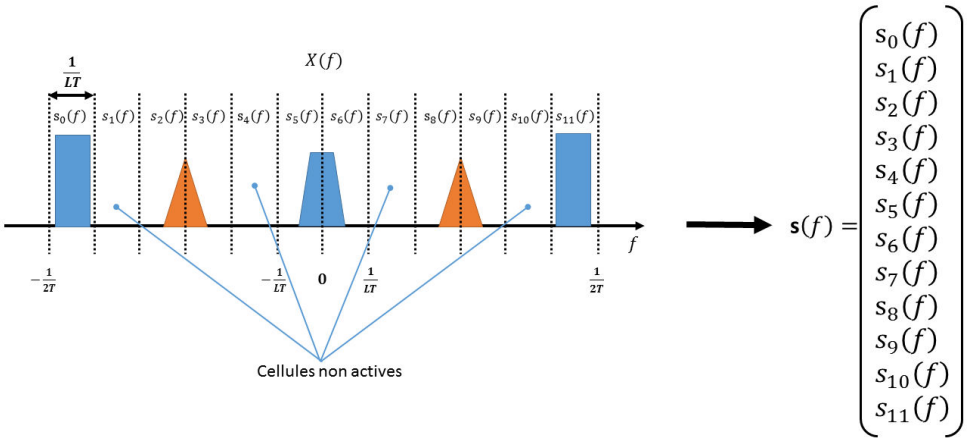


FIGURE 3.5 – Relation entre $X(f)$ et le vecteur $\mathbf{s}(f)$, pour $L = 12$.

Pour connaître l'emplacement des cellules non actives, nous effectuons une détection de spectre à partir des échantillons provenant du CAN non uniforme. Dans la sous-section suivante, nous présenterons notre schéma de détection.

3.2.4 Détection de bandes libres avec des échantillons non uniformes

3.2.4.1 Principe de fonctionnement du détecteur

Considérons le signal d'entrée $x(t)$ de classe $\mathcal{M}([-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}])$ et à taux d'occupation spectral non plein sur la bande $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$. Nous appelons ensemble des indices spectraux, l'ensemble $\mathcal{K} = \{k_r\}_{r=0}^{q-1}$ contenant les cellules actives (cellules contenant de l'énergie, voir figure 3.5), c'est à dire les lignes non nulles du vecteur $\mathbf{s}(f)$ de l'équation (3.8). La connaissance de cet ensemble $\mathcal{K}$ nous permettra de réduire les dimensions du vecteur $\mathbf{s}(f)$ et de la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$, ce qui nous permettra de reconstruire le signal d'origine $x(t)$ en résolvant l'équation (3.8). Il est à remarquer que cette résolution n'est possible que si $p \geqslant q$.

Afin de déterminer $\mathcal{K}$ différentes méthodes basées sur le *compressed sensing* ont été proposées dans la littérature [21, 50]. Ces méthodes supposent d'une part que le signal $x(t)$ est parcimonieux dans le domaine spectral (c'est-à-dire que son taux d'occupation spectral est très faible) et d'autre par la connaissance exacte de la matrice $A_{\mathcal{C}}$. Cette dernière est due au fait que pour une reconstruction optimale avec un minimum d'erreur quadratique de $x(t)$, il est indispensable de bien choisir l'ensemble des motif d'échantillonnage $\mathcal{C}$. Pour ce faire, les méthodes évoquées supposent la connaissance du nombre de bandes maximales contenues dans $x(t)$, de la largeur de bande maximale ainsi que du nombre de bande maximale, ceci implique alors une limitation matérielle, dû à l'architecture de échantillonneur Multi-Coset qui ne changera plus, et algorithmique dû à la contrainte de parcimonie des algorithmes de *compressed sensing*.

Dans ce document de thèse, nous supposons une absence totale d'information sur le support spectral ($\mathcal{F}$) du signal $x(t)$. Ceci implique une non connaissance de l'ensemble $\mathcal{C}$ et par conséquent de la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. Par ailleurs, nous supposons que l'architecture de l'échantillonneur Multi-Coset n'est pas figée. Cela est possible grâce à l'utilisation d'un CAN classique piloté par une horloge non uniforme (CAN non uniforme). Il suffira donc de modifier l'horloge non uniforme pour changer de comportement de l'échantillonneur, ce qui n'est pas possible dans le cas des échantillonneurs Multi-Coset classiques (voir figure 3.2).

Pour surmonter cette absence d'information sur le signal $x(t)$, nous proposons un système de *détection de spectre avec des échantillons non uniformes* (voir figure 3.3) que nous avons appelé dans [63, 27] *Non Uniform Spectrum Sensing (NUSS)*. Son principe de fonctionnement est donné par le schéma de la figure 3.6. Notre système commence

d'abord par estimer la Densité Spectrale de Puissance (DSP) du signal $x(t)$ à partir de ses échantillons pris aux instants $\{t_n\}$. La DSP ainsi estimée sera comparée à un seuil (η) afin de déterminer l'emplacement des bandes (le support spectral, $\mathcal{F}$). La connaissance de $\mathcal{F}$ permet de déduire l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$), c'est à dire la position des cellules actives.

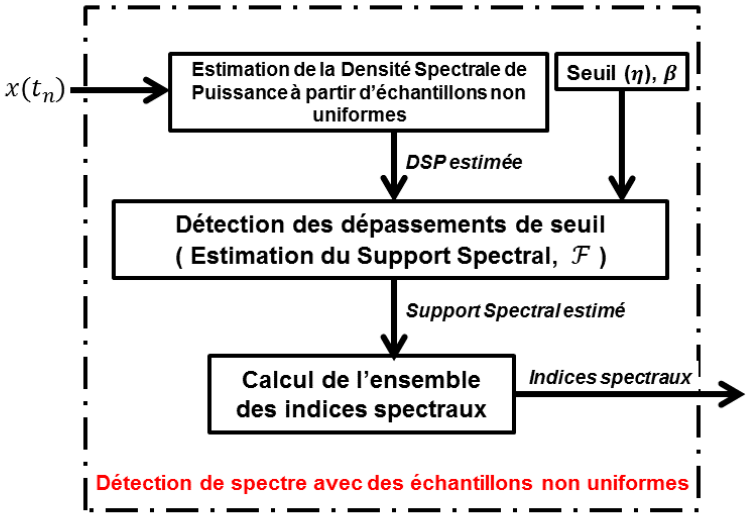


FIGURE 3.6 – Principe de fonctionnement du bloc de détection de spectre avec des échantillons non uniformes

Dans [27], nous avons proposé l'utilisation de la méthode d'estimation spectrale de Lomb-Scargle [61] (voir chapitre2) mais cette méthode présente l'inconvénient d'être très complexe. Nous avons alors décidé dans [74] d'utiliser la méthode d'estimation spectrale de Bartlett [57]. En pratique cette méthode utilise l'algorithme FFT, peu complexe et simple à mettre en œuvre (voir chapitre 2). Comme nous utilisons des échantillons Multi-Coset, prélevés sur une grille uniforme, nous avons décidé de remplacer les échantillons manquants par des *Zéros* afin de se replacer dans le contexte de l'échantillonnage uniforme. Après estimation du DSP, nous choisissons dynamiquement un seuil, η, en le définissant comme une fonction du maximum de la DSP estimée (DSP_{max}).

$$\eta = \lfloor DSP_{max} - \beta \rfloor, \tag{3.15}$$

où β est une valeur fixe et $\lfloor * \rfloor$ la fonction partie entière. En ce référant à η, le nombre de

bandes N contenues dans le signal $x(t)$ ainsi que son support spectral $\mathcal{F}$ seront déterminés. Connaissant $\mathcal{F}$ et N, l'ensemble des indices spectraux, c'est à dire l'ensemble indiquant les cellules actives, $\mathcal{K} = \{k_r\}_{r=0}^{q-1}$, avec $k_r \in \{0, 1, ..., L-1\}$, sera calculé suivant l'équation (3.16)

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{N} \{\kappa_i\}, \tag{3.16}$$

où κ_i représente l'ensemble des indices spectraux correspondant à la bande i. Il est donné par les équations 3.17 et 3.18 selon la parité de L

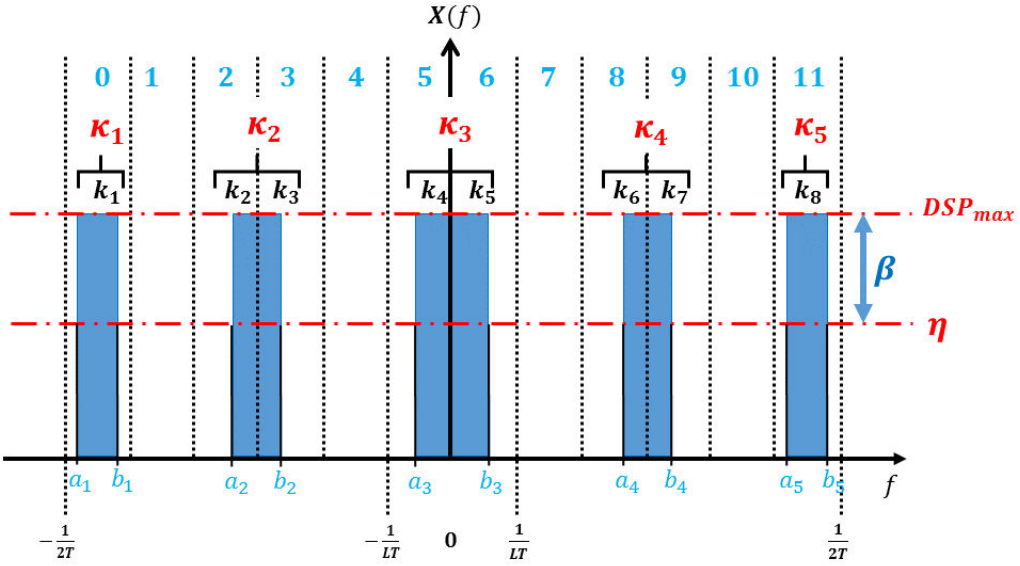
$$\frac{L}{2} + \lfloor a_i LT \rceil \leqslant \kappa_i \leqslant \lfloor b_i LT \rceil + \frac{L}{2} \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{3.17}$$

lorsque L est pair et

$$\frac{L+1}{2} + \lfloor a_i LT \rceil \leqslant \kappa_i \leqslant \lfloor b_i LT \rceil + \frac{L+1}{2}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{3.18}$$

lorsque L est impair, avec a_i et b_i respectivement les bornes inférieures et supérieures de la bande i.

Le procédé est illustré sur la figure 3.7 pour $N = 5$ et $L = 12$.



$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{5} \boldsymbol{\kappa}_i = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11\}$$

FIGURE 3.7 – Calcul de l'ensemble des indices spectraux dans le bloc de *détection de spectre avec des échantillons non uniformes.*

L'ensemble $\mathcal{K}$ obtenu sera envoyé aux blocs *Reconstruction* et *Calcul du motif d'échantillonnage optimal* comme indiqué sur la figure (figure 3.3).

Dans notre détecteur non uniforme, β est la seule information supposée connue. Nous la choisissons de manière à ce que notre détecteur ait une meilleure performance en terme

de probabilité de détection et de fausse alarme. Par la suite, nous expliquerons comment nous définissons ces probabilités et comment nous choisissons β.

3.2.4.2 Évaluation des performances du détecteur de bande libre.

Pour évaluer les performances de notre système de *détection de spectre avec des échantillons non uniformes*, nous définissons les probabilités suivantes :

1. Probabilité de détection ($P_d(\mathcal{K})$) : c'est la probabilité que l'ensemble des indices spectraux originaux ($\mathcal{K}$) soit inclus dans l'ensemble des indices spectraux calculés ($\hat{\mathcal{K}}$). Elle est donnée par l'équation (3.19)

$$P_d(\mathcal{K}) = \Pr\left(\mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{K}}\right) \tag{3.19}$$

2. Probabilité de fausse alarme ($P_{fa}(\mathcal{K})$) : c'est la probabilité de détecter des cellules non actives sachant que nous avons déjà détecté toutes les cellules actives. Elle est donnée par l'équation (3.20)

$$P_{fa}(\mathcal{K}) = \Pr\left(|\hat{\mathcal{K}}| > |\mathcal{K}| \middle| \mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{K}}\right) \tag{3.20}$$

3. Probabilité de bonne détection ($P_{bd}(\mathcal{K})$) : c'est la probabilité que l'ensemble des indices spectraux calculés ($\hat{\mathcal{K}}$) soit égal à l'ensemble des indices spectraux originaux ($\mathcal{K}$). Elle est donnée par l'équation (3.21)

$$P_{bd}(\mathcal{K}) = \Pr\left(\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\right) = \Pr\left(|\hat{\mathcal{K}}| = |\mathcal{K}| \middle| \mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{K}}\right) \tag{3.21}$$

   où $|\mathcal{K}|$ représente la cardinalité de $\mathcal{K}$, c'est à dire son nombre d'éléments.

Il est à noter que pour une reconstruction optimale (une erreur quadratique minimale), il est indispensable de connaître l'ensemble des indices spectraux originaux ainsi qu'un motif d'échantillonnage optimal ($\mathcal{C}$). Nous verrons par la suite qu'une forte probabilité de fausse alarme entraînera une fréquence d'échantillonnage moyenne sous optimale. Par la suite, nous choisirons β de manière à maximiser la probabilité de bonne détection ($P_{bd}(\mathcal{K})$).
Maintenant que nous savons comment calculer l'ensemble $\mathcal{K}$, nous allons nous intéresser, dans la partie suivante, à la façon d' obtenir l'ensemble $\mathcal{C}$.

3.2.5 Bloc de Calcul du motif d'échantillonnage optimal et des instants d'échantillonnage

Dans cette partie, nous allons nous intéresser plus particulièrement à l'algorithme de calcul du motif d'échantillonnage optimal. En ce qui concerne les instants d'échantillonnage du

CAN non uniforme, ils seront déduits à partir de la connaissance de l'ensemble $\mathcal{C}$, comme indiqué précédemment dans la sous-section.3.2.3.3 de ce document.

3.2.5.1 Principe de fonctionnement

Dans [27], nous avons défini le bloc *Calcul du motif d'échantillonnage optimal et des instants d'échantillonnage du NUS* de la figure 3.3 sous l'appellation *Optimal Average Sampling Rate Search (OASRS)* comme étant le bloc dans lequel s'effectue le calcul du motif d'échantillonnage optimal et des instants d'échantillonnage du CAN non uniforme. Son principe de fonctionnement est donné par le schéma de la figure 3.8. Sur cette figure nous observons qu'à partir de la connaissance de la période d'échantillonnage T, de l'entier L et de l'ensemble des indices spectraux $\mathcal{K}$, nous calculons le motif d'échantillonnage optimal permettant de minimiser l'erreur quadratique moyenne en minimisant les erreurs dues aux repliements spectraux et à l'ajout de bruit sur le signal $x(t)$. A partir de la connaissance de $\mathcal{C}$, nous calculons les instants d'échantillonnage du CAN non uniforme par le biais de l'équation (3.4) de la sous-section 3.2.3.1.

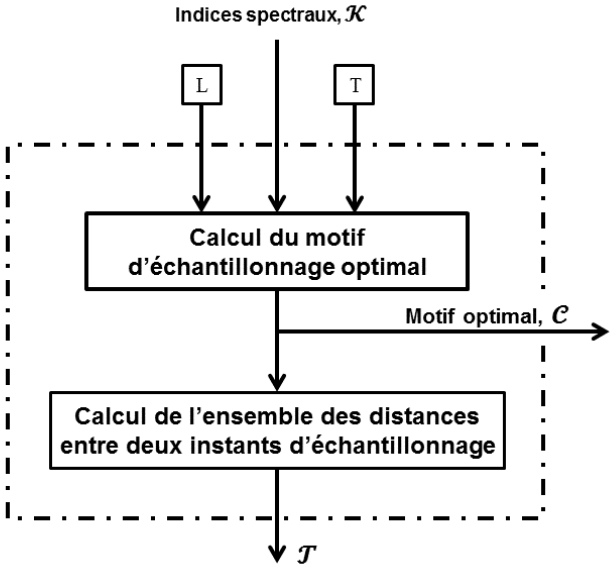


FIGURE 3.8 – Principe de fonctionnement du bloc OASRS

3.2.5.2 Calcul du motif d'échantillonnage optimal

Pour L et p connus, le motif d'échantillonnage est choisi en prélevant p parmi L dans l'ensemble $\mathbb{L} = \{0, 1, ..., L-1\}$. Nous verrons par la suite que choisir un $\mathcal{C}$ optimal permet de minimiser les erreurs dues aux repliements spectraux ainsi que la sensibilité à l'ajout de bruit au signal $x(t)$ lors du processus de reconstruction.

Nous verrons dans la sous-section 3.2.6, que lors de la reconstruction nous aurons besoin de la pseudo-inverse de la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$. Pour que cette dernière puisse exister il faut que la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ soit de rang plein en colonne. Dans [50], les auteurs ont montré que le choix d'un $\mathcal{C}$ qui rend la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ pseudo-inversible rend également la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ pseudo-inversible. Ceci constitue le premier critère dans le choix du motif d'échantillonnage optimal.

En pratique le vecteur $\mathbf{y}(f)$ dans les équations (3.8) et (3.9) est toujours entaché de bruit ce qui fait que le signal $x(t)$ ne se limite pas uniquement à son seul support spectral $\mathcal{F}$. Les erreurs de quantification et de phase de l'horloge du CAN et divers autres bruits font que le bon conditionnement de la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ est crucial. De ce fait le motif d'échantillonnage optimal sera celui qui permet d'obtenir le nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ le plus faible possible [19, 21].

Le nombre de conditionnement d'une matrice U est définie par l'équation (3.22)

$$cond(U) = \|U\| \left\|U^{-1}\right\|. \tag{3.22}$$

où $\|*\|$ est une opération de norme.

Le choix de $\mathcal{C}$ peut être vu comme la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\mathcal{C}_{opt} = arg \min_{\mathcal{C}:|\mathcal{C}|=p} cond(\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})) \tag{3.23}$$

Pour résoudre l'équation (3.23), les auteurs de [21] proposent d'utiliser l'algorithme du *Sequential Forward Selection (SFS).*

Pour un ensemble donné $\mathbb{L} = \{0, 1, ..., L-1\}$, l'algorithme SFS cherche un sous ensemble $\mathcal{C} = \{c_i\}_{i=0}^{p-1}$ qui minimise la fonction $cond(\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}))$. Pour commencer, nous prendrons p égal à la cardinalité de l'ensemble $\mathcal{K}$, l'ensemble $\mathcal{C}$ de départ est un ensemble vide et enfin nous définissons l'ensemble $\mathcal{C}_s = \mathbb{L}$. A chaque itération le SFS ajoute à l'ensemble $\mathcal{C}$ l'élément de $\mathcal{C}_s$ lui permettant de minimiser $cond(\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}))$. Les éléments qui seront choisis dans l'ensemble $\mathcal{C}_s$ seront supprimés. L'algorithme du SFS est présenté comme suit :

Algorithme 2 : SFS algorithm

Require: $L, T, \mathcal{K}$

Ensure: $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} \leftarrow \varnothing$

$p \leftarrow |\mathcal{K}|$

$\mathcal{C}_s \leftarrow \mathbb{L}$

$i \leftarrow 0$

while $i < p$ **do**

  for $j = 1$ to $|\mathcal{C}_s|$ **do**

    $\mathcal{C}_{opt} \leftarrow \arg\min[cond(\mathbf{A}_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_\mathbf{s}(\mathbf{j})}(\mathcal{K}))]$

  end for

  $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{opt}$

  $\mathcal{C}_s \leftarrow \mathcal{C}_s - \{\mathcal{C}_{opt}\}$

  $i \leftarrow i + 1$

end while

Lorsque L, T et $\mathcal{K}$ sont connus, l'algorithme SFS permet alors de choisir le motif d'échantillonnage optimal $\mathcal{C}$ permettant de minimiser l'erreur de reconstruction.

3.2.5.3 Fréquence moyenne d'échantillonnage

Comme nous avons déjà dit dans les sous sections précédentes, l'échantillonnage multi-coset consiste à prélever p échantillons parmi L sur une grille uniforme de manière périodique. De ce fait, nous pouvons définir la fréquence d'échantillonnage moyenne ($\overline{f}$) du CAN non uniforme par l'équation (3.24)

$$F_{moy} = \frac{p}{LT} = \frac{|\mathcal{K}|}{LT}. \tag{3.24}$$

Cette équation nous indique que pour L fixé, notre CAN non uniforme fonctionnera à une fréquence moyenne qui dépend uniquement du nombre de cellules actives contenues dans le signal d'entrée.

