



Images et Dynamique

Isabelle Herlin

► To cite this version:

Isabelle Herlin. Images et Dynamique. Modélisation et simulation. Université Paris 6, 2015. tel-01245112

HAL Id: tel-01245112

<https://inria.hal.science/tel-01245112>

Submitted on 16 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Images et Dynamique

par Isabelle HERLIN

soutenue le 30 juin 2015 devant le jury constitué de :

Blayo Éric, Examineur

Chanussot Jocelyn, Rapporteur

Hebert Martial, Rapporteur

Heitz Fabrice, Rapporteur

Perthame Benoit, Examineur

Thiria Sylvie, Examinatrice

Thual Olivier, Examineur

à JM²,

Profitez des étoiles

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement les membres du jury, Éric Blayo, Jocelyn Chanussot, Martial Hébert, Fabrice Heitz, Benoît Perthame, Sylvie Thiria et Olivier Thual. J'ai une profonde admiration pour les contributions scientifiques que chacun d'entre eux a apportées dans le cadre de sa profession de professeur et professeure. Un merci particulier pour les trois rapporteurs, Jocelyn Chanussot, Martial Hébert, Fabrice Heitz, qui ont accepté de me consacrer de leur temps pour évaluer mon travail.

J'ai eu beaucoup de chances de pouvoir effectuer ma carrière dans ce bel institut de recherche qu'est Inria. Je remercie donc Nicholas Ayache de m'avoir fait recruter en tant que chargée de recherche au moment où il créait l'équipe-projet Epidaure.

Jean-Paul Berroir, Isaac Cohen et Hussein Yahia m'ont accompagnée dans l'aventure de la création de l'équipe-projet, Air, consacrée au traitement d'images satellite. Que de belles années communes et de rires partagés !

Gilles Kahn nous a aidés, Bruno Sportisse et moi-même à réaliser une proposition de projet sur le couplage avec les modèles. Ainsi est née Clime. Je remercie Dominique Béréziat, Marc Bocquet, Étienne Huot et Vivien Mallet pour les années de travail en commun dans cette équipe et je nous souhaite beaucoup de passion et de succès pour la création prochaine d'une future équipe en 2016. J'associe naturellement Christian Seigneur, directeur actuel du Cerea, pour son implication dans notre activité. Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour François-Xavier Le Dimet. Je le remercie de m'avoir fait partager sa vision de l'assimilation d'images et sa connaissance des restaurants parisiens.

Un grand merci et toute mon amitié à Dominique Béréziat, Sonia Bouzidi, Karim Drifi, Yann Dumortier, Jacopo Grazzini, Étienne Huot, Till Isambert, Fabien Lahoche, Yann Lepoittevin, et Bertrand Leroy pour ces merveilleuses années de travail collectif. J'espère qu'obtenir une thèse leur a permis de réaliser leurs objectifs professionnels et personnels.

Des années d'activité m'ont permis de voir Anne Schroeder, Bernard Lorho, Laure Reinhart, Jean-Pierre Banâtre, Sophie Cluet, Antoine Petit et Isabelle Ryl se succéder à la direction du centre Inria Paris-Rocquencourt. Toutes et tous ont travaillé sans compter pour permettre aux chercheurs, et aux équipes que j'ai dirigées, d'avoir des conditions de travail optimales. Je leur adresse mes profonds remerciements.

L'activité d'un chercheur ou d'un responsable d'équipe est dépendante du soutien qu'il obtient. J'ai une admiration sans borne pour les services d'Inria, et du centre de Paris-Rocquencourt en particulier. Admiration pour leur implication, leur volonté de fournir un service de qualité et leur capacité à répondre présent à la moindre difficulté.

Que soient admirées Christine Anocq, Muriel de Bianchi, Nathalie Gaudechoux, pour avoir été assistantes successives de Air et de Clime. Chacune d'elles m'aura offert ses compétences professionnelles mais aussi une aide humaine constante dans les difficultés.

Remercier toutes les personnes, avec qui j'ai pu échanger et travailler, avec qui j'ai pu discuter et rire, est impossible. Mais que chacun sache que je connais son rôle dans ma vie.

Je remercie les miens, parents, fratrie, enfants, famille, amies et amis d'être là dans le parcours de montagnes russes de la vie.

Table des matières

1	Introduction générale	9
2	Étude de la dynamique des images	17
2.1	Contexte et notations	18
2.2	Assimilation variationnelle de données 4D-Var	21
2.3	Lois d'évolution	24
2.4	Opérateur d'observation	24
2.5	Prise en compte de l'accélération	25
2.6	Implémentation numérique	27
2.7	Estimation conjointe du mouvement et de l'accélération	28
2.8	Conclusion	36
3	Réduction de modèle	37
3.1	Assimilation dans des modèles d'ordre réduit	38
3.2	Calcul de bases	41
3.3	Bases dédiées à l'estimation du mouvement	43
3.4	Estimation du mouvement sur les bases réduites	46
3.5	Conclusion	51
4	Suivi d'objets	57
4.1	Suivi d'objets par assimilation variationnelle d'images	57
4.2	Résultats	61
4.3	Conclusion	66
5	Méthodes d'ensemble	67
5.1	Filtre de Kalman d'ensemble	68
5.2	Estimation du mouvement	70
5.3	Résultats obtenus par le filtre de Kalman d'ensemble	73

5.4 Conclusion	78
6 Conclusion et perspectives	81
6.1 Résumé des travaux	81
6.2 Objectifs futurs	83

Introduction générale

Le travail présenté dans ce document a été effectué, depuis début 2010, dans le contexte de mon activité de responsable scientifique de l'équipe-projet Inria appelée Clime.

Clime a été, jusque fin 2014, une équipe-projet commune avec l'École des Ponts ParisTech, créée en décembre 2005 par des chercheurs en traitement d'images et des chercheurs en assimilation de données. En tant qu'équipe de l'École des Ponts ParisTech, Clime appartient au CEREIA (Centre d'Enseignement et de Recherche en Environnement Atmosphérique), lui-même laboratoire commun de l'École des Ponts ParisTech et de EDF R&D.

L'assimilation de données, telle qu'étudiée dans l'équipe Clime, doit être comprise au sens le plus large : cela inclut toutes les méthodes mathématiques de couplage des données d'observation et des modèles de simulation. Le système observé est généralement un fluide géophysique. L'équipe s'intéresse à quatre axes scientifiques principaux :

- Estimation de l'état d'un système en combinant sorties du modèle et observations. Le but est de calculer une analyse, estimation optimale du vecteur d'état caractérisant le système, ou d'effectuer une prévision. L'équipe Clime contribue à la définition de nouvelles méthodes d'assimilations de données, en s'intéressant par exemple aux aspects non-gaussiens, aux filtres minimax et aux approches multi-échelles.
- Modélisation inverse. Il s'agit par exemple de l'estimation de termes sources ou de paramètres sous-mailles présents dans les modèles.
- Quantification d'incertitude et estimation du risque. L'approche principale de l'équipe repose sur des méthodes d'ensemble. Celles-ci sont abordées dans le chapitre 5 pour le calcul du mouvement par un filtre de Kalman d'ensemble.
- Assimilation d'images. Ces travaux font l'objet du présent mémoire et sont décrits dans les chapitres 2 à 4.

Ce document est donc lié à mon activité de recherche sur le thème de l'assimilation d'images. Cette activité, débutée en 2008, correspond à une reconversion scientifique par rapport à mes précédents travaux en traitement d'images. Ces derniers ont principalement été menés pour l'imagerie médicale, dans l'équipe-projet Inria EPIDAURE dirigée par Nicholas Ayache, puis pour l'imagerie satellite, dans l'équipe-projet AIR, que j'ai créée en collaboration avec Isaac Cohen et Hussein Yahia, et enfin dans l'équipe-projet Clime.

Les quatre chapitres du document principal synthétisent une thématique de recherche effectuée en collaboration avec un ou plusieurs membres de l'équipe. Les personnes listées ci-dessous sont les principaux contributeurs des travaux décrits dans ce manuscrit et sont co-auteurs des articles associés :

- Dominique Béréziat, maître de conférences de l'Université Paris 6. Dominique est venu en délégation chez Inria en 2007-2008. Depuis cette date, je poursuis une collaboration régulière avec lui et nous avons réalisé plusieurs publications communes sur l'assimilation d'images, l'estimation du mouvement et l'estimation de l'accélération.
- Karim Drifi, doctorant, de décembre 2009 à janvier 2013. Mes activités de recherche sur la réduction de modèle en imagerie et sur l'assimilation d'images dans les modèles réduits ont débuté dans le cadre de l'encadrement de la thèse de Karim.
- Étienne Huot, maître de conférences de l'Université de Versailles. Étienne est mis à disposition par l'université pour exercer son activité de recherche chez Inria. J'ai collaboré avec Étienne sur l'assimilation d'images dans un modèle shallow-water, sur l'assimilation de pseudo-observations (calculées à partir des images) dans un modèle de circulation océanique paramétrisé pour la mer Noire et sur l'assimilation d'images dans des modèles réduits.
- Yann Lepoittevin, doctorant Inria depuis octobre 2012 et dont la soutenance est prévue en fin d'année 2015. Les activités de suivi d'objets par assimilation d'images sont effectuées dans le contexte de l'encadrement de la thèse de Yann. L'étude de méthodes d'ensemble pour les modèles image a également été initialisée dans le contexte de cette thèse et va se poursuivre en collaboration avec Julien Brajard du LOCEAN.
- Nicolas Mercier, ingénieur chez Inria de novembre 2008 à août 2011. Nicolas a réalisé un cadre générique pour la conception des méthodes d'assimilation d'images dans l'équipe. Après son départ, nous avons pris la décision de développer une bibliothèque image, basée sur ITK (Insight Segmentation and Registration Toolkit, www.itk.org), afin de permettre la diffusion des logiciels d'assimilation d'images réalisés dans l'équipe. Cette bibliothèque est réalisée par un ingénieur de recherche Inria, David Froger, avec une collaboration intensive de Dominique Béréziat.
- Giuseppe Papari, post-doctorant ERCIM, accueilli dans Clime de juillet 2011 à août 2012. Avant de rejoindre l'équipe Clime, Giuseppe s'intéressait à la définition de bases pour la représentation des images. Nous avons collaboré sur la problématique de la définition d'espaces réduits permettant de caractériser les propriétés spécifiques des Modèles Images, afin d'améliorer les performances de l'assimilation d'images. Giuseppe Papari est maintenant chercheur de l'entreprise FEI, à Trondheim en Norvège.
- Sergey Zhuk, post-doctorant ERCIM, accueilli dans Clime de octobre 2009 à décembre 2010. Avant de rejoindre Clime, Sergey travaillait à l'université Taras Chevtchenko de Kiev en Ukraine, sous la direction d'Alexander Nakonechniy. Nous avons collaboré sur les problèmes d'estimation du mouvement et de restauration d'images par des méthodes minimax. Sergey est maintenant chercheur chez IBM à Dublin.
- Plusieurs stagiaires venus effectuer un master dans Clime : en particulier, sur les deux dernières années, Said Dayabzeg, Tristan Perotin et Marius Sokeng.

Mon activité de recherche s'est naturellement effectuée dans le contexte de collaborations avec d'autres laboratoires et par l'intermédiaire de projets de recherche. Je souhaite en particulier citer :

- le projet ANR Addisa (de 2007 à 2010, coordonné par François-Xavier Le Dimet) en collaboration avec l'équipe-projet Inria Moise (<https://team.inria.fr/moise/>), le LEGI (laboratoire CNRS, <http://www.legi.grenoble-inp.fr/web/>), le laboratoire CNRM de Météo-France (<http://www.cnrm.meteo.fr/gmap/>) et l'institut de mathématiques de Toulouse (<http://www.math.univ-toulouse.fr/>). L'objectif est d'étudier le potentiel et les difficultés de l'assimilation d'images dans les modèles de prévision environnementale.
- le projet ANR Geo-Fluids (de 2010 à 2013, coordonné par Étienne Mémin) en collaboration avec les équipes-projets Inria Fluminance (<http://www.irisa.fr/fluminance/>) et Moise, l'Ifremer (<http://www.ifremer.fr/brest>), le laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD, <http://www.lmd.jussieu.fr/>) et le laboratoire CNRM de Météo-France. L'objectif du projet est d'explorer les méthodes de couplage des images et des modèles de dynamique afin de décrire l'évolution de fluides géophysiques, par exemple l'océan ou l'atmosphère.
- le projet IRD Addisaaf (de 2008 à 2010, coordonné par moi-même) en collaboration avec l'équipe-projet Inria Moise, l'ENIT en Tunisie (<http://www.enit.rnu.tn/>) et l'université de Yaoundé au Cameroun (<http://www.uy1.uninet.cm/>). Les objectifs scientifiques, en parallèle de l'ANR Addisa, concernent le développement de méthodes d'assimilation de données et d'images. L'assimilation de pseudo-observations, calculées à partir des images, a en particulier été étudiée dans ce contexte.
- l'équipe associée Adams (de 2008 à 2010, coordonnée par Etienne Huot et Arthur Virdard) en collaboration avec l'équipe-projet Inria Moise, le Marine Hydrophysical Institute (MHI) de Sébastopol (<http://mhi.nas.gov.ua/en/>), l'Institute of Numerical Mathematics de Moscou (http://www.inm.ras.ru/inm_en_ver/) et le Mikheil Nodia Institute of Geophysics à Tbilissi en Géorgie (<http://www.ig.acnet.ge>). Les objectifs de travail concernent le développement de méthodes avancées d'assimilation de données et d'assimilation d'images. Après la fin de cette équipe associée, les collaborations académiques se sont poursuivies sur les mêmes thématiques, en particulier avec Gennady Korotaev du MHI, qui a fourni les images satellite de la mer Noire présentées dans ce document. Les difficultés récentes en Crimée sont toutefois une gêne à la poursuite des travaux communs.
- le projet Hubert Curien DNIPRO avec l'université nationale Taras Chevtchenko (<http://www.univ.kiev.ua/>) de Kiev (de 2011 à 2012, coordonné par moi-même). Le projet concerne l'estimation du mouvement d'un fluide par méthode minimax et la restauration d'images ("inpainting"). Le domaine d'application est l'océanographie. Les collaborations perdurent depuis la fin de ce projet, même si les circonstances politiques rendent les visites difficiles.
- le laboratoire LOCEAN (<https://www.locean-ipsl.upmc.fr/>), en particulier Julien Brajard, Michel Crépon et Sylvie Thiria. Afin d'intensifier cette collaboration, Julien Bra-

jard est accueilli en délégation dans Clime (de septembre 2014 à septembre 2016), pour étudier l’assimilation d’images dans le modèle d’océan NEMO¹ et analyser l’impact de l’assimilation des structures sous méso-échelles, visibles sur les images satellite. D’autres études concernant l’aggrégation de modèles image sont également en cours de définition.

- la société NUMTECH (<http://www.numtech.fr/>) avec laquelle l’équipe Clime a défini un Inria Innovation Lab². La collaboration avec cette société est, par exemple, à l’origine des travaux sur la prévision immédiate de la pluie à partir d’images de radars au sol. Cette application offre un cadre opérationnel, et temps réel, aux études effectuées sur le mouvement et le suivi d’objets.

La suite de cette introduction générale présente succinctement le contexte global des activités de recherche que j’ai menées, afin de mieux appréhender les différents chapitres du document.

La motivation principale de ce travail est l’étude de la dynamique sous-jacente aux séquences d’images, en particulier les données acquises par satellite. L’approche scientifique repose sur l’utilisation d’un modèle mathématique de la dynamique du système observé par le capteur et sur son couplage avec les images par des méthodes d’assimilation de données. Les méthodes d’assimilation d’images ont émergé dans la communauté scientifique depuis une dizaine d’années [11, 43, 94, 75, 74], afin de permettre l’estimation du mouvement des fluides géophysiques à partir des images. L’impulsion initiale a été donnée par François-Xavier Le Dimet et moi-même dans la préparation d’une action concertée incitative (ACI) appelée Assimage. Dans ce document, le modèle considéré est appelé “Modèle Image”, car il décrit les phénomènes temporels sous-jacents à l’évolution des images. Son élaboration repose soit sur des heuristiques soit sur une simplification de lois physiques (par exemple un modèle shallow-water est utilisé pour caractériser les images acquises par satellite sur l’océan).

La figure 1.1 présente une séquence d’images de température de surface de la mer Noire³ acquise par les radiomètres imageurs de la NOAA. Ces radiomètres ont une large fauchée, environ 2900 km pour AVHRR/3, et une résolution spatiale de 1,1 km au nadir. Les mesures de température de brillance, acquises dans les canaux infrarouges thermiques avec une résolution radiométrique de 0,12°C, permettent de produire les champs de température de la surface de la mer. Les séquences temporelles révèlent alors la dynamique sous-jacente à la formation de ces données. Les anomalies de température, qui peuvent être observées sur ces acquisitions, sont caractéristiques d’événements climatiques particuliers, comme par exemple le phénomène El Nino dans l’océan Pacifique. La localisation des principaux fronts thermiques, tourbillons ou résurgences d’eau froide est une information d’importance pour l’aide à la pêche, la lutte contre les pollutions marines, et la connaissance de la propagation des ondes sonores sous-marines. Modéliser et estimer cette dynamique de surface est un enjeu applicatif fondamental pour les secteurs économiques concernés par ces sujets. Effectuer cette estimation à partir des seules

1. <http://www.nemo-ocean.eu/>

2. <http://www.inria.fr/innovation/inria-pme/labos-communs-inria-pme/inria-innovation-labs>

3. Copyright : Marine Hydrophysical Institute, Sebastopol, www.mhi.nas.gov.ua/eng/

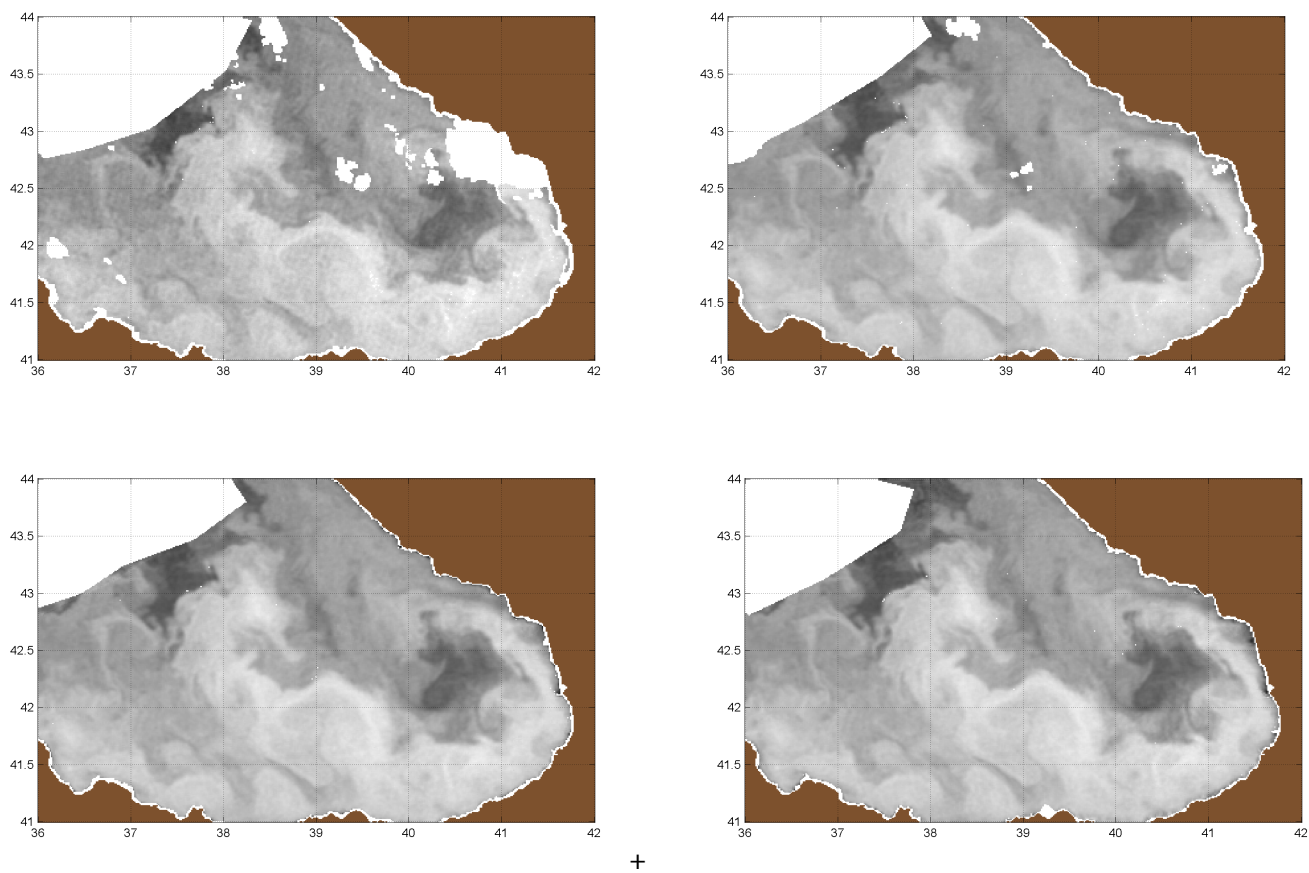


Figure 1.1 – Images de Température de Surface (Sea Surface Temperature, SST) de la mer Noire.

images permet de réaliser une prévision court terme, voire temps réel, à haute résolution spatiale, celle des images.

Étudier la dynamique sous-jacente à une séquence d'images peut se faire au moyen de ce qu'on appelle, en traitement d'images, les méthodes "d'estimation du mouvement". Il s'agit de calculer un champ de vitesse entre deux images consécutives en faisant des hypothèses sur l'évolution de la luminosité entre les deux dates d'acquisition. L'estimation du mouvement est un problème mal posé au sens d'Hadamard [35], puisque l'équation de conservation de la luminosité (ou équation du flot optique), classiquement utilisée en traitement d'image, ne permet pas un calcul unique des deux composantes du vecteur mouvement. Une infinité de solutions vérifient cette équation, et il est nécessaire d'ajouter des informations, objectives ou heuristiques, pour résoudre le système de manière unique. Des contraintes de régularisation du champ de mouvement de type Tikhonov [93] sont fréquemment utilisées dans la littérature [70, 87, 71, 98, 99]. Une large bibliographie est disponible sur le sujet de l'estimation du flot optique et des comparaisons des méthodes de l'état de l'art sur des bases de données de test sont disponibles [1, 7, 19]. Afin de prendre en compte l'information temporelle disponible dans les séquences d'images, des méthodes utilisant l'ensemble des images d'une séquence ont été définies [97, 96], sans toutefois recourir à une modélisation de la dynamique. Une autre approche, discutée dans ce document, est celle du recours à des informations heuristiques et à des connaissances physiques sur l'évolution du champ de mouvement afin de permettre la définition d'un modèle mathématique, appelé Modèle Image (il sera régulièrement noté MI dans ce document). Cette façon de considérer l'observation d'un système par des images présuppose que celui-ci n'est pas aléatoire et qu'il obéit à des lois, partiellement connues. Le Modèle Image inclut généralement l'équation de conservation de la luminosité afin de caractériser l'évolution temporelle des images. Il faut noter que cette équation de conservation est, dans sa forme initiale, non linéaire par rapport à la vitesse $\mathbf{w}$ que l'on souhaite estimer :

$$I(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), t + \Delta t) = I(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

C'est pourquoi elle est généralement utilisée après développement du premier ordre :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.2)$$

D'autres équations peuvent être mieux appropriées, selon la nature physique des images, telles que l'équation de conservation de la masse [14, 100]. Cette dernière équation permet ainsi de caractériser le mouvement des nuages sur les images infrarouges de l'atmosphère.

Le Modèle Image caractérise également la dynamique du système observé au moyen d'une équation d'évolution du champ de mouvement. On peut, par exemple, utiliser l'hypothèse de conservation lagrangienne du mouvement le long de la trajectoire d'un point : $\frac{d\mathbf{w}}{dt} = 0$, équivalente à :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = 0 \quad (1.3)$$

En posant $\mathbf{w} = (u \ v)^T$, où u et v sont les deux composantes du vecteur mouvement, cette

équation se réécrit sous la forme du système d'équations d'évolution de u et v :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

D'autres lois dynamiques, comme les équations shallow water [72, 95], sont également utilisées pour le MI, lorsqu'elles permettent de mieux caractériser la physique sous-jacente au phénomène observé, en particulier dans le cas des images satellite de l'océan (les applications sont majoritairement effectuées sur la mer Noire dans ce document). Ces équations sont obtenues par intégration verticale des équations de Navier-Stokes dans le cas où la vitesse verticale du fluide est faible. Dans le modèle shallow water, la circulation de surface est représentée par le mouvement bidimensionnel et par l'épaisseur h de la couche de mélange. La température de surface T , qui correspond aux acquisitions réalisées par satellite, est linéairement transportée par le champ de mouvement. On obtient ainsi les quatre équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + fv - g' \frac{\partial \eta}{\partial x} + K_w \Delta u \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - fu - g' \frac{\partial \eta}{\partial y} + K_w \Delta v \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\eta)}{\partial x} - \frac{\partial(v\eta)}{\partial y} - h_m \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.9)$$

où :

- η est l'anomalie de surface définie par : $\eta = h - h_m$, avec h_m la valeur moyenne de h ,
- f est le paramètre de Coriolis, qui dépend de la latitude.
- K_w est le paramètre de viscosité, et
- $g' = g(\rho_0 - \rho_1)/\rho_0$ est la gravité réduite. ρ_0 est la densité de référence et ρ_1 est la densité moyenne de la couche de mélange.

