



**HAL**  
open science

# Etude de l'évolution temporelle de phénomènes terrestres au moyen de l'imagerie radar

Etienne Huot

► **To cite this version:**

Etienne Huot. Etude de l'évolution temporelle de phénomènes terrestres au moyen de l'imagerie radar. Modélisation et simulation. Université de Caen, 2000. Français. NNT : . tel-01301665

**HAL Id: tel-01301665**

**<https://inria.hal.science/tel-01301665>**

Submitted on 12 Apr 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE CAEN / BASSE-NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES

ÉCOLE DOCTORALE SIMEM

## THÈSE

---

*présentée par*

**Étienne Huot**

*et soutenue*

le 26 janvier 2000

*en vue de l'obtention du*

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN**

*Spécialité: traitement du signal et de l'image*

**Titre :**

---

# **ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION TEMPORELLE DE PHÉNOMÈNES TERRESTRES AU MOYEN DE L'IMAGERIE RADAR**

---

Directrice de thèse et présidente du jury : **Marinette Revenu**

### **JURY**

*Rapporteurs*

**Christine Graffigne**

**Éric Petit**

*Examineurs*

**Isaac Cohen**

**Isabelle Herlin**

**Jean-Paul Rudant**



*«De tout temps, l'homme a cherché à connaître.»*

Aristote

---

---

# Remerciements

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à :

- Marinette Revenu, ma directrice de thèse, qui a accepté de présider le jury ;
- Christine Graffigne et Eric Petit qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse ;
- Isabelle Herlin qui a fait tellement plus que m'encadrer durant cette thèse, elle m'a soutenu et poussé quand c'était nécessaire ; sans elle ce travail n'existerait pas ;
- Isaac Cohen et Hussein Yahia qui m'ont offert leur aide et leur savoir avec générosité ;
- Jean-Paul Rudant et les membres de son équipe pour leurs éclaircissements concernant les données radar ;
- Dominique Béréziat qui, non seulement m'a supporté dans le même bureau pendant quelques années, mais m'a aussi beaucoup apporté scientifiquement pendant cette thèse ;
- Jean-Paul Berroir, Sonia Bouzidi et Fabien Lahoche pour leur soutien ;
- Clarisse Alboin et Claire Leleu pour la chaleur qu'elles m'ont apportée pendant la fin de ma thèse ;
- Les membres de ma famille qui m'ont soutenu dans cette aventure.

---

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Présentation</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>Contexte d'étude</b>	<b>15</b>
1.1	Objectifs de la thèse . . . . .	15
1.2	Description des problématiques théoriques . . . . .	16
1.3	Présentation globale du document . . . . .	19
<b>2</b>	<b>L'acquisition radar</b>	<b>21</b>
2.1	Un peu d'histoire . . . . .	21
2.2	Radar à ouverture de synthèse . . . . .	23
2.2.1	Acquisition des données . . . . .	23
2.2.2	Résolutions brute . . . . .	24
2.2.3	Traitement du signal . . . . .	24
2.3	Les images radar . . . . .	28
2.3.1	Modèles de rétrodiffusion . . . . .	28
2.3.2	Les différents types d'image . . . . .	31
2.4	Les satellites radar . . . . .	33
2.4.1	Les principaux capteurs . . . . .	33
2.4.2	Les satellites ERS . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Interférométrie</b>	<b>37</b>
3.1	Définition et interprétation . . . . .	37
3.1.1	Interprétation des images de différence de phase . . . . .	39
3.1.2	Interprétation des images de cohérence . . . . .	39
3.2	Interférométrie topographique . . . . .	40
3.2.1	Conditions interférométriques . . . . .	42



3.2.2	Rectification géométrique . . . . .	43
3.2.3	Application et déroulement de phase . . . . .	43
3.3	Interférométrie différentielle . . . . .	44
3.3.1	Principes . . . . .	45
3.3.2	Contraintes temporelles . . . . .	47
3.3.3	Applications . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Présentation des données</b>	<b>49</b>
4.1	Etna . . . . .	49
4.2	Vatnajökull . . . . .	51
4.3	Naizin . . . . .	52
4.4	Clapière . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Déroulement de phase</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Méthodes de déroulement</b>	<b>65</b>
5.1	Des mesures ambiguës . . . . .	65
5.2	État de l'art . . . . .	66
5.2.1	Les méthodes locales . . . . .	67
5.2.2	Les méthodes globales . . . . .	68
5.2.3	Les méthodes mixtes . . . . .	71
5.3	Déroulement par étapes . . . . .	72
5.3.1	Initialisation . . . . .	72
5.3.2	Segmentation markovienne . . . . .	75
5.3.3	Détection et traitement des zones résiduelles . . . . .	77
5.3.4	Exemple de résultat . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Qualité du déroulement</b>	<b>83</b>
6.1	Mesure de l'erreur . . . . .	83
6.2	Interférogrammes simulés . . . . .	84
6.3	Interférogrammes réels . . . . .	88
6.3.1	Corrélation entre l'image de cohérence et l'image de résidus . . . . .	88
6.3.2	Comparaison avec un modèle numérique de terrain réel . . . . .	90
6.4	Conclusion . . . . .	90

<b>III</b>	<b>Détection de changement</b>	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>Segmentation d'image d'interférométrie différentielle</b>	<b>97</b>
7.1	Présentation du problème . . . . .	97
7.2	Méthodologie . . . . .	99
7.2.1	Modèle . . . . .	99
7.2.2	Estimation des paramètres . . . . .	101
7.3	Applications . . . . .	102
7.3.1	Hydrologie . . . . .	102
7.3.2	Glissement de terrain . . . . .	112
7.3.3	Résultats . . . . .	114
7.4	Conclusion . . . . .	121
<b>IV</b>	<b>Mise en correspondance de surfaces</b>	<b>123</b>
<b>8</b>	<b>Mise en correspondance de structures</b>	<b>125</b>
8.1	Le problème de la mise en correspondance en traitement d'image . . . . .	125
8.1.1	Définition . . . . .	125
8.1.2	Applications . . . . .	126
8.1.3	Méthodologies . . . . .	127
8.2	Méthodes de mise en correspondance . . . . .	128
8.2.1	Mise en correspondance de courbes par information de courbure . . . . .	128
8.2.2	Contours actifs . . . . .	131
8.2.3	Grande déformation . . . . .	134
8.2.4	Changement de topologie et approche isocontour . . . . .	137
<b>9</b>	<b>Mise en correspondance avec chemins géodésiques</b>	<b>143</b>
9.1	Mise en correspondance de courbes . . . . .	143
9.1.1	Notations . . . . .	144
9.1.2	Géodésiques . . . . .	144
9.1.3	Chemins géodésiques . . . . .	146
9.1.4	Équation d'évolution de courbes d'égale distance sur une surface . . . . .	147
9.1.5	Application à la mise en correspondance de courbes . . . . .	152
9.2	Mise en correspondance de surfaces . . . . .	158

9.2.1	Équation d'évolution des surfaces d'égal distance . . . . .	158
9.2.2	Équation de la projection . . . . .	167
9.2.3	Formulation implicite . . . . .	168
9.2.4	Résolution Numérique . . . . .	169
9.2.5	Mise en correspondance . . . . .	170
9.2.6	Application . . . . .	173
9.3	Conclusion . . . . .	180
<b>V Perspectives et conclusion</b>		<b>185</b>
<b>VI Annexes</b>		<b>193</b>
<b>A Modélisation markovienne appliquée à la segmentation d'image</b>		<b>195</b>
A.1	Rappel sur les champs de Markov . . . . .	195
A.1.1	Système de voisinage . . . . .	195
A.1.2	Distribution de Gibbs et champ de Markov aléatoire . . . . .	197
A.2	Les algorithmes de relaxation . . . . .	198
A.3	Application à la segmentation d'image . . . . .	199
<b>B Propagation d'une surface le long d'une hypersurface</b>		<b>201</b>
B.1	Algèbres extérieures et opérateur $*$ de Hodge . . . . .	201
B.2	Projection sur $\mathbb{R}^3$ de l'équation de propagation de surfaces dans $\mathbb{R}^4$ . . . . .	203
<b>C Caractéristiques des images d'intensité</b>		<b>209</b>
C.1	Interprétation des images d'intensité . . . . .	209
C.2	L'effet de chatoiement . . . . .	212
C.3	Atténuation de l'effet de chatoiement . . . . .	213
C.3.1	Filtrage mono-date . . . . .	214
C.3.2	Filtrage multi-temporel . . . . .	215

# Table des figures

2.1	Principe de la visée latérale. . . . .	23
2.2	Compression en impulsion. . . . .	26
2.3	Synthèse d'ouverture. . . . .	27
2.4	Migration parabolique. . . . .	28
2.5	Une cellule de résolution et le pixel correspondant. . . . .	29
2.6	Approximation du sol par des plans tangents à sa surface. . . . .	30
2.7	Approximation de la cible par des signaux périodiques. . . . .	31
2.8	Cycle complet orbital d'ERS-2, phases montantes et descendantes. . . . .	35
2.9	Effet du mode d'acquisition des images en phases ascendante et descendante. . . . .	36
3.1	Lien géométrique entre la différence de marche $\Delta R$ des signaux reçus par les deux satellites et le dénivelé $h$ . . . . .	41
3.2	Interférogramme différentiel cartographiant une dérive glacière en Antarctique. . . . .	44
4.1	Interférogramme de l'Etna. . . . .	50
4.2	Interférogramme différentiel de l'Etna. . . . .	50
4.3	Modèle théorique de déformation volcanique de Mogi. . . . .	51
4.4	Interférogramme différentiel synthétique de l'Etna. . . . .	52
4.5	Interférogramme de la région du Vatnajökull et ses deux zones d'études. . . . .	53
4.6	Produit interférométrique de la région du Vatnajökull. . . . .	54
4.7	Images d'intensité du site de Naizin et la cohérence correspondante. . . . .	55
4.8	Interférogramme différentiel du site de Naizin. . . . .	56
4.9	Chronologie d'acquisition des interférogrammes de la Clapière. . . . .	58
4.10	Image de cohérence haute résolution. . . . .	59
4.11	Région du glissement de terrain. . . . .	60

4.12	Interférogramme différentiel du glissement de terrain géoréférencé. . . . .	61
5.1	Déroulement de phase mono-dimensionnel. . . . .	66
5.2	Clique d'ordre 6 . . . . .	77
5.3	Les différentes étapes du déroulement. . . . .	79
5.4	Variation de l'énergie globale au cours des itérations du processus de déroulement de l'interférogramme de l'Etna. . . . .	80
5.5	Interférogramme de l'Etna. . . . .	81
5.6	Résultat du déroulement après une itération des deux premières étapes (à gauche) et avant le traitement des résidus (à droite). . . . .	81
5.7	Résultat final, à gauche l'image des phases déroulées et à droite sa visualisation tridimensionnelle. . . . .	82
6.1	Interférogramme simulé avec visualisation tridimensionnelle. . . . .	84
6.2	Interférogrammes simulés entachés d'un bruit gaussien additif de variances respectives $\sigma^2 = 0,01$ et $0,2$ . . . . .	85
6.3	Visualisation tridimensionnelle des images déroulées correspondantes. . . . .	85
6.4	Interférogramme simulé comportant une forte discontinuité avec visualisation tridimensionnelle . . . . .	86
6.5	Visualisation tridimensionnelle de l'image déroulée après ajout d'un bruit de variance $0,2$ . . . . .	87
6.6	Image de cohérence à gauche et à droite la même image, seuillée avec un seuil de $0,35$ afin de apparaître les zones de faible cohérence en hachuré. . . . .	88
6.7	Image de résidus après la première itération puis à la fin du processus. . . . .	89
6.8	Courbes de niveau issues du MNT à gauche et celles obtenues à partir de l'image déroulée à droite. . . . .	91
6.9	Visualisation de la différence entre les deux MNT. . . . .	92
6.10	Zone de forte erreur de déroulement: image de phase, de cohérence et d'intensité. . . . .	93
7.1	Interférogramme corrigé des franges orbitales. . . . .	103
7.2	Données utilisées pour la segmentation des effets phasimétriques . . . . .	104
7.3	Les paramètres de la région de fond $\mathcal{B}$ sont estimés sur des fenêtres. . . . .	105
7.4	Évolution de la segmentation au cours des itérations. . . . .	106

7.5	Résultats de segmentation pour les interférogrammes correspondant à différentes dates d'acquisitions . . . . .	108
7.6	Pluviométrie correspondant à la période d'acquisition. . . . .	108
7.7	Problème avec la perte de cohérence. . . . .	109
7.8	Résultat de la classification basée sur plusieurs images d'intensité. . . . .	110
7.9	Résultat de la classification basée sur les deux images d'intensité et sur l'image de cohérence. . . . .	111
7.10	Résultat de la classification basée sur les deux images d'intensité, l'image de cohérence et de phase. . . . .	113
7.11	Interférogramme différentiel d'un glissement de terrain projeté sur le MNT correspondant. . . . .	114
7.12	Histogrammes des phases de deux interférogrammes mesurées sur une zone stable. . . . .	115
7.13	Interférogramme et la cohérence correspondante. . . . .	116
7.14	Résultat de la segmentation sans utiliser l'information de cohérence. . . . .	117
7.15	Une zone stable sur deux interférogrammes différentiels . . . . .	118
7.16	Séquence d'interférogrammes recentrés. . . . .	119
7.17	Résultat de la segmentation obtenu en utilisant l'inverse de la cohérence. . . . .	120
7.18	Résultat de la segmentation projeté sur le MNT de référence. . . . .	121
8.1	Mise en correspondance entre deux images. . . . .	126
8.2	Mise en correspondance de deux carrés grâce à la courbure. . . . .	131
8.3	Mise en correspondance grâce à la courbure, d'un objet avant et après une faible déformation. . . . .	132
8.4	Mise en correspondance par contours actif. . . . .	135
8.5	Position du trait de côte en mai et novembre. . . . .	138
8.6	Mise en correspondance des deux occurrences du trait de côte. . . . .	139
8.7	Propagation d'une courbe dans la direction de sa normale . . . . .	140
8.8	Différentes évolutions possibles d'un contour dans la direction de sa normale. . . . .	141
8.9	Propagation d'un cercle. . . . .	142
9.1	Géodésiques sur une sphère. . . . .	145
9.2	Ensemble des points de $S$ à distance géodésique $t$ de $\Sigma$ . . . . .	148

9.3	Deux structures à mettre en correspondance, deux cercles changent de topologie pour fusionner une ellipse. . . . .	154
9.4	Visualisation des graphes obtenus grâce aux équations (9.8) et (9.9). . . . .	154
9.5	Chemins de mise en correspondance obtenus grâce aux graphes (9.8) et (9.9). . . . .	156
9.6	Mise en correspondance de deux courbes d'iso-élévation du volcan islandais Vatnajökull. . . . .	157
9.7	Lemme de Gauss en dimension 2. . . . .	163
9.8	Généralisation au cas où la courbe initiale est une courbe quelconque. . . . .	165
9.9	Mise en correspondance de deux sphères concentriques. . . . .	174
9.10	Mise en correspondance de deux sphères excentrées. . . . .	175
9.11	Mise en correspondance de deux sphères avec un ellipsoïde. . . . .	176
9.12	Mise en correspondance de deux sphères avec un ellipsoïde, autre visualisation. . . . .	176
9.13	Mise en correspondance d'un modèle numérique de terrain synthétique avec la même surface déformée par un modèle géophysique. . . . .	178
9.14	Chemins de mise en correspondance vus de dessus et champ de déformation visualisé comme un interférogramme. . . . .	179
9.15	Interférogramme différentiel et carte de déformation simulée par le modèle géophysique. . . . .	180
9.16	Mise en correspondance de deux occurrences de la surface de l'Etna. . . . .	181
9.17	Mise en correspondance de deux occurrences de la surface de l'Etna (vue de dessus). . . . .	182
A.1	Deux cliques d'ordre 2 et une clique d'ordre 1 pour un voisinage définissant la 4 connexité. . . . .	196
C.1	Zone de compression. . . . .	210
C.2	Zone d'inversion. . . . .	211
C.3	Zone d'ombre. . . . .	211
C.4	Influence de la rugosité. . . . .	212
C.5	Image brute, résultat du filtre médian et de celui de Crimmins. . . . .	214
C.6	Résultat des filtres de Lee, de Kuan et de Frost. . . . .	214
C.7	Résultat de deux filtrages multi-temporel, le premier basé sur une restauration bayésienne, l'autre sur un moyennage pondéré. . . . .	215

---

# Première partie

## Présentation





# Chapitre 1

## Contexte d'étude

Après avoir introduit les objectifs de ce travail de thèse à savoir l'étude de l'évolution de phénomènes terrestres au moyen de l'imagerie radar, ce chapitre décrit le cadre dans lequel il a été réalisé. Les problèmes théoriques sont présentés succinctement, ainsi que les différents types d'applications géophysiques qui en sont faites. Afin de faciliter la lecture globale du manuscrit, il se termine par une description des différentes parties de ce document.

### 1.1 Objectifs de la thèse

La motivation principale de ce travail de thèse est de proposer des méthodologies issues du traitement pour le suivi de l'évolution de phénomènes complexes. Ces méthodologies s'inscrivent dans un contexte spécifique, qui est celui des données radar.

La nature des données, dont nous avons disposé, a été volontairement restreinte : seule l'information image est utilisée pour le traitement, indépendamment de toute carte ou de toute autre source d'information satellitaire. Cette restriction, ancrant le travail dans un cadre méthodologique purement "image", permet de mettre en valeur les améliorations obtenues par les outils de traitement mis en œuvres.

Depuis une vingtaine d'années, les outils de traitement d'image ont beaucoup évolué, et les méthodes de restauration, segmentation, classification, suivi, sont performantes dans le contexte de l'imagerie optique traditionnelle. Les images radar font aujourd'hui l'objet d'un grand nombre de recherches, motivées par la difficulté d'exploitation de l'information délivrée. L'information d'amplitude est rendue moins lisible par le phénomène de chatoiement présent sur ces images. La technique interférométrique, apparue récemment, est fondée sur l'utilisation de l'information de phase du signal ; elle est entachée d'un repliement de  $2\pi$  perturbant son utilisation directe, mais procure une connaissance précise de la topographie et de son évolution temporelle.

Les capteurs radars, contrairement aux imageurs optiques classiques, fournissent des données quelles que soient les conditions d'ensoleillement. D'autre part, ils ont la propriété d'être très sensibles aux variations survenues entre deux acquisitions sur les régions observées. Sur ces constatations est née, en 1996, l'action "Traitement d'images ROS pour la cartographie, la géologie et la biosphère continentale" du groupe de recherche ISIS, financée par le Programme National de Télédétection Spatiale (PNTS). En particulier, l'un des groupes de travail lié aux spécificités du multi-temporel en imagerie radar, avait pour objectif de dégager les potentialités de l'analyse d'images radar pour l'étude de la variation temporelle de phénomènes environnementaux. Depuis 1998, cette action a été reconduite et un nouveau groupe de travail s'intéressant aux techniques fondamentales pour le déroulement de phase à vu le jour. Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse ont les mêmes objectifs et se sont naturellement inscrits dans ces groupes de travail. En outre, de part l'utilisation systématique des images de phase, une collaboration académique avec le groupe de recherche InSAR (Interférométrie SAR), a pu être mise en place. De plus, il faut signaler une collaboration privilégiée avec l'Institut Francilien des Géosciences de Marne-la-Vallée, qui a permis de définir les thématiques sur lesquelles travailler.

## 1.2 Description des problématiques théoriques

En terme de méthodologie du traitement d'image, les problèmes scientifiques abordés dans ce document sont de trois ordres : segmentation d'image, détection de changement et mise

en correspondance de structures.

La connaissance, à un modulo près, d'un signal est un problème bien connu du traitement du signal et de l'image. En effet, il existe de nombreux types de capteurs qui ne fournissent une information qu'avec cette ambiguïté sur la mesure. C'est le cas en imagerie médicale IRM, en imagerie laser et en interférométrie radar. En terme de traitement d'image, retrouver le signal original correspond à déterminer le biais à affecter en chaque pixel. C'est-à-dire à segmenter l'image en régions de biais constant. De nombreuses méthodes ont été proposées pour répondre à ce problème. On peut distinguer les approches locales, agissant par propagation du signal restauré, et les approches globales cherchant à minimiser un critère de régularité, soit par une méthode itérative, soit par convolution. Dans ce travail de thèse nous proposons une méthode, qui tente d'unifier les approches globales et locales. Cette approche "mixte" est basée sur un algorithme "classique" de segmentation par croissance de région, couplé à une segmentation par modèle markovien. Ces deux segmentations sont itérées jusqu'à l'absence de variation dans la régularité du signal reconstruit. Cette approche itérative fournit un mécanisme de retour en arrière permettant une correction des erreurs faites dans les étapes précédentes.

De part l'aspect différentiel des données interférométriques, les images manipulées sont intrinsèquement multi-temporelles, et l'information colorimétrique est une mesure de la variation apparue entre les acquisitions. Le problème de la détection de changements sur de telles images se traduit par un problème de segmentation binaire entre les zones stables et celles ayant subi des perturbations. Ce type de segmentation correspond à une problématique classique du traitement d'image, et la littérature propose un grand nombre de méthodes pour y répondre, depuis les approches bas niveau basées uniquement sur les propriétés images, jusqu'aux approches haut niveau basées sur des connaissances a priori, comme par exemple la forme des régions à segmenter. Le choix de telle ou telle méthodologie dépend grandement de l'application. Les images radar ont la particularité d'être fortement bruitées, or les méthodes de segmentation basées sur des modélisations probabilistes sont en général mieux adaptées dans ce contexte. Ce manuscrit propose donc une méthode basée sur une modélisation markovienne, qui permet de tenir compte aisément de toutes les propriétés exprimées sur les régions à segmenter. Cette méthodologie est appliquée pour détecter des changements particulièrement fins grâce à la précision centimétrique des interférogrammes différentiels. Des régions de comportement identique

peuvent être identifiées sur une même image. On peut, par exemple, en conclure qu'il est possible d'utiliser l'information supplémentaire fournie par la segmentation pour améliorer certains résultats de classification.

Suivre l'évolution d'un objet ou d'une structure peut se traduire par un problème de mise en correspondance de deux occurrences successives de cette structure. Le problème de la mise en correspondance est aussi important en traitement d'image que celui de la segmentation, et les approches pour y répondre très nombreuses. Le cas de la mise en correspondance de structures non-rigides est généralement abordé en utilisant des hypothèses d'invariance des caractéristiques différentielles de ces structures. De ce fait, ces approches se limitent au cas de faible déformation. De plus, les changements de topologie ne sont pas pris en compte. La théorie des isocontours (*level-set*) permet d'une part de gérer le problème de changement topologique, et d'autre part, de fournir des méthodes de résolution numérique stables et efficaces. La mise en correspondance de deux isocourbes portées par une surface de coût peut être réalisée en déterminant les chemins géodésiques inscrits sur cette surface. Ce travail, effectué par d'autres chercheurs de l'équipe, est présenté de façon approfondie dans le manuscrit. Nous nous sommes intéressés à la généralisation pour des structures de dimension supérieure. Après avoir rappelé la notion de plus court chemin sur une hypersurface, une méthode pour mettre en correspondance deux isosurfaces portées par une hypersurface de coût est proposée. Le caractère très général de cette contribution permet de gérer de grandes déformations et les changements de topologie tout en restant efficace dans le cas de déformations plus faibles. De plus, grâce à la modélisation explicite des critères de mise en correspondance sous la forme de cette hypersurface de coût, il est possible de gérer des informations issues de diverses origines, comme par exemple une connaissance a priori du champ de mouvement.

Pour ancrer ces travaux dans un cadre thématique, cette thèse présente deux volets applicatifs distincts :

- un volet hydrologie, présente l'analyse des effets de phase pour étudier les modifications hygrométriques en fonction du couvert au sol ;
- un volet risque naturel, où les techniques interférométriques sont utilisées pour cartographier les zones à risques et en étudier l'évolution temporelle.

### 1.3 Présentation globale du document

À l'image du travail qu'il relate, ce manuscrit se décompose en quatre parties :

1. L'interprétation des images radar passe par la compréhension des différentes étapes menant à leur construction. La première partie est donc composée d'une introduction aux principes d'acquisition radar, suivie de la présentation des techniques interférométriques et elle se termine par une présentation des données utilisées dans cette étude.
2. Qu'ils soient topographiques ou différentiels, les interférogrammes présentent des franges caractéristiques d'un repliement de  $2\pi$  du signal. La deuxième partie de ce document présente une méthode de segmentation, dite de déroulement, permettant de lever cette ambiguïté.
3. Une fois les interférogrammes corrigés de cette ambiguïté de mesure, il devient possible de les étudier au moyen de leurs propriétés intrinsèques. La troisième partie utilise la sensibilité de cette acquisition aux modifications du sol pour proposer une méthode de détection de changement par segmentation des effets de phase.
4. Enfin, ces régions en évolution étant détectées, il est possible d'utiliser une nouvelle fois la mesure interférométrique pour étudier l'évolution du relief au cours du temps. La quatrième partie propose une méthode de suivi, par mise en correspondance, d'occurrences d'une même structure.

En annexe, le lecteur pourra trouver des explications concernant la modélisation markovienne pour la segmentation d'image, un rappel de géométrie moderne concernant la définition du produit vectoriel en dimension  $n$  ainsi que son utilisation dans la démonstration de l'équation sur laquelle s'appuie la mise en correspondance de surfaces, et enfin un aperçu des différentes techniques d'atténuation des effets de chatoiement sur les images d'intensité.



## Chapitre 2

# L'acquisition radar

Les systèmes de mesures radar sont aujourd'hui devenus les principaux instruments de surveillance et de navigation aérienne et maritime. Dès l'avènement de la télédétection spatiale, un intérêt particulier est apparu pour ces capteurs. Après un bref rappel historique sur l'instrumentation radar, ce chapitre présente le principe d'acquisition des radars à ouverture synthétique et les différents types d'image qui en découlent. Quelques uns des satellites radar en activité sont présentés. En particulier, les données utilisées pour cette étude proviennent toutes des capteurs européens ERS-1 et ERS-2, et leurs caractéristiques particulières sont décrites.

### 2.1 Un peu d'histoire

Le terme RADAR, acronyme pour *R*Adio *D*etection *A*nd *R*anging, est le nom de code adopté au cours de la seconde guerre mondiale par la marine américaine. On désigne sous ce nom, un système qui illumine une portion de l'espace avec une onde électromagnétique puis reçoit les ondes réfléchies par les objets présents dans cette zone, ce qui permet de détecter leur existence et de déterminer certaines de leur caractéristiques.

Les radars émettent des ondes radio-électriques, dont la longueur d'onde varie de quelques centimètres à environ 1 m. Les concepts de base du radar sont fondés sur les équations



régissant les ondes électromagnétiques, formulées par le physicien britannique Maxwell en 1864. Mais c'est en 1886, que Hertz montra que les ondes «radio» pouvaient, comme les ondes lumineuses, être réfléchies par les corps métalliques et diélectriques. Dès 1904, l'allemand Hülsmeyer décrivait un «appareil de projection et de réception d'ondes hertziennes pour donner l'alarme en présence d'un corps métallique, tel qu'un navire ou un train situé dans le faisceau du projecteur».

Au cours des années 1920, diverses expérimentations de détection à l'aide d'ondes radio furent réalisées avec succès (Appleton en Angleterre en 1924, Breit et Tuve, Hyland, Taylor et Young aux États-Unis, Mesny et David en France). Au milieu des années 1930, ces expériences débouchèrent sur des applications concrètes grâce aux progrès de l'électronique. On installa ainsi en France, sur la ligne Maginot, des radars à ondes continues, d'une portée d'une dizaine de kilomètres. De même, on équipa le paquebot Normandie d'un appareil de détection électromagnétique à ondes décimétriques, capable de détecter les icebergs dans le brouillard.

À partir de 1935, les recherches s'orientèrent vers la réalisation de radars à impulsions. En 1938, deux chercheurs français, Ponte et Gutton, mirent au point l'un des dispositifs les plus importants en ce domaine : le tube à faisceau électronique, appelé magnétron à cavité résonante, qui émet des impulsions haute fréquence (radar à ondes centimétriques). En 1940, une ligne de stations radars fut installée le long des côtes sud et est de l'Angleterre afin de détecter les agresseurs aériens ou maritimes. Ce système joua un rôle essentiel durant la bataille d'Angleterre (août-octobre 1940), au cours de laquelle l'aviation allemande ne parvint pas à affirmer sa suprématie dans le ciel britannique. Depuis lors, les systèmes de mesures radar sont restés les principaux appareils de surveillance de navigation aérienne et maritime.

Mais la résolution de ces radars resta très médiocre. En 1950 Wiley propose la théorie de l'antenne à ouverture synthétique (voir paragraphe suivant) apportant ainsi une amélioration spectaculaire de résolution. Aujourd'hui embarqués à bord de satellites en orbite terrestre ou gravitant autour d'autres planètes, les radars sont devenus des instruments importants de la télédétection spatiale. En effet, de par leur autonomie au regard de l'illumination solaire (ce sont des systèmes actifs, transportant leur propre source d'émission), et vue la longueur d'onde utilisée, ces capteurs sont en mesure de fournir des données

exploitables, quelles que soient les conditions d'ensoleillement et l'état de la couche nuageuse.

## 2.2 Radar à ouverture de synthèse

### 2.2.1 Acquisition des données

Les radars utilisés pour l'imagerie satellitaire sont des radars à ouverture de synthèse **SAR** (*Synthetic Aperture Radar*). Ce sont des capteurs à visée latérale : embarqués sur un porteur mobile, ils visent perpendiculairement au vecteur vitesse.

L'antenne radar se déplaçant dans la direction azimutale, émet une impulsion vers le sol. Pour une impulsion donnée, le radar reçoit une réponse appelée **écho**, fonction de tous les réflecteurs présents dans le lobe de l'antenne au moment où l'impulsion émise est reçue au sol. Ceci permet d'obtenir une ligne de l'image brute. À l'impulsion suivante, le radar s'est déplacé, et on obtient pour le nouvel écho une autre ligne de l'image.

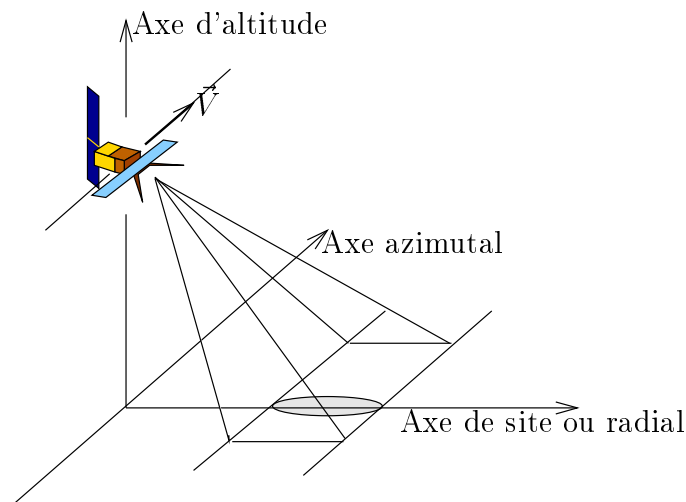


FIG. 2.1 – *Principe de la visée latérale.*

## 2.2.2 Résolutions brute

La résolution en distance (exprimée en mètre) est directement fonction de la durée de l'impulsion émise :

$$r_d = \frac{c\tau}{2} \quad (2.1)$$

où  $\tau$  est la durée de l'impulsion et  $c$  la vitesse de la lumière.

La résolution angulaire (exprimée en radian) de l'antenne d'émission est approximativement égale à :

$$r_a = \frac{\lambda}{L} \quad (2.2)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du signal radar et  $L$  la taille de l'antenne.

## 2.2.3 Traitement du signal

Différentes étapes permettent de passer du signal brut reçu par l'antenne à l'image radar, de façon à en améliorer résolution :

### 1. Compression d'impulsion (traitement en site)

On désire obtenir des résultats avec une résolution au sol de l'ordre de la dizaine de mètres. Or, d'après l'équation (2.1), la résolution est proportionnelle à la durée de l'impulsion. Cependant, l'émission d'impulsions permettant la résolution souhaitée n'est guère réalisable techniquement en raison du lien entre la fréquence et l'énergie du signal. Une résolution décamétrique correspondrait à une impulsion toutes les  $10^{-8}$  seconde. Mais plus la durée de l'impulsion est courte (comme l'illustre la figure 2.2), plus l'énergie de ce signal est faible. L'énergie émise serait alors insuffisante pour permettre la détection des signaux réfléchis compte tenu des atténuations dues au trajet parcouru et au coefficient de rétrodiffusion. Augmenter l'énergie revient également à augmenter la durée de l'impulsion (voir figure 2.2). Il faut donc essayer d'améliorer la finesse de résolution d'une manière indirecte. Pour cela, on module linéairement la fréquence d'émission afin d'occuper une grande largeur de bande et

de permettre une durée d'impulsion plus longue (voir figure 2.2). Pratiquement, on réalise une convolution du signal reçu avec le signal émis, puis pour chaque écho :

- on calcule la transformée de Fourier ;
- on multiplie le spectre par le conjugué de la transformée de Fourier du signal émis ;
- et on calcule la transformée de Fourier inverse.

### 2. Synthèse d'ouverture (traitement en azimut)

De la même façon qu'on a amélioré la résolution radiale, on cherche à obtenir une résolution azimutale équivalente. Celle-ci est inversement proportionnelle à la taille de l'antenne (équation (2.2)). Plus l'antenne est grande, meilleure est la résolution. La synthèse d'ouverture, consiste à «synthétiser» une antenne virtuelle, en utilisant le déplacement du satellite (voir figure 2.3).

L'originalité du traitement consiste à utiliser l'effet Doppler. On sait que la fréquence Doppler est linéairement liée à la vitesse de déplacement du capteur, donc c'est une fréquence modulée linéairement en fonction du temps. On applique la même technique que précédemment. Soit en décomposant les étapes :

- calcul de la transformée de Fourier ;
- calcul du dépointage de l'antenne par rapport à la perpendiculaire au vecteur vitesse du porteur, dont il faut tenir compte pour évaluer correctement la fréquence Doppler.
- correction des erreurs de phase inhérentes à la géométrie du porteur : migration parabolique (voir figure 2.4), migration linéaire (due à l'effet de rotation de la terre, à l'angle de visée du radar, ou à l'excentricité de son orbite), variation et défaut d'attitude du porteur (roulis, tangage – négligeable pour les satellites) ;
- compression du signal en azimut ;
- calcul de la transformée de Fourier inverse.

Il faut signaler que la technique de synthèse d'ouverture dépend de la bonne évaluation de la fréquence Doppler. Elle convient lorsque les cibles sont au repos. Pour une cible en mouvement, ces estimations sont faussées lors du calcul de la vitesse relative

FIG. 2.2 – *Compression en impulsion.*

FIG. 2.3 – *Synthèse d'ouverture.*

de la cible. Par exemple, on verra un navire en mouvement décalé par rapport à son sillage (que l'on peut considérer comme immobile).

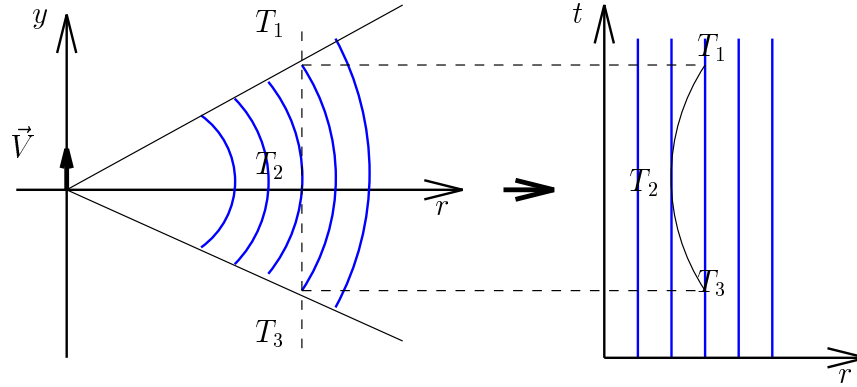
### 3. Les corrections radiométriques

Elles ont pour but d'améliorer le signal de manière à obtenir des images le plus exploitable possible, on distingue :

- **Les corrections géométriques** visent à passer de l'échantillonnage radial-temporel à une expression spatiale, tout en essayant d'obtenir une image à pixels carrés.
- **L'atténuation de la texture granulaire** caractéristique des images SAR : les images radar sont entachées d'un aspect granulaire caractéristique, appelé effet de chatoiement ou *speckle* (voir annexe C).

Pour atténuer cet effet dégradant, on utilise une technique de moyennage, dite moyennage multi-vues, (*multilook*) : le signal image est acquis par moyennage de plusieurs vues consécutives. Ce moyennage multi-vues a lieu pendant la synthèse d'ouverture en utilisant généralement 3 à 4 vues successives.

- **Les corrections des distorsions d'intensité** permettent d'avoir une in-



*Un point fixe traverse le lobe du radar parallèlement au déplacement du radar et semble pourtant se rapprocher puis s'éloigner de l'antenne.*

FIG. 2.4 – *Migration parabolique.*

tensité moyenne au cours du temps. La mise à niveau est faite de manière empirique, en évaluant sur les  $N$  images les coefficients de correction à appliquer.

## 2.3 Les images radar

Une image SAR est constituée de pixels, qui représentent une surface au sol dont les dimensions sont définies dans les directions radiale et azimutale. Le niveau de gris en un pixel est calculé à partir de l'onde rétrodiffusée par une cellule de résolution (voir figure 2.5). Pour un moyennage quatre vues, un pixel correspond environ à une cellule de  $25 \times 25$  mètres. Si on appelle  $\mathcal{E}$  le champ électrodifusé par une cellule, on peut écrire  $\mathcal{E} = A e^{j\phi}$  avec  $A$  le module du signal et  $\phi$  sa phase.

### 2.3.1 Modèles de rétrodiffusion

Les modèles de rétrodiffusion à **plans tangents** et **de Bragg** [Del93] considèrent la rétrodiffusion d'une cellule comme étant la somme des  $n$  diffuseurs répartis dans la cellule

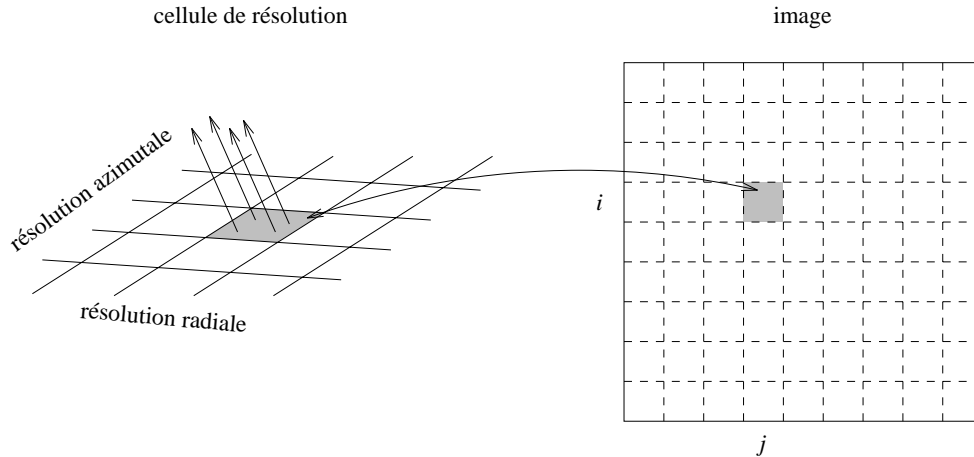


FIG. 2.5 – Une cellule de résolution et le pixel correspondant.

de résolution :

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^n A_k \cdot e^{j\phi_k}$$

### Modèle des plans tangents

La cible est approximée par une série de facettes tangentes à la surface. Chaque facette est considérée comme une antenne fictive. L'onde rétrodiffusée par la surface illuminée est la somme des contributions de chaque facette.

Chaque contribution s'écrit comme le produit de l'onde émise ( $\mathcal{E}_i$ ) par un facteur de pondération  $G_k$  prenant en compte le gain de l'antenne fictive et le coefficient de rétrodiffusion :

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^n G_k \cdot \mathcal{E}_i \cdot e^{j4\pi \frac{R_k}{\lambda}}$$

avec :

- $n$  : nombre de facettes présentes dans la cellule,
- $\mathcal{E}_i$  : onde initiale émise par le radar,



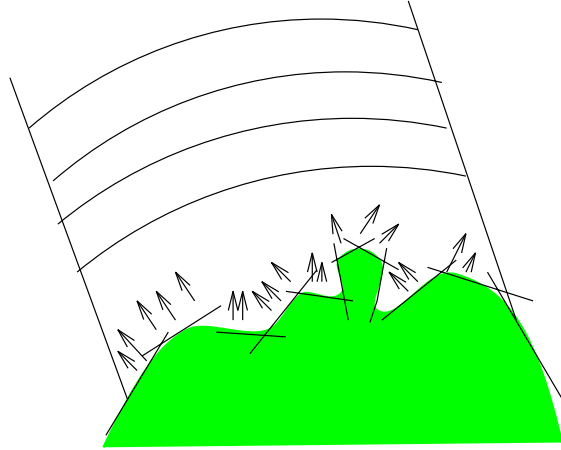


FIG. 2.6 – *Approximation du sol par des plans tangents à sa surface.*

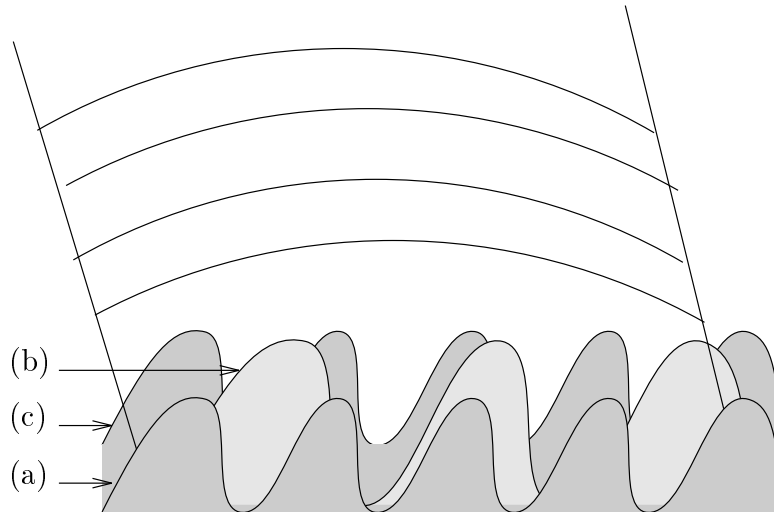
- $R_k$  : distance radar/facette,
- $G_k$  : facteur de pondération,
- $\lambda$  : longueur d'onde émise par le radar.

Ce modèle est valable à condition que l'angle d'incidence des ondes radar soit proche de la normale à la surface illuminée, et que les surfaces aient de grands rayons de courbure par rapport à la longueur d'onde émise.

### Modèle de Bragg

On suppose ici que la surface illuminée est décomposable en signaux bidimensionnels périodiques de direction radiale et de diverses longueurs d'onde (comme par exemple la houle à la surface de l'océan [Del93]).

Pour chaque signal, la rétrodiffusion est la somme des ondes électromagnétiques  $\mathcal{E}_k$  propres à chaque longueur d'onde. En considérant, pour un signal donné, chaque longueur d'onde, la rétrodiffusion  $\mathcal{E}_s$  est la somme des ondes électromagnétiques  $\mathcal{E}_k$  propre à chaque longueur d'onde. Si ces ondes arrivent au radar déphasées les unes par rapport aux autres, leur somme est une onde électrique  $\mathcal{E}_s$  de faible intensité, qui peut être considérée comme



Les signaux (a) et (c) sont en phase et leurs contributions s'ajoutent.

FIG. 2.7 – *Approximation de la cible par des signaux périodiques.*

invisible par le radar. Au contraire, si elles arrivent en phase, les amplitudes s'ajoutent et le signal périodique est caractérisé par une onde  $\mathcal{E}_s$  de forte intensité (voir figure 2.7) ; on dit alors que l'onde satisfait au principe de Bragg. On a alors :

$$\mathcal{E} = \sum_{s=1}^n \mathcal{E}_s = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^{n_s} \mathcal{E}_{s,k}$$

- avec :
- $n$  : nombre de signaux bidimensionnels satisfaisant au principe de Bragg,
  - $\mathcal{E}_s$  : champ électrique propre au signal bidimensionnel  $s$ ,
  - $n_s$  : nombre de périodes du signal  $s$  compris dans la cellule,
  - $\mathcal{E}_{s,k}$  : champ électrique rétrodiffusé par la période  $k$  du signal  $s$ .

### 2.3.2 Les différents types d'image

#### Les images d'intensité

Les images radar le plus souvent utilisées, n'exploitent que l'information d'amplitude de l'onde rétrodiffusée. Ce sont généralement des images d'intensité, c'est-à-dire qu'elles

correspondent au carré du module du signal :

$$I = A^2$$

avec :  $\mathcal{E} = A.e^{j\phi}$ , le signal complexe rétrodiffusé par la cible pour un pixel.

Les images d'intensité du signal radar sont très dépendantes de l'état de surface des régions imagées. Si l'acquisition est multiple (et dans des conditions de prise de vue identiques), il devient alors possible de créer des compositions d'images très sensibles aux modifications des états de surface. Des séquences d'images d'intensité permettent ainsi de rendre compte de l'évolution de phénomènes environnementaux.

L'annexe C décrit les caractéristiques des images d'intensité.

## Les images de phase

Outre la génération de ces séquences d'images, l'acquisition multiple permet l'exploitation de l'information de phase  $\phi$  du signal radar. La phase dépend d'une contribution interne liée à la nature du sol (aléatoire car composée de milliers de réflecteurs), et d'une contribution externe, liée au trajet aller-retour (déterministe et significative). Lorsqu'il existe plusieurs acquisitions de la même zone, prises sous certaines conditions, il est possible d'exploiter la phase du signal rétrodiffusé. Le principe consiste à s'affranchir, par différenciation, des contributions aléatoires pour exploiter la contribution déterministe due au trajet aller-retour. C'est la technique interférométrique.

### 1. Interférométrie

Dans le cas d'une double acquisition, effectuée soit par deux antennes séparées d'une distance appelée **baseline**, soit par une seule antenne en deux passages successifs (*multipass*), un interférogramme est constitué par l'image des différences de phase issues de chaque acquisition.

En supposant la vitesse de propagation des ondes radar constante, la différence de phase est liée à des effets purement géométriques, principalement d'origine topographique.

### 2. Interférométrie différentielle

La contribution topographique à la différence de phase peut être éliminée en utilisant une troisième acquisition de données. On peut générer un second interférogramme. La différence des deux interférogrammes est appelée un interférogramme différentiel. Une telle image cartographiant les modifications phasimétriques des zones observées, est caractéristique des changements tridimensionnels qui sont intervenus entre les acquisitions.

Cet interférogramme différentiel, peut également être généré à partir d'un modèle numérique de terrain et d'un interférogramme deux dates : on corrige l'interférogramme des effets géométriques de relief grâce au MNT.

Les interférogrammes différentiels permettent d'étudier les modifications du relief causés par un tremblement de terre, une éruption volcanique, un glissement de terrain, une dérive glacière, *etc.*

Les principes de la génération des données interférométriques, et les caractéristiques des interférogrammes sont présentés au chapitre 3.

## 2.4 Les satellites radar

### 2.4.1 Les principaux capteurs

Les principaux satellites radar utilisés ces vingt dernières années sont les suivants :

#### SEASAT

Ce premier radar latéral à synthèse d'ouverture a été mis en orbite avec SEASAT le 27 juin 1978. Sa mission principale était l'étude des océans.

#### SIR

Dès 1981, la NASA utilise la navette spatiale pour plusieurs campagnes d'acquisition

radar avec le capteur SIR-A (*Shuttle Imaging Radar*), SIR-B en 1984 et SIR-C en 1994.

### Almaz

Le satellite soviétique ALMAZ fut lancé en mars 1991. Le radar embarqué présentait la particularité de ne pas posséder de système de compression d'impulsion (voir explications au annexe 2).

### ERS

Le satellite ERS-1 (*European Remote Sensing Satellite*) est le second satellite à embarquer un radar à ouverture synthétique. Développé par l'agence spatiale européenne (ESA), il a été lancé en 1991 pour une mission initialement prévue de deux ans. En fait, il est resté opérationnel jusqu'en 1995, année au cours de laquelle l'a rejoint son homologue ERS-2. Durant une période de quelques mois les deux satellites ont pu ainsi acquérir des données lors d'une campagne «jumelée».

### JERS-1 et RADARSAT

1995 fut aussi l'année du lancement des satellites radar japonais : JERS-1 (*Japanese Earth Resources Satellites*) et canadien : RADARSAT.

### ENVISAT

Le satellite EnviSat (*Environmental Satellite*), successeur d'ERS-1 et d'ERS-2, sera lancé en mai 2000. Dédié à l'étude de l'environnement, en particulier au suivi des changements climatiques, sa mission est d'observer l'atmosphère et la surface de la Terre.

Capteurs	Angle d'incidence	Bande	fréquence	$\lambda$
SEASAT	20 °	L	1,25 GHz.	23,5 cm.
ALMAZ	30 °	S	2,40 GHz.	9,5 cm.
ERS	23 °	C	5,60 GHz.	5,5 cm.
J-ERS1	38 °	L	1,25 GHz.	23,5 cm
RADARSAT	20 ° – 37 °	C	5,50 GHz.	5,5 cm.

TAB. 2.1 – *Caractéristiques des capteurs radar voyageant autour de la Terre.*

### 2.4.2 Les satellites ERS

Toutes les images utilisées dans le cadre de cette thèse proviennent des satellites «jumeaux» ERS-1 et ERS-2. Le premier a été lancé le 17 juillet 1991, le second la rejoint le 21 avril 1995. Ils embarquent tous deux le même type d'instrumentation :

#### **AMI** *Active Microwave Instrument*

Ce capteur actif hyperfréquence comprend un radar à synthèse d'ouverture en bande C (5,3 GHz.), qui permet d'obtenir des données en «mode imageur» ou en «mode vague», accompagné d'un diffusiomètre qui permet de déterminer la vitesse des vents sur l'océan («mode vent»).