3.2.6 Bloc de reconstruction

3.2.6.1 La reconstruction sans bruit hors cellules actives

Pour $\mathcal{C}$ choisi de façon optimale, et $\mathcal{K}$ connu, le vecteur $\mathbf{s}(f)$ peut être réduit en $\mathbf{z}(f)$, un vecteur de dimension $p \times 1$ dont le r^e élément est donné par (3.25) lorsque L est pair

$$z_r(f) = X(f + \frac{k_r - \frac{L}{2}}{LT}). \tag{3.25}$$

Dans toute cette partie nous considérons L pair. La matrice $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ devient alors $\mathbf{A}_\mathcal{C}(\mathcal{K})$, une matrice de dimension $p \times p$ dont les éléments sont donnés par l'équation (3.26)

$$[\mathbf{A}_\mathcal{C}(\mathcal{K})]_{ir} = \frac{1}{LT} \exp\left(j2\pi \frac{c_i}{L}\left(k_r - \frac{L}{2}\right)\right), \tag{3.26}$$

où $0 \leqslant i \leqslant p-1$ et $0 \leqslant r \leqslant p-1$. Il en résulte que l'équation (3.8) sera réduite en

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_\mathcal{C}(\mathcal{K})\mathbf{z}(f). \tag{3.27}$$

La matrice $\mathbf{A}_\mathcal{C}(\mathcal{K})$ est une matrice carrée de rang plein. L'unique solution de l'équation (3.8) sera donnée par l'équation (3.28)

$$\mathbf{z}(f) = \mathbf{A}_\mathcal{C}^{-\mathbf{1}}\mathbf{y}(f), \quad f \in [0, \frac{1}{LT}[\tag{3.28}$$

où $\mathbf{A}_\mathcal{C}^{-\mathbf{1}}$ est l'inverse de $\mathbf{A}_\mathcal{C}(\mathcal{K})$. Comme le signal $x(t)$ est réel, son spectre est symétrique, les dimensions du vecteur $\mathbf{z}(f)$ peuvent être réduite en $\mathbf{z}^+(f)$. Alors l'équation (3.28) devient (3.35)

$$\mathbf{z}^+(f) = (\mathbf{A}_\mathcal{C}^{-\mathbf{1}})^+\mathbf{y}(f) \tag{3.29}$$

où $\mathbf{z}^+(f)$ est un vecteur de dimension $\frac{p}{2} \times 1$ dont le r^e élément est donné par (3.30)

$$z_r^+(f) = X(f + \frac{k_r - \frac{L}{2}}{LT}) \tag{3.30}$$

où $1 \leqslant r \leqslant \frac{p}{2}$ et $(\mathbf{A}_{\mathcal{C}^{-1}})^+$ une matrice de dimension $\frac{p}{2} \times p$ dont le $(i,l)^e$ élément est donné par l'équation (3.31)

$$\left[(\mathbf{A}_\mathcal{C}^{-\mathbf{1}})^+\right]_{il} = 2\left[\mathbf{A}_\mathcal{C}^{-\mathbf{1}}\right]_{il} \tag{3.31}$$

où $0 \leqslant i \leqslant \frac{q}{2} - 1$ et $0 \leqslant l \leqslant q-1$.

3.2.6.2 La reconstruction avec bruit hors cellules actives

Jusqu'à présent, nous avons supposé le signal d'entrée $x(t)$ comme étant de classe $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire que son spectre est nul en dehors de son support spectre $\mathcal{F}$. En pratique cela

n'est pas toujours le cas, puisque le signal $x(t)$ est généralement entaché de bruit. Afin de tenir compte de ce aspect, nous considérons l'ensemble $\mathbb{L} = \{0, 1, 2, ..., L-1\}$ et nous définissons l'ensemble $\overline{\mathcal{K}}$ comme étant le complément de l'ensemble des indices spectraux $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{L}$. Ainsi, contrairement à $\mathcal{K}$, qui permet d'indexer les cellules actives, $\overline{\mathcal{K}}$ permet d'indexer les cellules non actives. Partant de là l'équation 3.7 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})\mathbf{z}(f) + \mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})\mathbf{b_1}(f) + \mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{K}})\mathbf{b_2}(f), \quad f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[\tag{3.32}$$

où $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{K}})$ est une matrice de dimensions $p \times (L-p)$ dont les éléments sont donnés par l'équation (3.33)

$$\left[\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{K}})\right]_{ir} = \frac{1}{LT} \exp\left(j2\pi \frac{c_i}{L}\left(k_r - \frac{L}{2}\right)\right), \tag{3.33}$$

avec $k_r \in \overline{\mathcal{K}}$.

$\mathbf{b_1}(f)$ est un vecteur de dimension $p \times 1$ dont les éléments représentent le bruit à l'intérieur des cellules actives. $\mathbf{b_2}(f)$ est un vecteur de dimension $(L-p) \times 1$ dont les éléments représentent le bruit à l'intérieur des cellules non actives.

L'équation permettant de retrouver le vecteur des inconnues $\mathbf{z}(f)$ peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{z}(f) = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{y}(f) + \mathbf{b_1}(f) + \mathbf{A}_{\mathcal{C}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{K}})\mathbf{b_2}(f), \quad f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[\tag{3.34}$$

et

$$\mathbf{z}^{+}(f) = (\mathbf{A}_{\mathcal{C}}^{-\mathbf{1}})^{+}\mathbf{y}(f) + \mathbf{b_1}(f) + \left(\mathbf{A}_{\mathcal{C}}^{-\mathbf{1}}\right)^{+}\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{K}})\mathbf{b_2}(f), \quad f \in [-\frac{1}{2LT}, \frac{1}{2LT}[\tag{3.35}$$

3.2.6.3 Schémas de reconstruction

Lorsque $\mathbf{z}^{+}(f)$ est connu, sa transformée de Fourier inverse donne la représentation temporelle de chaque cellule, $X(f + \frac{k_r - \frac{L}{2}}{LT})$ Transformée de Fourier de $x_r(t) = x_r^{\mathcal{R}}(t) + jx_r^{\mathcal{I}}(t)$. Le signal ainsi reconstruit dans le domaine temporel peut alors s'écrire sous la forme :

$$\hat{x}[n] = 2\sum_{r=0}^{\frac{p}{2}-1} x_r^{\mathcal{R}} \cos(2\pi \frac{k_r - \frac{L}{2}}{L} n) - x_r^{\mathcal{I}} \sin(2\pi \frac{k_r - \frac{L}{2}}{L} n). \tag{3.36}$$

En pratique, il existe deux méthodes de reconstruction du signal $x(t)$. La première, qui est la plus connue, consiste à effectuer tout le processus de reconstruction dans le domaine temporel en interpolant, à l'aide d'un filtre de valeurs complexes h, la transformée de Fourier inverse des lignes du vecteur $\mathbf{z}^{+}(f)$. Les signaux ainsi obtenus seront transposés

aux fréquences $(\frac{k_r - \frac{L}{2}}{LT})$ avant de les sommer. Le schéma de reconstruction est donné sur la figure (3.9). La seconde, un peu moins connue, consiste à reconstruire les LM échantillons $x[n]$ au rythme de Nyquist à partir de pM échantillons $x(t_n)$ pris aux instants $\{t_n\}_{n=0}^{pM-1}$ avec $M > 0$. Le processus de reconstruction est illustré sur la figure (3.10). Dans les sous sections suivantes nous évaluerons les performances de ces deux schémas de reconstruction en terme d'erreur quadratique moyenne.

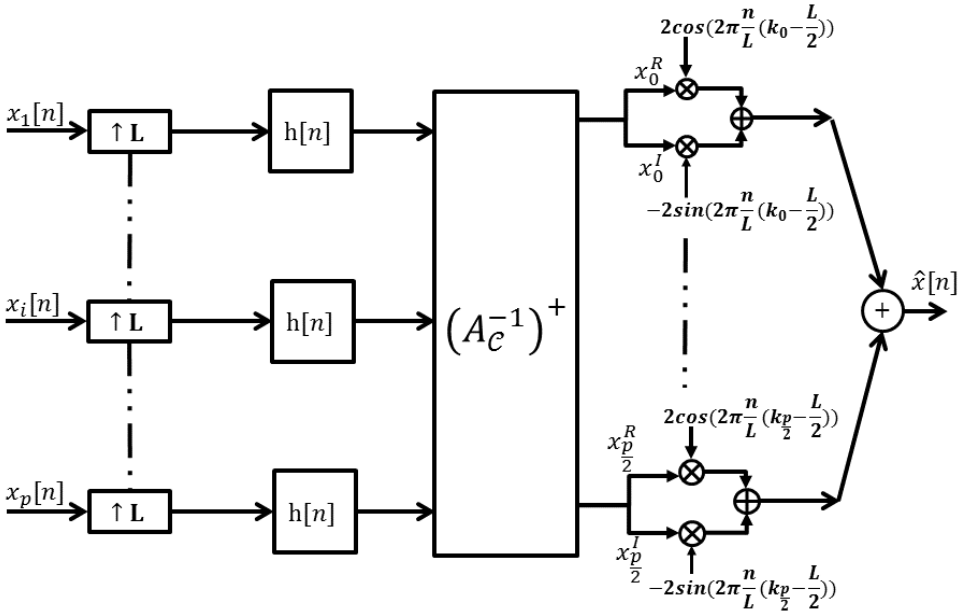


FIGURE 3.9 – Le schéma de reconstruction temporel

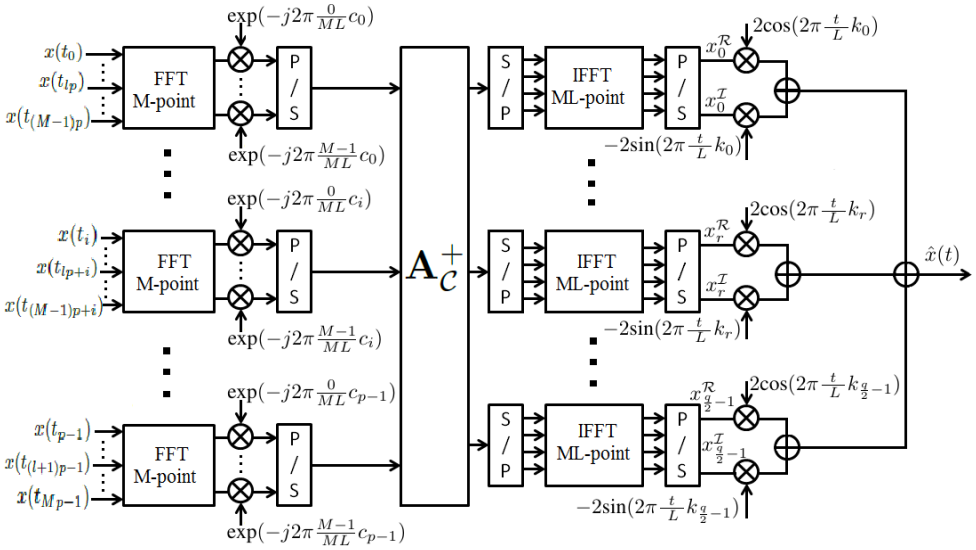


FIGURE 3.10 – Schéma de reconstruction fréquentiel

En théorie la reconstruction MC, c'est-à-dire le passage du vecteur $\mathbf{z}(f)$ à $\hat{x}[n]$ se fait sans perte d'information ni ajout de bruit. Mais en pratique cela n'est jamais possible. En effet,

suivant le schéma de reconstruction (temporel ou fréquentiel) nous avons toujours un bruit de reconstruction causé soit par le calcul numérique, soit par la forme des filtres (dans le cas du schéma de reconstruction temporel) ou par la troncature imposée par le schéma de reconstruction fréquentiel. Dans tous les cas nous avons un bruit de reconstruction même en absence d'autres bruits (bruit à l'intérieur des cellules actives et/ou non actives). Afin d'évaluer le bruit de reconstruction, nous définissons le *RMSE(Root Mean Square Error)* par l'équation (3.37)

$$RMSE = \frac{\|\hat{x}[n] - x[n]\|_2}{\|x[n]\|_2} \tag{3.37}$$

où $\|*\|_2$ représente l'opération de norme 2.

Afin d'évaluer le bruit de reconstruction, nous considérons la figure 3.11.

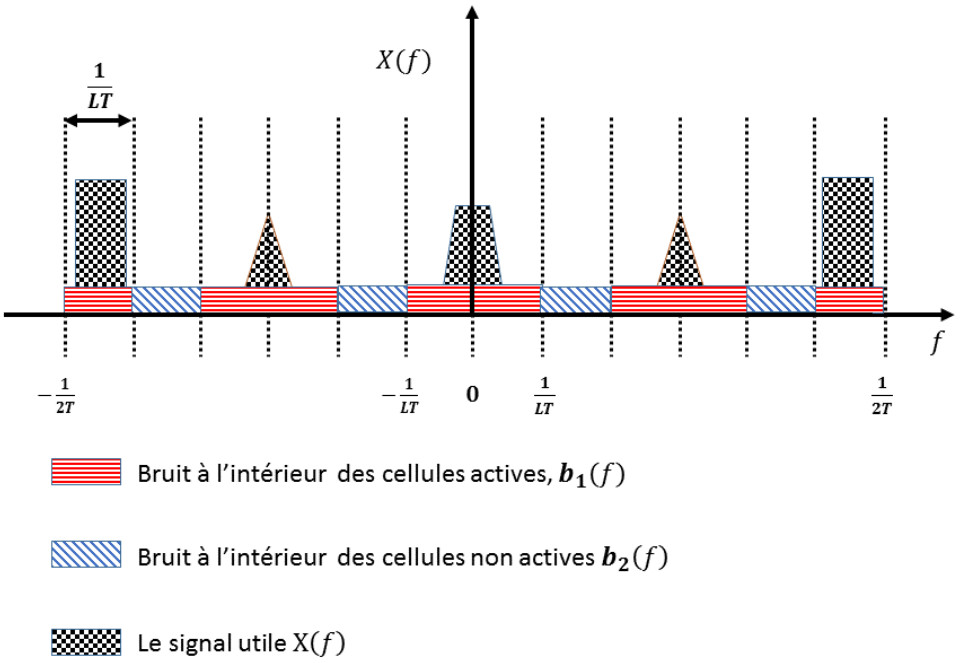


FIGURE 3.11 – Spectre $X(f)$ bruité par $b_1(f)$ et $b_2(f)$

L'équation 3.37 peut être ré-écrite sous la forme suivante :

$$RMSE^2 = \frac{\|b_1(f) + b_2(f) + b_{rec}(f)\|_2^2}{\|X(f)\|_2^2} \tag{3.38}$$

avec $b_{rec}(f)$ le bruit ajouté par le schéma de reconstruction (temporel ou fréquentiel). Par la suite l'équation 3.38 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$RMSE^2 = \frac{1}{CNR} + \frac{1}{SNR_K} + \frac{\|b_{rec}(f)\|_2^2}{\|X(f)\|_2^2} + \frac{2\|b_1 b_2(f) + b_1 b_{rec}(f) + b_2 b_{rec}(f)\|_2^2}{\|X(f)\|_2^2}, \tag{3.39}$$

où

$$SNR_K = \frac{\|X(f)\|_2^2}{\|b_1(f)\|_2^2}, \tag{3.40}$$

est le rapport entre la puissance de $X(f)$ et celle de $b_1(f)$, et

$$CNR = \frac{\|X(f)\|_2^2}{\|b_2(f)\|_2^2}, \tag{3.41}$$

est le rapport entre la puissance de $X(f)$ et celle de b_2.

3.2.7 Évaluation de notre système d'échantillonnage non uniforme

Dans cette partie, nous allons évaluer le fonctionnement global de notre nouveau système à travers l'échantillonnage non uniforme et la reconstruction du signal multi-bandes $x(t)$ défini par l'équation (3.42)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} (r_i(t) * h_i(t)) \cos(2\pi f_i t), \tag{3.42}$$

où $h_i(t) = \sin(\pi B_i t)/(\pi B_i t)$ est un filtre idéal, r_i est un bruit blanc gaussien et $N = 4$ le nombre de bandes. La i^e bande de $x(t)$ est de largeur B_i avec une fréquence porteuse f_i. Nous avons effectué nos simulations en choisissant B_1, B_2, B_3 et B_4 respectivement égales à 10, 20, 10 et 40 MHz et f_1, f_2, f_3 et f_4 respectivement égales à 10, 100, 200 et 270 MHz. Puis, nous avons fixé la fréquence maximale (F_{max}) contenue dans $x(t)$ égale à 300 MHz. Sur la figure 3.12 nous pouvons observer les représentations temporelles et fréquentielles de $x(t)$. La localisation des bandes est donnée par le support spectral défini par l'ensemble $\mathcal{F} = [-290, -250] \cup [-205, -195] \cup [-110, -90] \cup [-15, -5] \cup [5, 15] \cup [90, 110]$ $\cup [195, 205] \cup [250, 290]$.

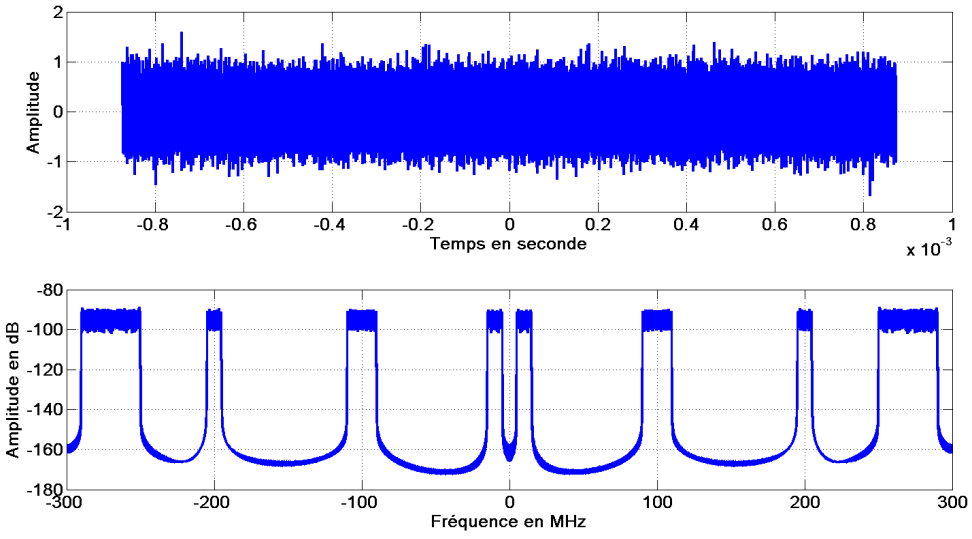


FIGURE 3.12 – Représentations temporelle et fréquentielle de $x(t)$

À $t = t_0$ du système d'échantillonnage, nous supposons n'avoir aucune information sur l'emplacement des bandes contenues dans le signal $x(t)$. Pour commencer nous prendrons $L = 128$ et $T = 1/2F_{max}$. Nous rappelons que notre système fonctionne en deux phases. La première que nous avons appelé *phase d'adaptation*, lorsque l'interrupteur est dans la position 1, et la seconde que nous avons appelé *phase de reconstruction*, lorsque l'interrupteur est en position 2, (voir figure 3.3). Nous expliquerons dans les sous-section suivantes comment évolue l'état de notre système dans ces différentes phases.

3.2.7.1 État de notre système dans la *phase d'adaptation*

Lorsque l'interrupteur de notre système d'échantillonnage est en position 1 pour la première fois, nous supposons une non-connaissance du nombre total de bande (N) contenues dans $x(t)$ ainsi que leurs emplacements. Afin d'obtenir ces informations, notre système procédera à une analyse spectrale en utilisant les échantillons non uniformes provenant du CAN non uniforme. Pour ce faire nous devons initialiser les instants d'échantillonnage du CAN. Nous savons maintenant que les instants d'échantillonnage du CAN dépendent, dans le cadre de l'échantillonnage Multi-Coset, du motif d'échantillonnage ($\mathcal{C}$). Nous avons vu dans le chapitre 2 l'influence de $\mathcal{C}$ sur la qualité de l'analyse spectrale. Nous avons vu également que la méthode *AliasMin* permettait de choisir $\mathcal{C}$ de façon à avoir une bonne analyse spectrale. Ici, nous nous proposons de fixer la cardinalité p de l'ensemble $\mathcal{C}$ à 90 et d'utiliser la méthode *AliasMin* pour choisir $\mathcal{C}$ avant d'appliquer la méthode d'analyse spectrale de Bartlett. Le résulat obtenu est visible sur la figure 3.13. Afin de déterminer le support spectral $\mathcal{F}$ (l'emplacement des bandes), le système compare la DSP estimée à la valeur de η (seuil de détection). La valeur de ce dernier dépend de la valeur de la DSP_{max} ainsi que de β. Ici nous avons pris $\beta = 6dB$. Le support spectral ainsi estimé est donné par $\hat{\mathcal{F}} = [-289.966, -250.012] \cup [-204.968, -195.007] \cup [-109.973, -90.014] \cup [-14.978, -5.017] \cup [5.017, 14.978] \cup [90.014, 109.973] \cup [195.007, 204.968] \cup [250.012, 289.966]$. Il devient alors aisé de calculer l'ensemble des indices spectraux $\mathcal{K}$, indispensable pour la reconstruction optimal.