Dans ce mémoire, nous utilisons principalement le formalisme de l'assimilation variationnelle de données et nous le déclinons pour résoudre différents problèmes de traitement de séquences d'images. La méthode d'assimilation de données 4D-Var a été définie, en 1986, par François-Xavier Le Dimet et Oliver Talagrand [59], qui ont contribué à son utilisation dans les centres de prévision météorologique opérationnels en France et en Europe. Dans le cas de l'estimation du mouvement à partir d'une séquence d'images, le problème posé est le calcul d'une solution qui soit un bon compromis entre les équations d'évolution du champ de mouvement et des images, incluses dans le Modèle Image, et les observations disponibles sur le système étudié, définies au moyen de la séquence d'images dont on souhaite modéliser la dynamique. Trois composantes fondamentales sont donc à considérer : la définition du Modèle Image, la définition des observations et l'élaboration de la méthode d'assimilation de données.

La suite de ce manuscrit comporte quatre chapitres principaux, qui ont chacun pour objet de synthétiser les travaux de recherche sur un sujet particulier.

Le chapitre 2 présente brièvement l’assimilation variationnelle de données dans le cadre de son utilisation pour le traitement des images. Ce chapitre synthétise plusieurs contributions concernant l’étude de la dynamique des images : le calcul du flot optique [11, 41], l’estimation de l’accélération [13] à partir d’une séquence d’images, la restauration des valeurs de l’image contaminées par du bruit d’acquisition ou occultées par des nuages [40], et l’analyse de la non-linéarité de l’équation de conservation de la luminosité [12].

Le chapitre 3 discute la problématique de réduction d’un modèle et met en valeur l’intérêt de ce type d’approche pour estimer la dynamique sur des domaines complexes. Différentes approches permettant d’effectuer cette réduction sont considérées. Tout d’abord, nous avons utilisé l’Analyse en Composantes Principales [8, 9] sur les images et sur des “snapshots” représentant l’espace mouvement [32]. Dans ce contexte, le traitement de longues séquences d’images a été effectué par une méthode dite de fenêtre glissante, de façon à pouvoir utiliser l’estimation obtenue à partir d’une fenêtre temporelle pour initialiser l’estimation sur la suivante [33, 42]. Les limitations constatées sur cette approche nous ont conduit à rechercher des bases mieux adaptées [78] et à concevoir des méthodes permettant de réaliser des bases spécifiquement dédiées aux domaines d’étude [51, 52, 53].

Le chapitre 4 décrit les travaux effectués sur le suivi d’objets au moyen de méthodes d’assimilation de données [60, 61, 63, 62]. L’accent est mis en particulier sur la nécessité d’utiliser des opérateurs d’observation implicites, afin de permettre l’assimilation d’une information image plus riche que la seule valeur des pixels.

Le chapitre 5 discute ensuite l’utilisation du filtre de Kalman d’ensemble [34], à la place de la méthode 4D-Var, pour estimer la dynamique. Il préfigure ainsi les objectifs de recherche future sur les méthodes d’ensemble.

Étude de la dynamique des images

Visualiser une séquence d'images permet aux spécialistes, dans un bon nombre de domaines scientifiques, de comprendre et d'analyser les phénomènes sous-jacents. C'est le cas pour les acquisitions des satellites météorologiques : observer les images, et surtout leur évolution temporelle, permet d'appréhender le développement et le déplacement de phénomènes tels que tornades et ouragans. C'est le cas en imagerie médicale, où les échographies, par exemple, permettent aux médecins de diagnostiquer les pathologies cardiaques. C'est encore le cas en océanographie, où l'imagerie permet de suivre le déplacement de nappes de polluants et d'anticiper leur impact sur le littoral. C'est enfin le cas pour l'agriculture, où les images, acquises par des drones, permettent à l'exploitant de décider des actions d'arrosage ou de sulfatage et de prédire les rendements. Mais les phénomènes observés par imagerie ont généralement été étudiés depuis longtemps par les scientifiques et les lois physiques qui les régissent sont connues. Ces équations mathématiques fournissent une composante supplémentaire pour la compréhension du système, même si elles ne modélisent pas l'ensemble des phénomènes. L'étude de tels systèmes physiques dispose donc de sources d'information complémentaires : les équations mathématiques, traduites sous forme de modèle numérique, les observations, des séquences d'images dans le contexte de ce manuscrit (mais il existe de nombreux autres types d'observations in situ), et les connaissances, sous forme de statistiques et/ou d'heuristiques, sur le domaine étudié.

Ce chapitre montre, dans la section 2.2, comment utiliser les lois physiques, ou les heuristiques, sur la dynamique sous-jacente à une séquence d'images pour résoudre le problème mal posé de l'estimation du mouvement au moyen d'une méthode d'assimilation de données. La méthode décrite est celle de l'assimilation de données variationnelle 4D-Var, qui permet d'utiliser l'ensemble des observations disponibles sur un intervalle temporel pour corriger la condition initiale. À partir de ce point de départ seront discutées les différentes questions qui apparaissent lors de la mise en place d'un système d'assimilation de données dans le contexte des images : choix des lois d'évolution des grandeurs étudiées dans la section 2.3, définition de l'opérateur d'observation dans la section 2.4, initialisation du processus d'estimation par la définition de l'ébauche, définition des erreurs d'ébauche et d'observation, non validité de

l'heuristique lagrangienne dans la section 2.5. Les applications illustrées dans ce chapitre sont : l'estimation du mouvement et l'estimation de l'accélération. La section suivante, section 2.1, présente tout d'abord le formalisme mathématique et les différentes notations, qui sont utilisées dans l'ensemble du manuscrit.

2.1 Contexte et notations

Soit Ω un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$, sur lequel les images sont acquises. La frontière de ce domaine est notée $\partial\Omega$. L'intervalle temporel $[0, T]$ représente l'intervalle d'acquisition des images et $A = \Omega \times [0, T]$ est le domaine d'étude spatio-temporel.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_H^2$ dans un espace de Hilbert H .

$L_2(\Omega)$ est l'espace de fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} f^2(x, y) dx dy < +\infty$$

Soient f et g deux fonctions de $L_2(\Omega)$, on a ;

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x, y) g(x, y) dx dy$$

$H^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec la norme :

$$\|f\|_{H^m}^2 = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} f\|_{L_2}^2$$

sachant que $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ sont les dérivées partielles par rapport à x et y .

$L_2(0, T, H)$ est l'espace des fonctions $f : [0, T] \rightarrow H$, telles que :

$$\|f\|^2 = \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt < +\infty$$

Les images, les deux composantes u et v du champ de mouvement $\mathbf{w}$ et autres fonctions étudiées dans ce document sont définies sur $L_2(0, T, H^1(\Omega))$.

Un pixel de Ω est noté $\mathbf{x} = (x \ y)^T$ et le champ de mouvement s'écrit : $\mathbf{w} = (u \ v)^T$.

Dans le manuscrit, nous notons u la fonction de $L_2(t_0, T, H^1(\Omega))$, $u(t)$ la fonction de $H^1(\Omega)$ et $u(\mathbf{x}, t)$ la valeur en un point $\mathbf{x}$ de Ω . La même convention vaut pour toutes les grandeurs spatio-temporelles utilisées.

Le système étudié est caractérisé par un vecteur d'état $\mathbf{X}$ et par les lois d'évolution temporelle des composantes de $\mathbf{X}$. Le vecteur d'état $\mathbf{X}$ est une fonction qui dépend de la position et du temps. Il évolue temporellement selon l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (2.1)$$

$\mathbf{M}$ est appelé modèle d'évolution. Pour intégrer l'équation (2.1), il faut disposer d'une condition initiale sur $\mathbf{X}$, notée $\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0)$. On connaît généralement une valeur approchée de cette condition initiale, appelée ébauche et notée $\mathbf{X}_b(\mathbf{x})$. Le résultat recherché lors de l'assimilation de données vérifie :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}_b(\mathbf{x}) + \varepsilon_B(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

$\varepsilon_B(\mathbf{x})$ est l'erreur d'ébauche, qui représente l'écart entre la vérité et la valeur d'ébauche. Cette erreur est supposée gaussienne, de moyenne nulle, et caractérisée par sa matrice de covariance $\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

Dans le contexte de ce document, le système étudié est observé par imagerie. L'observation, notée $\mathbf{Y}$, est calculée à partir des acquisitions images. Il n'y a a priori aucune raison pour que $\mathbf{Y}$ soit systématiquement égale à la séquence d'images. Elle peut, par exemple, être un vecteur calculé à partir de l'image, comme c'est le cas si on assimile le gradient spatio-temporel de la fonction d'intensité lumineuse. $\mathbf{Y}$ dépend également de $\mathbf{x}$ et t . Puisque $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ est une observation du système caractérisé par $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, il faut établir la relation entre les deux grandeurs afin de permettre leur utilisation conjointe. Dans la littérature de l'assimilation de données, $\mathbf{Y}$ est souvent une observation de certaines des composantes du vecteur d'état et l'équation d'observation s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{X})(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_R(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

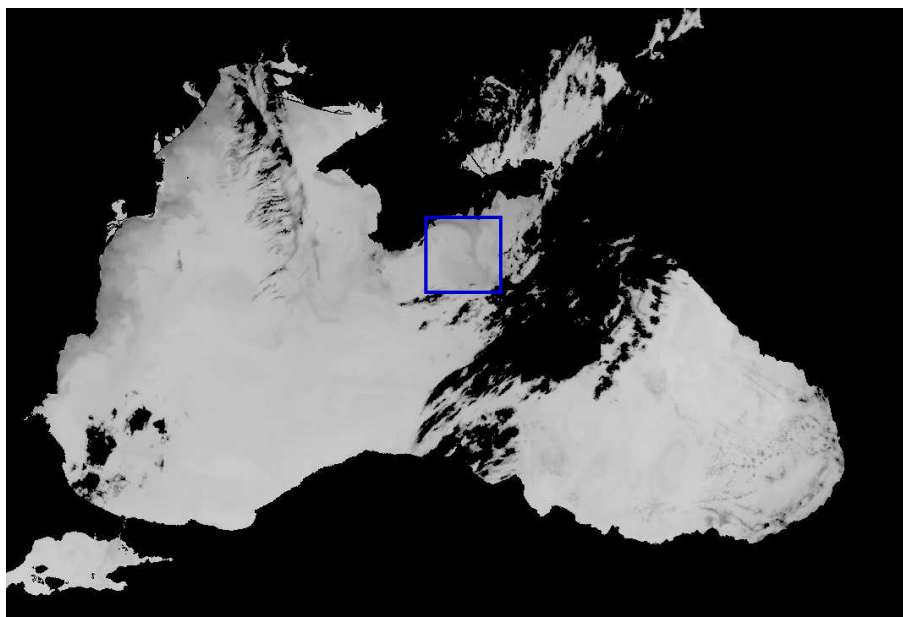
où $\mathbf{H}$ est l'opérateur de projection permettant de passer de l'espace du vecteur d'état à celui des observations. Dans le cas général, et en particulier si l'observation $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ est un vecteur calculé à partir des acquisitions image, il est nécessaire d'avoir recours à un opérateur implicite liant $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_R(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

Dans les deux cas (équations 2.3 et 2.4), $\mathbf{H}$ est appelé opérateur d'observation et $\varepsilon_R(\mathbf{x}, t)$ est l'erreur d'observation, qui mesure à la fois le bruit d'acquisition des observations et l'erreur sur la connaissance du vecteur d'état $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$. Cette erreur d'observation est supposée gaussienne, de moyenne nulle, et caractérisée par sa matrice de covariance $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$. Il est important de garder à l'esprit que les données étudiées dans ce document sont des images satellite fortement bruitées telles que le montre la figure 2.1 (extraite de la publication [10]), qui illustre le propos en visualisant des images satellite acquises sur la mer Noire. Dans ce cas, le bruit est à la fois un bruit d'acquisition, lié au capteur lui-même, et une occultation par les nuages. Cette information sur la qualité de l'acquisition est intégrée dans les valeurs données à la matrice $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, comme nous l'avons discuté, de façon détaillée, dans l'article [11].

Le problème sous-jacent à l'assimilation de données est de trouver une solution $\mathbf{X}$, qui satisfasse au mieux les équations (2.1), (2.2) et (2.4). C'est ce qui est discuté dans la section 2.2 pour le cas particulier de la méthode d'assimilation variationnelle 4D-Var.

Pour finir cette section de définition du contexte mathématique, il est intéressant d'illustrer brièvement le système d'équations (2.1), (2.2) et (2.4) sur le problème de l'estimation du flot optique à partir d'une séquence d'images.



(a) Image de température de surface (SST) de la mer Noire. Définition d'une région d'intérêt, symbolisée par un carré bleu.



(b) Trois acquisitions consécutives de la région d'intérêt. Occultation par les nuages sur le troisième plan.

Figure 2.1 – Illustration du problème d'occultation par les nuages.

Considérons donc que le vecteur d'état soit équivalent au vecteur de vitesse apparente $\mathbf{w}$. $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ s'écrit $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))^T$ où $u(\mathbf{x}, t)$ et $v(\mathbf{x}, t)$ sont les deux composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse. Considérons que ce vecteur d'état obéisse à la loi de conservation lagrangienne, c'est-à-dire que la vitesse est constante sur la trajectoire d'un point :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = 0 \quad (2.6)$$

où ∇ représente l'opérateur de gradient spatial bidimensionnel. Le modèle d'évolution (2.6) se réécrit sous forme scalaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

L'équation d'observation, qui relie les images au vecteur d'état, est choisie identique à l'équation du flot optique sous sa forme linéarisée :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla I = 0. \quad (2.9)$$

ou encore :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

Si aucune information n'est disponible sur le champ de vitesse initial, l'ébauche $\mathbf{w}_b(\mathbf{x})$ est choisie nulle. Aucun terme de rappel à cette valeur ne sera appliqué lors du processus d'optimisation utilisé pour déterminer la solution. L'estimation du flot optique ainsi modélisé est effectuée sur des images satellite de la mer Noire. La figure 2.2 présente quatre observations consécutives et le flot optique obtenu à partir de ces données.

2.2 Assimilation variationnelle de données 4D-Var

L'assimilation de données, dans son sens général, désigne les méthodes qui permettent de corriger, à l'aide d'observations, l'état tel que calculé au moyen d'un modèle numérique. Cette correction fournit ce qu'on appelle une analyse, qui est utilisée pour réaliser des prévisions dans le futur. Les équations mathématiques qui formalisent le processus d'assimilation de données ont été définies dans la section 2.1. Dans le contexte de l'assimilation variationnelle, ces équations permettent de définir une fonction de coût, dont la minimisation fournit la solution recherchée. L'algorithme d'assimilation 4D-Var, auquel nous nous intéressons, assimile l'ensemble des observations acquises sur l'intervalle temporel $[0, T]$ afin de corriger l'état initial $\mathbf{X}(0)$. Écrivons la fonction de coût, contrôlée par l'erreur d'ébauche ε_B :

$$J(\varepsilon_B) = \int_{\Omega} (\varepsilon_B(\mathbf{x}))^T B^{-1}(\mathbf{x}) (\varepsilon_B(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} (\varepsilon_O(\mathbf{x}, t))^T R^{-1}(\mathbf{x}, t) (\varepsilon_O(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} dt \quad (2.11)$$

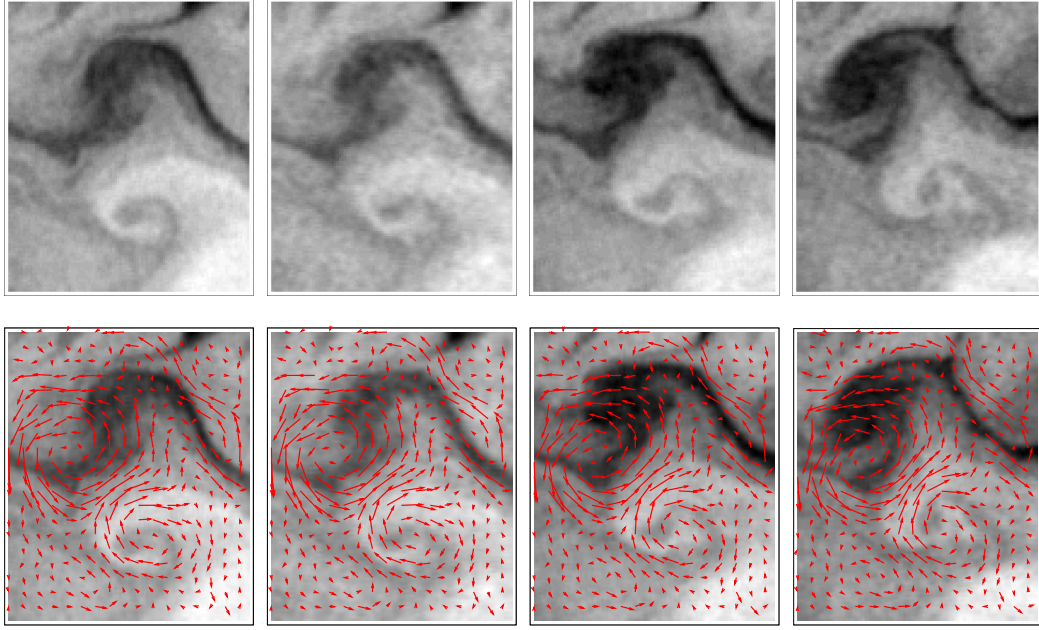


Figure 2.2 – Quatre images de la mer Noire et l'estimation du mouvement.

ou encore en utilisant la définition du produit scalaire :

$$J(\varepsilon_B) = \langle \varepsilon_B, B^{-1} \varepsilon_B \rangle + \int_0^T \langle \varepsilon_O(t), R^{-1}(t) \varepsilon_O(t) \rangle dt \quad (2.12)$$

Cette fonction s'écrit également en remplaçant $\varepsilon_B(\mathbf{x})$ et $\varepsilon_O(\mathbf{x}, t)$ par leurs équivalents dans les équations (2.2) et (2.4) :

$$J(\mathbf{X}(0)) = \langle \mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b, B^{-1}(\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b) \rangle + \int_0^T \langle \mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(t), R^{-1} \mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(t) \rangle dt \quad (2.13)$$

Cette seconde écriture permet de mieux visualiser que la solution $\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0)$ recherchée doit rester proche de la valeur d'ébauche $\mathbf{X}_b(\mathbf{x})$ et doit réaliser un compromis avec les observations $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$.

Pour minimiser la fonction $J(\varepsilon_B)$, une méthode d'optimisation de type Quasi-Newton est utilisée [20, 103]. Il faut pour cela calculer le gradient de la fonction J , noté ∇J . Soit $\lambda(t)$ la variable adjointe, calculée au moyen d'une intégration rétrograde par les deux équations suivantes :

$$\lambda(T) = 0 \quad (2.14a)$$

$$-\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} \right)^* \lambda(t) = \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}} \right)^* R^{-1} \mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(t) \quad (2.14b)$$

avec $\left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} \right)^*$ le modèle adjoint de $\mathbb{M}$ et $\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}} \right)^*$ celui de $\mathbb{H}$. Le modèle adjoint vérifie la propriété suivante. Pour tout couple (η, λ) , on a :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} \eta, \lambda \right\rangle = \left\langle \eta, \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} \right)^* \lambda \right\rangle \quad (2.15)$$

Le vecteur d'état $\mathbf{X}$ et la fonction J (équation 2.12) dépendent de ε_B . Soient $\delta\mathbf{X}$ et δJ les incréments de $\mathbf{X}$ et J obtenus si la variable ε_B est incrémentée d'une valeur $\delta\varepsilon_B$. On a tout d'abord :

$$\delta\mathbf{X}(0) = \delta\varepsilon_B \quad (2.16)$$

En utilisant la définition de δJ dans l'équation (2.13), on obtient :

$$\frac{\delta J}{2} = \langle \delta\varepsilon_B, B^{-1} \varepsilon_B \rangle + \int_t \langle \delta\mathbf{X}(t), \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* R^{-1} \mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(t) \rangle \quad (2.17)$$

L'équation d'évolution (2.1) de $\mathbf{X}$ fournit :

$$\frac{\partial \delta\mathbf{X}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} \delta\mathbf{X}(t) = 0 \quad (2.18)$$

Après multiplication par $\lambda(t)$ et intégration en espace et en temps, l'équation (2.18) conduit à l'égalité suivante :

$$\int_t \left\langle \frac{\partial \delta\mathbf{X}(t)}{\partial t}, \lambda(t) \right\rangle + \int_t \left\langle \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}} \delta\mathbf{X}(t), \lambda(t) \right\rangle = 0 \quad (2.19)$$

Une intégration par parties est appliquée sur le premier terme et la propriété du modèle adjoint (équation (2.15)) est utilisée dans le deuxième pour obtenir :

$$-\int_t \left\langle \delta\mathbf{X}(t), \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \right\rangle + \langle \delta\mathbf{X}(T), \lambda(T) \rangle - \langle \delta\varepsilon_B, \lambda(0) \rangle + \int_t \left\langle \delta\mathbf{X}(t), \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* \lambda(t) \right\rangle = 0 \quad (2.20)$$

L'équation (2.14a) montre que $\langle \delta\mathbf{X}(T), \lambda(T) \rangle$ a une valeur nulle.

L'équation (2.14b) fournit, après multiplication par $\delta\mathbf{X}(t)$ et intégration en espace et en temps :

$$-\langle \delta\mathbf{X}(t), \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \rangle + \langle \delta\mathbf{X}(t), \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* \lambda(t) \rangle = \langle \delta\mathbf{X}(t), \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* R^{-1} \mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(t) \rangle \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) permet de réécrire l'équation (2.20) sous la forme suivante :

$$\int_t \langle \delta\mathbf{X}(t), \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* R^{-1} \mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(t) \rangle = \langle \delta\varepsilon_B, \lambda(0) \rangle \quad (2.22)$$

En utilisant les équations (2.22) et (2.17), nous obtenons :

$$\frac{\delta J}{2} = \langle \delta\varepsilon_B, B^{-1} \varepsilon_B \rangle + \langle \delta\varepsilon_B, \lambda(0) \rangle \quad (2.23)$$

Le gradient de J vaut donc :

$$\nabla J_{\varepsilon_B}(\varepsilon_B) = 2(B^{-1} \varepsilon_B + \lambda(0)) \quad (2.24)$$

À chaque itération du processus, l'intégration en temps de $\mathbf{X}$ est effectuée selon l'équation (2.1). Elle permet d'obtenir la valeur de J . Puis une intégration rétrograde de λ est effectuée au moyen des équations (2.14a) et (2.14b), afin d'obtenir la valeur de $\lambda(0)$ et de calculer ∇J par l'équation (2.24).

2.3 Lois d'évolution

Dans le contexte de ce document, on souhaite caractériser la dynamique d'un système à partir d'acquisitions images. Le modèle mathématique sur lequel repose cette caractérisation est basé sur les lois d'évolution temporelle des différentes grandeurs contenues dans le vecteur d'état. Le modèle numérique, quant à lui, repose sur un schéma de discrétisation associé à ces lois d'évolution.

Dans le cas du flot optique, nous avons considéré l'évolution du champ de mouvement selon une hypothèse de conservation lagrangienne (équation (2.5)) et le transport de l'image par le mouvement (équation (2.9)). D'autres heuristiques sur le mouvement ont été utilisées dans nos travaux, telles que les équations dites shallow water [50]. Ces équations permettent de calculer non seulement le mouvement, mais également les forces de gravité et de Coriolis sous-jacentes à l'évolution des images océanographiques. La section 2.5 discute comment ces forces peuvent être estimées en ajoutant un terme d'accélération à l'équation (2.5). Des équations d'évolution pour l'estimation de champs de mouvement particuliers, comme le mouvement à divergence nulle (voir [41]), modélisé par sa vorticité, ont été considérées afin d'assurer les propriétés requises sur les résultats d'estimation. D'autres hypothèses d'évolution des images ont également été étudiées, comme l'hypothèse de conservation de la masse, qui permet une meilleure modélisation de l'information des images dans le cas du suivi des nuages sur les images satellite météorologiques [14].