#### **RA** *Radar Altimeter*

#### **ATSR** *Along Track Scanning Radiometer*

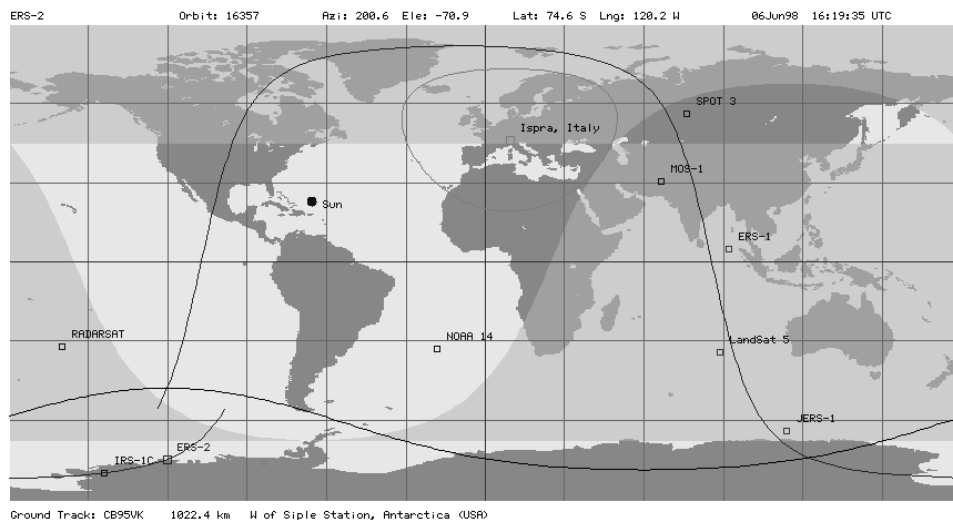


FIG. 2.8 – *Cycle complet orbital d'ERS-2, phases montantes et descendantes.*

L'orbite des satellites ERS est quasipolaire et héliosynchrone. Elle a une inclinaison de  $98,5^\circ$  et une altitude moyenne de 785 km.

On distingue deux types de passage au dessus d'une même région : les passages de nuit que l'on appelle passages montant, et les passages descendant correspondant aux passages de jour (voir figure 2.8).

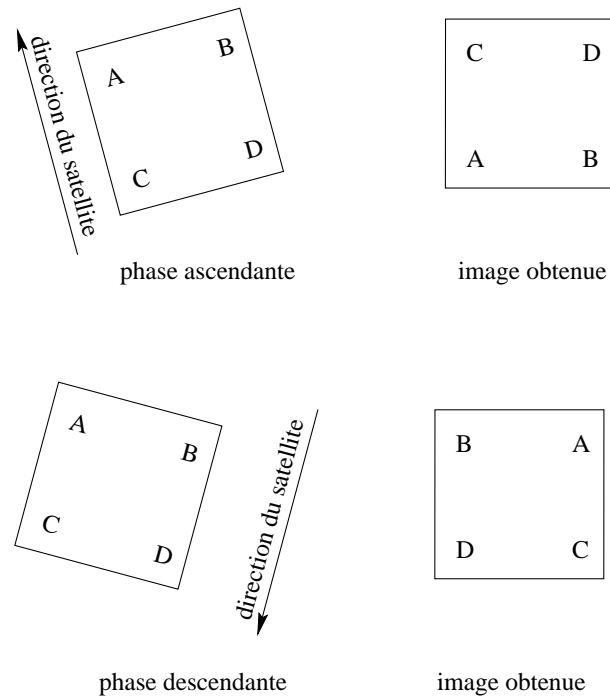


FIG. 2.9 – *Effet du mode d'acquisition des images en phases ascendante et descendante.*

De plus le SAR embarqué ayant une visée latérale à droite, les images acquises en phases descendantes sont symétriquement retournées, comme dans un miroir, par rapport à celles acquises en phase ascendante (voir figure 2.9).

## Chapitre 3

# Interférométrie

Pour exploiter l'information de phase du signal radar rétrodiffusé, il est nécessaire d'obtenir au moins une acquisition supplémentaire. Après avoir expliqué les raisons de cette nécessité, ce chapitre définit le principe d'interférométrie. La théorie interférométrique est détaillée depuis la définition des interférogrammes et des images de cohérence, jusqu'aux relations entre les données image et les grandeurs physiques, en passant par les conditions limites de fabrication. Les termes spécifiques à l'interférométrie sont introduits. Les différentes méthodes de génération des interférogrammes différentiels (avec trois acquisitions ou avec deux acquisitions et un modèle numérique de terrain) sont explicitées.

### 3.1 Définition et interprétation

Si l'intensité du signal en un pixel est essentiellement liée aux propriétés de rétrodiffusion radar de la surface illuminée, la phase, quant à elle, comprend 3 termes principaux :

- la phase de l'impulsion lors de l'émission du signal  $\phi_0$  ;
- le déphasage dû à la propagation aller-retour antenne-cible  $\frac{4\pi R}{\lambda}$  ;



– le déphasage lié à la réflexion propre de la cible  $\phi_r$ .

$$\phi = \phi_0 + \frac{4\pi R}{\lambda} + \phi_r \quad (3.1)$$

où  $R$  est la distance antenne-cible et  $\lambda$  la longueur d'onde du radar.

La phase d'une image SAR seule est totalement inexploitable, car elle ne présente aucune continuité d'un pixel à l'autre : une différence d'une longueur d'onde dans le trajet parcouru ( $\lambda/2$  pour l'aller simple), très faible devant la taille du pixel, suffit pour modifier la phase de  $2\pi$ . Le principe de l'interférométrie est d'introduire une mesure supplémentaire acquise par une autre antenne. Cette mesure permet de s'affranchir du caractère aléatoire de la phase pour n'exploiter que la contribution déterministe due au trajet de l'onde. En effet, bien que  $\phi_r$  soit aléatoire d'un pixel à l'autre sur une même image, elle se conserve d'une acquisition à l'autre pour un même pixel.

Dans le cas d'une double acquisition, effectuée soit par deux antennes séparées d'une distance appelée *baseline*, soit par une seule antenne en deux passages successifs (*multipass*), on définit le coefficient complexe  $\gamma(s)$  attribué à chaque pixel  $s$  par :

$$\gamma(s) = \frac{\sum_F \mathcal{E}_1(s) \cdot \overline{\mathcal{E}_2(s)}}{\sqrt{\sum_F |\mathcal{E}_1(s)|^2 \cdot \sum_F |\mathcal{E}_2(s)|^2}} \quad \text{tel que } \mathcal{E}_k = A_k e^{i\phi_k} \quad (3.2)$$

où  $F$  est une imagerie centrée sur  $s$ .

Un interférogramme est constitué par l'image des phases de  $\gamma$  :  $\arg(\gamma)$ . Pour faciliter l'écriture, on notera par la suite  $\arg(\gamma) = \varphi = \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ , la mesure de phase interférométrique.

On définit aussi l'image de cohérence représentant le module du coefficient  $\gamma$  en chaque pixel. Cette image correspond en fait à une mesure de confiance. On notera par la suite  $\gamma = |\gamma|$ .

Une troisième image correspondant à l'intensité moyenne des deux signaux rétrodiffusés vient compléter ce jeu de trois images, appelé **produit interférométrique**.

### 3.1.1 Interprétation des images de différence de phase

En supposant la vitesse de propagation des ondes radar constante, la différence de phase est liée à des effets purement géométriques d'origine orbitale, topographique et de variation de la topographie. D'après les analyses du CNES [Cen96], on peut distinguer :

- la contribution des trajectoires : des variations apparaissent dans la phase, qui sont dues à la variation de distance inter-orbitale pendant l'acquisition ;
- la contribution de la topographie : l'observation du terrain, sous un point de vue légèrement différent dans les deux images radar, crée un effet stéréoscopique qui décrit le relief ;
- la contribution des déplacements du sol : tout déplacement d'une partie du sol imagé s'inscrit directement comme un décalage de phase, détectable par rapport à la stabilité de phase du reste du paysage ;
- la contribution atmosphérique : des changements hétérogènes de l'état de l'atmosphère entre deux acquisitions peuvent entraîner des déphasages, dus à de légères variations de la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique.

### 3.1.2 Interprétation des images de cohérence

La valeur de la cohérence varie entre 0 (pixel noir) et 1 (pixel blanc). On observe une cohérence nulle par exemple à la surface de la mer, où la houle crée un changement total entre deux acquisitions. La cohérence permet d'identifier les zones où les variations de phase entre acquisitions sont corrélées pour deux pixels voisins. En pratique, plus la cohérence est élevée, plus l'interférogramme est exploitable.

On peut distinguer différents motifs pour expliquer la perte de cohérence [ZV92]. On considère les signaux rétrodiffusés, entachés d'un bruit additif thermique responsable d'une part de la décorrélation. Par ailleurs, les changements de géométrie de prise de vue créent une

décorrélacion spatiale. De plus, si les deux acquisitions sont séparées dans le temps, il faut prendre en compte un terme de décorrélacion temporelle.

On peut montrer que la cohérence totale s'écrit :

$$\gamma_{total} = \gamma_{thermique} \times \gamma_{spatiale} \times \gamma_{temporelle}$$

## 3.2 Interférométrie topographique

Les trajectoires de satellite étant assez bien connues, l'essentiel de leur contribution peut être retranché de l'interférogramme. La différence de phase entre deux signaux est alors directement liée à la dénivellation  $h$ , selon l'équation (3.3) et la figure 3.1 où :

- $\lambda$  est la longueur d'onde des signaux émis,
- $\varphi_M$  est la différence de phase propre à la cible,
- $\Delta R$  la différence de marche des signaux rétrodiffusés et
- $B$  la baseline.

$$h = H - R \cos \left( \arcsin \frac{\Delta R}{B} \right) \tag{3.3}$$

avec  $\varphi \pmod{2\pi} = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta R + \varphi_M$

Tant que  $\varphi_M$  reste petit, c'est-à-dire tant que l'on impose :

- une contrainte sur la taille de la *baseline*,
- une contrainte temporelle limitant l'intervalle d'acquisition,

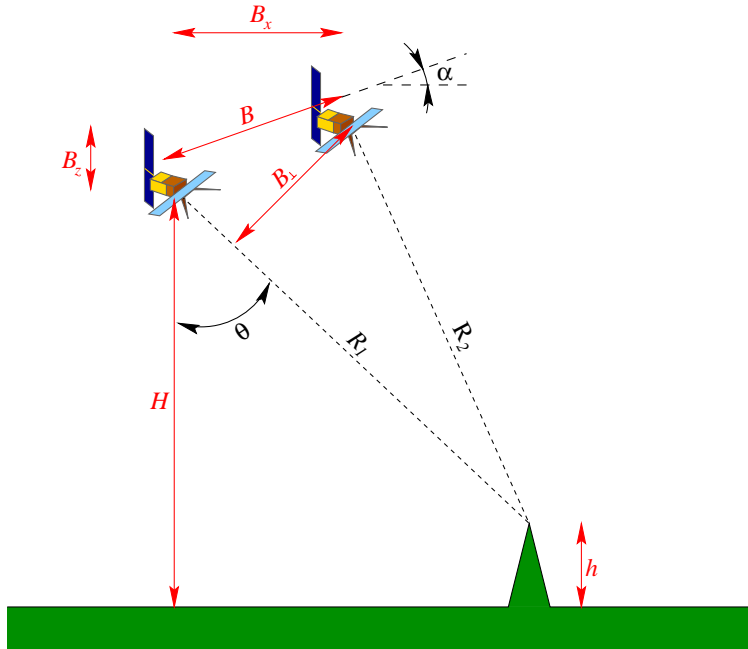


FIG. 3.1 – Lien géométrique entre la différence de marche  $\Delta R$  des signaux reçus par les deux satellites et le dénivelé  $h$ .

on peut estimer l'altitude en chaque pixel à un modulo  $2\pi$  près.

En effet, les différences de phase ne sont pas connues de façon absolue, mais sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  (ou  $[-\pi, \pi]$ ). Les interférogrammes sont donc constitués de franges d'interférence, où chaque mesure de la différence de phase  $\varphi = \Delta\phi$  ne peut être discernée de  $\varphi + 2k\pi$ . Il y a donc une ambiguïté sur la phase. C'est la variation en altitude qui produit une frange topographique. Cette altitude nécessaire à la génération d'une frange complète (c'est-à-dire une variation entre 0 et  $2\pi$ ) est appelée **altitude d'ambiguïté**.

Massonnet et Rabaute [MR93] ont démontré que l'altitude d'ambiguïté,  $h_a$ , est fonction des paramètres orbitaux, ainsi :

$$h_a = \frac{\lambda R_1 \sin \theta}{2(B_x \cos \theta - B_z \sin \theta)}$$

Il est donc théoriquement possible d'obtenir la topographie d'un terrain à partir de l'interférogramme construit grâce à deux acquisitions SAR. En pratique, on se heurte à plusieurs difficultés :

- respect des conditions de génération des produits interférométriques,
- prise en compte des distorsions dues à la géométrie SAR,
- restitution d'une mesure absolue par déroulement de phase.

### 3.2.1 Conditions interférométriques

Les conditions interférométriques sont liées aux valeurs de la cohérence. Pour qu'un interférogramme soit exploitable, il faut naturellement une cohérence non nulle.

La contribution spatiale de la cohérence est liée à la géométrie de l'acquisition :

$$\gamma_{spatiale} = 1 - \frac{2Br_d}{\cos^2 \theta \lambda R}$$

où  $r_d$  correspond à la résolution en distance.

La valeur de la *baseline*  $B$ , pour laquelle cette cohérence est nulle, correspond à la **baseline critique**  $B_c$  :

$$B_c = \frac{\lambda R}{2r_d \cos^2 \theta}. \quad (3.4)$$

La valeur de la *baseline* conditionne ainsi la qualité de l'interférogramme et ne doit pas excéder cette valeur critique.

Dans le cas d'un terrain de pente  $\alpha$ , la *baseline* critique vaut, d'après l'équation (3.4) :

$$B_c = \frac{\lambda R}{2r_d \cos^2(\theta - \alpha)}. \quad (3.5)$$

Cette formule n'est valable que pour des terrains peu accidentés. Dans le cas contraire, les variations d'angle d'incidence locale peuvent réduire la valeur de la *baseline* critique.

### 3.2.2 Rectification géométrique

Les distorsions existant dans les images radar constituent également une source de difficulté. Il est nécessaire de modifier la géométrie de l'image en vue de la ramener dans une cartographie donnée. Cette étape de restitution géométrique est parfois appelée **géocodage**.

En fait, il est souvent impossible de restituer convenablement la topographie des zones soumises à de fortes distorsions, notamment sur les zones d'ombre, où de part la géométrie d'acquisition, l'information topographique est perdue. Il est, en fait, souvent nécessaire d'utiliser des couples d'interférogrammes acquis lors de passages montant et descendant du satellite, et de se servir de ces informations complémentaires pour la restitution de l'ensemble du relief de la zone imagée.

### 3.2.3 Application et déroulement de phase

Pour peu que la région étudiée soit stable, une application évidente de l'interférométrie topographique est le calcul de l'altitude en chaque point de l'image. Ceci permet de générer des cartes digitales tridimensionnelles de la région imagée autrement dit des **Modèles Numériques de Terrain**. Néanmoins, dans un interférogramme, la différence de phase n'est connue qu'à un modulo  $2\pi$  près. Reconstruire la mesure absolue de la différence de phase en chaque point revient à déterminer le multiple de  $2\pi$  à rajouter à la différence de phase de l'interférogramme pour retrouver la mesure véritable. Cette opération est appelée déroulement de phase.

La deuxième partie de ce document est consacrée à la description de différentes méthodes pour le déroulement de phase. Elle présente également en détails la méthode que nous avons retenue.

### 3.3 Interférométrie différentielle

Dans le cas d'une acquisition multi-date, on peut s'intéresser non plus aux contributions topographiques, mais aux changements significatifs apparus entre les prises de vue.

Si le satellite, lors de la deuxième acquisition, repasse exactement à la même position (*baseline* nulle), alors la différence de phase sera dépourvue d'effet de relief. L'information colorimétrique des interférogrammes correspond alors à une mesure des changements apparus entre les deux acquisitions (voir figure 3.2). L'interférogramme permet de cartographier les modifications du sol, intervenues entre les deux passages du satellite [HTWS94, Her94, GEKF93].

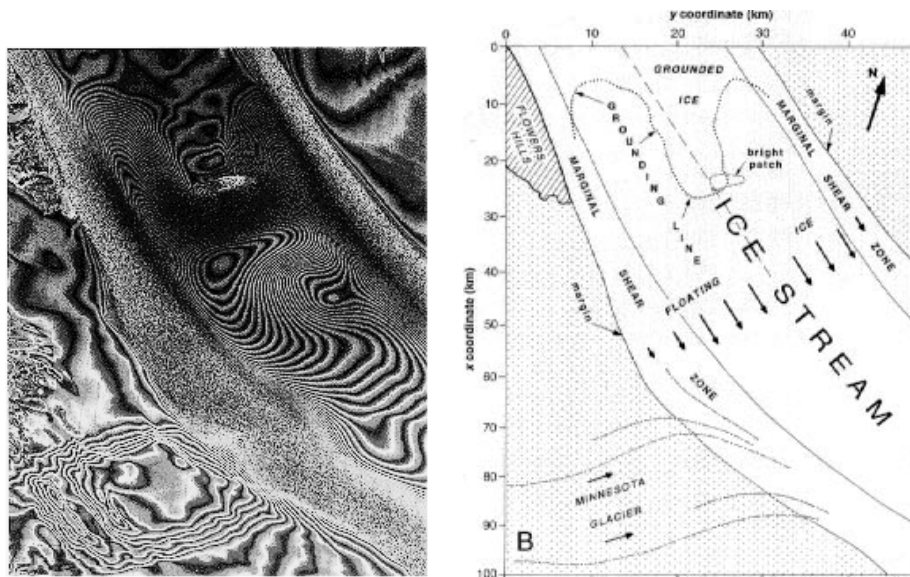


FIG. 3.2 – Interférogramme différentiel cartographiant une dérive glacière en Antarctique.

En réalité, les deux positions du satellite ne sont jamais confondues, l'interférogramme généré contient les effets de changement sur le sol et les effets de relief. Il est donc nécessaire d'éliminer la contribution topographique pour étudier les modifications : c'est la motivation de l'interférométrie différentielle.

Les interférogrammes différentiels permettent d'étudier les modifications du relief causées par un tremblement de terre, une éruption volcanique, un glissement de terrain, une dérive glacière, *etc.*

#### 3.3.1 Principes

Sauf dans quelques cas très exceptionnels, les effets de la topographie ne peuvent être négligés. La *baseline* étant de l'ordre de 50 à 500 mètres, les franges topographiques sont relativement serrées et se mélangent à celles liées aux déplacements. Il est alors nécessaire d'éliminer les effets dus à la topographie. C'est le principe de l'interférométrie différentielle : on soustrait les effets topographiques à l'interférogramme.

Il existe deux types d'interférométrie différentielle : l'interférométrie différentielle avec trois acquisitions de données et l'interférométrie différentielle avec deux acquisitions et un Modèle Numérique de Terrain.

#### Interférométrie différentielle trois dates

Soient  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , les trois dates d'acquisition sur la même région. On fait l'hypothèse qu'une modification cohérente du sol a eu lieu entre les passages  $S_2$  et  $S_3$ .

On peut donc générer les interférogrammes 1,2 et 2,3 tels que :

$$\varphi_{1,2} = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta R_{1,2} + \varphi_{M_{1,2}} \text{ et } \varphi_{2,3} = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta R_{2,3} + \varphi_{M_{2,3}},$$

où  $\varphi_M$  correspond au déphasage dû aux modifications intrinsèques de la cible. Le terme  $\varphi_{2,3}$  contient à la fois une information sur la topographie du terrain, et sur la modification du sol entre les deux prises de vue.

Grâce au premier interférogramme, on peut par soustraction, éliminer le terme lié à la



topographie et isoler les différences de phase dues aux modifications de la surface.

$$\varphi_{1,2} - \varphi_{2,3} = \frac{4\pi}{\lambda}(\Delta R_{2,3} - \Delta R_{1,2}) + (\varphi_{M_{1,2}} - \varphi_{M_{2,3}}).$$

Les *baselines*  $B_{1,2}$  et  $B_{2,3}$  étant différentes, il s'en suit des différences entre les deux interférogrammes, y compris s'il n'y a pas eu de modification entre les acquisitions 2 et 3. Il faut donc avant de procéder à la différenciation, dérouler le premier interférogramme et le multiplier par le rapport des *baselines*. Si l'on suppose la contribution des  $\varphi_M$  négligeable, on obtient l'équation suivante :

$$\varphi_{différentielle} = \varphi_{2,3} - \frac{B_{1,2}}{B_{2,3}}\varphi_{1,2} = \frac{4\pi}{\lambda}(\Delta R_{2,3} - \Delta R_{1,2}). \quad (3.6)$$

Il est clair qu'avec cette technique de génération, il faut que les échos radar soient corrélés entre les trois acquisitions (ce qui implique que les signaux restent cohérents sur une période de temps significative). Mais, il faut aussi qu'un déroulement de phase soit effectué sur l'un des interférogramme, afin de se ramener dans une situation où les interférogrammes ont la même altitude d'ambiguïté, ce qui permet de soustraire les franges topographiques.

Ces limitations font que la technique opérationnelle utilisée par le CNES, dans la chaîne de génération interférométrique DIAPASON, est l'interférométrie différentielle avec un seul couple d'acquisition et un modèle numérique de terrain.

### Interférométrie différentielle deux dates avec un MNT

Il s'agit d'une manière beaucoup plus commode d'accéder aux modifications du sol à partir d'un seul couple d'acquisitions. La topographie contenue dans l'interférogramme généré de façon classique peut-être éliminé grâce au modèle numérique de terrain.

Pour amener le MNT en géométrie radar, on simule d'abord une image d'intensité à partir du MNT et des données orbitales. Cette image simulée est ensuite recalée avec l'image d'intensité moyenne du produit interférométrique, par corrélation. Il suffit ensuite de simuler un interférogramme dans cette géométrie, sachant que l'altitude d'ambiguïté est calculée grâce à la *baseline* interférométrique. L'interférogramme synthétique ainsi généré permet d'éliminer, par simple soustraction, les franges topographiques de l'interférogramme réel.

L'intérêt majeur de cette méthode est de s'affranchir du déroulement de phase. Néanmoins, le fait d'avoir recours à un MNT, introduit nécessairement des artefacts dans l'interférogramme différentiel. Ces artefacts sont liés à la précision du MNT. La précision  $\epsilon_q$  du MNT nécessaire pour estimer des mouvements avec une précision  $\epsilon_r$ , est inversement proportionnelle à la *baseline*  $B$  :

$$\epsilon_q = \epsilon_r \frac{R \sin \theta}{B},$$

où  $R$  est la distance à la cible et  $\theta$  l'angle d'incidence. La précision théorique, que l'on peut obtenir dans la détermination de mouvements par interférométrie différentielle, correspond à une fraction de frange d'interférence après une soustraction de deux interférogrammes : c'est donc une fraction de longueur d'onde. On considère souvent que cette précision vaut  $\lambda/16$ , soit environ 3 mm avec ERS.

#### 3.3.2 Contraintes temporelles

Comme dans le cas purement spatial, les conditions interférométriques se traduisent par des contraintes sur la cohérence.

La valeur de la cohérence temporelle est donnée par Zebker et *al.* [ZV92] :

$$\gamma_{temporelle} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{4\pi^2}{\lambda} \right) (\sigma_x^2 \cos^2 \theta + \sigma_h^2 \sin^2 \theta) \right] \quad (3.7)$$

$\sigma_x$  et  $\sigma_h$  étant les écarts-types des déplacements des cibles en distance et verticalement dans le cas de mouvement statistiquement gaussiens. Il est logique de considérer, que la tendance générale de la cohérence est de diminuer au cours du temps, néanmoins, il a été observé [MF95a] une évolution cyclique de la cohérence avec le temps. Ce phénomène est lié à des variations transitoires de l'humidité du sol, qui peuvent momentanément réduire la cohérence.

Un autre effet peut également conduire à une décorrélation temporelle : il s'agit de la rotation des cibles par rapport à l'axe de visée. En effet, si les cibles sont mobiles, elle peuvent subir une rotation entre les deux acquisitions et se présenter sous un angle différent. Ce qui entraîne une variation de la phase du pixel. Si on note  $\delta$  cet angle, la cohérence s'écrit

alors [ZV92] :

$$\gamma_{rotation} = 1 - \frac{2 \sin \theta \delta r_a}{\lambda}, \quad (3.8)$$

où  $r_a$  est la résolution en azimut.

### 3.3.3 Applications

Avec leur couverture, les données interférométriques différentielles fournissent un champ dense de déformation et sont particulièrement intéressantes pour suivre l'évolution de phénomènes naturels de large envergure. En particulier, les domaines des risques naturels, que ce soit la volcanologie [MBA95], l'étude des tremblement de terre [ZRG<sup>+</sup>94, MRC<sup>+</sup>93b, MFRA94, MF95b, FSJ95, Mas] ou les glissements de terrain [CMVK94, CMKb, CMKa, FA95] sont très intéressés. En effet, pour le moment, les seules techniques de télédétection existantes pour ces études utilisaient soit des comparaisons de modèles numériques de terrain aéroportés successifs [Gir92] nécessitant des campagnes d'acquisition dédiées et fournissant des résultat peu précis (incertitude de plusieurs mètres), soit des balises GPS (*Global Positioning System*) fournissant cette fois des résultats d'une très grande précision mais des mesures ponctuelles et coûteuses.

Grâce à leur précision centimétrique, les interférogrammes permettent de comparer fidèlement les prévisions apportées par les modèles géophysiques. Néanmoins, ces perspectives sont très relatives à la fois à la complexité du phénomène étudié et aux conditions d'acquisitions des données radar.

## Chapitre 4

# Présentation des données

Les chapitres qui suivent présentent des résultats sur des données radar. Comme il a été vu précédemment il existe plusieurs types de données radar : interférogrammes, images de cohérence, images d'intensité, interférogrammes différentiels. Quatre sites présentant des caractéristiques d'évolution, ont été retenus pour cette étude, deux volcans, un glissement de terrain et une région soumise à des pluies régulières. Ce chapitre décrit les jeux de données utilisés, les sites d'étude correspondant, leur caractéristique et leurs provenances.

### 4.1 Etna

L'Etna est un des volcans en activité le plus étudié dans le monde, en particulier grâce à l'interférométrie radar [MBA95]. Il est situé en Italie, plus précisément en Sicile près de la ville de Catane. L'interférogramme topographique, visualisé figure 4.1, a été fourni par MATRA.

La figure 4.2 montre un interférogramme différentiel de l'Etna généré par l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP).

D'autre part, on dispose également d'un modèle de déformation. Ce modèle a été proposé

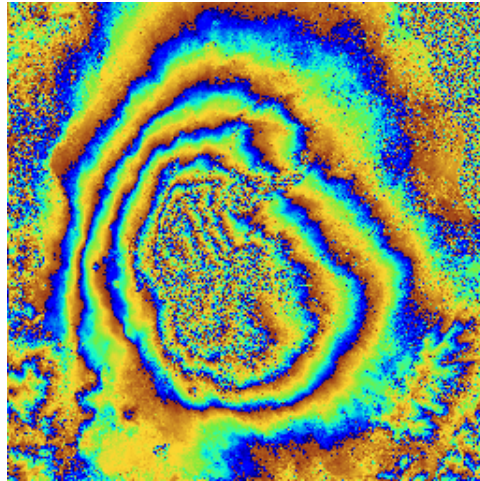


FIG. 4.1 – *Interférogramme de l'Etna.*

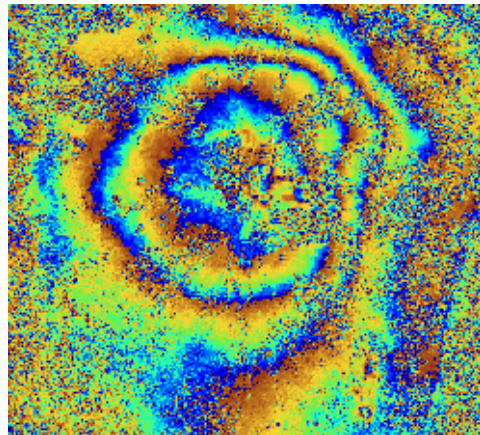


FIG. 4.2 – *Interférogramme différentiel de l'Etna.*

par Mogi [Mog58] et a été établi pour modéliser les variations topométriques de surface, qui accompagnent les éruption volcaniques et qui sont générées par des mouvements internes de matériaux et des changements de pression à l'intérieur de la croûte terrestre. Son principe repose sur le fait de représenter la croûte terrestre comme un corps élastique et sur la modélisation de la source de déformation par une sphère changeant de pression hydrostatique (voir figure 4.3).

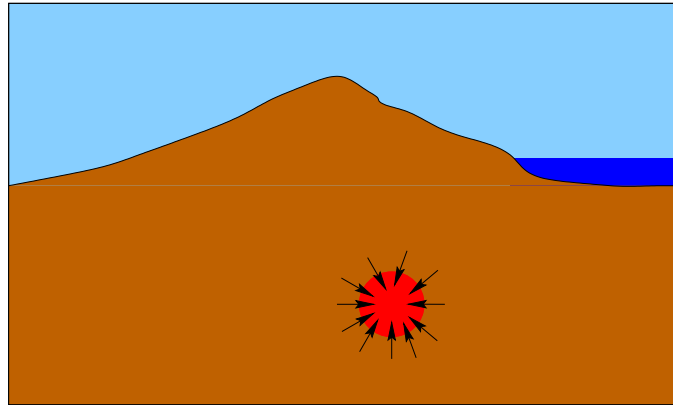


FIG. 4.3 – *Modèle théorique de déformation volcanique de Mogi.*

Ce modèle a été utilisé à l'IPGP pour modéliser les déformations de l'Etna. La figure 4.4 illustre l'interférogramme synthétique issu de ce modèle.

## 4.2 Vatnajökull

Le 30 septembre 1996, une puissante éruption volcanique débuta sous le glacier Vatnajökull en Islande. La chaleur dégagée fit fondre la glace et les eaux de fonte remplirent un lac sous-glaciaire niché dans la caldeira du volcan Grimsvötn. L'agence spatiale européenne (ESA) a mis à disposition deux produits interférométriques complets (interférogrammes, images de cohérence et image d'intensité) de cette région ainsi qu'une image de phase déroulée et une image d'élévation. La figure 4.5 montre la région d'étude et des deux zones

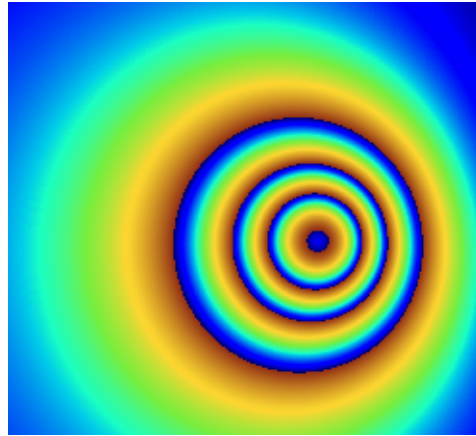


FIG. 4.4 – *Interférogramme différentiel synthétique de l'Etna.*

retenues. La figure 4.6 illustre pour la zone 2 les trois images disponibles pour chaque zone.

### 4.3 Naizin

En 1989, Gabriel et *al.* [GGZ89] utilisèrent la technique interférométrique différentielle sur les images de l'*Imperial Valley*, en Californie. Ils détectèrent des variations de phase cohérentes sur des parcelles cultivées. Ces effets de phases furent associées à des déformations du sol, correspondant à un gonflement après irrigation des champs. D. Massonnet et *al.* [MRC93a] introduisent le terme de “phasimétrie” pour définir des effets de phase qui ne sont dus ni à des mouvements du sol, ni à une mauvaise estimation orbitale, ni à la topographie du site imagé. Ce genre d'effet peut facilement apparaître sur des régions agricoles : pendant la première acquisition, la contribution à la réflectivité est due à une certaine portion des plantes ; lors de la seconde acquisition, alors que la position de la plante n'a pas changé, la contribution de cette même plante est différente. Dans ce cadre, la cible devrait conserver une forte cohérence, avec un grand changement dans les amplitudes. Ainsi «sans être une preuve, des changements dans l'image d'amplitude, avec une conservation de la cohérence, devraient traduire des **effets phasimétriques**».

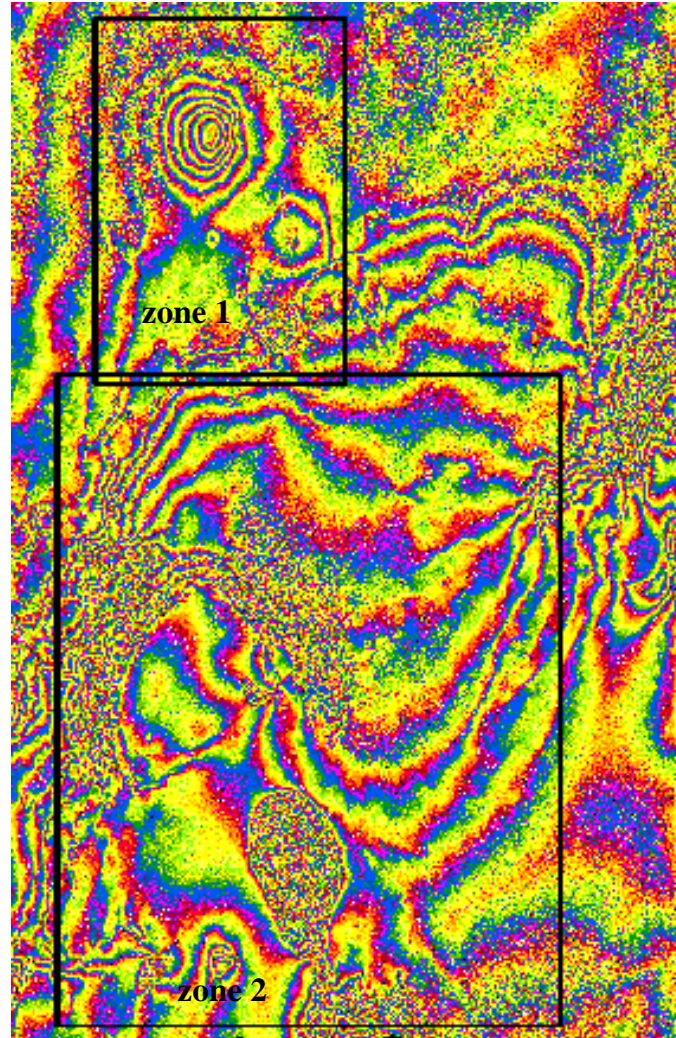


FIG. 4.5 – *Interféogramme de la région du Vatnajökull et ses deux zones d'études.*



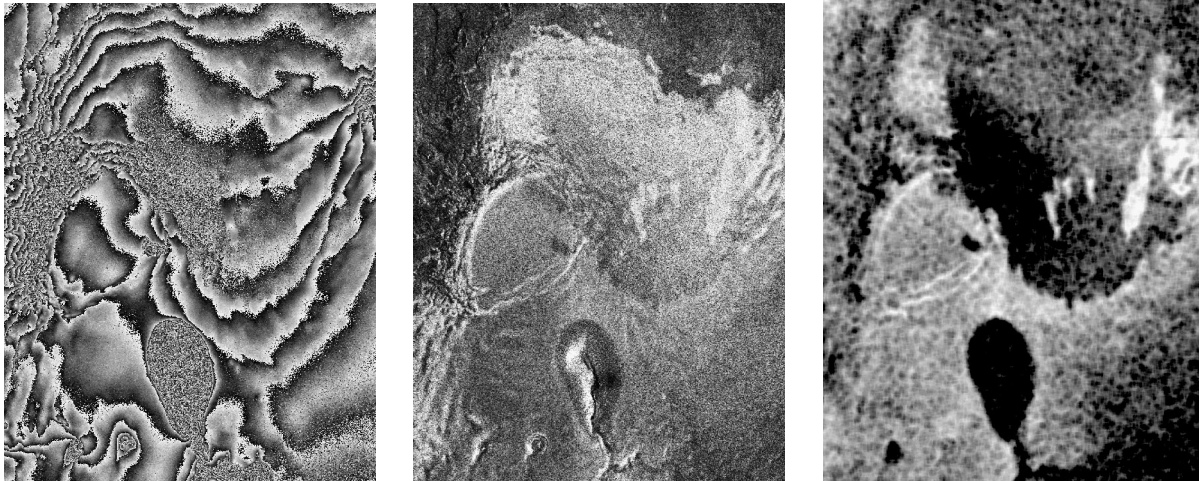


FIG. 4.6 – *Produit interférométrique de la région du Vatnajökull.*

L'analyse d'une séquence d'images d'intensité, de cohérence et de différence de phases montre que des effets de phase importants peuvent accompagner l'évolution des couverts végétaux à la suite d'épisodes pluvieux. Les sols nus, repérables lorsqu'ils sont rugueux, par une forte rétrodiffusion, conduisent eux, à des effets de phases beaucoup plus modestes. Le site de Naizin, en Bretagne, est particulièrement intéressant pour cette étude. En effet, il s'agit d'une région, où la pluviométrie est importante, où il a y des parcelles de champs cultivées et d'autres en jachère ainsi que des zones forestières [RBM<sup>+</sup>95, RBC<sup>+</sup>96]. Le Laboratoire de Géologie Structurale et de Télédétection nous a fourni les jeux de données acquis en 1994. Il s'agit de quinze interférogrammes de cette région, accompagnés des image de cohérence correspondante et de six images d'intensité mono-dates correspondant aux dates d'acquisitions des interférogrammes.

La figure 4.7 montre deux portions de ces images d'intensité acquises à un mois d'intervalle accompagnées de la cohérence correspondante. Tandis que la figure 4.8 montre un interférogramme différentiel de la même région. On y distingue de grandes franges plus ou moins parallèles et les effets phasimétriques qui se détachent de leur environnement.

Le tableau 4.1 récapitule l'ensemble des couples de dates, où les conditions interférométriques étaient respectées.

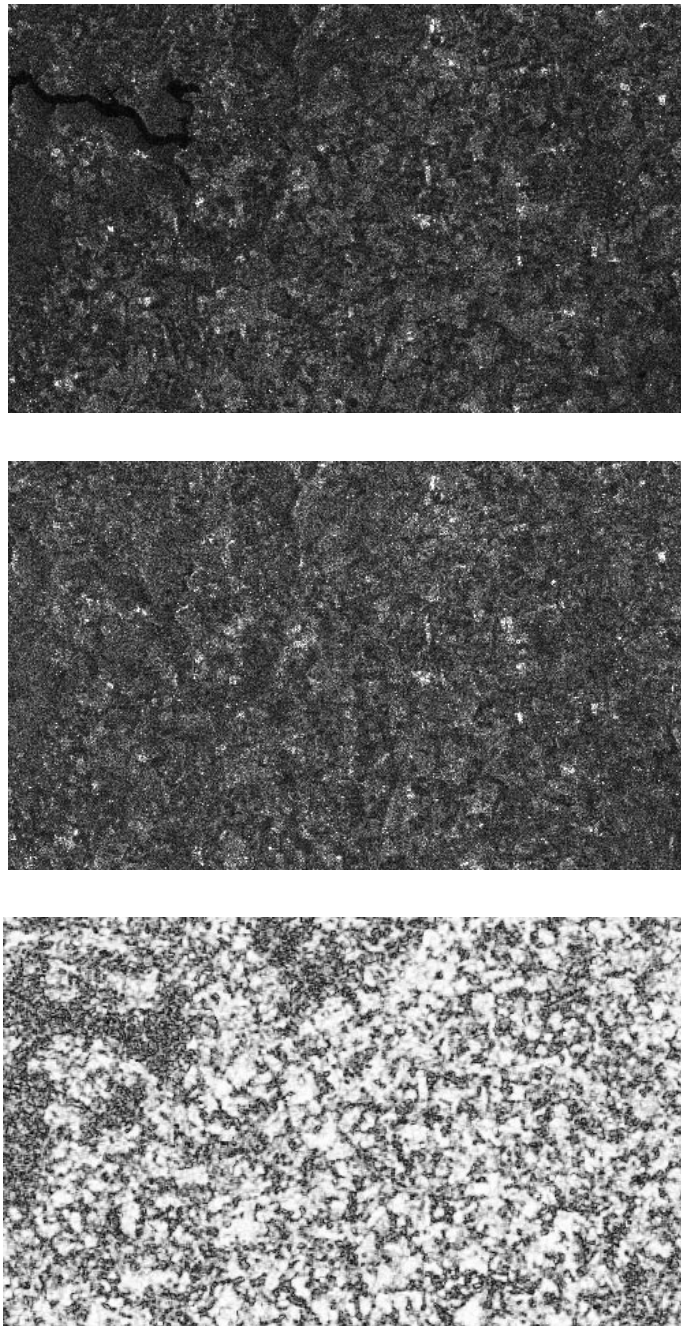


FIG. 4.7 – Images d'intensité du site de Naizin et la cohérence correspondante.

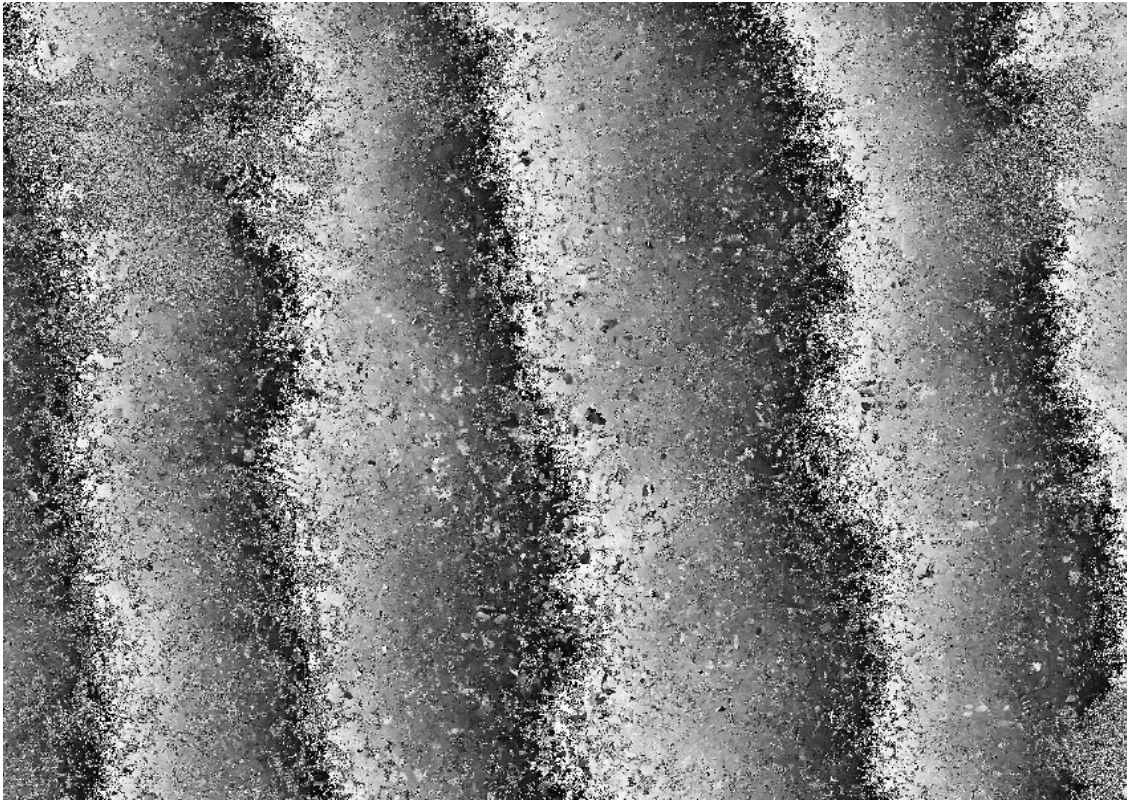


FIG. 4.8 – *Interférogramme différentiel du site de Naizin.*

Référence	date 1	date 2
37-40	6 février	9 février
37-42	6 février	12 février
37-45	6 février	15 février
37-72	6 février	13 mars
37-75	6 février	16 mars
40-42	9 février	12 février
40-45	9 février	15 février
40-72	9 février	13 mars
40-75	9 février	16 mars
42-45	12 février	15 février
42-72	12 février	13 mars
42-75	12 février	16 mars
45-72	15 février	13 mars
45-75	15 février	16 mars
72-75	13 mars	16 mars

TAB. 4.1 – *Récapitulation des jeux de données sur Naizin.*

## 4.4 Clapière

En 1994, 200 communes françaises ont été touchées par un éboulement, un glissement ou un effondrement de terrain donnant lieu à un arrêté de catastrophe naturelle. Le site de la Clapière, à Saint-Étienne de Tinée près de Nice, est l'un des sites à risque surveillé très régulièrement.

Le Bureau de Recherche en Géologie Minière (BRGM) nous a fourni les données interférométriques de cette étude. Les données à disposition sont quatre interférogrammes différentiels haute résolution, et les images de cohérence ainsi que les portions correspondant au glissement de terrain recalées dans la géométrie du sol.

La figure 4.10 montre une de ces images de cohérence en haute résolution. Tandis que la figure 4.11 montre la portion correspondant au glissement, dans la géométrie de l'acquisition. Les indices à gauche correspondent aux dates d'acquisition selon la chronologie de la figure 4.9.

Enfin la figure 4.12 montre l'interférogramme 3–4 dans la géométrie du sol, c'est-à-dire géoréférencé.

FIG. 4.9 – *Chronologie d'acquisition des interférogrammes de la Clapière.*

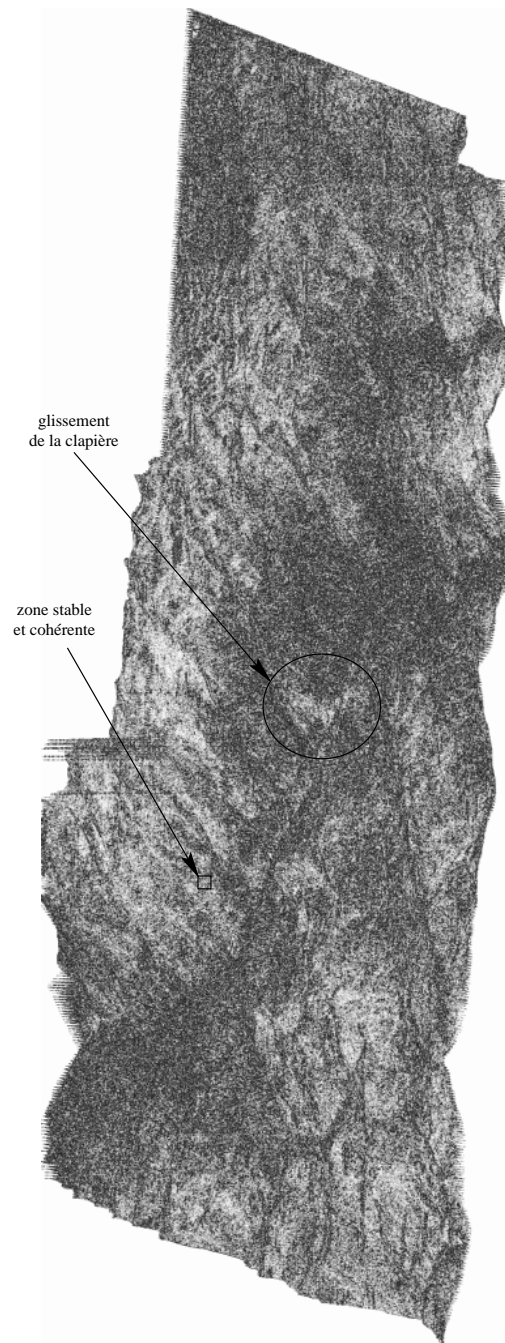
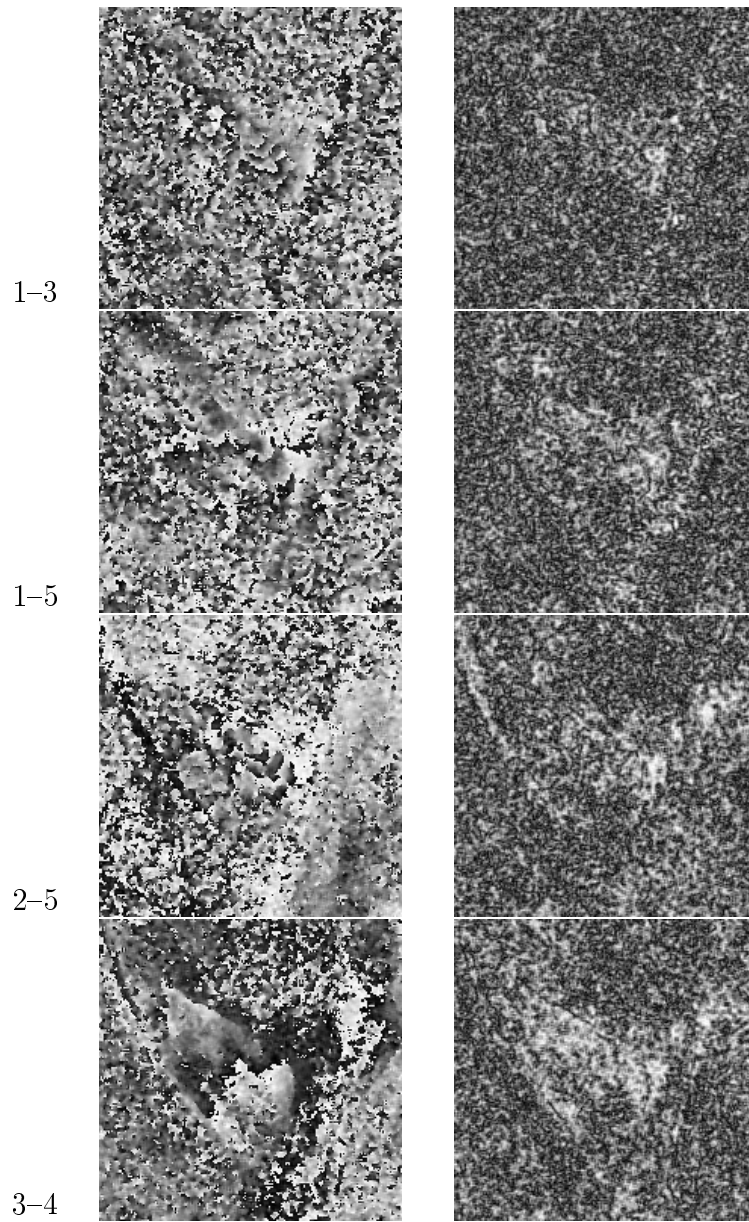


FIG. 4.10 – *Image de cohérence haute résolution.*



(a) interférogrammes différentiels (b) images de cohérence

FIG. 4.11 – *Région du glissement de terrain.*



3-4

FIG. 4.12 – *Interférogramme différentiel du glissement de terrain géoréférencé.*





---

## Deuxième partie

### Déroulement de phase



## Chapitre 5

# Méthodes de déroulement

Bien que d'une grande précision, les données interférométriques, de part leur définition même, ne sont connues qu'à un modulo près. L'étape de déroulement est obligatoire pour retrouver une mesure absolue. Nombre de solutions ont été proposées pour répondre à ce problème. Après avoir défini l'expression "déroulement de phase", un état de l'art de ces méthodes est présenté. Une méthode itérative, basée sur un algorithme de segmentation par croissance de région et sur une régularisation markovienne est ensuite détaillée.