Lorsque l'ensemble $\mathcal{K}$ est connu, notre système exécutera l'algorithme SFS afin de calculer le motif d'échantillonnage optimal avant de déterminer les nouveaux instants d'échantillonnage du CAN non uniforme. A ce stade la valeur de $p = |\mathcal{K}|$ vaut 40 et la fréquence moyenne d'échantillonnage ($F_{moy} = \frac{p}{LT}$) est égale à 187.5 MHz.

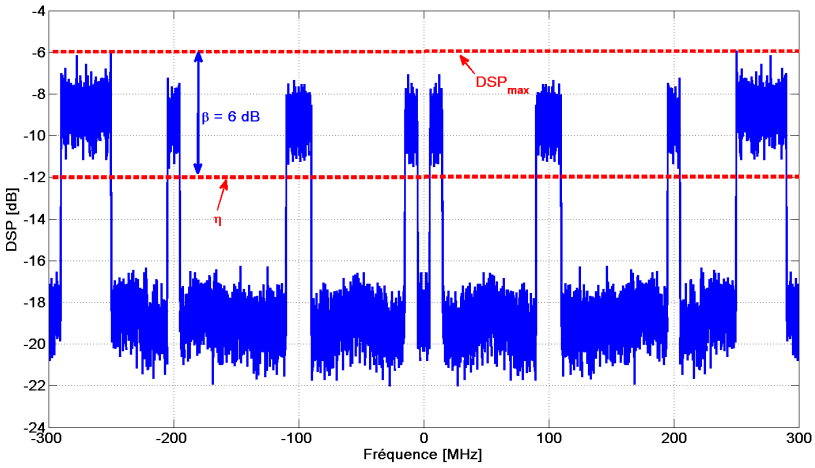


FIGURE 3.13 – Estimée de la DSP du signal $x(t)$ avec la méthode de Bartlett

3.2.7.2 État de notre système dans la *phase de reconstruction*

Lorsque notre système fonctionne dans la *phase de reconstruction* (interrupteur en position 2), sa fréquence moyenne d'échantillonnage est de 187.5 MHz soit environ 30% de celle de Nyquist (600 MHz). A ce stade, nous connaissons l'ensemble $\mathcal{K}$ ainsi que $\mathcal{C}$. Nous pouvons donc calculer la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$. Pour reconstruire le signal $x(t)$ nous pouvons soit utiliser le schéma de reconstruction temporel (voir, figure 3.9) ou fréquentiel (voir, figure 3.10). En choisissant le premier schéma de reconstruction le filtre complexe de la figure 3.9 sera défini par l'équation (3.43) :

$$h[n] = h_r[n] \exp(j\frac{\pi}{L}(n - \frac{N_h}{2})), \quad 0 \leqslant n \leqslant N_h - 1, \tag{3.43}$$

où h_r est un filtre passe bas de fréquence de coupure $\frac{2}{LT}$ et N_h la taille du filtre. Pour obtenir le résultat de la figure 3.14, nous avons pris $N_h = 4 \times L$. Pour cette simulation nous avons pris 2^{18} échantillons du signal $x(t)$. Il est à noter que le RMSE (l'erreur de reconstruction) est une variable aléatoire à cause du signal, ici égale à -12 dB. La distribution du RMSE correspondant à cet exemple est donnée par la figure 3.15. Nous observons qu'elle dépend de la taille du filtre h. Il est évident que le choix du filtre h_r a son importance mais cela ne fera pas l'objet d'une étude dans cette thèse.

Pour obtenir le résultat de la figure 3.16, nous avons utilisé le schéma de reconstruction fréquentiel avec $M = 2048$. L'erreur de reconstruction pour cette méthode est ici de -20 dB. La distribution du RMSE pour le schéma de la figure 3.16 est donnée par la figure 3.17.

Nous constatons clairement à travers les figures 3.15 et 3.17 que le schéma de reconstruc-

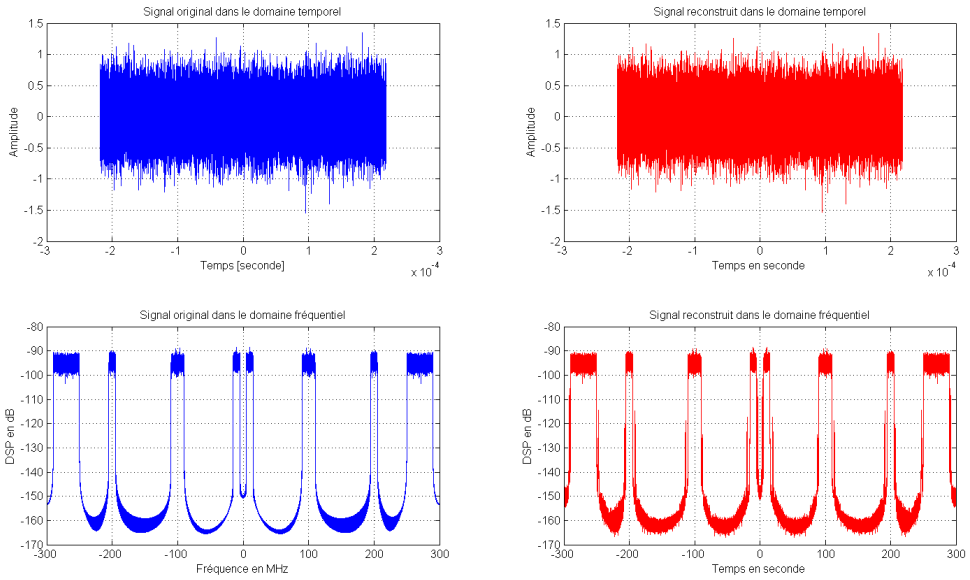


FIGURE 3.14 – Signal original $x(t)$ et sa version reconstruite avec le schéma reconstruction temporel, RMSE = -12 dB

tion fréquentiel présente de bien meilleures performances de reconstruction que le schéma de reconstruction temporel.

3.2.8 Conclusion

Dans cette partie, à travers un exemple d'échantillonnage et de reconstruction d'un signal multibande $x(t)$, nous avons pu suivre l'évolution des états de fonctionnement des différents blocs de notre système d'échantillonnage non uniforme. Au début nous avons supposé n'avoir aucune information sur le signal $x(t)$ et avons commencé par mettre l'interrupteur en position 1. Le système d'échantillonnage se trouve alors dans sa *phase d'adaptation* où il cherchera à configurer ses paramètres afin d'échantillonner $x(t)$ avec une fréquence moyenne beaucoup plus faible que celle de Nyquist tout en garantissant une reconstruction des échantillons Nyquist de façon optimale. Pour ce faire nous avons commencé d'abord par fixer L à 128 et p à 90 puis nous avons choisi grâce à la méthode *AliasMin*, vu dans le chapitre 2, le motif d'échantillonnage optimal pour l'analyse spectrale. Ceci nous permet d'initialiser les instants d'échantillonnage du CAN non uniforme. Ensuite, nous pouvons actionner le fonctionnement du bloc de *détection de spectre avec des échantillons non uniformes* puis par la suite l'algorithme SFS, qui permet de calculer le motif d'échantillonnage optimal avant de recalculer une seconde fois les instants d'échantillonnage du CAN non uniforme. Les nouveaux instants ainsi obtenus permettent d'avoir une fréquence moyenne liée au taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner.

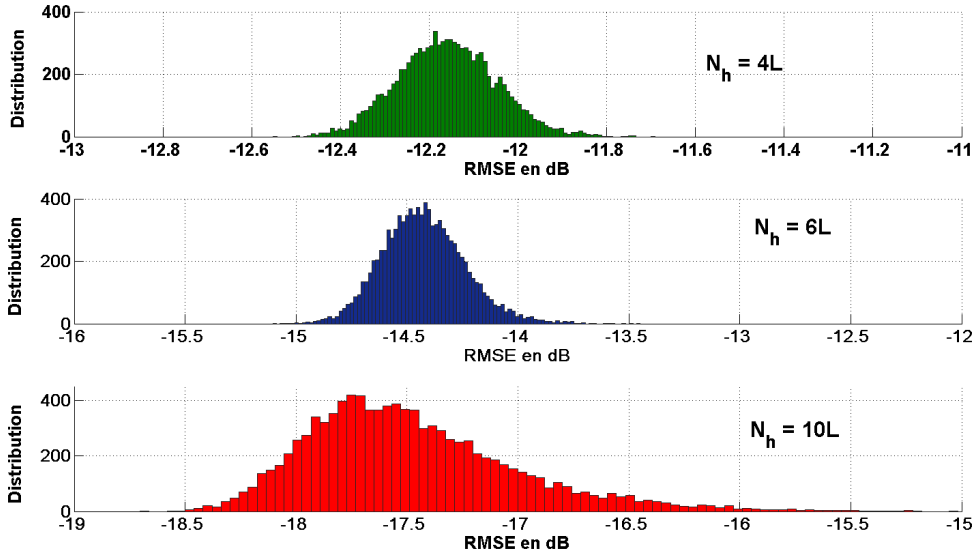


FIGURE 3.15 – Distribution du RMSE pour le schéma de reconstruction temporel.

Lorsque le système est dans la *phase de reconstruction*, l'interrupteur est en position 2. Nous choisirons d'utiliser soit le schéma de reconstruction temporel (voir figure 3.9) ou celui de reconstruction fréquentiel (3.10).

Comme nous venons de voir, notre système est capable de trouver les informations pertinentes dans un signal $x(t)$ afin de prélever un minimum d'échantillons possibles lors de la numérisation et réduire ainsi la consommation d'énergie du CAN. Nous avons vu également que ces informations sont liées à l'emplacement des bandes contenues dans $x(t)$. Donc si le spectre de $x(t)$ change il faut que notre système re-calcule ses paramètres. Il faut donc choisir le bon instant de basculement de l'interrupteur.

A partir du schéma de la figure 3.3, nous avons développé un autre système d'échantillonnage non uniforme, que nous avons appelé le *Multi-Coset Adaptatif*, capable de choisir par lui même les instants de basculement de l'interrupteur. C'est ce que nous allons présenter dans la section suivante.

3.3 Le Multi-Coset Adaptatif

Comme nous venons de voir, dans les sous sections précédentes, le choix des instants de basculement entre la *phase adaptation* et la *phase de reconstruction* est très important lorsque nous nous plaçons dans une situation où le spectre de $x(t)$ change dynamiquement. Dans cette partie, nous allons étudier le fonctionnement d'un système radio intelligent, capable de se reconfigurer seul en fonction des emplacements des bandes contenues dans le signal d'entrée $x(t)$. La fréquence d'échantillonnage moyenne de ce nouveau système

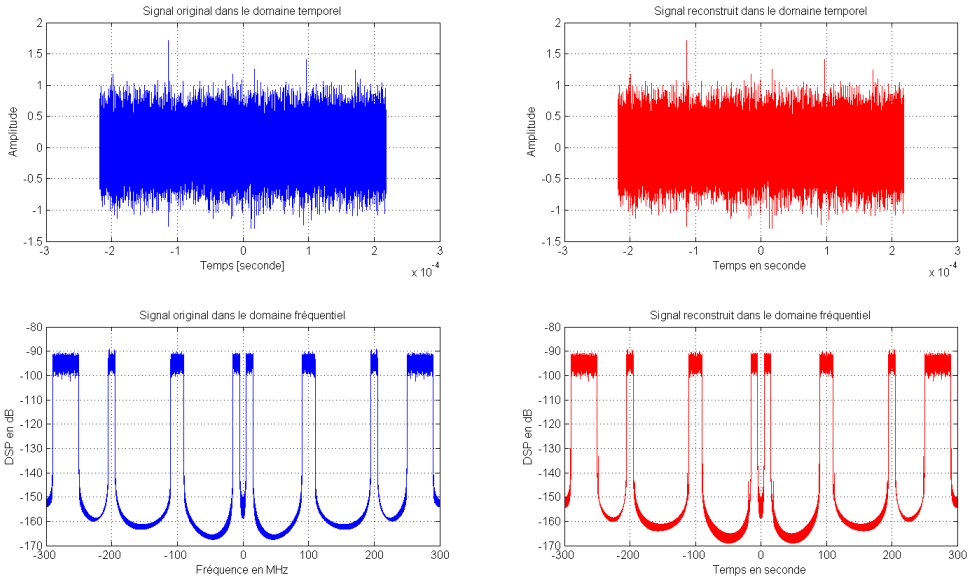


FIGURE 3.16 – Signal original $x(t)$ et sa version reconstruite avec le schéma de reconstruction fréquentiel, RMSE = -20 dB

est directement liée au taux d'occupation réel de la bande à échantillonner.

3.3.1 Principe de fonctionnement du Mutli-Coset Adaptatif

Sur la figure 3.18, nous pouvons observer le schéma de fonctionnement du Multi-Coset adaptatif. A partir du schéma de la figure 3.3 nous avons ajouté un nouveau bloc, le bloc de *Détection des changements de spectre*. Nous pouvons constater la présence de deux interrupteurs ($Switch_1$ et $Switch_2$) directement commandés par le bloc de *Détection des changements de spectre*. Ainsi contrairement au SENURI le fonctionnement du Multi-Coset Adaptatif permet de faire simultanément la phase de reconstruction et celle d'adaptation. En fait, nous avons une phase principale (la *phase de reconstruction*) à laquelle viendra s'ajouter de temps en temps une *phase d'adaptation*.

La *boucle d'adaptation* constituée par l'ensemble des blocs du *CAN non uniforme*, de *détection de spectre avec des échantillons non uniformes*, de *Détection des changements de spectre* et un bloc OASRS, fonctionne en deux phases successives : une *phase d'entraînement* suivie d'une *phase de test*. La *phase d'entraînement* a une durée que nous désignons par Δ_a. Durant cette phase les interrupteurs ($Switch_1$ et $Switch_2$) sont fermées. Le système cherche alors à prendre connaissance des informations contenues dans $x(t)$ (emplacement des bandes, fréquence de changement de spectre, etc ...). La connaissance de la fréquence de changement de spectre s'effectue dans le bloc de *Détection des changements de spectre*. Cette information sera utilisée dans la *phase de test*. Dans cette

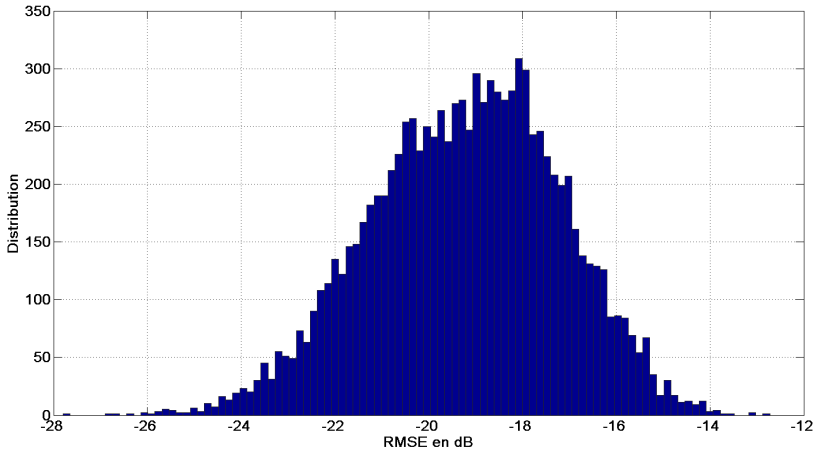


FIGURE 3.17 – Distribution du RMSE pour le schéma de reconstruction fréquentiel.

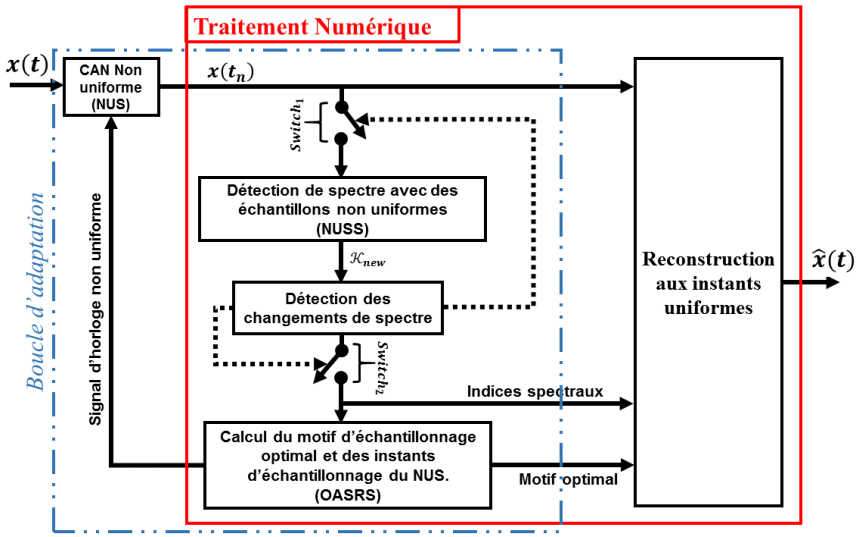


FIGURE 3.18 – Le schéma de fonctionnement du Multi-Coset Adaptatif

dernière phase, le système testera de manière périodique si le spectre de $x(t)$ change. Dans la sous-section suivante, nous expliquerons le fonctionnement de ce bloc.

3.3.2 La détection des changements de spectre

Soient D_{as} la durée maximale que met le bloc (NUSS) pour calculer $\mathcal{K}_{new}$ (la nouvelle valeur de l'ensemble des indices spectraux contrairement à $\mathcal{K}_{old}$ son ancienne valeur) et D_{min} la durée minimale entre deux instants de changement de spectre du signal $x(t)$. Nous désignons par $\{D_c^{(i)} = t_i - t_{i-1}, i \leqslant 1\}$ l'ensemble des durées entre deux instants de changement de spectre successifs. Nous supposons que $D_{min} \geqslant 100 \times D_{as}$.

A l'initialisation, nous choisissons $\mathcal{K}_{old} = \varnothing$ et $i = 0$. Les interrupteurs ($Switch_1$ et $Switch_2$) sont fermées. La *boucle d'adaptation* est dans la *phase d'entraînement*. Le prin-

cipal objectif est alors de déterminer la meilleure période de basculement de $Switch_1$. Pour ce faire, nous utilisons l'algorithme donné par la figure 3.19.

Lorsque $\mathcal{K}_{new}$ arrive au niveau du bloc de détection des changements de spectre, alors notre système commence dans un premier temps par regarder si les deux ont la même cardinalité. Si tel est le cas il regarde si l'un est inclus dans l'autre. Si cela est vérifié alors il n y a pas de changement de spectre. Sinon il y a eu un changement. Nous commençons alors dans un premier temps par remplacer l'ancien ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}_{old}$) par la nouvelle ($\mathcal{K}_{new}$). Puis nous envoyons $\mathcal{K}_{new}$ aux blocs suivants. Comme le montre la figure 3.19, à chaque changement de spectre nous incrémentons la valeur de i puis calculons $D_c^{(i)}$. La valeur $D_c^{(i)}$ sera stockée à chaque fois qu'elle est supérieure ou égale à D_{min}. Lorsque sa valeur est égale à D_{as} et que $i \neq 1$ alors nous ajouterons $D_c^{(i)}$ à $D_c^{(i-1)}$ avant de décrémenter i.

Lorsque la durée Δ_a, de la *phase d'entraînement* s'écoulera, nous chercherons la valeur minimale de l'ensemble $\{D_c^{(i)}\}$. Cette valeur nous permettra de calculer la période optimale (T_{cs}) de pilotage de $Switch_1$. Dans cette thèse, nous avons pris cette période égale à

$$T_{cs} = \frac{min\left(\{D_c^{(i)}\}\right)}{10}. \tag{3.44}$$

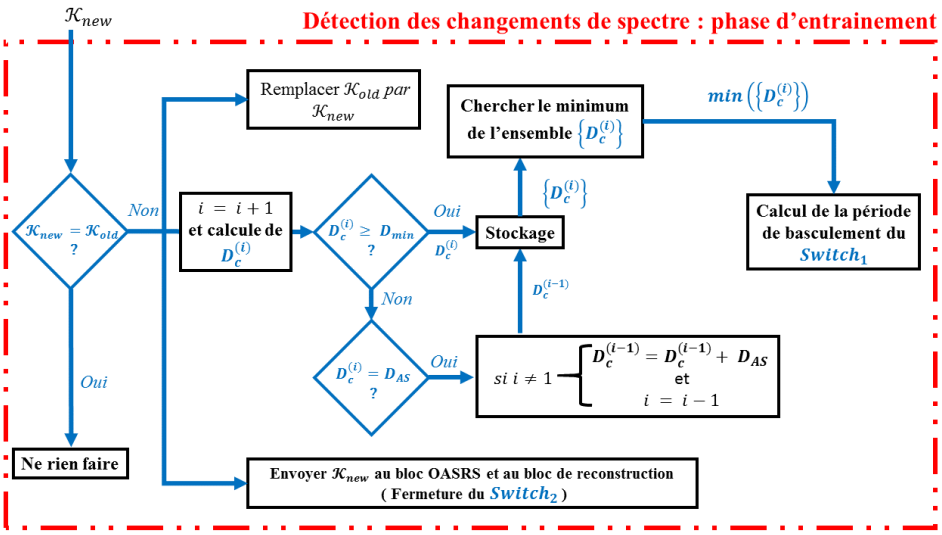


FIGURE 3.19 – Algorithme de détection de spectre lors de la *phase d'entraînement*

A la fin de la *phase d'entraînement*, la *boucle d'adaptation* basculera dans la *phase de test*. Dans cette phase, l'algorithme utilisé dans le bloc de *Détection des changements de spectre* est donné par la figure 3.19. Il consiste à piloter $Switch_1$ de manière périodique et à tester si l'ensemble $\mathcal{K}_{old}$ à changer.