Enfin, il faut signaler qu'un effort important a été consacré pour définir des espaces réduits pour représenter le mouvement et les images, afin d'obtenir, au moyen de la projection de Galerkin, des modèles réduits (voir chapitre 3)    partir des équations d'évolution précédemment listées.

2.4 Opérateur d'observation

L'assimilation de données, telle que classiquement utilisée en météorologie et en océanographie, concerne l'observation de certaines des variables du vecteur d'état $\mathbf{X}$. Dans notre contexte, la situation est différente, puisque nous disposons d'acquisitions images, notées I_k^O , pour $k = 1, \dots, N^O$, qui n'ont pas vocation à faire partie des variables d'état du modèle. Afin d'améliorer la lisibilité, la fonction, continue en temps, associée aux observations image est notée $I^O(t)$. Les valeurs en un point $\mathbf{x}$ de l'espace continu ou discret sont notées : $I^O(\mathbf{x}, t)$ en version continue et $I_k^O(\mathbf{x})$ en version discrète. Nous souhaitons estimer des grandeurs, telles que le mouvement, à partir de ces images. Pour cela nous définissons un modèle, le Modèle Image, qui inclut les lois d'évolution temporelle de ces grandeurs. Plusieurs possibilités d'utilisation des images sont donc à considérer :

- Dans le premier cas, le vecteur d'état $\mathbf{X}$ contient un traceur I défini sur le domaine d'étude spatio-temporel A . Si le problème étudié est l'estimation du mouvement, le vecteur d'état $\mathbf{X}$ sera égal à $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t) \ v(\mathbf{x}, t) \ I(\mathbf{x}, t))^T$, dans le cas de l'heuristique de conservation lagrangienne ou à $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t) \ v(\mathbf{x}, t) \ h(\mathbf{x}, t) \ I(\mathbf{x}, t))^T$, dans le cas des équations shallow water. L'équation d'observation est alors écrite sous forme linéaire,

comme dans l'équation (2.3). L'opérateur d'observation $\mathbb{H}$ est défini comme la projection sur la composante I et son adjoint est obtenu par simple transposition :

- $\mathbb{H}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) = I(\mathbf{x}, t)$
- $(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathbf{X}})^* = \mathbb{H}^\top$
- Dans le deuxième cas, on souhaite assimiler les images en les couplant directement aux variables étudiées, sans inclure de traceur dans le vecteur d'état. Considérons par exemple que l'on souhaite résoudre le problème de l'estimation du mouvement en utilisant l'équation du transport de l'image dans sa forme non linéaire :

$$I^O(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), t + \Delta t) = I^O(\mathbf{x}, t) \quad (2.25)$$

On peut choisir le vecteur d'état du modèle égal à $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t) \ v(\mathbf{x}, t))^\top$ et utiliser l'équation de transport (2.25) comme équation d'observation. L'opérateur $\mathbb{H}$ est alors un opérateur implicite : l'assimilation des images n'est plus faite par comparaison directe avec un traceur inclus dans le vecteur d'état. Ce type d'opérateur d'observation est nécessaire dès que l'information image n'est pas limitée à la seule valeur des pixels, mais caractérise des formes complexes, structurées en espace ou en temps.

2.5 Prise en compte de l'accélération

Depuis le début de ce document, nous discutons le problème de l'estimation du mouvement pour un système partiellement observé par des acquisitions images. Nous avons pour cela effectué des hypothèses sur la dynamique sous-jacente, en particulier nous avons utilisé l'hypothèse de conservation lagrangienne de la vitesse sur la trajectoire d'un point. Dans le cas général, la dérivée totale du mouvement n'est pas nulle et correspond à l'accélération. Cette section décrit donc la prise en compte de l'accélération dans l'estimation du mouvement. La question de l'estimation de l'accélération est naturellement étudiée dans la vision par ordinateur. On peut, par exemple, considérer les travaux de Arnspang [5], Hue [48], et Stankovic [88]. La principale limitation de ces approches est qu'elles estiment une accélération constante. Notre étude repose donc à nouveau sur le concept de l'assimilation d'images, afin de permettre l'estimation d'une accélération variable en espace et en temps.

Les notations et équations sont tout d'abord actualisées pour cette nouvelle problématique dans le paragraphe suivant.

Le vecteur d'état $\mathbf{X}$ est défini par les deux composantes u and v du vecteur mouvement $\mathbf{w}$ et par un traceur image I , muni de propriétés similaires aux observations images $I_k^O(\mathbf{x})$ disponibles pour l'étude : $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t) \ v(\mathbf{x}, t) \ I(\mathbf{x}, t))^\top$. Dans les expériences d'assimilation, la fonction $I(\mathbf{x}, t)$ est initialisée avec la première acquisition image $I_1^O(\mathbf{x})$ et transportée par le champ de mouvement $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$. Si celui-ci est correctement estimé, alors le traceur I , obtenu en sortie du processus d'assimilation, est presque identique aux images observées I_k^O aux dates d'acquisition. Leur différence est liée au bruit d'acquisition des images, aux erreurs de discrétisation introduites par les schémas numériques utilisés pour l'intégration temporelle et

à l'inexactitude des lois d'évolution. L'assimilation de données doit donc estimer au mieux le mouvement et l'accélération afin de minimiser cette différence autant que faire se peut.

L'accélération se définit de la façon suivante :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

Le traceur I satisfait l'équation du transport :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla I = 0 \quad (2.27)$$

Pour simplifier l'écriture, le même symbole $\mathbf{a}$ est utilisé pour représenter l'accélération et son équivalent dans l'espace du vecteur d'état : $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation (2.28) résume ainsi l'évolution temporelle du vecteur d'état $\mathbf{X}$ par le modèle image $\mathbb{M}$:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = \mathbf{a} \quad (2.28)$$

Dans ce contexte, l'opérateur d'observation $\mathbb{H}$ projette le vecteur d'état sur l'espace image, $\mathbb{H}(\mathbf{X}) = I$, et l'équation d'observation s'écrit :

$$I^O(\mathbf{x}, t) = I(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_R(\mathbf{x}, t) \quad (2.29)$$

Lors de l'estimation du mouvement et de l'accélération par assimilation de données, l'équation (2.28) est intégrée en temps à partir de la valeur d'ébauche $\mathbf{X}_b$. Le résultat final est différent de $\mathbf{X}_b$ puisque le processus d'assimilation estime le mouvement et l'accélération par la prise en compte des observations :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}_b(\mathbf{x}) + \varepsilon_B(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

Les variables ε_R and ε_B sont supposées indépendantes, non biaisées, gaussiennes et caractérisées par leurs matrices de covariance respectives $R(\mathbf{x}, t)$ et $B(\mathbf{x})$.

Pour estimer le mouvement $\mathbf{w}$ et l'accélération $\mathbf{a}$ à partir des acquisitions images et des équations (2.28), (2.29) et (2.30), les variables $\varepsilon_R(\mathbf{x}, t)$ (ou $I^O(\mathbf{x}, t) - I(\mathbf{x}, t)$) et $\varepsilon_B(\mathbf{x})$ (ou $\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{X}_b(\mathbf{x})$) sont minimisées. La condition d'unicité est obtenue en recherchant la solution dans un sous-espace pertinent de l'espace d'état, au moyen de contraintes sur le gradient du mouvement et de l'accélération. Une fonction de coût est définie, puis minimisée, qui dépend simultanément de $\mathbf{X}(0)$ et de $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{X}(0), \mathbf{a}) = & \langle \mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b, B^{-1}(\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b) \rangle + \int_0^T \langle I^O(t) - I(t), R^{-1}(I^O(t) - I(t)) \rangle dt \\ & + \alpha \|\nabla \mathbf{w}(0)\|^2 + \int_0^T \gamma \|\nabla \mathbf{a}(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

Le premier terme de cette fonction provient de l'équation (2.30) et le second de (2.29). Les deux derniers termes imposent la régularité spatiale du champ de mouvement initial $\mathbf{w}(0)$ et de l'accélération $\mathbf{a}(t)$.

Le gradient de J , noté ∇J , est à nouveau obtenu par un calcul de variations [65]. Ses deux composantes sont :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{X}(0)}(\mathbf{X}(0), \mathbf{a}) = 2(B^{-1}(\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b) + \lambda(0) - \alpha \nabla^2 \mathbf{w}(0)) \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}(t)}(\mathbf{X}(0), \mathbf{a}) = 2(\lambda(t) - \gamma \nabla^2 \mathbf{a}(t)) \quad (2.32b)$$

où $\lambda(t)$ est la variable adjointe calculée par intégration rétrograde selon les équations :

$$\lambda(T) = 0 \quad (2.33a)$$

$$-\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}}\right)^* \lambda(t) = -\mathbb{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I}^O(t) - \mathbf{I}(t)) \quad (2.33b)$$

2.6 Implémentation numérique

Cette section a pour objet de résumer les principales informations nécessaires à la réalisation des expériences présentées dans ce document.

L'implémentation de la méthode présentée dans la section 2.5 est obtenue au moyen d'un modèle numérique représentant la discrétisation des équations (2.26) et (2.27). La discrétisation temporelle est effectuée par un schéma d'Euler ou un schéma Runge Kutta d'ordre 4. Les termes d'advection linéaires dans ces équations sont discrétisés en espace selon un schéma upwind d'ordre un, comme décrit par [49]. Les termes d'advection non linéaires sont tout d'abord réécrits sous forme conservative, avant d'être approximés par un schéma de Godunov d'ordre un [64].

L'intégration temporelle backward de la variable adjointe λ fait intervenir l'opérateur adjoint $\left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}}\right)^*$ (voir l'équation (2.33b)). La version discrète de cet adjoint est obtenue par le logiciel de différentiation automatique Tapenade [37, 38]¹ à partir de la version numérique du modèle $\mathcal{M}$. Il faut signaler toute l'importance et l'intérêt de disposer de Tapenade pour l'obtention des modèles adjoints. La hotline réalisée par l'équipe Inria Tropics permet également de résoudre de nombreux problèmes d'implémentation. Des informations plus complètes sur la différentiation automatique et sur les outils sont disponibles sur le portail internet de la communauté [2].

Les expériences d'assimilation de données sont effectuées en utilisant les paramétrisations suivantes :

- $\mathbf{X}_b = (0 \ 0 \ I_1^O)^T$. L'ébauche du champ de mouvement est nul, dans les cas où nous ne disposons pas d'information a priori sur sa valeur. Celui de la fonction image est pris égal à la première acquisition I_1^O .
- Le terme de rappel à l'ébauche $\langle \mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b, B^{-1}(\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_b) \rangle$, qui apparaît dans la fonction de coût définie par l'équation (2.31), se limite à $\langle \mathbf{I}(0) - I_1^O, B^{-1}(\mathbf{I}(0) - I_1^O) \rangle$, puisque le mouvement estimé à la date 0 n'a pas de raison de rester proche de la valeur nulle.

1. www-tapenade.inria.fr:800/tapenade/index.jsp

- Le terme de variance $B(\mathbf{x})$ concerne l'acquisition image I_1^O . Il est donc choisi égal à la variance du bruit d'acquisition du capteur.
- La même règle est appliquée pour la variance $R(\mathbf{x}, t)$. Toutefois, afin de ne pas prendre en compte certains pixels lors du processus d'assimilation, par exemple les pixels occultés par les nuages, nous leur affectons une valeur importante de variance : $R(\mathbf{x}, t) = 10^8$. De cette façon, leur contribution dans la fonction de coût (2.31) est infinitésimale. Ce point est rediscuté dans les illustrations fournies dans la section 2.7.
- Les paramètres α and γ , qui apparaissent dans l'équation (2.31), sont choisis empiriquement, de façon à ce que les termes qu'ils pondèrent aient un ordre de grandeur équivalent au terme d'ébauche dans la fonction de coût. Ceci est nécessaire pour qu'ils aient un effet significatif dans l'obtention du résultat.

Dans un grand nombre d'expériences, afin de mieux contraindre le résultat obtenu sur le vecteur d'état à être proche des acquisitions images, la fonction image I est réinitialisée à l'observation image correspondante, à chaque date d'acquisition, lors de l'intégration temporelle du modèle. Conjointement, la composante image de la variable adjointe λ est mise à zéro, lors de l'intégration rétrograde.

Afin de permettre l'étude d'intervalles temporels de longue durée, une approche par fenêtres glissantes a été mise au point [33, 42]. L'intervalle étudié est ainsi partagé en sous-fenêtres de quelques acquisitions images et la valeur donnée au mouvement, au début de chaque sous-fenêtre, est le résultat obtenu lors de l'analyse de la sous-fenêtre précédente. Cette modification permet de réduire le nombre d'itérations nécessaire et donc le temps de calcul du processus global.

2.7 Estimation conjointe du mouvement et de l'accélération

Une expérience synthétique est tout d'abord effectuée en utilisant une simulation réalisée par le modèle shallow water. Soit $\mathbf{w}$ le mouvement 2D de composantes u et v . Soit h l'épaisseur de la couche de mélange et $\eta = h - h_m$, l'écart à la moyenne h_m . Le Modèle Image, qui inclut l'équation de transport de la fonction image, s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = +fv - g' \frac{\partial \eta}{\partial x} + K_w \Delta u \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g' \frac{\partial \eta}{\partial y} + K_w \Delta v \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (u\eta)}{\partial x} - \frac{\partial (v\eta)}{\partial y} = -h_m \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + u \frac{\partial I}{\partial x} + v \frac{\partial I}{\partial y} = 0 \quad (2.37)$$

où f est le paramètre de Coriolis, K_w le coefficient de viscosité, $g' = g(\rho_0 - \rho_1)/\rho_0$ la gravité réduite. ρ_0 correspond à la densité de référence et ρ_1 à celle de la couche de mélange.

Cette simulation permet non seulement d'obtenir les observations images, utilisées pour estimer, par assimilation, le mouvement, l'accélération et les forces de gravité et de Coriolis, mais

aussi d'obtenir la vérité terrain sur ces différentes grandeurs. Ce type d'expérience est appelée expérience jumelle et permet en première approche de valider quantitativement les méthodes. La figure 2.3 montre, en représentation couleur, le résultat de l'estimation de la force de Coriolis et la comparaison avec la vérité terrain.

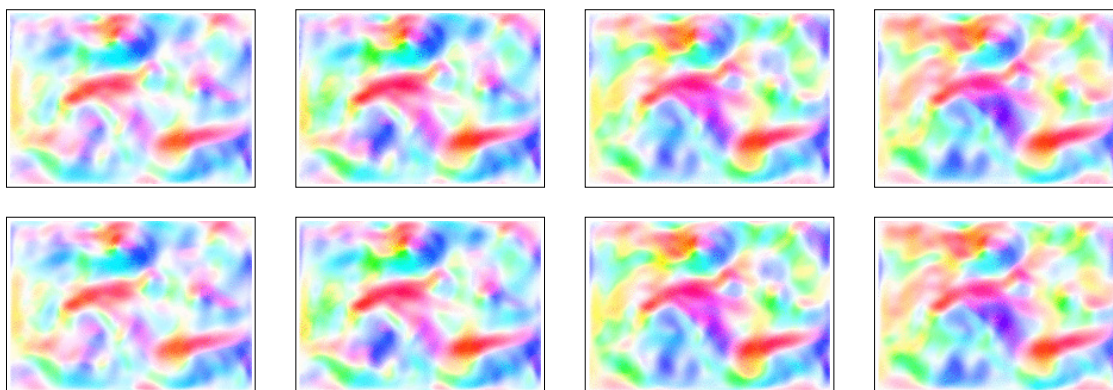


Figure 2.3 – Force de coriolis estimée et vérité terrain, aux dates d'observation.

La méthode a ensuite été testée sur des données réelles et en particulier des vidéos de trafic routier. Les résultats de ces expériences sont présentées dans la suite de cette section.

La première séquence est la séquence *inter* de la base de données [47]. Elle est illustrée sur la figure 2.4. Un cadre rouge permet de caractériser une voiture qui fait demi-tour au carrefour. Les résultats de l'estimation du mouvement sont visualisés sur la figure 2.5. L'accélération est visualisée sur la figure 2.6, où figure à nouveau le cadre rouge, pour une meilleure compréhension. La norme de l'accélération est importante jusqu'au deuxième plan image, car les véhicules accélèrent au feu. Ensuite les valeurs d'accélération décroissent. La double représentation vectorielle et colorée permet de juger de la qualité des orientations calculées.

Il n'existe pas de vérité terrain concernant cette séquence. L'évaluation de la méthode ne peut donc se faire que par comparaison avec l'état de l'art. Nous avons choisi de comparer avec la méthode de Sun *et al.* [89], dont les résultats sont visibles sur la figure 2.5. Nous avons ensuite utilisé le suivi de points caractéristiques pour évaluer quantitativement l'approche. En effet, si la vitesse et l'accélération sont correctement estimées, leurs valeurs doivent permettre de calculer correctement la trajectoire d'un point caractéristique à partir de sa position initiale. Ce type d'évaluation est assez sévère, puisqu'il conduit à sommer les erreurs sur l'intervalle d'étude. La figure 2.7 présente la trajectoire (visualisée par une courbe pointillée) et la position courante (visualisée par un cercle) de chacun des cinq points caractéristiques choisis (notés de *a* à *e* sur l'image en haut à gauche). La couleur rouge est affectée à notre méthode et le bleu à celle de Sun. Chaque point caractéristique est situé sur l'avant d'un des véhicules. Les résultats démontrent l'intérêt de l'approche. Le modèle de Sun ne peut pas, par exemple, suivre les points *c* et *e* alors que notre méthode le permet.

La seconde illustration porte sur la séquence *dt_passat03* de la même base de données [47]. Une approche par fenêtre glissante est utilisée afin de réduire les temps de calcul et de per-



Figure 2.4 – Images 1, 11, 21 et 31 de la vidéo inter (de haut en bas et de gauche à droite).

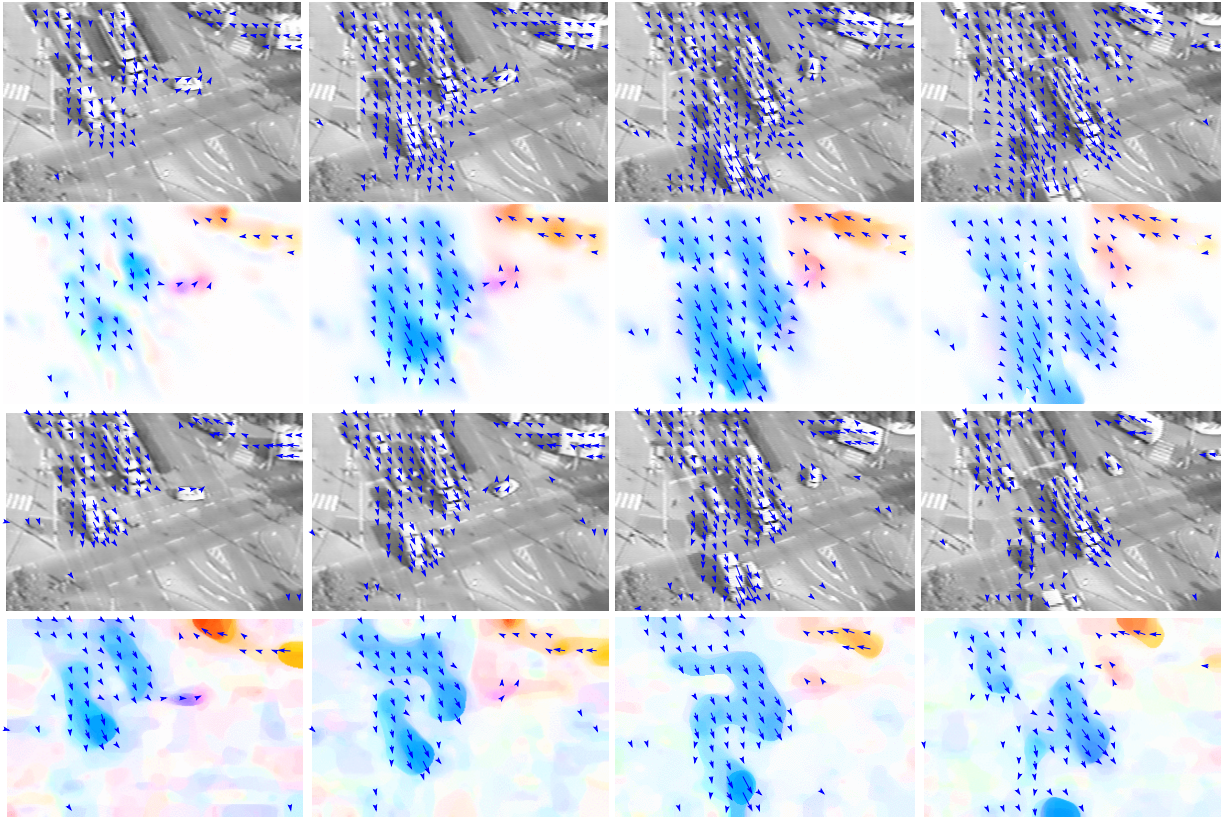


Figure 2.5 – Résultats aux dates d’acquisition des images 1, 11, 21 et 31. De haut en bas : le résultat de notre méthode, en représentation vectorielle superposée à l’image puis à la représentation colorée. Idem pour la méthode de Sun.

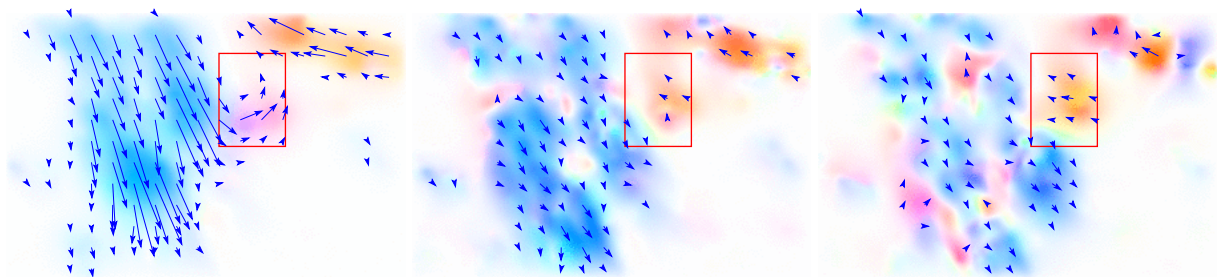


Figure 2.6 – Accélération $\mathbf{a}$ aux dates d’acquisition des images 1, 11 et 21.

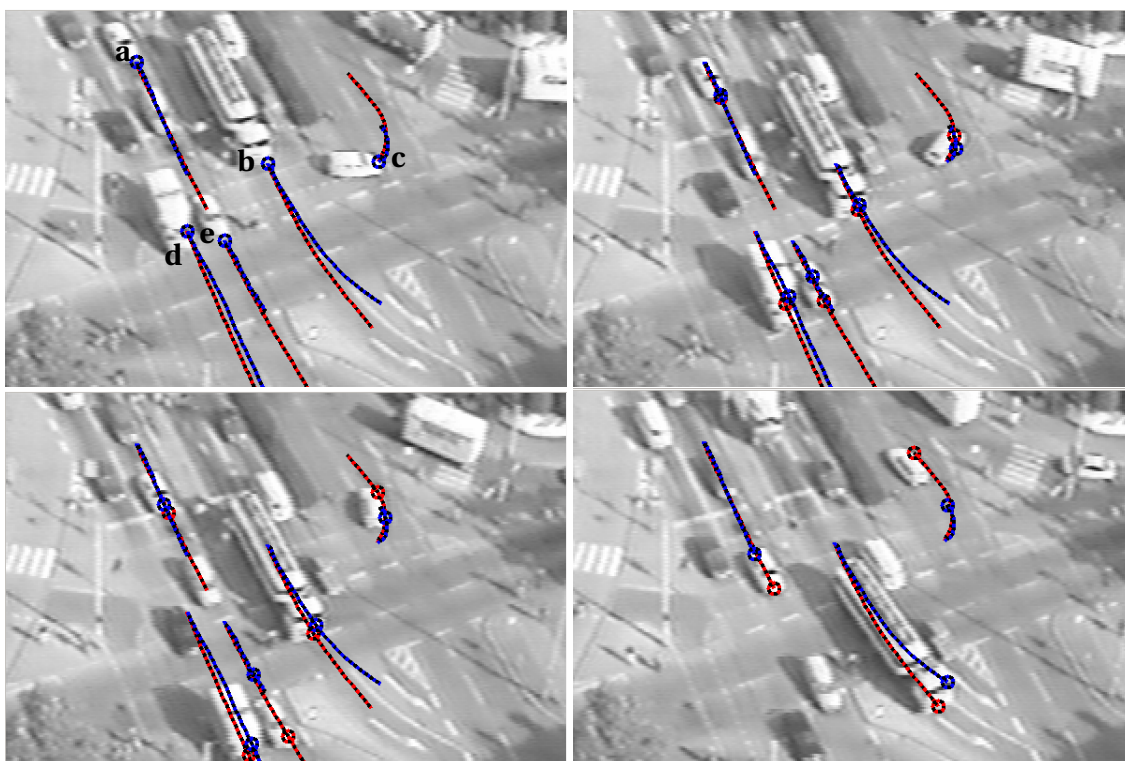


Figure 2.7 – Trajectoires de 5 points d'intérêt. Rouge : notre approche. Bleu : celle de Sun.

mettre de traiter la séquence complète. Celle-ci est ainsi subdivisée en sous-fenêtres temporelles de 10 images, avec une date commune. La figure 2.8 visualise trois images de la séquence. Un feu de signalisation est présent sur la partie supérieure centrale de l'image. Au cours de la



Figure 2.8 – Images 1, 41 et 81.

séquence, les véhicules se déplacent derrière ce feu et sont donc partiellement occultés. Les pixels correspondant sont exclus du processus d'assimilation au moyen de la matrice de covariance d'erreur $R(\mathbf{x}, t)$, comme cela a été expliqué dans la section 2.6 du document et dans Béréziat *et al.* [11]. Ils ne sont donc pas pris en compte dans le calcul de la fonction de coût par l'équation (2.31). La stratégie appliquée dans ce contexte est d'effectuer un prétraitement de la scène étudiée, comme illustré par la figure 2.9, afin d'identifier les zones d'occultations fixes.