### 5.1 Des mesures ambiguës

Comme il a été expliqué dans la première partie, la mesure sur la phase  $\varphi$  n'est connue qu'avec une ambiguïté de  $2\pi$ . Afin de s'affranchir de cette ambiguïté, on doit passer par une étape appelée **le déroulement de phase**.

En chaque pixel de l'image, on cherche à retrouver l'ordre, c'est-à-dire le nombre  $k$  de fois  $2\pi$  à ajouter à la mesure de phase  $\varphi$  pour retrouver la phase déroulée  $\psi$  (voir figure 5.1):

$$\psi = \varphi + 2k\pi \tag{5.1}$$

On pourra ensuite reconstruire une carte d'altitude (interférométrie) ou de déplacement (interférométrie différentielle).

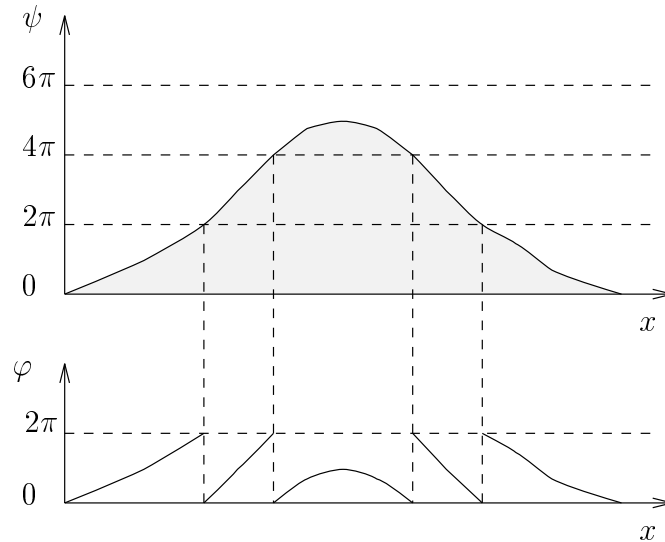


FIG. 5.1 – *Déroulement de phase mono-dimensionnel.*

## 5.2 État de l'art

Une hypothèse fondamentale et implicite pour le déroulement de phase est de considérer que la surface à reconstruire est relativement régulière, et que par conséquent la phase déroulée est continue. Or, le signal bidimensionnel formant l'interférogramme, provient d'un échantillonnage spatial selon la taille des pixel, obtenu en azimuth et en distance. Si le critère de Nyquist [GP98] est respecté dans les deux directions, l'échantillonnage doit se faire au double des fréquences maximales respectives du signal [Spa95]. Cela implique que la phase varie de moins de  $\pi$ , demi-période du signal, entre deux pixels adjacents  $s$  et  $t$  :

$$|\psi_s - \psi_t| < \pi \quad (5.2)$$

On peut considérer qu'il existe deux grandes classes de méthodes de déroulement de phase : les approches locales, issues des algorithmes de déroulement mono-dimensionnels, tentent de restaurer la phase déroulée par propagation de l'ordre ; les méthodes globales cherchent, soit à déterminer des structures globales sur l'image, soit à minimiser un critère de régularité sur toute l'image, par méthode itérative (approche par moindres carrés) ou par convolution (approche par fonction de Green).

### 5.2.1 Les méthodes locales

Si l'hypothèse (5.2) est valide sur toute l'image, alors le déroulement peut s'obtenir par propagation de l'ordre à partir d'un pixel de référence. Les méthodes locales sont basées sur cette technique, et les pixels sont déroulés de proche en proche :

En définissant  $\Delta\psi_{s,t}$  comme étant la vraie différence de phase entre deux pixels adjacents, et  $\Delta\varphi_{s,t} = \varphi_s - \varphi_t$  la différence entre les valeurs lues dans l'interférogramme. L'approche la plus naturelle pour dérouler la phase est de procéder pixel par pixel, en effectuant l'opération suivante :

- si  $|\Delta\varphi_{s,t}| = \pi$ , alors  $\Delta\psi_{s,t} = \Delta\varphi_{s,t}$  ;
- si  $|\Delta\varphi_{s,t}| > \pi$ , alors  $\Delta\psi_{s,t} = \Delta\varphi_{s,t} + 2\pi$  ;
- si  $|\Delta\varphi_{s,t}| < \pi$ , alors  $\Delta\psi_{s,t} = \Delta\varphi_{s,t} - 2\pi$ .

La première méthode de déroulement locale a été introduite par Goldstein et *al.* [GZW88]. Le déroulement y est effectué par intégration des différents  $\psi_{s,t}$  le long d'un trajet arbitraire, qui passe par tous les points. La phase déroulée ne doit pas comporter de variation de phase supérieure à  $\pi$  entre deux pixels voisins, et la solution doit être indépendante du trajet d'intégration. Pour tenir compte des discontinuités de phase dues au bruit ou aux régions comportant une trop forte variation d'altitude, les auteurs détectent des pixels résidus, témoins d'erreurs locales, qui risquent d'entraîner des erreurs globales. Un résidu est détecté, lorsqu'en déroulant l'interférogramme selon un parcours fermé, il subsiste un

saut de phase supérieur à  $\pi$ . Les pixels résidus sont identifiés puis retirés du trajet à utiliser lors de l'algorithme de déroulement de phase.

Prati et *al.* [PRGD90] améliorent la méthode en proposant une solution, qui exploite à la fois l'information de phase et celle d'amplitude. Les pixels résidus sont reliés par des lignes appelées *ghostlines*, auxquelles on associe une fonction de coût augmentant avec la longueur et fonction de l'amplitude. En effet, ces lignes ont plus de chance de correspondre aux zones d'ombre ou de recouvrement de l'image. Le parcours de déroulement ne doit pas traverser ces lignes.

Il existe de nombreuses autres méthodes locales, elles forment la majorité des méthodes de déroulement utilisées dans des cadres opérationnels.

## 5.2.2 Les méthodes globales

Le problème des méthodes de propagation est dû à leur caractère local. La détermination de l'ordre, se faisant de proche en proche, ne permet pas de prendre en compte l'aspect global du résultat. Les erreurs risquent de se propager et de faire apparaître des décalages supérieurs à  $2\pi$  entre pixels adjacents. Les méthodes globales ne considèrent pas l'interférogramme pixel par pixel, mais tentent plutôt soit de le partitionner en régions élémentaires (comme les franges), soit d'identifier la phase déroulée à un modèle global continu.

### Détection des franges

Si l'image est peu bruitée, il suffit de repérer les régions comprises entre deux rotations de  $2\pi$  puis de leur identifier un ordre [PM91].

Dans le cas où le bruit augmente, Lin et *al.* [LVZ92] proposent d'utiliser un détecteur de contour classique pour détecter les bords de frange. Une série de filtres orientés ( $-90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) est appliquée, et le maximum en chaque pixel est conservé. Les contours ainsi obtenus sont ensuite regroupés. Le déroulement s'effectue en ajoutant

le multiple de  $2\pi$  adéquat à chaque fois que l'on croise un bord de frange.

### Approche par moindres carrés

La méthode de déroulement, dite des moindres carrées [TT88, GR89], consiste à rechercher une solution  $\psi$ , compte tenu du gradient de phase estimé  $\widehat{\nabla\psi}$ . On cherche une solution au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'on minimise sur toute l'image de  $N \times M$  pixels, l'écart quadratique :

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\widehat{\nabla\psi}_{i,j} - \nabla\varphi_{i,j})^2 \quad (5.3)$$

où le gradient discret de la phase non-déroulée au pixel  $s(i, j)$  est donné par :

$$\nabla\varphi(i, j) = \begin{pmatrix} \varphi(i+1, j) - \varphi(i, j) \\ \varphi(i, j+1) - \varphi(i, j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\varphi(i, j)_x \\ \nabla\varphi(i, j)_y \end{pmatrix}$$

En développant,  $E$  s'écrit :

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\psi(i+1, j) - \psi(i, j) - \nabla\varphi(i, j)_x)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\psi(i, j+1) - \psi(i, j) - \nabla\varphi(i, j)_y)^2$$

Si on considère une image carrée  $M = N$ , on peut utiliser la formulation matricielle proposée par Hunt [Hun79], afin d'appliquer des méthodes itératives de résolution de système linéaire. Minimiser  $E$  revient alors à trouver les  $\psi(i, j)$  tels que :

$$\forall i, j \quad \frac{\partial E}{\partial \psi(i, j)} = 0$$

Cette équation permet de déduire la relation suivante, que l'on peut résoudre de façon itérative :

$$\begin{aligned} \psi(i+1, j) + \psi(i-1, j) + \psi(i, j+1) + \psi(i, j-1) - 4\psi(i, j) &= \rho(i, j) \\ \text{avec } \rho(i, j) &= \nabla\varphi(i, j)_x - \nabla\varphi(i-1, j)_x + \nabla\varphi(i, j)_y - \nabla\varphi(i, j-1)_y \end{aligned}$$

Cette formulation n'évite par l'inexactitude de la solution, en présence d'une zone difficilement déroulable. Les erreurs sont parfois propagées sur de grandes zones de l'image. Plusieurs solutions de pondération [Tro96] ont donc été présentées, de manière à tenir



compte des zones peu fiables dans l'interférogramme. Il s'agit alors d'après (5.3) de minimiser :

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w(i, j) (\psi(i+1, j) - \psi(i, j) - \nabla\varphi(i, j)_x)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w(i, j) (\psi(i, j+1) - \psi(i, j) - \nabla\varphi(i, j)_y)^2$$

Ces pondérations entraînent une plus grande complexité algorithmique dans le calcul de la solution. Les méthodes de résolution utilisées sont alors le gradient conjugué [GR94] ou l'approche multi-grilles [Pri96].

La méthode opérationnelle retenue par ISTAR [Dup97] est une combinaison de ces deux méthodes (moindres carrés, suivie des moindres carrés pondérés) terminée par une correction manuelle par un opérateur.

### Déroulement par fonctions de Green

Des travaux récents ont permis de donner une nouvelle formulation de l'approche par moindre carrés, la formulation par fonction de Green [FFL96].

L'identité première de Green s'écrit sous la forme :

$$\int \int_S (\psi \nabla^2 g + \nabla\psi \cdot \nabla g) dS = \oint_C \psi \frac{\partial g}{\partial n} dc,$$

où  $S$  est une région connexe dans le plan  $(x, y)$  de frontière  $C$  et  $n$  est la normale à la frontière  $C$  de la région  $S$ . En choisissant  $g$  égale à la fonction de Green de la région  $S$  :

$$\nabla^2 g(s-t) = \delta(s-t),$$

où  $s$  et  $t \in S$  et par suite :

$$g(s-t) = \frac{1}{2\pi} \ln |s-t|,$$

on arrive à l'écriture suivante de la solution du problème du déroulement de phase :

$$\psi(s) = - \int \int_S \nabla^2 g(s-t) \cdot \nabla\psi(t) dS + \oint_C \psi(t) \frac{\partial g(s-t)}{\partial n} dc. \quad (5.4)$$

On estime le gradient  $\nabla\psi$  de la phase continue à partir de  $\nabla\varphi$  en excluant les sauts issus des passages de la phase mesurée entre 0 et  $\pi$ . La valeur  $\psi(t)$  le long du contour  $C$  est calculée grâce au schéma itératif :

$$\psi_c(s_c) = -2 \int \int_S \nabla^2 g(s_c - t) \cdot \nabla \psi(t) dS + \oint_{\bar{C}} \psi(t) \frac{\partial g(s_c - t)}{\partial n} dc,$$

avec  $s_c \in C$  et  $\bar{C}$  le contour  $C$  sans le point  $s_c$ .

On peut démontrer que cette méthode est théoriquement équivalente à celle des moindres carrés. Néanmoins, la formulation de la solution définitive ainsi que la méthode de régularisation utilisée par Liuboshenko [LM98, LM] pour calculer le gradient permettent d'améliorer la stabilité locale du déroulement ainsi que celle liée à la propagation des erreurs.

### 5.2.3 Les méthodes mixtes

Les méthodes de déroulement globales, telles que les méthodes par moindres carrés ou basées sur la formulation de Green, reviennent à estimer un biais, en chaque pixel. Or il a été démontré [Bam93], que les estimateurs utilisés ne peuvent faire la différence entre le biais dû au bruit et celui correspondant à la pente réelle. Il s'ensuit parfois une disparition des franges, lorsqu'on compare l'interférogramme avec l'image déroulée prise modulo  $2\pi$  [LA97].

En 1993, sont apparues des méthodes tentant de lier les qualités des approches locales et globales. Ces méthodes sont généralement basées principalement sur l'hypothèse d'une surface à régulariser et utilisent les outils de segmentation markovienne désormais bien connus en traitement d'image. Dupont [Dup93] propose une méthode de déroulement de phase s'appuyant uniquement sur le modèle de membrane pour régulariser la surface. Labrousse et *al.* [LDB] améliorent cette technique, en proposant une fonction de coût liée à la cohérence de phase, afin de tenir compte des discontinuités présentes dans l'interférogramme. Ces méthodes présentent d'excellents résultats, néanmoins les algorithmes de relaxation qui sont utilisés sont très coûteux.

Nous avons également proposé [HHC96] une méthode de segmentation des interféro-

grammes en régions de même ordre, basée sur les propriétés des franges (homogénéité locale de la phase et régularité) et de la surface à reconstruire (régularité), nous avons proposé un modèle stochastique. Utilisant une technique d'optimisation déterministe, cette méthode permet d'obtenir, un résultat plus rapidement que les deux précédentes. Néanmoins, elle reste très dépendante de l'initialisation. La section suivante, présente dans le détail, un modèle plus performant, moins sensible à l'initialisation et proposant grâce à un mécanisme itératif, de corriger les erreurs de déroulement.

## 5.3 Déroulement par étapes

Comme nous l'avons vu à la section précédente, les approches locales sont faciles à mettre en œuvre mais les erreurs commises localement ont tendance à se propager. L'approche proposée ici, tient compte de cette propagation, et bien que locale elle tient compte de contrainte de déroulement globale [HCH97].

Le déroulement s'effectue par un processus itératif avec trois étapes successives :

1. on calcule une image déroulée grâce à une approche locale "classique" (**phase d'initialisation**),
2. on améliore ce déroulement par un algorithme de **segmentation markovienne**,
3. on annule le déroulement à l'intérieur des régions mal déroulées par une **détection des zones résiduelles**.

### 5.3.1 Initialisation

Il s'agit d'une méthode locale, par croissance de région, basée sur une méthode proposée par Hock Lim et *al.* [LXH95]. La région déroulée, croît autour d'un premier pixel dont

l'ordre a été choisi arbitrairement. Seuls les pixels adjacents à un pixel déroulé sont examinés. En chaque pixel une phase déroulée est estimée et l'ordre correspondant déduit. Plusieurs mesures sont utilisées pour mesurer la cohérence de cette estimation et sont comparées à des seuils de manière à décider de sa validité.

#### L'algorithme

les pixels de l'interférogramme sont classés en 4 catégories : non-traité, prêt à être déroulé, déroulé, indéroulable.

1. Au départ, seul un pixel (ou un groupe de pixels), choisi dans une région homogène (gradient image faible), est déroulé de façon arbitraire (on lui attribue un ordre  $k_1$ ), les autres sont "non traités" ;
2. tout voisin d'un pixel nouvellement déroulé est classé "prêt à être déroulé" ;
3. la phase déroulée d'un pixel "prêt à être déroulé" est estimée en fonction de ses pixels voisins, puis l'homogénéité et la confiance en cette estimation, sont comparés à des seuils ;
4. en fonction du résultat des tests, la phase estimée est acceptée comme phase déroulée ou rejetée, dans ce dernier cas, le pixel est alors considéré "indéroulable" ;
5. un pixel "indéroulable" peut être reconsidéré quand à nouveau l'un de ses voisins vient d'être déroulé ;
6. la région déroulée grossit ainsi tant qu'il reste des pixels "prêts à être déroulés" ;
7. s'il ne reste que des pixels "indéroulables", les seuils sont relâchés, ces pixels deviennent "non-traités" et de sont nouveau examinés.

### Estimation de la phase déroulée

En chaque pixel  $s$ , “prêt à être déroulé”, une estimation de sa phase déroulée est donnée par :

$$\widehat{\psi}_s = \frac{\sum_{d=1}^8 w_d \widehat{\psi}_s^d}{\sum_{d=1}^8 w_d} \quad (5.5)$$

où  $\widehat{\psi}_s^d$  correspond à la partie de l'estimation de la phase déroulée en  $s$  donnée par la direction  $d$  et pondérée par  $w_d$ . Les valeurs des coefficients de pondération  $w_d$  sont obtenus de la façon suivante, en notant  $t$  le voisin de  $s$  dans la direction  $d$  :

1. si  $t$  est “non-déroulé” alors  $w_d = 0$ ,
2. si  $t$  est “déroulé” et que le pixel adjacent  $t'$ , dans la même direction  $d$ , est lui aussi déroulé alors  $w_d = 1$  et  $\widehat{\psi}_s^d = 2\psi_t - \psi_{t'}$ ,
3. si  $t$  est “déroulé”, et  $t'$  non déroulé, alors  $w_d = \frac{1}{2}$  et  $\widehat{\psi}_s^d = \psi_t$ .

On déduit l'estimation de l'ordre du pixel  $s$  :

$$\hat{k} \text{ l'entier le plus proche de } \frac{\widehat{\psi}_s - \varphi_s}{2\pi} \quad (5.6)$$

Si l'estimation est ensuite déclarée valide alors on note  $\psi_s = \varphi_s + 2\hat{k}\pi$

### Validité de l'estimation

On prend comme mesure d'homogénéité de cette prédiction :

$$H = \frac{\sum_{d=1}^8 w_d \cdot |\widehat{\psi}_s^d - \psi_t|}{\sum_{d=1}^8 w_d} \quad (5.7)$$

Si  $H$  est inférieure à un certain seuil de tolérance alors le déroulement échoue.

On calcule également  $C$  la mesure de confiance sur l'ordre estimé donnée par :

$$C = |\widehat{\psi}_s - \psi_s| \quad (5.8)$$

Si  $C$  est inférieur à un seuil de confiance alors le déroulement échoue.

Au fur et à mesure des itérations, les seuils de tolérance sont peu à peu augmentés de manière à diminuer le nombre de pixels "indéroulables". Ainsi les pixels des zones les plus stables sont déroulés en premier.

#### 5.3.2 Segmentation markovienne

Malgré le caractère progressif de cette méthode locale, liée au relâchement progressif des seuils de tolérance, on retrouve généralement le problème de la propagation d'erreurs locales. La seconde étape du déroulement cherche à résoudre cette difficulté.

On se base sur les techniques de segmentation par application des modèles markoviens, aujourd'hui largement utilisés pour ce genre de problème. Les champs markoviens présentent un moyen de modélisation, où la connaissance est intégrée dans la définition des différentes composantes : voisinage, clique, fonction potentielle, énergie (voir annexe A).

Ici, on considère l'image des phases déroulées comme un système. Une énergie est définie sur toutes les cliques grâce à des fonctions potentielles. Le système atteint une solution lorsque son énergie est minimale.

Le modèle utilise deux propriétés complémentaires :

- régularité de la phase déroulée à reconstruire,
- homogénéité locale de la phase dans une même frange.

Soient :

- $S$  l'ensemble fini des sites de l'image,
- $K \in \Omega = \{0..k_{max}\}^{|S|}$  la variable aléatoire décrivant l'ordre à calculer,
- $\Phi \in \Delta = \{0..2\pi\}^{|S|}$  la variable aléatoire décrivant la phase de l'interférogramme.

Soient  $k$  et  $\varphi$  les réalisations respectives des variables aléatoires  $K$  et  $\Phi$ . On définit deux fonctions potentielles correspondant aux propriétés énoncées. La régularité de la phase déroulée est assurée par le terme :

$$E_1(\varphi, k) = \sum_{s \in S} \sum_{r \in \mathcal{V}_s} |(\varphi_s + 2k_s\pi) - (\varphi_r + 2k_r\pi)| \quad (5.9)$$

basé sur le modèle de membrane,  $E_1$  mesure l'écart entre les phases déroulées. L'homogénéité de la phase locale est assurée par le terme :

$$E_2(\varphi, k) = \sum_{s \in S} \frac{\sum_{r \in \mathcal{V}_s} |\varphi_s - \varphi_r| \mathbb{1}_{(k_s=k_r)}}{1 + \sum_{r \in \mathcal{V}_s} \mathbb{1}_{(k_s \neq k_r)}} \quad (5.10)$$

où  $\mathbb{1}$  est la fonction indicatrice telle que  $\mathbb{1}_{(k_s=k_r)} = 1$  si  $k_s = k_r$ .  $E_2$  mesure l'homogénéité locale de la phase à l'intérieur du même frange.

On écrit alors le modèle sous la forme d'une distribution de Gibbs :

$$\mathbb{P}(k|\varphi) = \frac{1}{Z} e^{-E(\varphi, k)}$$

avec  $E = E_1 + E_2$ .

Afin d'optimiser le temps de la relaxation, on utilise une méthode de minimisation déterministe : un ICM (*Iterated Conditional Mode*). Or, comme l'a démontré Labrousse [Lab96] lorsqu'on utilise un modèle de membrane, il est obligatoire, pour dérouler la phase, d'effectuer des transitions qui font croître l'énergie. Pour résoudre ce problème il est possible d'utiliser une fonction numérique, à deux variables, en forme de cône, définie sur tous les points de l'image et telle que le sommet se trouve en son centre. Il suffit alors de multiplier la valeur des potentiels par celle de cette fonction. On pénalise ainsi les ordres des

pixels se rapprochant des bords par rapport à ceux plus au centre, ce qui entraînera une diminution de la valeur de l'énergie sur une frontière entre deux franges, lorsque celle-ci va se rapprocher des bords. D'autre part, on observe des minima locaux caractérisés par le type de clique utilisés (apparition de frontières obliques avec le modèle en croix, verticales et horizontales avec le modèle carré). Il est alors préférable d'utiliser des cliques d'ordre 6 (voir figure 5.2) moins sensibles à ce problème.

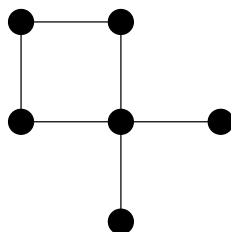


FIG. 5.2 – *Clique d'ordre 6*

Notons également que le choix de modéliser la régularité de la surface reconstruite par un modèle de membrane revient à Dupont [DB94]. Labrousse [Lab96], propose aussi d'utiliser le modèle des plaques minces [Ter84]. Néanmoins il a été montré [Sze89] que ce dernier lisse d'avantage que le modèle de membrane, ce qui se traduit par une perte de précision dans la phase reconstruite.

#### 5.3.3 Détection et traitement des zones résiduelles

Le résultat, après cette seconde étape, présente quelquefois des régions mal segmentées, apparaissant comme des discontinuités dans l'image déroulée.

Ces régions sont appelées “zones résiduelles” pour ne pas confondre avec les résidus telles qu'ils sont généralement définis dans les méthodes classiques de déroulement. En effet, il s'agit ici des discontinuités dans la phase déroulées, et même si les résidus sont effectivement des discontinuités, on va ici plus loin en les définissant comme on le fait pour des contours. La méthode utilisée pour détecter ces régions, n'est pas sans rappeler celle proposée par Bone [Bon91] qui s'appuie sur les dérivées premières de la phase déroulée.



Comme une discontinuité peut introduire un saut de phase de l'ordre de  $2\pi$  qui ne serait pas détecté. Il utilise également les dérivées secondes de la phase après déroulement local. Cet algorithme, initialement développé pour détecter des discontinuités réelles dans des interférogrammes provenant d'un domaine différent du radar, s'apparente en fait à une détection de contours dans l'image déroulée localement. Bone utilise cette technique pour rechercher un masque avant de commencer le déroulement. Dans notre cas une estimation de l'interférogramme déroulé est déjà en notre possession, fournit par l'étape précédente du processus itératif global de déroulement. On peut donc aller plus loin en utilisant une approche "classique" de détection de contours pour détecter les discontinuités. On utilise ici le filtre proposé par Malandain [Mal92]. Ce filtre dérive de ceux définis successivement par J. Canny [Can86] et R. Deriche [Der87]. Les résidus ainsi détectés sont refermés en utilisant un seuillage par hysteresis et l'intérieur des régions ainsi formées est masqué. Notons que la région "intérieur" ne se distingue de "l'extérieur" que par le nombre de pixels connexes qui la compose comparée à celle du reste de l'image.

Ces zones sont alors étiquetées comme "non déroulées", et le processus global de déroulement est de nouveau itéré en retournant à l'étape 1, afin d'évaluer à nouveau la phase déroulée à l'intérieur de ces zones résiduelles en prenant en compte les régions correctement déroulées qui les entourent.

Le processus itératif s'arrête lorsque l'énergie  $E$  de la seconde étape ne diminue plus (voir figure 5.4).

### 5.3.4 Exemple de résultat

On peut visualiser le résultat de la méthode de déroulement sur l'interférogramme de l'Etna (figure 5.5), avant le traitement des résidus figure 5.6.

Finalement on obtient une bonne estimation de la phase déroulée après seulement 8 itérations du processus global, visualisé figure 5.7.

Le principal intérêt de cette méthode, comparativement à une solution totalement stochastique, est certainement le gain en temps de calcul. On obtient généralement un résultat,

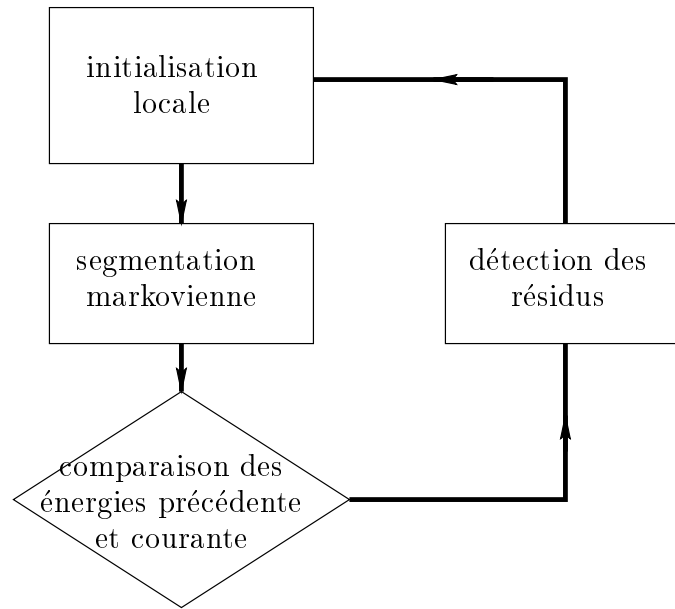


FIG. 5.3 – *Les différentes étapes du déroulement.*

avec seulement 10 itérations du processus global et moins de 100 itérations pour chaque ICM.

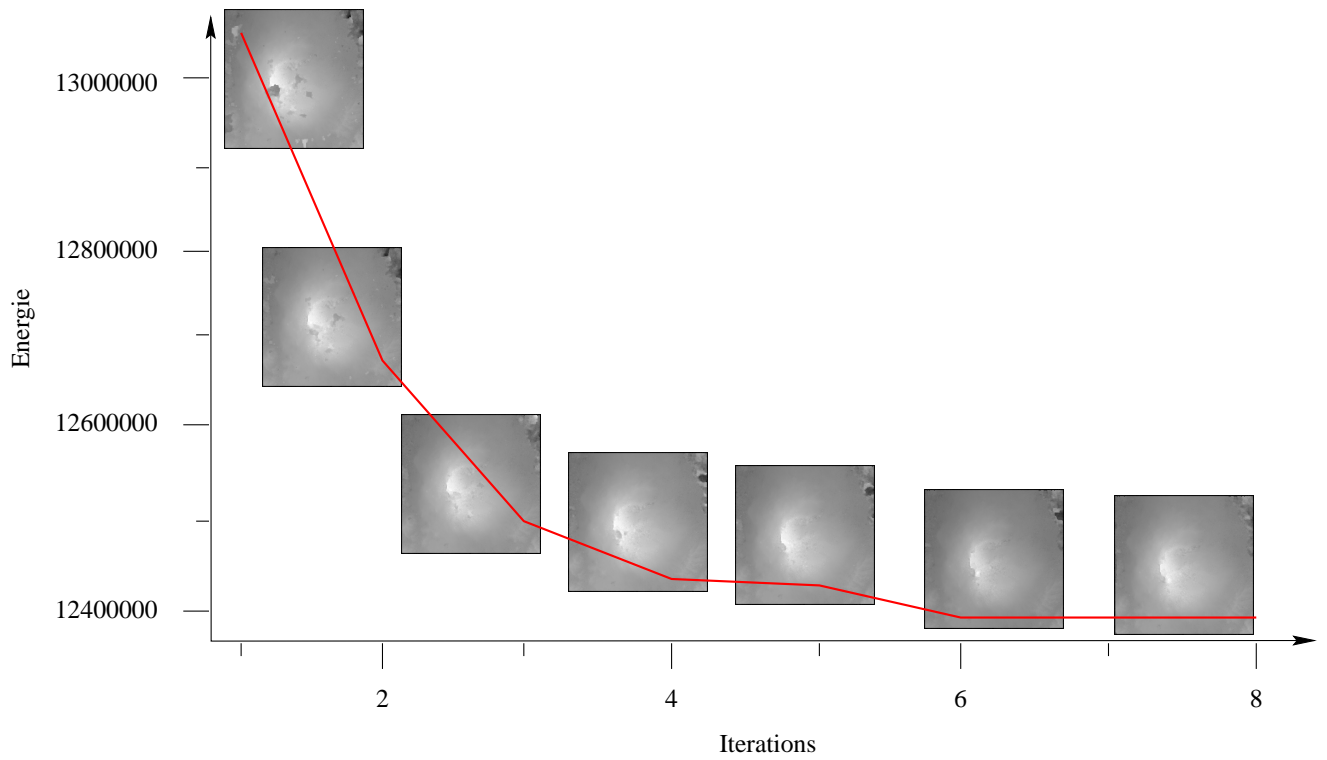


FIG. 5.4 – Variation de l'énergie globale au cours des itérations du processus de déroulement de l'interférogramme de l'Etna.

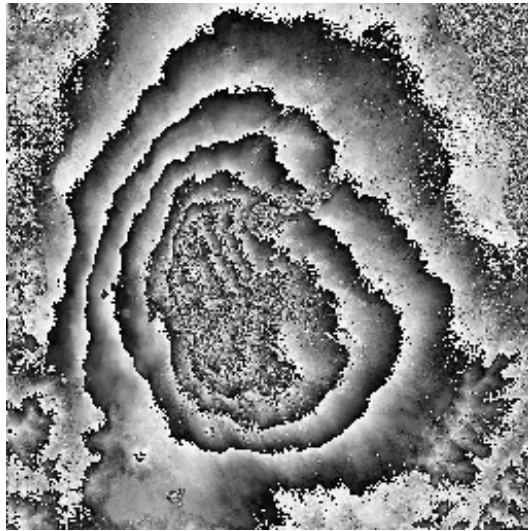


FIG. 5.5 – *Interférogramme de l'Etna.*

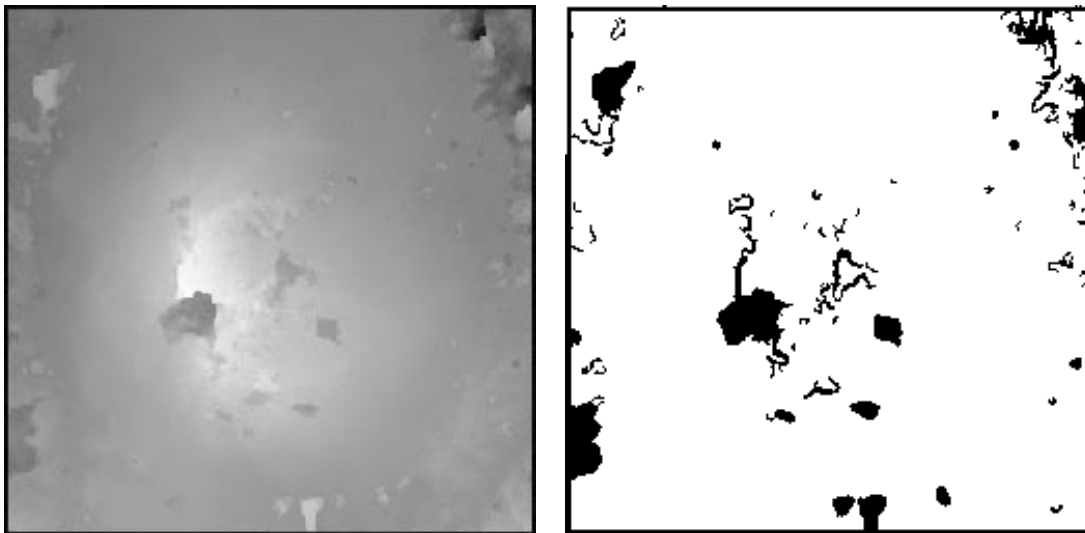


FIG. 5.6 – *Résultat du déroulement après une itération des deux premières étapes (à gauche) et avant le traitement des résidus (à droite).*

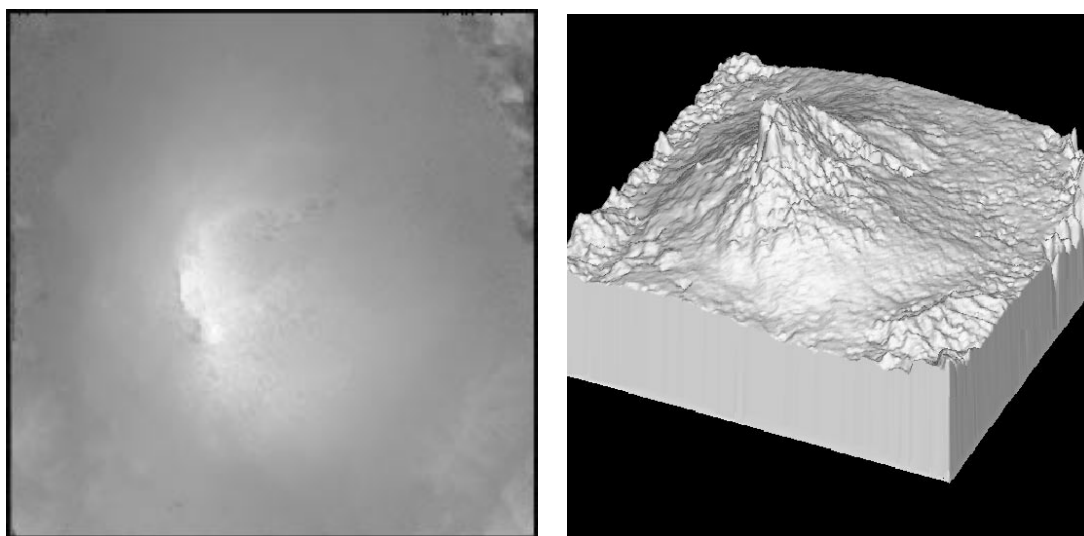


FIG. 5.7 – *Résultat final, à gauche l'image des phases déroulées et à droite sa visualisation tridimensionnelle.*

## Chapitre 6

# Qualité du déroulement

Les résultats du déroulement, par la méthode proposée, sont validés sur des données synthétiques. Deux coefficients de mesure d'erreur sont introduits. Des confrontations avec d'autres méthodes opérationnelles permettent ensuite d'estimer la qualité du déroulement sur des interférogrammes réels. Appliquée à la reconstruction topographique, cette analyse permet de comparer les résultats du déroulement à des Modèles Numérique de Terrain existants. Ce chapitre conclut sur la méthode proposée, aussi bien sur la qualité du déroulement, que sur son positionnement par rapport aux autres méthodes en terme de résultat et de coût algorithmique.

### 6.1 Mesure de l'erreur

Afin de contrôler la qualité des résultats, on peut utiliser deux coefficients de mesure de l'erreur. Le calcul des maxima de l'erreur de développement  $E_g$  est basé sur la norme prise dans l'espace  $L^2$ , ce coefficient a été introduit par Lyuboshenko [Lyu96]. Il représente la stabilité par rapport à la propagation de l'erreur :

$$E_g = \frac{\sum_{s \in S} \sqrt{(\hat{\psi}_s - \psi_s)^2}}{\sum_{s \in S} \psi_s} \quad (6.1)$$

Le calcul des erreurs relatives est donné par  $E_l$ . Il s'agit de l'utilisation d'une mesure équivalente à la première mais calculée sur les gradients de la phase déroulée, ce qui correspond à une mesure sur la norme dans l'espace des fréquences instantanées. Cette mesure a été utilisée par E. Trouvé [Tro96].  $E_l$  décrit la stabilité locale du déroulement :

$$E_l = \frac{\sum_{s \in S} \|\nabla(\hat{\psi}_s - \psi_s)\|}{\sum_{s \in S} \|\nabla\psi_s\|} \quad (6.2)$$

## 6.2 Interférogrammes simulés

Cette expérimentation a été menée sur une image synthétique  $256 \times 256$  générée par superposition de plusieurs fonctions de type gaussien, dont les paramètres ont été ajustés de manière à obtenir huit franges (voir figure 6.1).

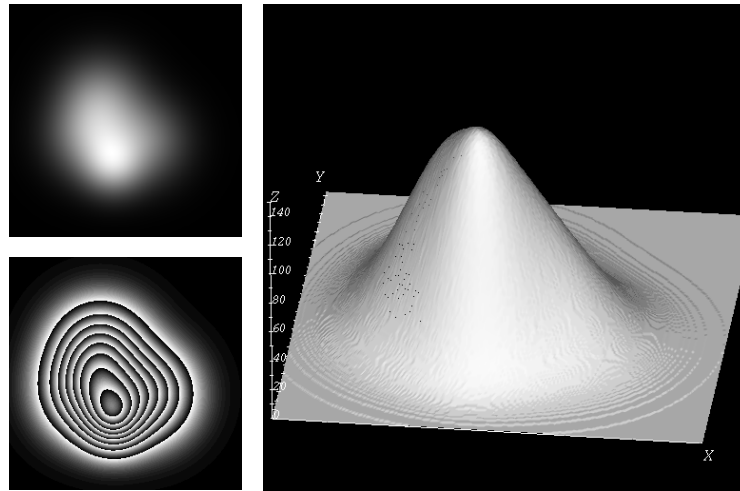


FIG. 6.1 – *Interférogramme simulé avec visualisation tridimensionnelle.*

L'image de frange ainsi obtenue a alors été bruitée en utilisant un bruit gaussien de variance  $\sigma^2 = 0,01$  puis  $\sigma^2 = 0,2$  (voir figure 6.2).

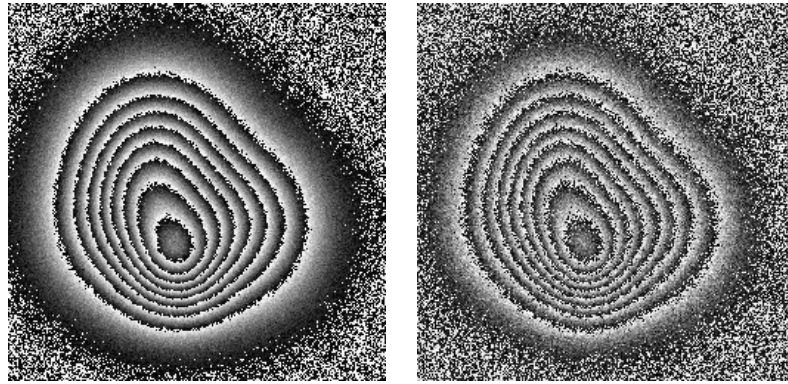


FIG. 6.2 – *Interférogrammes simulés entachés d'un bruit gaussien additif de variances respectives  $\sigma^2 = 0,01$  et  $0,2$ .*

Comme il était aisément envisageable, plus le bruit augmente moins le résultat obtenu est proche du modèle synthétique. Le tableau 6.1 résume les valeurs des mesures d'erreurs obtenues pour ces deux exemples. On visualise les résultats de façon tridimensionnelle sur la figure 6.3.

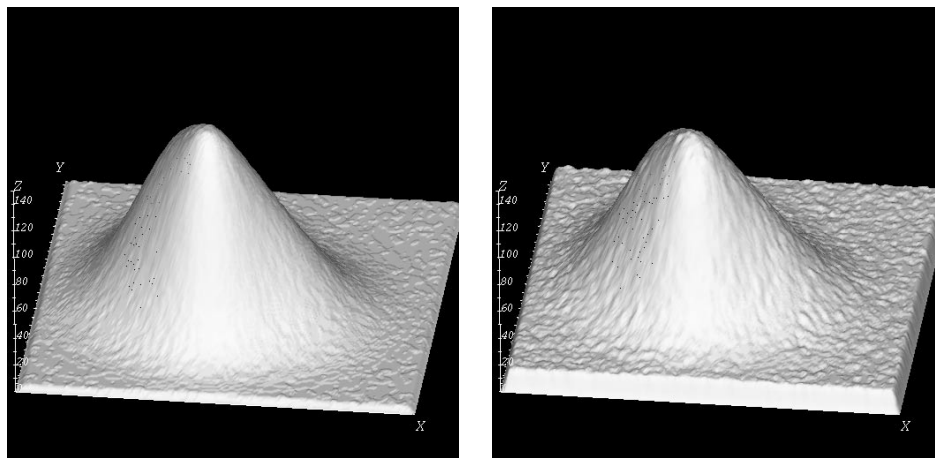


FIG. 6.3 – *Visualisation tridimensionnelle des images déroulées correspondantes.*

Le problème majeur des méthodes de déroulement, s'appuyant sur un modèle de surface régularisante, est leur comportement en présence de discontinuités franches dans la surface réelle. On peut le constater sur l'exemple synthétique de la figure 6.4, après un ajout d'un



Variance du bruit	Erreur max. [rad.]	$E_g$ %%	$E_t$ %%
0,01	0,34	12,1	32,2
0,2	1,08	21,8	44,5

TAB. 6.1 – Erreurs de déroulement sur les deux images bruitées

bruit additif gaussien de variance  $\sigma^2 = 0,2$  puis déroulement, on vérifie que la zone de discontinuité a été lissée (figure 6.5). En fait, en l'absence d'information supplémentaire, il est impossible, à partir de l'interférogramme seul, d'attribuer l'altitude correcte à cet artéfact de terrain. L'ordre attribué par la méthode de déroulement à cette zone est celui qui minimise l'énergie  $E_1$  de l'équation (5.9), c'est-à-dire l'ordre moyen de toutes les franges qui l'entourent. Il en résulte une image plus lissée qu'elle ne le devrait, et une mauvaise évaluation de l'altitude moyenne de cette zone de discontinuité.

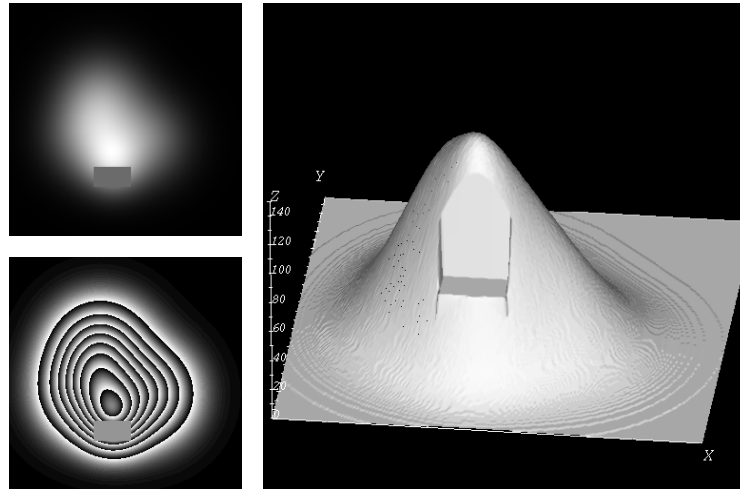


FIG. 6.4 – Interférogramme simulé comportant une forte discontinuité avec visualisation tridimensionnelle

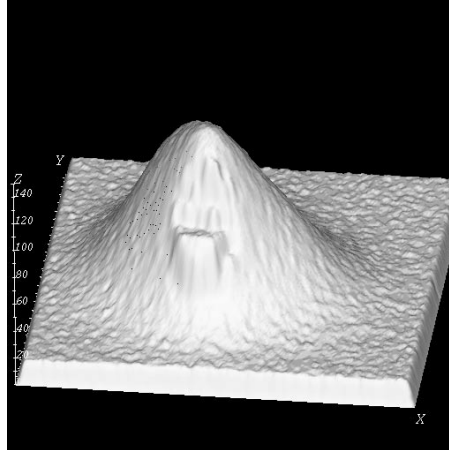


FIG. 6.5 – *Visualisation tridimensionnelle de l'image déroulée après ajout d'un bruit de variance 0.2*

Variance du bruit	Erreur max. [rad.]	$E_g$ %%	$E_l$ %%
0,2	2,98	153	134

TAB. 6.2 – *Erreurs de déroulement sur l'image bruitée comportant une discontinuité réelle.*

## 6.3 Interférogrammes réels

### 6.3.1 Corrélation entre l'image de cohérence et l'image de résidus

Lorsque l'on dispose de la cohérence interférométrique, on peut comparer l'image de cohérence (figure 6.6) et les images de zones résiduelles (figure 6.7), on remarque alors que les zones résiduelles (en noir), correspondent en grande partie aux zones de faibles cohérence (zones sombres).

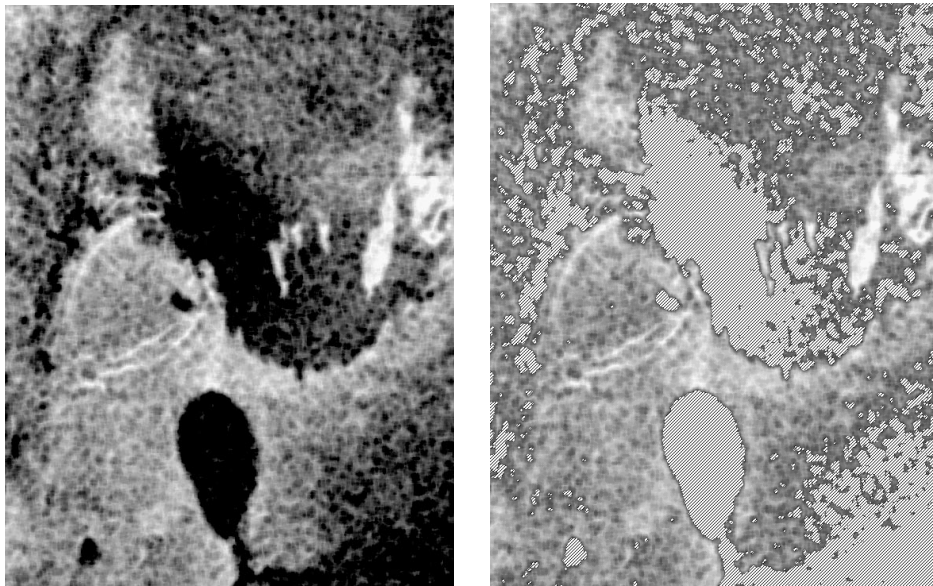


FIG. 6.6 – *Image de cohérence à gauche et à droite la même image, seuillée avec un seuil de 0,35 afin de apparaître les zones de faible cohérence en hachuré.*

On cherche donc à quantifier cette correspondance entre zone incohérente et résidus. La région choisie pour cette étude possède l'intérêt de présenter outre les incohérences des interférogrammes classiques (voir le chapitre 3), une zone de forte incohérence temporelle due à une éruption volcanique subglacière intervenue entre les deux acquisitions à la base de l'interférogramme.

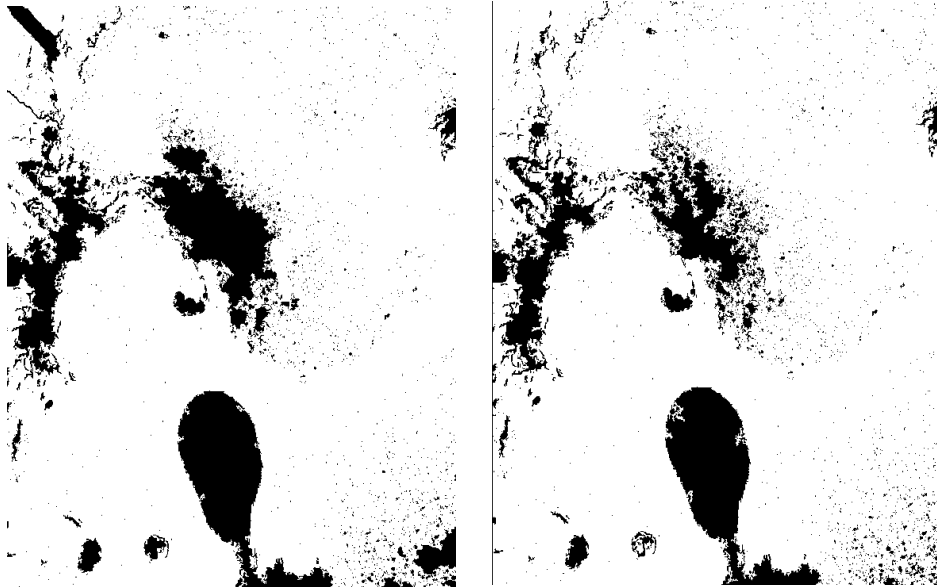


FIG. 6.7 – Image de résidus après la première itération puis à la fin du processus.

Pour cela, on utilise un seuil tel que les valeurs de cohérence inférieures à ce seuil soit considérées comme zone d'incohérence. Expérimentalement, une valeur de seuil optimale a été déterminée à 0,35. On vérifie, à l'aide de l'image de cohérence et des images de résidus calculées au début et à la fin du processus global de déroulement (voir figure 6.7), que cette valeur de seuil était pertinente. Le tableau 6.3 montre qu'en effet environ 90 % des résidus se trouvent dans la plage de cohérence  $[0,0 ; 0,35]$ . L'image de la figure 6.6 montre ces zones de faible cohérence (hachurées).

cohérence	début	fin
0,0 – 0,35	88,8%	89,9%
0,35 – 0,5	5,9%	6,4%
0,0 – 0,35	5,3%	6,4%

TAB. 6.3 – Pourcentage des résidus par plage de cohérence après la première itération et à la fin du processus de déroulement.

### 6.3.2 Comparaison avec un modèle numérique de terrain réel

Il existe un modèle numérique de terrain de la région du Vatnajökull, dans la même géométrie que l'interférogramme. Sur la figure 6.8, on visualise les courbes de niveau issues du MNT réel et celles obtenues grâce à l'interférogramme déroulé.