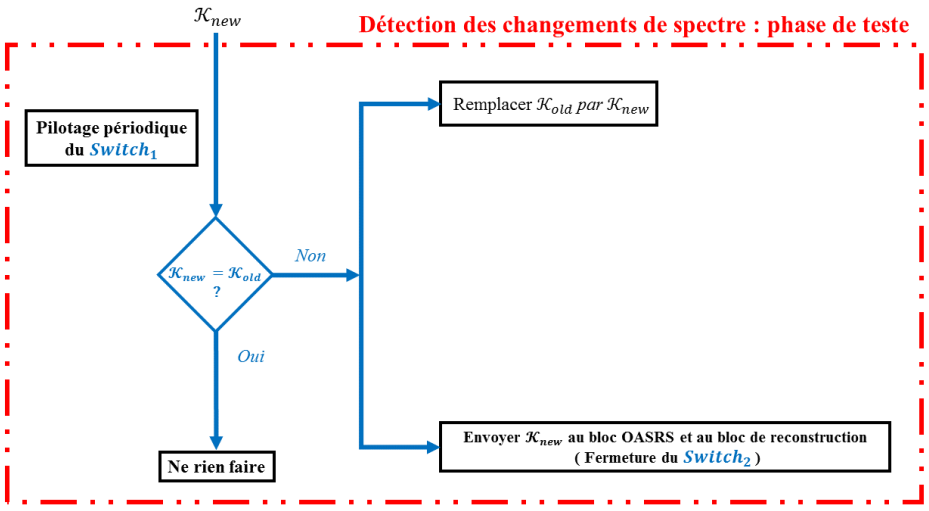


FIGURE 3.20 – Algorithme de détection de spectre lors de la *phase de test*

3.3.3 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté le principe de fonctionnement de nos deux nouveaux systèmes d'échantillonnage non uniformes à savoir le SENURI (Système d'échantillonnage non uniforme en Radio intelligente) et le MCA (le Multi-Coset adaptatif). Nos deux nouveaux systèmes peuvent adapter leurs fréquences moyennes d'échantillonnage en fonction du taux d'occupation spectre de la bande à échantillonner. En nous plaçant dans le cas d'un taux d'occupation variable dans le temps, notre premier système à besoin de connaître les instants de changement de spectre, tandis que le second n'a besoin d'aucune information. Nos deux systèmes peuvent s'appliquer à la radio intelligente dont ils respectent le cycle, ce qui fait d'eux des systèmes radio intelligente.

Dans le chapitre suivant, nous allons évaluer par la simulation les performances des différents blocs contenus dans nos deux systèmes.

Chapitre 4

Évaluation des performances des systèmes d'échantillonnages proposés

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le principe de fonctionnement de nos deux systèmes d'échantillonnage capables d'adapter leurs fréquences moyennes d'échantillonnage en fonction du taux d'occupation spectral du signal d'entrée. Nous avons également étudié le principe de fonctionnement des blocs qui les composent. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux performances de ces différents blocs. Pour ce faire, nous évaluerons dans la section-4.2, les performances du bloc de détection de spectre. Il est à rappeler que ce bloc permet dans un premier temps d'estimer le support spectral ($\mathcal{F}$), c'est-à-dire l'emplacement des bandes, puis de calculer l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$), c'est-à-dire la position des cellules actives. Nous avons déjà vu, dans le chapitre 3, l'expression des différentes probabilités associées à ce bloc. Dans cette partie nous verrons comment choisir efficacement le seuil de détection de spectre. Par la suite, nous discuterons de l'influence de la probabilité de fausse alarme sur la fréquence moyenne d'échantillonnage. Dans la section-4.3, nous présenterons les performances du bloc de détection des changements de spectre. Nous verrons par la suite que ce bloc est parfaitement capable de déterminer de façon autonome la meilleure période de basculement. Nous avons évalué les performances du bloc de reconstruction en étudiant l'influence des bruits à l'intérieur des cellules actives et non actives. Puis, nous avons simulé la variation de l'erreur de reconstruction au court du temps suivant divers changements de spectre. Enfin, dans la section 4.5, nous avons comparé nos nouveaux systèmes d'échantillonnage avec le MC classique dans le cas où le

taux d'occupation spectral du signal d'entrée varie dans le temps.

4.2 Évaluation du bloc de détection de spectre

Dans cette section, nous évaluons les performances du bloc de détection de spectre en terme de probabilité de détection (P_d), de probabilité de fausse alarme (P_{fa}) et de probabilité de bonne détection (P_{bd}). Il est à rappeler que P_d représente la probabilité de retrouver correctement l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$). Lorsque $P_d = 1$, la reconstruction MC est possible. La probabilité de fausse alarme (P_{fa}) représente la probabilité de dire qu'une cellule non active l'est. Nous pouvons donc supposer qu'une augmentation de P_{fa} pourrait avoir pour conséquence une augmentation de la fréquence moyenne d'échantillonnage. Enfin, la probabilité de bonne détection (P_{bd}) est la probabilité de retrouver exactement l'ensemble $\mathcal{K}$. Les techniques d'échantillonnage MC utilisées ici sont le mode *Burst* et le mode *AliasMin*.

Pour nos simulations, nous avons considéré un signal multibande $x(t)$ à bande limitée dans l'intervalle [0,300] MHz. Il est constitué de N bandes variables, avec $N \in \{1, 2, ..., 6\}$. La largeur de chacune de ces bandes peut varier de $B_{min} = 200$ kHz à $B_{max} = 20$ MHz. Nous supposons également $x(t)$ bruité par un bruit blanc gaussien et définissons le SNR (Signal to Noise Ratio) comme étant le rapport entre la puissance du signal $x(t)$ par rapport à la puissance du bruit. Toutes nos courbes ont été obtenues après avoir moyenné 10^4 réalisations.

Pour commencer nous étudierons les contraintes liées à l'utilisation de la méthode de Bartlett comme technique d'analyse spectrale dans notre bloc de détection. Puis, nous allons nous intéresser principalement à la probabilité de bonne détection (P_{bd}) pour évaluer l'influence des paramètres MC $\alpha = p/L$, L, β ainsi que du bruit (SNR) sur les performances de notre bloc de détection de spectre. Nous rappelons que p est le nombre d'échantillons à prélever dans une séquence d'échantillons uniformes consécutifs de taille L,dans ce le cadre de l'échantillonnage MC. Par la suite, nous expliquerons comment choisir le seuil de détection (η) de manière à minimiser P_{fa}. Nous rappelons que $\eta = DSP_{max} - \beta$ (voir chapitre 3, sous-section 3.15). Pour finir, nous montrerons l'influence de la probabilité de fausse alarme sur la fréquence moyenne d'échantillonnage (F_{moy}).

4.2.1 Les contraintes liées à la méthode Bartlett

Dans la sous-section (2.2.1) du chapitre 2, nous avons donné dans l'équation (2.14), l'expression de la méthode d'analyse spectrale de Bartlett. Dans cette expression le paramètre M_{bart} permet de définir la résolution fréquentielle ($rés$), c'est-à-dire la distance minimale, tolérable par la méthode, entre deux raies distinctes. Dans le cas de l'analyse spectrale de signaux multibandes, ce paramètre fixe la valeur de la largeur de bande minimale que devra contenir le signal, ce qui constitue une première contrainte liée à la méthode de Bartlett. La seconde contrainte, non mois négligeable, est liée à la valeur du paramètre K_{bart} de l'équation (2.14). Nous verrons par simulation que plus ce paramètre est grand meilleure est la qualité de l'analyse spectrale ce qui implique de disposer d'un grand nombre d'échantillons, augmentant ainsi la durée de analyse spectrale. Ceci aura des répercussions sur la durée (Δ_a) de la *Phase d'entraînement* du MCA, nous reviendrons plus tard sur cet aspect. Dans cette partie du document, nous allons nous focaliser sur l'influence des paramètres M_{bart} et K_{bart} sur la qualité de la détection. Nous rappelons que la résolution spectrale (le rapport entre le fréquence d'échantillonnage F_e et M_{bart}), $rés = \frac{F_e}{M_{bart}}$, doit être supérieur à B_{min}. Pour la suite, nous considérons $F_e = F_{nyq} = 600$ MHz.

Sur les figures (4.1) et (4.2), nous avons tracé pour $L = 128$, $\alpha = 0.7$ et SNR = 10dB la probabilité de bonne détection ($P_{bd}(K)$) en fonction de β.

Sur la figure 4.1, $P_{bd}(K)$ a été obtenue en prenant $K_{bart} = 16$ et en faisant varier M_{bart}. Nous constatons dans un premier temps que quelque soit le mode (*Burst* ou *AliasMin*) ou M_{bart} P_{bd} augmente lorsque β décroit jusqu'à atteindre une valeur maximale avant de décroître en même temps que β. Pour la suite nous définissons la *région des fortes probabilités* comme étant l'ensemble de valeur de β pour lesquels P_{bd} atteind sa veleur limite avant de décroître. Nous pouvons observer que la *région des fortes probabilités* s'élargit lorsque M_{bart} augmente quelque soit le mode. Néanmoins le mode *AliasMin* présente de biens meilleurs résultats que le mode *Burst*.

Pour obtenir la figure 4.2, nous avons pris $M_{bart} = 2^{16}$ et avons fait varier K_{bart}. Nous constatons clairement que P_{bd} augmente pour certaines valeurs de β lorsque K_{bart} augmente quelque soit le mode choisi. Comme sur la figure précédente le mode *AliasMin* reste meilleur par rapport au mode *Burst*.

A travers les figures 4.1 et 4.2, nous pouvons dire que pour un K_{bart} donné la réduction de la résolution spectrale permet d'augmenter les performances de notre bloc de détection.

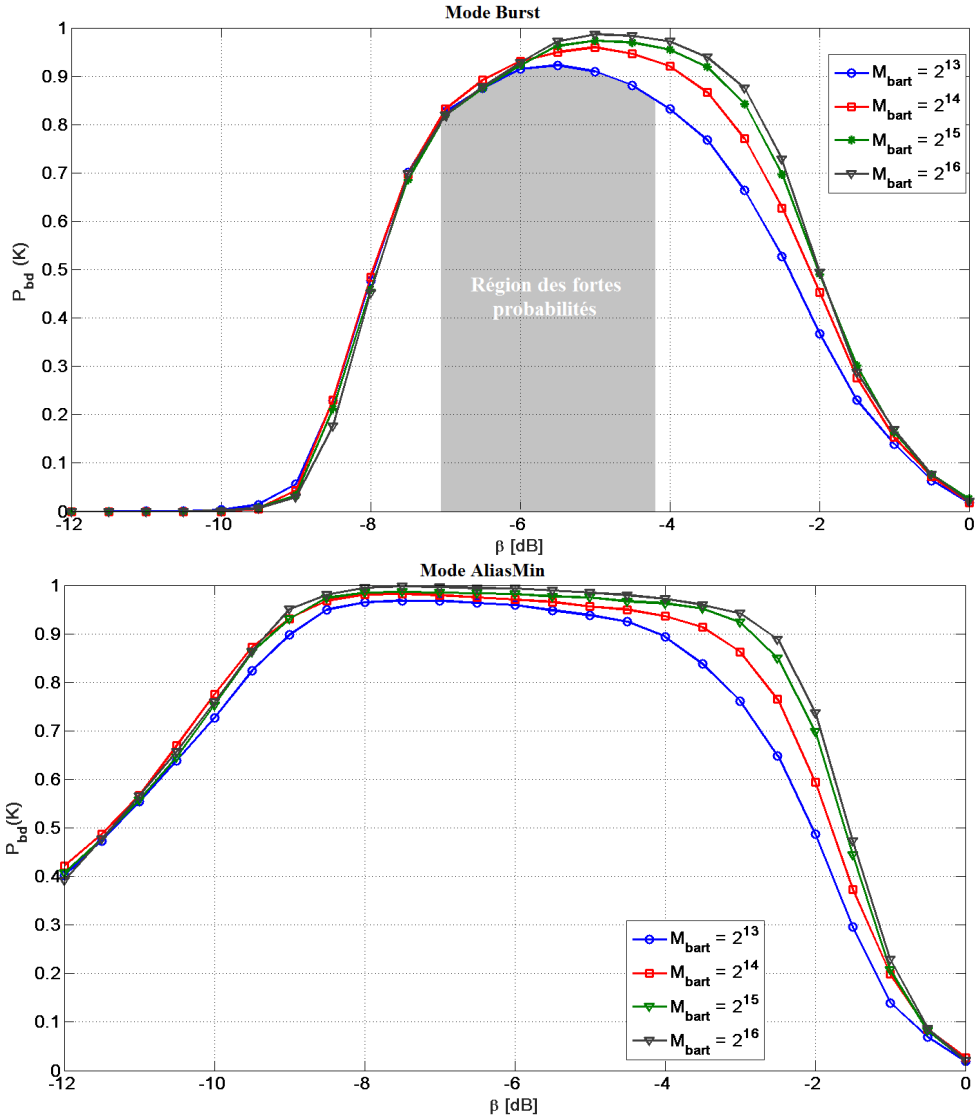


FIGURE 4.1 – Influence du paramètre M_{bart} sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin* ($L = 128$, $\alpha = 0.7$, SNR=10dB, $K_{bart} = 16$).

Ce résultat a été observé pour $L = 128$, $\alpha = 0.7$ et SNR =10dB. Dans les sous-sections suivantes, nous allons étudier l'influence de ces paramètres sur la qualité de la détection.

4.2.2 Influence du paramètre α

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence du paramètre $\alpha = p/L$ sur les performances de notre bloc de détection de spectre. Nous rappelons que α représente le pourcentage des échantillons que l'on conserve par rapport au nombre d'échantillons dont nous disposons. Il est lié, dans le cadre du MC, à la fréquence moyenne d'échantillonnage (F_{moy}) par $F_{moy} = \alpha F_{nyq}$. Il est à souligner que dans le cadre du fonctionnement de nos systèmes d'échantillonnage (le SENURI et le MCA) il faut faire la distinction entre la

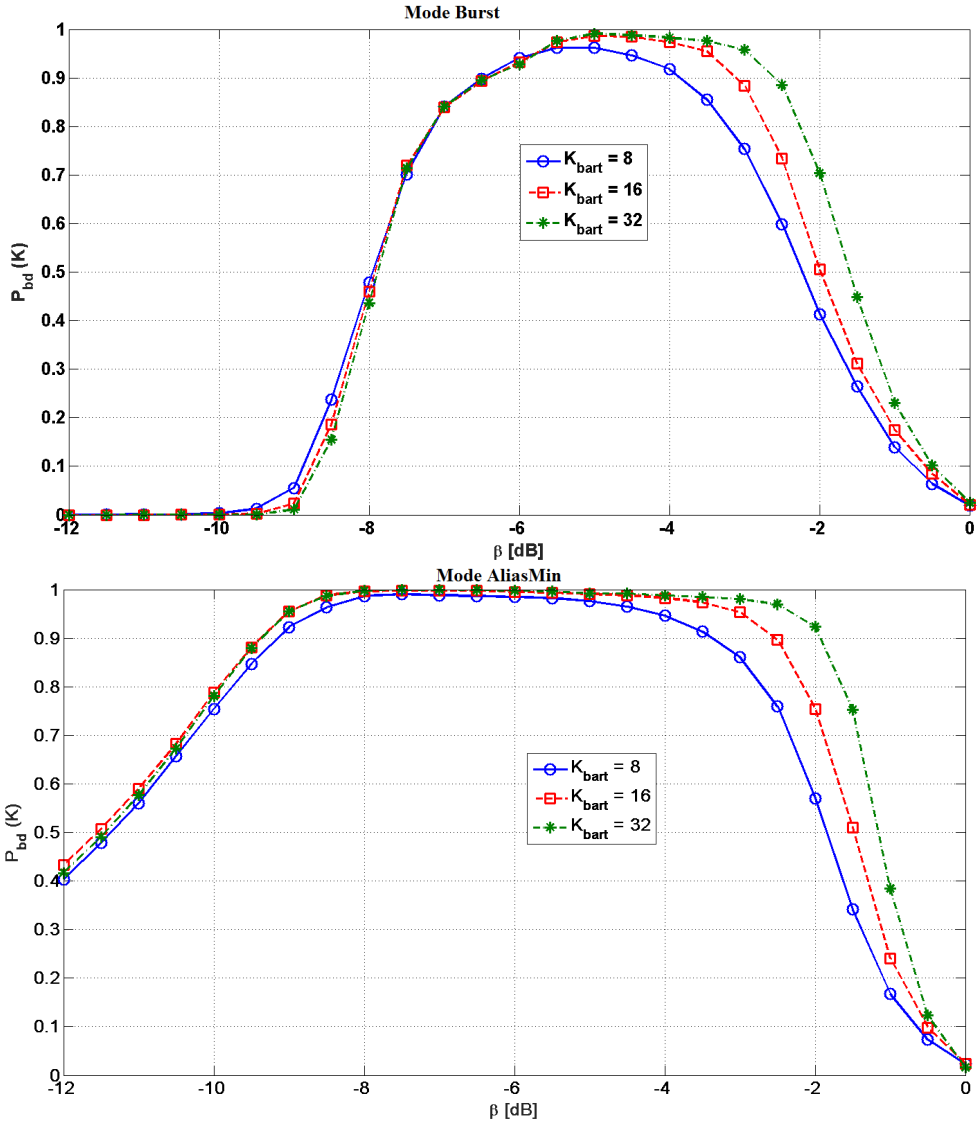


FIGURE 4.2 – Influence du paramètre K_{bart} sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin*($L = 128$, $\alpha = 0.7$, SNR=10dB, $M_{bart} = 2^{16}$).

fréquence moyenne d'échantillonnage lors des phases d'adaptation (pour le SENURI), de test et d'entraînement (pour le MCA) et la phase de reconstruction. En effet la fréquence d'échantillonnage moyenne de la phase de reconstruction est liée uniquement au taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner. Il faut garder en mémoire que ce taux n'est connu d'après avoir détecté l'ensemble des indices spectraux.

Pour nos simulations, nous avons tracé la probabilité de bonne détection des modes *Burst* et *AliasMin* pour α allant de 0.3 à 0.9. Nous avons pris pour la méthode de Bartlett $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$. Le résultat obtenu est représenté sur la figure 4.3. Sur cette figure, nous constatons que quelque soit le mode d'échantillonnage, lorsque α diminue la région dans laquelle la probabilité de bonne détection est maximale s'amincit et se déplace vers les valeurs élevées de β. Ceci est plus marqué pour le mode *Burst* que pour

le *AliasMin*. En effet pour le mode *Burst* nous observons en plus du rétrécissement, un aplatissement très rapide de la *région des fortes probabilités*.