Figure 2.9 – Segmentation de la zone d'occultation.

Les résultats obtenus par la méthode sont visualisés sur la figure 2.10. Une dégradation des résultats liée à l'occultation par le feu de circulation est visible si on observe les trajectoires, sur la figure 2.11, de deux points caractéristiques choisis sur le véhicule blanc. Les trajectoires calculées à partir de nos estimations de $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ sont déformées dans la zone d'occultation, mais notre méthode permet de réaliser un suivi correct du véhicule, alors que ce n'est pas le cas de la méthode de Sun. Pour poursuivre la comparaison, nous visualisons, sur la figure 2.12, la trajectoire de points caractéristiques, choisis après que le véhicule blanc ait dépassé la zone d'occultation. Notre méthode permet à nouveau un meilleur suivi que celle de Sun.

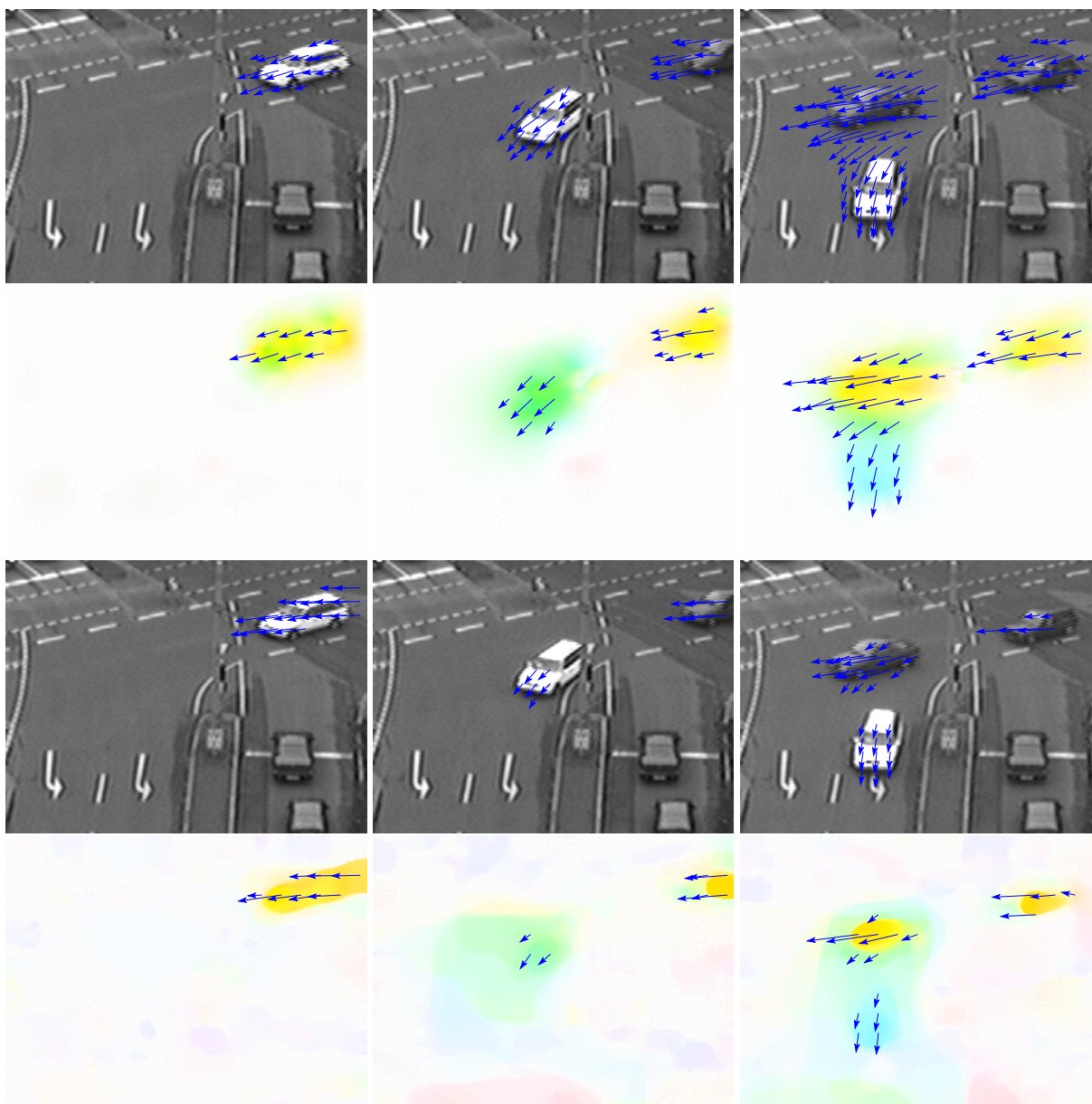


Figure 2.10 – Résultats aux dates 1, 41 and 81. De haut en bas : notre méthode en représentation vectorielle puis couleur. La méthode de Sun en représentation vectorielle puis coloriée.

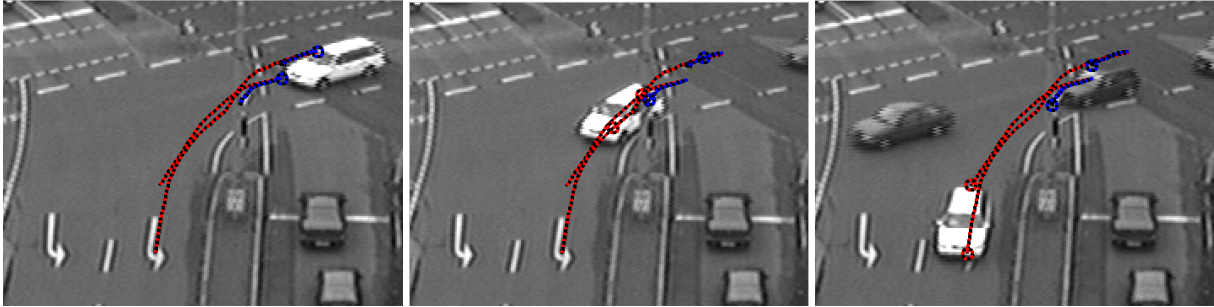


Figure 2.11 – Les trajectoires sont visualisées par des courbes. Les positions courantes sont représentées par des cercles colorés. Notre méthode est visualisée en rouge et celle de Sun en bleu, aux dates 1, 36 et 91.



Figure 2.12 – Trajectoires après la zone d'occultation.

2.8 Conclusion

Ces travaux, menés sur une durée de quatre à cinq ans et portant sur le sujet de l'estimation du mouvement au moyen de méthodes variationnelles d'assimilation de données, nous ont permis d'appréhender le sujet dans son ensemble et d'en approfondir les différentes composantes.

Nous avons en particulier analysé le fait d'inclure ou non un traceur dans le Modèle Image, de considérer l'équation de transport de la luminosité dans sa forme linéaire ou non-linéaire, d'utiliser d'autres équations d'évolution de l'image et de concevoir des opérateurs d'observation complexes.

Concernant la dynamique, des méthodes spécifiques ont été mises au point, par exemple pour les mouvements à divergence nulle.

Enfin, l'assimilation de données variationnelles 4D-Var a été utilisée, selon le contexte, dans un modèle à contrainte forte ou à contrainte faible, avec une formulation incrémentale ou par méthode adjointe.

Les perspectives concrètes de ce travail concernent, d'une part, l'estimation des forces géophysiques (Coriolis, gravité) au moyen du modèle présenté dans la section 2.5 et, d'autre part, l'assimilation dans le modèle d'océan NEMO des champs de mouvement et de topographie pycnocline obtenus par Modèle Image.

L'assimilation de données variationnelle 4D-Var, mise en place dans ces travaux, permet d'estimer la condition initiale à partir des observations passées (utilisées dans l'ébauche) et des observations futures (la séquence d'images). D'autres approches d'assimilation de données sont disponibles dans la littérature, telles que les méthodes d'ensemble. Elles sont présentées dans le chapitre 5. Des travaux ont ainsi débuté dans l'équipe-projet Clime sur l'utilisation du filtre de Kalman d'ensemble [34] pour l'estimation du mouvement, au moyen d'une approche pilotée par les images pour la construction de l'ensemble et pour son intégration temporelle. Des perspectives concernent l'aggrégation de l'ensemble [69] en calculant les poids à partir des images de la séquence afin d'éviter la phase dite d'analyse du filtre de Kalman [58].

Réduction de modèle

L'assimilation d'images, telle que présentée dans le précédent chapitre, et le traitement d'images dans un contexte plus général, sont directement confrontés au problème de la taille des données d'entrée et de celle des sorties recherchées. Dans ce contexte, l'intérêt pour la réduction de dimension est naturel. La définition d'un modèle réduit, obtenu en projetant les équations d'évolution sur un sous-espace approprié, est largement étudiée dans la littérature (voir les articles [27, 81, 83, 44, 84]) et fait l'objet de travaux de recherche dans de nombreux domaines d'application. La pertinence du modèle réduit dépend de la définition de sous-espaces adaptés à la représentation des images et à la représentation du mouvement. Des modèles réduits, définis sur des sous-espaces obtenus par Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (l'acronyme POD est utilisé dans ce document), ont été utilisés par D'Adamo *et al.* [26, 77] afin de restituer une dynamique temporellement dense à partir de données acquises par "Particle Image Velocimetry" [80]. Dans le cadre de l'estimation à partir des images, le problème de réduction de l'espace mouvement est fortement contraint, puisque ce mouvement est justement l'inconnue recherchée. La projection sur le sous-espace choisi ne doit pas détruire les caractéristiques principales de la dynamique, afin que le processus d'estimation puisse s'effectuer de façon optimale. Les approches classiques sont basées sur l'Analyse en Composantes Principales (ACP) [8, 9], également appelée transformation de Karhunen-Loeve [66] ou Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres dans la littérature de la dynamique des fluides [67]. Après avoir considéré l'approche POD [32, 39, 33, 42, 31], nous nous sommes intéressés à la définition de sous-espaces ne dépendant pas des données et à l'utilisation de bases fixes pour la représentation du mouvement. Dans les publications [55, 91, 92], le mouvement est représenté comme une combinaison linéaire de fonctions splines. Le champ de mouvement est décomposé selon une base d'ondelettes dans [28, 29, 101]. Dans [25], des bases composées d'ondelettes à divergence nulle et d'ondelettes à rotationnel nul sont utilisées pour l'estimation du mouvement. Ces bases ont été définies dans [22] et utilisées dans [24] pour la simulation d'écoulements fluides. Mais ces méthodes d'estimation de mouvement ne permettent pas de restituer une dynamique dense sur tout l'intervalle temporel étudié.

Une fois choisis des espaces de représentation adéquats, la réduction du modèle complet, associé à des équations aux dérivées partielles, est obtenue par la projection de Galerkin. Ce

nouveau modèle est d'ordre réduit et caractérisé par des équations différentielles ordinaires. L'assimilation de données est ensuite effectuée avec ce modèle réduit et les projections des images observées dans le sous-espace de représentation des images. Elle permet d'estimer les coefficients du champ de mouvement et de restituer la dynamique sous-jacente à la séquence d'images observée.

La section 3.1 présente la projection de Galerkin et l'assimilation dans le modèle réduit tandis que les sections 3.2 et 3.3 présentent une méthode de calcul de bases à partir de la définition des propriétés des images et des champs de mouvement. Ces travaux ont été appliqués à l'estimation de la dynamique de surface de la mer Noire et illustrés dans la section 3.4.

3.1 Assimilation dans des modèles d'ordre réduit

Soit $\mathbf{X}$ le vecteur d'état, formé, pour illustrer la discussion, du champ de mouvement bi-dimensionnel $\mathbf{w}$ et du traceur image I , défini sur l'espace spatio-temporel $\Lambda = \Omega \times [0, T]$: $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)^T \ I(\mathbf{x}, t))^T$. Les équations d'évolution du mouvement et de l'image sont celles décrites dans le chapitre 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

ou, en faisant apparaître le modèle $\mathbb{M}$, dit complet car défini sur le domaine image :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (3.2)$$

Supposons que des espaces vectoriels réduits de champs de mouvement et de champs image aient été choisis. Supposons également que ces espaces soient associés à des bases orthogonales $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1\dots K}$ pour le mouvement et $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1\dots L}$ pour les images. Les fonctions ϕ_i et ψ_j dépendent uniquement de $\mathbf{x}$ et sont définies sur Ω . Les fonctions $\mathbf{w}$ et I peuvent être approximées par leurs projections sur ces sous-espaces :

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i(\mathbf{x}) \\ I(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec des coefficients a_i et b_j définis sur $[0, T]$. En utilisant cette approximation, ainsi que la

linéarité du produit scalaire et du gradient, dans le système (3.1), on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^K \frac{da_i}{dt} \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^{K,K} a_i a_j (\phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla) \phi_j(\mathbf{x}) = 0 \\ \sum_{j=1}^L \frac{db_j}{dt} \psi_j(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^{K,L} a_i b_j \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi_j(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

La première équation est projetée sur ϕ_k , pour $k = 1 \dots K$, et la seconde sur ψ_l , pour $l = 1 \dots L$, et la propriété d'orthogonalité conduit à :

$$\begin{cases} \frac{da_k}{dt} \langle \phi_k, \phi_k \rangle + \sum_{i,j=1}^{K,K} a_i a_j \langle (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j, \phi_k \rangle = 0, \\ \frac{db_l}{dt} \langle \psi_l, \psi_l \rangle + \sum_{i,j=1}^{K,L} a_i b_j \langle \phi_i \cdot \nabla \psi_j, \psi_l \rangle = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire. En divisant par $\langle \phi_k, \phi_k \rangle$ et $\langle \psi_l, \psi_l \rangle$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{da_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{K,K} a_i a_j \frac{\langle (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} = 0 \\ \frac{db_l}{dt} + \sum_{i,j=1}^{K,L} a_i b_j \frac{\langle \phi_i \cdot \nabla \psi_j, \psi_l \rangle}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Définissons les grandeurs suivantes :

- $\mathbf{a}(t) = (a_1(t) \dots a_K(t))^T$ est le vecteur des coefficients mouvement, obtenu en projetant le champ de mouvement $\mathbf{w}(t)$ sur la base Φ ,
- $\mathbf{b}(t) = (b_1(t) \dots b_L(t))^T$ est le vecteur des coefficients images, obtenu en projetant le champ image $I(t)$ sur la base Ψ ,
- $B(k)$ est une matrice de dimension $K \times K$ dont l'élément (i, j) vaut :

$$B(k)_{i,j} = \frac{\langle (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \quad (3.7)$$

- $G(l)$ est une matrice de dimension $K \times L$ dont l'élément (i, j) vaut :

$$G(l)_{i,j} = \frac{\langle \phi_i \cdot \nabla \psi_j, \psi_l \rangle}{\langle \psi_l, \psi_l \rangle} \quad (3.8)$$

En utilisant ces notations, le système (3.6) devient :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{a}_k}{dt}(t) + \mathbf{a}^T \mathbf{B}(k) \mathbf{a} = 0, & k = 1 \dots K \\ \frac{d\mathbf{b}_l}{dt}(t) + \mathbf{a}^T \mathbf{G}(l) \mathbf{b} = 0, & l = 1 \dots L \end{cases} \quad (3.9)$$

Après avoir défini un vecteur d'état réduit $\mathbf{X}_R(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}$, le système (3.9) s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{X}_R}{dt}(t) + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R(t)) = 0 \quad (3.10)$$

Le modèle réduit $\mathbb{M}_R$ est la projection de Galerkin du modèle complet $\mathbb{M}$ sur la base mouvement Φ et la base image Ψ .

L'estimation du mouvement s'effectue par assimilation des images dans le modèle réduit vérifiant l'équation (3.10). Les observations sont les coefficients, notés $\mathbf{b}^O(t)$, associés aux projections des images observées $\mathbf{I}^O(t)$ sur la base Ψ . Soit $\mathbb{P}_b$ la projection du vecteur d'état réduit $\mathbf{X}_R$ sur la composante $\mathbf{b}$. L'équation d'observation, qui lie le vecteur d'état aux observations, s'écrit :

$$\mathbf{b}^O(t) = \mathbb{P}_b \mathbf{X}_R(t) + \varepsilon_R(t) = \mathbf{b}(t) + \varepsilon_R(t) \quad (3.11)$$

L'erreur d'observation $\varepsilon_R(t)$ représente l'incertitude sur les observations (bruit d'acquisition, projection sur le sous-espace image) et sur la valeur du vecteur d'état réduit.

Des heuristiques sont utilisées pour approximer la valeur d'ébauche $\mathbf{X}_{R,b}$ du vecteur d'état réduit à la date 0. L'équation d'ébauche exprime alors que le résultat de l'assimilation de données doit rester proche de cette valeur :

$$\mathbf{X}_R(0) = \mathbf{X}_{R,b} + \varepsilon_B \quad (3.12)$$

L'erreur d'ébauche ε_B décrit l'incertitude sur cette condition initiale.

Les variables $\varepsilon_R(t)$ et ε_B sont des variables gaussiennes de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{R}$ et $\mathbf{B}$ (nous utilisons abusivement les mêmes notations que pour le modèle complet).

La fonction de coût utilisée pour l'estimation de $\mathbf{X}_R(0)$ à partir des observations s'écrit :

$$J(\mathbf{X}_R(0)) = (\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b}) + \int_0^T (\mathbf{b}^O(t) - \mathbf{b}(t))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b}^O(t) - \mathbf{b}(t)) dt \quad (3.13)$$

La méthode duale décrite dans [59] est utilisée pour minimiser J à partir d'une variable adjointe λ_R , définie par les équations :

$$\lambda_R(T) = 0 \quad (3.14)$$

$$-\frac{d\lambda_R}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}_R} \right)^* \lambda_R = -\mathbb{P}_b^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b}^O(t) - \mathbf{b}(t)) \quad (3.15)$$

où $(\frac{\partial \mathcal{M}_R}{\partial \mathbf{X}_R})^*$ est le modèle adjoint de $\mathcal{M}_R$. Le gradient de J , noté ∇J , est calculé par la méthode des variations [65] et vaut :

$$\nabla J(\mathbf{X}_R(0)) = 2(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b}) + \lambda_R(0)) \quad (3.16)$$

La fonction de coût J est minimisée par la méthode de descente de gradient : à chaque itération, l'intégration temporelle de $\mathbf{X}_R$ par l'équation (3.10) permet de calculer J selon l'équation (3.13), puis l'intégration rétrograde de λ_R par l'équation (3.15) fournit la valeur de $\lambda_R(0)$ puis celle de ∇J en utilisant l'équation (3.16). Le minimiseur BFGS [20] est utilisé pour obtenir la nouvelle estimation de $\mathbf{X}_R(0)$ à partir des valeurs de J et ∇J .

3.2 Calcul de bases

Commençons tout d'abord par définir les notations utilisées dans cette section. Soit $\mathfrak{F}$ un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathcal{Q} : \mathfrak{F} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction quadratique définie positive, qui vérifie : $\mathcal{Q}(f) = \langle \mathcal{L}(f), f \rangle$, où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire auto-adjoint. L'hypothèse que $\mathcal{L}$ soit auto-adjoint n'est pas restrictive, puisque la fonction $\mathcal{Q}$ est inchangée si on remplace un opérateur $\mathcal{L}$ quelconque par l'opérateur auto-adjoint associé $\frac{\mathcal{L} + \mathcal{L}^*}{2}$, où $\mathcal{L}^*$ est l'adjoint de $\mathcal{L}$. On peut facilement démontrer que le gradient de $\mathcal{Q}$ est égal à $2\mathcal{L}$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Q}(f + \epsilon h) - \mathcal{Q}(f)}{\epsilon} = \langle 2\mathcal{L}(f), h \rangle \quad (3.17)$$

Soient $\psi_1, \dots, \psi_n$ les fonctions obtenues comme solutions du problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{cases} \min_{(\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathfrak{F}^n} \sum_{k=1}^n \mathcal{Q}(\psi_k) \\ \mathcal{B}(\psi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \langle \psi_j, \psi_k \rangle = \delta_{j,k} \end{cases} \quad (3.18)$$

où $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire défini sur $\mathfrak{F}$ et $\delta_{j,k}$ le symbole de Kronecker, qui a pour valeur 1 si $j = k$ et 0 sinon.

Soit $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{F}$ le sous-espace linéaire de $\mathfrak{F}$ tel que $\mathcal{B}(f) = 0, \forall f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$. La linéarité de $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ découle de celle de $\mathcal{B}$. De plus, $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ hérite du produit scalaire de $\mathfrak{F}$, qui est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$. Soit $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} : \mathfrak{F}_{\mathcal{B}} \mapsto \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ la restriction de l'opérateur $\mathcal{L}$ à $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$, et soit $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ définie par $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\psi) \triangleq \langle \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\psi), \psi \rangle_{\mathcal{B}}$.

Nous disposons de deux théorèmes pour calculer les éléments $(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Théorème 1. *Les fonctions $\psi_1, \dots, \psi_n$ obtenues par le système (3.18) sont les fonctions propres de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ correspondant aux n plus petites valeurs propres.*

Démonstration. Nous commençons par effectuer une relaxation du problème de minimisation (3.18) en remplaçant la contrainte de base orthonormale par une contrainte moins forte

de simple normalisation :

$$\begin{cases} \min_{(\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}^n} \sum_{k=1}^n \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\psi_k) \\ |\psi_k|^2 = 1 \\ j \neq k \rightarrow \psi_j \neq \psi_k \end{cases} \quad (3.19)$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées à $\psi_1, \dots, \psi_n$ sont :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\psi_k) = \lambda \psi_k \quad (3.20)$$

Leur solution est l'ensemble des n fonctions propres de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ qui correspondent aux n plus petites valeurs propres.

Ces fonctions propres sont orthonormales, en raison du théorème spectral et du fait que $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ soit auto-adjoint. Comme l'ensemble des solutions de (3.19) inclut celui des solutions de (3.18), on en déduit que ces fonctions propres sont les solutions du problème de minimisation décrit par (3.18). $\square$

Théorème 2. *Les fonctions $\psi_1, \dots, \psi_n$, qui sont solutions du système (3.18), sont les n premières solutions du problème de minimisation (3.21) et les n premières fonctions propres de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$:*

$$\begin{cases} \psi_1 = \arg \min_{\psi \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\psi), \quad |\psi|^2 = 1 \\ \psi_2 = \arg \min_{\psi \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\psi), \quad |\psi|^2 = 1, \quad \psi \perp \psi_1 \\ \dots \\ \psi_k = \arg \min_{\psi \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\psi), \quad |\psi|^2 = 1, \quad \psi \perp \psi_j, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ \dots \end{cases} \quad (3.21)$$

Démonstration. Faisons une démonstration de ce théorème par récurrence.

Pour $n = 1$, le problème décrit par (3.18) coïncide avec la première équation de (3.21). L'équation d'Euler-Lagrange associée s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\psi) - \lambda \psi = 0 \quad (3.22)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Cette équation a pour solution $\lambda = \lambda_1$ et $\psi = \psi_1$, où λ_1 est la plus petite valeur propre de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ et ψ_1 est la fonction propre de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ associée à λ_1 . L'assertion est donc valide pour $n = 1$.