Comme on peut le constater sur la figure 6.9, lorsqu'on soustrait point à point les deux MNT, on observe plusieurs types d'erreurs :

- des petites zones de quelques pixels où l'on rencontre une erreur moyenne allant de quelques mètres jusqu'à une dizaine de mètres, ces régions sont essentiellement liées à des pixels de bruit et sont majoritairement situées dans des zones peu cohérentes et plutôt sur les frontières interfranges ;
- une région étendue de pixels contigus (pointée par la flèche), où l'erreur de déroulement atteint jusqu'à 101 mètres (alors que la précision du MNT est de  $\pm 30\text{m.}$ ). Comme on peut le constater sur l'imagette extraite de cette zone (figure 6.10), la cohérence dans cette région est particulièrement faible. À la fin du processus de déroulement, cette zone reste étiquetée comme résidu (le mauvais du résultat du déroulement est connu). Cette zone correspond certainement à une discontinuité réelle du terrain, difficile à repérer au regard de l'interférogramme seul. Néanmoins l'image d'intensité correspondante permet d'identifier cette discontinuité.

## 6.4 Conclusion

Dans cette partie a été proposée une méthode de segmentation d'interférogrammes en régions de même ordre. Cette méthode de déroulement de phase tente d'unifier les approches locales et globales en proposant un algorithme itératif composé de trois étapes : une segmentation par croissance de région (caractère local), une segmentation par modèle markovien maximisant un critère de régularité sur l'ensemble du signal reconstruit (caractère global), une détection des erreurs de déroulement. Les trois étapes sont itérées

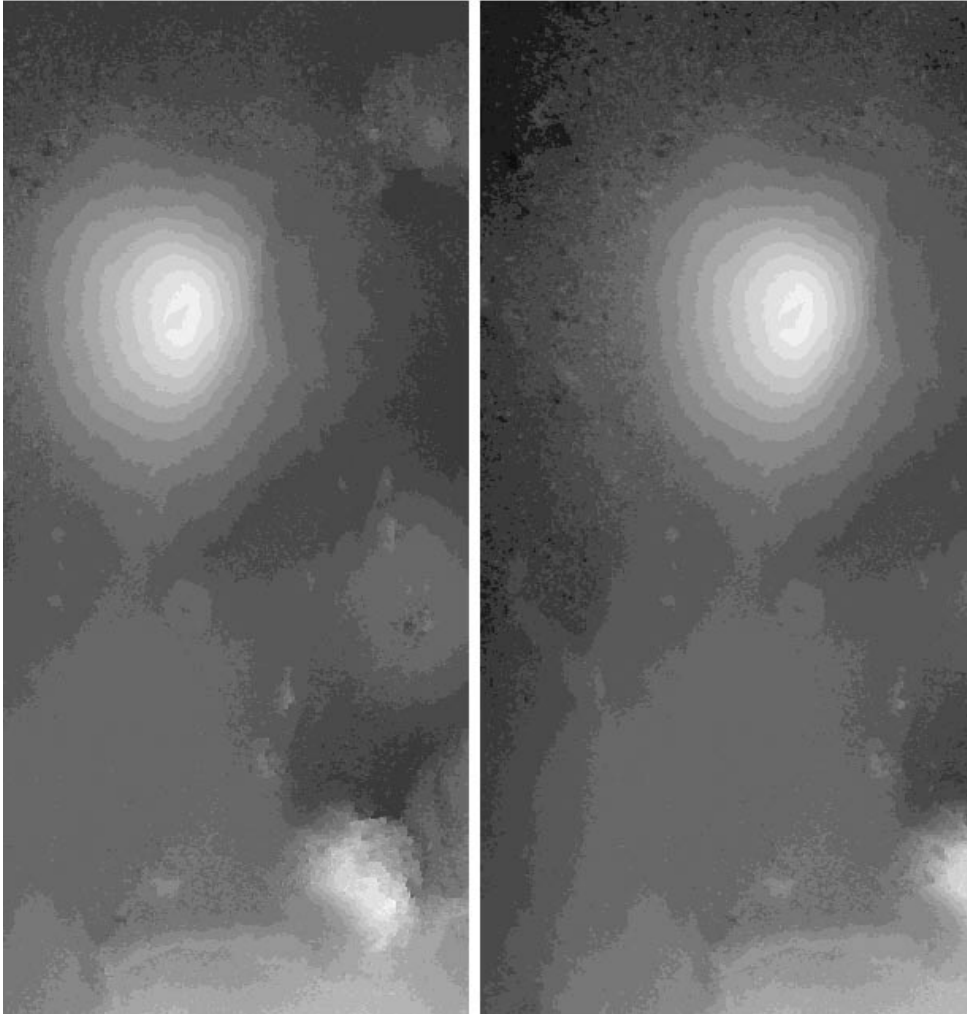


FIG. 6.8 – *Courbes de niveau issues du MNT à gauche et celles obtenues à partir de l'image déroulée à droite.*

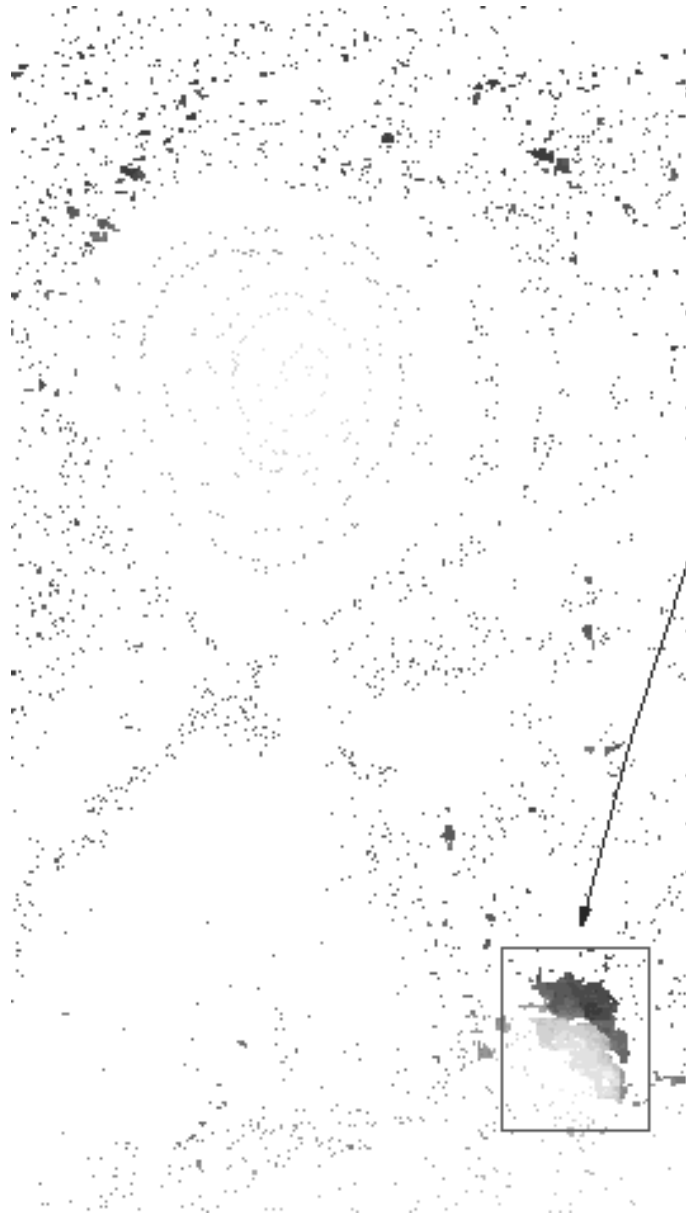


FIG. 6.9 – *Visualisation de la différence entre les deux MNT.*

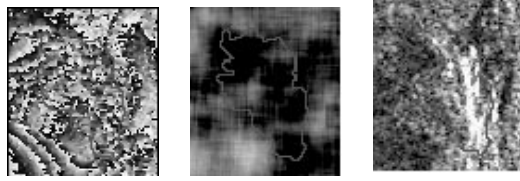


FIG. 6.10 – *Zone de forte erreur de déroulement: image de phase, de cohérence et d'intensité.*

jusqu'à l'absence de variation dans la régularité du signal reconstruit, ce qui confère à la méthode un mécanisme d'auto-correction des erreurs, apporté par le retour en arrière. En appliquant cette méthode au cas des interférogrammes topographique, on a pu vérifier que les résultats obtenus sont corrects pour peu que les données de départ ne soient pas trop complexes (rapport signal-bruit raisonnable, cohérence conservée entre les acquisitions, système de frange pas trop resserré). D'autre part, la dernière étape du processus fournit une information quant à la faible qualité du déroulement dans certaines zones. L'avantage de cette approche, par rapport à une approche purement stochastique, est la diminution notable du coût algorithmique en n'utilisant que des approches déterministes. Il y a peu, les approches stochastiques étaient celles qui semblaient le plus prometteuses en termes de qualité des résultats. Depuis, les méthodes globales ont beaucoup évolué, en particulier la méthode s'appuyant sur une formulation par fonction de Green, développée à l'ENST, donne de très bon résultats, rapidement et indépendamment de la complexité de l'image. Néanmoins, les méthodes locales ont également subi un regain d'intérêt. En effet, elles sont faciles à mettre en œuvre et donne de très bon résultats avec des heuristiques simples. Par exemple, il serait aisé d'améliorer la méthode proposée en y incorporant des informations issues des images de cohérence et d'intensité. Néanmoins, c'est plus dans un contexte d'interférométrie différentielle que cet outil a été proposé, dans ce cadre où les systèmes de franges sont plus simples, il répond parfaitement aux exigences.





---

## Troisième partie

# Détection de changement



## Chapitre 7

# Segmentation d'image d'interférométrie différentielle

Les interférogrammes différentiels fournissent une mesure quantitative dense des modifications phasimétriques intervenues entre deux dates. Il est parfois difficile de distinguer ces zones de changement. Ce chapitre propose de segmenter ces régions dans deux contextes thématiques différents, il comporte un volet hydrologique et un autre consacré aux risques naturels. La méthode de segmentation utilisée est basée sur une modélisation markovienne et s'appuie sur la définition des zones à "effet phasimétrique", telle qu'elle a été donnée par le CNES [MRC93a].

### 7.1 Présentation du problème

Comme il a été présenté dans les chapitres précédents, l'interférométrie est un outil de mesure très précis des variations de la mesure de phase entre deux acquisitions. L'objectif de cette étude est de présenter une méthode permettant de détecter, dans les interférogrammes différentiels, les régions correspondant à une évolution au sol. De part leur caractère intrinsèquement multi-temporel, les interférogrammes différentiels sont une quantification des modifications apparues entre les acquisitions. Détecter les changements

grâce à ces images revient à un problème de segmentation binaire. Chaque région ayant subi une évolution entre les acquisitions doit être segmentée avec une étiquette différente d'une région stable.

Le problème de la segmentation en régions de même caractéristiques est l'un des plus fondamentaux du traitement d'image. Il existe de nombreuses méthodes pour y répondre, depuis les approches bas-niveau, basées uniquement sur des propriétés images (similarité de contraste, couleur, texture, *etc.*) jusqu'aux approches haut niveau prenant en compte des connaissances a priori sur les objets à segmenter, comme leur géométrie par exemple. On peut par exemple citer les contours actifs [KWT88] qui permettent de segmenter l'image en deux régions (intérieur et extérieur du contour) et qui s'appuient à la fois sur des contraintes images et sur des contraintes géométriques. Le principe est simple : il s'agit de calculer une courbe fermée, en contrôlant sa régularité (modélisée sous la forme de propriétés de rigidité et d'élasticité), et en la positionnant sur des zones particulières de l'image. Une description détaillée des contours actifs est proposée au chapitre 8 de la quatrième partie. Dans le cas où plusieurs régions non connexes sont à segmenter dans l'image, les contours actifs, dans leur formulation initiale ne peuvent convenir, en effet, ils n'acceptent pas les changements de topologie. Il existe des versions plus évoluées, qui acceptent les changements topologiques, comme, par exemple, les contours actifs géodésiques [CKS97, PD99] (voir également la quatrième partie). Barbaresco *et al.* utilisent cette approche pour segmenter des fouillis radar [BBLM97]. Néanmoins, le modèle choisi est basé sur une segmentation markovienne (voir annexe A). En effet, on cherche à prendre en compte toutes les propriétés des régions à segmenter, c'est-à-dire à la fois dans les images de phase et de cohérence. Dans ce contexte, les méthodes de segmentations basées sur les modèles markoviens sont plus aisés à mettre en œuvre. De plus, les interférogrammes différentiels ont la particularité d'être fortement bruités, or les méthodes de segmentation basées sur des modélisations probabilistes sont, en général, les mieux adaptées dans ce contexte.

Le paragraphe suivant détaille le modèle réalisé. Les variations phasimétriques que l'on cherche à segmenter peuvent être liées soit à un déplacement des cibles entre les prises de vues, soit aux modifications diélectriques des rétrodiffuseurs entre les acquisitions. Ce

chapitre traite des deux types d'effets sous la forme de deux applications :

- une application hydrologique : des effets de phase importants peuvent accompagner l'évolution des couverts végétaux à la suite d'épisodes pluvieux, appliquée à ce contexte, la méthode permet de connaître les statistiques sur ces effets de phases et de les comparer aux données pluviométriques disponibles sur le site d'étude ;
- une application liée aux risques naturels, avec une extension de la méthode adaptée au cas très particulier de la cartographie d'un glissement de terrain, elle permet de détecter la zone à risque.

## 7.2 Méthodologie

On s'intéresse à segmenter, dans l'interférogramme, les régions correspondant à une évolution au sol [HH97, HHB98]. Les propriétés des effets de phase cohérents sont définis explicitement dans [MRC93a] et rappelés au chapitre 4. Plutôt que de tenter de caractériser chacun de ces effets dans l'image, on cherche à segmenter globalement la zone de stabilité qui les entoure. Tout ce qui ne correspond pas à cette région de fond, est alors considérée comme une zone ayant évolué entre les deux acquisitions nécessaires à la génération de l'interférogramme.

### 7.2.1 Modèle

La méthode de segmentation choisie est une méthode dite par croissance de région, utilisant une formulation par champ de Markov, voisine de celle utilisée dans [HBG<sup>+</sup>94].

Le modèle est ici basé sur trois propriétés complémentaires de la région fond :

1. homogénéité locale de la phase, hors des régions à fort effet phasimétrique ;
2. perte de cohérence aux frontières entre la région de fond et un effet phasimétrique ;

3. régularité de la région de fond, résultat de la segmentation.

On modélise mathématiquement ces propriétés sous forme d'énergies. On définit  $S$  comme l'ensemble fini des sites de l'image,  $P$  à valeur dans  $\Omega = \{-1, 1\}^{|S|}$  la variable aléatoire décrivant l'état de la segmentation,  $Q = (\Phi, \Gamma)$  à valeur dans  $\Delta = [0, 2\pi]^{|S|} \times [0, 1]^{|S|}$  la variable aléatoire décrivant les données, c'est-à-dire la différence de phase et la cohérence et  $\mathcal{B}$  la zone correspondant à la région de fond.

On note  $p$  et  $q(\varphi, \gamma)$  les réalisations respectives des variables aléatoires  $P$  et  $Q$ . L'énergie du modèle markovien s'écrit :

$$E(p|q) = E_1(p, q) + \beta E_2(p)$$

– Le terme  $E_1$  exprime les deux premières propriétés :

l'homogénéité se modélise mathématiquement par une loi normale, c'est à dire que la répartition des pixels de  $\mathcal{B}(p) = \{s \in S | p_s = 1\}$  suit une loi normale :

$$\forall s \in \mathcal{B}(p), \varphi(s) \sim N(\mu(s), \sigma^2)$$

où  $\mu(s)$  dépend de la position du pixel  $s$  de manière à tenir compte de la variation de la région de fond sur la globalité de l'image.

On définit  $E_1$  comme :

$$E_1(p, q) = \sum_{s \in \mathcal{B}(p)} [(\varphi(p) - \mu(p))^2 / \sigma^2 - f(q)] \quad (7.1)$$

où  $f(q)$  est un seuil donné par :

$$f(q) = T - \gamma(s).$$

Ce seuil est obtenu à partir de  $T$ , seuil d'acceptation du test gaussien, biaisé par la valeur de la cohérence, de manière à stopper l'accroissement de la région sur les points de faible cohérence :  $f$  augmente lorsque la cohérence diminue.

– Le terme  $E_2$ , basé sur le modèle d'Ising, exprime la régularité du résultat de la segmentation :

$$E_2(p) = \sum_{\langle s, t \rangle} p_s p_t \quad (7.2)$$

Ce terme permet d'agglomérer à la région de fond, les trop petites zones qui ne correspondent qu'à du bruit. Il favorise les configurations pour lesquelles un pixel a la même étiquette que ses voisins.

Un ICM (voir annexe A) est utilisé pour minimiser l'énergie  $E$ . Le balayage de l'ICM se fait de gauche à droite et de bas en haut. Le nombre d'itérations est fixé par l'utilisateur.

### 7.2.2 Estimation des paramètres

$T$  et  $\beta$  sont fixés par l'utilisateur. Mais les paramètres décrivant la région stable peuvent être estimés lors d'une étape de segmentation préliminaire approximative.

On effectue cette pré-segmentation en appliquant un filtre de détection de contours sur les interférogrammes. On utilise le filtre proposé par Malandain [Mal92]. Il dérive de ceux définis successivement par Canny [Can86] et Deriche [Der87]. La région "fond" est représentée par la zone connexe de plus grande taille. Pour définir la région de fond, on l'assimile ensuite à un modèle caractérisé par des paramètres. Ces paramètres sont ensuite estimés sur des fenêtres extérieures aux petites zones pré-segmentées. On propose deux modèles pour caractériser la région de fond.

#### 1. Modèle affine

On représente la région de fond par un modèle affine. On suppose que :

$$\varphi(s) = AX_s \quad \forall s \in \mathcal{B},$$

où  $X_s = (x_s, y_s)$  et  $A = (a_1, a_2, a_3)$ .

On cherche la solution au sens des moindres carrés [NRC], c'est-à-dire :

$$\|\varphi(s) - AX_s\|^2 \text{ minimum.} \quad (7.3)$$

Ce qui revient à chercher :

$$\sum_{s \in \mathcal{B}} (\varphi(s) - AX_s)^2 \text{ minimum,}$$



c'est-à-dire :

$$\hat{A} = \left( \sum_{s \in \mathcal{B}} \varphi_s^T \varphi_s \right)^{-1} \left( \sum_{s \in \mathcal{B}} \varphi_s^T \varphi_s \right).$$

## 2. Splines plaque mince

La région de fond peut aussi être définie par une fonction spline plaque mince [Ter84] dont on cherche à minimiser la déformation. La spline plaque mince est une fonction, possédant une rigidité interne, qui est contrôlée par des points d'appuis.

Étant donnés  $m$  points  $s^1, s^2, \dots, s^m$  de  $\mathbb{R}^2$  non alignés et  $m$  valeurs  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  de  $\mathbb{R}$  on recherche une fonction lisse  $\zeta$  continue et continûment dérivable) telle que :

$$\zeta(s^i) = \varphi_i \quad i \in [1, m]$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\zeta(t) = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i |t - t_i|^2 \log |t - t_i|^2$$

avec  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i t_1^i = \sum_{i=1}^m \lambda_i t_2^i = 0$ . Le calcul des  $\lambda$  est développé dans [Bar91]

Notons que l'image de cohérence peut également intervenir pour pondérer la mesure de la phase et ainsi obtenir une estimation plus fiable des coefficients des fonctions sus-citées (affines et splines). D'autre part, la taille des fenêtres d'estimation n'est pas fixée, elle grandit si la cohérence moyenne à l'intérieur de la fenêtre est insuffisante.

## 7.3 Applications

### 7.3.1 Hydrologie

#### Prétraitement

Les données à notre disposition sur la région de Naizin en Bretagne sont des interférogrammes différentiels corrigés des effets du relief avec un modèle numérique de terrain.

L'image de phase devrait donc être absolument uniforme si les conditions suivantes étaient réalisées :

- correction géométrique exacte,
- état de surface invariant, ou subissant une transformation diélectrique uniforme.

Or, outre les modifications topographiques ou diélectrique que nous cherchons à quantifier, il apparaît sur certains de ces interférogrammes des erreurs de correction géométrique sous la forme de franges résiduelles, grossièrement parallèles à la trajectoire du satellite, et dues à une mauvaise estimation de la *baseline*. Afin d'obtenir des images de phase interprétables, il est nécessaire de corriger les interférogrammes de ces franges résiduelles en effectuant un déroulement. Pour cela la méthode utilisée est celle décrite au chapitre 5. Un exemple d'image corrigée est visualisé figure 7.1.

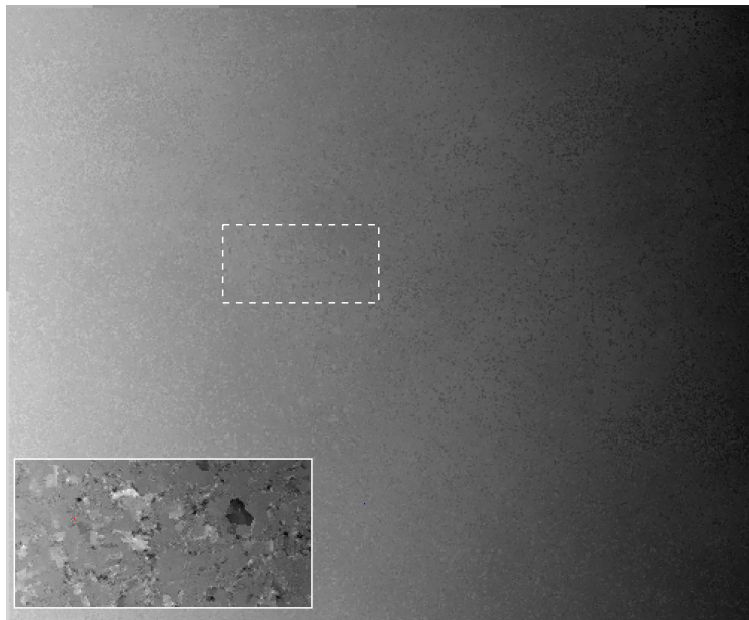


FIG. 7.1 – *Interférogramme corrigé des franges orbitales.*

## Résultats

Après l'étape de prétraitement, on distingue clairement les effets phasimétriques comme se détachant de la région de fond en apparaissant plus foncés ou plus clairs (voir l'imagette extraite sur la figure 7.1). La figure 7.2 représente une portion d'environ 250 km<sup>2</sup>, Comme on peut le constater, on retrouve dans ces deux images, les comportements qui définissent ces effets en phase et en cohérence. La cohérence est conservée à l'intérieur des régions, et on ne trouve une perte de cohérence qu'aux frontières avec la région de fond. Ce qui correspond à une évolution cohérente de la phase à l'intérieur d'une même parcelle de terrain.

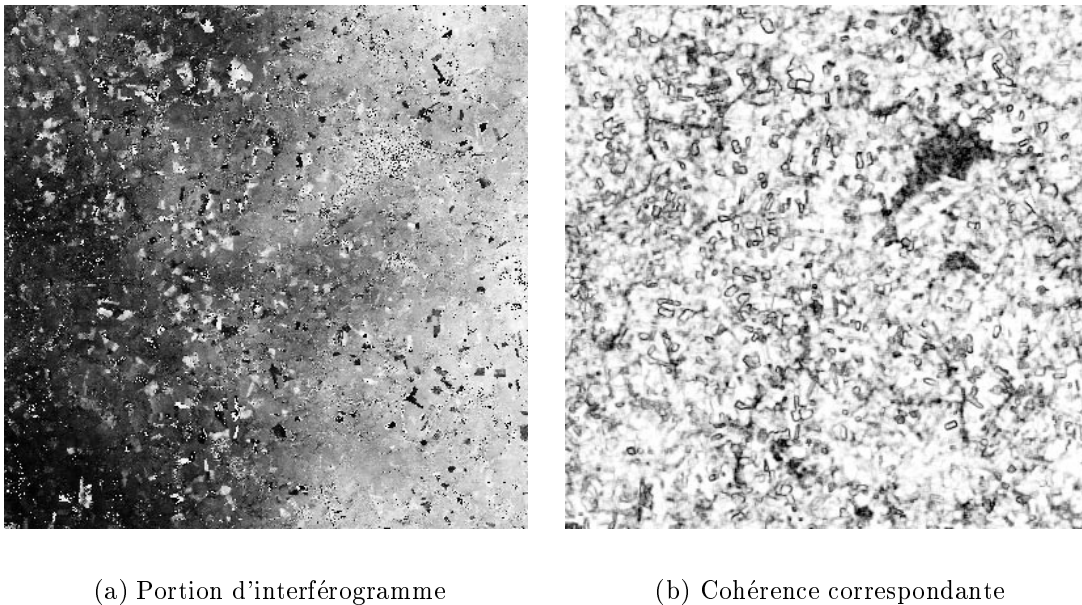


FIG. 7.2 – Données utilisées pour la segmentation des effets phasimétriques

Sur les interférogrammes, on distingue une variation lente de la phase. L'étape de présegmentation (voir figure 7.3) permet d'estimer un modèle pour  $\mu$ . Le modèle utilisé ici peut aisément se limiter au cas affine :

$$\mu_s = a_1 x_s + a_2 y_s + a_3.$$

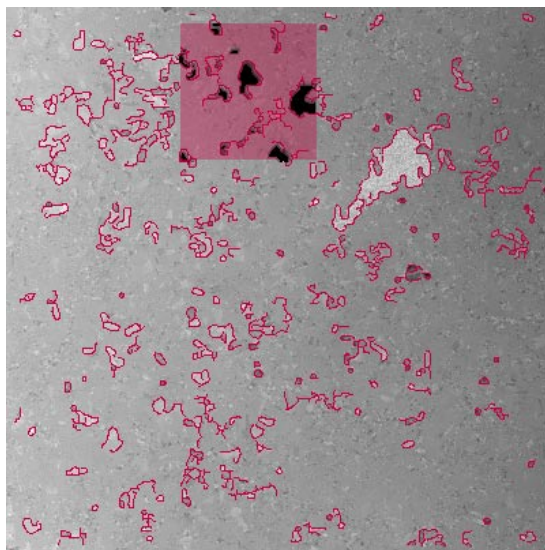
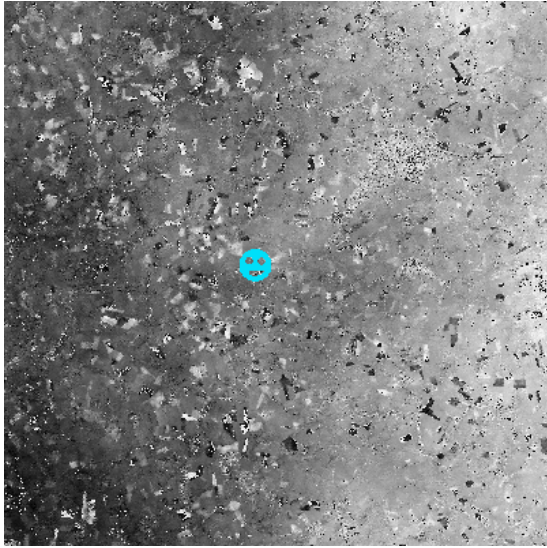


FIG. 7.3 – *Les paramètres de la région de fond  $\mathcal{B}$  sont estimés sur des fenêtres.*

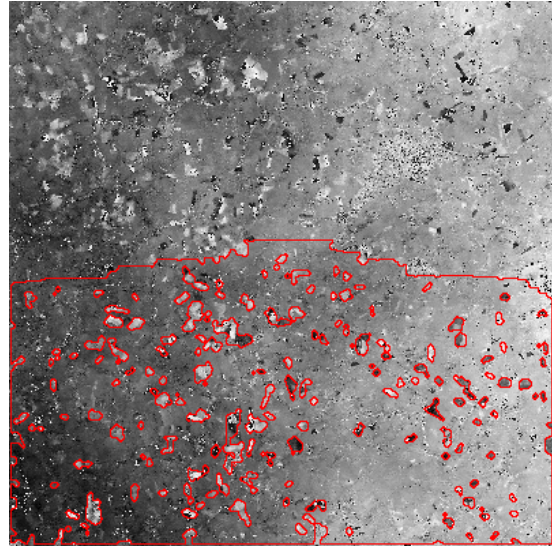
Comme dans le cas du déroulement de phase, la méthode de segmentation employée est dite par “croissance de région”, c’est-à-dire que la zone segmentée se construit de proche en proche à chaque itération de l’ICM, à partir d’une région initiale, choisie arbitrairement. Grâce à l’étape d’estimation des paramètres, la qualité de cette initialisation importe peu, comme on peut le constater sur la figure 7.4.

De part le choix qui a été fait de caractériser la région de fond, plutôt que les effets de phase eux-mêmes, on a, à la fin du processus de segmentation, non seulement segmenté les régions relatives à une évolution cohérente de la phase entre les deux acquisitions, mais aussi les régions correspondant à une disparition quasi-complète de la cohérence (comme la forêt qui apparaît en sombre sur la figure 7.2-b). De part leur forme, relativement géométrique, on peut affirmer que les régions segmentées correspondent, en majorité, à des parcelles de champs [HH98a].

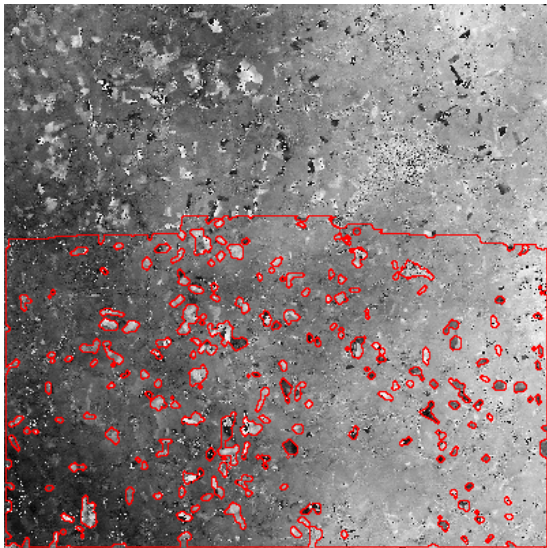
Comme on pouvait l’augurer, l’analyse d’une séquence d’images de cohérence et de différence de phase montre, d’une part, que ce sont généralement les mêmes effets que l’on



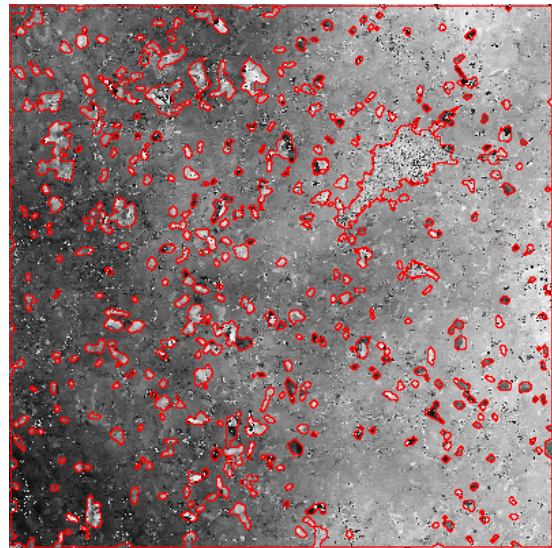
(a) région d'initiale



(b) bord de la région après 7 itérations



(c) 20 itérations



(d) 200 itérations

FIG. 7.4 – *Évolution de la segmentation au cours des itérations.*

segmente d'un interférogramme à l'autre, mais aussi que l'importance de ces effets accompagne les épisodes pluvieux [HH98b] (voir figures 7.5 et 7.6). Ainsi sur la portion d'interférogramme 37–40 (voir le chapitre 4), 191 parcelles ont été segmentées contre 321 sur l'interférogramme 40–43 (en conservant les mêmes paramètres de segmentation).

Diverses raisons peuvent conduire à la différenciation des champs agricoles par rapport à leur environnement :

- une élévation uniforme de la surface rétrodiffusante, qui entraîne une réduction du chemin optique ;
- une augmentation de la valeur moyenne de la constante diélectrique, due à l'humidification ;
- la présence de gouttelettes à la surface des feuilles.

Comme on peut le constater, plus la différence hygrométrique est grande entre les deux acquisitions plus les parcelles segmentées sont nombreuses et apparaissent contrastées. Ainsi l'interférogramme 37–46, qui correspond à la période où les pluies ont été les plus importantes (voir figure 7.6), devrait être aisément segmentable. Malheureusement, il s'accompagne simultanément d'une forte perte de cohérence, qui rend la segmentation difficile et les structures sont alors mal définies sur la figure 7.7.

Étant donné que l'on peut associer ces effets phasimétriques à des parcelles cultivées, on peut s'intéresser à différencier ces régions afin d'obtenir une classification du sol. Ces effets étant liés principalement aux conditions pluviométriques, il semble néanmoins difficile de ne s'appuyer que sur les interférogrammes pour obtenir une classification complète du sol. Cela supposerait un comportement phasimétrique temporellement stable, ce que l'on ne peut pas affirmer. Par contre, on peut raisonnablement supposer que des parcelles ayant un comportement identique à la fois en intensité, en cohérence et en phase appartiennent à un même type d'occupation du sol. Sur l'interférogramme 40–43 (figure 7.5) on peut segmenter 321 parcelles. On peut ensuite comparer les résultats d'une même méthode de classification, en incorporant successivement l'information d'intensité, de cohérence puis de phase.



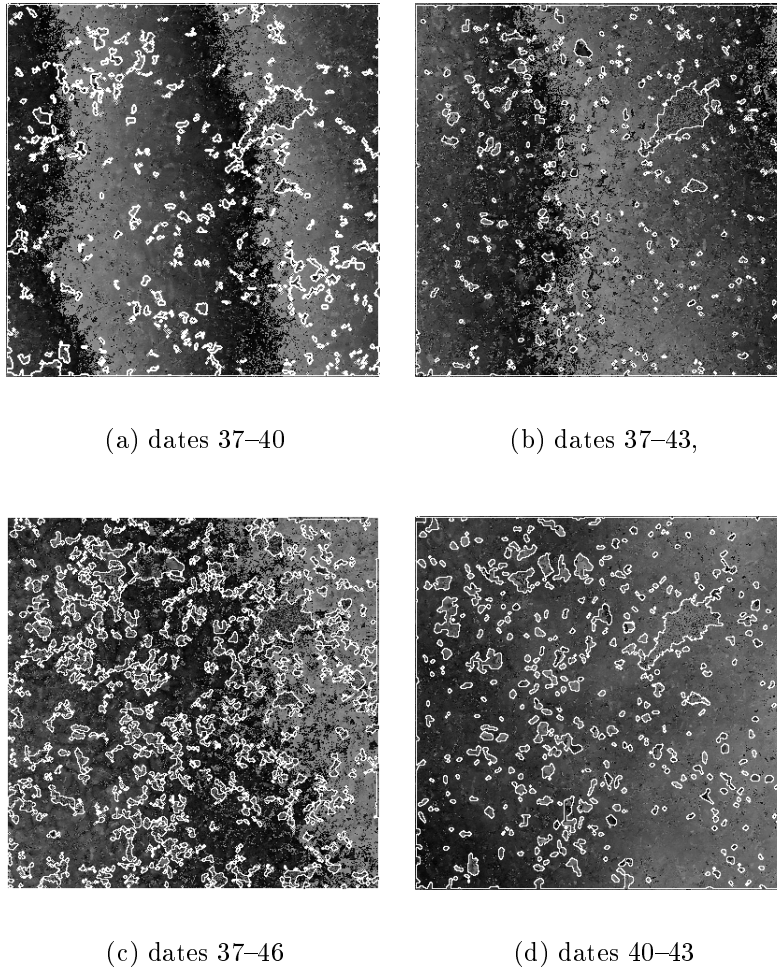


FIG. 7.5 – Résultats de segmentation pour les interférogrammes correspondant à différentes dates d'acquisitions

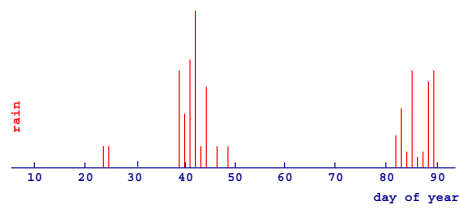


FIG. 7.6 – Pluviométrie correspondant à la période d'acquisition.

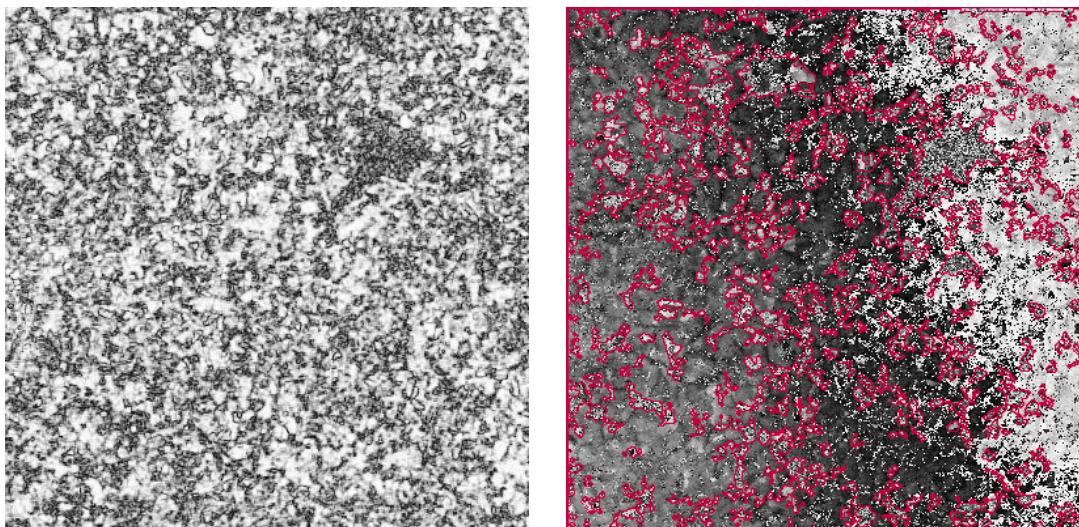


FIG. 7.7 – *Problème avec la perte de cohérence.*

En général, les méthodes de classification du sol utilisant des images radar s'appuient sur des séquences d'images d'intensité, le plus souvent sous la forme de séquences diachroniques [KKGR96, HR96, LKvL97]. La figure 7.8 illustre le résultat obtenu à partir de deux images d'intensité (acquisitions 40 et 43) avec la méthode de classification supervisée du maximum de vraisemblance [Ric94]. L'apprentissage est réalisé en sélectionnant 8 catégories, qui correspondent visuellement à un comportement différent parmi les 321 parcelles segmentées précédemment. Bien que cet apprentissage soit un peu biaisé, puisque réalisé sur des régions ayant un même comportement en phase mais pas obligatoirement en intensité, il permet d'observer qu'avec l'information d'intensité seule il est très difficile d'obtenir une bonne classification du sol. Bien entendu, cette méthode de classification n'est pas optimale pour ce type d'image, d'autant plus qu'elle ne prend pas en compte l'effet de chatoiement. Le résultat obtenu ne devient intéressant que par comparaison avec les résultats issus de la même méthode mais en utilisant des informations supplémentaires (cohérence ou phase interférométrique).

Quelques équipes [WWNB95, WW95, ADUS97] utilisent la cohérence conjointement à l'information d'intensité radar, pour faire la classification du sol notamment des régions forestières. Comme on peut le constater figure 7.9, l'apport de cette information permet



(a) image d'intensité

(b) classification obtenues

FIG. 7.8 – *Résultat de la classification basée sur plusieurs images d'intensité.*

d'améliorer sensiblement le résultat de la classification. La forêt est bien discriminée, ce qui est logique puisqu'elle apparaît très distinctement dans l'image de cohérence.

(a) image de cohérence

(b) classification obtenue

FIG. 7.9 – *Résultat de la classification basée sur les deux images d'intensité et sur l'image de cohérence.*

Afin de déterminer au mieux l'apport de l'information phasimétrique, on peut effectuer une analyse en composantes principales sur l'ensemble des données disponibles pour chaque couple d'acquisitions. Ainsi chaque région segmentée est caractérisée par sa phase moyenne, la cohérence moyenne et l'évolution de l'intensité; ce qui permet de déduire pour la région  $i$  :

$$\left( \overline{\varphi}_i \quad \overline{\gamma}_i \quad \overline{A2_i - A1_i} \right)^t$$

où  $\overline{\varphi}_i$ ,  $\overline{\sigma}_i$  et  $\overline{AJ_i}$  correspondent respectivement aux valeurs moyennées sur la région  $i$  de la

phase, la cohérence et l'intensité de l'image  $J$ . On obtient la matrice  $3 \times N$  suivante :

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1} & \overline{\gamma_1} & \overline{A2_1 - A1_1} \\ \overline{\varphi_2} & \overline{\gamma_2} & \overline{A2_2 - A1_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\varphi_N} & \overline{\gamma_N} & \overline{A2_N - A1_N} \end{pmatrix}$$

où  $N$  est le nombre de parcelles segmentées. Les données les plus discriminantes sont ensuite extraites par l'analyse en composantes principales. On définit

$$I = \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1..3} \lambda_j},$$

la variance de la dispersion des données (où les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{X}$ ) comme une mesure de la quantité d'information contenue dans chaque composante fournie par l'ACP. On obtient dans cet exemple,  $I_1 = 63,5\%$  et  $I_2 = 32,9\%$ , alors que  $I_3 = 3,6\%$ . Les deux premières composantes contiennent la majorité de l'information pertinente. Ces deux composantes sont ensuite utilisées pour classifier les parcelles segmentées. On obtient finalement 5 catégories principales d'effets phasimétriques (voir figure 7.10).

On peut ainsi conclure que l'information phasimétrique, qui n'est pratiquement jamais utilisée dans des objectifs de classification, véhicule une information discriminante, qui devrait pouvoir améliorer les méthodes classiques de classification du sol, pour peu que les régions d'intérêt soit préalablement segmentées.

### 7.3.2 Glissement de terrain

Il existe différents types de glissement de terrain, ils ont en commun d'être provoqués par la gravité terrestre. Ce sont des phénomènes naturels complexes, où les conditions interférométriques (voir le chapitre 3 de la première partie) sont difficilement respectables.

Les données à notre disposition sont des interférogrammes différentiels corrigés des effets de relief grâce à un modèle numérique de terrain. La figure 7.11 montre la projection d'un des interférogramme sur ce MNT. On y distingue clairement le décrochement sur le flanc

(a) résultat de la segmentation superposé à  
une composition colorée d'images d'intensité

(b) classification obtenue

FIG. 7.10 – *Résultat de la classification basée sur les deux images d'intensité, l'image de cohérence et de phase.*

de montagne, ainsi que les franges du mouvement allant dans le sens des flèches. La région en bleu, à gauche du glissement, correspond à une zone stable.

FIG. 7.11 – *Interférogramme différentiel d'un glissement de terrain projeté sur le MNT correspondant.*

### 7.3.3 Résultats

L'intérêt dans ce type d'application, est de segmenter les régions mobiles, correspondant à une zone à risque.

Plutôt que d'utiliser l'un des modèle d'estimation des paramètres pour caractériser en première approximation la région stable, on utilise les informations que l'on connaît a priori sur ces régions. En effet, on dispose sur l'interférogramme haute résolution d'une zone de référence connue pour sa stabilité (voir la figure 4.10 du chapitre 4 de la première partie). On peut d'ailleurs visualiser l'histogramme de phase de cette région sur chacun des interférogrammes (voir figure 7.12). On vérifie d'ailleurs que l'hypothèse de description de l'homogénéité de phase par une loi normale est vérifiée pour cette zone.

On s'aperçoit néanmoins que la plupart des interférogrammes sont très bruités (voir figure 4.11 du chapitre 4). D'autre part, on peut constater sur la figure 7.13, en particulier pour

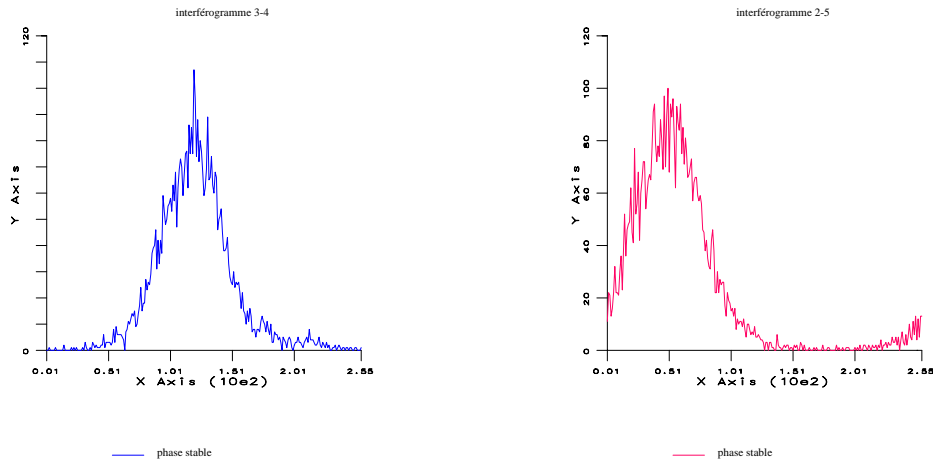


FIG. 7.12 – Histogrammes des phases de deux interférogrammes mesurées sur une zone stable.

l'interférogramme 3–4, que si la cohérence est partiellement maintenue à l'intérieur de la zone de glissement, elle particulièrement faible autour. En effet, cette zone de glissement est entourée de forêts, qui, comme on a pu le constater au paragraphe précédent sont caractérisées par une faible cohérence. On constate donc que les hypothèses de segmentation ne sont pas respectées au niveau de la cohérence.

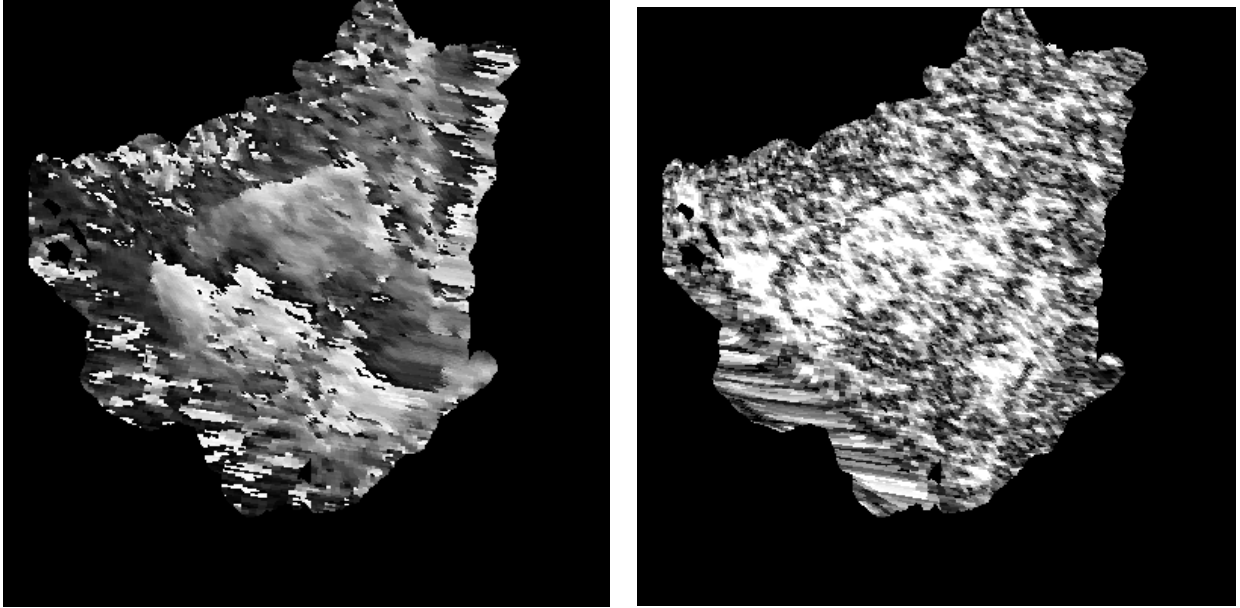
On peut alors utiliser le modèle de segmentation sans tenir compte de la mesure de cohérence.

L'énergie à minimiser devient :

$$E(p, q) = \sum_{s \in \mathcal{B}(p)} \left( \frac{(\varphi(p) - \mu(p))^2}{\sigma^2} - T \right) + \sum_{\langle s, t \rangle} p_s p_t$$

Sur l'interférogramme 3–4, on obtient le résultat visualisé figure 7.14.

Ce résultat n'est pas satisfaisant, en effet le modèle ne gère pas l'aspect cyclique des données. Il confond la phase de la région de fond avec une zone de fort mouvement, retrouvant la même valeur de phase du fait du modulo.

FIG. 7.13 – *Interférogramme et la cohérence correspondante.*

### Vers un modèle plus adapté

Le modèle de segmentation tel qu'il a été défini ne convient pas. En effet, les hypothèses ne sont plus valables. Si on veut conserver la même formulation, il est nécessaire de définir un autre biais que la cohérence pour définir le seuil  $f$  entre une région stable et une zone de mouvement.