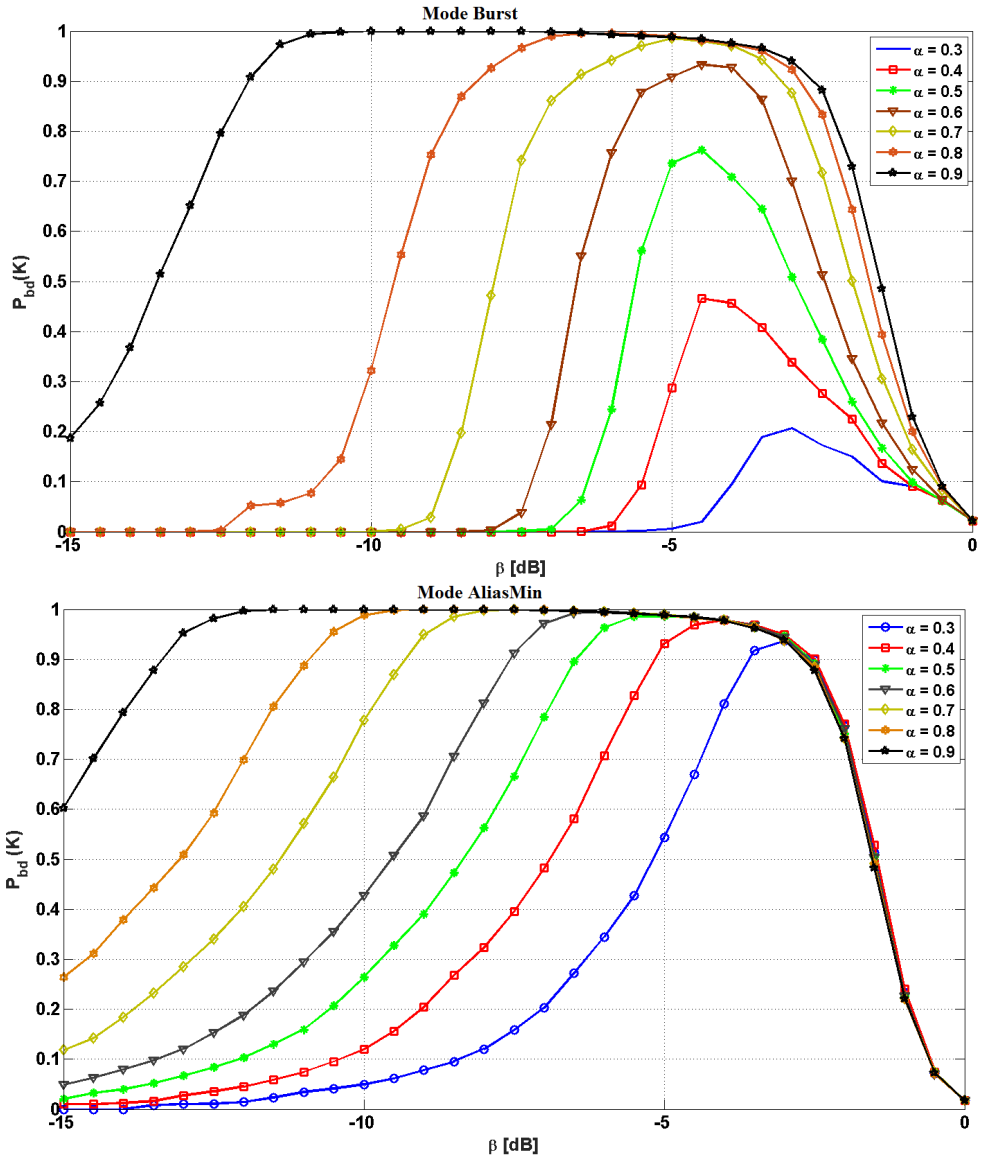


FIGURE 4.3 – Influence du paramètre α sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin*($L = 128$, SNR=10dB, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$).

Dans la sous-section suivante nous allons étudier l'influence de L sur la *région des fortes probabilités*.

4.2.3 Influence du paramètre L

Afin d'évaluer l'influence du paramètre MC L dans le processus de détection de l'ensemble des indices spectraux ($\mathcal{K}$), nous avons tracé la probabilité de bonne détection de cet ensemble en fonction de β pour différente valeurs de L en prenant $\alpha = 0.7$, SNR $= 10$ dB, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$.

Sur la figure 4.4 nous constatons que la *région des fortes probabilités* de P_{bd} s'aplatit très légèrement pour des valeurs faibles de β au fur et à mesure que L augmente. Ce résultat est observable quelque soit le mode d'échantillonnage.

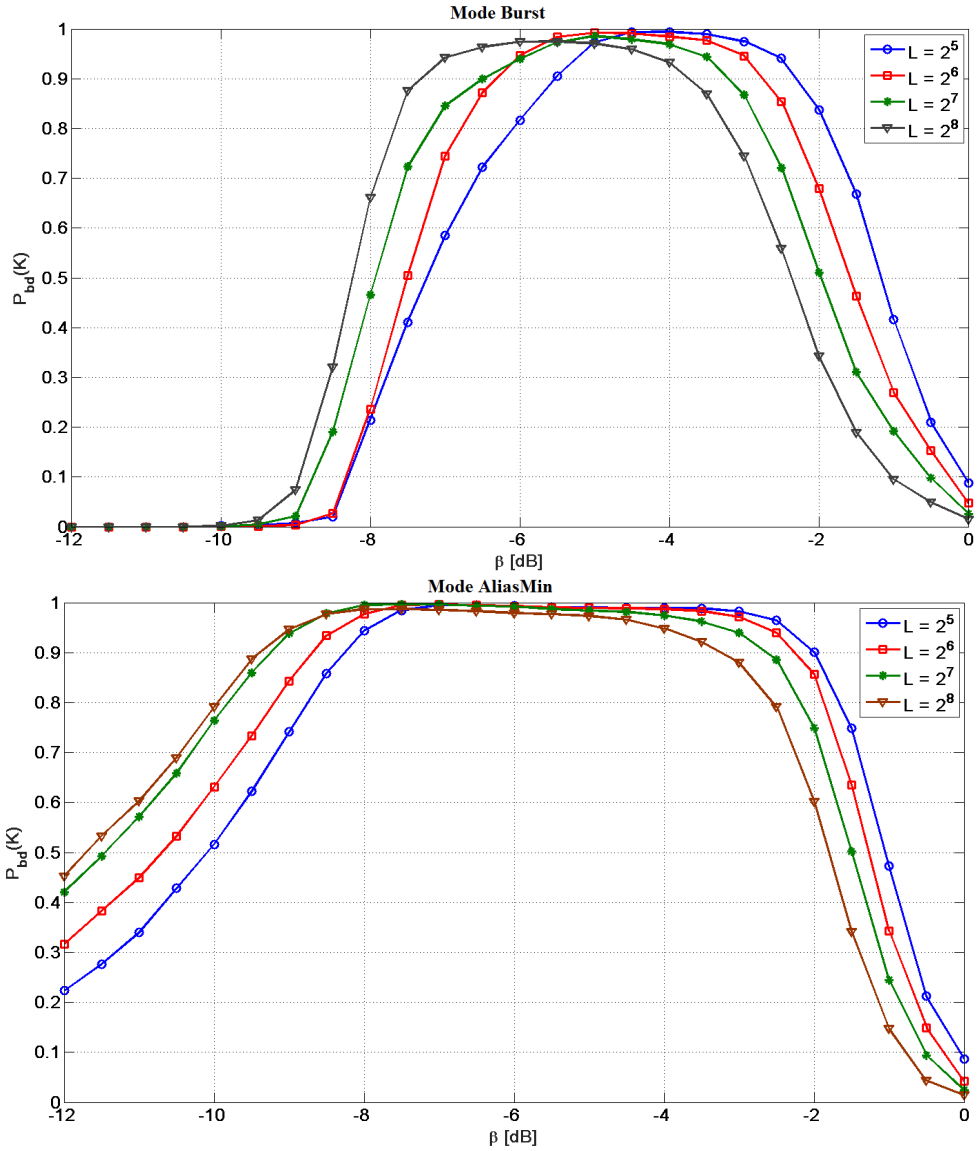


FIGURE 4.4 – Influence du paramètre L sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin* ($\alpha = 0.7$, SNR = 10 dB, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$).

Dans les sous-sections précédentes nous avions toujours pris le $SNR = 10$ dB. Dans la sous-section suivante nous allons nous intéresser à l'influence du bruit sur P_{bd}.

4.2.4 Influence du bruit (SNR)

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence du SNR sur la qualité de la détection. Pour ce faire, nous avons pris $\alpha = 0.7$, $L = 128$, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$. Nos simulations ont été effectuées pour un SNR allant de -5 dB à 20 dB. Le résultat obtenu est observable

sur la figure 4.5. Sur cette figure, nous pouvoir voir très clairement une nette amélioration de la qualité de la détection lorsque le SNR augmente. Ce résultat est indépendant de β et du mode d'échantillonnage. Toutefois, le mode *AliasMin* est meilleur que le mode *Burst*.

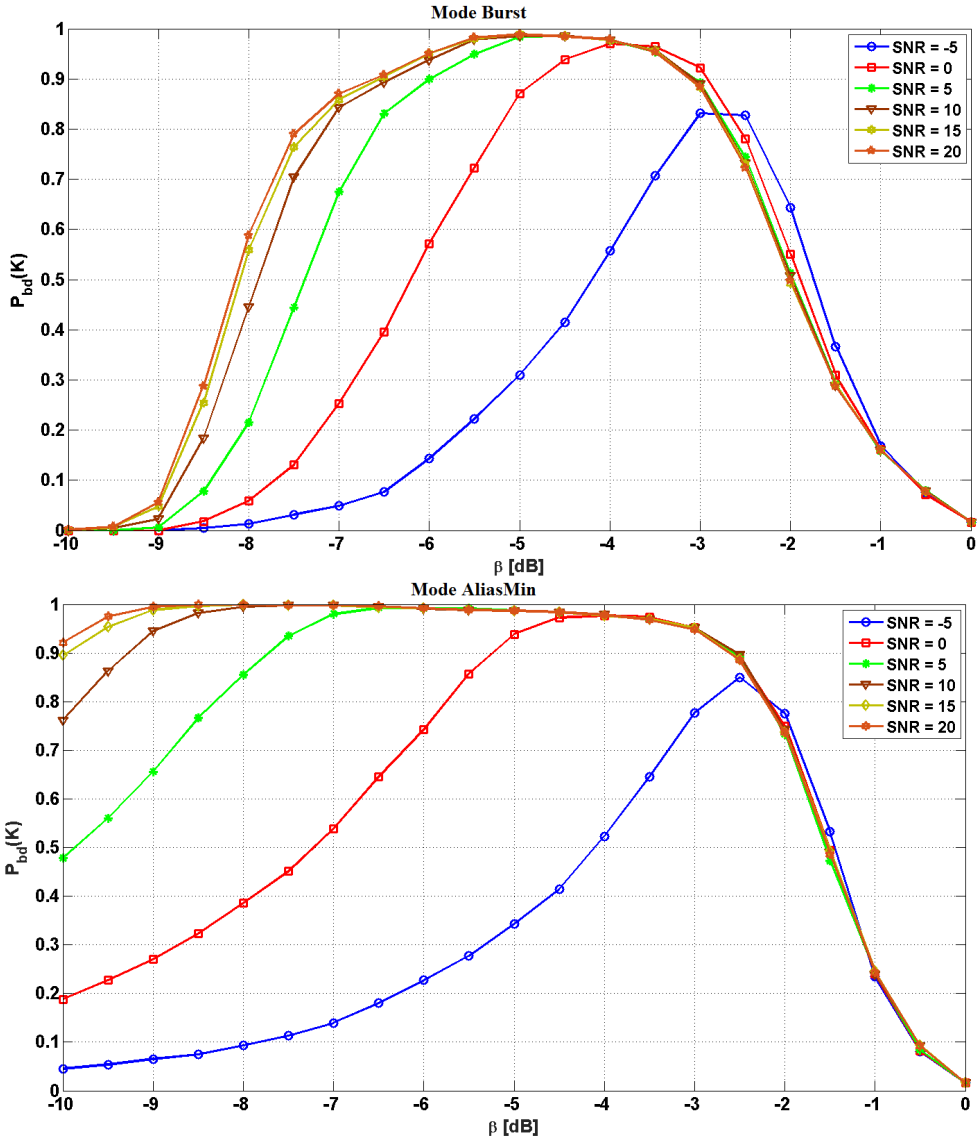


FIGURE 4.5 – Influence du SNR sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin*($\alpha = 0.7$, $L = 128$, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$)

Dans la sous-section suivante, nous allons nous intéresser au choix de β.

4.2.5 Le choix du paramètres β pour les modes *Burst* et *AliasMin*

Dans cette partie, nous nous intéressons au choix de β garantissant d'excellents performances à notre système de détection. Pour ce faire nous nous sommes fixés les contraintes

suivantes :

- une probabilité de détection (P_d) égale à 1, pour ne pas avoir de perte d'information,
- une faible probabilité de fausse alarme (P_{fa}), pour assurer une faible fréquence d'échantillonnage moyenne,
- et enfin une probabilité de bonne détection (P_{bd}) la plus élevée possible.

Sur les figures (4.6) et (4.7), nous pouvons observer, respectivement pour le mode Burst et AliasMin, la zone idéale permettant de respecter les critères précédents. Nous pouvons dire que suivant la valeur de α, le choix optimal de β se fera dans une zone dont le centre s'éloignera du centre de la *région des fortes probabilités* au fur et à mesure que α diminue. Sur la figure 4.6, nous pouvons observer qu'à partir de $\alpha = 0.5$ le choix optimal de β devient très compliqué et qu'à $\alpha = 0.3$ il est impossible. Il est à noter que ces résultats ont été obtenus en posant $L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$ et SNR = 10 dB.

Dans le tableau (4.1), nous avons récapitulé les différentes valeurs de P_{bd} et de P_{fa} suivant un choix optimal de β. Nous pouvons observer clairement que pour certaines valeurs de α la probabilité de fausse alarme n'est jamais nulle. Ce qui a pour conséquence une augmentation de la fréquence moyenne d'échantillonnage (F_{moy}) lorsque nos système sont dans la *phase de reconstruction*. En effet, comme nous le savons maintenant P_{fa} représente la probabilité de prélever plus d'échantillons qu'il n'en faut pour la reconstruction. Ce résultat sera confirmé dans la sous-section suivante. Pour la suite nous considérons uniquement les couples (α,β) suivants (0.7,-4.5), (0.5,-5), (0.3,-6) pour le mode *Burst* , et (0.7,-6), (0.5,-4.5), (0.3,-4.5) pour le mode *AliasMin*.

4.2.6 Influence de P_{fa} sur la fréquence moyenne d'échantillonnage

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence de la probabilité de fausse alarme sur la fréquence moyenne d'échantillonnage (F_{moy}) lorsque nos systèmes fonctionnent dans la *phase de reconstruction*. Pour le SENURI (voir, figure 3.3) l'interrupteur est en position 2, pour le MCA c'est quand il n'est ni dans sa *phase de test* ni dans sa *phase d'entraînement*. Nous tenons à rappeler que F_{moy} considérée ici est proportionnelle à la cardinalité de l'ensemble des indices spectraux (voir, équation 3.24, chapitre 3).

Sur les figures 4.8 et 4.9, F_{opt} représente la fréquence moyenne optimale du SENURI lorsqu'il opère en mode non aveugle, c'est-à-dire lorsqu'il connaît parfaitement le support spectre du signal d'entrée. Lorsque le SENURI fonctionne en mode aveugle, le cas $F_{moy} =$

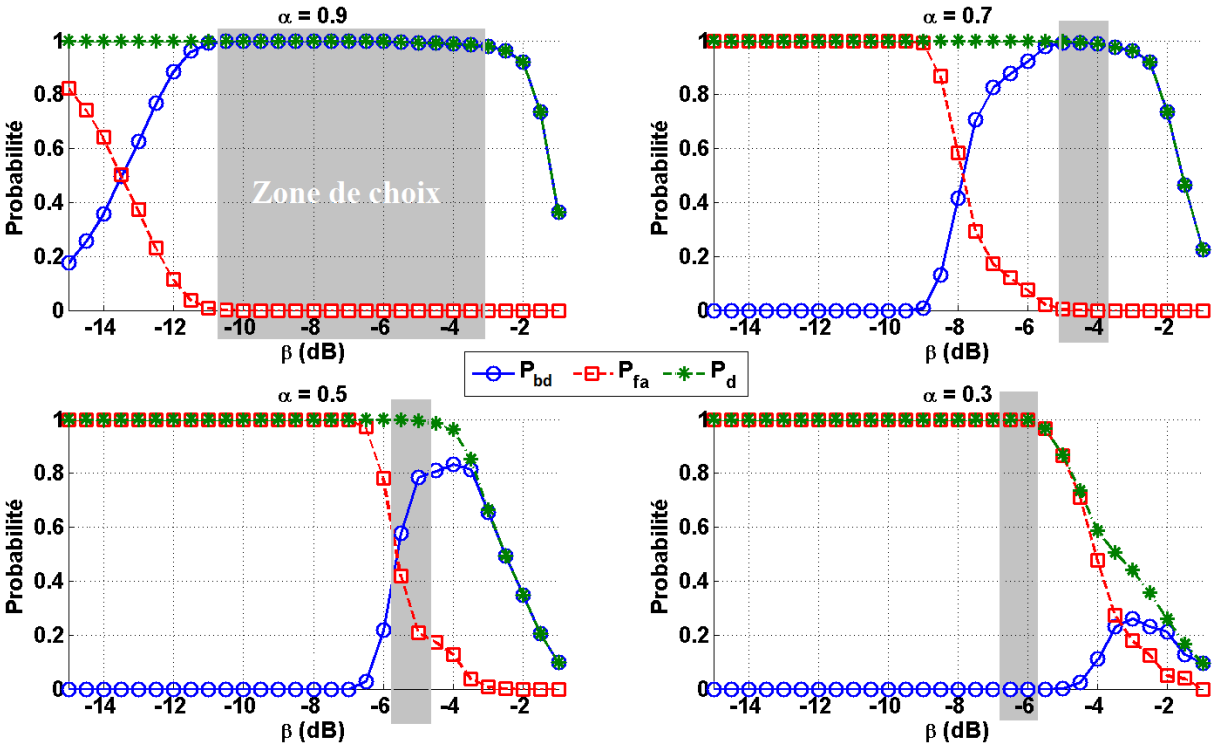


FIGURE 4.6 – Zones idéales pour le choix de β, mode *Burst* ($L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$ et SNR = 10 dB)

F_{nyq} représente le pire cas possible. Le cas idéal est obtenu lorsque $F_{moy} = F_{opt}$. Les figures 4.8 et 4.9 ont été obtenue en considérant les couples (α,β) suivants (0.7,-4.5), (0.5,-5), (0.3,-6) pour le mode *Burst* , et (0.7,-6), (0.5,-4.5), (0.3,-4.5) pour le mode *AliasMin*. Nous pouvons observer sur ces figures que la valeur de la fréquence moyenne d'échantillonnage (F_{moy}) dépend fortement du SNR et de α quelque soit le mode d'échantillonnage.

Sur la figure 4.8 pour $\alpha = 0.7$, nous constatons que F_{moy} tend très rapidement vers F_{opt} à partir d'un SNR supérieur à 0 dB alors que pour $\alpha = 0.5$ il faut attendre que le SNR soit supérieur à 5 dB et pour $\alpha = 0.3$ la fréquence optimale tend très difficilement vers F_{opt}. Cela est dû à une forte probabilité de fausse alarme pour ces valeurs de α (voir, figure 4.6).

La figure (4.9) nous montre l'évolution de la fréquence moyenne d'échantillonnage en fonction du SNR pour $\alpha = 0.7, 0.5$ et 0.3 avec le mode *AliasMin*. Nous pouvons facilement observer que les valeurs des fréquences moyennes d'échantillonnage avec $\alpha = 0.7$ et $\alpha = 0.5$ passent très rapidement de F_{nyq} à F_{opt} dès que le SNR est supérieur à 5 dB alors qu'il tend plus lentement vers F_{opt}, pour $\alpha = 0.3$

Dans la section suivant, nous allons étudier le bloc de détection des changements de spectre.

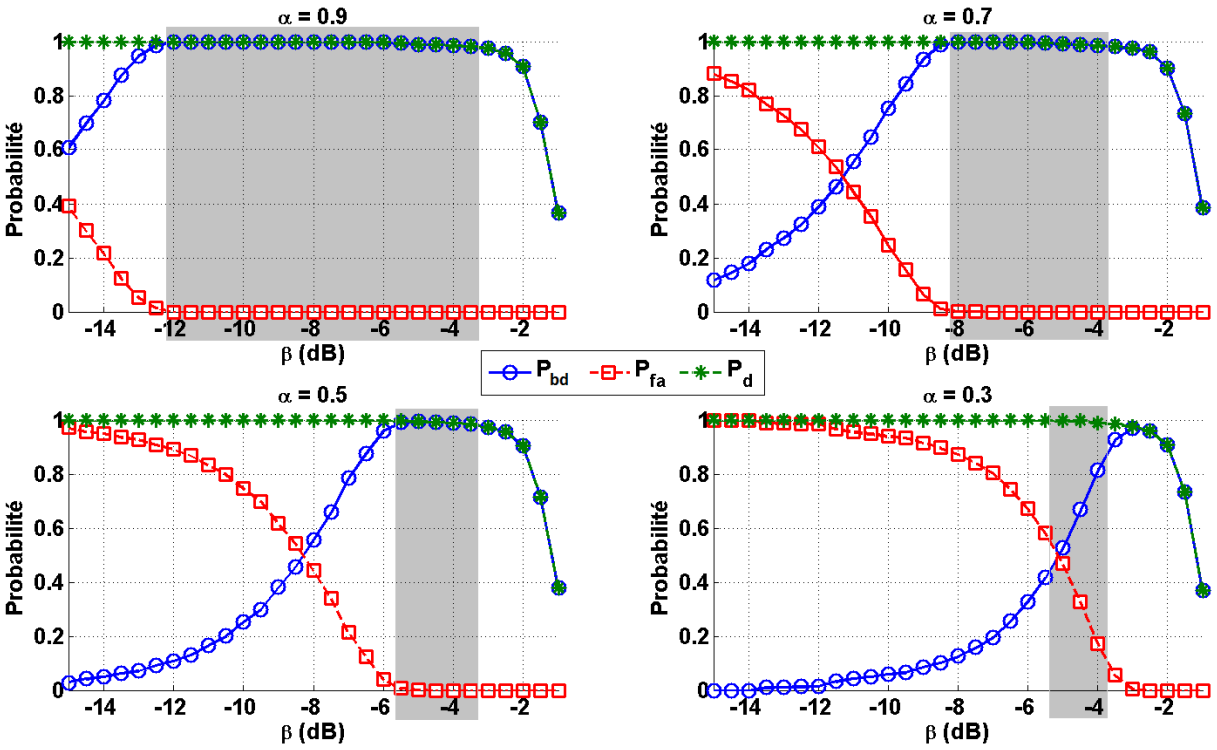


FIGURE 4.7 – Zones idéales pour le choix de β, mode $AliasMin(L = 128, K_{bart} = 32, M_{bart} = 2^{16}$ et SNR = 10 dB)

4.3 Évaluation du bloc de détection des changements de spectre

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au bloc de détection des changements de spectre présent dans le schéma de fonctionnement de notre nouveau système d'échantillonnage adaptatif, le *Multi-Coset Adaptatif*. Pour ce faire, nous avons laissé le MCA fonctionner dans sa phase d'entraînement en prenant comme paramètres $D_{as} = 3.5e-03$ et $D_{min} = 100 \times D_{as}$. Il est à rappeler que D_{as} est le temps nécessaire pour que le bloc de détection de spectre pour déterminer l'ensemble des indices spectraux. Sa valeur est directement liée à F_{nyq} ainsi qu'à celles des paramètres K_{bart} et M_{Bart} de la méthode de Bartlett. Ici dans nos simulations, nous avons choisi $F_{nyq} = 600 \times 10^6$, $K_{Bart} = 32$ et $M_{bart} = 2^{16}$.