Supposons que l'assertion soit valide pour la valeur n et démontrons qu'elle est alors valide pour $n + 1$. Le problème de minimisation s'écrit :

$$\min_{\psi \in \mathfrak{F}_{\mathcal{B}}} \mathcal{Q}_{\mathcal{B}}(\psi), \quad |\psi|^2 = 1, \quad \psi \perp \psi_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

avec pour équation d'Euler-Lagrange :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(\psi) - \lambda \psi - \sum_{k=1}^n \mu_k \psi_k = 0 \quad (3.24)$$

ou encore :

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})\psi = \sum_{k=1}^n \mu_k \psi_k \quad (3.25)$$

où $\mathcal{J}$ représente l'opérateur identité. Cette équation doit être résolue par rapport à ψ , λ et μ_k en imposant les contraintes d'orthonormalité : $|\psi|^2 = 1$ et $\langle \psi, \psi_j \rangle = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Si tous les coefficients μ_j sont égales à zéro, l'équation (3.25) est identique à l'équation (3.22). Ce qui démontre que ψ_{n+1} est une fonction propre de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$. Nous allons à présent faire une démonstration par l'absurde et montrer que l'hypothèse selon laquelle au moins un coefficient μ_i est différent de zéro conduit à une contradiction.

Si $\mu_i \neq 0$, λ n'est pas une valeur propre de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ et l'opérateur $(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})$ est inversible. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \psi &= (\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \mu_k \psi_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_k (\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})^{-1} \psi_k \end{aligned} \quad (3.26)$$

en utilisant la propriété de linéarité de $(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$. Par ailleurs, si ψ_k est une fonction propre de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ associée à la valeur propre λ_k , alors c'est aussi une fonction propre de $(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})$ associée à la valeur propre $\lambda_k - \lambda$ et de $(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} - \lambda \mathcal{J})^{-1}$ pour la valeur propre $(\lambda_k - \lambda)^{-1}$. Nous obtenons donc :

$$\psi = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\lambda_k - \lambda} \psi_k \quad (3.27)$$

et la condition d'orthogonalité $\langle \psi, \psi_j \rangle = 0$ conduit, en utilisant la propriété d'orthonormalité des fonctions propres de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, à :

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi_j \rangle &= \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\lambda_k - \lambda} \langle \psi_k, \psi_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\lambda_k - \lambda} \delta_{k,j} \\ &= \frac{\mu_j}{\lambda_j - \lambda} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $\delta_{k,j}$ est le symbole de Kronecker.

L'équation (3.28) implique que tous les μ_j sont nuls, ce qui contredit l'hypothèse $\mu_i \neq 0$. $\square$

3.3 Bases dédiées à l'estimation du mouvement

Cette section décrit la définition de bases scalaires (pour permettre la représentation des images) et de bases vectorielles (pour la représentation des champs de mouvement), en utilisant la méthode décrite dans la section 3.2. Deux domaines géométriques Ω sont illustrés. Le

bassin de la mer Noire démontre le potentiel de la méthode à caractériser des domaines géométriquement complexes. Un domaine rectangulaire de petite taille est également utilisé afin de permettre un grand nombre de tests et de quantifier les résultats d'estimation du mouvement par des méthodes d'assimilation de données dans des modèles réduits. À partir de la définition de Ω , les bases calculées dépendent du choix de la fonction quadratique $\mathcal{Q}$ et de l'opérateur $\mathcal{B}$. La définition de ces deux grandeurs mathématiques permet d'assurer que les champs image et mouvement possèdent les propriétés requises.

En ce qui concerne les images satellite acquises sur le domaine de la mer Noire, nous considérons les solutions du problème de minimisation (3.21), pour la fonction $\mathcal{Q}$ définie par :

$$\mathcal{Q}(\psi) \triangleq \int_{\Omega} \|\nabla \psi(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} \quad (3.29)$$

où $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ scalaire vérifiant des conditions aux bords de Neuman. Des exemples de résultats sont visualisés sur la figure 3.1. La figure 3.2 visualise les reconstructions obtenues,

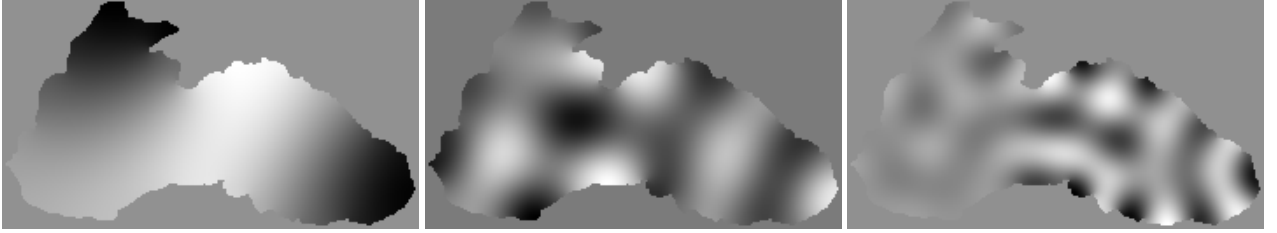


Figure 3.1 – Fonctions propres ψ_4 , ψ_{20} et ψ_{50} .

à partir des coefficients, sur les bases à 50, 100 et 500 éléments. Plus la taille de la base augmente, mieux sont représentées les petites échelles spatiales présentes dans les données. Il est possible de calculer le nombre d'éléments de la base en fonction de la taille des structures étudiées sur les images.

Pour définir le sous-espace associé au mouvement, nous considérons les solutions du problème de minimisation (3.21) avec la fonction $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}(\phi) \triangleq \int_{\Omega} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \quad (3.30)$$

où $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ vectoriel. Différents choix peuvent être considérés pour l'opérateur $\mathcal{B}(\phi)$. Dans cette section, nous considérons un mouvement à divergence nulle et $\mathcal{B}(\phi)$ vérifie :

$$\{\mathcal{B}(\phi)\}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \{\text{div}\phi\}(\mathbf{x}), & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

Des éléments de la base obtenue sont visualisés sur la figure 3.3, où les champs de vecteurs sont représentés par les lignes de courant correspondantes.

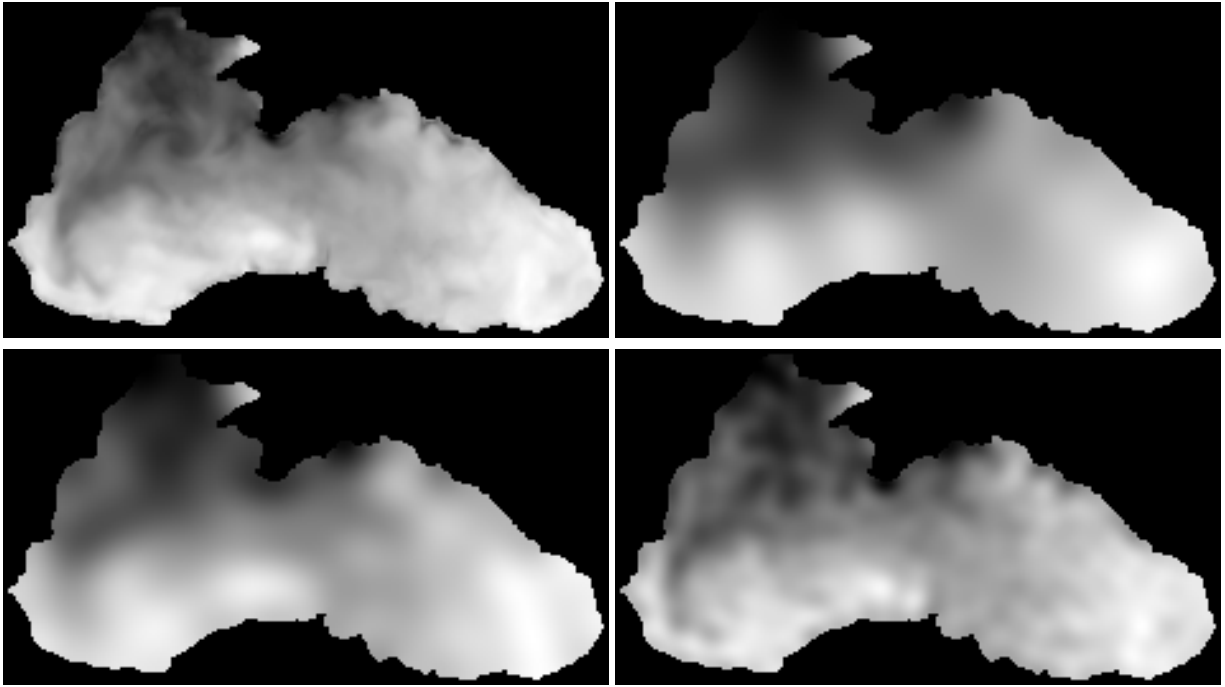


Figure 3.2 – Image satellite. Reconstruction à 50, 100 et 500 éléments.



Figure 3.3 – Éléments 1, 20 et 50 de la base mouvement à divergence nulle.

3.4 Estimation du mouvement sur les bases réduites

Les résultats de cette section sont principalement issus de l'article [51].

Afin d'illustrer le propos, un modèle réduit est construit en utilisant, pour le domaine rectangulaire visualisé sur la figure 3.4, une base scalaire pour les images et une base vectorielle à divergence nulle pour le mouvement. Ce modèle réduit est utilisé pour estimer le mouvement par assimilation des six images satellite, acquises par les capteurs NOAA/AVHRR les 14 et 15 mai 2005 et visualisées sur la figure 3.4. La base scalaire est composée de 240 éléments (voir

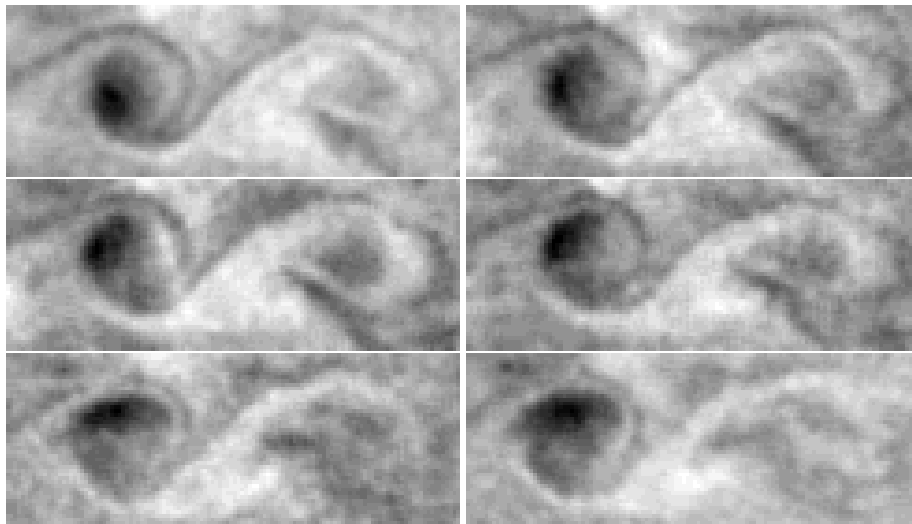


Figure 3.4 – Images satellite.

figure 3.5) et la base vectorielle de 24 éléments (voir figure 3.6).

Il n'est pas possible de disposer de vérité terrain lors de l'utilisation d'images satellite. Les méthodes doivent donc être préalablement validées avec des expériences jumelles. Il est préférable que celles-ci aient des caractéristiques proches des conditions réelles. Une simulation est donc effectuée en utilisant, en conditions initiales, le champ de mouvement visualisé en

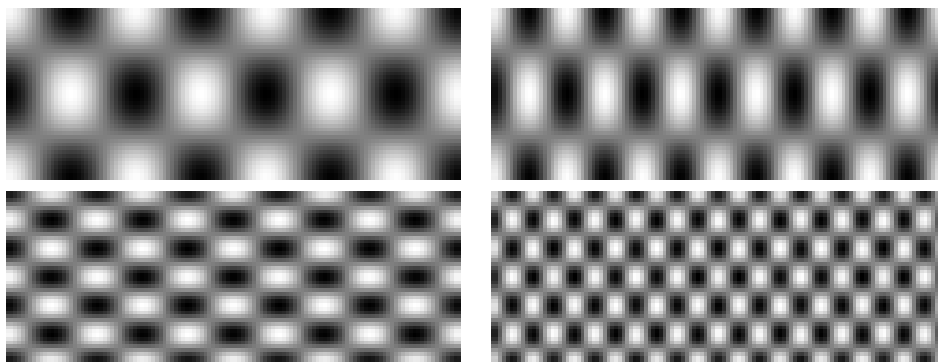


Figure 3.5 – Les éléments ψ_{30} , ψ_{60} , ψ_{120} et ψ_{240} de la base image.

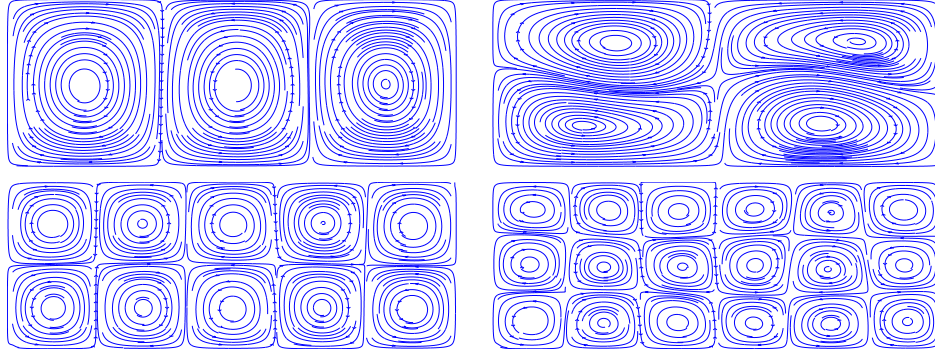


Figure 3.6 – Quatre éléments ϕ_3 , ϕ_6 , ϕ_{12} et ϕ_{24} de la base mouvement.

	minimum	moyenne	maximum
vitesse (m/s)	3.6e-04	1.4e-01	3.5e-01

Tableau 3.1 – Statistiques du champ de mouvement initial.

haut à gauche de la figure 3.7 (au moyen d’une double représentation, flèches et couleurs, du vecteur mouvement) et la première image de la séquence. Les statistiques du champ de mouvement initial sont données dans le tableau 3.1 : valeurs minimale, maximale et moyenne. La simulation permet d’obtenir une séquence de six pseudo-images aux mêmes dates que les vraies images satellite. Celles-ci sont assimilées avec le modèle réduit afin d’estimer le mouvement à la date 0, visualisé sur l’image en bas à droite de la figure. 3.7. L’approche est comparée à d’autres méthodes de l’état de l’art sur la même figure. Les statistiques d’erreur sont quantifiées sur le tableau 3.2. Pour chaque méthode de l’état de l’art, nous avons naturellement recherché les paramètres optimaux. Les méthodes [45, 89] reposent sur une régularisation du mouvement par une norme L_2 , tandis que les approches [23, 91] reposent sur une régularisation du second ordre de la divergence. Afin de continuer la comparaison entre les approches,

Méthode	Erreur en norme (m/s)			Erreur angulaire		
	min	moy	max	min	moy	max
Horn <i>et al</i> [45]	2.0e-06	6.9e-02	3.5e-01	1.1e-03	3.4e+01	1.8e+02
Suter [91]	0.0e+00	6.3e-02	2.7e-01	3.6e-03	3.7e+01	1.8e+02
Corpetti <i>et al</i> [23]	6.0e-06	7.3e-02	2.5e-01	5.6e-03	3.2e+01	1.8e+02
Sun <i>et al</i> [89]	5.4e-05	6.3e-02	2.8e-01	1.2e-03	2.2e+01	1.8e+02
Notre approche	0.0e+00	2.8e-04	1.7e-03	2.3e-04	1.9e-01	5.8e+01

Tableau 3.2 – Statistiques d’erreur entre l’estimation du mouvement et la vérité terrain.

nous avons indiqué cinq points caractéristiques sur la figure 3.8, au moyen de croix rouges. Ces points caractéristiques sont transportés par le champ de mouvement correspondant à la vérité terrain (en rouge), par notre méthode (en vert) et par celle de Sun *et al.* [89] (en bleu). Cette dernière méthode a été choisie car étant celle qui obtenait les meilleures statistiques dans le

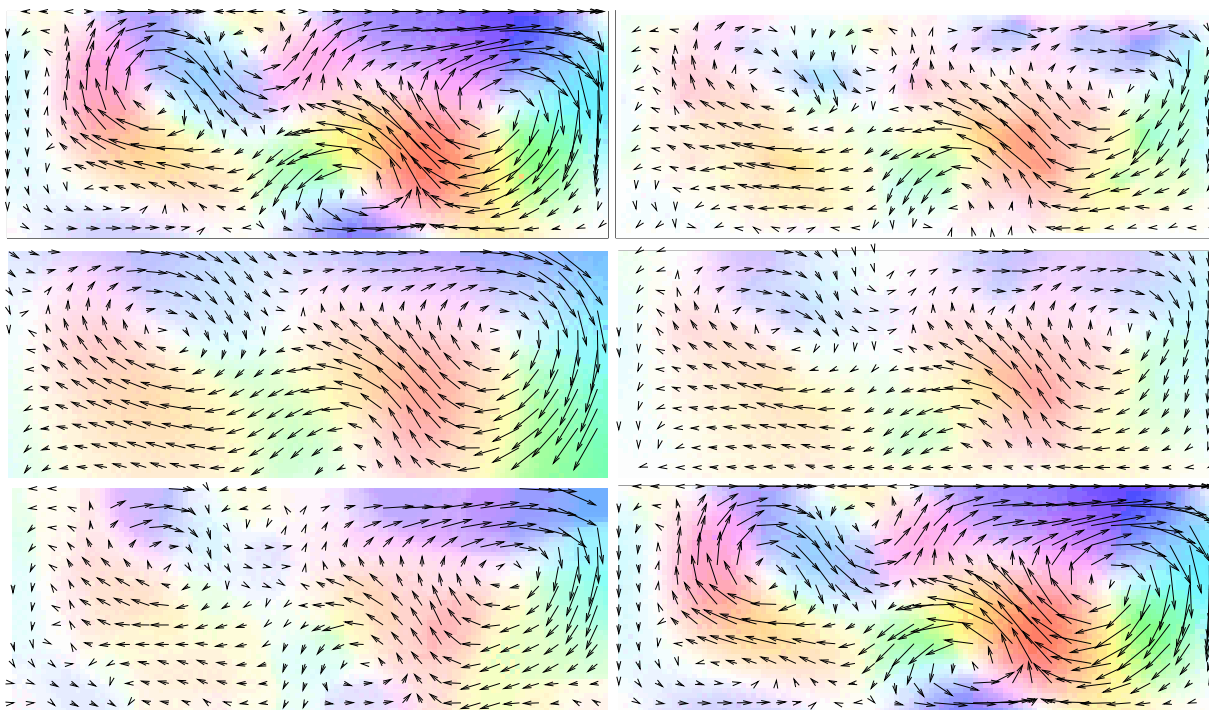


Figure 3.7 – Résultats de l'expérience jumelle. De haut en bas et de gauche à droite : vérité terrain, Horn *et al* [45], Suter [91], Corpetti *et al* [23], Sun *et al* [89], et notre approche.

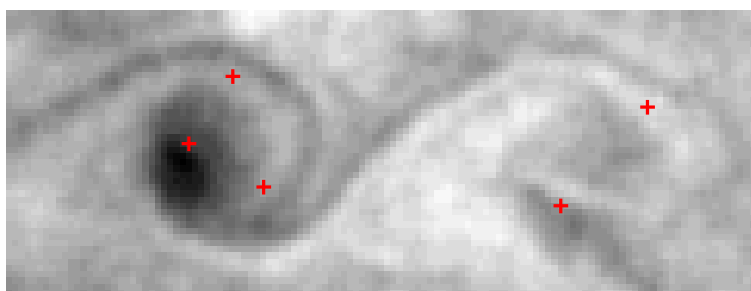


Figure 3.8 – Points caractéristiques.

tableau 3.2. Les deux premiers types de trajectoires vérifient l'équation (3.10), tandis que celles obtenues par Sun sont linéaires par morceaux. Les positions des points caractéristiques sont visualisées sur la dernière observation sur la figure 3.9. La couleur de l'ellipse entourant chaque ensemble de points est un indicateur qualitatif : une ellipse verte signifie que notre méthode est la meilleure tandis qu'une bleue signifie que c'est l'algorithme de Sun.

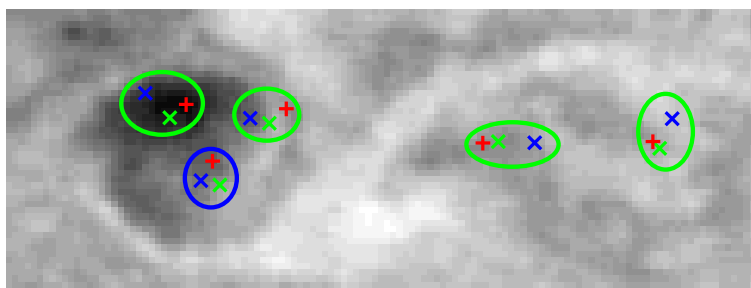


Figure 3.9 – Position des points caractéristiques sur la dernière observation.

Après avoir été analysée sur des expériences jumelles, la méthode est testée sur la séquence d'images satellite, visualisée sur la figure 3.4. Le résultat est donné sur l'image du bas de la figure 3.10. L'expérience a également été menée avec une base scalaire de taille plus petite, dont la valeur a été fixée à 120 au lieu de 240. Cela a permis de constater que si les petites échelles des images ne sont pas correctement prises en compte par la base alors le mouvement ne peut être estimé de façon satisfaisante. Mais augmenter la taille de la base, pour prendre 480 éléments, ne permet pas d'améliorer les résultats et a pour conséquence d'augmenter fortement la taille du modèle réduit et le coût de calcul. Le nombre d'éléments doit être choisi en cohérence avec la taille des structures spatiales impactées par le mouvement. L'image du milieu, dans la figure 3.10 montre le résultat de l'assimilation par le modèle complet correspondant aux équations du système (3.1). On peut observer que des caractéristiques globales, telles que les deux tourbillons principaux, sont sous-estimées, en raison du processus de lissage introduit par le processus d'assimilation de données. Au contraire, le modèle réduit correspondant à la taille des structures permet une modélisation optimale des images et une bonne estimation du mouvement. Les points caractéristiques de la figure 3.8 sont transportés par le champ de mouvement de Sun (voir l'image du haut de la figure 3.10), le modèle complet (milieu de la figure 3.10) et le modèle réduit (bas de la figure 3.10). Les positions sur la dernière observation sont visualisées sur la figure 3.11 : bleu pour Sun, jaune pour le modèle complet et vert pour le modèle réduit.

La figure 3.12 visualise une deuxième séquence de cinq images satellite de température de surface de la mer, acquises les 27 et 28 juillet 2007. La figure 3.13 fournit l'estimation du mouvement : Sun *et al.* en haut à gauche, modèle complet en haut à droite, et modèle réduit en bas. Les structures sont qualitativement mieux retrouvées par le modèle réduit. Un ensemble de points caractéristiques est visualisé sur la figure 3.14 (rouge : initialisation, bleu : Sun, jaune : modèle complet, vert : modèle réduit).

L'un des atouts de la méthode de calcul des bases présentée section 3.2 est qu'elle peut s'appliquer à des domaines à la géométrie complexe. C'est le cas lorsqu'on étudie le bassin de la mer

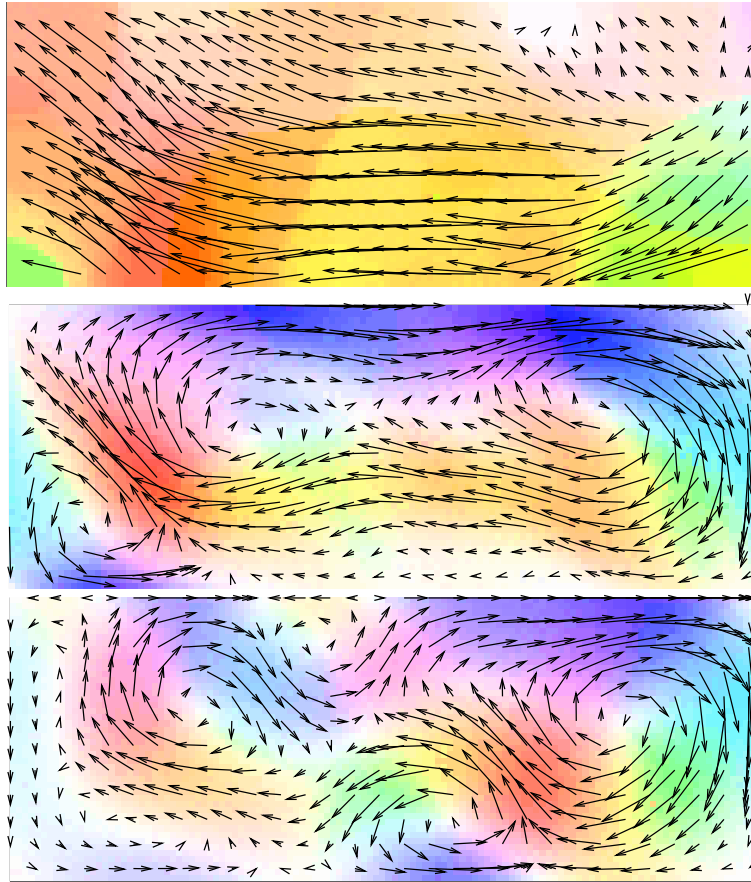


Figure 3.10 – Haut : méthode de Sun *et al* [89]. Milieu : modèle complet. Bas : modèle réduit.