On peut remarquer une certaine stabilité temporelle de la région de fond sur la séquence. On peut alors penser incorporer cette stabilité dans le modèle, de telle sorte que l'expansion de la région de fond s'arrête sur les zones de fort gradient temporel. Néanmoins, il faut une fois de plus tenir compte de la relativité de la mesure de phase. Une zone de stabilité sur un interférogramme n'est pas obligatoirement représentée par une mesure de phase équivalente sur un autre. La figure 7.15 illustre ce problème, les deux interférogrammes visualisés correspondent à ceux utilisés pour générer histogrammes de la figure 7.12. Toutefois, il suffit de recentrer ces histogrammes pour obtenir un même niveau radiométrique sur la séquence (figure 7.16). Dans ces conditions, on peut proposer une fonction

FIG. 7.14 – *Résultat de la segmentation sans utiliser l'information de cohérence.*



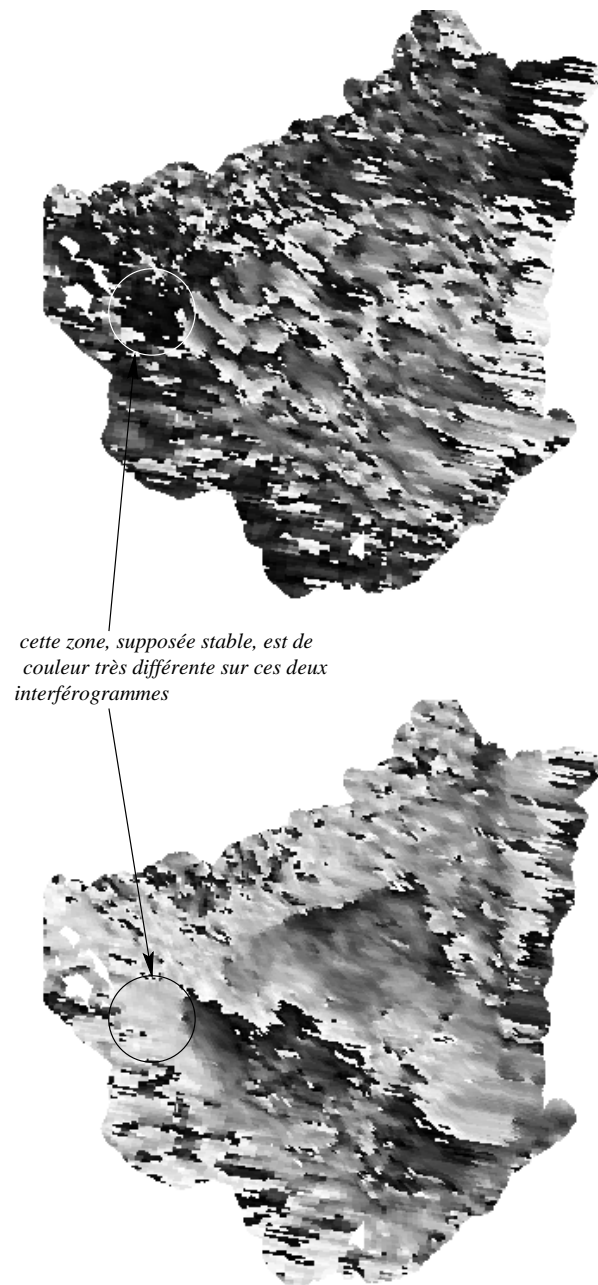


FIG. 7.15 – Une zone stable sur deux interférogrammes différentiels

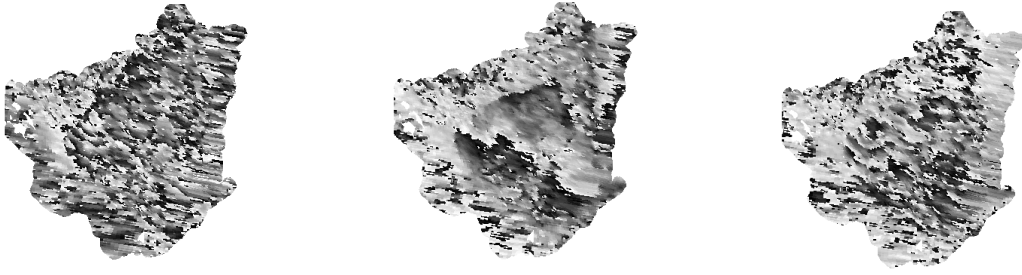


FIG. 7.16 – Séquence d'interférogrammes recentrés.

de seuil telle que :

$$f(\varphi) = T - \left| \frac{\partial \varphi(s)}{\partial t} \right|^2,$$

où la fonction de seuil  $f$  est biaisée par le gradient temporel, de manière à arrêter l'accroissement de la région sur les zones de fort gradient correspondant à une zone de forte activité au cours de la séquence. Mais, contre toute attente, les résultats obtenus en utilisant cette fonction, sont particulièrement médiocres, même en choisissant de lisser fortement le gradient temporel, car la zone entourant le glissement est trop perturbée, la cohérence est très faible et par conséquent les interférogrammes sont aux limites de respecter les conditions interférométriques énoncées au chapitre 3.

Le meilleur résultat (figure 7.17) est finalement obtenu en utilisant l'inverse de la cohérence :

$$f(q) = T - \gamma^{-1}(s).$$

L'énergie à minimiser devient :

$$E(p, q) = \sum_{s \in \mathcal{B}(p)} \left( \frac{(\varphi(p) - \mu(p))^2}{\sigma^2} - (T - \gamma^{-1}) \right) + \sum_{\langle s, t \rangle} p_s p_t$$

En jouant sur les paramètres du modèles on obtient un meilleur résultat. On visualise ce résultat en le projetant sur le modèle numérique de terrain (figure 7.18). Bien que ce résultat soit relativement correct, on ne peut néanmoins considérer la méthode comme

FIG. 7.17 – *Résultat de la segmentation obtenu en utilisant l'inverse de la cohérence.*

satisfaisante, d'une part parce que seul l'interférogramme 3-4 (le moins bruité de la séquence) permet d'obtenir ce résultat, d'autre part parce qu'il faut changer les hypothèses fondamentales du modèle.

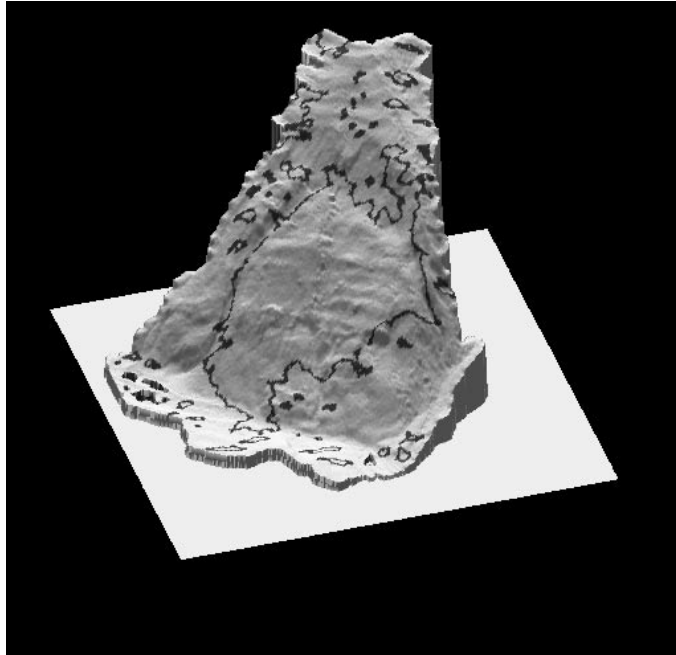


FIG. 7.18 – *Résultat de la segmentation projeté sur le MNT de référence.*

## 7.4 Conclusion

La méthode de détection de changement développée dans cette partie est, en fait, une méthode de segmentation. Elle est basée sur une modélisation markovienne lui permettant d'être robuste devant le bruit. Sa formulation permet aisément de l'adapter à d'autres catégories d'images et d'y incorporer plusieurs types d'information simultanément, ce qui lui confère un cadre très général. Plutôt que de caractériser les zones instables elle modélise les propriétés des régions qui les entourent. Une fois ces dernières segmentées, on considère que les régions qui restent sont celles recherchées. Peu de recherche semble avoir été

menée sur la segmentation des images de phase. Pourtant, l'application de cette méthode est très prometteuse. Utilisée pour la détection d'effets phasimétriques, elle a montré beaucoup d'efficacité, ce qui ouvre des potentiels nouveaux en matière de classification du sol. Dans le cas très particulier des glissement de terrain, les adaptations proposées, bien que pouvant donner de bon résultats, ne sont pas complètement satisfaisantes. En effet, elles s'appuient alors sur des propriétés trop exceptionnelles pour être généralisables. Il serait nécessaire de redéfinir théoriquement un modèle dédié à ce cas. On peut, néanmoins, considérer qu'on dispose d'un outil pour détecter les zones de changement. La partie suivante s'intéresse à suivre l'évolution de leur surface au cours du temps en cherchant à mettre en correspondance deux occurrences successives de cette surface.

---

## Quatrième partie

### Mise en correspondance de surfaces



## Chapitre 8

# Mise en correspondance de structures

Le problème de la mise en correspondance est l'un des plus fondamentaux en traitement d'image. Ce chapitre ne peut prétendre à un état de l'art exhaustif des méthodes existantes. Néanmoins, après avoir rappelé différentes applications, quelques méthodes de mise en correspondance pour le suivi de structures, sont décrites plus en détail. En particulier les méthodes s'articulant autour de la théorie des isocontours sont récemment apparues. Cette théorie est rappelée brièvement ainsi que quelques applications qui s'y réfèrent.

### 8.1 Le problème de la mise en correspondance en traitement d'image

#### 8.1.1 Définition

Le problème de la mise en correspondance peut se définir succinctement comme la recherche d'appariements entre plusieurs images.



On peut modéliser ce problème comme suit : soient  $I_S$  et  $I_D$  deux images à mettre en correspondance (voir figure 8.1).

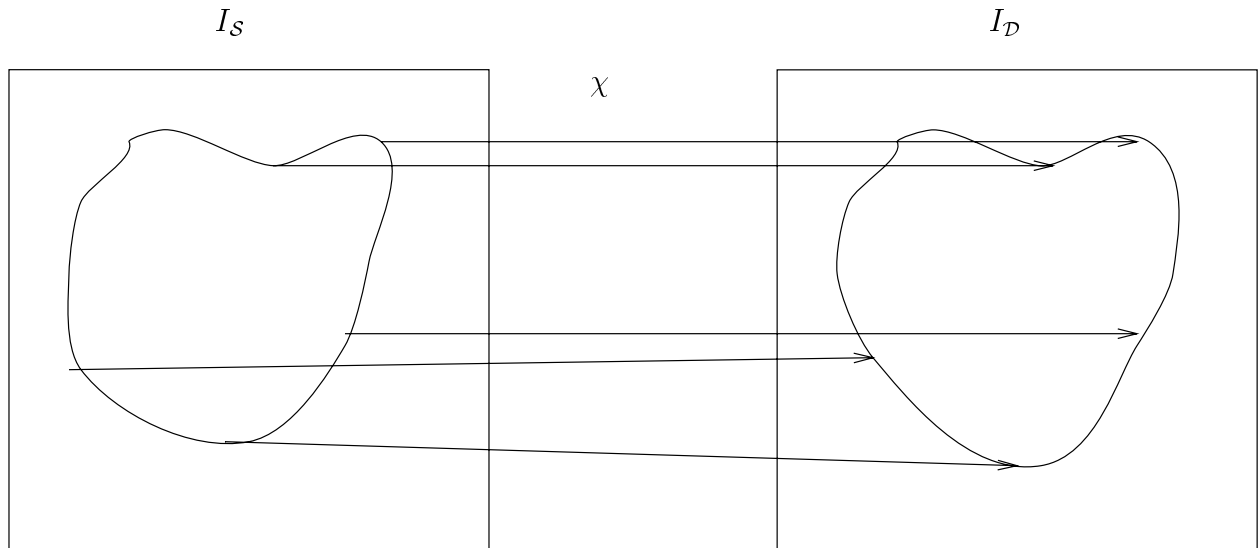


FIG. 8.1 – *Mise en correspondance entre deux images.*

On cherche une fonction  $\chi$  telle que :

$$\begin{cases} \chi : I_S \longrightarrow I_D \\ \chi(X_S) = X_D, X_S \in I_S, X_D \in I_D \end{cases}$$

### 8.1.2 Applications

Le problème de la mise en correspondance trouve de nombreuses applications en traitement d'image. Ainsi, la reconnaissance d'objet consiste à apparier un objet issu d'une base de données où sont stockés des modèles avec une vue du monde réel [BJ85, CD86, SM92, LFD<sup>+</sup>94]. La stéréoscopie est une méthode pour extraire la structure tridimensionnelle d'une scène, elle consiste à déduire le relief à partir des différences entre deux images [XZ96]. Quant au problème du recalage, il s'agit de trouver les transformations géométriques à appliquer à une structure de départ pour obtenir une structure d'arrivée [ZF92a, GA94]. Les algorithmes utilisés s'apparentent aux méthodes de suivi qui

permettent de déduire le “mouvement”, comme étant le vecteur déplacement induit par la fonction de mise en correspondance. Ces méthodes de mise en correspondance, issues des méthodologies du traitement d'image, trouvent leur dual en synthèse d'image, il s'agit des méthodes dites de métamorphoses, plus connues sous l'anglicisme “*morphing*”. Le *morphing* est utilisé pour obtenir différentes transitions entre deux images ou objets [SG92, LGL95, GDCV99].

### 8.1.3 Méthodologies

Le problème de la mise en correspondance ne possède pas une solution unique. Un grand nombre de méthodes ont été proposées dans la littérature offrant chacune des réponses différentes. On peut néanmoins distinguer deux grandes catégories de méthodes.

Il y a les méthodes qui s'appuient sur une approche colorimétrique, c'est-à-dire où seul le niveau de gris des pixels est pris en compte [GGB84, CC90]. Par exemple les méthodes par corrélation tentent d'apparier des imagerie extraites de la première image avec d'autres issues de la seconde image, en cherchant certaines similarités entre les niveaux de gris [XZ96]. On peut également considérer les méthodes de flot optique comme étant des méthodes mise en correspondance [HS81].

La seconde catégorie regroupe les méthodes basées sur une extraction au préalable de certaines caractéristiques ou structures (contours, segments de droites, portions de surface, *etc*) [vDK84, BT79, CH81, SH81, ZF92b]. Dans le cas où le problème est l'appariement de plusieurs structures entre deux clichés, une image peut alors être définie comme un graphe avec des primitives définissant les nœuds du graphe et les relations géométriques définissant les arcs [FB81]. La plupart des techniques se ramènent à des parcours d'arbre, détection de clique maximale ou relaxation. Ces problèmes sont connus pour être NP-complets mais quelques heuristiques, comme l'hypothèse de transformations affines, ou des informations supplémentaires, comme la contrainte épipolaire dans le cas stéréoscopique, permettent de réduire le coût algorithmique. Dans le cas où on s'intéresse au suivi de l'évolution d'une seule structure, on cherche alors les propriétés géométriques qui la caractérisent et qui sont invariantes [TG95]. On peut par exemple s'intéresser aux points

de forte courbure [CAS92, SB95, GA94] ou à des propriétés géométriques de plus haut niveau lorsqu'il s'agit par exemple de caractériser des volumes [Thi94].

## 8.2 Méthodes de mise en correspondance

On se propose de détailler ici quelques méthodes de mise en correspondance dans le cas de structures bidimensionnelles, sachant que le passage à la troisième dimension est généralement possible, mais plus ou moins difficile à réaliser.

### 8.2.1 Mise en correspondance de courbes par information de courbure

On cherche à mettre en correspondance les points de deux courbes sur deux images différentes. Ce premier modèle s'appuie uniquement sur l'hypothèse de conservation des caractéristiques différentielles des structures, il a été proposé par Cohen *et al.* [CAS92]. C'est-à-dire qu'on suppose qu'en un grand nombre de points les courbes gardent une valeur de courbure similaire. Le cas le plus favorable correspond à un mouvement rigide, la courbure étant alors invariante. Dans le cas plus général d'un déplacement non rigide, il faut ajouter faire quelques hypothèses supplémentaires :

- déformation de faible amplitude (il faut limiter les écarts de la courbure d'une structure à l'autre),
- stabilité des points de forte courbure (il est indispensable de retrouver les mêmes points caractéristiques durant la transformation).

L'information de courbure ne suffit néanmoins pas à réaliser une mise en correspondance unique, on peut trouver en plusieurs points de la structure une courbure identique. Il est donc nécessaire d'ajouter quelques contraintes, en particulier, sur la régularité de la

fonction de mise en correspondance. Ce qui revient à chercher les solutions les plus simples (les plus régulières) en un sens qu'il faut préciser.

### Formulation

Soient deux courbes notées  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  à mettre en correspondance. Les fonctions  $S$  et  $D$  représentent les coordonnées dans  $\mathbb{R}^2$  des points des courbes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  et sont paramétrées respectivement par  $s \in [0, 1]$  et  $s' \in [0, \alpha]$ .

La fonction de mise en correspondance entre la courbe  $\mathcal{S}$  et la courbe  $\mathcal{D}$  est donnée par :

$$\begin{cases} \chi : [0, 1] \longrightarrow [0, \alpha] \\ \chi : s \mapsto s' \end{cases} .$$

Les critères qui sont pris en compte sont :

- Critère de courbure similaire

On note respectivement  $\kappa_{\mathcal{S}}$  et  $\kappa_{\mathcal{D}}$  les courbures de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ . Pour que les courbures soient proches, il faut que le terme  $|\kappa_{\mathcal{S}}(s) - \kappa_{\mathcal{D}}(s')|$  soit petit quel que soit  $s \in [0, 1]$  et  $s' \in [0, \alpha]$  tels que  $s = \chi(s')$ .

Ce qui se traduit par la fonctionnelle suivante :

$$E_{\kappa}(\chi) = \int_0^1 (\kappa_{\mathcal{S}}(s) - \kappa_{\mathcal{D}}(\chi(s)))^2 ds$$

et l'on cherche les fonctions  $\chi$  qui minimisent cette fonctionnelle.  $E_{\kappa}$  mesure la «ressemblance» entre les deux courbes pour une fonction de mise en correspondance  $\chi$ . Comme il a été évoqué précédemment, cette énergie ne suffit pas en pratique à obtenir de bon résultats. Par exemple, les problèmes surgissent lorsqu'on rencontre plusieurs points de même courbure. Cela signifie que la fonctionnelle  $E_{\kappa}$  ne possède pas un minimum global et la fonction qui minimise  $E_{\kappa}$  n'est pas unique. Il faut ajouter une contrainte supplémentaire.

- Critère de régularité sur  $\chi$

L'idée est de contraindre les variations de  $f$  afin d'obtenir la fonction la plus régulière

possible. Pour cela, on définit la fonctionnelle suivante :

$$E_r(\chi) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial(X_D(\chi(s)) - X_S(s))}{\partial s} \right\|^2 ds$$

Cette fonction permet de mesurer la variation du champ de déplacement  $\overrightarrow{X_S X_D}$  le long de la courbe  $\mathcal{S}$ , afin de pouvoir la minimiser.

On obtient la fonctionnelle suivante :

$$E(\chi) = E_\kappa(\chi) + RE_r(\chi) \tag{8.1}$$

à minimiser afin d'obtenir une solution de mise en correspondance entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ .

### Résolution

Il faut noter que pour réaliser la mise en correspondance par cette méthode, il est nécessaire d'avoir une estimation de la courbure en tout points des deux structures. Or, c'est une quantité difficile à estimer. En effet la courbure est une dérivée seconde, elle est donnée par :

$$\kappa(s) = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'^2(s) + y'^2(s))^{1/2}}$$

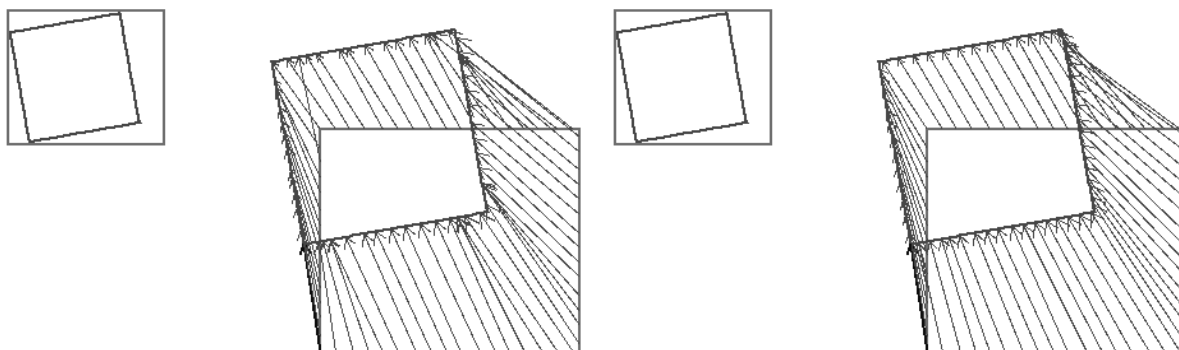
où  $x(s)$  et  $y(s)$  sont les coordonnées de la courbe. Les erreurs sont généralement importantes lors de l'estimation de la courbure sur les images numérisées. En pratique, il est nécessaire de lisser la courbe ou de l'approximer par des courbes splines.

Minimiser (8.1) revient à calculer l'équation d'Euler-Lagrange associée. On obtient une équation de la forme :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} + A\chi = L_\chi$$

où  $L_\chi$  est un vecteur qui dépend de  $\chi$  et  $A$  est la matrice formée par les coefficients  $[\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2}(s) \|\frac{\partial D}{\partial s}(\chi(s))\|^2]$ . Cette équation est ensuite discrétisée selon  $\tau$  par différences finies et on l'utilise pour minimiser (8.1).

La figure 8.2 montre un exemple de mise en correspondance d'un carré qui subit une rotation et un changement d'échelle. On peut voir l'évolution de la solution entre l'initialisation calculée en minimisant simplement la quantité:  $\int_{\mathcal{S}} (\kappa_{\mathcal{S}} - \kappa_{\mathcal{D}})^2 ds$  et la solution finale obtenue après itération du processus. La figure 8.3 illustre une mise en correspon-



(a) à l'initialisation du processus

(b) après stabilisation de l'énergie

FIG. 8.2 – *Mise en correspondance de deux carrés grâce à la courbure.*

dance dans un cas plus complexe où l'objet subit une déformation mais celle-ci est telle que les hypothèses énoncées ci-dessus restent valables.

### 8.2.2 Contours actifs

Les contours actifs [KWT88], sont souvent utilisés pour des problèmes de segmentation. Toutefois, ils permettent aussi de modéliser des déformations de structure. Une courbe se déforme sous l'action de forces, depuis sa position initiale jusqu'à une position finale. Ces forces dépendent a priori de caractéristiques colorimétriques, mais il est aussi possible d'utiliser des critères géométriques.

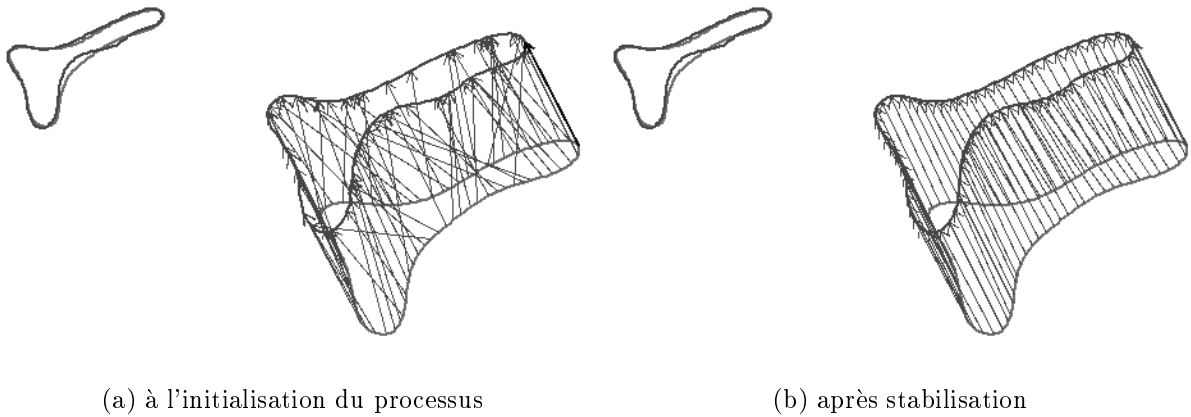


FIG. 8.3 – Mise en correspondance grâce à la courbure, d'un objet avant et après une faible déformation.

### Formulation

On utilise l'approche fonctionnelle. C'est-à-dire que l'on construit une énergie  $E(v)$  à minimiser en  $v$ , où  $v$  est le contour actif paramétré par  $s$  :

$$\begin{aligned}
 v : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 s &\mapsto v(s) \\
 \text{et } v(0) &= v(1) \text{ si la courbe est fermée.}
 \end{aligned}$$

Le minimum de  $E$  doit correspondre à la position de la courbe finale, c'est à dire la courbe qui vérifie au mieux certains critères :

- Régularité de la courbe

La courbe  $v$  est cherchée parmi les courbes de classe  $C^1$ . On définit la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
 E_{reg}(v) &= \alpha E_{etir}(v) + \beta E_{courb}(v) \\
 E_{reg}(v) &= \alpha \int_0^1 w_1(s) \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 ds + \beta \int_0^1 w_2(s) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right)^2 ds
 \end{aligned}$$

Le premier terme modélise l'étirement de la courbe. Physiquement,  $w_1(s)$  représente une fonction de résistance de la courbe à l'élongation. On note l'énergie de l'étire-

ment de la courbe  $E_{etir}(v)$ . En particulier,  $E_{etir}(v)$  devient arbitrairement grand en présence de discontinuité  $C^0$ . Généralement, on prend  $w_1(s) = 1$  sauf aux points de discontinuité  $C^0$ .

Le second terme  $E_{courb}$  modélise les effets de la flexion de la courbe. Ainsi, une forte flexion induit une énergie plus élevée.  $w_2(s)$  représente la résistance de la courbe à la flexion. En particulier,  $E_{courb}$  devient arbitrairement grand en présence de discontinuité  $C^1$ . On prendra  $w_1(s) = 1$  sauf aux points de discontinuités  $C^1$ .

Finalement, l'énergie totale  $E_{reg}$  est grande lorsque  $v$  est irrégulière. Dans le cadre d'une utilisation pour la segmentation,  $E_{reg}$  est appelée aussi énergie interne car elle ne dépend que de  $v$  et non des données image.

– Points caractéristiques

La courbe  $v$  doit se positionner sur les points d'intérêt. Soit  $U(s)$  une fonction appelée "potentiel".  $U$  dérive d'un champ de force, dirigé vers les points d'intérêt. On construit alors une fonctionnelle, que l'on appelle énergie externe, car elle décrit l'attache aux données :

$$E_{ext}(v) = \int_0^1 U(v) ds$$

Dans une perspective de mise en correspondance, on peut par exemple choisir un potentiel basé sur la carte des distances aux contours.

Finalement l'énergie du contour actif est :

$$E(v) = \alpha \int_0^1 E_{etir}(v) ds + \beta \int_0^1 E_{courb}(v) ds + \int_0^1 E_{ext}(v) ds \quad (8.2)$$

### Résolution

L'équation d'Euler-Lagrange ( $\nabla E(v) = 0$ ) associée à la fonctionnelle (8.2) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} (w_1 \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} (w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = -\nabla U(v) \\ \text{conditions initiales.} \end{array} \right. \quad (8.3)$$



Et l'équation d'évolution associée est :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = -\nabla U(v) \\ v_0(s) \text{ courbe initiale.} \end{cases} \quad (8.4)$$

On sait qu'une solution de l'équation d'évolution est solution de l'équation (8.3). Cette équation doit ensuite être discrétisée. La fonction  $v$  est représentée par le vecteur  $V$  de  $\mathbb{R}^N$  où  $N$  est le nombre de points de la courbe. On a  $v(s_i) = V_i$ . De même, les dérivées première et seconde de  $v$  sont approximées par différence finies. L'équation (8.3) peut alors s'écrire sous la forme :

$$A.V = L_V$$

qui est un système linéaire, et l'équation (8.4) :

$$\frac{dV}{dt} + A.V = L_V.$$

Ce système est discrétisé selon le paramètre  $t$  en utilisant les différences finies afin d'obtenir le schéma de résolution.

La figure 8.4 montre les différentes étapes permettant de mettre en correspondance une structure vers une autre. La fonction potentielle utilisée est la carte de distance au contour d'arrivée.

### 8.2.3 Grande déformation

L'inconvénient des méthodes citées précédemment est qu'elles s'appuient sur une hypothèse de faible déformation. Or, la périodicité d'acquisition ainsi que les phénomènes correspondant aux structures suivies, imposent souvent que cette hypothèse ne soit pas vérifiée. On ne peut alors supposer une conservation des extrema de courbure. On peut dans ce cas modéliser les propriétés d'une surface d'évolution générée par les deux structures à mettre en correspondance [BHC96].

On suppose que l'évolution de la structure entre les deux occurrences fournies par les contours de départ génère une surface 3D, telle que la troisième dimension représente le



FIG. 8.4 – *Mise en correspondance par contours actif.*

temps. On cherche à déterminer la meilleure surface interpolante. C'est-à-dire qu'il faut définir un modèle d'évolution, qui s'exprime par des contraintes appliquées à cette surface. Le problème se ramène alors à trouver la surface interpolante entre les deux structures, qui respecte au mieux ces contraintes.

### Formulation

Le modèle est basé sur des contraintes géométriques et, pour pouvoir obtenir une évolution régulière au cours du temps, on impose une contrainte d'élasticité à la surface.

On a  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  les deux contours à mettre en correspondance. On fait l'hypothèse qu'ils s'inscrivent respectivement dans les plans temporels  $t=0$  et  $t=1$ . On cherche une surface interpolante  $\Upsilon$ , qui possède une certaine élasticité et qui contienne  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ .  $\Upsilon$  est paramétrée par  $(s, t) \in \Omega = [0, 1]^2$  et on a :

$$\begin{cases} \Upsilon(., 0) = \mathcal{S} \\ \Upsilon(., 1) = \mathcal{D} \\ \Upsilon(1, .) = \Upsilon(0, .) \end{cases} \quad (8.5)$$

Les positions intermédiaires de la structure sont décrites par les différentes valeurs de  $t$  entre les instants 0 et 1.

L'élasticité est modélisée par un contrôle sur la première forme fondamentale. Celle-ci exprime les distorsions locales sur  $\Upsilon$ , elle est donnée par :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}, \frac{\partial \Upsilon}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}, \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}, \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}, \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right\rangle \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Plus  $\mathcal{F}$  est proche de la matrice l'identité, plus les distorsions sont petites. Si  $\mathcal{F}$  est égale à l'identité, la base locale  $\left( \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}, \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right)$  du plan tangent à  $\Upsilon$  est orthogonale, ce qui correspond à la distorsion minimale. On en déduit la mesure de distorsion locale :

$$\|\mathcal{F} - Id\|^2 \quad (8.7)$$

Le comportement élastique est obtenu en minimisant ce critère sur toute la surface. Ce qui se traduit par la fonctionnelle :

$$E(\Upsilon) = \int \int_{\Omega} \left( (\langle \Upsilon_s, \Upsilon_s \rangle - 1)^2 + 2 \langle \Upsilon_s, \Upsilon_t \rangle^2 + (\langle \Upsilon_t, \Upsilon_t \rangle - 1)^2 \right) ds dt \quad (8.8)$$

## Résolution

Minimiser l'énergie (8.8) revient à chercher les solutions de  $\nabla E(\Upsilon) = 0$  c'est-à-dire de :

$$\Delta \Upsilon - \nabla^T(\mathcal{F}\nabla\Upsilon) = 0, \quad (8.9)$$

où  $\nabla^T$  correspond à la transposée de l'opérateur gradient.

Pour résoudre cette équation, on utilise le schéma de relaxation suivant :

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \tau} + \Delta \Upsilon - \nabla^T(\mathcal{F}\nabla\Upsilon) = 0 \quad (8.10)$$

où  $\tau$  représente le paramètre de relaxation du système. Après discrétisation et linéarisation de l'équation (8.10) on peut calculer  $\Upsilon$  à  $\tau + d\tau$  connaissant  $\Upsilon$  à la valeur  $\tau$ . Le processus

est initialisé en prenant comme surface de départ une interpolation bilinéaire entre les deux contours. D'autre part,  $\Upsilon$  est, à chaque étape, contrainte de respecter les conditions au bord (8.5).

### Application

Les figures 8.5 et 8.6 illustrent l'application qui a pu être faite de cette méthode, pour suivre l'évolution du trait de côte en Guyane française [HRC<sup>+</sup>98]. La figure 8.5 montre deux clichés ERS-1 pris en mai et novembre de la même année et dans les mêmes conditions de marée. On distingue en sombre les zones d'envasement et en clair les zones d'érosion. Les deux contours correspondent à la position du trait de côte. Si les extrema de courbure sont préservés dans les parties de structure qui n'évoluent pas, il n'y a aucune raison pour que l'hypothèse de conservation de la courbure soit pertinente lorsqu'il s'agit de suivre le trait de côte (en particulier, lorsque les prises de vues sont séparées de plusieurs mois). Le modèle de surface est donc mieux adapté pour suivre cette évolution. La figure 8.6 permet de visualiser la mise en correspondance des deux occurrences du trait de côte, obtenue avec ce modèle.

#### 8.2.4 Changement de topologie et approche isocontour

Si l'approche précédente permet de prendre en compte de grandes déformations, elle ne peut pas être utilisée dans le cas de changement de topologie, ce qui peut être problématique, en particulier lorsqu'on cherche à suivre l'évolution de courbes d'iso-élévation issues de MNT. Depuis quelques années sont apparues les approches issues de la théorie de propagation des fronts [OS88, SS92]. Les algorithmes qui en découlent gèrent les changements de topologie dans les espaces à  $n$  dimensions. Ces méthodes présentent un intérêt d'autant plus grand, quand elles sont abordées par une formulation de type isocontour (*level-set*): en effet on peut déduire des schémas de résolution des équations de propagation qui sont stables et efficaces [Set96].

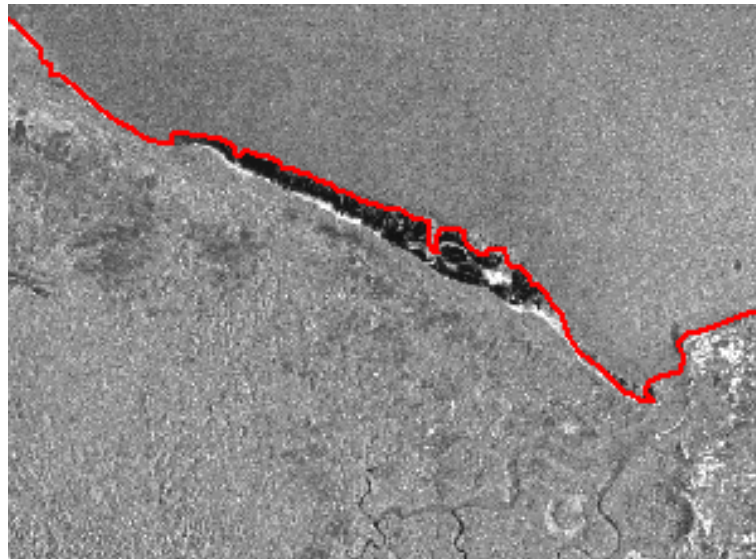
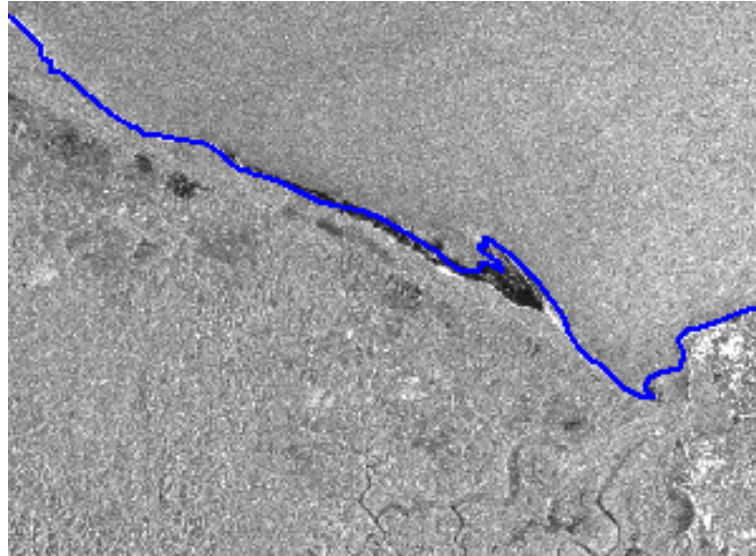


FIG. 8.5 – *Position du trait de côte en mai et novembre.*

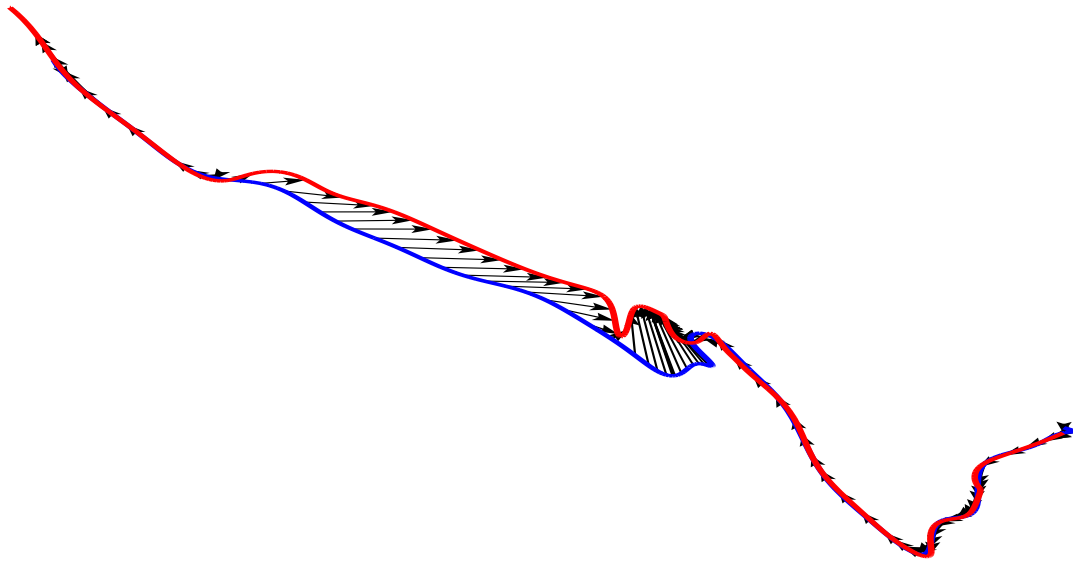


FIG. 8.6 – *Mise en correspondance des deux occurrences du trait de côte.*

### Propagation des front

On appelle cette théorie “propagation de front”, car elle permet de modéliser des comportements comme la propagation d’un “feu de prairie” (également appelé front de chaleur) sur une colline. Elle a été développée originellement pour modéliser l’expansion de cristaux [OS88].

Soit un contour  $\mathcal{S}$ , défini par  $S(s)$ . On s’intéresse à son déplacement dans la direction de sa normale, c’est-à-dire que le vecteur déplacement  $\partial S/\partial t$  est orthogonal à la courbe (voir figure 8.7). Plus précisément, si  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal au contour  $S(s)$ , on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, s) = F(S(s))\vec{n}(S(t)), \quad (8.11)$$

où  $F$  est la vitesse de l’évolution. En général  $F$  peut dépendre de plusieurs paramètres associés à la géométrie de la courbe. On constate que ce type d’évolution peut engendrer des “repliements” comme l’illustre la figure 8.8(a). Ces repliements peuvent être évités en

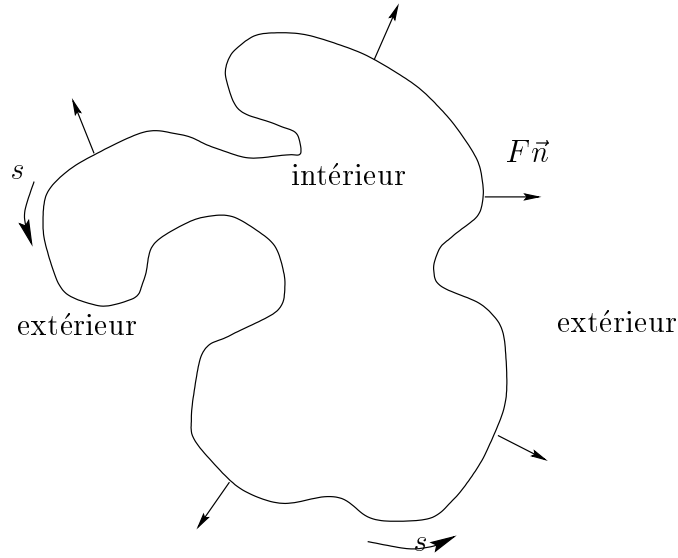


FIG. 8.7 – Propagation d'une courbe dans la direction de sa normale

utilisant une vitesse fonction de la courbure :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, s) = F(\kappa_S(s))\vec{n}(S(t))$$

comme l'illustre la figure 8.8(b).

### Formulation par isocontour

Étant donnée une hypersurface  $\Xi$ , de dimension  $N - 1$ , plongée dans un espace à  $N$  dimensions, il existe une formulation dite “eulérienne”, proposée par Osher et Sethian [OS88], pour décrire le déplacement de  $\Xi(t)$  dans la direction de sa normale et à la vitesse  $F$ . On introduit la fonction<sup>†</sup>  $\zeta$  telle que :

$$\Xi(t = 0) = \{p | \zeta(p, t = 0) = 0\},$$

<sup>†</sup>. Il est à signaler que dans la littérature concernant les isocontours, la fonction  $\zeta$  est conventionnellement appelée  $\phi$ ,  $\varphi$  ou  $\psi$ . Dans ce document, on exclura cette notation, au profit de  $\zeta$  ou  $\xi$  pour ne pas confondre avec la phase, la différence de phase ou la différence de phase déroulée.

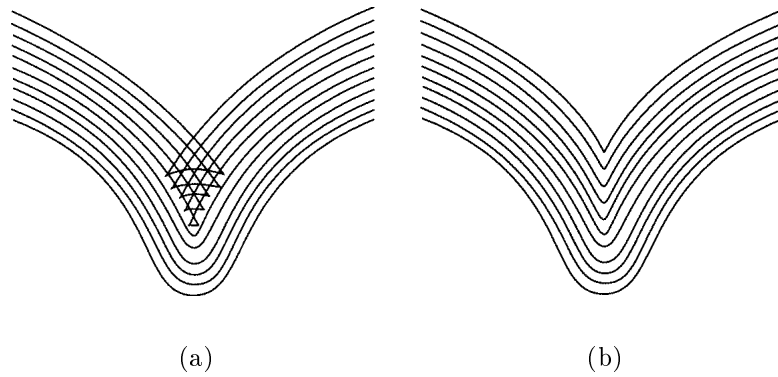


FIG. 8.8 – *Différentes évolutions possibles d'un contour dans la direction de sa normale.*

où  $p$  représente un point de  $\mathbb{R}^N$  et  $\zeta$  est définie de telle sorte que :

$$\zeta(p, t = 0) = \pm d,$$

avec  $d$  la distance calculée entre  $p$  et  $\Xi$ .

Dans ce contexte, on peut montrer [Set96] que l'équation (8.11) se transforme en une équation au dérivées partielles :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + F|\nabla \zeta| = 0. \quad (8.12)$$

Pour certaines formes de la fonctionnelle  $F$ , on obtient une équation du type Hamilton-Jacobi. Cette formulation est appelée "eulérienne", car le système de coordonnées reste fixé. La figure 8.9 illustre cette formulation dans le cas de la propagation d'un cercle.

### Applications

Les avantages de cette approche sont nombreux, en particulier  $\zeta(t)$  est toujours une fonction, donc le contour équipotentiel  $\zeta = 0$  et par conséquent l'hypersurface  $\Xi(t)$  peuvent changer de topologie, se rompre ou fusionner et même posséder des points singuliers. D'autre part, elle permet également de faire les calculs numériques sur des grilles et par conséquent de faire des estimations des dérivées par différences finies. De plus, les pro-



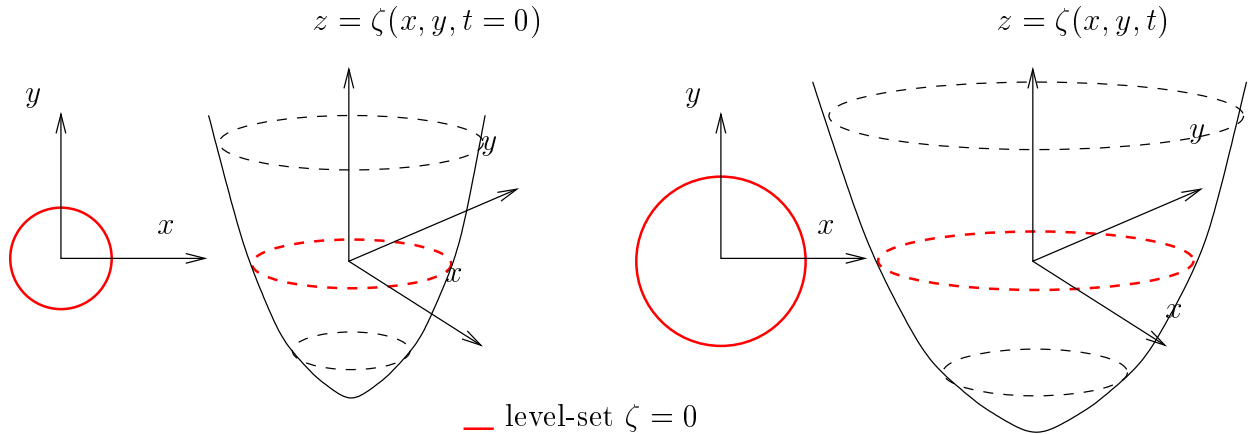


FIG. 8.9 – Propagation d'un cercle.

propriétés géométriques du front sont aisément calculables par le biais de la fonction  $\zeta$ , c'est le cas de la courbure par exemple.

De nombreuses applications du traitement d'image peuvent tirer parti de ces avantages. On peut citer des méthodes de reconstruction 3D via l'information colorimétrique (*shape from shading*) [KB95, KSKB95b], de morphologie mathématique [SKS<sup>+</sup>93], de contours actifs [CK96, CKS97, PD99], de squelettisation [KSKB95a], *etc.*

Cette approche permet également le calcul de plus court chemin inscrit sur une surface [KAB95]. Cette utilisation peut être utilisée pour réaliser une mise en correspondance entre deux courbes. Les chemins de mise en correspondance s'inscrivent alors sur une surface de coût [CH98]. Cette méthode est décrite en détail au chapitre suivant. Nous présentons également l'extension de cette théorie à la mise en correspondance de surfaces.

## Chapitre 9

# Mise en correspondance avec chemins géodésiques

Après avoir rappelé la théorie permettant de trouver des chemins minimaux sur des surfaces, ce chapitre revient sur la méthode de mise en correspondance de courbes qui en découle. Puis une extension à une dimension supplémentaire, c'est-à-dire au cas du suivi de l'évolution de surfaces, est détaillée. Quelques résultats sur des exemples synthétiques sont proposés et discutés, ainsi qu'une application aux données issues de l'interférométrie, afin de suivre les déplacements de la surface du sol.

### 9.1 Mise en correspondance de courbes

Trouver des chemins de longueur minimale entre deux régions est un problème bien connu, qui présente un intérêt particulier dans bien des domaines d'application (robotique, géophysique, navigation, *etc*). En 1995, Kimmel et *al.* [KAB95] introduisirent une approche originale pour trouver des chemins de longueur minimale joignant deux courbes tracées sur une surface. Ce paragraphe rappelle les notions fondamentales de géométrie, qui sont nécessaires pour appréhender cette théorie. Il se termine par une application à la mise en correspondance de courbes.

### 9.1.1 Notations

Pour alléger la lecture on utilise, dans les paragraphes qui suivent, quelques notations classiques en mathématiques, qu'il peut être utile rappeler.

On note :

- la dérivée partielle :  $f_i = \frac{\partial f}{\partial i}$ ,
- la projection sur un plan ou un hyperplan :  $\Pi$ ,
- le produit scalaire :  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,
- le produit vectoriel sur  $\mathbb{R}^3$  :  $\otimes$ ,
- le produit extérieur :  $\wedge$ ,
- l'opérateur de Hodge (voir la définition en annexe B) :  $*$ .

### 9.1.2 Géodésiques

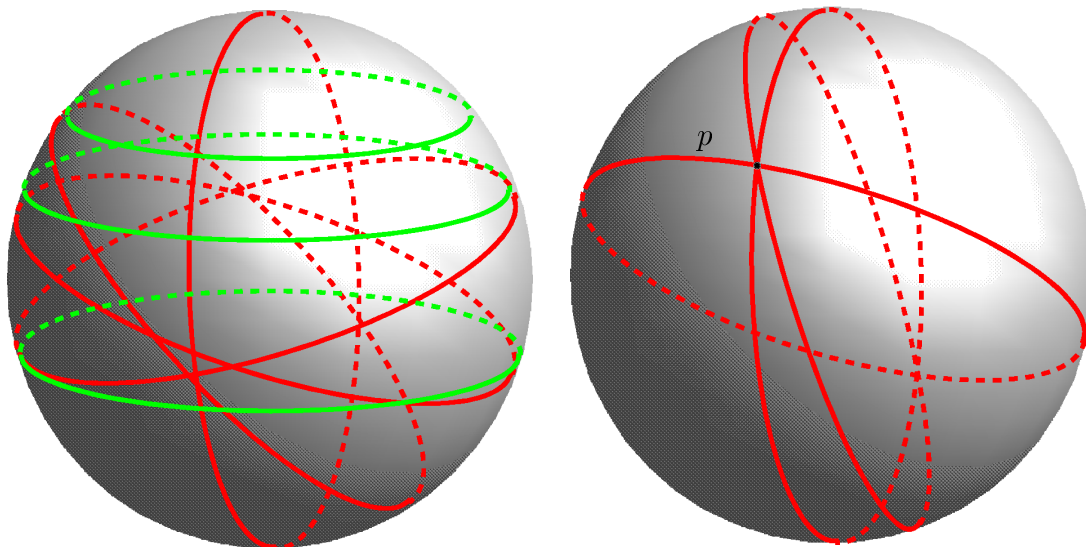
On définit une **géodésique** sur une variété quelconque comme étant une courbe dont la dérivée seconde est toujours orthogonale à l'espace tangent à cette variété [Tho79]. Dans le cas d'une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$ , une courbe paramétrée définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} \beta : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \beta(t) \end{aligned}$$

est une géodésique de  $S$ , si et seulement si,  $\frac{d^2\beta}{dt^2}$  est orthogonale à  $S$ , pour tout  $t \in I$ . C'est-à-dire, si et seulement si  $\frac{d^2\beta}{dt^2}$  est colinéaire à  $\vec{N}(\beta(t))$  pour tout  $t \in I$  tel que  $t = cs$ , où  $c$  est une constante et  $s$  l'abscisse curviligne de  $\beta$ . Si  $\vec{N}$  représente la normale  $S$  au point  $\beta(t)$ , on a :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} \propto \vec{N}(\beta(t)) \tag{9.1}$$

Par exemple, dans le cas où  $S$  est une sphère, les géodésiques sont les “méridiens” qui s’inscrivent sur  $S$ . C’est-à-dire tous les cercles qui sont centrés sur le centre de la sphère, tels les cercles en rouge sur la figure 9.1(a). Les cercles verts, les “parallèles” ne sont pas des géodésiques, excepté celui qui correspondrait à l’équateur.



(a) Cercles géodésiques (en rouge) et non-géodésiques (en vert).

(b) En un point quelconque  $p$  passe une infinité de géodésiques.

FIG. 9.1 – Géodésiques sur une sphère.