Le signal d'entrée que nous avons considéré est le même que pour la sous-section 4.2, à savoir un signal multibande constitué de $N \in \{1, 2, ..., 6\}$ canaux, variable, de largeurs de bandes différentes (allant de 200 kHz à 20 MHz) variables dans le temps. Les fréquences porteuses sont aussi variables. En d'autres termes nous avons simulé un support spectral qui évolue de façon totalement aléatoire dans le temps. Pour simplifier, nous avons supposé

α		*Burst*	*AliasMin*
0.9	β	[-10.5, -3.5]	[-12, -3.5]
	P_{fa}	0	0
	P_{bd}	1	1
0.7	β	[-5,-4]	[-8,-4]
	P_{fa}	0	0
	P_{bd}	1	1
0.5	β	[-5.5, -5]	[-5.5, -3.5]
	P_{fa}	[0.2, 0.5]	0
	P_{bd}	[0.5,0.8]	1
0.3	β	[-5.5, -6.5]	[-5.5, -3.5]
	P_{fa}	1	[0.1, 0.5]
	P_{bd}	0	[0.5,0.9]

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif pour le choix optimal de β ($L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$ et SNR = 10 dB)

que la durée minimale entre deux instants de changement du support spectral est égale à 0.4 seconde et que la durée maximale est égale à 0.8 seconde.

4.3.1 Estimation de la période de changement de spectre (T_{cs})

La figure (4.10) représente l'évolution dans le temps de l'estimation de la durée minimale entre deux instants de changement de spectre, que nous avons appelé (T_{cs}). Sur cette figure, la T_{cs} estimée a été obtenu suivant l'algorithme décrit dans la sous-section-3.3.2 du chapitre 3. Pour obtenir cette courbe nous avons calculé T_{cs} après 10 changements de changements de spectre successifs.

Sur la figure 4.11, nous avons tracé l'évolution de la durée de la *phase d'entraînement* (Δ_a, voir chapitre 3, sous-section-3.3.2) lorsque le nombre maximal de changements de spectre successifs est fixé à 10. Sur cette courbe nous pouvons observer que Δ_a varie autour de 5.4 secondes.

Il est à noter qu'à la fin de la *phase d'entraînement*, la *boucle d'adaptation* du MCA (voir figure 3.18) basculera dans la *phase de test*. Les résultats décrits ici ont été obtenus pour $L = 128$, $\alpha = 0.7$, $M_{bart} = 2^{16}$, $K_{bart} = 32$, $\beta = -7$ dB avec le mode *AliasMin*.

Dans la section suivant nous allons évaluer les performances du bloc de reconstruction.

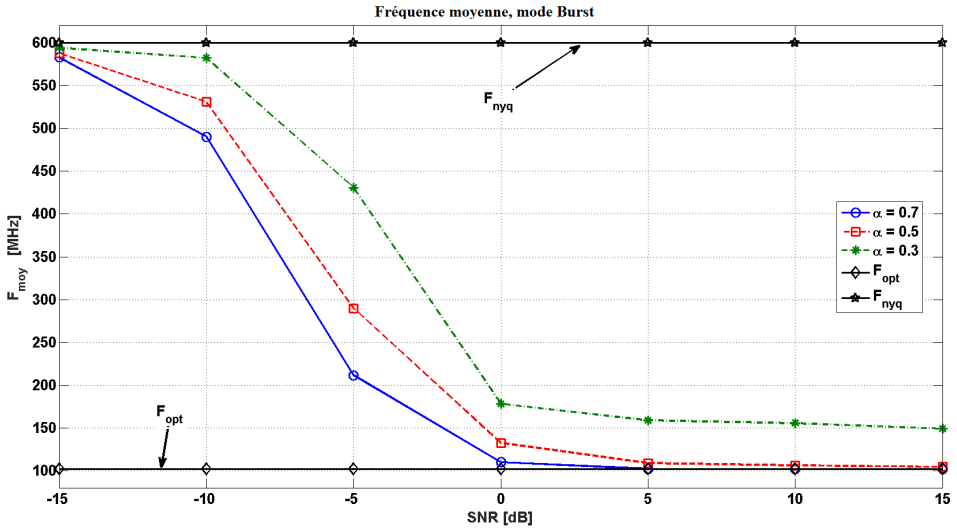


FIGURE 4.8 – Évolution de F_{moy} en fonction du SNR pour différentes valeurs de α, (mode Burst, $L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$)

4.4 Évaluation du bloc de Reconstruction

4.4.1 Influence du bruit

Dans le chapitre 3, nous avions défini le CNR (Carrier to Noise Ratio) comme étant le rapport entre la puissance du signal utile et celle du bruit à l'extérieur des cellules actives. Nous avions également défini le SNR_K comme étant le rapport entre la puissance du signal utile et celle du bruit à l'intérieur des cellules actives. Dans cette partie du document, nous allons étudier les performances du bloc de reconstruction de nos systèmes en terme de RMSE.

La figure 4.12 a été obtenue est utilisant l'algorithme de reconstruction fréquentiel (voir chapitre 3, figure 3.10). Sur cette figure, nous pouvons observer que la RMSE en dB décroit lorsque le SNR_K augmente quelque soit le CNR avant de tendre très rapidement vers une limite qui dépend du CNR. Lorsqu'il n'y a pas de bruit à l'extérieur des cellules actives (CNR=100dB) le RMSE tend vers la limite imposée par la méthode de reconstruction. Ce résultat concorde bien avec celui de l'équation 3.39 du chapitre 3.

Il est à noter que pour la méthode de reconstruction fréquentielle, nous avons pris $L = 128$ et $M = 512$ (voir chapitre 3, sous-section-3.2.6.3). Nous avons conservé ce schéma de reconstruction pour notre système d'échantillonnage MCA, et les résultats obtenus lors des changements de spectre sont décrits dans la sous-section suivante.

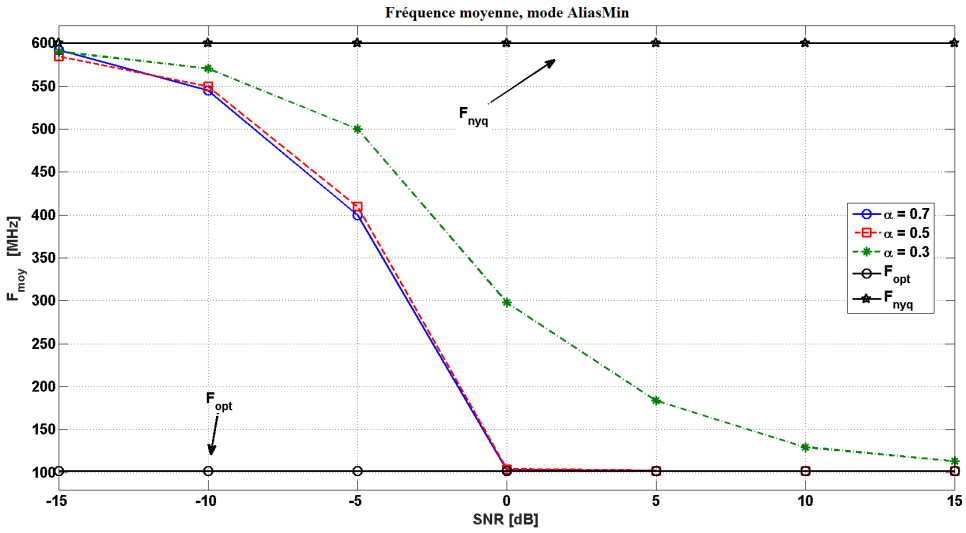


FIGURE 4.9 – Évolution de F_{moy} en fonction du SNR pour différentes valeurs de α (mode AliasMin, $L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$)

4.4.2 Variation de l'erreur quadratique moyenne dans le temps

Sur la figure 4.13 nous pouvons observer l'évolution du RMSE lors du fonctionnement de notre nouveau système d'échantillonnage, le MCA. Nous pouvons observer que cette erreur est maximale lors des changements de spectre. Cela est dû au fait, qu'aux instants de changement de spectre, le système recalcule ses paramètres et la reconstruction du signal est donc impossible.

La figure 4.13, montre que notre système, le MCA, est capable de retrouver le signal utile avec un minimum d'erreur quadratique même si son support spectral venait à changer. Ceci montre très clairement que notre système est un dispositif capable de d'adapter en fonction des paramètres extérieurs (liés ici au signal). On le qualifiera donc de *radio intelligent*. Dans la section suivante nous allons comparer notre système avec le Multi-Coset Classique.

4.5 Comparaison du MC classique avec nos systèmes

Dans cette partie, nous allons comparer les systèmes proposés dans cette thèse avec le Multi-Coset classique. Pour ce faire, nous considérons que tous les systèmes connaissent exactement les instants de changement de spectre. Nous ne considérons pas les transitions entre deux changements de spectre. Nous rappelons que dans ces conditions, le résultat obtenu pour le SENURI est le même que pour le MCA. Tous les deux sont supposés fonctionner dans la phase de reconstruction. Pour simplifier, nous avons considéré le MC

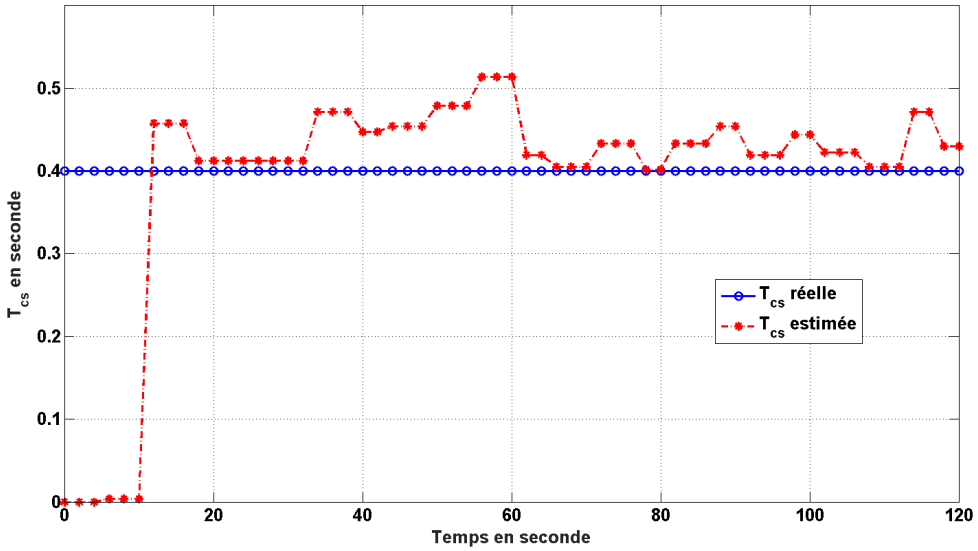


FIGURE 4.10 – Estimation de la période des changement de spectre (T_{cs}), $L = 128$, $\alpha = 0.7$, $M_{bart} = 2^{16}$, $K_{bart} = 32$, $\beta = -7$dB et mode *AliasMin*

non aveugle, c'est à dire qu'il connaît exactement le support spectral du signal d'entrée. Nous supposons aussi que la bande maximale (B_{max}) lors de nos simulations doit être inférieure à $\frac{F_{nyq}}{L}$, condition indispensable pour un bon fonctionnement du MC classique, voir sous-section 1.4.2, chapitre 1.

Pour nos simulations, nous avons pris $L = 128$ et nous considérons un signal multibande $x(t)$, constitué de $N \in \{1, 2, ..., 8\}$ bandes variables dans le temps. Les fréquences porteuses sont variables dans l'intervalle [0, 300] MHz, ainsi B_{max} vaut environ 4.6875 MHz. L'architecture du MC classique sera conçue de manière à avoir une reconstruction optimale jusqu'à $N_{max} = 6$, au-delà la reconstruction ne sera plus possible. Avec, avec toutes ces informations le nombre branches du MC classique vaut

$$p = \frac{4 \times N_{max} \times B_{max} \times L}{F_{nyq}} = 24, \tag{4.1}$$

(voir chapitre 1, sous-section 1.4.2.3). La fréquence moyenne d'échantillonnage du MC classique est alors $F_{moy} = 112.5$ MHz, quelque soit le signal d'entrée, ce qui constitue une première limitation du MC Classique. En effet le taux d'occupation spectral du signal d'entrée étant évolutif dans le temps, le théorème de Landau (voir chapitre 1, sous-section 1.3.3.5) ne peut pas être respecté. La seconde limitation du MC classique est due au choix du motif d'échantillonnage $\mathcal{C}$. En effet pour p fixé, l'architecture du MC classique impose de ne choisir $\mathcal{C}$ qu'une seule fois, or dans notre cas le taux d'occupation spectral est variable ce qui implique un changement de l'ensemble des indices spectraux $\mathcal{K}$. Ainsi, le nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})(f)$ peut être très grand impliquant alors

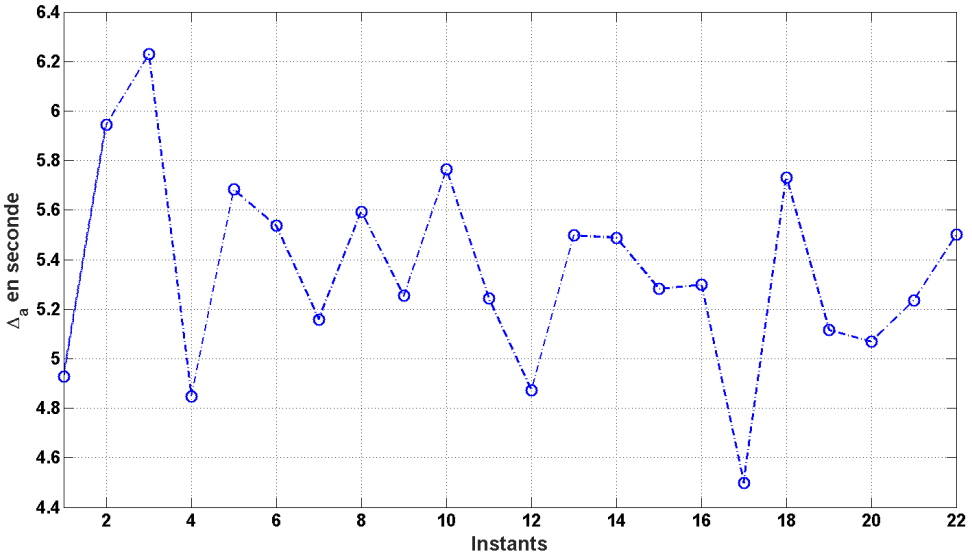


FIGURE 4.11 – Évolution de la durée de la *phase d'entraînement* du MCA lorsque le nombre de changement de spectre successif est fixé à 10, $L = 128$, $\alpha = 0.7$, $M_{bart} = 2^{16}$, $K_{bart} = 32$, $\beta = -7$ dB et mode *AliasMin*

une reconstruction sous optimale.

Les résultats donnés dans les figures 4.14 et 4.15, ont été obtenus dans le cas où le nombre de bande N change de $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8$. Pour simplifier nous supposons que le changement du nombre de bande s'effectue après deux instants de basculement, c'est-dire aux instants 1 et 2, $N = 1$ aux instants 3 et 4 $N = 3$ ainsi de suite. Les variations de N dans le temps sont indiquées en haut des figures 4.14 et 4.15.

A l'initialisation, lorsque l'instant de changement de N est égal à 1, l'échantillonnage commence avec $N = 1$. Suivant les caractéristiques spectrales du signal, le MC classique et le SENURI commence à fonctionner respectivement à $F^{MC}_{moy,\ non\ aveugle} = 112.5$ Mhz , $F^{SENURI}_{moy,\ non\ aveugle} \simeq 15.57$ MHz et $F^{SENURI}_{moy,\ aveugle,\ \alpha=0.7} \simeq 15.57$ MHz. Il est à noter que $F^{MC}_{moy,\ non\ aveugle}$, $F^{SENURI}_{moy,\ non\ aveugle}$ et $F^{SENURI}_{moy,\ aveugle,\ \alpha=0.7}$ représentent, respectivement, les fréquences moyennes d'échantillonnage pour le MC classique non aveugle, le SENURI non aveugle et le SENURI aveugle avec $\alpha = 0.7$. Lorsque N change de 1→3 à l'instant 3, notre système adapte convenablement sa fréquence d'échantillonnage en ré-calculant l'ensemble des indices spectraux $\mathcal{K}$ du signal grâce à son bloc de *Détection de bandes libres avec des échantillons non uniformes* dans sa *phase d'adaptation*. Comme le montre la figure 4.14, lorsque $N = 3$ la nouvelle fréquence d'échantillonnage de notre système passe à $F^{SENURI}_{moy,\ aveugle,\ \alpha=0.7} \simeq 46.47$ MHz, valeur identique à $F^{SENURI}_{moy,\ non\ aveugle}$. Cette tendance s'observe à chaque changement de N. Lorsque N augmente la fréquence moyenne d'échantillonnage augmente aussi et diminue lorsque N diminue. En ce qui concerne la

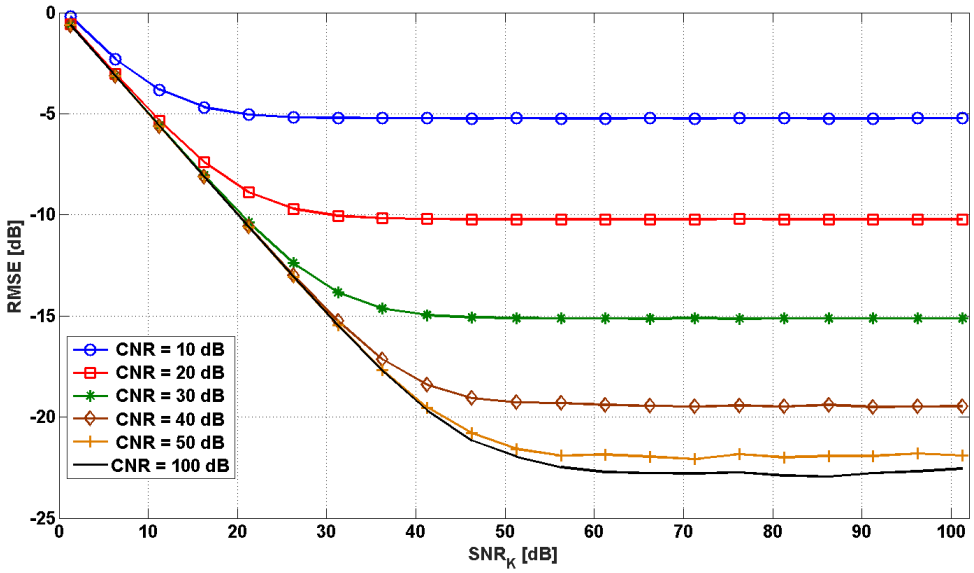


FIGURE 4.12 – Variation du RMSE en fonction des rapports signal à bruits à l'intérieur (SNR_K) et à l'extérieur (CNR) des cellules actives, schéma de reconstruction fréquentiel (L=128, M=512).

fréquence d'échantillonnage du MC classique, elle restera fixe quelque soit la valeur de N. Cela est dû au faite que ce système ne possède pas de mécanisme pour adapter sa fréquence d'échantillonnage.

Sur la figure 4.15, nous avons tracé la variation du RMSE, du MC et du SENURI, en fonctionne des changements de N. Une analyse attentive de cette figure, nous permet de dire que le $RMSE^{MC}_{moy,\ non\ aveugle}$ est nettement meilleur que le $RMSE^{SENURI}_{moy,\ non\ aveugle}$ et $RMSE^{SENURI}_{moy,\ aveugle,\ \alpha=0.7}$ lorsque N est inférieur ou égal à 4. Cela est dû au fait que le MC classique utilise plus d'échantillons que le SENURI.