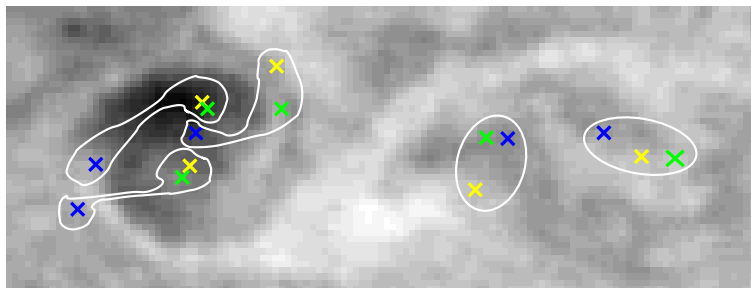


Figure 3.11 – Position des points caractéristiques sur la dernière observation.

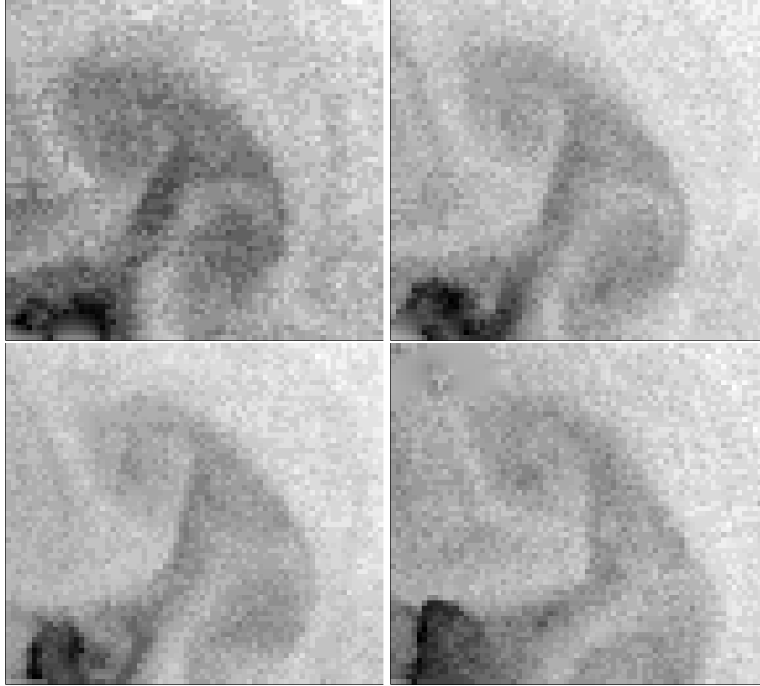


Figure 3.12 – Quatre images de la deuxième séquence.

Noire. La figure 3.15 visualise trois images satellitaires issues d’une séquence de température de surface (SST) acquise avec le capteur NOAA/AVHRR en juillet 1998. À l’ouest du domaine, la représentation en fausses couleurs fait apparaître des structures océanographiques mésoéchelles telles qu’un vortex (A), un “champignon” (B) et un filament (C), qui correspond à une entrée d’eau plus froide au niveau de la péninsule de Crimée. La figure 3.16 visualise le mouvement estimé à la date de la première observation. La figure 3.17 visualise la moitié ouest de la mer Noire et le résultat de l’estimation de la vitesse de surface. Sur ce zoom, on observe que le mouvement des trois structures (A), (B) et (C) est correctement appréhendé.

3.5 Conclusion

Les principales contributions de ce chapitre concernent l’estimation du mouvement par assimilation dans un modèle réduit et la définition de nouvelles bases, adaptées pour le problème. Les fonctions propres pour les images et le mouvement sont obtenues automatiquement en optimisant une contrainte de régularité et en imposant des propriétés, telles que la divergence nulle ou les conditions aux bords.

Les bases que nous avons définies ont des similarités avec les ondelettes décrites dans [56, 57], qui ont été utilisées pour l’estimation du flot optique [28, 29]. Cette famille de fonctions diagonales bi-orthogonales, utilisées pour projeter le mouvement dans [56, 57] est définie comme le rotationnel d’ondelettes bi-orthogonales sur un domaine carré. Ces fonctions satisfont les conditions de Dirichlet sur un domaine rectangulaire. Elles ne permettent donc pas d’étudier

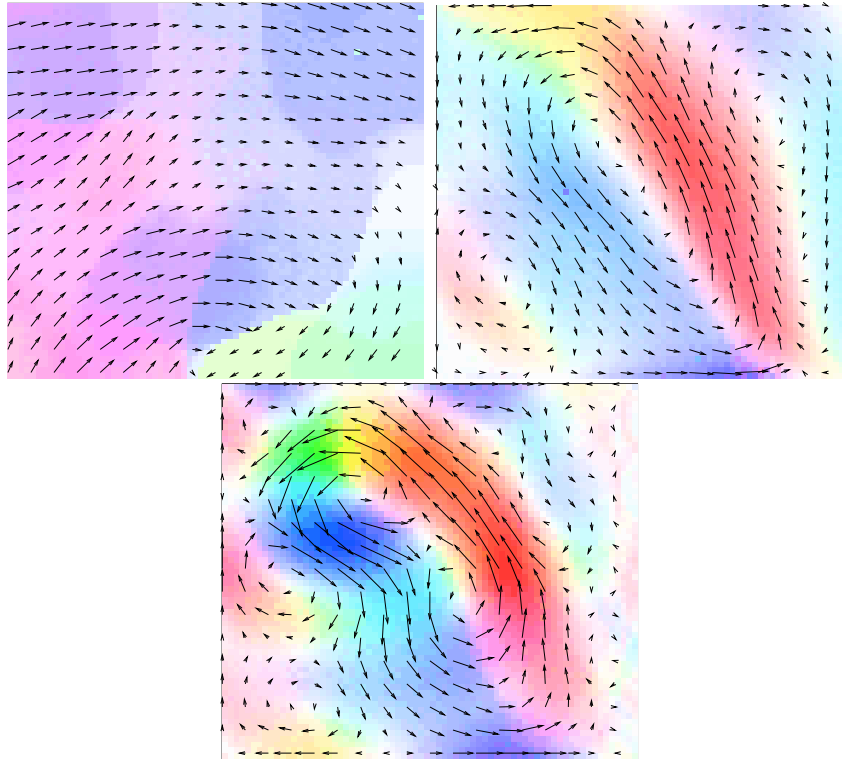


Figure 3.13 – Estimation du mouvement. Haut à gauche : Sun *et al* [89]. Haut à droite : modèle complet. Bas : modèle réduit.

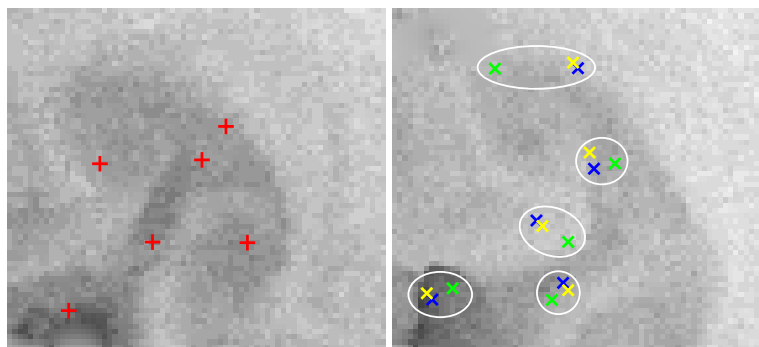


Figure 3.14 – Position des points caractéristiques sur les première et dernière images.

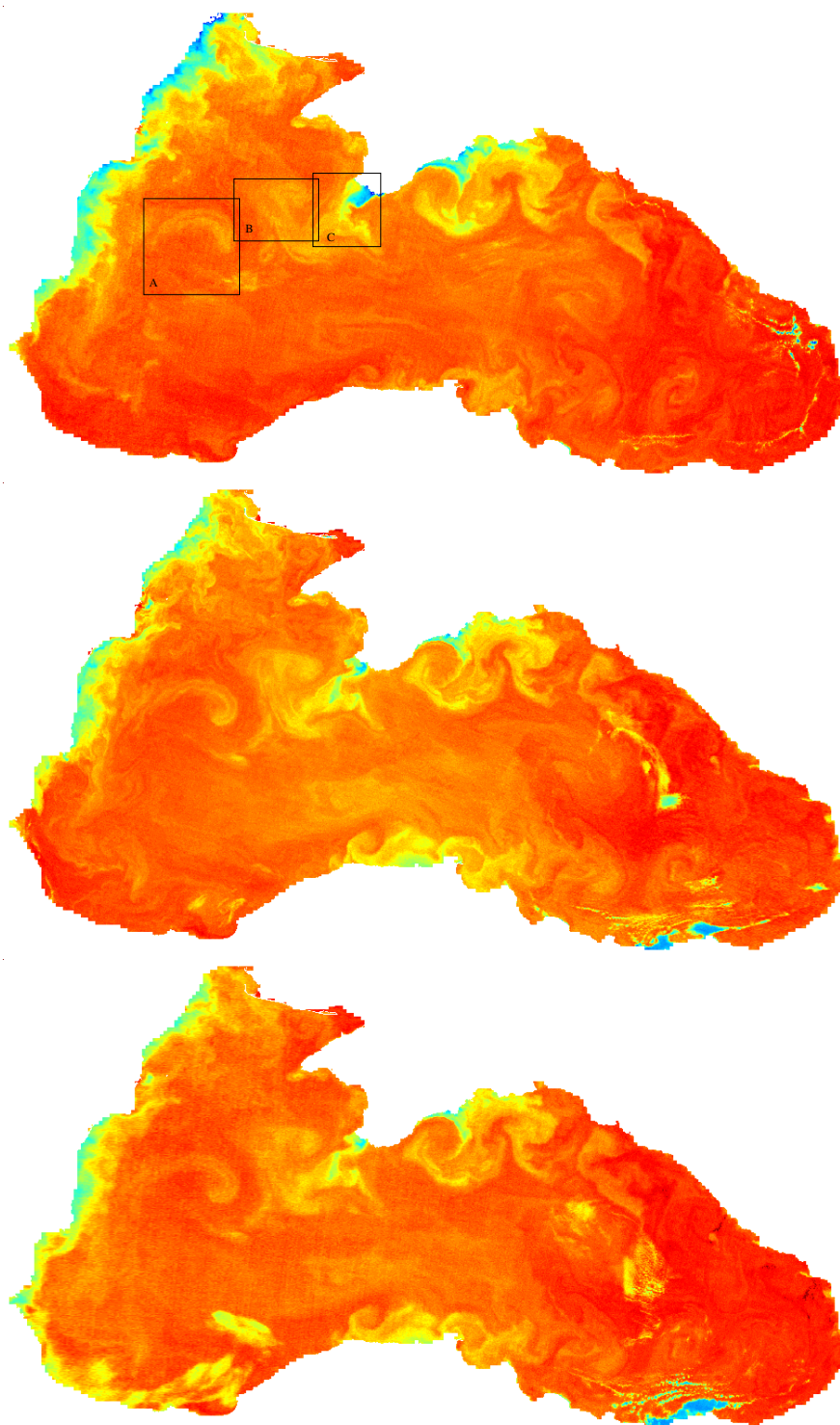


Figure 3.15 – Images de température de la Mer Noire visualisées en fausses couleurs. Acquisitions du 14 au 15 juillet 1998. Caractérisation des trois structures A, B et C.

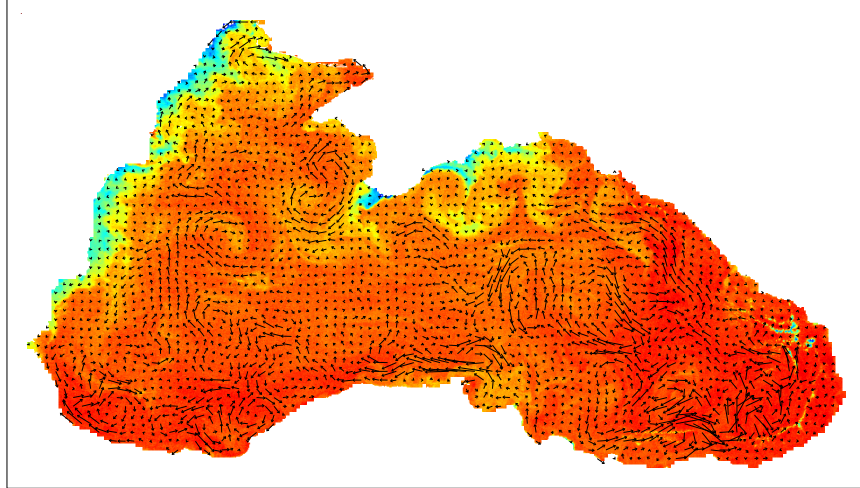


Figure 3.16 – Mouvement estimé à la date de la première observation.

le mouvement sur des domaines géométriques complexes. Ces limitations sont résolues par les fonctions proposées dans ce document. Une autre différence est que [56, 57] proposent un formalisme de représentation des vecteurs mais pas des fonctions image. Notre approche permet, au contraire, de traiter de la même manière les deux types de champs et d'utiliser le même algorithme pour tous les types de données possibles.

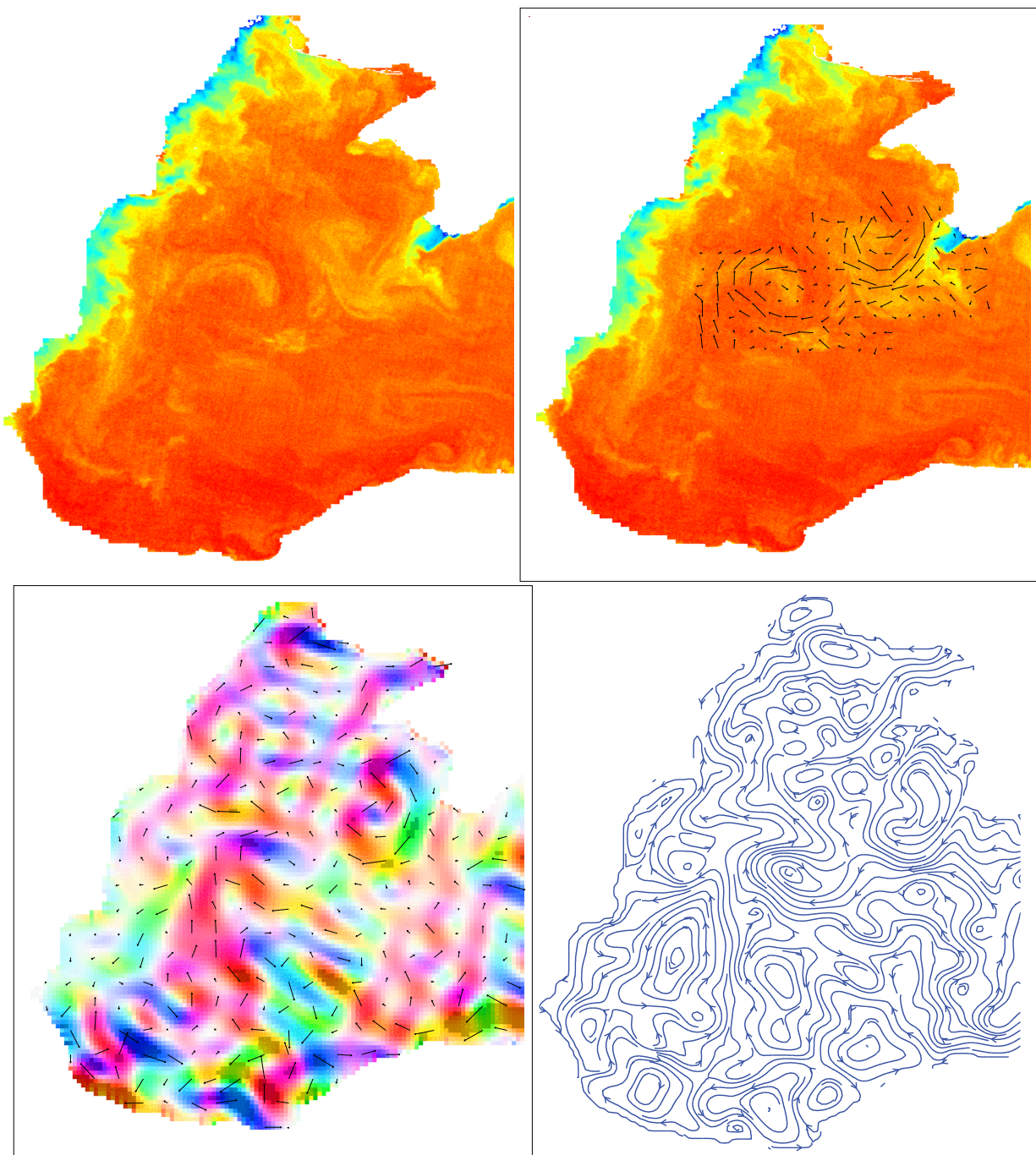


Figure 3.17 – De gauche à droite et de haut en bas : partie occidentale du bassin, champ de vitesse estimé, représentation colorée, représentation par lignes de flux (*streamlines*).

Suivi d'objets

Après s'être intéressés, aux chapitres 2 et 3, au problème de l'estimation du mouvement, nous considérons, à présent, une autre composante fondamentale du traitement des séquences d'images : le suivi des objets. Une description détaillée de la littérature est disponible, par exemple, dans Yilmaz et al. [102]. À notre connaissance, il n'existe actuellement pas de méthode permettant simultanément d'estimer le mouvement sur tout le domaine image Ω et de suivre un (ou des) objet particulier au cours de la séquence. Cependant, il existe des approches [6, 79, 82] qui segmentent et suivent un objet avec, en entrée, le champ de vitesse au cours de la séquence et la segmentation de l'objet sur la première image. D'autres méthodes, telles que celle décrite dans Bertalmio et al. [15] permettent de suivre une structure et d'estimer son déplacement à partir de sa segmentation initiale. Si les images étudiées sont bruitées et présentent des zones d'occlusion, comme c'est le cas pour les acquisitions satellite, les hypothèses sur la dynamique du système observé permettent malgré tout d'obtenir un résultat de qualité. L'assimilation de données dans un modèle dynamique est l'approche évaluée dans ce chapitre. Elle a deux spécificités lorsque comparée à l'état de l'art. Tout d'abord, le suivi ne repose pas sur la mise en correspondance de caractéristiques préalablement détectées sur les images, mais correspond à une fonction continue en temps. Deuxièmement, le suivi est couplé avec le calcul du mouvement de l'objet et, ainsi que les résultats l'illustrent, permet même d'améliorer l'estimation de celui-ci, en particulier sur la frontière des objets.

La section 4.1 présente l'utilisation de la méthode d'assimilation de données variationnelle 4D-Var pour le suivi d'objets et en décrit les différentes composantes. La section 4.2 présente, analyse et quantifie les résultats obtenus sur des séquences synthétiques et sur des images satellite météorologiques. La section 4.3 analyse les études réalisées et propose des perspectives pour ce travail de recherche.

4.1 Suivi d'objets par assimilation variationnelle d'images

Peu de travaux de la littérature reposent sur une approche variationnelle pour le suivi d'objets dans les séquence d'images. Papadakis et al. [76] décrivent une méthode d'assimilation de

données variationnelle incrémentale, qui permet de calculer le mouvement et de suivre un objet en utilisant, comme données d'entrée, la séquence d'images et la segmentation de l'objet sur l'intervalle temporel étudié. Cette contrainte de segmentation préalable de l'image est la principale différence avec la méthode présentée dans ce document, qui requiert uniquement des données dites de bas niveau : la séquence d'images et les points de contour préalablement calculés.

L'objectif est de suivre un objet, par exemple un nuage sur une séquence d'images satellite ou un véhicule sur une vidéo de trafic. L'objet (ou les objets) est caractérisé par une courbe fermée $C(t)$, dont la topologie peut varier au cours du temps. Le modèle mathématique associé à la courbe $C(t)$ est une fonction implicite $\phi(\mathbf{x}, t)$, dont les valeurs sont nulles pour les points de la courbe $C(t)$ et correspondent, en tout autre point du domaine, à la distance signée à la courbe.

Les données d'entrée, utilisées pour définir le vecteur d'observation $\mathbf{Y}$ de la méthode d'assimilation, sont les images et les points de contour. Ces derniers sont calculés par seuillage des maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du vecteur gradient [21, 30].

Des heuristiques sont considérées pour définir le modèle dynamique sur lequel repose l'assimilation de données. Ces heuristiques concernent le champ de mouvement $\mathbf{w}$, les images et la carte de distance signée ϕ .

L'évolution du mouvement est supposée satisfaire l'hypothèse de constance lagrangienne :

$$\frac{du}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

Le traceur image I a des propriétés physiques similaires aux acquisitions image et vérifie l'équation du flot optique :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla I \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (4.3)$$

La fonction implicite ϕ est supposée satisfaire aux mêmes heuristiques que le traceur I car le déplacement de l'objet correspond à celui des pixels qu'il contient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (4.4)$$

Le vecteur d'état s'écrit $\mathbf{X} = (u \ v \ I \ \phi)^T$. Il satisfait le modèle dynamique (4.1, 4.2, 4.3, 4.4), ou l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}(t)) = 0 \quad (4.5)$$

Estimer le mouvement $\mathbf{w}$ sur la séquence d'images et réaliser le suivi d'un (ou plusieurs) objet caractérisé par une fonction implicite ϕ peut se faire en estimant le vecteur d'état $\mathbf{X}$ au

moyen d'un algorithme d'assimilation variationnelle, dit 4D-Var, qui repose sur les équations d'évolution, d'ébauche et d'observation suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(\mathbf{X})(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}_b(\mathbf{x}) + \epsilon_B(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

$$\mathbb{H}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(\mathbf{x}, t) = \epsilon_R(\mathbf{x}, t) \quad (4.8)$$

Tout comme dans le chapitre 2, l'ébauche du champ de mouvement est choisi avec une valeur nulle, si aucune information n'est disponible sur sa valeur initiale. L'ébauche I_b du traceur image est à nouveau égale à la première image de la séquence. L'ébauche de la courbe $C(t)$ est une courbe C_b , obtenue en segmentant grossièrement l'objet sur l'image I_b . L'ébauche ϕ_b de la fonction implicite ϕ est obtenue en calculant la carte de distance signée par rapport à la courbe C_b . Notons $\mathbb{P}$ la projection du vecteur d'état $\mathbf{X}$ sur les deux composantes I et ϕ , l'équation (4.7) se réécrit :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0)) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_b(\mathbf{x})) + \epsilon_B(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

L'équation d'observation (4.8) traduit les liens entre les observations utilisées et le vecteur d'état $\mathbf{X}$. Dans le cas de cette étude, le vecteur d'observation $\mathbf{Y}$ contient bien entendu les acquisitions image, représentées sous forme continue par la fonction $I^O(t)$. Pour chacune d'elles, on calcule les points de contours, puis une carte de distance non signée, notée $D_c(t)$: en chaque pixel $\mathbf{x}$, $D_c(\mathbf{x}, t)$ représente la distance au point de contour le plus proche. Ces cartes de distance viennent compléter le vecteur d'observation qui s'écrit $\mathbf{Y} = (I \ D_c)^T$. L'opérateur d'observation $\mathbb{H}$ est défini afin de comparer le vecteur d'état et les observations. $\mathbb{H}$ s'écrit en deux parties : $\mathbb{H} = (\mathbb{H}_I \ \mathbb{H}_\phi)^T$.