On peut montrer que les géodésiques sont solutions de l’équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2}(t) + \left\langle \frac{d\beta}{dt}(t), \frac{d\vec{N}(\beta(t))}{dt} \right\rangle \vec{N}(\beta(t)) = \vec{0}. \quad (9.2)$$

Une conséquence importante de l’équation (9.2), d’après le théorème d’existence et d’unicité d’une solution d’une équation différentielle ordinaire, est qu’en tout point  $p$  d’une surface et quelle que soit la direction  $\vec{w}$  choisie, il existe une unique géodésique d’abscisse curviligne  $s$  portée par cette direction.

C’est-à-dire si on note  $S_p$  l’hyperplan tangent à  $S$  en  $p$ , alors  $\forall \vec{w} \in S_p$  (direction  $p$ ) il

existe une unique géodésique telle que :

$$\begin{cases} \beta(0) = p \\ \frac{d\beta}{ds}(0) = \vec{w} \end{cases}$$

Ainsi on obtient toutes les géodésiques passant par  $p$ , en spécifiant une direction  $\vec{w}$ , en résolvant l'équation différentielle (9.2), avec comme condition initiale :

$$\begin{cases} p \\ \vec{w} \text{ pour la dérivée.} \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas où  $S$  est une sphère comme sur la figure 9.1(b), en un point donné  $p$ , il existe un continuum de géodésiques passant par ce point ; chacune d'elles étant déterminée par une direction différente.

### 9.1.3 Chemins géodésiques

Puisque  $S$  est plongée dans un espace euclidien, elle hérite de la métrique euclidienne de cet espace. Ce qui signifie qu'étant donnés  $p$  et  $q \in S$ , on peut calculer  $d(p, q)$  la longueur du segment de droite joignant  $p$  à  $q$ . Il est cependant possible de s'intéresser également aux longueurs des chemins tracés sur  $S$ . Il faut pour cela admettre que ces chemins existent, c'est à dire qu'il faut supposer que  $S$  est connexe. Cette hypothèse étant faite, on peut introduire une autre métrique ; elle porte le nom de **distance géodésique**. Soit  $I = [a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $\beta : I \rightarrow S$  une courbe paramétrée  $C^1$  joignant  $p$  à  $q$ , on désigne par  $L(\beta)$  la longueur de  $\beta$  qui est par définition :

$$L(\beta) = \int_a^b \left\| \frac{d\beta}{dt}(t) \right\| dt.$$

On appelle la distance géodésique :

$$d_S(p, q) = \inf_{\beta} (L(\beta)).$$

On peut également définir la distance géodésique entre un point  $p$  et un ensemble de points  $\Sigma$  (par exemple une courbe).

$$d_S(p, \Sigma) = \inf_{q \in \Sigma} (d_S(p, q)).$$

Une conséquence du théorème de Hopf-Rimow-De Rham [Spi71] est, que si  $S$  est compacte, alors il existe toujours une courbe de longueur minimale joignant  $p$  à  $q$ , et  $d_S(p, q)$  est alors la longueur de cette courbe. On démontre alors que si  $\beta$  est une courbe  $C^1$  par morceaux joignant  $p$  à  $q$  telle que  $d_S = L(\beta)$ , alors  $\beta$  est une courbe géodésique. Ce qui permet d'en déduire qu'un plus court chemin, s'il existe, est toujours une géodésique. On généralise ainsi au cas des surfaces la notion de plus court chemin, qui correspond dans l'espace euclidien ordinaire aux segments de droite joignant deux points.

On ne peut malheureusement pas en déduire que pour trouver le plus court chemin entre deux points sur une surface, il suffit de résoudre l'équation (9.2). En effet, on ne connaît jamais a priori quelle direction prendre en un point. Dans une perspective de mise en correspondance, on ne peut donc s'appuyer sur cette équation. La théorie développée par Kimmel et *al.* permet de s'affranchir de cette indétermination en calculant des géodésiques sans se préoccuper d'une direction. Cette théorie est rappelée dans le paragraphe suivant.

### 9.1.4 Équation d'évolution de courbes d'égale distance sur une surface

On cherche les chemins, portés par une surface, entre deux courbes de la surface, tels que ces chemins soient de distance minimale. La théorie développée par Kimmel et *al.*, pour résoudre ce problème repose sur deux lemmes, qui permettent de démontrer que l'évolution d'une courbe le long surface est régie par une équation aux dérivées partielles.

Soit la surface  $S \subset \mathbb{R}^3$ , on considère  $\Sigma$  un ensemble de points tracés sur  $S$ . Dans la pratique  $\Sigma$  est une courbe. On considère l'ensemble des points de  $S$  à distance géodésique  $t$  de  $\Sigma$  (voir figure 9.2) :

$$\alpha(*, t) = \{p | d_S(p, \Sigma) = t\}$$

où  $d_S(p, \Sigma)$  est la distance géodésique entre  $p$  et  $\Sigma$  déterminée par le plus court chemin porté par  $S$ , du point  $p$  à  $\Sigma$ . On prend  $u$  comme abscisse curviligne de  $\alpha$ .

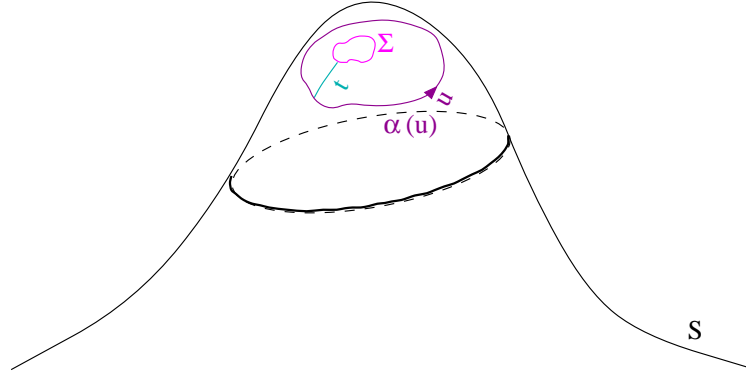


FIG. 9.2 – Ensemble des points de  $S$  à distance géodésique  $t$  de  $\Sigma$ .

**Lemme 1**

Pour tout  $u_0$  fixé, la courbe  $\beta(t) = \alpha(u_0, t)$  est une géodésique.

**Lemme 2**

L'évolution, par rapport au paramètre  $t$ , de la courbe d'égalité distance est régie par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u \quad (9.3)$$

où  $\vec{\tau}^u$  est la tangente à  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\vec{\tau}^u = \frac{\partial \alpha}{\partial u} / \|\frac{\partial \alpha}{\partial u}\|$ , et  $\vec{N}$  est la normale à la surface  $S$ .

La démonstration de ces deux lemmes est décrite en détail dans [KAB95]. Les démonstrations pour le cas 3D suivent les mêmes démarches et sont présentées au paragraphe 9.2.

Le lemme 2 donne l'équation d'évolution d'une courbe d'égalité distance le long d'une surface  $S$ . On se place dans le cas où  $S$  est définie comme un graphe, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y, z) \in S, z = z(x, y).$$

Si on définit le bord de la surface:  $\{(x, y, z(x, y)) | (x, y, z(x, y)) \in \partial S\} = \alpha(u, 0)$ , il est possible de déterminer la courbe à distance  $d$ ,  $\alpha(u, t)|_{t=d}$  calculée depuis  $\alpha(0)$  en utilisant

l'équation (9.3). On peut ainsi calculer la carte des distance pour chaque point de la surface.

Néanmoins, la résolution de l'EDP (9.3) reste complexe et par conséquent l'implémentation de l'évolution tridimensionnelle d'une courbe reste algorithmiquement lourde. Kimmel et *al.* ont donc proposé de ne s'intéresser qu'à la projection de l'évolution de cette courbe sur le plan  $(x, y)$  :

$$\mathcal{C}(t) = \Pi \circ \alpha = \{(x, y) \mid (x, y, z(x, y)) \in \alpha(t)\}.$$

Les auteurs utilisent alors une propriété provenant de la théorie de propagation des fronts (voir chapitre précédent) : l'évolution d'une courbe plane n'est déterminée que par sa composante le long de sa normale [EG87]. On cherche donc à calculer  $F = \langle \vec{n}, \Pi \circ (\vec{N} \otimes \vec{\tau}^u) \rangle$ , où  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  est la normale à la courbe  $\mathcal{C}$ .

La surface  $S$  étant définie comme un graphe  $Z(x, y, z)$ , on a :

$$Z(x, y, z) = \{(x, y, z) \mid z = z(x, y)\},$$

on peut donc calculer les dérivées :  $Z_x = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$  et  $Z_y = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ .

Si on pose  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  et  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\vec{N}$  la normale au graphe  $Z$  peut alors s'écrire :

$$\vec{N} = \frac{Z_x \otimes Z_y}{\|Z_x \otimes Z_y\|} = \frac{(-p, -q, 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

De même,  $\vec{\tau}^u$  la tangente à la courbe  $\alpha(u)$  est définie comme :

$$\vec{\tau}^u = \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} = \frac{(x_u, y_u, z_u)}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

On a donc :

$$\vec{N} \otimes \vec{\tau}^u = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} \begin{pmatrix} -qz_u - y_u \\ x_u + pz_u \\ -py_u + qx_u \end{pmatrix}.$$



En projetant sur le plan  $(x, y)$  on obtient :

$$\Pi \circ (\vec{N} \otimes \vec{\tau}^u) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}} \begin{pmatrix} -qz_u - y_u \\ x_u + pz_u \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} F &= \langle \vec{n}, \Pi \circ (\vec{N} \otimes \vec{\tau}^u) \rangle \\ &= \frac{(-n_1qz_u - n_1y_u + n_2x_u + n_2pz_u)}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}} \end{aligned}$$

Par définition  $(n_1, n_2) = \frac{(-y_u, x_u)}{\sqrt{x_u^2+y_u^2}}$ , donc on a :

$$F = \frac{y_uqz_u + y_u^2 + x_u^2 + x_upz_u}{\sqrt{x_u^2+y_u^2}\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}}$$

Or  $z_u = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = px_u + qy_u$  donc :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2y_uqpx_u + q^2y_u^2 + y_u^2 + x_u^2 + p^2x_u}{\sqrt{x_u^2+y_u^2}\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x_u^2(1+p^2) + y_u^2(1+q^2) + 2pqx_uy_u}{(1+p^2+q^2)(x_u^2+y_u^2)}}. \end{aligned}$$

Comme  $x_u = n_2\sqrt{x_u^2+y_u^2}$  et  $y_u = -n_1\sqrt{x_u^2+y_u^2}$  on a :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\frac{n_1^2(1+q^2) + n_2^2(1+p^2) - 2pqn_1n_2}{(1+p^2+q^2)}} \\ &= \sqrt{an_1^2 + bn_2^2 - cn_1n_2} \end{aligned} \tag{9.4}$$

Les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont fonctions des seules caractéristiques différentielles de la surface  $S$ , et peuvent n'être calculés qu'une seule fois. Le schéma d'évolution ne dépend alors que de la paramétrisation de la courbe, qui doit être recalculée à chaque étape, de façon à déterminer les composantes  $(n_1, n_2)$ . Néanmoins, ces composantes ne peuvent pas

être estimées avec précision lorsque la courbe devient complexe, car le calcul des dérivées est instable.

L'approche eulérienne (voir le chapitre précédent), permet de s'affranchir de cette paramétrisation. Elle repose sur la description de la courbe comme un isocontour (*level-set*) de niveau 0 d'une fonction bidimensionnelle  $\zeta$ . L'intérêt principal de cette approche est qu'elle permet de prendre en compte des changements de topologie. De plus, Osher et Sethian [OS88, Set96] fournissent un schéma de résolution numérique stable pour résoudre l'équation (9.4) dans ce contexte.

Si on a  $\zeta$  une fonction telle que  $\mathcal{C}(u, t) = \zeta^{-1}(0)$ , on peut écrire :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \langle \vec{\nabla} \zeta, F \vec{n} \rangle.$$

Étant donné que  $\mathcal{C}$  est définie comme étant un isocontour, on peut écrire que  $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} \zeta}{\|\vec{\nabla} \zeta\|}$ , afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \zeta_t = \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \left\langle \vec{\nabla} \zeta, F \frac{\vec{\nabla} \zeta}{\|\vec{\nabla} \zeta\|} \right\rangle \\ &= F \|\vec{\nabla} \zeta\|. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Finalement, en remplaçant  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  par  $\left( \frac{\zeta_x}{\|\vec{\nabla} \zeta\|}, \frac{\zeta_y}{\|\vec{\nabla} \zeta\|} \right)$ , on obtient l'équation d'évolution suivante :

$$\zeta_t = \sqrt{a\zeta_x^2 + b\zeta_y^2 - c\zeta_x\zeta_y}. \tag{9.6}$$

Dans [Set96] Sethian donne une méthode numérique stable pour résoudre cette équation (9.6). Elle dérive de la méthode de résolution des équations du type Hamilton-Jacobi, et se présente sous la forme d'un schéma temporel explicite basé sur une approche par différences finies.

### 9.1.5 Application à la mise en correspondance de courbes

Comme expliqué au chapitre 8, le problème de la mise en correspondance de courbes consiste à définir une relation point à point entre deux contours. Or, la méthode présentée au paragraphe précédent offre la possibilité de calculer la propagation d'une courbe sur une surface, et ainsi d'obtenir une mesure de la distance géodésique à ce contour en tout point de la surface. Elle permet par conséquent, de calculer le plus court chemin entre un point de la surface et le contour. On peut utiliser ce résultat dans une perspective de mise en correspondance de courbes [CH97b, CH98].

On considère alors  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ , les structures source et destination, à mettre en correspondance en calculant des chemins inscrits sur une surface, choisie pour représenter une fonction de coût. Cette approche est particulièrement intéressante puisqu'aucune paramétrisation des structures  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  n'est nécessaire : celles-ci sont définies comme des isocontours de niveau zéro de fonctions bidimensionnelles. D'autre part elle permet d'accepter les grandes déformations et les changements de topologie.

Il est nécessaire de définir :

1.  $\zeta_0$  et  $\xi_0$  les deux fonctions représentant les courbes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  à l'étape 0, il s'agit de l'initialisation de l'algorithme de propagation, que l'on souhaite mettre en œuvre ;
2. le graphe  $Z$  sur lequel la carte des distances géodésiques est calculée, et qui correspond à une mesure de similarité entre les deux courbes à mettre en correspondance ;
3. une fonction de mise en correspondance  $\chi$ , issue du calcul des distances sur  $Z$ .

#### Initialisation

La représentation implicite de la courbe peut-être obtenue de différentes façon. On peut, par exemple, utiliser la distance euclidienne  $d$  au contour. En imposant que les courbes soient fermées, on peut utiliser une version signée de cette distance, de telle sorte que  $\zeta_0$

ait une valeur négative à l'intérieur du contour :

$$\zeta_0(x, y) = \begin{cases} -d(x, y) & \text{si } (x, y) \in \text{intérieur de } \zeta_0^{-1}(0) \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \zeta_0^{-1}(0) \\ +d(x, y) & \text{si } (x, y) \in \text{extérieur de } \zeta_0^{-1}(0). \end{cases} \quad (9.7)$$

On a ainsi une fonction bidimensionnelle telle que  $\mathcal{S} = \zeta_0^{-1}(0)$  (respectivement  $\mathcal{D} = \xi_0^{-1}(0)$ ).

Étant données les deux fonctions  $\zeta_0$  et  $\xi_0$ , on est alors en mesure, grâce au schéma itératif donné par l'équation (9.6), de calculer l'évolution par rapport au paramètre  $t$  des fonctions  $\zeta$  et  $\xi$  le long d'un graphe  $Z$ . Il s'agit de calculer les cartes de distances de  $D_{\mathcal{S}}$  et  $D_{\mathcal{D}}$  sur  $Z$  telles que :

$$D_{\mathcal{S}} = \{(x, y, \zeta(x, y))\}$$

et

$$D_{\mathcal{D}} = \{(x, y, \xi(x, y))\}$$

### Définition de la surface de coût

Le graphe  $Z$ , utilisé pour l'évolution des courbes, doit être le même pour  $\zeta$  et  $\xi$  afin d'obtenir une mesure de la similarité basée sur les cartes de distance. Il doit être tel que les deux courbes  $\zeta_0$  et  $\xi_0$  soient des isocontours de ce graphe. On peut par exemple choisir :

$$Z = (x, y, |\zeta_0| \times |\xi_0|) \quad (9.8)$$

ou encore :

$$Z = (x, y, z(x, y)) = (x, y, \min(|\zeta_0|, |\xi_0|)) \quad (9.9)$$

Ces deux définitions sont illustrées sur l'exemple synthétique de la figure 9.3, où on cherche à mettre en correspondance une ellipse avec deux cercles. Les surfaces  $Z$  correspondant aux définitions (9.8) et (9.9) sont visualisées par les images de la figure 9.4, la troisième composante est représentée par le niveau de gris du point sur l'image.

Ces deux définitions du graphe  $Z$  ne sont basées que sur la distance entre les contours. Mais, on peut y ajouter d'autres propriétés, comme la courbure. On définit  $\rho$  un critère

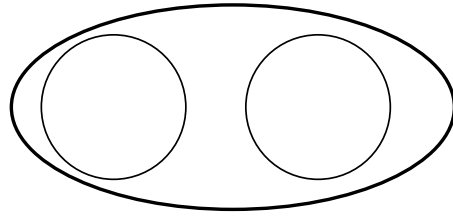
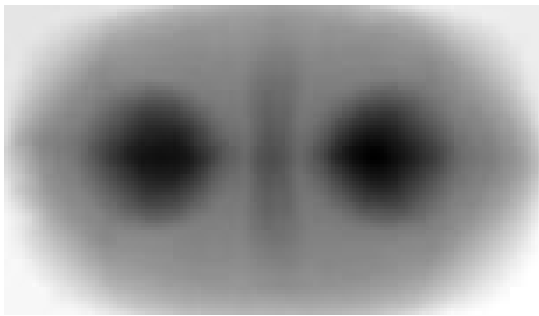
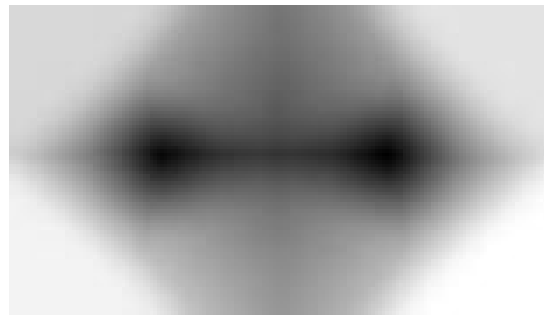


FIG. 9.3 – Deux structures à mettre en correspondance, deux cercles changent de topologie pour fusionner une ellipse.



(a)  $Z = (x, y, |\zeta_0| \times |\xi_0|)$



(b)  $Z = (x, y, \min(|\zeta_0|, |\xi_0|))$

FIG. 9.4 – Visualisation des graphes obtenus grâce aux équations (9.8) et (9.9).

d'appariement, fonction de la distance euclidienne  $d$  et de l'écart entre les courbures  $\Delta\kappa = \kappa_{\mathcal{S}} - \kappa_{\mathcal{D}}$  ( $\kappa_{\mathcal{S}}$  et  $\kappa_{\mathcal{D}}$  représentent respectivement les courbure de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ ).  $\rho$  est construit de telle sorte que l'influence de la courbure diminue, quand la distance augmente :

$$\rho(\Delta\kappa, d) = 1 - \frac{\Delta\kappa^2}{1 + d^2\Delta\kappa^2/\sigma}$$

où  $\sigma$  est le paramètre d'échelle définissant la taille du voisinage, sur lequel la courbure doit être prise en compte. Au delà, seule la distance est utilisée. On obtient :

$$Z = (x, y, \min(|\zeta_0|\rho(\Delta\kappa, \zeta_0), |\xi_0|\rho(\Delta\kappa, \xi_0))) \quad (9.10)$$

Un des avantages de la formulation par isocontours est que la courbure devient aisément calculable [Set96]. Elle est donnée par :

$$\kappa = \nabla \frac{\nabla\zeta}{\|\nabla\zeta\|} = \frac{\zeta_{xx}\zeta_y^2 - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} + \zeta_{yy}\zeta_x^2}{\zeta_x^2 + \zeta_y^2}$$

### Fonction de mise en correspondance

Il reste alors à obtenir les chemins géodésiques minimaux, menant de la source  $\mathcal{S}$  à la destination  $\mathcal{D}$ . On utilise alors une fonction de coût  $\chi$ , caractérisant les disparités entre les courbes à mettre en correspondance :

$$\chi(x, y) = \zeta(x, y) + \xi(x, y) \quad (9.11)$$

La mise en correspondance entre les deux courbes est donnée par la définition des chemins de coût minimal, connectant  $\mathcal{S}$  à  $\mathcal{D}$ . Ces chemins optimaux sont ceux qui minimisent la fonction  $\chi$  le long de la connexion. Soit  $X_{\mathcal{S}}$  un point de  $\mathcal{S}$ , on cherche le chemin  $p_{X_{\mathcal{S}}}^{opt}$ , menant à  $\mathcal{D}$  parmi tous les chemins  $p_{X_{\mathcal{S}}}$  tel que le coût  $C$  soit minimal. Ainsi  $p_{X_{\mathcal{S}}}^{opt}$  est défini par :

$$C(p_{X_{\mathcal{S}}}^{opt}) = \min_{p_{X_{\mathcal{S}}}} C(p_{X_{\mathcal{S}}})$$

avec

$$C(p_{X_{\mathcal{S}}}) = \int_{X_{\mathcal{S}}}^{\mathcal{D}} f(x, y) ds$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne du chemin de connexion de  $\mathcal{S}$  à  $\mathcal{D}$ . Un chemin est déterminé en calculant le gradient de la fonction de coût :

$$\nabla\chi = \nabla\zeta + \nabla\xi$$

On obtient les chemins optimaux par la propriété :

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\nabla(\zeta + \xi) \quad (9.12)$$

En utilisant les graphes présentés figure 9.4, on obtient les chemins de mise en correspondance visualisés figure 9.5.

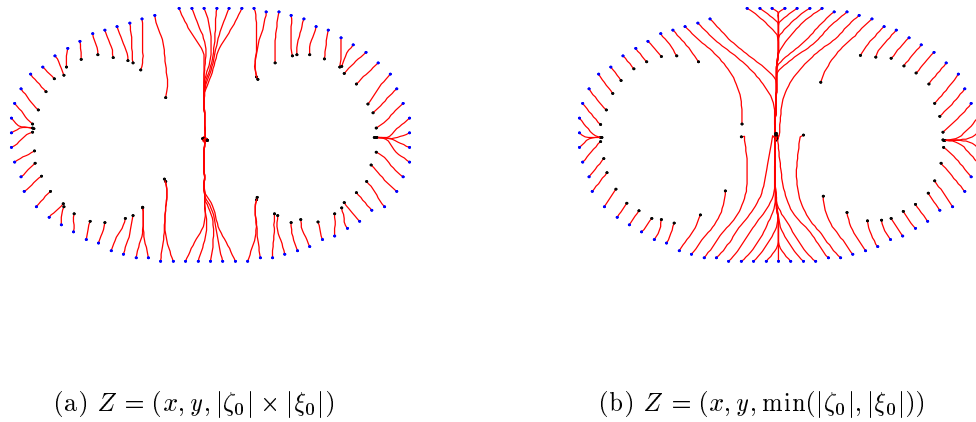


FIG. 9.5 – Chemins de mise en correspondance obtenus grâce aux graphes (9.8) et (9.9).

Par ailleurs, la version du graphe incorporant la courbure (équation 9.10) permet une mise en correspondance bien plus proche des propriétés physiques. Tout en proposant des connexions cohérentes dans le cas de grandes déformations ou de changements topologiques, elle permet de s'appuyer sur les propriétés géométriques des structures, quand les déformations restent de petite amplitude. Cette version a permis de suivre l'évolution du Vatnajökull (voir le chapitre 4 dans la première partie), grâce à la mise en correspondance de courbes d'iso-élévation issues de modèles numériques de terrain différents. Ce résultat est illustré sur la figure 9.6.

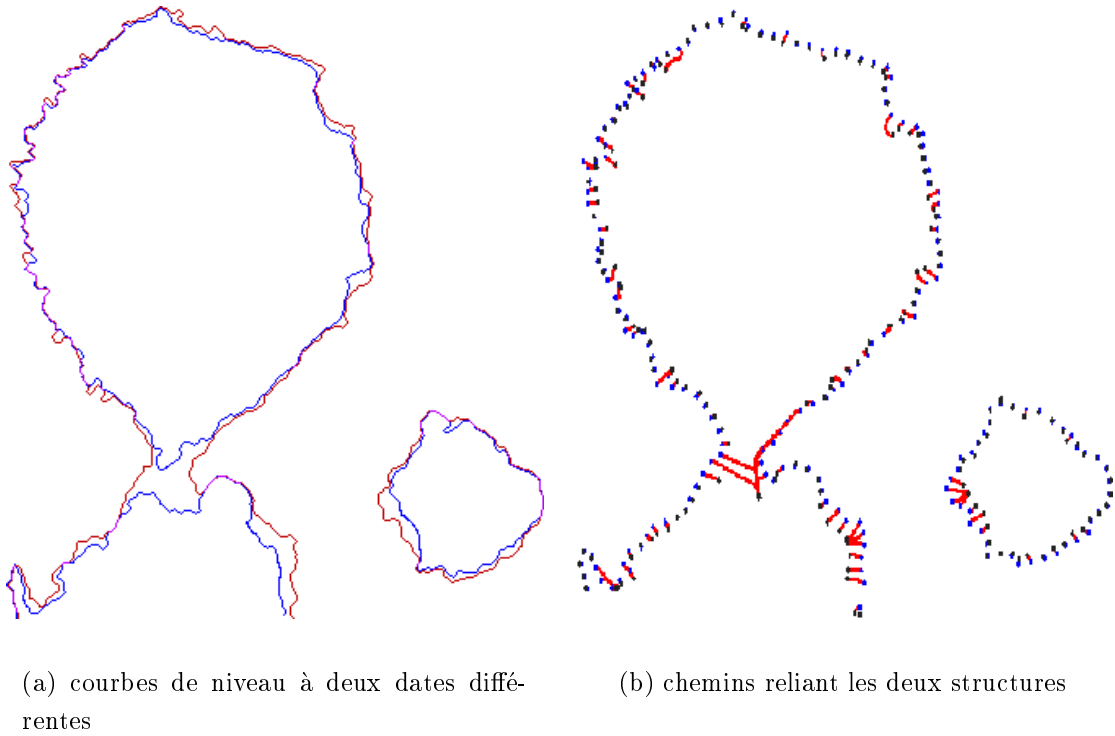


FIG. 9.6 – *Mise en correspondance de deux courbes d'iso-élévation du volcan islandais Vatnajökull.*



## 9.2 Mise en correspondance de surfaces

La méthode de mise en correspondance de courbes a prouvé son potentiel, en particulier, lorsqu'elle fonctionne avec des données bruitées (issues de l'imagerie météorologique [CH97a, CH97b] ou de l'interférométrie radar [CH98]) et elle prend en compte des grandes déformations et des changements topologiques. Ces propriétés lui confèrent un aspect général particulièrement intéressant. Dans la suite est présentée une extension de la méthode au cas de la mise en correspondance de surfaces tridimensionnelles plongées dans un espace 4D [HYHC99].

### 9.2.1 Équation d'évolution des surfaces d'égale distance

Il est nécessaire d'étendre la théorie proposée par Kimmel et *al.* au cas de l'évolution d'une famille de surfaces tracées sur une hypersurface  $S$  de dimension 3, plongée dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ .

On conserve les mêmes notations que dans les paragraphes précédents, mais les entités manipulées ont systématiquement une dimension supplémentaire. On a donc  $S$  une hypersurface dans  $\mathbb{R}^4$ , c'est-à-dire une variété de dimension 3 plongée dans un espace à quatre dimensions. Étant donnée une partie  $\Sigma \subset S$  (dans la pratique,  $\Sigma$  est une surface tracée sur  $S$ ), on considère l'ensemble des points de  $S$  à distance géodésique  $t$  de  $\Sigma$  (voir figure 9.2) :

$$\{p | d_S(p, \Sigma) = t\} = \alpha(*, t)$$

$d_S$  est la distance géodésique sur l'hypersurface  $S$ , elle est déterminée par les chemins de plus petite longueur partant d'un point  $p \in S$ .

Désignons par  $\alpha(u, v, t)$  une paramétrisation locale d'une famille de surfaces indexée par  $t$ , qui sont tracées sur  $S$  en respectant l'égalité ci-dessus. On veut montrer que :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$$

où  $\wedge$  désigne le produit extérieur des trois vecteurs  $\vec{N}$ ,  $\vec{\tau}^u$  et  $\vec{\tau}^v$  sur  $\mathbb{R}^4$  et  $*$  est l'opérateur de Hodge (voir annexe B).  $\tau^u$  et  $\tau^v$  sont les tangentes à  $S$  et  $\vec{N}$  correspond à la normale.

On remarque que l'on peut toujours choisir une paramétrisation  $(u, v)$  qui soit orthogonale, c'est à dire que :

$$\langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle = 0 \quad (9.13)$$

où :

$$\vec{\tau}^u = \frac{\partial \alpha / \partial u}{\|\partial \alpha / \partial u\|} \text{ et } \vec{\tau}^v = \frac{\partial \alpha / \partial v}{\|\partial \alpha / \partial v\|}$$

cette propriété est démontrée dans [dC76].

La démonstration de l'équation de propagation (9.13) nécessite deux étapes. Premièrement on doit montrer que, si cette équation est vérifiée alors les courbes  $\alpha(u_0, v_0, t)$ , à  $u = u_0$  et  $v = v_0$  fixés, sont des géodésiques. Ce qui permet, deuxièmement d'utiliser le lemme de Gauss pour montrer que, de plus,  $\alpha(u, v, t)$  est nécessairement une paramétrisation locale d'une famille de surfaces, toujours situées à distance géodésique d'une surface initiale.

### Lemme 1

Si l'équation (9.13) est vraie, alors pour tout  $u_0$  et  $v_0$  fixés, la courbe  $\beta(t) = \alpha(u_0, v_0, t)$  est une géodésique.

### Preuve

On démontre ce lemme en montrant que  $\beta_{tt}$  est perpendiculaire à  $\tau^u$  et  $\tau^v$ , et à  $*$   $(\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$ . La seule possibilité est que  $\beta_{tt}$  soit colinéaire à  $\vec{N}$  ce qui correspond à la définition des géodésiques.

1. On a

$$\beta_t = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$$

donc

$$\begin{aligned}
 \|\beta_t\|^2 &= \left\| * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v) \right\|^2 \\
 &= \left| \begin{array}{ccc} \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle & \langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^u, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{N} \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^v \rangle \end{array} \right| \\
 &= \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle \left| \begin{array}{cc} \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^u \rangle & \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^v \rangle \end{array} \right| - \langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle \left| \begin{array}{c} \langle \vec{\tau}^u, \vec{N} \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{N} \rangle \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^v \rangle \end{array} \right| \\
 &\quad + \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle \left| \begin{array}{c} \langle \vec{\tau}^u, \vec{N} \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{N} \rangle \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^u \rangle \\ \langle \vec{\tau}^v, \vec{\tau}^u \rangle \end{array} \right| \\
 &= 1 - \langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle^2 - \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle^2
 \end{aligned}$$

En effet, on a choisi un paramétrage orthogonal de  $\alpha$  de tel sorte que  $\langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle = 0$ . D'autre part,  $\vec{N}$  est le vecteur normal de  $S$ , il est partout orthogonal à  $S$  et par conséquent perpendiculaire aux vecteurs tangents de  $\alpha$  qui s'inscrivent sur  $S$ :

$$\langle \vec{N}, \vec{\tau}^u \rangle = \langle \vec{N}, \vec{\tau}^v \rangle = 0.$$

On obtient alors :

$$\|\beta_t\|^2 = 1.$$

Ce résultat prouve d'une part que  $t$  est l'abscisse curviligne de  $\beta$  et d'autre part que :

$$\langle \beta_{tt}, \beta_t \rangle = \left\langle \frac{d^2\beta}{dt^2}, \frac{d\beta}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (* (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)), * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v) \right\rangle = 0. \quad (9.14)$$

2. On a :

$$\left\langle \frac{d}{dt} (* (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)), \vec{\tau}^u \right\rangle = \left\langle \beta_{tt}, \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right\rangle$$

et

$$\left\langle \frac{d}{dt} (* (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)), \vec{\tau}^v \right\rangle = \left\langle \beta_{tt}, \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right\rangle.$$

Or, on remarque que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v), \vec{\tau}^u \right\rangle = \frac{d}{dt} 0 = 0$$

et que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left\langle * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v), \vec{\tau}^v \right\rangle = 0.$$

La règle de dérivation donne :

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right\rangle = \left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right\rangle + \left\langle \alpha_t, \left( \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right)_t \right\rangle$$

et de même

$$\frac{d}{dt} \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right\rangle = \left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right\rangle + \left\langle \alpha_t, \left( \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right)_t \right\rangle,$$

donc

$$\left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right\rangle = - \left\langle \alpha_t, \left( \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right)_t \right\rangle \text{ et } \left\langle \alpha_{tt}, \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right\rangle = - \left\langle \alpha_t, \left( \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right)_t \right\rangle.$$

On pose  $g = \|\alpha_u\|$  et  $h = \|\alpha_v\|$ , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right)_t &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right) & \left( \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right)_t &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right) \\ &= \frac{\alpha_{ut}g - \alpha_u g_t}{g^2} & &= \frac{\alpha_{vt}h - \alpha_v h_t}{h^2} \\ &= \frac{\alpha_{ut}}{g} - \frac{\alpha_u g_t}{g^2} & &= \frac{\alpha_{vt}}{h} - \frac{\alpha_v h_t}{h^2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_t, \left( \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} \right)_t \right\rangle &= \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_{ut}}{g} - \frac{\alpha_u g_t}{g^2} \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_{ut}}{g} \right\rangle - \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_u g_t}{g^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{g} \langle \alpha_t, \alpha_{ut} \rangle - \frac{g_t}{g^2} \left\langle * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v), \vec{\tau}^u \right\rangle \\ &= \frac{1}{g} \frac{1}{2} \frac{d}{du} \langle \alpha_t, \alpha_t \rangle - \frac{g_t}{g^2} 0 \\ &= \frac{1}{g} \frac{1}{2} \frac{d}{du} 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

tout comme

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_t, \left( \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} \right)_t \right\rangle &= \left\langle \alpha_t, \frac{\alpha_{vt}}{h} - \frac{\alpha_v h_t}{h^2} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle \beta_{tt}, \vec{\tau}^u \rangle = \langle \beta_{tt}, \vec{\tau}^v \rangle = 0. \quad (9.15)$$

$\frac{d^2\beta}{dt^2}$  est orthogonal à  $\vec{\tau}^u$  et à  $\vec{\tau}^v$ . Il ne reste plus qu'une seule possibilité :

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} \propto N(\vec{\beta}(t)), \quad (9.16)$$

c'est-à-dire que  $\beta(t)$  est une géodésique. ■

Soit  $\alpha(u, v, t)$  une surface inscrite sur l'hypersurface  $S \subset \mathbb{R}^4$  se propageant le long de l'axe  $t$  et paramétrée par  $u$  et  $v$ .

### Lemme 2

L'évolution de la surface d'égale distance est donnée par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v) \quad (9.17)$$

### Preuve

On démontre ce lemme en deux étapes et en s'appuyant sur le Lemme de Gauss. On rappelle d'abord ce lemme avant de détailler les différentes étapes.

1. Lemme de Gauss [Spi71] :

soit  $S$ , une variété différentiable de dimension  $n$ . Soit  $p$  un point de  $S$ ,  $S^p$  l'espace tangent à  $S$  en  $p$ . Soit  $\vec{v}$  un vecteur tangent à  $S$  en  $p$ , c'est-à-dire un vecteur de  $S^p$ . Il y a une unique géodésique  $\beta: [0, 1] \rightarrow S$  telle que  $\beta(0) = p$  et  $\frac{d\beta}{dt}(0) = \vec{v}$ . On définit l'application  $\exp$  par :

$$\exp_p(\vec{v}) = \beta(1).$$

La géodésique  $\beta$  peut alors est décrite par :

$$\beta(t) = \exp_p(t\vec{v}).$$

On démontre alors que  $\exp_p$  envoie une boule ouverte  $B_\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon$  (suffisamment petit) dans  $S_p$  difféomorphiquement sur un ensemble ouvert  $U_\varepsilon \supset S$ .

Le lemme de Gauss est alors :

dans  $U_\varepsilon$ , la famille des géodésiques passant par  $p$  est orthogonale aux hypersurfaces :

$$\left\{ \exp_p(\vec{v}) / \|\vec{v}\| = \text{constante} < \varepsilon \right\}.$$

La signification géométrique de ce lemme est que la famille des cercles géodésiques est orthogonale à la famille des géodésiques radiales. Par exemple dans le cas 2D, c'est-à-dire où  $S$  est une surface, (voir figure 9.7) l'ensemble des géodésiques passant par  $p$  ainsi que les "cercles géodésiques" (*i.e.* les familles de courbes obtenues à  $t = t_0$  constante) forment un système orthogonal de coordonnées géodésiques, localement autour de  $p$ . Une conséquence immédiate de ce lemme de Gauss est que les cercles géodésiques (courbes à  $t = t_0$  fixé) sont les courbes situées à distance  $t = t_0$  de  $p$  sur  $S$ .

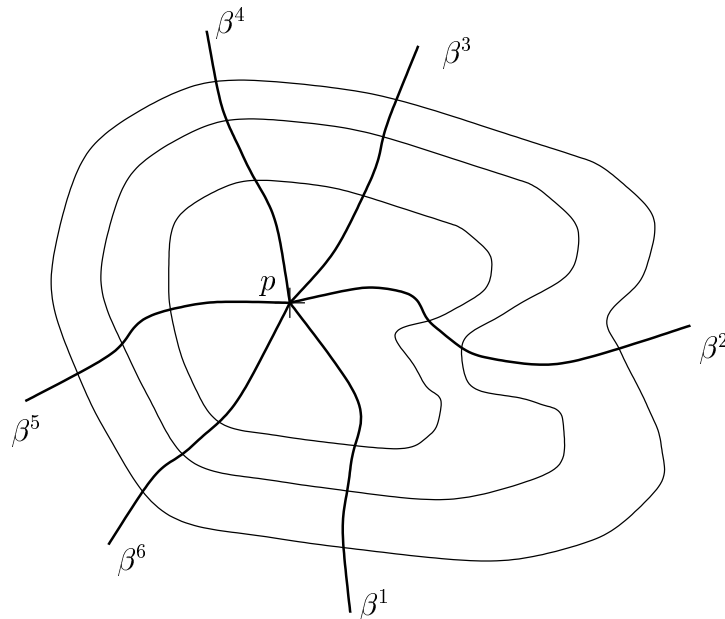


FIG. 9.7 – Lemme de Gauss en dimension 2.

2. Avant d'étudier le cas 3D, on revient sur la démonstration du lemme en 2D. La démonstration à la dimension supplémentaire est tout à fait similaire, simplement les notations sont plus lourdes et les figures très difficiles à faire.

La démonstration du lemme 2 se fait en deux étapes. Premièrement, on démontre que l'équation de propagation est valable lorsqu'on part d'un cercle de rayon infinitésimal

de centre  $p$ . Puis, on généralise au cas où  $\alpha(u, t = 0)$  est une courbe quelconque. On rappelle ici la preuve proposée par Kimmel et *al.* [KAB95] sous forme intelligible, mais certains points mathématiques sont ici formulés de façon intuitive.

- (a) Considérons  $p$  tel que  $p = \alpha(u, 0)$ . Autrement dit, on considère une courbe initiale  $\alpha(u, 0)$  telle que  $\forall u, \alpha(u, 0) = p$ , ou plus précisément, la courbe initiale est donnée par le cercle de rayon infinitésimal autour de  $p$ .

Soit  $\beta(t) = \alpha(u = u_0, t)$ ; d'après le Lemme 1,  $\beta(t)$  est une géodésique passant par  $p$  ( $\beta(0) = \alpha(u = u_0, 0) = p$ ).

Donc  $\forall u_0$ ,  $\beta(t)$  est une des courbes géodésique du système orthogonal de géodésique en  $p$  donné par le lemme de Gauss.

Or, les courbes  $\alpha(u, t = t_0)$  sont les cercles géodésiques données par le lemme de Gauss puisque comme  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u$ , ces courbes sont orthogonales aux  $\beta(t)$ . Ce sont donc les courbes situées à égale distance  $t_0$  de  $p$ .

On a donc montré que la famille de courbes  $\alpha(u, t)$  vérifiant :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u$$

est bien la propagation des courbes situées à égale distance d'un point  $p$ .

Nous avons admis que, intuitivement, lorsque le cercle infinitésimalement proche de  $p$  converge vers  $p$ , on obtient à la limite que la famille des contours à égale distance de  $p$  est donnée par

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u.$$

- (b) La seconde partie de la démonstration consiste à ne plus partir d'un point  $p$ , mais d'une courbe  $\alpha(u, 0)$ . Autrement dit,  $\alpha(u, 0)$  est maintenant une courbe quelconque tracée sur  $S$ , non nécessairement réduite à un point.

Soit  $P$  l'ensemble des points de  $S$  situés à égale distance  $d$  de  $\alpha(u, 0)$ . Soit  $p \in P$ .

Soit  $\eta(\nu, t)$  la propagation des courbes situées à égale distance à partir de  $p$  (voir figure 9.8), c'est-à-dire d'après ce qu'on vient de voir :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^\nu.$$

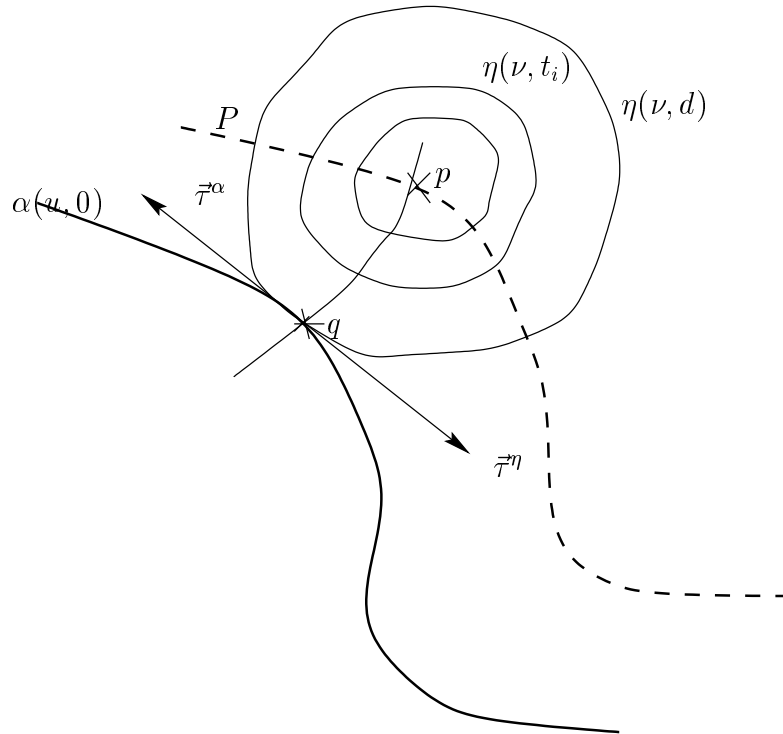


FIG. 9.8 – Généralisation au cas où la courbe initiale est une courbe quelconque.



On arrête la propagation lorsqu'on arrive sur  $\alpha(u, 0)$  en un point  $q = \alpha(u_0) = \eta(\nu_0, t_n)$ . On a évidemment  $t_n = d$ , puisque dans  $\eta(\nu, t)$ ,  $t$  est l'abscisse curviligne d'après le lemme 1.

En  $q$ ,  $\eta(\nu, d)$  et  $\alpha(u)$  sont osculateurs, c'est-à-dire :

$$\vec{\tau}^\alpha|_{u=u_0} \quad // \quad \vec{\tau}^\eta|_{t=d, \nu=\nu_0}.$$

Cela provient d'une application immédiate du théorème des multiplicateurs de Lagrange [Tho79] (chapitres 3 et 6).

Nous admettons, comme dans [KAB95], que le voisinage local dans lequel de lemme de Gauss est valide, nous permet d'affirmer que le plus court chemin de  $p$  à  $q$  est effectivement donné par la géodésique radiale :

$$\beta(t) = \eta(\nu = \nu_0, t)$$

et que  $\beta(t)$  et  $\eta(\nu, t)$  sont orthogonaux le long de  $\nu = \nu_0$ .

Donc  $\vec{\tau}^\beta|_{t=d} \perp \vec{\tau}^\eta|_{t=d, \nu=\nu_0}$ .

Par conséquent :

$$\vec{\tau}^\beta|_{t=d} \perp \vec{\tau}^\alpha|_{u=u_0}.$$

On vient de prouver que les plus courts chemins partant de  $P$  pour arriver à  $\alpha$  sont des géodésiques partant de  $\alpha(u)$  et orthogonales  $\vec{\tau}^\alpha$ . Or, cette géodésique, d'après ce qui précède, est obtenue par l'équation d'évolution  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u$ .

Par continuité de  $\alpha$ , le contour d'égale distance à partir de  $\alpha(u, 0)$  est donné par l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \vec{N} \otimes \vec{\tau}^u.$$

3. La généralisation, à la dimension supérieure, de la première partie du lemme 2, ne pose pas de problème car le lemme de Gauss est valable en dimension  $n$ .

On obtient donc de la même façon que précédemment que lorsqu'on part d'une sphère infinitésimale autour d'un point  $p$ , l'équation qui donne les surfaces à égale distance à partir de  $p$  est donnée par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v).$$

Et nous admettons de même que, lorsque cette sphère infinitésimalement proche de  $p$  converge vers  $p$ , cette équation reste valable.

4. En faisant la même hypothèse pour le passage d'un voisinage local à global que précédemment, on généralise ce schéma quand on part d'une surface initiale  $\alpha(u, v, 0)$  quelconque.

On propage une surface  $\eta(\mu, \nu, t)$  à distance géodésique de  $p \in P$  où  $P$  est l'ensemble des points situés à distance géodésique  $d_S$  de  $\alpha(u, v, 0)$ . On arrête la propagation quand on arrive sur  $\alpha(u, v, 0)$  au point  $q = \alpha(u_0, v_0, 0)$ , c'est-à-dire quand

$$q = \eta(\mu_0, \nu_0, d_S).$$

De plus, les tangentes  $\vec{\tau}^\alpha(u_0, v_0)$  et  $\vec{\tau}^\eta(\mu_0, \nu_0)$  sont dans le même plan (où  $\vec{\tau}^\eta = \{\vec{\tau}^\mu, \vec{\tau}^\nu\}$  et  $\vec{\tau}^\alpha = \{\vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v\}$ ). Comme le chemin le plus court, qui va de  $p$  à  $q$ , est donné par la géodésique radiale  $\beta(t) = \eta(\mu, \nu, t)|_{\mu=\mu_0, \nu=\nu_0}$  et que d'après le lemme de Gauss  $\beta(t)$  est orthogonal à  $\eta(\mu, \nu, t)$  le long de  $\mu = \mu_0, \nu = \nu_0$ ,

$$\vec{\tau}^\beta|_{t=d_S} \perp \vec{\tau}^\eta|_{t=d_S, \mu=\mu_0, \nu=\nu_0}$$

donc on a :

$$\vec{\tau}^\beta|_{t=d_S} \perp \vec{\tau}^\alpha|_{u=u_0, v=v_0}.$$

Donc, le chemin le plus court, partant de  $p$  pour aller à  $\alpha$ , est donné par les géodésiques partant de  $\alpha(u, v)$  et orthogonal à  $\tau^\alpha$ , c'est-à-dire dans ce cas à  $\tau^u$  et  $\tau^v$ . Une telle géodésique est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$$

■

### 9.2.2 Équation de la projection

Comme dans le cas bidimensionnel, on aboutit à une équation aux dérivées partielles d'ordre 2, difficile à résoudre. On simplifie le problème de la même façon, c'est-à-dire en projetant ce schéma d'évolution dans  $\mathbb{R}^4$  sur un espace de dimension inférieure, et en

conservant les mêmes hypothèses sur la direction de la propagation [EG87]. On se place dans un cas où l'hypersurface  $S$  est définie comme un graphe  $W(x, y, z, w)$  :

$$W(x, y, z, w) = \{(x, y, z, w) | w = w(x, y, z)\}$$

et on projette pour obtenir la surface  $\mathcal{C}$  telle que :

$$\mathcal{C}(t) = \Pi \circ \alpha = \{(x, y, z) | (x, y, z, f(x, y, z)) \in \alpha(t)\}.$$

On pose :  $\frac{\partial w}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = q$  et  $\frac{\partial w}{\partial z} = r$ .

On démontre que (voir les détails de la preuve en annexe B) :

$$\begin{aligned} F &= \left\langle \vec{n}, \Pi \circ * \left( \vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v \right) \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(1+q^2+r^2)n_1^2 + (1+p^2+r^2)n_2^2 + (1+p^2+q^2)n_3^2 - 2pqn_1n_2 - 2prn_1n_3 - 2prn_2n_3}{1+p^2+q^2+r^2}} \\ &= \sqrt{an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2 - dn_1n_2 - en_1n_3 - fn_2n_3} \end{aligned} \tag{9.18}$$

### 9.2.3 Formulation implicite

De la même façon que dans le cas 2D, on utilise une approche eulérienne. La surface  $\mathcal{C}$  est définie comme une isosurface de niveau 0 d'une fonction potentielle continue  $\zeta$  de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{C}(u, v, t) = \zeta^{-1}(0)$$

telle que  $\zeta$  soit négative à l'intérieur et positive à l'extérieur de la surface d'équipotentiel 0. La règle de dérivation permet d'obtenir :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \left\langle \vec{\nabla} \zeta, F \vec{n} \right\rangle = F \|\vec{\nabla} \zeta\|.$$

Cette formulation par isocontour permet d'obtenir l'équation de l'évolution de surfaces  $\mathcal{C}$ , le long de l'hypersurface définie comme un graphe  $W$  :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sqrt{a \frac{\partial \zeta^2}{\partial x} + b \frac{\partial \zeta^2}{\partial y} + c \frac{\partial \zeta^2}{\partial z} - d \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - e \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - f \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z}} \tag{9.19}$$

### 9.2.4 Résolution Numérique

On peut utiliser une méthode de résolution du même type que dans le cas 2D. Il s'agit d'un schéma temporel explicite, où les gradients spatiaux sont estimés par différences finies et avec l'aide de la méthode du minmod.