La variation la plus importante du RMSE est observable lorsque N est supérieur à 6. Dans ce cas le RMSE du SENURI est nettement meilleur que celui du MC classique. Car le MC classique est incapable d'effectuer une reconstruction optimale à cause de son architecture. Cela montre clairement que notre système grâce à sa capacité d'adaptation est capable d'échantillonner un signal à bande variable et de restituer l'information utile sans perte et sans limitation en terme de nombre de bandes contenues dans le signal d'entrée.

4.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les principales contraintes liées à l'utilisation de la méthode d'analyse spectrale de Bartlett puis nous avons montré comment choisir les

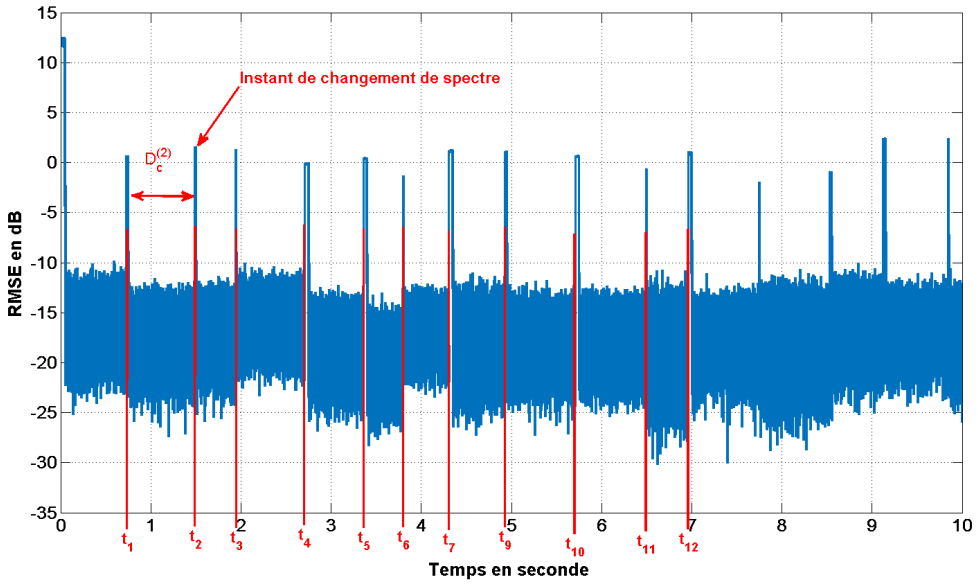


FIGURE 4.13 – Évolution de l'erreur quadratique (RMSE) lors du fonction de notre système d'échantillonnage adaptatif, le MCA.

paramètres de cette technique d'analyse spectrale afin d'assurer une forte probabilité de bonne détection (P_{bd}). Nous avons montré par simulations l'influence de la réduction du nombre d'échantillons à travers le paramètres α et L ainsi que du bruit sur P_{bd}. Afin de garantir de meilleures performances à notre nouveau bloc de détection de spectre, nous avons présenté comment bien choisir le seuil de détection (η), à travers le choix du paramètre β. En choisissant β nous fixons la valeur de la probabilité de fausse alarme (P_{fa}), dont la valeur dépend du rapport signal à bruit. Or P_{fa} représente aussi la probabilité de dire qu'une cellule non active l'est. Ceci fait que cette probabilité est liée à la fréquence d'échantillonnage moyenne (F_{moy}) de nos système d'échantillonnage lorsqu'il fonctionne dans leurs phases de reconstruction. Ceci nous a alors amené à étudier l'influence de P_{fa} sur F_{moy}.

Nous avons aussi montré par simulation que notre nouveau système d'échantillonnage adaptatif, le MCA, est bien capable de détecter dynamiquement les instants de changement de spectre et de se reconfigurer afin qu'il n'y ait aucune perte d'information durant le processus de reconstruction. Par la suite nous avons comparé le SENURI et le MCA avec le MC classique en supposant un fonctionnement dans la phase de reconstruction avec la connaissance des instants de changement de spectre. Nous avons pu observer que nos systèmes présentent de bien meilleures performances que l'architecture du MC classique. Cela est dû au fait que nos systèmes sont plus souples et savent ajuster leurs fréquence d'échantillonnage en fonction du taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner.

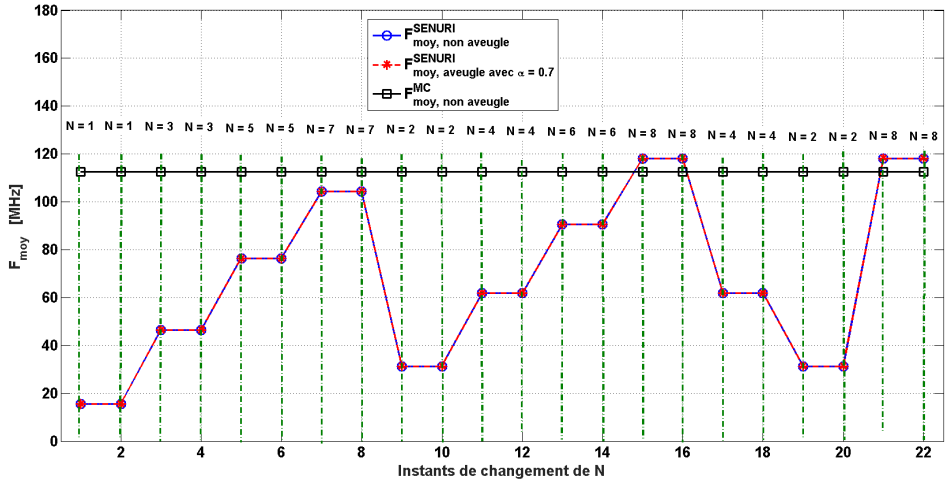


FIGURE 4.14 – Variation de la fréquence moyenne d'échantillonnage lors du changement du nombre de bande (N)

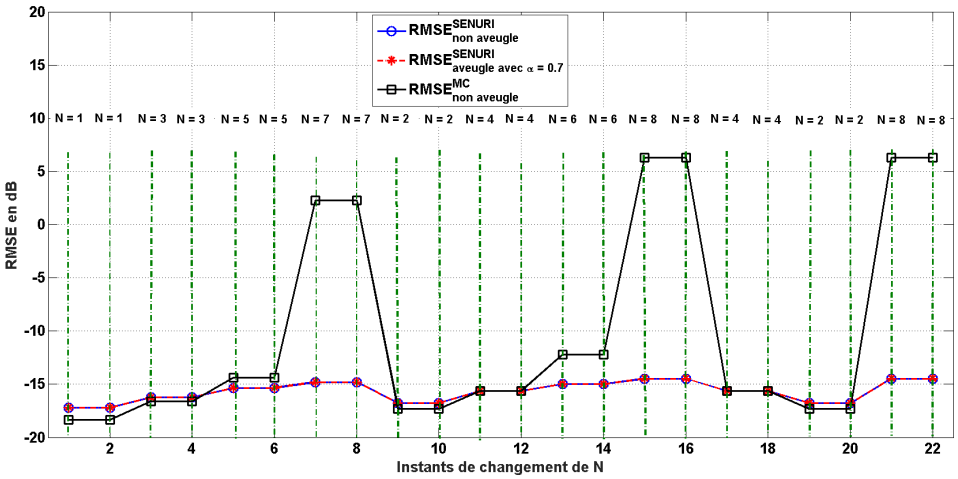


FIGURE 4.15 – Variation du RMSE lors du changement du nombre de bande (N)

Ceci fait d'eux des dispositifs radios intelligents.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons abordé le problème de la réduction de la consommation d'énergie au niveau des CANs lors de la numérisation de signal multi-bandes larges bandes et éventuellement constitué de plusieurs standards de communication numérique. Nous avons vu que, lorsque le taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner est variable, la fréquence d'échantillonnage des CANs classiques, c'est-à-dire qui fonctionnent en échantillonnant uniformément le signal d'entrée, reste toujours la même ce qui pose un problème d'efficacité énergétique, car la consommation énergétique d'un CAN est liée à sa fréquence d'échantillonnage. De plus, l'échantillonnage d'une bande large avec une résolution élevée (c'est-à-dire le nombre de bits pour coder l'information) conduit à la génération d'une imminence flot de données, difficilement stockable.

Nous avons vu, dans ce document, qu'il existait dans la littérature, principalement, deux approches pour résoudre le problème de la fréquence d'échantillonnage. La première est basée sur les techniques d'échantillonnage non-uniforme aléatoire ou plus simplement techniques d'échantillonnage aléatoire. Elles sont appelées ainsi à cause du fait qu'il est impossible de déterminer leurs ensembles des instants d'échantillonnage ($\{t_n\}$). Ces techniques, sous certaines conditions, présentent la propriété d'anti-repliement spectral. Cette propriété confère à l'échantillonnage aléatoire le pouvoir de supprimer les repliements spectraux qui apparaissent dans le cadre de l'échantillonnage uniforme aux multiples de la fréquence d'échantillonnage. Ceci fait de cette technique une excellente candidate pour l'analyse spectrale de signaux multi-bandes larges bandes, dans le contexte de la radio intelligente. La seconde approche pour résoudre le problème de la fréquence d'échantillonnage est basée sur les techniques d'échantillonnage compressé. Ces dernières peuvent être des techniques d'échantillonnage non-uniforme si la durée entre deux instants d'échantillonnage n'est pas une constante, sinon elles sont uniformes. Elles ont la propriété d'acquérir les informations contenues dans une bande en fonctionnant à une fréquence moyenne proportionnelle au taux d'occupation spectrale de la bande à échantillonner. Ceci est pos-

sible si au préalable, nous avons la connaissance de l'emplacement des bandes contenues dans le signal d'entrée.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons proposé deux systèmes d'échantillonnage non-uniforme que nous avons appelé le SENURI (pour Système d'Échantillonnage Non-uniforme en Radio Intelligente) et le MCA (pour Multi-Coset Adaptatif). Le principe de fonctionnement de nos deux systèmes est basé sur une technique d'échantillonnage non-uniforme périodique communément appelé le Multi-Coset. Cette technique permet de réduire la fréquence d'échantillonnage moyenne de la bande à échantillonner en prélevant p échantillons dans une grille d'échantillonnage uniforme, successifs, de taille L. Nous avons vu que le nombre d'échantillons à prélever dépendait du taux d'occupation spectrale de la bande considérée. Ainsi, plus le taux d'occupation spectral d'une bande est faible plus il devient possible de réduire la fréquence moyenne d'échantillonnage en utilisant la technique Multi-Coset (MC).

Les architectures de MC qui existent dans la littérature sont généralement constituées d'un empilement de CANs classique, rigide, ces architectures présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir s'adapter lorsque le taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner évolue dans le temps. Ces architectures sont conçues à partir de la connaissance du nombre de bandes maximale (N_{max}) et de la largeur de bande maximale (B_{max}) pouvant être contenues dans la bande considérée. D'où une augmentation de N_{max} et/ou de B_{max} conduit à un mauvais fonctionnement, c'est-à-dire une mauvaise récupération des informations contenues dans le signal d'entrée. Dans le cas des systèmes que nous avons proposés dans cette thèse, la connaissance de N_{max} et de B_{max} n'est pas nécessaire. En effet, les systèmes proposés dans cette thèse ont l'avantage d'avoir une architecture très souple, flexible et reconfigurable. Ceci est dû au fait qu'ils n'utilisent qu'une seule architecture de CAN non-uniforme, c'est-à-dire un CAN uniforme classique pilotable par une horloge non-uniforme afin qu'il se comporte comme un CAN non-uniforme, et qu'ils possèdent un bloc de détection de bande libre (dont le rôle est de retrouver l'emplacement exact des bandes contenues dans le signal), d'un bloc de contrôle (permettant de choisir les meilleurs instants d'échantillonnage pour le CAN non-uniforme afin de garantir l'intégrité des informations contenues dans le signal d'entrée) et enfin d'un bloc de reconstruction (pour la reconstruction des échantillons uniformes au rythme de Nyquist). Notre système MCA possède en plus des blocs précédemment décrits, un bloc de détection des changements de spectre. Ce bloc a pour rôle de tester si l'emplacement des bandes contenues dans le signal d'entrée a changé. A partir des informations acquises par les différents blocs, les

systèmes proposés recalculent leur fréquence d'échantillonnage moyenne, qui sera toujours proportionnelles au taux d'occupation spectral de la bande considérée.

Nous avons montré, par simulations, que lorsque le taux d'occupation spectral de la bande à échantillonner change, les systèmes proposés dans ce travail (le SENURI et le MCA) présentent de bien meilleures performances que le MC classique, que ce soit en matière de fréquence d'échantillonnage ou d'erreur de reconstruction (RMSE).

Il est à rappeler que dans cette thèse, nous supposons que les techniques d'échantillonnage autres qu'uniformes doivent reconstruire les échantillons au rythme uniforme, car nous supposons que les systèmes de communication actuels n'utilisent que des échantillons uniformes. Ceci constitue l'ajout d'une complexité supplémentaire et donc d'une consommation d'énergie supplémentaire. De ce fait, il est très difficile de dire si en matière de consommation énergétique les systèmes proposés ici sont moins gourmands qu'un CAN classique. Afin d'effectuer cette comparaison, nous proposons comme première perspective à cette thèse, une implémentation matérielle de nos systèmes. En supposant, bien évidemment ne pas tenir compte de la consommation d'énergie des blocs autres que ceux du CAN non-uniformes et du bloc de reconstruction et en supposant aussi que l'emplacement des bandes contenues dans le signal d'entrée varie très lentement. Cette considération est réaliste, car les autres blocs que le CAN non uniforme et le bloc de reconstruction ne fonctionnent que périodiquement et leur période de fonctionnement est liée à la vitesse de changement de l'emplacement des bandes contenues dans le signal d'entrée. Comme deuxième perspective à cette thèse, nous proposons d'effectuer une étude beaucoup plus théorique afin d'avoir les formulations mathématiques des erreurs de reconstruction (RMSE) des différents schémas de reconstruction (fréquentiel et temporel) du MC. En faisant intervenir dans les équations, par exemple le filtre d'interpolation (dans le cas du schéma de reconstruction temporel) ou la taille de la troncature (dans le cas du schéma de reconstruction fréquentiel). Enfin comme dernière perspective à cette thèse, nous pensons qu'il serait judicieux d'utiliser soit l'échantillonnage non uniforme aléatoire (avec la condition d'anti-repliement spectral), soit l'un des systèmes d'échantillonnage proposés dans la boucle de correction d'un amplificateur de signaux multibandes larges bandes et multistandards. En effet, l'utilisation de l'échantillonnage non uniforme aléatoire, comme il a été montré dans les travaux de Ben-Romdhane [36], permet de relâcher les contraintes sur le filtre d'anti-repliement spectrale. En ce qui concerne les systèmes proposés, ils permettent de réduire le nombre d'échantillons lors de la numérisation tout en préservant l'intégrité de l'information contenue dans le signal. Ceci pourrait être uti-

lisé pour réduire la complexité calculatoire dans les algorithmes de corrections des non linéarités engendrés par un amplificateur lorsqu'il fonctionne dans sa zone de saturation (cadre du projet FUI AMBRUN).

Table des figures

1 L'architecture idéale d'un recepteur radio logicielle 11

1.1 Échantillonnage-blocage d'un signal continu 20
1.2 Échantillonnage-blocage d'un signal continu 21
1.3 Fonction de transfert d'un CAN 3 bits 22
1.4 Fonction de transfert d'un CAN 3 bits à quantification linéaire centrée . . 23
1.5 Erreurs d'offset 25
1.6 Erreurs de gain 26
1.7 Non linéarités différentielles et intégrales 27
1.8 Spectre en sortie pour la mesure des paramètres dynamiques 28
1.9 Densité de probabilité $p_n(t)$ pour une distribution uniforme en mode JRS avec $T = 1$s 32
1.10 Densité de probabilité $p_n(t)$ pour une distribution uniforme en mode ARS avec $T = 1$s 33
1.11 Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution uniforme en mode JRS 34
1.12 Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution uniforme en mode ARS 34
1.13 Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution gaussienne en mode JRS, $\frac{\sigma}{T} = 0.2$ 35
1.14 Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution gaussienne en mode ARS, $\frac{\sigma}{T} = 0.2$ 35
1.15 Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution de Poisson en mode JRS, $\lambda = T$ 36
1.16 Densité de probabilité ponctuelle $p(t)$ pour une distribution de Poisson en mode ARS, $\lambda = T$ 36
1.17 Échantillonnage par traversée de niveaux 38

1.18 Le Convertisseur large bande modulé (MWC) [19] 43
1.19 Schéma descriptif du multi-coset 46
1.20 Classification des techniques d'échantillonnage rencontrées dans la littérature 50

2.1 Formes temporelles de quelques fonctions de pondération 56
2.2 Formes fréquentielles de quelques fonctions de pondération 56
2.3 Périodogramme de Bartlett 57
2.4 Périodogramme de Welch 58
2.5 W_{jrs}, distribution uniforme, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz 71
2.6 W_{jrs}, distribution gaussienne, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz 71
2.7 W_{jrs}, distribution exponentielle, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz 72
2.8 W_{ars}, distribution uniforme, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz 72
2.9 W_{ars}, distribution gaussienne, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz 73
2.10 W_{ars}, distribution exponentielle, périodogramme de Schuster moyenné sur 10 réalisations, $F_e = 500$ MHz 73
2.11 Motif d'échantillonnage en mode *Burst* 77
2.12 Spectre de la fonction de pondération en mode Burst, $L = 32$, $p = 22$ . . . 77
2.13 Spectre de la fonction de pondération en mode AliasMin, $L = 32$, $p = 22$. 79
2.14 Variation de $\{|A_n|^2\}$ en fonction de n pour le mode *Burst* 80
2.15 Variation de $\{|A_n|^2\}$ en fonction de n pour le mode *AliasMin* 80
2.16 Variation de ΔH en fonction de α pour le mode *Burst* : L prend plusieurs valeurs 81
2.17 Variation de ΔH en fonction de α pour le mode *AliasMin* 82
2.18 S_{xjrs} pour différentes distributions, $F_e = 600$ MHz, SNR = 10 dB 83
2.19 S_{xjrs} pour différentes fréquences d'échantillonnage, distribution uniforme, SNR = 10 dB 83
2.20 S_{xars} pour différentes distributions, $F_e = 600$ MHz, SNR = 10 dB 84
2.21 S_{xars} pour différentes fréquences d'échantillonnage, distribution uniforme, SNR = 10 dB 84

2.22 Influence de la variation de L sur S_{xmc} pour les modes Burst et AliasMin, $\alpha = 70\%$ et SNR = 10 dB. 85
2.23 Influence de la variation de p sur S_{xmc} pour le mode Burst, $L = 128$ et SNR = 10 dB. 86
2.24 Influence de la variation de p sur S_{xmc} pour le mode AliasMin, $L = 128$ et SNR = 10 dB. 86
2.25 Influence de la variation du SNR sur S_{xmc} pour le mode Burst, $p = 90$ et $L = 128$ 87
2.26 Influence de la variation du SNR sur S_{xmc} pour le mode AliasMin, $p = 90$ et $L = 128$ 87

3.1 Architecture proposée d'un récepteur radio logicielle restreinte avec pilotage par une horloge non uniforme 90
3.2 Principe de l'échantillonnage Multi-Coset 94
3.3 Systèmes d'échantillonnage non uniforme en Radio intelligente. 96
3.4 L séquences consécutives uniformément espacées d'échantillons prélevés à la fréquence de Nyquist et les p échantillons MC correspondants. 98
3.5 Relation entre $X(f)$ et le vecteur $\mathbf{s}(f)$, pour $L = 12$. 100
3.6 Principe de fonctionnement du bloc de détection de spectre avec des échantillons non uniformes 102
3.7 Calcul de l'ensemble des indices spectraux dans le bloc de *détection de spectre avec des échantillons non uniformes.* 103
3.8 Principe de fonctionnement du bloc OASRS 105
3.9 Le schéma de reconstruction temporel 110
3.10 Schéma de reconstruction fréquentiel 110
3.11 Spectre $X(f)$ bruité par $b_1(f)$ et $b_2(f)$ 111
3.12 Représentations temporelle et fréquentielle de $x(t)$ 112
3.13 Estimée de la DSP du signal $x(t)$ avec la méthode de Bartlett 114
3.14 Signal original $x(t)$ et sa version reconstruite avec le schéma reconstruction temporel, RMSE = -12 dB 115
3.15 Distribution du RMSE pour le schéma de reconstruction temporel. 116
3.16 Signal original $x(t)$ et sa version reconstruite avec le schéma de reconstruction fréquentiel, RMSE = -20 dB 117
3.17 Distribution du RMSE pour le schéma de reconstruction fréquentiel. 118

3.18 Le schéma de fonctionnement du Multi-Coset Adaptatif 118
3.19 Algorithme de détection de spectre lors de la *phase d'entraînement* 119
3.20 Algorithme de détection de spectre lors de la *phase de test* 120

4.1 Influence du paramètre M_{bart} sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin* ($L = 128$, $\alpha = 0.7$, SNR=10dB, $K_{bart} = 16$). . 124
4.2 Influence du paramètre K_{bart} sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin*($L = 128$, $\alpha = 0.7$, SNR=10dB, $M_{bart} = 2^{16}$). . . . 125
4.3 Influence du paramètre α sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin*($L = 128$, SNR=10dB, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$). 126
4.4 Influence du paramètre L sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin* ($\alpha = 0.7$, SNR = 10 dB, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$).127
4.5 Influence du SNR sur la probabilité de bonne détection pour les modes *Burst* et *AliasMin*($\alpha = 0.7$, $L = 128$, $K_{bart} = 16$ et $M_{bart} = 2^{16}$) 128
4.6 Zones idéales pour le choix de β, mode *Burst* ($L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$ et SNR = 10 dB) 130
4.7 Zones idéales pour le choix de β, mode *AliasMin*($L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$ et SNR = 10 dB) 131
4.8 Évolution de F_{moy} en fonction du SNR pour différentes valeurs de α, (mode Burst, $L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$) 133
4.9 Évolution de F_{moy} en fonction du SNR pour différentes valeurs de α (mode AliasMin, $L = 128$, $K_{bart} = 32$, $M_{bart} = 2^{16}$) 134
4.10 Estimation de la période des changement de spectre (T_{cs}), $L = 128$, $\alpha = 0.7$, $M_{bart} = 2^{16}$, $K_{bart} = 32$, $\beta = -7$dB et mode *AliasMin* 135
4.11 Évolution de la durée de la *phase d'entraînement* du MCA lorsque le nombre de changement de spectre successif est fixé à 10, $L = 128$, $\alpha = 0.7$, $M_{bart} = 2^{16}$, $K_{bart} = 32$, $\beta = -7$ dB et mode *AliasMin* 136
4.12 Variation du RMSE en fonction des rapports signal à bruits à l'intérieur (SNR_K) et à l'extérieur (CNR) des cellules actives, schéma de reconstruction fréquentiel (L=128, M=512). 137
4.13 Évolution de l'erreur quadratique (RMSE) lors du fonction de notre système d'échantillonnage adaptatif, le MCA. 138
4.14 Variation de la fréquence moyenne d'échantillonnage lors du changement du nombre de bande (N) 139

4.15 Variation du RMSE lors du changement du nombre de bande (N) 139

Liste des Algorithmes

1 Algorithme *AliasMin* 78

2 SFS algorithm 107

Notations

$< *, * >$ produit scalaire.