$\mathbb{H}_I$ compare le traceur image I aux acquisitions images I^O :

$$\mathbb{H}_I(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(\mathbf{x}, t) = I^O(\mathbf{x}, t) - I(\mathbf{x}, t) \quad (4.10)$$

et l'équation d'observation associée s'écrit :

$$I^O(\mathbf{x}, t) - I(\mathbf{x}, t) = \epsilon_I(\mathbf{x}, t) \quad (4.11)$$

$\mathbb{H}_\phi$ compare $\phi(\mathbf{x}, t)$ à la distance $D_c(\mathbf{x}, t)$. Comme ϕ est signée, sa valeur absolue doit être quasiment égale à D_c , afin que la frontière $C(t)$ de l'objet soit bien positionnée sur les points de contour. La courbe $C(t)$ est supposée ne pas se déplacer de plus de s pixels, d'un pas de temps au suivant. Elle évolue donc à l'intérieur d'un voisinage $\mathcal{V}$. Il suffit de comparer D_c et $|\phi|$ dans ce voisinage. On introduit une fonction de pondération $\zeta_s(\mathbf{x})$, qui vérifie $\zeta_s(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x}$ est situé sur la courbe $C(t)$, puis la valeur de $\zeta_s(\mathbf{x})$ décroît au fur et à mesure que $\mathbf{x}$ s'éloigne de $C(t)$ et $\zeta_s(\mathbf{x})$ est infinitésimal ($< 10^{-5}$) en dehors de $\mathcal{V}$. L'opérateur d'observation $\mathbb{H}_\phi$ est défini par :

$$\mathbb{H}_\phi(\mathbf{Y}, \mathbf{X})(\mathbf{x}, t) = \zeta_s(\mathbf{x}) (|\phi(\mathbf{x}, t)| - D_c(\mathbf{x}, t)) \quad (4.12)$$

et l'équation d'observation associée s'écrit :

$$\zeta_s(\mathbf{x}) (|\phi(\mathbf{x}, t)| - D_c(\mathbf{x}, t)) = \epsilon_\phi(\mathbf{x}, t) \quad (4.13)$$

Les termes d'erreur ϵ_B , ϵ_I et ϵ_ϕ sont des variables gaussiennes, de moyenne nulle et non corrélées. La matrice de covariance de ϵ_B s'écrit B . Les variances respectives de ϵ_I et ϵ_ϕ sont notées R_I et R_ϕ . Pour résoudre le système (4.6, 4.9, 4.11, 4.13), il faut minimiser les erreurs ϵ_B , ϵ_I et ϵ_ϕ . Le problème se réécrit donc sous la forme de la minimisation de la fonction de coût :

$$J(\mathbf{X}(0)) = \int_0^T \langle \epsilon_I(t), R_I(t)^{-1} \epsilon_I(t) \rangle dt + \langle \epsilon_\phi(t), R_\phi(t)^{-1} \epsilon_\phi(t) \rangle dt + \langle \epsilon_B, B^{-1} \epsilon_B \rangle \quad (4.14)$$

La carte de distance $\phi(t)$ est advectée par le champ de mouvement $\mathbf{w}(t)$ selon l'équation (4.4). La propriété qui permet de caractériser la fonction ϕ comme une carte de distance s'écrit : $\|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)\| = 1$ pour tout point $\mathbf{x}$ du domaine Ω . La plupart des schémas numériques d'advection perdent cette propriété lors de l'intégration temporelle. Il faut donc définir une méthode qui assure que cette propriété reste vérifiée au cours de l'intégration temporelle de l'équation (4.4). De plus, étant donné que la courbe $C(t)$, qui correspond à $C(t) = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$, est initialisée par une courbe fermée C_B , la méthode développée doit assurer que $C(t)$ reste une courbe fermée au cours de l'advection, afin de caractériser l'objet suivi.

Deux approches sont considérées pour assurer ces propriétés. La première approche consiste à définir un champ de mouvement modifié, noté $\mathbf{w}_m(t)$, calculé à partir du champ de vitesse $\mathbf{w}(t)$, et d'utiliser $\mathbf{w}_m(t)$ pour advecter $\phi(t)$ en préservant la propriété $\|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)\| = 1$ au cours de l'intégration. Un champ $\mathbf{w}_m$, possédant cette propriété, peut être calculé sur tout le domaine image au moyen de la méthode dite de Fast Marching [86]. En utilisant de plus les schémas de discrétisation proposés par Sethian [86], on assure que $C(t)$ reste une courbe fermée. La méthode de Fast Marching a donc été examinée comme candidate pour le système d'assimilation d'images. Mais utiliser l'adjoint de la méthode du Fast Marching dans l'assimilation variationnelle 4D-Var nécessite de conserver en mémoire un tableau avec l'ordre dans lequel les pixels de l'image sont examinés. Le processus d'assimilation effectue de nombreux appels à ce tableau au cours des itérations de la minimisation et des intégrations directe et rétrograde. La conséquence immédiate est un besoin important en capacités mémoire et calcul, et une impossibilité de parallélisation du code. Nous avons donc abandonné l'idée d'utiliser ce champ modifié et avons considéré une seconde approche proposée par Sussman et al. [90]. À chaque date t , $\phi(t)$ est tout d'abord advecté par $\mathbf{w}(t)$. Le résultat obtenu n'est plus une carte de distance, il faut donc le modifier afin de retrouver en tout point la propriété $\|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)\| = 1$. Le module qui effectue cette modification est appelé module de réinitialisation.

Expliquons rapidement les grandes lignes de ce module. À une date t donnée, notons ϕ_t la fonction obtenue en advectant $\phi(t-1)$ par le champ de mouvement $\mathbf{w}(t-1)$. ϕ_t n'est plus une carte de distance. Considérons alors la valeur limite ψ_l de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \text{sign}(\phi_t)(1 - \|\nabla \psi\|) \quad (4.15)$$

avec la condition initiale $\psi(0) = \phi_t$. ψ_l est une carte de distance car elle vérifie $\|\nabla \psi_l(\mathbf{x})\| = 1$ pour tout $\mathbf{x}$. Si ψ_l a la même isocourbe de valeur 0 que ϕ_t , alors ψ_l est une carte de distance qui caractérise la courbe $C(t)$. Cette fonction ψ_l peut être affectée comme valeur à $\phi(t)$ avant de poursuivre l'intégration de t à $t+1$. La question de l'isocourbe de valeur 0 est discutée dans le

paragraphe suivant. Il faut rappeler que la fonction ϕ ne doit être calculée que dans la région $\mathcal{V}$, qui entoure la courbe frontière de l’objet, puisqu’on considère que le déplacement de l’objet d’une image à la suivante est borné par une valeur s . Le processus de réinitialisation, réalisé par l’intégration de l’équation (4.15), s’arrête donc quand la propriété $\|\nabla\psi_l(\mathbf{x})\| = 1$ est vérifiée pour tout $\mathbf{x}$ tel que $|\psi_l(\mathbf{x})| < s$. Sussman et al. [90] démontrent qu’il faut $\frac{s}{\Delta\tau}$ intégrations de l’équation (4.15), où $\Delta\tau$ représente le pas de discrétisation de la variable τ . Puisque le nombre de pas d’intégration est connu à l’avance, il devient possible d’écrire le programme de façon à ce que l’utilisation de l’adjoint par la méthode 4D-Var devienne raisonnable, en termes de capacité mémoire et temps de calcul.

Revenons à la courbe d’isovaleur nulle. Dans le cas continu, Sussman et al. [90] ont démontré que ψ_l a la même courbe d’isovaleur nulle que ϕ_t , appelée C_t . Toutefois, cette propriété n’est plus vérifiée après discrétisation. Définissons C_ϵ , un petit anneau de taille 2ϵ autour de C_t . Notons P_{ij} le pixel d’indices i et j . Au cours de l’intégration de l’équation (4.15), il faut que la valeur ψ_{ij} de ψ soit proche de la valeur $\phi_{t,ij}$, pour tout pixel P_{ij} qui intersecte l’anneau C_ϵ . De même, la valeur $\|\nabla\psi_{ij}\|$, dans C_ϵ , doit rester proche de $\|\nabla\phi_{t,ij}\|$. La solution est d’ajouter un terme de contrainte $\mu f(\phi_t)$ dans le terme de droite de l’équation (4.15), de façon à ce que $\text{sign}(\phi_t)(1 - \|\nabla\psi\|) + \mu f(\phi_t)$ soit de valeur quasi nulle dans C_ϵ . Ainsi la valeur de $\psi(\mathbf{x})$ n’évolue pas dans l’anneau C_ϵ . L’équation (4.15) devient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \text{sign}(\phi_t)(1 - \|\nabla\psi\|) + \mu f(\phi_t) \quad (4.16)$$

La définition de μ et f est décrite en détails dans [62].

Le module de réinitialisation est ajouté à l’évolution de ϕ dans l’équation (4.4). Après discrétisation spatio-temporelle, l’intégration du modèle d’évolution (4.5) s’écrit :

1. Initialisation de $\mathbf{w}(0)$, $I(0)$ et $\phi(0)$.
2. Pour $t = 0, \dots, T - 1$
 - (a) Réaliser l’advection par $\mathbf{w}(t)$ de $\mathbf{w}(t)$, $I_s(t)$, $\phi(t)$ afin d’obtenir $\mathbf{w}(t+1)$, $I_s(t+1)$, ϕ_{t+1} .
 - (b) En prenant ϕ_{t+1} comme valeur initiale, réaliser $\frac{s}{\Delta\tau}$ pas d’intégration du processus de réinitialisation en utilisant la loi d’évolution de ψ décrite par l’équation (4.16).
 - (c) Prendre $\phi(t+1) = \psi_l$.

4.2 Résultats

La méthode est tout d’abord quantifiée au moyen une expérience jumelle, présentée dans l’article [62], dont sont extraits les figures présentées dans ce manuscrit. Une séquence de 18 observations $I_i^O = I(t_i)$ pour $i = 1$ à 18, est obtenue par intégration temporelle du modèle d’évolution $\mathcal{M}$ de l’équation (4.5) à partir des conditions initiales, champ de vitesse et image satellite, visualisées sur la figure 4.1. Quatre des 18 observations sont visibles sur la figure 4.2. Les contours et les cartes de distance $D_c(\mathbf{x}, t_i)$ sont calculés sur les images I_i^O afin d’obtenir

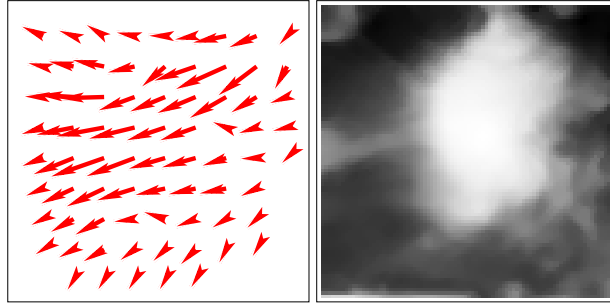


Figure 4.1 – Gauche : Champ de vitesse initial. Droite : Image initiale.

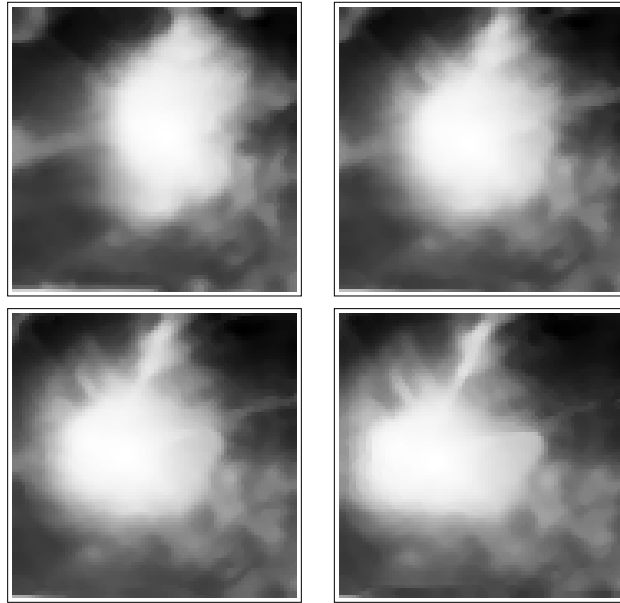


Figure 4.2 – Observations I_2^O , I_7^O , I_{12}^O , I_{17}^O .

le vecteur d'observation $\mathbf{Y}$. Une expérience d'assimilation est réalisée. On appelle $\mathbf{w}_e$ le champ estimé et $\mathbf{w}$ la vérité terrain. Des statistiques sur la différence entre $\mathbf{w}_e$ et $\mathbf{w}$, sont fournies par le tableau 4.1. La première colonne concerne le résultat obtenu par notre approche, tandis que la seconde présente l'erreur obtenue si le mouvement est estimé sans mettre de composante ϕ dans le vecteur d'état $\mathbf{X}$ (c'est-à-dire avec la méthode présentée dans le chapitre 2). La méthode

	avec ϕ	sans ϕ
Erreur sur la norme (en m.s^{-1}) : $ (\ \mathbf{w}_e\ - \ \mathbf{w}\) $	0.1	0.3
Erreur angulaire (en degrés)	9.6	13.0

Tableau 4.1 – Moyenne des erreurs entre champ estimé $\mathbf{w}_e$ et vérité terrain $\mathbf{w}$. La valeur moyenne de la norme de $\mathbf{w}$ est de 1.9 m.s^{-1} .

est difficilement comparable à celles de l'état de l'art, puisque le modèle d'évolution temporelle fournit un champ de vitesse différent à chaque pas de discrétisation de la fenêtre temporelle, alors que les méthodes de flot optique donnent un champ unique entre deux dates d'observation. Afin de faire l'analyse la plus objective possible, nous avons choisi d'advecier des points caractéristiques au moyen des différents champs de mouvement. Il est alors possible de comparer la position de ces points à la date finale. La figure 4.3 montre en rouge la position des points pour la vérité terrain, en bleu les résultats obtenus avec notre approche et en vert ceux de la méthode de flot optique décrite par Sun et al. [89]. Une ellipse bleue caractérise un point pour lequel notre méthode permet une meilleure estimation du mouvement, une ellipse grise correspond au cas où notre méthode est équivalente à celle de Sun, et une ellipse verte au cas où le résultat de Sun est meilleur. Notre méthode fournit un meilleur résultat sur 5 points, elle est équivalente à Sun pour 2 points, et le flot optique est le meilleur pour 1 point. En calculant les trajectoires sur plus de 200 points, on constate que l'erreur moyenne est d'environ 2 pixels pour notre méthode et dépasse les 4,6 pixels pour les autres méthodes testées [23, 45, 89].

La figure 4.4 illustre le processus de réinitialisation pour 4 pixels choisis aléatoirement dans l'image. On présente en abscisse le nombre d'itérations (avec un pas de temps fictif) du processus de réinitialisation et en ordonnée la norme du gradient de ϕ . On remarque que les 4 courbes convergent vers une valeur de norme égale à 1, afin d'assurer la propriété $\|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)\| = 1$.

L'approche d'estimation du mouvement et du suivi d'objet est ensuite appliquée à une séquence de 18 acquisitions satellite météorologiques, visualisant un nuage tropical sur la figure 4.5. Les résultats sont extraits de l'article [60]. La figure visualise également les points de contour, en vert, et le résultat de la méthode de suivi d'objet en rouge. Afin de mieux comprendre l'intérêt d'inclure une composante ϕ dans le vecteur d'état $\mathbf{Y}$, nous avons également visualisé, en bleu, le résultat de l'advection de $\phi(0)$ par le champ de mouvement calculé sans prendre en compte ϕ dans le vecteur d'état.

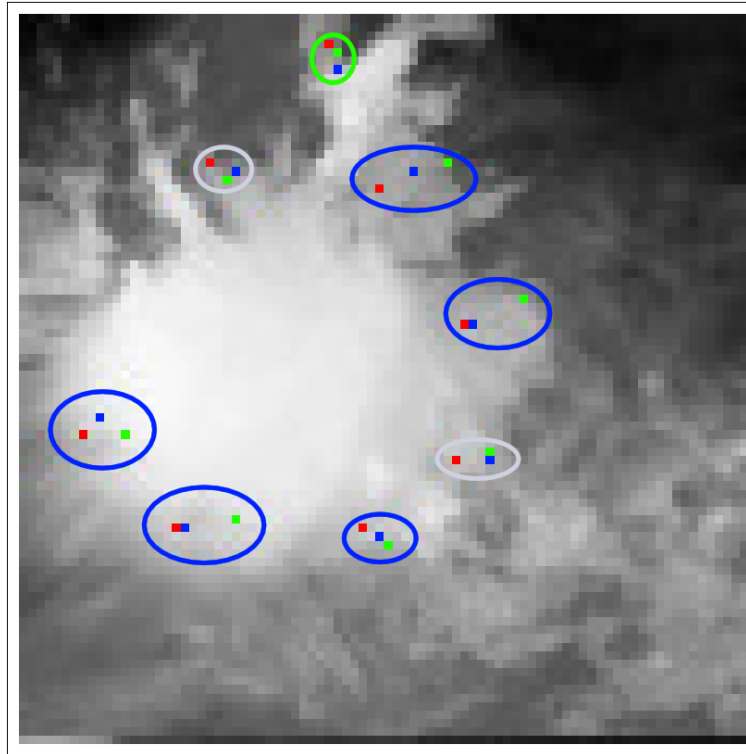


Figure 4.3 – Point rouge : vérité terrain. Point bleu : notre méthode. Point vert : flot optique de Sun et al. [89]. Ellipse bleue : notre méthode est la meilleure. Ellipse verte : le résultat de Sun est meilleur. Ellipse grise : résultats équivalents.

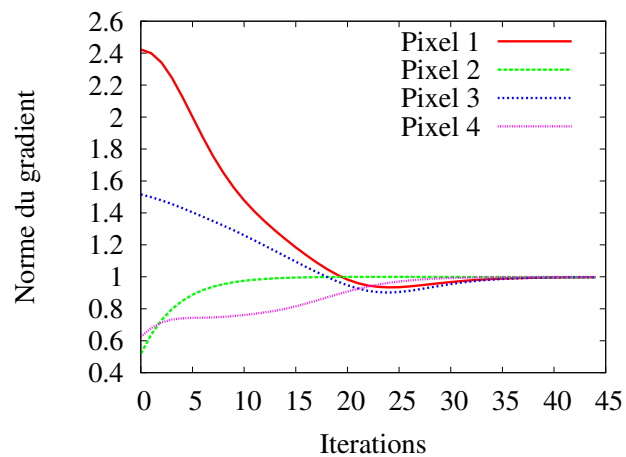


Figure 4.4 – Évolution de la norme du gradient au cours de la réinitialisation.

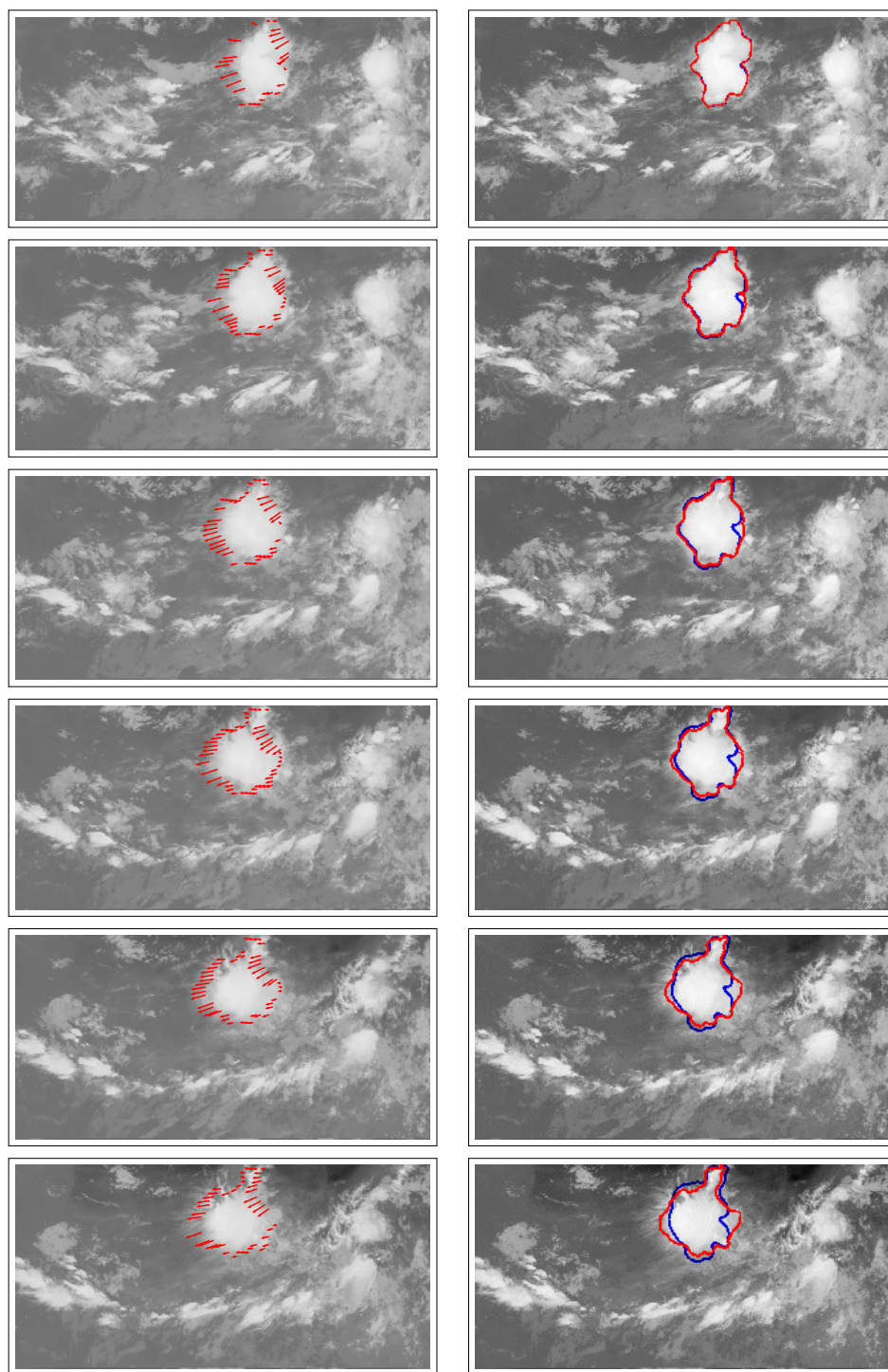


Figure 4.5 – Gauche : images satellite et mouvement. Droite : la courbe rouge correspond au mouvement obtenu avec ϕ , et la bleue sans ϕ .

4.3 Conclusion

La section 4.1 décrit une approche originale qui permet, simultanément, d'estimer le mouvement sur une séquence d'images et de suivre un objet particulier sur celle-ci. L'approche est basée sur une technique d'assimilation variationnelle de type 4D-Var. Le vecteur d'état inclut le champ de mouvement, les images et une fonction implicite ϕ , qui modélise la frontière de l'objet suivi. Le modèle d'évolution temporel choisi correspond à la conservation lagrangienne de la vitesse et au transport de l'image et de la carte de distance. Un module de réinitialisation a été développé afin que l'advection de la fonction implicite ϕ soit réalisée en conservant la propriété de carte de distance.

L'approche a été testée sur une expérience synthétique et sur des données météorologiques réelles, et les résultats présentés dans la section 4.2. Ceux-ci démontrent que le mouvement est mieux estimé si on inclut ϕ dans le vecteur d'état.

La méthode, en implémentation parallèle, est en cours de test opérationnel pour la prévision immédiate des pluies, et par voie de conséquence des crues rapides. Une étude en cours concerne l'utilisation de méthodes d'ensemble pour le suivi d'objets, à fin de traitement à la "volée" des images.

Méthodes d'ensemble

Alors que les autres chapitres du document reposent sur l'assimilation variationnelle dite 4D-Var, celui-ci s'intéresse à l'estimation du mouvement au moyen du filtre de Kalman d'ensemble [34]. Cette démarche est issue de l'analyse des limitations intrinsèques du 4D-Var : nécessité de calculer le modèle adjoint, temps de calcul nécessaire aux itérations avec intégrations directe et rétrograde, et surtout la non disponibilité d'une mesure d'incertitude du résultat.

Le filtre de Kalman d'ensemble est une alternative au filtre de Kalman [58] qui ne nécessite pas d'avoir une description analytique de la densité de probabilité associée à l'estimation, mais utilise un simple échantillonnage de cette fonction. Un ensemble de champs de mouvement est ainsi construit à la date initiale, qui sont intégrés en temps par le modèle. À chaque date, l'estimation est obtenue par la moyenne de l'ensemble et l'incertitude est décrite par la dispersion de l'ensemble.

La taille de l'ensemble (nombre de membres considérés dans l'ensemble) est un paramètre important, tant pour les contraintes en taille mémoire et temps de calcul que pour une estimation adéquate de l'incertitude sur le résultat. Dans les expériences présentées dans ce document, la taille de l'ensemble est limitée à 40. Dans le cas d'ensembles de petite taille, les valeurs des différents membres ont tendance à se rapprocher les unes des autres au cours de l'intégration. Cela s'appelle le rétrécissement de l'ensemble. Plusieurs méthodes permettent d'atténuer ce problème. Les méthodes dites d'"inflation" et de localisation [4, 36, 73] ont pour effet respectif d'augmenter les valeurs des variances et de diminuer les valeurs des covariances de la matrice de covariance calculée sur l'ensemble, avant chaque phase d'analyse (analyse au sens de l'assimilation de données : correction de l'état par les observations). D'autres méthodes, comme le filtre de Kalman d'ensemble déterministe [85], corrigent les membres après l'étape d'analyse de façon à ce que la matrice de covariance calculée à partir de ces membres soit proche de celle définie analytiquement par la formulation du filtre de Kalman. Beyou et al. [16] ont utilisé le filtre de Kalman d'ensemble pour l'estimation du mouvement en écrivant chaque membre comme une valeur moyenne et une perturbation. Lors du calcul de l'analyse, ce formalisme a l'inconvénient de nécessiter une inversion supplémentaire, si elle n'est pas diagonale, de la matrice de covariance de l'erreur d'observation (et donc du temps de calcul supplémentaire). Leur approche évite le rétrécissement par un rééchantillonnage de l'ensemble

avant une nouvelle étape d'intégration. Nous avons fait un choix différent en souhaitant bâtir la méthode d'estimation du mouvement en utilisant uniquement les images. Cette contrainte s'applique également à la recherche d'une solution au problème de rétrécissement. Nous avons donc examiné les solutions précédemment citées. Même si la valeur optimale du paramètre d'inflation (optimale afin de garder un ensemble dispersé) peut être automatiquement calculée [3], son estimation repose sur des propriétés autres que les valeurs des images étudiées. Le filtre de Kalman d'ensemble déterministe calcule la matrice de covariance des perturbations après chaque analyse, ce qui conduit à une surcharge de calcul. L'étape de rééchantillonnage appliquée par Beyou et al. [16] fait que la matrice de covariance, calculée à partir des membres de l'ensemble, ne caractérise plus l'incertitude sur le mouvement. Ces trois approches ont donc été abandonnées au profit de la définition d'ensembles d'observations [46], construits à partir des caractéristiques des images. Nous utilisons aussi un processus de localisation afin de limiter les covariances inadéquates entre pixels. Il est basé sur la distance entre points (des points éloignés sont généralement indépendants) et leur similarité (des points d'une même structure sont corrélés).