L'approche du minmod permet de bien encadrer l'estimation de la dérivée, et ainsi de garder un contrôle sur la variation de la solution. La fonction minmod est définie par :

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sign}(a)\min(|a|, |b|) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les gradients spatiaux sont ensuite estimés en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \zeta_x(ih_x, jh_y, kh_z) &= \text{minmod}(D_x^+\zeta(ih_x, jh_y, kh_z), D_x^-\zeta(ih_x, jh_y, kh_z)) \\ \zeta_y(ih_x, jh_y, kh_z) &= \text{minmod}(D_y^+\zeta(ih_x, jh_y, kh_z), D_y^-\zeta(ih_x, jh_y, kh_z)) \\ \zeta_z(ih_x, jh_y, kh_z) &= \text{minmod}(D_z^+\zeta(ih_x, jh_y, kh_z), D_z^-\zeta(ih_x, jh_y, kh_z)) \end{aligned}$$

où  $h_x$  et  $h_y$  sont les pas de discrétisation spatiaux ;  $D_x^-$  et  $D_x^+$  (respectivement  $D_y^-$ ,  $D_y^+$  et  $D_z^-$ ,  $D_z^+$ ) sont les dérivées à gauche et à droite dans la direction  $x$  (respectivement  $y$  et  $z$ ), elles sont définies par :

$$D_x^-\zeta = \frac{\zeta(i+1, j, k) - \zeta(i, j, k)}{h_x}$$

et

$$D_x^+\zeta = \frac{\zeta(i, j, k) - \zeta(i-1, j, k)}{h_x}$$

Néanmoins, il est montré dans [SKS<sup>+</sup>93] que l'utilisation de cette méthode ne permet pas une estimation correcte de la norme des normales dans le cas de singularité de la solution. Pour estimer les carrés des dérivées partielles on utilise alors une autre méthode d'approximation :

$$\begin{aligned} \zeta_x^2 &= (\max(D_x^+\zeta(i, j, k), -D_x^-\zeta(i, j, k), 0))^2 \\ \zeta_y^2 &= (\max(D_y^+\zeta(i, j, k), -D_y^-\zeta(i, j, k), 0))^2 \\ \zeta_z^2 &= (\max(D_z^+\zeta(i, j, k), -D_z^-\zeta(i, j, k), 0))^2 \end{aligned}$$

De ces différentes approximations on peut déduire la version discrète du schéma d'évolution de l'équation de propagation (9.19) :

$$\begin{aligned}
 \zeta^{\tau+1} = & \zeta^\tau + [ a (\max (D_x^+ \zeta^\tau, -D_x^- \zeta^\tau, 0))^2 \\
 & + b (\max (D_y^+ \zeta^\tau, -D_y^- \zeta^\tau, 0))^2 \\
 & + c (\max (D_z^+ \zeta^\tau, -D_z^- \zeta^\tau, 0))^2 \\
 & - d \min\text{mod} (D_x^+ \zeta^\tau, D_x^- \zeta^\tau) \min\text{mod} (D_y^+ \zeta^\tau, D_y^- \zeta^\tau) \\
 & - e \min\text{mod} (D_x^+ \zeta^\tau, D_x^- \zeta^\tau) \min\text{mod} (D_z^+ \zeta^\tau, D_z^- \zeta^\tau) \\
 & - f \min\text{mod} (D_y^+ \zeta^\tau, D_y^- \zeta^\tau) \min\text{mod} (D_z^+ \zeta^\tau, D_z^- \zeta^\tau) ]^{\frac{1}{2}} \Delta\tau,
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

où  $\tau$  représente le paramètre de relaxation. La convergence vers une solution stable est assurée dès lors que la résolution temporelle  $\Delta\tau$  et les résolutions spatiales  $h_x$ ,  $h_y$  et  $h_z$  satisfont la condition de Courant-Friedrich-Lewy [CFL67] :

$$\Delta\tau \leq \frac{1}{\min(h_x, h_y, h_z)}. \tag{9.21}$$

En pratique, la résolution spatiale est donnée par celle de l'image et la résolution temporelle est calculée de manière à respecter l'équation (9.21).

## 9.2.5 Mise en correspondance

La méthode, présentée aux paragraphes précédents, permet de calculer la propagation d'une surface le long d'une hypersurface et d'obtenir ainsi une mesure de distance géodésique. Comme dans le cas 2D, on déduit une méthode de mise en correspondance en calculant des chemins de coût optimal entre deux surfaces.

$\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  représentent à nouveau les structures à mettre en correspondance, mais cette fois ce sont des surfaces. On définit également les fonctions implicites  $\zeta_0$  et  $\xi_0$ , permettant d'initialiser l'algorithme de calcul de  $\zeta$  et  $\xi$ . On utilise la distance euclidienne  $d$  que l'on peut calculer par exemple en utilisant la méthode proposée par Danielson [Dan80]. On restreint la famille des surfaces étudiées à celle dont il existe un "intérieur" et un "extérieur". On doit en effet assurer que  $\zeta_0$  (respectivement  $\xi_0$ ) soit positive à l'extérieur

de la surface  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{D}$ ) et négative à l'intérieur, on choisit donc :

$$\zeta_0 = \begin{cases} -d(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in \text{intérieur de } \zeta_0^{-1}(0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \in \zeta_0^{-1}(0) \\ +d(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in \text{extérieur de } \zeta_0^{-1}(0) \end{cases} \quad (9.22)$$

La résolution de l'équation (9.19) donnée par le schéma (9.20) en respectant la condition (9.21), permet d'obtenir  $\zeta$  et  $\xi$ . On en déduit les cartes de distances géodésiques  $D_{\mathcal{S}}$  et  $D_{\mathcal{D}}$  :

$$D_{\mathcal{S}} = \{(x, y, z, \zeta(x, y, z))\}$$

et

$$D_{\mathcal{D}} = \{(x, y, z, \xi(x, y, z))\}.$$

Les chemins géodésiques minimaux, connectant les surfaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ , sont obtenus en minimisant la fonction de coût  $f$  :

$$f(x, y, z) = \zeta(x, y, z) + \xi(x, y, z)$$

le long du chemin. Ce qui revient à calculer les chemins  $p$  tels que :

$$\begin{cases} \frac{dp}{ds}(x, y, z, s) = -\nabla(\zeta + \xi) \\ p(x, y, z, 0) = (x, y, z) \end{cases} \quad (9.23)$$

où  $s$  est l'abscisse le long de  $p$ .

Les équations de ce type sont aisément résolubles numériquement. D'une manière générale, les équations différentielles du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial s}(x, y, z, s) = f(s, p(t)) \\ p(0) = p_0 \end{cases} \quad (9.24)$$

possèdent une solution si la fonction  $f$  est lipchitzienne, c'est à dire si elle vérifie la condition :

$$\exists L > 0 \mid \forall s, \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}, |f(s, p_1) - f(s, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|.$$

Les différentes méthodes numériques de résolution de ces équations utilisent une approximation en différence finies :  $\frac{\partial p}{\partial s} \simeq \frac{p(s_{n+1}) - p(s_n)}{h}$  d'où le schéma :

$$p(s_{n+1}) = p(s_n) + hf(s_n, p_n) \quad (9.25)$$

où  $h$  est le pas de discrétisation. La condition de Lipchitz suffit à assurer la convergence. On peut en outre améliorer la méthode en développant le terme  $f(s_n, p_n)$  par la formule de Taylor à un ordre fixé. Ici, on ne possède pas une expression explicite de  $f$  : seules les valeurs de  $f$  sont connues sur les nœuds de la grille de discrétisation, qui a été utilisé pour calculer  $\zeta$  et  $\xi$ . On ne peut donc pas calculer les valeurs des dérivées successives de  $f$ . Pour résoudre l'équation on utilise une méthode introduite par Runge-Kutta [AG83] : on s'appuie sur le fait que la solution de l'équation 9.24 est :

$$p(s) - p(s_0) = \int_{s_0}^s f(t, p(t)) dt.$$

Plutôt que d'approximer  $f$  on cherche à approximer l'intégrale de  $f$ . Si on utilise des méthodes dites de Simpson, on retrouve le schéma (9.25), soit le schéma explicite suivant :

$$p_{n+1} = p_n + \frac{h}{6} (f_n^1 + \frac{f_n^2}{2} + \frac{f_n^3}{2} + f_n^4),$$

avec :

$$\begin{cases} f_n^1 = f(s_n, p_n) \\ f_n^2 = f(s_n, p_n + 2hf_n^1) \\ f_n^3 = f(s_n, p_n + 2hf_n^2) \\ f_n^4 = f(s_n, p_n + hf_n^3). \end{cases}$$

Ce schéma est dit de Runge-Kutta d'ordre 4. La condition de Lipchitz assure la convergence vers une solution unique de l'équation (9.24). On utilise ici cette méthode pour résoudre l'équation (9.23) et construire les chemins de mise en correspondance entre les deux surfaces. Les composantes du gradient qui ne sont pas sur des nœuds de la grille de discrétisation sont calculés par interpolation trilineaire à partir du champ de gradient connu.

### 9.2.6 Application

#### Initialisation

On définit l'initialisation du processus de la même façon que précédemment :

$$\zeta_0(x, y, z) = \begin{cases} -d(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in \text{intérieur de } \zeta_0^{-1}(0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \in \zeta_0^{-1}(0) \\ +d(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in \text{extérieur de } \zeta_0^{-1}(0). \end{cases} \quad (9.26)$$

En utilisant le schéma explicite de propagation (9.20), on peut ainsi calculer  $\zeta$  à partir de l'initialisation  $\zeta_0$  (respectivement  $\xi$  à partir de  $\xi_0$ ), et par conséquent le graphe  $D_S$  (respectivement  $D_D$ ) de la distance à la surface  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{D}$ ) le long de l'hypersurface  $W$ , telle que :

$$D_S = \{(x, y, z, \zeta(x, y, z))\}$$

et respectivement :

$$D_D = \{(x, y, z, \xi(x, y, z))\}.$$

#### Définition de l'hypersurface

On se propose d'utiliser deux types d'hypersurface de coût. L'une ne s'appuie uniquement sur la distance euclidienne : c'est une mesure de "l'éloignement" entre les deux structures. L'autre incorpore des propriétés géométriques des surfaces à mettre en correspondance en utilisant la notion de courbure moyenne.

1. Comme dans le cas de la mise en correspondance de courbes on peut définir une hypersurface de coût simple basée sur la distance euclidienne au contours (on utilise la méthode de Danielson [Dan80] étendue au cas 3D pour la calculer). On définit  $W$  par :

$$W(x, y, z, w(x, y, z)) = (x, y, z, \min(|\zeta_0|, |\xi_0|)) \quad (9.27)$$

On applique cette définition sur des exemples synthétiques afin de valider la méthode. On vérifie sur la figure 9.9 la cohérence des résultats sur un cas trivial, deux



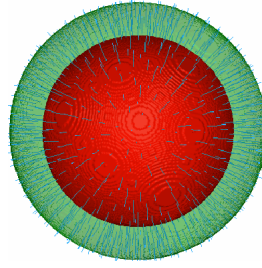


FIG. 9.9 – *Mise en correspondance de deux sphères concentriques.*

sphères concentriques. Les chemins connectant les deux sphères sont logiquement orthogonales aux deux surfaces.

La figure 9.10 illustre également la mise en correspondance de deux sphères mais qui sont excentrées. Les chemins sont colorés par la distance à la surface de destination (ici la sphère verte). On remarque que de part la forme de l’hypersurface de coût, basée uniquement sur la distance séparant les structures, les chemins qui partent de la sphère rouge au niveau de la flèche sont quasiment tangents à la surface de départ.

On applique maintenant le processus de mise en correspondance dans le cas d’un changement de topologie, deux sphères fusionnent pour devenir un ellipsoïde. La figure 9.11 illustre la construction des chemins de mise en correspondance partant des sphères rouges. La couleur des chemins est en relation avec la distance à la structure d’arrivée (ici plus ils sont bleu foncé, plus l’ellipsoïde est proche). En augmentant le nombre de points de départ et en traçant les trajectoires depuis l’ellipsoïde, on peut mieux se rendre compte de l’effet du changement de topologie. Ce résultat est à comparer avec celui de la mise en correspondance de deux cercles avec une ellipse sur la figure 9.5.

2. Dans une perspective de mise en correspondance plus proche de la réalité physique des deux surfaces, notamment s’il s’agit de deux occurrences de la surface du sol (représentées par deux modèles numériques de terrain), il est intéressant de pouvoir s’appuyer également sur la conservation de certaines propriétés géométriques.

Dans le cas bidimensionnel, on s’appuie sur la courbure. Lorsqu’il s’agit d’une surface

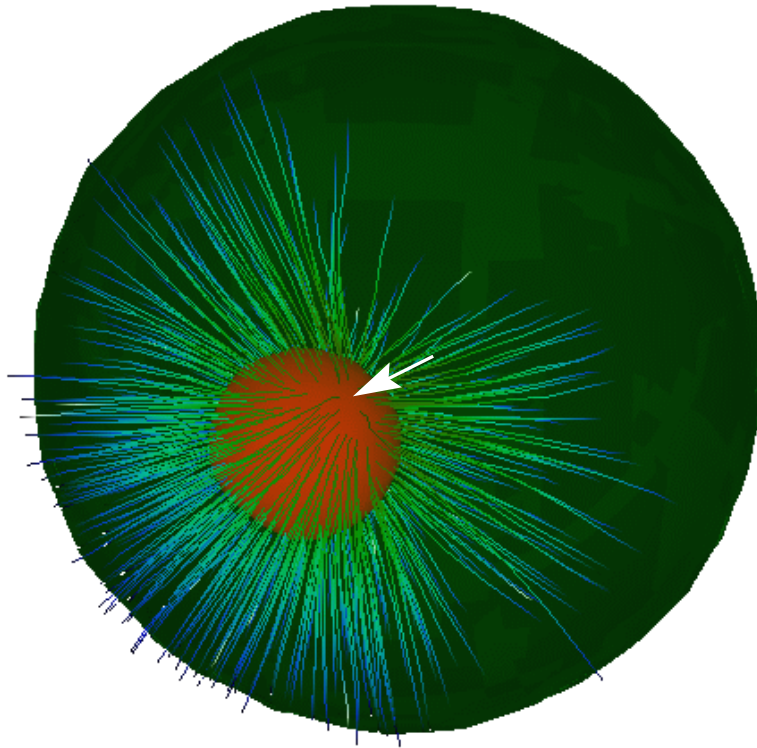


FIG. 9.10 – *Mise en correspondance de deux sphères excentrées.*

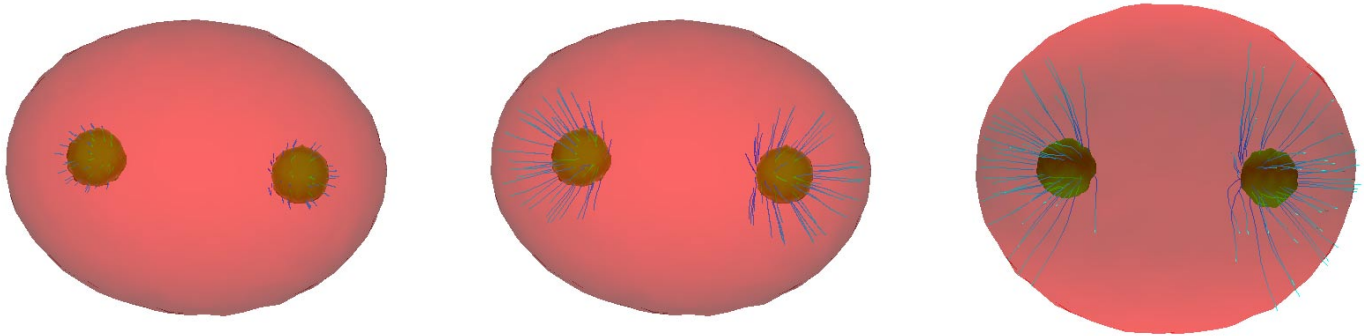


FIG. 9.11 – *Mise en correspondance de deux sphères avec un ellipsoïde.*

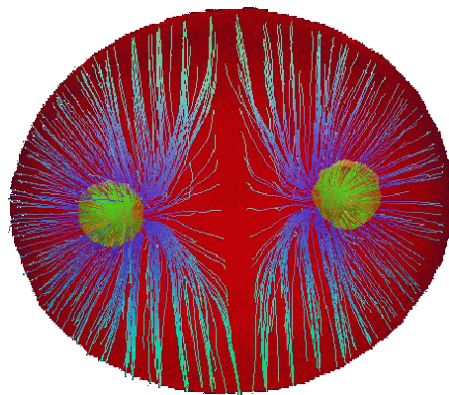


FIG. 9.12 – *Mise en correspondance de deux sphères avec un ellipsoïde, autre visualisation.*

on peut définir [dC76] la courbure normale maximale  $\kappa_1$  et la courbure normale minimale  $\kappa_2$  correspondant chacune aux directions principales en un point  $p$  données par les vecteurs propres de la matrice fondamentale de la surface en  $p$ . On appelle ces deux courbures les courbures principales. On peut en déduire une définition de la **courbure moyenne**  $\kappa$  :

$$\kappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Un des avantages de la formulation par *level-set* est que la courbure moyenne est donnée par une équation simple [Set96] :

$$\kappa_S = \frac{(\zeta_{yy} + \zeta_{zz})\zeta_x^2 + (\zeta_{xx} + \zeta_{zz})\zeta_y^2 + (\zeta_{xx} + \zeta_{yy})\zeta_z^2 - 2\zeta_x\zeta_y\zeta_{xy} - 2\zeta_x\zeta_z\zeta_{xz} - 2\zeta_y\zeta_z\zeta_{yz}}{(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)^{3/2}}.$$

Comme dans le cas 2D, on utilise un critère d'appariement  $\rho$  défini à partir de la taille du voisinage à prendre en compte  $\sigma$ , de la distance euclidienne  $d$  et cette fois de l'écart entre les courbures moyennes  $\Delta\kappa = \kappa_S - \kappa_D$  :

$$\rho(\Delta\kappa, d) = 1 - \frac{\Delta\kappa^2}{1 + d^2\Delta\kappa^2/\sigma}.$$

On définit le nouveau graphe d'hypersurface :

$$W(x, y, z, w(x, y, z)) = \min(|\zeta_0|\rho(\Delta\kappa, \zeta_0), |\xi_0|\rho(\Delta\kappa, \xi_0)). \quad (9.28)$$

On utilise cette définition pour suivre l'évolution de la surface du sol. La figure 9.13 illustre le résultat de la mise en correspondance d'un modèle numérique de terrain synthétique avec le même MNT après sa déformation par le modèle géophysique de Mogi (voir chapitre 4).

La figure 9.14(a) la même mise en correspondance vue de dessus, cette image est à comparer avec le champ des déformations fourni par le modèle géophysique et visualisé figure 9.14(b) comme un interférogramme différentiel.

Le même modèle est utilisé dans un cas réel pour suivre le dégonflement post-éruptique de l'Etna. La figure 9.15 montre la carte de déformation synthétique appliqué au MNT pour générer la seconde occurrence de la surface du sol et un interférogramme différentiel représentant la même déformation de l'Etna. La mise en correspondance du modèle

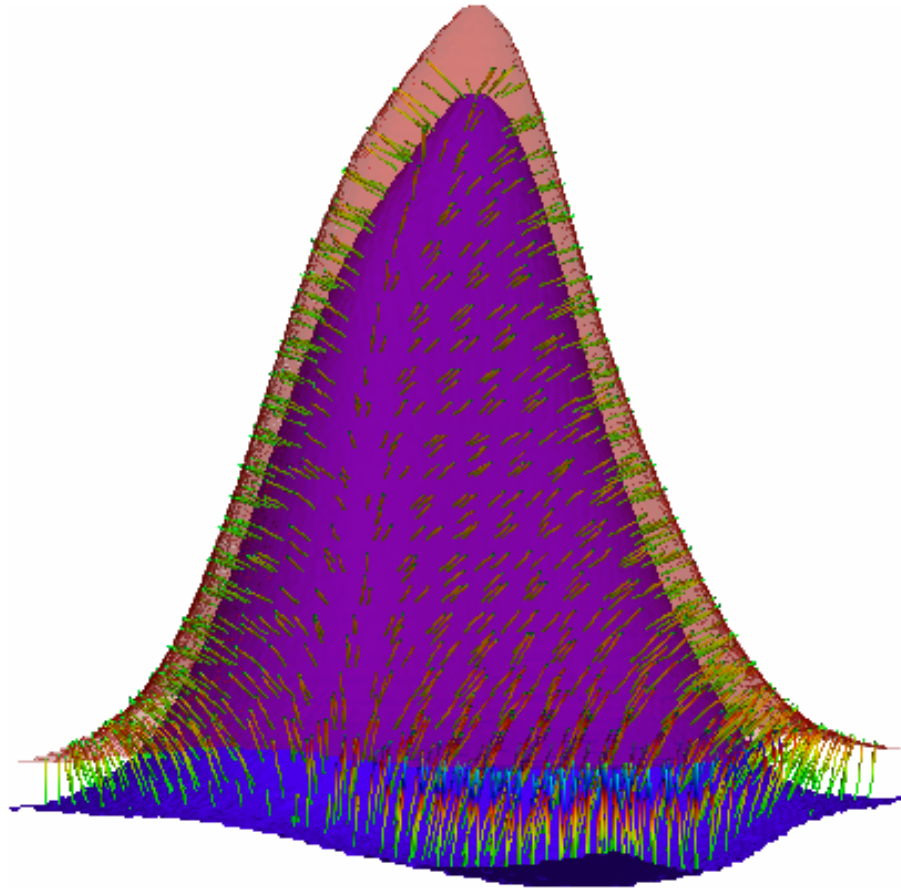


FIG. 9.13 – *Mise en correspondance d'un modèle numérique de terrain synthétique avec la même surface déformée par un modèle géophysique.*

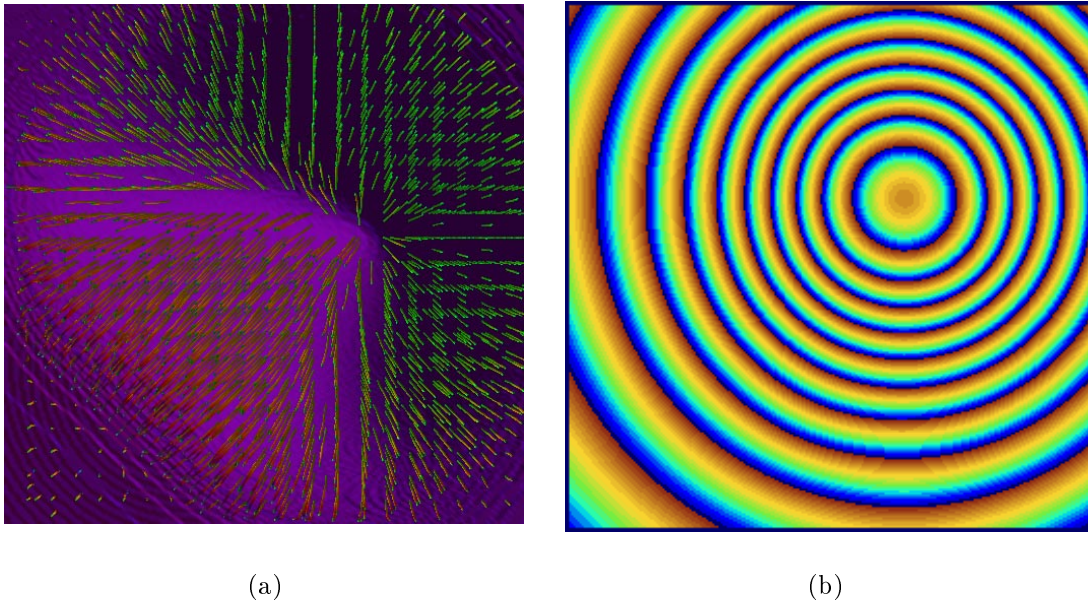


FIG. 9.14 – *Chemins de mise en correspondance vus de dessus et champ de déformation visualisé comme un interférogramme.*

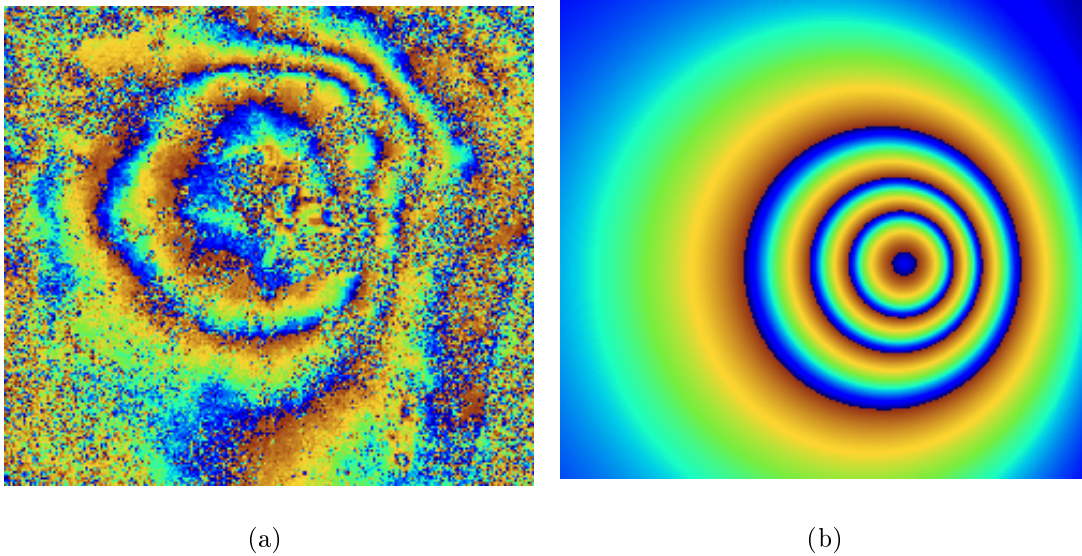


FIG. 9.15 – *Interférogramme différentiel et carte de déformation simulée par le modèle géophysique.*

numérique de terrain avec la surface déformée par le modèle de Mogi est visualisé figure 9.16, sur cette image l'axe vertical a été étiré de manière à faciliter la visualisation des connexions. Le même résultat est visualisée vue de dessus sur la figure 9.17, ce qui permet de mieux se rendre compte de la complexité de la mise en correspondance.

### 9.3 Conclusion

Cette partie propose une nouvelle approche pour suivre l'évolution de surfaces. Il s'agit d'une méthode pour mettre en correspondance deux surfaces arbitraires de  $\mathbb{R}^3$ . Elle utilise une généralisation d'un schéma d'évolution de courbes basé sur la distance géodésique, et repose sur le développement d'une équation de propagation de surfaces pour des variétés d'ordre 3 plongées dans  $\mathbb{R}^4$ . Ensuite, en s'appuyant sur la théorie de propagation des fronts, l'équation d'évolution est réécrite en utilisant la formulation des isocontours (*level-set*), qui fournit des algorithmes stables utilisés pour résoudre numériquement cette



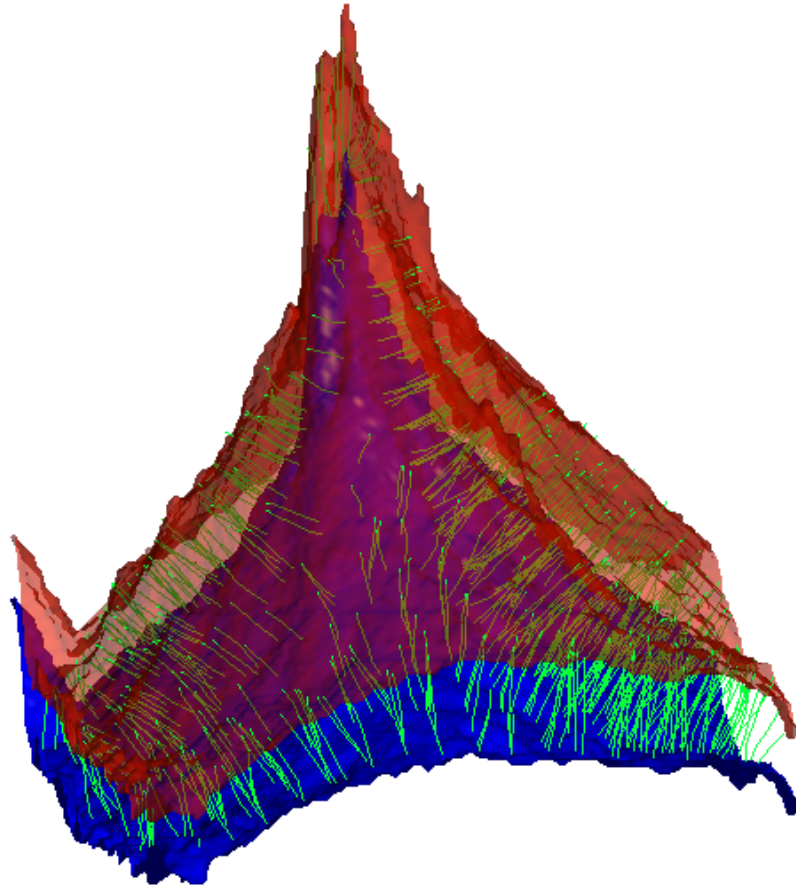


FIG. 9.16 – *Mise en correspondance de deux occurences de la surface de l'Etna.*



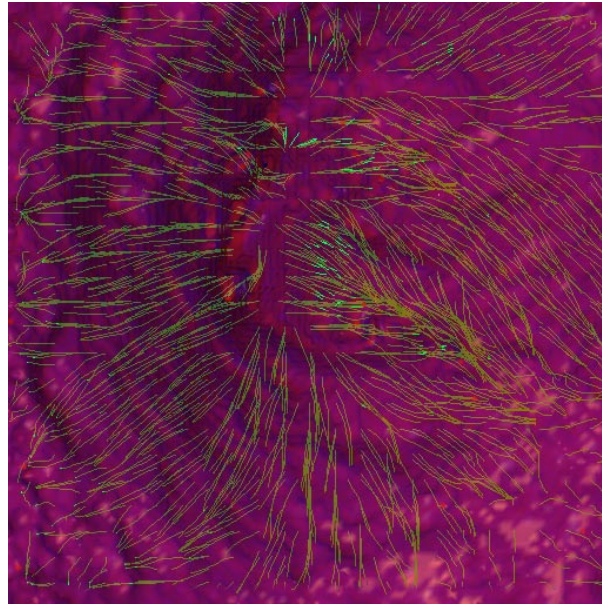


FIG. 9.17 – *Mise en correspondance de deux occurrences de la surface de l'Etna (vue de dessus).*

équation aux dérivées partielles. Grâce à cette formulation, on calcule facilement la courbure des surfaces et on peut gérer les changements de topologie. On calcule ainsi une carte de distance sur une hypersurface de coût. La méthode de mise en correspondance consiste à utiliser cette distance pour calculer les chemins optimaux entre les deux surfaces. Ces chemins optimaux minimisent un critère de coût qui est formalisé explicitement par la définition de l'hypersurface. Cette formulation confère à la un aspect très général : en effet, la définition de l'hypersurface peut inclure un grand nombre de propriétés. Les propriétés utilisées dans cette étude sont la distance et la courbure, on peut ainsi gérer à la fois les changements de topologie et les grandes déformations, tout en restant efficace dans le cas de déformations plus faibles. Une extension de ce travail pourrait être d'incorporer dans la définition de l'hypersurface des informations supplémentaires, comme par exemple une connaissance, a priori, de la déformation issue d'algorithmes de détection de mouvement ou de l'interférométrie différentielle. D'autre part, l'utilisation de l'opérateur de Hodge pour définir l'équation de propagation de surface devrait permettre une généralisation aux dimensions supplémentaires. Cette généralisation mènerait à une méthode de mise en correspondance plus universelle, qui permettrait d'apparier des objets tridimensionnels pourvus d'attributs (comme la couleur ou la texture par exemple).



---

## Cinquième partie

### Perspectives et conclusion



---

# Perspectives

## Généralisation aux dimensions supérieures

Ces quelques pages proposent des perspectives d'extension concernant la méthodologie de mise en correspondance proposée dans ce document. L'approche introduite s'appuie sur une formulation de géométrie moderne, l'opérateur de Hodge. Celle-ci ouvre des possibilités de généralisation aux dimensions supérieures. On peut en déduire intuitivement une formulation de l'équation de propagation de variétés de dimension  $n - 1$  plongées dans un espace de dimension  $n$ .

Dans la quatrième partie de ce manuscrit a été proposée une méthode de mise en correspondance de surfaces de  $\mathbb{R}^3$ , se propageant le long d'une hypersurface de  $\mathbb{R}^4$ . Pour cela, il a fallu introduire la notion de "produit vectoriel" sur un espace à quatre dimensions grâce à l'opérateur  $*$  de Hodge. Cette notion peut être étendue à des vecteurs de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, on peut supposer une généralisation possible de l'équation d'évolution (9.17) du chapitre 9 de la quatrième partie :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * \left( \vec{N} \wedge \tau^{\vec{u}_1} \wedge \tau^{\vec{u}_2} \wedge \dots \wedge \tau^{u_{n-2}} \right) \quad (29)$$

où  $\alpha(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, t)$  est orthogonal à la famille de paramétrisation d'une variété  $n - 2$

---

inscrite sur une hypersurface  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cette équation représente l'évolution distance géodésique d'une variété de dimension  $n - 2$  sur  $X$ . On peut généraliser la théorie présentée dans la quatrième partie et donner une formulation eulérienne de l'équation de propagation projetée  $\Pi \circ \alpha(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, t)$  sur l'hyperplan  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ensuite l'hypersurface  $X$  est définie sous la forme d'un graphe de fonction  $w : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$  :

$$X(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) | x_{n-1} = w(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})\}$$

On peut alors définir les coefficients  $p_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}$ , avec  $1 \leq i \leq n - 1$ .

En exprimant cette projection grâce à la formulation des isocontours d'une fonction  $\zeta : \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . On obtient l'équation une généralisation de l'équation (9.19) de la quatrième partie :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sqrt{U^t M U}$$

où  $M$  est une matrice de la forme :

$$M = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2} \begin{pmatrix} 1 + \sum_{j \neq 1} p_j^2 & -p_1 p_2 & \cdots & -p_1 p_{n-1} \\ -p_2 p_1 & 1 + \sum_{j \neq 2} p_j^2 & \cdots & -p_2 p_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{n-1} p_1 & -p_{n-1} p_2 & \cdots & 1 + \sum_{j \neq n-1} p_j^2 \end{pmatrix}$$

et  $U$  un vecteur dont les composantes sont les  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$  :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

La résolution numérique introduite dans la quatrième partie se généralise et permet de calculer la carte des distances sur une grille de dimension  $n$ . L'algorithme de mise en correspondance peut alors être étendu en dimension  $n$ .

---

# Conclusion

Le travail effectué dans cette thèse suit une démarche simple. L'objectif est d'étudier l'évolution temporelle de phénomènes terrestres au moyen de l'imagerie radar. Les données interférométriques radar fournissent justement des mesures de l'évolution. Pour suivre cette évolution, il faut d'abord corriger les interférogrammes de leur ambiguïté de mesure, trouver quelles sont les zones du sol qui correspondent à une évolution, suivre cette évolution en mettant en correspondance des occurrences successives du sol.

La première partie de ce manuscrit donne les informations nécessaires pour bien interpréter les images radar. Elle détaille le mode d'acquisition ainsi que la description des particularités des images interférométriques. De part leur définition, les interférogrammes sont intrinsèquement multi-temporels. Ils sont donc très intéressants dans la problématique abordée ici et ces images sont utilisées tout au long de cette thèse.

Le signal interférométrique n'est connu qu'à un modulo près. Lever cette ambiguïté sur la mesure est un problème bien connu du traitement d'image. Les algorithmes pour y répondre sont appelés des méthodes de déroulement de phase. Il s'agit de segmenter l'image en régions de même ordre. La deuxième partie propose un tour d'horizon des approches connues pour ce déroulement. Ensuite, elle détaille une théorie qui tente d'unifier les avantages des différentes approches. L'algorithme est basé sur une approche itérative en trois étapes comportant une segmentation par croissance de région, une amélioration de cette segmentation par une approche markovienne et un mécanisme de détection des erreurs pour un retour en arrière. Cette méthode est validée sur des données synthétiques et réelles. Elle est construite afin de pouvoir être améliorée par des heuristiques simples. Ainsi, une perspective d'amélioration de la méthode proposée peut être d'introduire une



---

pondération par l'image de cohérence. On peut également s'intéresser à l'image d'intensité. Via une segmentation au préalable de cette image, on autoriserait des discontinuités dans l'image déroulée en présence de zone de forte intensité.

La troisième partie s'intéresse au problème de la détection de changement. De part les caractéristiques des images utilisées, cela correspond en fait à un problème de segmentation. L'approche proposée est une méthode de segmentation markovienne, qui prend en compte les propriétés des zones de changement. Ce modèle peut être utilisé dans un cadre plus général de segmentation d'image et présente l'intérêt de pouvoir prendre en compte plusieurs types d'informations simultanément. Il est utilisé avec succès sur la phase et la cohérence dans le cas de la segmentation d'effets phasimétriques apparaissant consécutivement à des épisodes pluvieux. Il devient par contre plus instable dans le cas de la segmentation d'un glissement de terrain : les données disponibles étant aux bornes acceptables des conditions de génération des images, les hypothèses du modèle ne sont plus valables. On peut néanmoins conclure que cette méthode ouvre de grandes possibilités en matière d'amélioration de résultats de classification. Par contre, il serait nécessaire de réfléchir à un modèle plus adapté à la spécificité des glissements de terrain.

Une contribution majeure du travail de recherche effectué dans cette thèse est présentée dans la quatrième partie. Il s'agit d'une méthode de mise en correspondance de surfaces qui s'appuie sur la généralisation de l'équation de propagation d'une courbe le long d'une surface au cas d'une surface le long d'une hypersurface. Une formulation via la théorie des isocontours permet d'ancrer cette méthode dans un cadre très général puisqu'elle autorise les changements de topologie. Par ailleurs, cette formulation fournit des méthodes stables pour évaluer la courbure et résoudre l'équation de propagation. Le critère de mise en correspondance est exprimé de façon explicite par la définition de l'hypersurface. Celle-ci permet de gérer les grandes déformations, tout en restant efficace quand les déformations sont de plus faibles amplitudes. Elle permet également d'incorporer d'autre type d'information comme une connaissance a priori du mouvement. Enfin, la généralisation du produit vectoriel, grâce à l'opérateur de Hodge, devrait permettre de généraliser l'équation de propagation dans des espaces à  $n$  dimensions et par conséquent d'introduire un modèle de mise en correspondance d'objets pouvant gérer un grand nombre d'attributs.

---

Ce manuscrit propose plusieurs outils d'analyse d'image pouvant constituer une chaîne de traitement de données radar pour l'étude de l'évolution du sol. Le choix d'utiliser essentiellement des données interférométriques permet de valider les bénéfices qu'apporte l'information de phase dans cette problématique. Un prolongement possible de cette thèse serait bien sûr, l'emploi d'autres capteurs pour fusionner l'information provenant de sources différentes. Chacune des méthodologies mises en œuvre est abordée de manière à développer des outils génériques, réutilisables dans d'autres thématiques. Toutefois, les méthodes présentées dans ce manuscrit peuvent être aisément améliorées, et les problématiques traitées restent très ouvertes. D'un point de vue applicatif, les méthodes de déroulement et de segmentation proposées peuvent être considérées comme des outils dont les potentialités sont désormais connues. Sur un plan théorique, l'approche pour la mise en correspondance, développée au cours de cette thèse, est la partie qui ouvre le plus de perspectives. Elle devrait pouvoir être étendue à des dimensions supérieures et ainsi déboucher sur une méthodologie très générale.



---

# Sixième partie

## Annexes



## Annexe A

# Modélisation markovienne appliquée à la segmentation d'image

Deux des méthodes proposées dans ce manuscrit s'appuient sur des modélisations markoviennes. Les modèles stochastiques sont maintenant largement utilisés en analyse d'image, notamment sur des problèmes de segmentation. Après une brève introduction aux champs markoviens, quelques algorithmes de relaxation sont présentés et on indique comment ces méthodes sont applicables à la segmentation d'image. Pour plus de détails sur l'approche Bayésienne du traitement d'image on pourra se référer à [Win95].

### A.1 Rappel sur les champs de Markov

#### A.1.1 Système de voisinage

Soit  $S = s_1, s_2, \dots, s_n$  un ensemble de sites.

**Définition 1 (Système de voisinage)** :  $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_s | s \in S\}$  est un système de voisinage pour  $S$

si et seulement si :

1.  $s \in \mathcal{V}_s$
2.  $s \in \mathcal{V}_r \Leftrightarrow r \in \mathcal{V}_s$

$(S, \mathcal{V})$  est un graphe.

**Définition 2 (Clique)** :  $c \subseteq S$  est une clique si et seulement si :

1.  $\text{card}(c) = 1$
2.  $\text{card}(c) \geq 2$  et deux éléments distincts de  $c$  sont toujours voisins.

L'ensemble des cliques est noté  $\mathcal{C}$ .

Exemple :

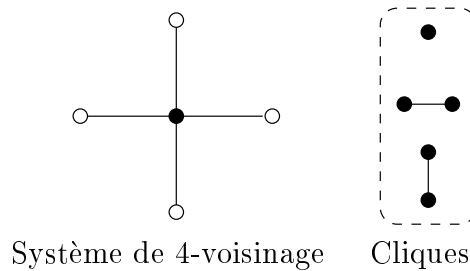


FIG. A.1 – Deux cliques d'ordre 2 et une clique d'ordre 1 pour un voisinage définissant la 4 connexité.

### A.1.2 Distribution de Gibbs et champ de Markov aléatoire

Soient  $\mathcal{X} = \{X_s | s \in S\}$  une famille de variables aléatoires indexée par  $S$  telle que  $\forall s \in S : X_s \in \Lambda$ , où  $\Lambda = \{0, 1, \dots, L-1\}$  est l'espace des états possibles ;  $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_N) | x_i \in \Lambda, 1 \leq i \leq N\}$  l'ensemble de toutes les configurations possibles.

**Définition 3 (Champ de Markov aléatoire)**  $\mathcal{X}$  est un champ de Markov aléatoire respectant le voisinage  $\mathcal{V}$  si :

1.  $\forall x \in \Omega : \mathbb{P}(\mathcal{X} = x) \geq 0$

2. spécifications locale du champ de Markov :

$$\forall s \in S \text{ et } x \in \Omega : \mathbb{P}(X_s = x_s | X_r = x_r, r \neq s) = \mathbb{P}(X_s = x_s | X_r = x_r, r \in \mathcal{V}_s)$$

**Définition 4 (Distribution de Gibbs)** une distribution de Gibbs relative à  $\{S, \mathcal{V}\}$  est une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $\Omega$  définie par :

$$\pi(x) = \frac{1}{Z} e^{-E(x)} \tag{A.1}$$

où :

- $Z = \sum_{x \in \Omega} e^{-E(x)}$  est une constante de normalisation ;

- $E$  est une fonction d'énergie définie sur les cliques telle que :

$$E(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x) \tag{A.2}$$

où  $V_c$  est une fonction potentielle sur  $\Omega$  telle que  $V_c$  dépende seulement des valeurs  $x_s$  telles que  $s \in c$ .

L'un des théorèmes les plus importants est sans doute celui d'**Hammersley-Clifford** qui



met en évidence l'équivalence entre les champs de Markov aléatoires et les distributions de Gibbs :

**Théorème 1 (Hammersley-Clifford)** :  $\mathcal{X}$  est un champ de Markov aléatoire respectant le voisinage  $\mathcal{V}$  si et seulement si  $\pi(x) = \mathbb{P}(\mathcal{X} = x)$  est une distribution de Gibbs respectant  $\mathcal{V}$ .

## A.2 Les algorithmes de relaxation

Après avoir défini le cadre mathématique de la modélisation, se pose le problème d'obtenir une réalisation du champ de Markov  $\mathcal{X}$  associé à la distribution de Gibbs  $\pi$  et l'énergie  $E$  [HZ83].

C'est à dire résoudre l'équation :

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in \Omega} \frac{1}{Z} e^{-E(x)} = \arg \min_{x \in \Omega} E(x) \quad (\text{A.3})$$

Cette équation est en général, difficile à résoudre. La littérature fournit plusieurs approches pour en trouver une solution, comme : le mode itératif conditionnel (ICM), l'algorithme de Metropolis, l'échantillonneur de Gibbs, le recuit simulé ou les méthodes de relaxation multi-échelles [KBZ94].

Deux exemples d'algorithmes :

- l'ICM (Iterated Conditional Mode) est un algorithme déterministe pour résoudre l'équation (A.3); il a l'avantage de converger rapidement mais le désavantage de s'arrêter sur des minimums locaux. Soit  $\{n_k, k = 1, 2, \dots\}$  la séquence des sites

visités et  $x^k$  l'image à la  $k^{ime}$  itération :

#### Algorithme 1 (ICM)

1. choisir une bonne configuration initiale  $x^0$ ,  
 $k = 0$  et soit  $e > 0$  un seuil.
2.  $x^{k+1} = \eta$  si  $\eta = x^k|_{x_{n_k}^k = \lambda}$  pour  $\lambda \in \Lambda$  et  $\eta = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} E(x^k|_{x_{n_k}^k = \lambda})$
3. si  $|E(x^k) - E(x^{k-1})| > e$  alors  $k = k + 1$  et goto 2

- le recuit simulé (annealing) [GG84] converge vers une solution globale optimale, mais cette convergence est lente. C'est une méthode stochastique.

Pour réaliser le recuit simulé, on définit la mesure de Gibbs  $\pi_T$  avec la fonction d'énergie  $E$  et la température  $T$  :

$$\pi_T = \frac{1}{Z_T} e^{\left(\frac{-E(x)}{T}\right)}$$

où  $Z_T = \sum_{x \in \Omega} e^{\left(\frac{-E(x)}{T}\right)}$ .

#### Algorithme 2 (Recuit simulé)

1. soient  $k = 0$ ,  $x^0$  une configuration initiale et  $e > 0$  un seuil.
2.  $x^{k+1} = \eta$  avec la probabilité  $\pi_T(\eta) = e^{\left(\frac{-E(x)}{T}\right)}$  si  $\eta = x^k|_{x_{n_k}^k = \lambda}$  pour chaque  $\lambda \in \Lambda$
3. si  $|E(x^k) - E(x^{k-1})| > e$  alors  $k = k + 1$ ,  $T$  diminue et goto 2

## A.3 Application à la segmentation d'image

L'objectif de la segmentation d'image est de partitionner une image en zones d'intérêts. A chaque pixel de l'image on affecte un label correspondant à une de ces zones. La signification du label dépend du problème à résoudre. Pour une classification d'image, par exemple, le label correspond à une classe ; pour une détection de contour, il correspond à

la présence du contour ; etc. Ainsi nous avons le problème général suivant :

On a l'image  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  avec un système de voisinage  $\mathcal{V}$  et un ensemble d'observation  $\mathcal{F} = \{f_s | s \in S\}$ . Chaque pixel doit avoir un label provenant de  $\Lambda = \{0, 1, \dots, L-1\}$ .  $\Omega$  est l'ensemble des configurations  $x = (x_{s_1}, \dots, x_{s_N}), x_s \in \Lambda$ .  $\mathcal{X}$  est le champ de Markov aléatoire relatif au voisinage  $\mathcal{V}$  avec une énergie correspondante  $E$  telle que  $E = E_1 + \beta E_2$ , où  $E_1$  (énergie image) détermine les interactions entre les sites labels et les sites pixels,  $E_2$  (énergie de régularisation) est définie seulement sur le réseau des sites labels :

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} = x) = \frac{1}{Z} e^{-E(x)}$$

$$E(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)$$

On construit un estimateur bayésien pour déterminer la meilleure labélisation, telle qu'elle maximise la distribution  $\mathbb{P}(\mathcal{X} = x | \mathcal{F})$  :

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} = x | \mathcal{F}) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{F} | \mathcal{X} = x) \mathbb{P}(\mathcal{X} = x)}{\mathbb{P}(\mathcal{F})}$$

On maximise donc  $\mathbb{P}(\mathcal{F} | \mathcal{X} = x) \mathbb{P}(\mathcal{X} = x)$ , ce qui revient à chercher :

$$\min_x [E_1 + \beta E_2]$$

## Annexe B

# Propagation d'une surface le long d'une hypersurface

L'équation de propagation de surfaces le long d'une hypersurface de coût proposée au chapitre 9 de la quatrième partie basée sur la définition d'un produit vectoriel sur  $\mathbb{R}^4$  est ensuite projetée sur  $\mathbb{R}^3$ . Cette annexe introduit brièvement la notion de produit vectoriel sur des espaces à  $n$  dimension et rappelle les formules de calcul sur  $\mathbb{R}^4$ , ensuite elles sont utilisées pour projeter l'équation de propagation.

### B.1 Algèbres extérieures et opérateur $*$ de Hodge

Nous donnons dans les lignes qui suivent un aperçu de cette théorie. Le lecteur intéressé pourra se référer à [AMR88] pour un exposé plus complet.

Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ , et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{E}$ . On démontre qu'il est possible de construire, pour chaque entier  $p$  ( $0 \leq p \leq n$ ) un nouvel

espace vectoriel, dénoté  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  tel que:

- par convention,  $\Lambda^0(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$  et  $\Lambda^1(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ .
- $\Lambda^p(\mathcal{E})$  est l'ensemble des sommes formelles  $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} a_{i_1, i_2, \dots, i_p} u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$ , pour des multi-indices  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$  et des coefficients réels  $a_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ , les  $u_{i_j}$  étant des vecteurs de  $\mathcal{E}$ .

Les  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  s'appellent les *puissances extérieures* de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$ . Les "produits"  $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p}$  sont supposés être multilinéaires en les variables  $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_p}$  et alternés, c'est à dire  $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p} = 0$  dès que deux vecteurs sont égaux dans le produit. On démontre que pour chaque entier  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ ,  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  est de dimension finie égale à  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ . Une base de  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  est donnée par la famille des  $(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$  avec  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n$ . Par exemple, si  $\mathcal{E}$  est l'espace  $\mathbb{R}^4$  muni de sa base naturelle  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , la base standard de  $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$  est  $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4)$ , et celle de  $\Lambda^4(\mathbb{R}^4)$  est  $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$ .