$\mathcal{M}(\mathcal{B})$ Classe des signaux continus à valeurs réelles, à énergie finie et à bande limitée dans un sous-ensemble $\mathcal{B}$.

$\overline{\mathcal{K}}$ le complémentaire de l'ensemble des indices spectraux, $\mathcal{K}$.

$\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ l'ensemble des instants d'échantillonnage.

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs

$\mathcal{F}$ le support spectral, il représente l'ensemble des intervalles sur lesquels le spectre, $X(f)$, du signal $x(t)$ est non nul.

$\mathcal{K}$ l'ensemble des indices spectraux, il représente la liste des cellules actives.

$\mathbf{E}[*]$ la fonction espérance mathématique

B_{max} la bande maximale contenue de le signal d'entrée.

B_{min} la bande minimale contenue de le signal d'entrée.

F_{max} fréquence maximale contenue dans le signal d'entrée.

F_{moy} fréquence moyenne d'échantillonnage.

F_{nyq} fréquence de Nyquist, égale à deux fois la fréquence maximale contenue dans un signal

L c'est un paramètre de l'échantillonnage MC, il représente la période de l'échantillonnage MC ou encore la taille de la séquence d'échantillon uniforme dans laquelle sera prélever le bloc MC.

N_{max} le nombre de bande maximale contenue du signal d'entrée.

p c'est un paramètre de l'échantillonnage MC, il représente soit le nombre branche de l'échantillonneur MC ou le nombre d'échantillon à prélever dans une séquence d'échantillon uniforme de taille L.

$P_{bd}(\mathcal{K})$ probabilité de bonne détection de l'ensemble des indices spectraux, $\mathcal{K}$

$P_d(\mathcal{K})$ probabilité de détection de l'ensemble des indices spectraux, $\mathcal{K}$

$P_{fa}(\mathcal{K})$ probabilité de fausse alarme sur l'ensemble des indices spectraux, $\mathcal{K}$

q la cardinalité de l'ensemble des indices spectraux, $\mathcal{K}$.

Var$[*]$ la fonction variance.

Publications de l'auteur au cours de la thèse

Revue :

— **Adaptive non-uniform sampling of sparse signals for Green Cognitive Radio**, *Samba Traore, Babar Aziz, Daniel Le Guennec, Yves Louet*, Computers and Electrical Engineering, Elsevier, 2015.

Publication dans des conférences internationales :

— **Spectrum Sensing for Cognitive Radio using Multicoset sampling**, *Babar Aziz, Samba Traore, Amor Nafkha, Daniel Le Guennec*, IEEE GLOBECOM 2014, Dec 2014, Austin, Texas, United States. 5 p., 2014.

— **Study of a Spectrum changing detector in an adaptive non uniform sampler**, *Samba Traore, Babar Aziz, Daniel Le Guennec, Yves Louët*, Workshop on Software Radio - WSR 2014, Mar 2014, Karlsruhe, Germany.

— **Reconstruction performance of blind non uniforme sampling in cognitive radio context**, *Samba Traore, Yves Louët*, URSI 2014, Aug 2014, Beijing, China. 2014.

— **Non-Uniform Spectrum Sensing for Cognitive Radio Using Sub-Nyquist sampling**, *Babar Aziz, Samba Traore, Daniel Le Guennec*, EUSIPCO 2013, Sep 2013, Marrakech, Morocco. 2013.

— **Non-Uniform sampling for spectral analysis of multi-band signals**, *Samba Traore, Babar Aziz, Daniel Le Guennec, Jacques Palicot*, ICTRS 2013, Jul 2013, Noordwijkerhout, Netherlands.

— **Dynamic Single Branch Non-Uniform Sampler**, *Samba Traore, Babar Aziz, Daniel Le Guennec*, DSP 2013, Jul 2013, Santorin, Greece. pp.NC, 2013.

Publication dans une conférence nationale :

— **Système d'Échantillonnage Non Uniforme en Radio Intelligente**, *Samba Traore, Babar Aziz, Daniel Le Guennec*, GRETSI 2013, Sep 2013, Brest, France. 2013.

Communication orale internationale :

— **Adaptive Multi-Coset Sampler**, *Samba Traore, Babar Aziz, Daniel Le Guennec*, 4th Workshop of COST Action IC0902, Oct 2013, Rome, Italy.

Glossaire

A

ARS Additive Random Sampling.

C

CAN Convertisseur Analogique Numérique.

CDMA Code Division Multiple Access.

D

DAB Digital Audio Broadcasting.

DSP Densité Spectrale de Puissance.

DVB Digital Video Broadcasting.

F

FFT Fast Fourier Transform.

G

GSM Global System for Mobile Communications.

J

JRS Jittered Random Sampling.

M

MC Multi-Coset Sampling.

N

NUS Non Uniform Sampler/Sampling.

NUSS Non Uniform Spectrum Sensing.

O

OASRS Optimal Average Sampling Rate Search.

OFDM Orthogonal Frequency Division Multiplexing.

OFDMA Orthogonal Frequency Division Multiple Access.

OMP Orthogonal Matching Pursuit.

R

RMSE Root Mean Square Error.

S

SDR Software Defined Radio.

SENURI Système d'Échantillonnage Non Uniforme pour la Radio Intelligente.

SMRS Synchronous Mutlirate Sampling.

T

TDMA Time Division Multiple Access.

Bibliographie

[1] H. S. Shapiro and R. A. Silverman, "Alias-free sampling of random noise," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 8, no. 2, pp. 225–248, 1960.

[2] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, vol. 19. American Mathematical Soc., 1934.

[3] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, "A class of nonharmonic fourier series," *Transactions of the American Mathematical Society*, pp. 341–366, 1952.

[4] H. G. Feichtinger and K. Gröchenig, "Theory and practice of irregular sampling," *Wavelets : mathematics and applications*, vol. 1994, pp. 305–363, 1994.

[5] A. Papoulis, "Generalized sampling expansion," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 24, no. 11, pp. 652–654, 1977.

[6] H. Landau, "Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions," *Acta Mathematica*, vol. 117, no. 1, pp. 37–52, 1967.

[7] P. Stoica and R. L. Moses, *Introduction to spectral analysis*, vol. 1. Prentice hall Upper Saddle River, 1997.

[8] R. B. Abdennour, *Identification et commande numérique des procédés industriels*, vol. 11. Editions Technip, 2001.

[9] N. R. Lomb, "Least-squares frequency analysis of unequally spaced data," *Astrophysics and Space Science*, vol. 39, pp. 447–462, 1976.

[10] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10–21, 1949.

[11] E. T. Whittaker, "Xviii.—on the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 35, pp. 181–194, 1915.

[12] V. Kotelnikov, "On the capacity of the 'ether'and of cables in electrical communication," in *Proc. 1st All-Union Conf. Technological Reconstruction of the Commun. Sector and Low-Current Eng*, 1933.

[13] J. Mitola III, "Software radios : Survey, critical evaluation and future directions," *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, vol. 8, no. 4, pp. 25–36, 1993.

[14] P. Kolodzy and I. Avoidance, "Spectrum policy task force," *Federal Commun. Comm., Washington, DC, Rep. ET Docket*, no. 02-135, 2002.

[15] V. Valenta, R. Marsalek, G. Baudoin, M. Villegas, M. Suarez, and F. Robert, "Survey on spectrum utilization in europe : Measurements, analyses and observations," in *Cognitive Radio Oriented Wireless Networks & Communications (CROWNCOM), 2010 Proceedings of the Fifth International Conference on*, pp. 1–5, IEEE, 2010.

[16] T. Harrold, R. Cepeda, and M. Beach, "Long-term measurements of spectrum occupancy characteristics," in *New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks (DySPAN), 2011 IEEE Symposium on*, pp. 83–89, IEEE, 2011.

[17] M. H. Islam, C. L. Koh, S. W. Oh, X. Qing, Y. Y. Lai, C. Wang, Y.-C. Liang, B. E. Toh, F. Chin, G. L. Tan, *et al.*, "Spectrum survey in singapore : Occupancy measurements and analyses," in *Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications, 2008. CrownCom 2008. 3rd International Conference on*, pp. 1–7, IEEE, 2008.

[18] J. Mitola Iii, "Cognitive radio for flexible mobile multimedia communications," in *Mobile Multimedia Communications, 1999.(MoMuC'99) 1999 IEEE International Workshop on*, pp. 3–10, IEEE, 1999.

[19] M. Mishali and Y. C. Eldar, "From theory to practice : Sub-nyquist sampling of sparse wideband analog signals," *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, vol. 4, no. 2, pp. 375–391, 2010.

[20] R. Venkataramani and Y. Bresler, "Optimal sub-nyquist nonuniform sampling and reconstruction for multiband signals," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 10, p. 2301–2313, 2001.

[21] M. Rashidi, "Non-uniform sampling and reconstruction of multi-band signals and its application in wideband spectrum sensing of cognitive radio," *arXiv preprint arXiv :1010.2158*, 2010.

[22] M. Mishali, Y. Eldar, and J. Tropp, "Efficient sampling of sparse wideband analog signals," *Electrical and Electronics Engineers in Israel, 2008. IEEEI 2008. IEEE 25th Convention of*, p. 290–294, 2008.

[23] P. Feng and Y. Bresler, "Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of multiband signals," *ICASSP*, vol. 3, p. 1688–1691, 1996.

[24] Y. Lin and P. Vaidyanathan, "Periodically nonuniform sampling of bandpass signals," *Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 3, p. 340–351, 1998.

[25] C. Herley and P. W. Wong, "Minimum rate sampling and reconstruction of signals with arbitrary frequency support," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 5, pp. 1555–1564, 1999.

[26] R. Venkataramani and Y. Bresler, "Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-nyquist nonuniform sampling of multiband signals," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 6, p. 2173–2183, 2000.

[27] S. Traoré, B. Aziz, and D. Le Guennec, "Dynamic single branch non-uniform sampler," in *DSP, Santorini-Greece,Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing*, 2013.

[28] J. J. Wojtiuk, *Randomised sampling for radio design*. PhD thesis, Citeseer, 2000.

[29] I. Bilinskis, *Digital alias-free signal processing*. John Wiley & Sons, 2007.

[30] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *American Institute of Electrical Engineers, Transactions of the*, vol. 47, no. 2, pp. 617–644, 1928.

[31] D. Dallet and J. M. Da Silva, *Dynamic characterisation of analogue-to-digital converters*, vol. 860. Springer Science & Business Media, 2006.

[32] J. J. Wojtiuk, *Randomised Sampling for Radio Design*. PhD thesis, University of South Australia, 2000.

[33] Y.-R. Sun, "Generalized bandpass sampling receivers for software defined radio," 2006.

[34] E. Allier, *INTERFACE ANALOGIQUE NUMERIQUE ASYNCHRONE : UNE NOUVELLE CLASSE DE CONVERTISSEURS BASES SUR LA QUANTIFICATION DU TEMPS _*. PhD thesis, INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 2003.

[35] F. Aeschlimann, *Traitement du signal échantillonné non uniformément : algorithme et architecture*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2006.

[36] M. Ben Romdhane, *Echantillonnage non uniforme appliqué à la numérisation des signaux radio multistandard*. PhD thesis, Paris, ENST, 2009.

[37] B. I. Ahmad and A. Tarczynski, "Reliable wideband multichannel spectrum sensing using randomized sampling schemes," *Signal Processing*, vol. 90, no. 7, pp. 2232–2242, 2010.

[38] M. A. Lexa, M. E. Davies, and J. S. Thompson, "Compressive and noncompressive power spectral density estimation from periodic nonuniform samples," *arXiv preprint arXiv :1110.2722*, 2011.

[39] Z. Tian and G. B. Giannakis, "Compressed sensing for wideband cognitive radios," in *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007. IEEE International Conference on*, vol. 4, pp. IV–1357, IEEE, 2007.

[40] I. Bilinskis and A. Mikelson, *Randomized signal processing*. Prentice-Hall, Inc., 1992.

[41] K. S. J. Leow, *Reconstruction from non-uniform samples*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2010.

[42] A. Aldroubi and K. Gröchenig, "Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces," *SIAM review*, vol. 43, no. 4, pp. 585–620, 2001.

[43] M. Chabert and B. Lacaze, "Fast convergence reconstruction formulas for periodic nonuniform sampling of order 2," in *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2012 IEEE International Conference on*, pp. 3793–3796, IEEE, 2012.

[44] A. J. Jerri, "The shannon sampling theorem—its various extensions and applications : A tutorial review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, no. 11, pp. 1565–1596, 1977.

[45] N. Levinson, *Gap and density theorems*, vol. 26. American Mathematical Soc., 1940.

[46] Y. C. Eldar and A. V. Oppenheim, "Filterbank reconstruction of bandlimited signals from nonuniform and generalized samples," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 10, pp. 2864–2875, 2000.

[47] S. Kirolos, J. Laska, M. Wakin, M. Duarte, D. Baron, T. Ragheb, Y. Massoud, and R. Baraniuk, "Analog-to-information conversion via random demodulation," in *Design, Applications, Integration and Software, 2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on*, pp. 71–74, IEEE, 2006.

[48] M. E. Domınguez-Jiménez and N. González-Prelcic, "Analysis and design of multirate synchronous sampling schemes for sparse multiband signals," 2012.

[49] T. Moon, N. Tzou, X. Wang, H. Choi, and A. Chatterjee, "Low-cost high-speed pseudo-random bit sequence characterization using nonuniform periodic sampling in the presence of noise," pp. 146 –151, Apr. 2012.

[50] M. Mishali and Y. C. Eldar, "Blind multiband signal reconstruction : Compressed sensing for analog signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, pp. 993–1009, Mar. 2009.

[51] J. M. Nohrden, *Spectral estimation using nonuniform sampling*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1995.

[52] F. Marvasti, *Nonuniform sampling : theory and practice*, vol. 1. Springer Science & Business Media, 2001.

[53] P. Babu, "Spectral analysis of nonuniformly sampled data and applications," 2012.

[54] P. Babu and P. Stoica, "Spectral analysis of nonuniformly sampled data–a review," *Digital Signal Processing*, vol. 20, no. 2, pp. 359–378, 2010.

[55] C.-G. Yan, B. Cheung, C. Kelly, S. Colcombe, R. C. Craddock, A. Di Martino, Q. Li, X.-N. Zuo, F. X. Castellanos, and M. P. Milham, "A comprehensive assessment of regional variation in the impact of head micromovements on functional connectomics," *Neuroimage*, vol. 76, pp. 183–201, 2013.

[56] A. Schuster, "On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena," *Terrestrial Magnetism*, vol. 3, no. 1, pp. 13–41, 1898.

[57] M. S. Bartlett, "Periodogram analysis and continuous spectra," *Biometrika*, pp. 1–16, 1950.

[58] P. Welch, "The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms," *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, pp. 70–73, 1967.

[59] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.

[60] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function," *Geophysical Journal International*, vol. 33, no. 3, pp. 347–366, 1973.

[61] J. D. Scargle, "Studies in astronomical time series analysis II. statistical aspects of spectral analysis of unevenly sampled data," *Astrophysical Journal*, vol. 263, pp. 835–853, 1982.

[62] S. Traore, B. Aziz, and D. Le Guennec, "Système d'échantillonnage non uniforme en radio intelligente," in *GRETSI 2013*, p. nc, 2013.

[63] B. Aziz, S. Traoré, and D. Le Guennec, "Non-uniform spectrum sensing for cognitive radio using sub-nyquist sampling," in *EUSIPCO, Marrakech- Morocco, 21st European Signal Processing Conference 2013 - Signal Processing for Communications*, 2013.

[64] B. Aziz, S. Traore, A. Nafkha, and D. Le Guennec, "Spectrum sensing for cognitive radio using multicoset sampling," in *Global Communications Conference (GLOBECOM), 2014 IEEE*, pp. 816–821, IEEE, 2014.

[65] J. Palicot and al, *Radio Engineering : From Software Radio to Cognitive Radio*. John Wiley and Sons, June 2010.

[66] N. Y. Zhou, P. Restle, J. Palumbo, J. Kozhaya, H. Qian, Z. Li, C. J. Alpert, and C. Sze, "Pacman : Driving nonuniform clock grid loads for low-skew robust clock network," in *Proceedings of SLIP (System Level Interconnect Prediction) on System Level Interconnect Prediction Workshop*, pp. 1–5, ACM, 2014.

[67] M. Wakin, S. Becker, E. Nakamura, M. Grant, E. Sovero, D. Ching, J. Yoo, J. Romberg, A. Emami-Neyestanak, and E. Candes, "A nonuniform sampler for wideband spectrally-sparse environments," *Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, IEEE Journal on*, vol. 2, no. 3, pp. 516–529, 2012.

[68] C. Rebai, M. Ben-Romdhane, P. Desgreys, P. Loumeau, and A. Ghazel, "Pseudorandom signal sampler for relaxed design of multistandard radio receiver," *Microelectronics Journal*, vol. 40, no. 6, pp. 991–999, 2009.

[69] N. Michael, S. Shah, J. Das, M. Sandeep, and C. Vijaykumar, "Non uniform digitizer for alias-free sampling of wideband analog signals," in *TENCON 2007-2007 IEEE Region 10 Conference*, pp. 1–4, IEEE, 2007.

[70] D. Bellasi, L. Bettini, T. Burger, Q. Huang, C. Benkeser, and C. Studer, "A 1.9 gs/s 4-bit sub-nyquist flash adc for 3.8 ghz compressive spectrum sensing in 28 nm cmos," in *Circuits and Systems (MWSCAS), 2014 IEEE 57th International Midwest Symposium on*, pp. 101–104, IEEE, 2014.

[71] C. K. Sestok and A. Waters, "Compressive sense based reconstruction algorithm for non-uniform sampling based data converter," Oct. 1 2013. US Patent 8,547,260.

[72] D. Hand and M. S.-W. Chen, "A non-uniform sampling adc architecture with embedded alias-free asynchronous filter," in *Global Communications Conference (GLOBECOM), 2012 IEEE*, pp. 3707–3712, IEEE, 2012.

[73] Y. Artyukh, I. Bilinskis, E. Boole, A. Rybakov, and V. Vedin, "Wideband rf signal digitizing for high purity spectral analysis," in *The 2005 International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing*, pp. 20–22, 2005.

[74] S. Traore, B. Aziz, D. Le Guennec, and Y. Louet, "Adaptive non-uniform sampling of sparse signals for green cognitive radio," *Computers & Electrical Engineering*, 2015.