Supposons maintenant qu'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  soit défini dans  $\mathcal{E}$ . On peut alors construire un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  dans  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  par l'égalité:

$$\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p, w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p \rangle_p = \det(\langle u_i, w_j \rangle) \quad (\text{B.1})$$

On remarque que, puisque  $C_n^p = C_n^{n-p}$ , les deux espaces vectoriels  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  and  $\Lambda^{(n-p)}(\mathcal{E})$  sont isomorphes. L'opérateur  $*$  de Hodge permet de construire un isomorphisme "standard" entre ces deux espaces vectoriels de la façon suivante. Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux éléments de  $\Lambda^p(\mathcal{E})$  et  $\Lambda^{(n-p)}(\mathcal{E})$  respectivement. L'image de  $\lambda$  par l'opérateur de Hodge est notée habituellement  $*\lambda$ , elle appartient à  $\Lambda^{(n-p)}(\mathcal{E})$  et est définie par l'égalité:

$$\lambda \wedge \mu = \langle *\lambda, \mu \rangle_{n-p} e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \quad (\text{B.2})$$

Étudions à présent quelques exemples simples. Supposons que  $\mathcal{E}$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et que  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . En utilisant des calculs élémentaires sur les déterminants et l'équation B.2, on montre facilement que  $*(u \wedge v)$  est le produit vectoriel habituel des deux vecteurs  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Si  $w$  un troisième vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $*(u \wedge v \wedge w)$  est simplement

le déterminant  $\det(u, v, w)$ , autrement dit le produit mixte de ces trois vecteurs. Prenons maintenant  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$  et considérons trois vecteurs linéairement indépendants  $u, v$  et  $w$  dans  $\mathbb{R}^4$ . On montre facilement que  $*(u \wedge v \wedge w)$  possède les propriétés suivantes:

- c'est un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  orthogonal à  $u, v$  et  $w$ ;
- la base  $(u, v, w, *(u \wedge v \wedge w))$  est directe;
- ses composantes sont :

$$\left( - \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right)$$

dans la base standard de  $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$  ( avec  $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 + u_4e_4$  et de même pour  $v, w$ );

$$\text{- on a } \| *(u \wedge v \wedge w) \|^2 = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & \langle u, w \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, u \rangle & \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}.$$

Cette dernière égalité  $\| *(u \wedge v \wedge w) \|^2$  est particulièrement utile, car elle généralise une formule connue sur la norme du produit vectoriel ordinaire dans  $\mathbb{R}^3$ .

## B.2 Projection sur $\mathbb{R}^3$ de l'équation de propagation de surfaces dans $\mathbb{R}^4$

L'équation de propagation le long de  $t$  de surfaces  $\alpha(u, v)$  s'appuyant sur un graphe d'hypersurface  $W \subset \mathbb{R}^4$  a été définie au chapitre 9 par :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v)$$

On veut montrer que

$$F = \sqrt{an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2 - dn_1n_2 - en_1n_3 - fn_2n_3}$$

où  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  est la normale au contour projeté  $\mathcal{C}$  et  $F$  est défini par :

$$F = \langle \vec{n}, \Pi \circ * (\vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v) \rangle,$$

où  $\tau^u$  et  $\tau^v$  les deux tangentes à  $\alpha$  sont définies par :

$$\vec{\tau}^u = \frac{\alpha_u}{\|\alpha_u\|} = \frac{(x_u, y_u, z_u, w_u)}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + w_u^2}} \text{ et } \vec{\tau}^v = \frac{\alpha_v}{\|\alpha_v\|} = \frac{(x_v, y_v, z_v, w_v)}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 + w_v^2}},$$

et  $\vec{N}$  la normale à  $W$  définie par :

$$\vec{N} = \frac{*(W_x \wedge W_y \wedge W_z)}{\|*(W_x \wedge W_y \wedge W_z)\|}.$$

On a également posé :

$$W_x = \left( \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) = (1, 0, 0, p)$$

$$W_y = \left( \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = (0, 1, 0, q),$$

et

$$W_z = \left( \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} \right) = (0, 0, 1, r).$$

Grâce aux formules introduites dans le paragraphe précédent, on obtient pour  $\vec{N}$  :

$$\vec{N} = \frac{(-p, -q, -r, 1)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2}}.$$

L'équation de propagation devient finalement :

$$\alpha_t = \left( \begin{array}{c} \frac{pq \begin{vmatrix} x_v & x_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} + q^2 \begin{vmatrix} y_v & y_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} - rp \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} - r^2 \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{1+p^2+q^2+r^2} \sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2} \sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}} \\ -p^2 \frac{\begin{vmatrix} x_v & x_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} - pq \begin{vmatrix} y_v & y_u \\ z_v & z_u \end{vmatrix} + rq \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + r^2 \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{1+p^2+q^2+r^2} \sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2} \sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}} \\ p^2 \frac{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + pr \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - q^2 \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} - qr \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}{\sqrt{1+p^2+q^2+r^2} \sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2} \sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}} \\ + \text{un terme qui disparaît après la projection} \end{array} \right)$$

On obtient, après projection :

$$\Pi \circ \left( * \left( \vec{N} \wedge \vec{\tau}^u \wedge \vec{\tau}^v \right) \right) = \frac{\begin{pmatrix} qz_u w_v - qw_u z_v - ry_u w_v + ry_v w_u + y_v z_u \\ -qz_u w_v + qw_u z_v + ry_u w_v + y_u z_v - ry_v w_u - y_v z_u \\ py_u z_v - py_v z_u - qx_u z_v + rx_u y_v + qx_v z_u - rx_v y_u \end{pmatrix}}{\sqrt{1+p^2+q^2+r^2} \sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2} \sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}}$$

On regarde maintenant la projection de  $\alpha_t$  suivant la normale

$$\vec{n} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ -\frac{1}{n} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \\ \frac{1}{n} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

où  $n$  est la norme telle que :

$$n = \left\| \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \right\|$$



Le produit scalaire est donc :

$$F = \langle \Pi \circ \alpha_t, \vec{n} \rangle = \frac{n_1^2 n (-1 - r^2 - q^2) + n_2^2 n (-1 - r^2 - p^2) + n_3^2 n (-1 - p^2 - q^2) + 2n_1 n_2 n p q + 2n_1 n_3 n r p + 2n_2 n_3 n r q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$

On sait que :

$$\langle \vec{\tau}^u, \vec{\tau}^v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + w_u w_v = 0,$$

donc on pose :

$$\begin{aligned} A &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + w_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 + w_v^2) \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 w_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 + w_v^2) \\ &\quad - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + w_u w_v)^2. \end{aligned}$$

on sait aussi que :

$$w_u = p x_u + q y_u + r z_u \text{ et que } w_v = p x_v + q y_v + r z_v.$$

On pose également :

$$B = n_1^2 n (1 + r^2 + q^2) + n_2^2 n (1 + r^2 + p^2) + n_3^2 n (1 + p^2 + q^2)$$

On peut alors remarquer que :

$$\begin{aligned} A - B &= 2pqn_1 n_2 n^2 - 2prn_1 n_3 n^2 - 2qrn_2 n_3 n^2 \\ &= \left( \sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \right)^2 - B, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\left( \sqrt{1 + p^2 + q^2 + r^2} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \right) = \\ &n \left( n_1^2 (1 + r^2 + q^2) + n_2^2 (1 + r^2 + p^2) + n_3^2 (1 + p^2 + q^2) - 2n_1 n_2 p q - 2n_1 n_3 r p - 2n_2 n_3 r q \right) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{\frac{(1 + q^2 + r^2)n_1^2 + (1 + p^2 + r^2)n_2^2 + (1 + p^2 + q^2)n_3^2 - 2pqn_1 n_2 - 2prn_1 n_3 - 2qrn_2 n_3}{1 + p^2 + q^2 + r^2}} \\ &= \sqrt{an_1^2 + bn_2^2 + cn_3^2 - dn_1 n_2 - en_1 n_3 - fn_2 n_3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1 + q^2 + r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ b = \frac{1 + p^2 + r^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ c = \frac{1 + p^2 + q^2}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ d = \frac{2pq}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ e = \frac{2pr}{1 + p^2 + q^2 + r^2} \\ f = \frac{2qr}{1 + p^2 + q^2 + r^2}. \end{array} \right.$$



## Annexe C

# Caractéristiques des images d'intensité

Les images radar les plus fréquemment produites, n'utilisent que l'information d'amplitude du signal radar rétrodiffusé. Les relations entre les données mesurées et les grandeurs physiques correspondantes (inclinaison, coefficient de rétrodiffusion, rugosité, *etc*) sont décrites. D'autre part, les images d'intensité radar sont caractérisées par un effet "poivre et sel" responsable d'un aspect granulaire fort dégradant, également appelé *speckle*. Les propriétés de ce bruit caractéristique sont décrites, les filtres les plus couramment utilisés pour en atténuer les effets, sont présentés. En particulier deux méthodes de filtrage multitemporel sont détaillées.

### C.1 Interprétation des images d'intensité

Les particularités des images SAR reflètent les qualités de la surface illuminée, soit essentiellement : le relief et les propriétés intrinsèques de la cible au travers du coefficient de

rétrodiffusion [DB94].

### 1. Influence du relief

#### (a) Zone de compression :

Comme chaque pixel correspond, pour une impulsion donnée, à la somme des réflecteurs élémentaires à la même distance du radar, il se crée des zones d'accumulation (ou compression) qui apparaissent en surbrillance dans l'image. Sur

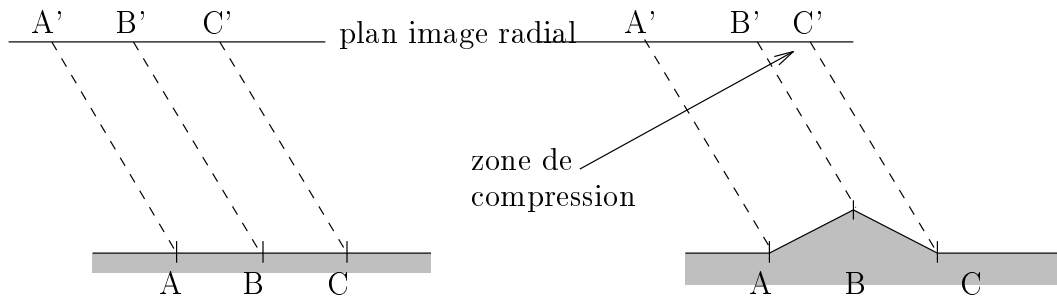


FIG. C.1 – *Zone de compression.*

la figure C.1, l'inclinaison du sol fait apparaître sur l'image une zone  $B'C'$  plus claire qu'une zone plate, du fait de l'augmentation de la densité de réflecteurs élémentaires pour la même surface dans l'espace image.

#### (b) Zone d'inversion et zone d'ombre :

Les zones d'inversion sont des cas limites des zones de compression.

Sur la figure C.2 l'inclinaison étant plus forte, le point  $C$  est vu par le radar, avant le point  $B$ .

Les zones d'ombre apparaissent quand il y a recouvrement de deux images (*overlay*) ; sur la figure C.3 l'image du point  $B$  masque celle du point  $C$ .

#### (c) Influence du coefficient de rétrodiffusion

Le coefficient de rétrodiffusion dépend essentiellement :

- i. de la fréquence de l'onde radar ;
- ii. de la polarisation ;

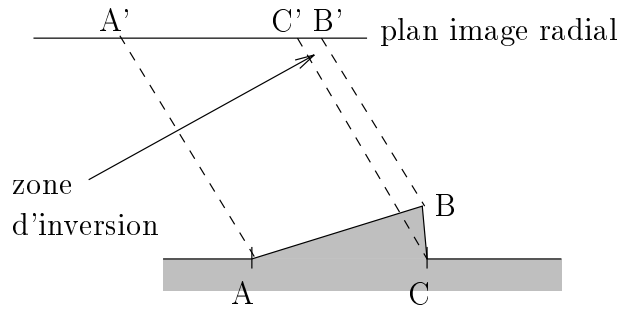


FIG. C.2 – *Zone d'inversion.*

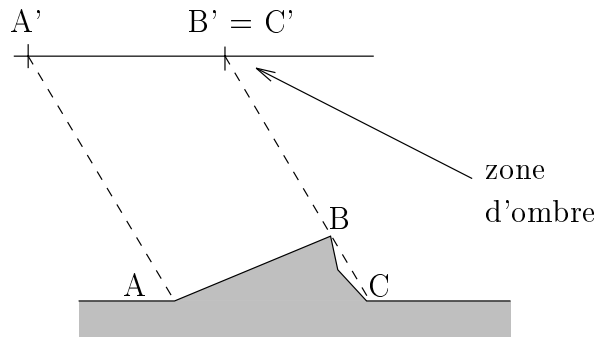


FIG. C.3 – *Zone d'ombre.*

- iii. de l'angle d'incidence de l'onde ;
- iv. de la géométrie de la surface (rugosité, pente, ...);
- v. des caractéristiques diélectriques du milieu.

Les caractéristiques A, B et C sont manipulables mais D et E sont intrinsèques à la surface illuminée.

La **rugosité** des surfaces est un paramètre influent sur la façon dont va être réfléchi l'onde. Plus la rugosité est grande, plus la rétrodiffusion sera importante (figure C.4). Suivant les surfaces, on peut observer deux types de réflexion ; surface lisse : réflexion diffuse donc pas d'écho reçu par le radar ; surface rugueuse : réflexion spéculaire donc fort écho.

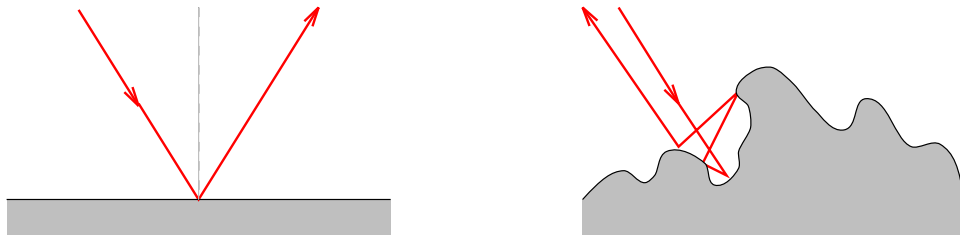


FIG. C.4 – Influence de la rugosité.

Les **caractéristiques diélectriques** du milieu dépendent essentiellement du type de matière illuminée et de son degré d'hygrométrie. La constante diélectrique d'un milieu dépend de sa permittivité relative ainsi que de la profondeur de pénétration du rayonnement. Par exemple, les objets manufacturés, contenant beaucoup de métal, ont un fort pouvoir réfléchissant. De plus il faut parfois tenir compte d'un effet de volume, c'est le cas en présence de feuillage.

## C.2 L'effet de chatoiement

L'amplitude de l'onde caractérisant une surface est fonction des phases des ondes réfléchies pour chaque diffuseur. La rugosité d la surface illuminée impose une répartition aléatoire de ces phases élémentaires. L'amplitude du champ rétrodiffusé admet donc un caractère

aléatoire responsable d'une dégradation du contraste des images radars. Ce phénomène correspond à l'effet de chatoiement ou *speckle*.

Sous certaines hypothèses, le *speckle* peut être modélisé statistiquement. On parle alors de *speckle* **totalelement développé** quand :

- l'amplitude et la phase sont indépendantes l'une et l'autre pour un pixel donné ;
- l'amplitude et la phase d'un pixel donné sont indépendantes de celles des pixels voisins ;
- les phases sont uniformément distribuées sur  $[-\pi, \pi]$ .

Pour modéliser la nature du speckle, on raisonne par rapport à l'intensité de la rétrodiffusion :  $I = A^2$  (carré du module du signal  $\mathcal{E} = A e^{j\Psi}$ ). La distribution de l'amplitude étant une **loi de Rayleigh** :

$$f_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad \text{si } a \geq 0, \quad 0 \text{ sinon}$$

celle de I est une loi exponentielle :

$$f_I(u) = \frac{1}{s} e^{-\frac{u}{s}} \quad \text{si } u \geq 0, \quad 0 \text{ sinon}$$

avec  $s = E[A^2]$ , la réflectivité radar non bruitée. L'intensité du champ rétrodiffusé s'écrit comme le produit de  $s$  par un bruit noté  $Z'$  :  $I = s Z'$  (**modèle du bruit multiplicatif**). Après un moyennage  $N$ -vues (voir 3), l'intensité ne suit plus alors une loi exponentielle mais une loi gamma. Le speckle peut donc être modélisé comme un bruit multiplicatif de moyenne 1 et de distribution gamma :

$$f_{Z'}(z) = \frac{N \cdot (N \cdot z)^{N-1}}{\Gamma(N)} e^{-N \cdot z}$$

### C.3 Atténuation de l'effet de chatoiement

L'exploitation des images SAR, requiert le plus souvent une atténuation de cet effet dégradant. A cet effet de nombreux filtres de "lissage" ont été proposés.



### C.3.1 Filtrage mono-date

Une première famille de filtres de type morphologique ou géométrique, tend à réduire l'aspect granulaire du *speckle*. C'est le cas par exemple des filtres médians ou du filtre de Crimmins [Cri86].

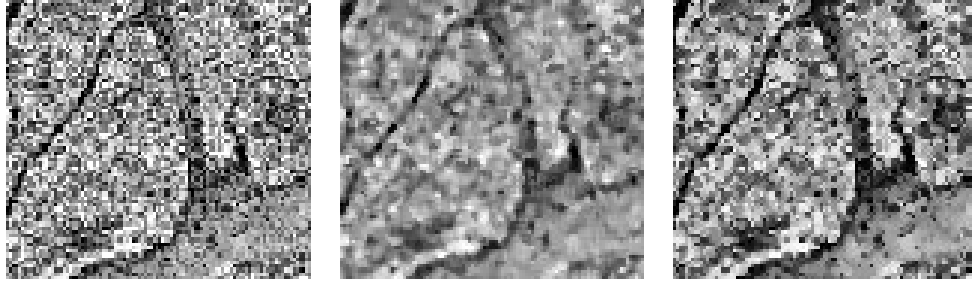


FIG. C.5 – *Image brute, résultat du filtre médian et de celui de Crimmins.*

Une seconde famille de filtre, s'appuie sur un modèle statistique du *speckle*. Une estimation locale des paramètres est alors effectuée de manière à pondérer adaptativement le filtrage. Ce sont par exemple les filtres proposés par Lee [LEE81], Kuan [KSC87] ou Frost [FSSH82].

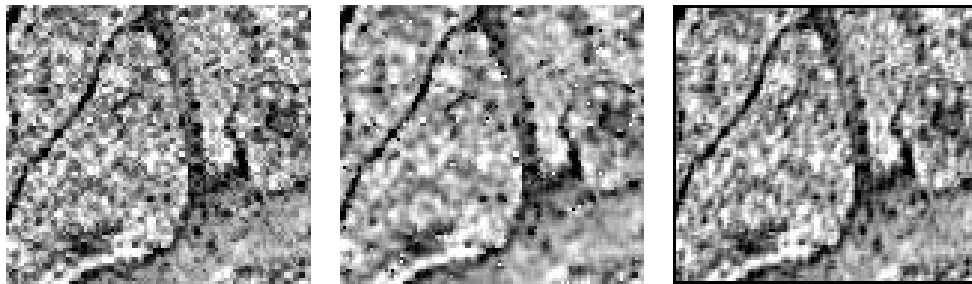


FIG. C.6 – *Résultat des filtres de Lee, de Kuan et de Frost.*

### C.3.2 Filtrage multi-temporel

Une amélioration des qualités de l'information peut-être obtenue utilisant plusieurs images d'une même région et en les fusionnant. Cette technique est la plus prometteuse mais aussi la plus coûteuse puisque l'utilisateur doit disposer de plusieurs date d'acquisition radar sur la même zone.

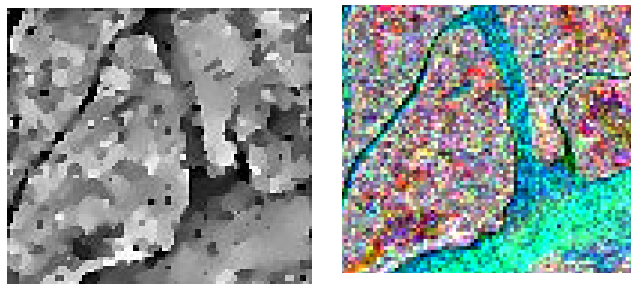


FIG. C.7 – *Résultat de deux filtrages multi-temporel, le premier basé sur une restauration bayésienne, l'autre sur un moyennage pondéré.*

#### Restauration bayésienne

Le problème de la restauration de données bruitées en utilisant des hypothèses statistiques constitue, à part entière, une branche du traitement d'image. Il existe de nombreuses approches et ce domaine de recherche est l'un des plus actifs.

Le modèle décrit, dans ce paragraphe est basé sur une approche bayésienne, comme l'ont proposés Geman et *al.* [GG84]. Il est adapté à la distribution de l'amplitude et au comportement multiplicatif de l'effet de chatoisement. Ce modèle a été proposé par Flaque et *al.* [Tup97, HRC<sup>+</sup>98].

La première partie de ce paragraphe décrit le modèle pour une unique image, ensuite il est étendu à une séquence de  $r$  images. On peut montrer que la distribution du module

A du signal radar rétrodiffusé est donné par une loi  $\Gamma$  généralisée [LTL87] :

$$\mathbb{P}_L(A) = \frac{2L^L}{(\Gamma(L)2\alpha^2)^L} A^{2L-1} e^{-\frac{LA^2}{2\alpha^2}} \quad (\text{C.1})$$

où  $L$  correspond au nombre de vues utilisées pour générer l'image donnée,  $2\alpha^2 = \mathcal{E}[A^2]$  où  $\mathcal{E}$  est la valeur recherchée.

Soient :

- $S = \{s, t, \dots\}$  l'ensemble des pixels ;
- $p = \{p_s\}_{s \in S}$  une acquisition radar ;
- et  $f = \{f_s\}_{s \in S}$  les données réelles à reconstruire.

La probabilité conditionnelle de  $p_s$  (C.1) est donc :

$$\mathbb{P}(p_s|f_s) = \frac{2L^L}{\Gamma(L)} \left( \frac{p_s^{2L-1}}{f_s^{2L}} \right) e^{-\frac{Lp_s^2}{f_s^2}} \quad (\text{C.2})$$

On suppose que le bruit a ses composantes indépendantes. On a donc :

$$\mathbb{P}(p|f) = \prod_{s \in S} \mathbb{P}(p_s|f)$$

Dans cette étude  $f$  est modélisé comme un champ markovien, ou encore que la loi de  $f$  est une distribution de Gibbs. L'équivalence champ de Markov / champ de Gibbs fournit une formulation explicite de la loi jointe de  $f$ . La formule de Bayes s'écrit :

$$\mathbb{P}(f|p) = \frac{\mathbb{P}(p|f)\mathbb{P}(f)}{\mathbb{P}(p)}. \quad (\text{C.3})$$

$f$  étant un champ de Markov, le théorème de Hammersley-Clifford permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(f) = \frac{1}{Z} e^{-E(f)} \quad (\text{C.4})$$

Un algorithme de relaxation est alors utilisé pour trouver les configurations de  $f$  maximisant sa probabilité, ce qui revient à minimiser  $E$  en  $f$ .

Par exemple, l'énergie suivante peut être utilisée pour améliorer la qualité des images dans le cas d'une seule acquisition, tout en conservant les discontinuités.

$$E(f) = \sum_{\langle s,t \rangle} \lambda^2 \frac{(f_s - f_t)^2}{1 + \left(\frac{f_s - f_t}{\delta}\right)^2} \quad (\text{C.5})$$

où  $\langle s, t \rangle$  est le couple formé par un pixel  $s$  et l'un de ses voisins  $t$ .

L'algorithme de relaxation, utilisé pour obtenir le résultat, est le recuit simulé.

Dans le cas où une séquence de  $r$  acquisitions est disponible, la moyenne  $p_s$  des observations au site  $s$  est donnée par :

$$p_s = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r p_s^i,$$

où  $p_s^i$  est la  $i^{\text{me}}$  acquisition au pixel  $s$ .

Par conséquent, la loi de probabilité (C.2) peut s'écrire :

$$\mathbb{P}(p_s | f_s) = \frac{2Lr^{Lr}}{\Gamma(Lr)} \left( \frac{p_s^{2Lr-1}}{f_s^{2Lr}} \right) e^{-\frac{Lr p_s^2}{f_s^2}} \quad (\text{C.6})$$

En faisant l'hypothèse que les acquisitions sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(p^1, \dots, p^r) = \prod_{i=1}^r \mathcal{P}(p^i | f)$$

on peut finalement écrire la loi de probabilité comme :

$$\mathbb{P}(p_s | f_s) = \frac{2L^{Lr}}{\Gamma(Lr)} \left( \frac{\prod_{i=1}^r (p_s^i)^{2L-1}}{f_s^{2Lr}} \right) e^{-\frac{L \sum_{i=1}^r (p_s^i)^2}{f_s^2}}. \quad (\text{C.7})$$

En utilisant la même approche que dans le cas mono-date, on peut obtenir une restauration de l'image (comme celle présentée figure C.7).

## Moyenne pondérée

Il est important pour certaines applications de bien discerner les modifications apparues entre les différentes dates lors d'acquisitions multiples, ce que ne permet pas l'approche précédente. L'approche présentée ici, et proposée par Stroobants et *al.* [HRC<sup>+</sup>98] tente de résoudre ce problème, par pondération adaptative des acquisitions.

Étant donnée une séquence de  $r$  images, on cherche à calculer la nouvelle valeur  $f_s$  correspondant au niveau de gris original  $p_s$  au pixel  $s$  de la  $k^{\text{ime}}$  acquisition, pour chaque  $s$  et chaque  $k$ . Dans le cas d'une continuité temporelle sur la séquence, l'effet de chatoiement doit être réduit, mais dans la valeur  $p_s$  doit être conservée s'il y a eu des modifications au cours de la séquence.

Pour caractériser les variations du pixel  $s$  entre une acquisition  $k$  et une autre  $l$ , on définit le coefficient  $D_{k,l}$ , calculé en chaque pixel  $s$  comme :

$$D_{k,l} = a \left| \frac{A_{k,l} - \mu_A}{\sigma_A} \right| + b \left| \frac{B_{k,l} - \mu_B}{\sigma_B} \right| + c \left| \frac{C_{k,l} - \mu_C}{\sigma_C} \right| \quad (\text{C.8})$$

où :

- $A_{k,l} = \frac{\sigma_s^k}{\mu_s^k} - \frac{\sigma_s^l}{\mu_s^l}$  mesure les variations locales de la texture entre  $k$  et  $l$  ; où la moyenne spatiale  $\mu_s^k$  et l'écart type  $\sigma_s^k$  sont calculés sur un voisinage de  $s$  dans la  $k^{\text{ime}}$  image ;
- $B_{k,l} = \mu_s^k - \mu_s^l$  mesure la variation temporelle de la moyenne locale ;
- $C_{k,l} = 1 - \rho_s^{k,l}$  mesure la stabilité temporelle grâce au coefficient de corrélation  $\rho_s^{k,l}$  calculé sur un petit voisinage autour de  $s$  par :

$$\rho_s^{k,l} = \frac{(p_s^k - \mu_s^k) \times (p_s^l - \mu_s^l)}{\sigma_s^k \times \sigma_s^l}$$

- $\mu_A$  et  $\sigma_A$  (respectivement  $\mu_B$ ,  $\sigma_B$  and  $\mu_C$ ,  $\sigma_C$ ) correspondent à la moyenne et l'écart type de l'écart type de  $A_{k,l}$  ( $B_{k,l}$  et  $C_{k,l}$ ) calculé sur un couple  $\{(k, l)\}_{l \neq k}$ .
- $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont des coefficients de pondération fixés par l'utilisateur.

L'application, ou non, du filtrage temporel dépend de la valeur  $\mu_D = \frac{\sum_{l \neq k} D_{k,l}}{r-1}$ , comparativement à deux seuils  $T_{min}$  et  $T_{max}$  :

- si  $\mu_D > T_{max}$ , cela signifie que la valeur courante du pixel  $s$  dans l'image de référence  $k$  est clairement différente de celle des autres images de la séquence, et cette information doit être conservée ; aucun filtrage n'est appliqué :

$$f_s = p_s$$

- si  $\mu_D < T_{min}$ , la valeur du pixel est proche de celle prise dans les autres acquisitions ; on applique alors un simple moyennage temporel pour réduire l'effet de chatoiement :

$$f_s = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r p_s^l$$

- if  $T_{min} < \mu_D < T_{max}$  alors la valeur filtrée  $f_s$  est donnée par :

$$f_s = \mu_s^k \frac{\sum_{l=1}^r \alpha^l \frac{p_s^l}{\mu_s^l}}{\sum_{l=1}^r \alpha^l}$$

avec  $0 \leq \alpha^l \leq 1$  inversement proportionnelle à  $D_{k,l}$  ; de telle manière que moins la valeur change entre  $k$  et  $l$ , plus  $\alpha^l$  est grand.

La figure C.7 illustre un résultat de cette méthode appliqué sur une séquence de 6 images.



# Bibliographie

- [ADUS97] J. Askne, P. Dammert, L. Ulander, and G. Smith. C-band repeat-pass interferometric SAR observations of the forest. *IEEE Trans. on geoscience and remote sensing*, 35, January 1997.
- [AG83] M. Artigue and V. Gautheron. *Systèmes différentiels - étude graphique*. CEDIC, 1983.
- [AMR88] R. Abraham, J.E. Marsden, and T.S. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis and applications*. Springer Verlag, 1988.
- [Bam93] R. Bamler. Phase statics and decorrelation in SAR interferograms. In *Proceedings of IGARSS'93*, 1993.
- [Bar91] J. Baranger. *Analyse Numérique*. Hermann, 1991.
- [BBLM97] F. Barbaresco, S. Bonney, J. Lambert, and B. Monnier. Contours actifs géométriques et à modèles contraints pour le suivi des orages dans un contexte multisenseur : radar, interféromètre VHF, satellite IR. In *GRETSI'97*, Grenoble, France, september 1997.
- [BHC96] J.P. Berroir, I. Herlin, and I. Cohen. A numerical model for large deformation on meteorological images. In *International Conference on Analysis and Optimisation of Systems, Images, Wavelets and PDE's*, Paris, Ministère de la Recherche, Juin 1996.
- [BJ85] P.J. Besl and R.C. Jain. Three-dimensional object recognition. *Surveys*, 17(1):75–145, March 1985.



- [Bon91] D. Bone. Fourier fringe analysis: the two dimensional phase unwrapping problem. *Applied Optics*, 30:3227–3632, 1991.
- [BT79] S.T. Barnard and W.B. Thompson. Disparity analysis of images. In *Univ. of Minnesota*, 1979.
- [Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol 8(No 6), november 1986.
- [CAS92] I. Cohen, N. Ayache, and P. Sulger. Tracking points on deformable objects using curvature information. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 458–466, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.
- [CC90] C.H. Chou and Y.C. Chen. Moment-preserving pattern matching. *Pattern Recognition*, 23:461–474, 1990.
- [CD86] R.T. Chin and C.R. Dyer. Model-based recognition in robot vision. *Surveys*, 18(1):67–108, March 1986.
- [Cen96] Centre National d’Etudes Spatiales, Toulouse. *Philosophie et mode d’emploi de la chaîne de logicielle interférométrique DIAPASON développée au CNES*, Octobre 1996.
- [CFL67] R. Courant, K.O. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM-Journal*, 11:215–235, 1967.
- [CH81] J.K. Cheng and T.S. Huang. A subgraph isomorphism algorithm using resolution. *Pattern Recognition*, 13:371–379, 1981.
- [CH97a] I. Cohen and I. Herlin. Curves matching using geodesic path. In *SCIA’97*, Lappenranta, Finland, June 9-11 1997. IAPR.
- [CH97b] I. Cohen and I. Herlin. Tracking meteorological structures through curves matching using geodesic paths. Technical Report 3191, INRIA, UR Rocquencourt, Juin 1997.

- [CH98] I. Cohen and I. Herlin. Curves matching using geodesic paths. In *Proceedings of the conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR'98*, pages 741–746, Santa-Barbara, USA, June 1998. IEEE.
- [CK96] L.D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. In *Proceedings of the conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 666–673, San Francisco, June 1996.
- [CKS97] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *IJCV*, 22(1):61–79, February 1997.
- [CMKa] C. Carnec, D. Massonet, and C. King. Measurement of land subsidence by means of differential SAR interferometry.
- [CMKb] C. Carnec, D. Massonet, and C. King. Potentiel d'application de l'interférométrie SAR différentielle à la détection de mouvements de terrain.
- [CMVK94] C. Carnec, D. Massonet, J.-P. Villain, and C. King. Potential application of differential SAR interferometry for monitoring the impact of underground mining. In *The First Workshop on SAR Interferometry*, Tokyo, Japan, 2 Dec 1994. Earth Environment Observation Committee, National Space Agency of Japan.
- [Cri86] T. Crimmins. Geometric filter for reducing speckle. *Optical engineering*, 25:651–654, 1986.
- [Dan80] E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.
- [DB94] S. Dupont and M. Berthod. Interférométrie radar et déroulement de phase. *Rapport de recherche*, RR No 2344. Technical report, INRIA, 1994.
- [dC76] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [Del93] Y. Delignon. *Etude statistique d'images radar de la surface de la mer*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1993.

- [Der87] R. Deriche. Optimal edge detection using recursive filtering. *International Journal of Computer Vision*, pages 167–187, 1987.
- [Dup93] S. Dupont. Déroulement de phase en interférométrie radar *rapport de stage*. Master’s thesis, Ecole Supérieure en Sciences Informatiques, 1993.
- [Dup97] S. Dupont. *Génération de modèles numériques de terrain par interférométrie ROS*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, juin 1997.
- [EG87] C.L. Epstein and M. Gage. The curve shortening flow. In A. Chorin and A. Majda, editors, *Wave motion: Theory, modeling and Computation*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [FA95] B. Fruneau and J. Achache. Détection du glissement de terrain de Saint-Etienne de Tinée par interférométrie SAR et modélisation. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 320, Série IIa:809–816, 1995.
- [FB81] O.D. Faugeras and M. Berthod. Improving consistency and reducing ambiguity in stochastic labeling: An optimization approach. *PAMI*, 3(4):412–424, July 1981.
- [FFL96] G. Fornaro, G. Franchetti, and R. Lanari. Interometric SAR phase unwrapping using Green’s formulation. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 34(3):720–727, May 1996.
- [FSJ95] K. Feigl, A. Sergent, and D. Jacq. Estimation of an earthquake focal mechanism from a satellite radar interferogram: uppercaseApplication of the december 4, 1992 Landers aftershock. *Geophysical Research Letters*, 22(9):1037–1040, 1995.
- [FSSH82] V. Frost, J. Stiles, K. Shanmugan, and J. Holtzman. A model for radar images and its application to adaptative digital filtering of multiplicative noise. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4:157–166, 1982.
- [GA94] A. Guézic and N. Ayache. Smoothing and matching of 3D space curves. *International Journal of Computer Vision*, 12(1):79–104, February 1994.

- [GDCV99] J. Gomes, D. Darsa, B. Costa, and L. Velho. *Warping and Morphing of Graphical Objects*. Morgan Kaufman Publishers, Inc, 1999.
- [GEKF93] R.M. Goldstein, H. Engelhardt, B. Kamb, and R. M. Frolich. Satellite radar interferometry for monitoring ice sheet motion: Application to an antarctic ice stream. *Science*, 262:1525–1529, 1993.
- [GG84] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, 6, No 6:721–741, 1984.
- [GGB84] A. Goshtasby, S. H. Gage, and J. F. Bartholic. A two-stage cross correlation approach to template matching. *PAMI*, 7(2):374–378, May 1984.
- [GGZ89] A. Gabriel, R. Goldstein, and H. Zebker. Mapping small elevation change over large areas: differential radar interferometry. *Journal of Geophysical Research*, 94(B7):9183–9191, 10 July 1989.
- [Gir92] F. Girault. *Auscultation par imagerie numérique de quelques versants instables*. PhD thesis, CNAM, 1992.
- [GP98] D. Ghiglia and M. Pritt. *Two-Dimensional Phase Unwrapping. Theory, Algorithms and Software*. Wiley-interscience, 1998.
- [GR89] D. Ghiglia and L. Romero. Direct phase estimation from phase difference using fast elliptic partial differential equation solvers. *Optic letters*, 14:1107–1109, October 1989.
- [GR94] D. Ghiglia and L. Romero. Robust two dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that use fast transforms and iterative methods. *Journal of the Optical Society of America*, 11:107–1117, November 1994.
- [GZW88] R.M. Goldstein, H.A. Zebker, and C.L. Werner. Satellite radar interferometry: Two-dimensional phase unwrapping. *Radio Science*, 23(4):713–720, July-August 1988.
- [HBG<sup>+</sup>94] I.L. Herlin, D. Béréziat, G. Giraudon, C. Nguyen, and C. Graffigne. Segmentation of echocardiographic images with markov random fields. *Third european Conference on Computer Vision*, may 1994.

- [HCH97] E. Huot, I. Cohen, and I. Herlin. An unwrapping method for interferometric SAR images. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 2853–2858, Munich, Germany, April 1997. IEEE.
- [Her94] E.-A. Herland. Surveillance opérationnelle des glaces au moyen du SAR d’ERS-1. *Observation de la terre – Bulletin trimestriel*, 45:6–8, 1994.
- [HH97] E. Huot and I. Herlin. Détection d’effets phasimétriques SAR liés à des changements d’état de surface. In *ORASIS’97*, octobre 1997.
- [HH98a] E. Huot and I. Herlin. Cropland detection with SAR interferometry: A segmentation model. In *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 2853–2858, Seattle, Washington, USA, May 1998. IEEE.
- [HH98b] E. Huot and I. Herlin. A model for detecting phasimetric SAR effects coming from rainy events. In *Proceedings of International Conference on Image Processing, ICIP’98*, Chicago, USA, October 1998. IEEE.
- [HHB98] E. Huot, I. Herlin, and D. Béréziat. Segmentation of temporal effects on phasimetric SAR images. In *Proceedings of International Conference on Pattern Recognition, ICPR’98*, pages 1390–1392, Brisbane, Australia, August 1998. IAPR.
- [HHC96] E. Huot, I. Herlin, and I. Cohen. Segmentation d’image d’interférométrie radar. In *Journées ORASIS’96, GDR-PRC Communication Homme–Machine, LASMEA, Clermond-Ferrand*, 20–24 Mai 1996.
- [HR96] G. Henebry and D. Rieck. Applying principal components analysis to image time series: effects on scene segmentation and spatial structures. In *Proceedings of IGARSS’96*, pages 448–450, 1996.
- [HRC<sup>+</sup>98] E. Huot, J.-P. Rudant, N. Classeau, B. Flasque, P. Guillope, I. Herlin, M. Sigelle, and W. Stroobants. Image processing for multitemporal SAR images. In EUROPTO, editor, *Proceedings of European Symposium on Remote Sensing*, volume SAR Image Analysis, Modelling, and Techniques, Barcelona, Spain, September 1998. EOS-SPIE.

- [HS81] B.K.P. Horn and B.G. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, Vol 17:185–203, 1981.
- [HTWS94] Ph. Hartl, K.-H. Thiel, X. Wu, and J. Sievers. Application de l'interférométrie du SAR d'ERS-1 dans l'Antarctique. *Observation de la terre – Bulletin trimestriel*, 43:1–4, 1994.
- [Hun79] B. Hunt. Matrix formulation of the reconstruction phases values from phases differences. *Journal of the Optical Society of America*, 69:393–399, 1979.
- [HYHC99] E. Huot, H. Yahia, I. Herlin, and I. Cohen. Mise en correspondance de surfaces par chemins géodésiques. Technical Report 3842, INRIA, décembre 1999. to appear.
- [HZ83] R. Hummel and S. Zucker. On the foundation of relaxation labeling process. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, 6, No 6:267–280, 1983.
- [KAB95] R. Kimmel, A. Amir, and A.F. Bruckstein. Finding shortest paths on surfaces using levelset propagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(6):635–640, June 1995.
- [KB95] R. Kimmel and A.M. Bruckstein. Tracking level sets by level sets: A method for solving the shape from shading problem. *CVIU*, 62(1):47–58, July 1995.
- [KBZ94] Z. Kato, M. Berthod, and J. Zerubia. A hierarchical Markov random field model and multi-temperature annealing for parallel image classification. *Rapport de recherche INRIA*, RR No 1938. 1993-94.
- [KKGR96] G. Kattenborn, H.-G. Klaedtke, S. Guumlth, and M. Reich. Potential of ERS-1 SAR for agricultural statics. Technical report, Final Report, JRC/CEC Contract no. 10161-94-04 F1ED ISP D., 1996.
- [KSC87] D. Kuan, A. Sawchuk, and P. Chavel. Adaptive restoration of images with speckle. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 373–383, 1987.
- [KSKB95a] R. Kimmel, D. Shaked, N. Kiryati, and A.M. Bruckstein. Skeletonization via distance maps and level sets. *CVIU*, 62(3):382–391, November 1995.

- [KSKB95b] R. Kimmel, K. Siddiqi, B.B. Kimia, and A.M. Bruckstein. Shape from shading: Level set propagation and viscosity solutions. *IJCV*, 16(2):107–133, October 1995.
- [KWT88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:312–313, 1988.
- [LA97] O. Loffeld and C. Arndt. Estimating the derivative of modulo-mapped phases. In *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Munich, Germany, April 1997. IEEE.
- [Lab96] D. Labrousse. *Modélisation markovienne pour le déroulement de phases interférométriques SAR*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1996.
- [LDB] D. Labrousse, S. Dupont, and M. Berthod. SAR interferometry: a markovian approach to phase unwrapping with a discontinuity model. In *IGARSS'96*, Lincoln, USA, may 1996.
- [LEE81] J.-S. LEE. Speckle analysis and smoothing of synthetic aperture radar images. *Computer Graphics and Image Processing*, 17:24–32, 1981.
- [LFD<sup>+</sup>94] S. Legoupil, F. Fawal, M. Desvignes, M. Revenu, P. Allain, and D. Bloyet. Matching of curvilinear structures : application to the identification of cortical sulci on 3D magnetic resonance brain image. In *Proceedings of Pattern Recognition in Practice*, volume 4, Vlieland, Netherland, 1994.
- [LGL95] A. Lerios, C.D. Garfinkle, and M. Levoy. Feature-based volume metamorphosis. In *Computer Graphics, Siggraph'95 Conference proceedings*, pages 449–464, Los Angeles, CA, August 1995.
- [LKvL97] G. Lemoine, R. Kidd, and H. van Leeuwen. Methodological advancements in using ERS SAR data for crop area estimation. In *Proceedings of the 3rd ERS Symposium on Spaceborne Radar Imagery*, Florence, Italy, March 1997.
- [LM] I. Lyuboshenko and H. Maître. Phase unwrapping for interferometric SAR using helmholtz equation eigenfunctions and the first green's identity. *Journal of the Optical Society of America*. submitted.

- [LM98] I. Lyuboshenko and H. Maître. Implementing a stable integral method for interferometric phase unwrapping. In *Proceedings of EUSAR'98*, pages 253–256, Friedrichshafen, Germany, 1998.
- [LTL87] H. Laur, T. L. Toan, and A. Lopes. Textural segmentation of SAR images using first order statistical parameters. In *IGARSS'87 Symposium*, volume 2, pages 1463–1468, May 1987.
- [LVZ92] Q. Lin, J. Vesecky, and H.A. Zebker. New approaches in interferometric SAR data processing. In *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, volume 30, 1992.
- [LXH95] H. Lim, W. Xu, and X. Huang. Two new practical methods for phase unwrapping. In *International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 196–198, Florence, Italy, April 1995. IEEE.
- [Lyu96] I. Lyuboshenko. Une méthode stable de développement de la phase en interférométrie ROS. Technical Report 96D014, ENST, 1996.
- [Mal92] G. Malandain. *Filtrage, Topologie et mise en correspondance d'images médicales multidimensionnelles*. PhD thesis, École Centrale Paris, septembre 1992.
- [Mas] D. Massonnet. Coseismic deformation field of the M=6.7 Northridge, California earthquake of January 17, 1994 recorded by two radar satellites using interferometry. *Geophysical Research Letters*.
- [MBA95] D. Massonnet, P. Briole, and A. Arnaud. Deflation of Mount Etna monitored by spaceborne radar interferometry. *Nature – International Weekly Journal of Science*, 375:567–570, 1995.
- [MF95a] D. Massonnet and K. Feigl. Discrimination of geophysical phenomena in satellite radar interferograms. *Geophysical Research Letters*, 22(12):1537–1540, 1995.
- [MF95b] D. Massonnet and K. Feigl. Satellite radar interferometric map of the coseismic deformation field of the M=6.1 Eureka Valley, California earthquake of May 17, 1993. *Geophysical Research Letters*, 22(12):1541–1544, 1995.



- 
- [MFRA94] D. Massonnet, K. Feigl, M. Rossi, and F. Adragna. Radar interferometric mapping of deformation in the year after Landers earthquake. *Nature – International Weekly Journal of Science*, 369:227–230, 1994.
- [Mog58] K. Mogi. Relation between the eruption of various volcanoes and the deformation of the ground surface around them. *Bulletin of the earthquake research institute*, 36:99–134, 1958.
- [MR93] D. Massonnet and T. Rabaute. Radar interferometry: limits and potential. In *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, volume 31, pages 455–464, march 1993.
- [MRC93a] D. Massonnet, B. Rogron, and C. Carmona. *From Optics to Radar, Spot and ERS Applications*, chapter Evaluation des changements de phase de surface sur de grandes zones. ESA-CNES, may 1993.
- [MRC<sup>+</sup>93b] D. Massonnet, M. Rossi, C. Carmona, F. Adragna, G. Peltzer, K. Keigl, and T. Rabaute. The displacement field of the Landers earthquake mapped by radar interferometry. *Nature – International Weekly Journal of Science*, 364:138–142, 1993.
- [NRC] *Numerical Recipes in C, Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [OS88] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J. of Comput. Physics*, 79:12–49, 1988.
- [PD99] N. Paragios and R. Deriche. Geodesic active regions for motion estimation and tracking. In *ICCV99*, page 688, 1999.
- [PM91] F. Perlant and D. Massonnet. Different spot dem applications for studies in SAR interferometry. *XVII ISPRS Congress, Commission IV*, vol. XXIX:87–93, 1991.
- [PRGD90] C. Prati, F. Rocca, A. M. Guarineri, and E. Damonti. Seismic vibration for SAR focusing: Interferometrical applications. In *Geoscience Remote Sensing vol. 28*. IEEE Trans., July 1990.

- [Pri96] M. Pritt. Phase unwrapping by means of multigrid techniques for interferometric sar. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 34(3):728–738, May 1996.
- [RBC<sup>+</sup>96] J.-P. Rudant, A. Bedidi, R. Calonne, D. Massonnet, G. Nesti, and D. Tarchi. Laboratory experiments for the interpretation of phase shift in SAR interferograms. In *Proceedings of Fringe'96*, Sept. 30th – Oct. 2nd 1996.
- [RBM<sup>+</sup>95] J.-P. Rudant, A. Bédidi, D. Massonnet, G. Nesti, and R. Calonne. Analyse d'une séquence d'interférogrammes différentiels obtenus à partir de données ERS-1 sur le site de Naizin en Bretagne. In *Symposium International de Toulouse*, october 1995.
- [Ric94] J. Richards. *Remote Sensing Digital Image Analysis*. springer-verlag, 1994.
- [SB95] B. Serra and M. Berthod. Optimal subpixel matching of contour chains and segments. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pages 402–407, Cambridge, Massachusetts, June 1995.
- [Set96] J.A. Sethian. *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences*. Cambridge University Press, 1996.
- [SG92] T.W. Sederberg and E. Greenwood. A physically based approach to 2D shape blending. In *Computer Graphics, Siggraph'92 Conference proceedings*, volume 26, pages 25–34, USA, July 1992.
- [SH81] L.G. Shapiro and R.M. Haralick. Structural descriptions and inexact matching. *PAMI*, 3(5):504–519, September 1981.
- [SKS<sup>+</sup>93] G. Sapiro, R. Kimmel, D. Shacked, B. Kimia, and A. Bruckstein. Implementing continuous-scale morphology via curve evolution. *Pattern Recognition*, 26(9):1363–1372, 1993.
- [SM92] F. Stein and G.G. Medioni. Structural indexing: Efficient two dimensional object recognition. *PAMI*, 14(12):1198–1204, December 1992.

- [Spa95] U. Spagnolini. 2-D phase unwrapping and instantaneous frequency estimation. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 33(3):579–589, May 1995.
- [Spi71] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol I*. Publish or Perish, Berkeley, 1971.
- [SS92] J.A. Sethian and J. Strain. Crystal growth and dendritic solidification. *Journal of Computational Physics*, 98:231–253, 1992.
- [Sze89] R. Szeliski. Fast parallel surface interpolation with applications to digital cartography. Technical Report 470, SRI International, June 1989.
- [Ter84] D. Terzopoulos. Multiresolution algorithms in computational vision. In *IU84*, pages 225–262, 1984.
- [TG95] T.Pajdla and L.Van Gool. Matching of 3D curves using semi differential invariants. In *IEEE Proceedings of the International Conference on Computer Vision*, pages 390–395, Cambridge, Massachusetts, June 1995.
- [Thi94] J.P. Thirion. Extremal points: definition and application to 3D image registration. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 587 – 592. IEEE, June 1994.
- [Tho79] J. A. Thorpe. *Elementary Topics In Differential Geometry*. Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1979.
- [Tro96] E. Trouvé. *Imagerie interférentielle en radar à ouverture synthétique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, juillet 1996.
- [TT88] H. Takajo and T. Takahashi. Least-squares phase estimation from the phase difference. *Journal of the Optical Society of America*, 5(3):416–425, March 1988.
- [Tup97] F. Tupin. *Reconnaissances des formes et analyse de scène en imagerie radar à ouverture synthétique*. PhD thesis, École Nationale des Télécommunications, 1997.

- [vDK84] A.J. van Doorn and J.J. Koenderink. Spatiotemporal integration in the detection of coherent motion. *Vision Research*, 24(1):47–53, 1984.
- [Win95] G. Winkler. *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*. Springer, 1995.
- [WW95] U. Wegmüller and C.L. Werner. Farmland monitoring with SAR interferometry. In *IGARSS'95*, Firenze, July 10-14 1995.
- [WWNB95] U. Wegmüller, C.L. Werner, D. Nüesch, and M. Borgeaud. Land-surface analysis using ERS-1 SAR interferometry. *ESA bulletin*, 81:30–37, 1995.
- [XZ96] G. Xu and Z. Zhang. *Epipolar Geometry in Stereo, Motion, and Object Recognition: A Unified Approach*. 1996.
- [ZF92a] Z. Zhang and O.D. Faugeras. Estimation of displacements from two 3-D frames obtained from stereo. *PAMI*, 14(12):1141–1156, December 1992.
- [ZF92b] Z. Zhang and O.D. Faugeras. Estimation of displacements from two 3D frames obtained from stereo. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(12):1141–1156, December 1992.
- [ZRG<sup>+</sup>94] H. Zebker, P. Rosen, R. Goldstein, A. Gabriel, and C. Werner. On the derivation of coseismic displacement fields using differential radar interferometry: the Landers earthquake. *Journal of Geophysical Research*, 99(B10):19 617–19 684, 1994.
- [ZV92] H. Zebker and J. Villasenor. Decorrelation in interferometric radar echoes. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 30, 1992.