La section 5.1 fournit quelques rappels sur le filtre de Kalman d'ensemble. La section 5.2 présente la construction de l'ensemble et sa propagation en temps. Enfin la section 5.3 présente les résultats obtenus sur des données synthétiques et réelles. Les notations utilisées dans ce chapitre sont explicitées dans la section 5.1. Elles diffèrent légèrement de celles des chapitres précédents. En particulier, le filtre est décrit de façon discrète en temps, alors que la description des méthodes 4D-Var reposait sur des formulations continues.

5.1 Filtre de Kalman d'ensemble

Soit $\mathbf{x} = (x \ y)^T$ un point du domaine Ω . La séquence de N^O images $\{I_l^O, \ l \in 1..N^O\}$ est acquise sur l'intervalle temporel $0..T$ et définie sur Ω .

La valeur du vecteur d'état à l'indice temporel k est : $\mathbf{X}_k = (\mathbf{w}_k^T \ I_k)^T$, avec $\mathbf{w} = (u \ v)^T$ le champ de mouvement et I le traceur image. Si une acquisition image est disponible à l'indice k , elle est utilisée pour calculer le vecteur d'observation $\mathbf{Y}_k$. Le but est de calculer une analyse $\mathbf{X}_k^{(a)}$, afin d'approximer au mieux la vraie valeur du vecteur d'état $\mathbf{X}_k^{(r)}$, à partir de la valeur d'ébauche $\mathbf{X}_k^{(b)}$ et de l'observation $\mathbf{Y}_k$.

Les méthodes d'ensemble reposent sur des membres qui évoluent simultanément en temps. $\mathbf{X}_k^j$ représente le vecteur d'état du $j^{\text{ème}}$ membre de l'ensemble à l'indice temporel k .

Un ensemble d'observations est calculé à partir des images : $\mathbf{Y}_k^j$ est le $j^{\text{ème}}$ membre de l'ensemble calculé à l'indice k .

Le symbole $\bar{\cdot}$ représente la moyenne d'une grandeur, calculée sur les membres.

Le filtre de Kalman [58] effectue une intégration temporelle du modèle et fournit une approximation de la vraie valeur $\mathbf{X}_k^{(r)}$ du vecteur d'état ainsi que l'incertitude de cette estimation. Il repose sur les éléments suivants :

- une valeur d'ébauche $\mathbf{X}_0^{(b)}$, ainsi que son incertitude, associée à une densité de probabi-

- lité supposée être une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{B}_0^{(b)}$.
- des observations $\mathbf{Y}_k$, aux indices k auxquels des images sont disponibles. Leur incertitude est associée à des lois normales de moyennes nulles et de matrices de covariance $\mathbf{R}_k$.
- À l'indice k , le vecteur d'état $\mathbf{X}_k$ et le vecteur d'observation $\mathbf{Y}_k$ sont comparés au moyen de l'opérateur d'observation $\mathbf{H}$.
- L'intégration temporelle est effectuée par le modèle linéaire $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{M}\mathbf{X}_{k-1} \quad (5.1)$$

Les équations du filtre de Kalman, dans le cas d'un opérateur d'observation $\mathbf{H}$ linéaire, sont les suivantes :

- À l'indice k , la valeur de background $\mathbf{X}_k^{(b)}$ est obtenue à partir de l'analyse $\mathbf{X}_{k-1}^{(a)}$ calculée à l'indice $k-1$:

$$\mathbf{X}_k^{(b)} = \mathbf{M}\mathbf{X}_{k-1}^{(a)} \quad (5.2)$$

La propagation de la matrice de covariance de l'incertitude $\mathbf{B}_k^{(b)}$ s'écrit :

$$\mathbf{B}_k^{(b)} = \mathbf{M}\mathbf{B}_{k-1}^{(a)}\mathbf{M}^T. \quad (5.3)$$

- Si aucune observation n'est disponible à l'indice k , l'estimation $\mathbf{X}_k^{(a)}$ et son incertitude $\mathbf{B}_k^{(a)}$ sont égales à celles du background.
- Si un vecteur d'observation $\mathbf{Y}_k$ est disponible, alors l'analyse est obtenue par :

$$\mathbf{X}_k^{(a)} = \mathbf{X}_k^{(b)} + \mathbf{B}_k^{(b)}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}_k^{(b)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1}(\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\mathbf{X}_k^{(b)}), \quad (5.4)$$

La matrice de covariance associée à l'incertitude vérifie :

$$\mathbf{B}_k^{(a)} = \mathbf{B}_k^{(b)} - \mathbf{B}_k^{(b)}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}_k^{(b)}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{B}_k^{(b)}. \quad (5.5)$$

Après avoir résumé les équations du filtre de Kalman, nous devons discuter deux points. Premièrement, la propagation temporelle de la matrice $\mathbf{B}_k^{(b)}$ selon l'équation (5.3) conduit à des contraintes numériques prohibitives pour des vecteurs d'état de grande taille. Deuxièmement, si $\mathbf{M}$ est non linéaire, alors le modèle tangent linéaire est utilisé dans l'équation (5.3). La valeur obtenue pour $\mathbf{B}_k^{(b)}$ n'est alors qu'une approximation de la vraie valeur. Dans ce document, le modèle $\mathbf{M}$ exprime la conservation lagrangienne de la vitesse. Il inclut des équations non linéaires et les approximations sont donc appliquées. Ces deux points sont à l'origine de l'utilisation du filtre de Kalman d'ensemble. Un ensemble de vecteurs d'état $\mathbf{X}_k^{(b),j}$ est considéré à chaque indice k . Il échantillonne la matrice $\mathbf{B}_k^{(b)}$. Soit $\mathbf{X}_k^{(b)} = \overline{\mathbf{X}_k^{(b),j}}$ la moyenne des membres de l'ensemble. Une approximation de la matrice est obtenue en calculant :

$$\mathbf{B}_k^{(b)} \approx \overline{(\mathbf{X}_k^{(b),j} - \mathbf{X}_k^{(b)})(\mathbf{X}_k^{(b),j} - \mathbf{X}_k^{(b)})^T}. \quad (5.6)$$

L'ensemble est initialisé à la date 0, puis il est propagé en temps en intégrant chaque membre selon l'équation (5.1). En l'absence d'observation, l'analyse $\mathbf{X}_k^{(a)}$ est égale à $\mathbf{X}_k^{(b)}$ et l'incertitude est approximée selon l'équation (5.6). Si une observation est disponible à l'indice k , une analyse est calculée pour chaque membre j :

$$\mathbf{X}_k^{(a),j} = \mathbf{X}_k^{(b),j} + \mathbf{B}_k^{(b)} \mathbb{H}^T (\mathbb{H} \mathbf{B}_k^{(b)} \mathbb{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{Y}_k - \mathbb{H} \mathbf{X}_k^{(b),j}) . \quad (5.7)$$

L'estimation est définie par $\mathbf{X}_k^{(a)} = \overline{\mathbf{X}_k^{(a),j}}$ et son incertitude est calculée en remplaçant l'exposant $^{(b)}$ par $^{(a)}$ dans l'équation (5.6).

5.2 Estimation du mouvement

Les membres de l'ensemble sont intégrés en temps par le modèle numérique $\mathbb{M}$, obtenu par discrétisation temporelle d'un modèle continu $\mathbb{M}_c$. Les heuristiques pour l'évolution du mouvement et des images sont les mêmes que dans les chapitres précédents et les équations continues s'écrivent :

— conservation lagrangienne de la vitesse $\mathbf{w}$:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = 0 \quad (5.8)$$

— transport du traceur image :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla I = 0 \quad (5.9)$$

Le cœur de la méthode repose sur la construction de l'ensemble initial. Il doit représenter une base de l'espace vectoriel dans lequel évolue le vrai mouvement et il doit également représenter au mieux les incertitudes. Dans la littérature, l'ensemble initial est généralement obtenu en perturbant une valeur donnée au moyen de la méthode de Monte Carlo. Notre approche est différente puisque l'ensemble est construit en se basant sur les propriétés image. Chaque élément de l'ensemble est composé d'un champ de mouvement et d'une image. Nous choisissons de ne pas construire d'ensemble image : à la date initiale, tous les éléments de l'ensemble ont la même composante image, identique à la première observation. Mais comme l'image est un traceur de la dynamique sous-jacente, le transport de cette image identique par des champs de mouvement différents, conduit à obtenir des champs image différents aux indices temporels ultérieurs. De nombreuses méthodes d'estimation du mouvement existent dans la littérature et une rapide présentation est donnée dans [89]. Les méthodes diffèrent dans la formulation choisie pour exprimer l'équation du flot optique, dans les hypothèses de régularité utilisées, dans l'implémentation. Pour chaque approche, des résultats différents sont obtenus selon les valeurs des paramètres. Une méthode particulière peut être optimale sur une partie de la séquence. Le même phénomène s'observe en espace, puisque différentes méthodes peuvent être mieux adaptées aux différentes régions de l'image. Cette observation est à l'origine de travaux

de recherche, dans lequel le terme d'attache aux données est variable dans le domaine spatio-temporel [68]. Dans le même esprit, nous sommes arrivés à la conclusion que la construction d'un ensemble de champs de mouvement obtenus par des algorithmes variés, pour différentes formulations et paramétrisations, est le meilleur moyen d'approximer l'espace vectoriel dans lequel se trouve le vrai champ de mouvement et d'estimer l'incertitude sur l'estimation. Les algorithmes de flot optique utilisés reposent sur la conservation de la luminosité [45] et estiment le mouvement par minimisation d'une fonction de coût, incluant un terme d'attache aux données et un terme de régularisation. Le coefficient de pondération associé à celui-ci permet de définir les propriétés de la solution. Une petite valeur implique que la solution est plus proche des données alors qu'une grande valeur impose une solution lisse. Trois types de norme sont utilisés pour calculer la fonction de coût : la norme quadratique [45], la norme de Charbonnier [18], et la norme de Lorentz [17]. Pour chaque méthode, une approche pyramidale, allant des basses vers les fines échelles, est utilisée au cours la minimisation. À chaque changement de résolution, le champ de mouvement est tout d'abord lissé au moyen d'un filtre médian, dont la taille est un paramètre qui influe sur la qualité du résultat [89]. Un ensemble de champs de mouvement $\mathbf{m}^j$ est ainsi obtenu en utilisant toutes les possibilités décrites. Soit $\mathbf{m} = \overline{\mathbf{m}^j}$ la moyenne sur l'ensemble. La mesure d'incertitude de cette estimation est définie par :

$$\mathbf{B} = \overline{(\mathbf{m}^j - \mathbf{m})(\mathbf{m}^j - \mathbf{m})^T} . \quad (5.10)$$

Avoir ainsi estimé l'incertitude des méthodes de flot optique pour l'estimation du mouvement permet de construire un ensemble, obtenu en perturbant une valeur initiale déterminée, selon la loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance $\mathbf{B}$. Un membre de l'ensemble est noté $\mathbf{w}^j$. La valeur initiale choisie est calculée par les méthodes de Sun et al. [89] ou Isambert et al. [54].

Au cours de la propagation, une méthode de localisation est utilisée lors du calcul des analyses selon l'équation (5.7). Cette localisation évite les covariances non significatives, qui sont présentes dans le calcul effectué par l'équation (5.6). Ces covariances concernent des pixels qui devraient être indépendants car éloignés ou appartenant à des objets différents, et pour lesquels le calcul discret se révèle inexact. Soient ρ la matrice de localisation et $\circ$ le produit d'Hadamard. Le processus de localisation est appliqué en modifiant la matrice de corrélation de l'ébauche :

$$\mathbf{L}_k^{(b)} = \rho \circ \mathbf{B}_k^{(b)} \quad (5.11)$$

et en utilisant la valeur $\mathbf{L}_k^{(b)}$ au lieu de $\mathbf{B}_k^{(b)}$ dans l'équation (5.7). Il vient donc :

$$\mathbf{X}_k^{(a),j} = \mathbf{X}_k^{(b),j} + \mathbf{L}_k^{(b)} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{L}_k^{(b)} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{Y}(k) - \mathbf{H} \mathbf{X}_k^{(b),j}) \quad (5.12)$$

Deux types de méthodes permettent de définir la matrice ρ . Tout d'abord, ρ (qui sera alors notée ρ_d avec d pour distance) peut être définie en fonction de la distance entre points, de façon à ce que la corrélation entre les points éloignés soient presque nulles. Soient $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ deux points du domaine image, ρ_d est définie par

$$\rho_d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left(1 + \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2}{a}\right) \times \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2}{a}\right) . \quad (5.13)$$

Le paramètre α de l'équation (5.13) est appelé distance de décorrélation. Les valeurs de ρ_d en fonction de la distance $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ sont représentées sur la figure 5.1 pour trois valeurs distinctes de α . Par ailleurs, la matrice ρ est également utilisée pour annuler les corrélations entre points

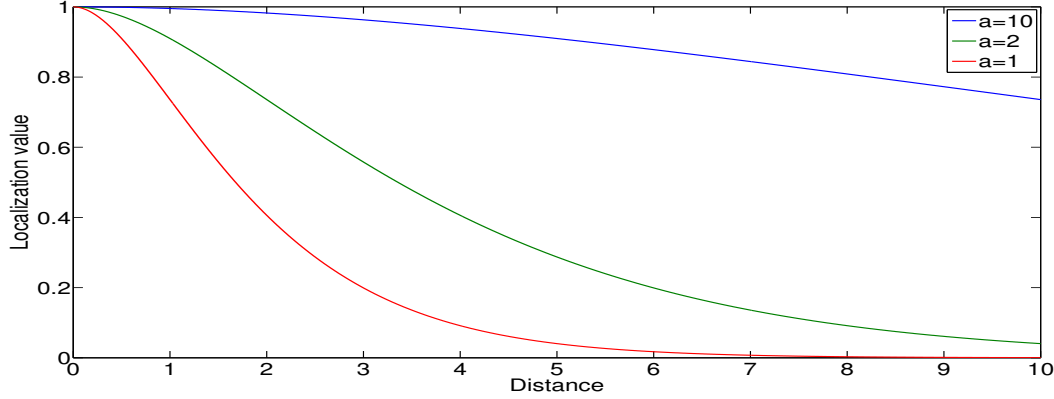


Figure 5.1 – Valeur de ρ_d en fonction de la distance, pour $\alpha = 1, 2$ et 10 .

appartenant à des objets différents. Dans ce cas, elle est notée ρ_s et dépend de la similarité entre les points. Soient I_1 et I_2 les mesures de similarité associées aux points $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$. La matrice ρ_s est définie par :

$$\rho_s(I_1, I_2) = \left(1 + \frac{\|I_1 - I_2\|_2}{\alpha_l}\right) \times \exp\left(-\frac{\|I_1 - I_2\|_2}{\alpha_l}\right). \quad (5.14)$$

La matrice ρ de l'équation (5.11) est obtenue par combinaison de ρ_d et ρ_s . Cela permet que la corrélation entre pixels éloignés et celle entre pixels d'objets différents soit presque nulle.

Comme expliqué en introduction de ce chapitre, des ensembles d'observations sont utilisés pour éviter le rétrécissement de l'ensemble de vecteurs d'état lors de l'étape d'analyse. Chaque membre de l'ensemble assimile ainsi une observation distincte. L'ensemble d'observations est défini à partir des informations disponibles sur le capteur, en particulier au moyen de la caractérisation du bruit d'acquisition par une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ :

$$I_k^O = I_k^{(r)} + \mathcal{N}(0, \sigma), \quad (5.15)$$

où I_k^O représente l'acquisition, à l'indice temporel k , d'une vérité inconnue $I_k^{(r)}$. Chaque membre I_k^j de l'ensemble est créé en ajoutant à l'acquisition réalisée par le capteur une perturbation selon la même loi normale :

$$I_k^j = I_k^O + \mathcal{N}(0, \sigma). \quad (5.16)$$

Dans les expériences, nous considérons un ensemble d'observations de 20 éléments, ce qui permet d'échantillonner correctement la loi normale et d'éviter le rétrécissement.

5.3 Résultats obtenus par le filtre de Kalman d'ensemble

Considérons le champ de mouvement et l'image de la figure 5.2. Le modèle $\mathcal{M}$ est inté-

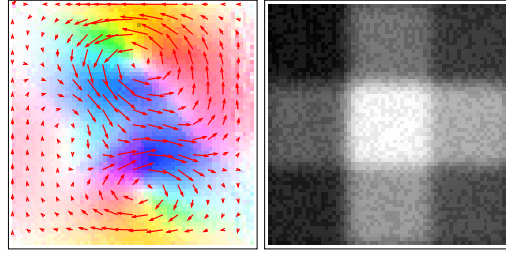


Figure 5.2 – Conditions initiales.

gré en temps, selon les équations 5.8 et 5.9, à partir de ces conditions initiales. Les champs de mouvement obtenus par cette intégration sont considérés comme la vérité terrain permettant d'évaluer la qualité des résultats. 7 images, 1 tous les 10 pas de temps, sont utilisées en tant qu'observations pour le processus d'assimilation. Elles sont visualisées sur la figure 5.3 et les ensembles d'observations sont construits à partir de ces données. Un ensemble de 40 membres

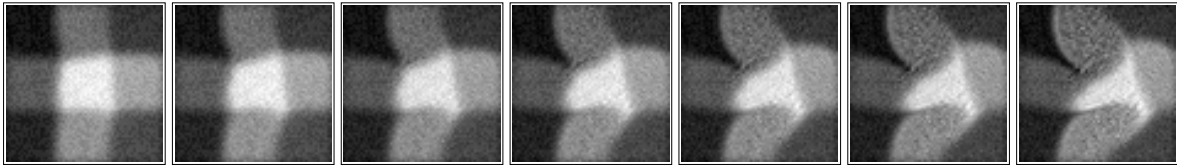


Figure 5.3 – Observations images.

de champs de mouvement est construit comme expliqué dans la section 5.2.

Le filtre de Kalman d'ensemble est alors utilisé pour estimer le mouvement, avec ou sans méthode de localisation, selon l'équation (5.12) ou l'équation (5.7). La distance de décorrélation utilisée a une valeur de 1. Les statistiques d'erreur entre l'estimation et la vérité terrain sont calculées. Celles portant sur les erreurs angulaires sont visualisées sur la figure 5.4, afin d'observer l'impact de la délocalisation. Les valeurs absolues des erreurs angulaires de 20 membres tirés au sort dans l'ensemble sont représentées par les courbes bleues. L'erreur de la moyenne de l'ensemble est visualisée en rouge. L'ensemble initial est très dispersé. La première étape d'analyse, à la date 10, réduit de façon très importante les erreurs. On peut observer l'impact de la localisation : l'ensemble garde une dispersion plus importante au cours du temps. Ce point est fondamental, car, à la limite, lorsque la matrice $\mathbf{B}_k^{(b)}$ est presque nulle, l'étape d'analyse n'a plus d'effet, comme le montre l'équation (5.7). Il est donc important, pour réaliser un traitement online des images, au fur et à mesure de leur acquisition, de conserver une dispersion suffisante et d'utiliser la localisation. De plus, comme on peut le voir sur la figure 5.4, la localisation permet d'améliorer l'exactitude de l'estimation. Elle conduit à des statistiques d'erreur inférieures et à une amélioration des estimations, même après 6 ou 7 étapes d'analyse alors que

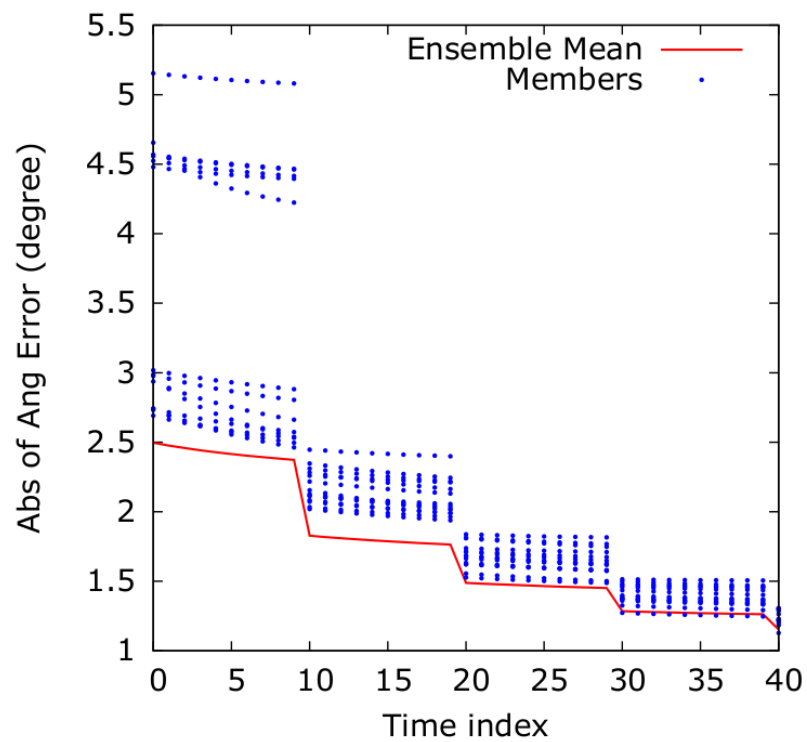
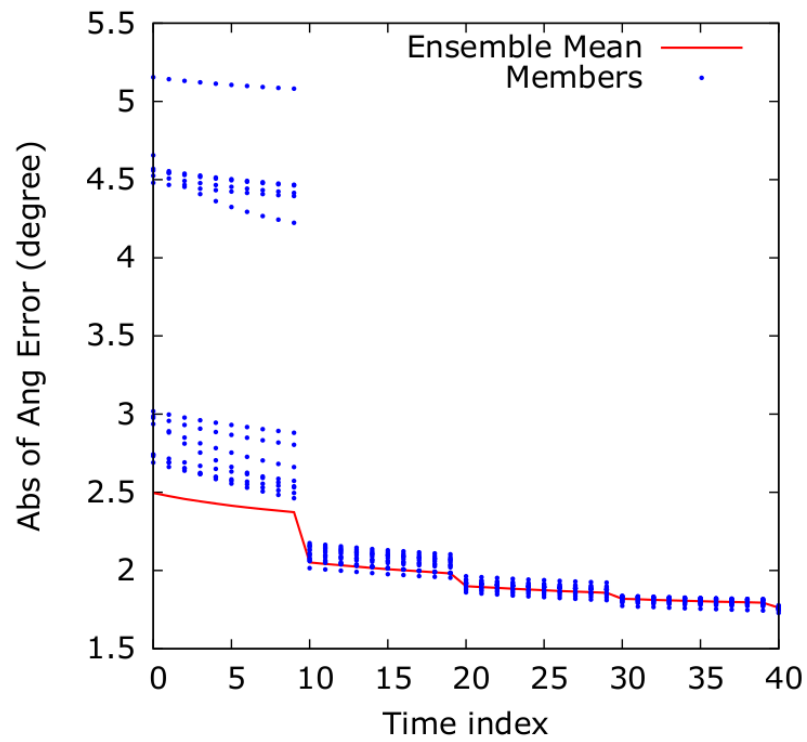


Figure 5.4 – Haut : erreur angulaire sans localisation. Bas : avec. Bleu : un membre de l'ensemble. Rouge : la moyenne de l'ensemble.

sans localisation, l'analyse n'a plus aucun effet après la 5ème étape. À la date 10, l'erreur de l'estimation décroît de 2,3 à 1,8 ou 2,1 selon que l'on utilise ou pas la localisation. Après la 8ème analyse, cette erreur a une valeur de 0,7 avec et de 1,7 sans localisation.

La méthode est également testée sur des images de trafic de la base de données KOGS/IAKS de l'université de Karlsruhe [70]. 4 images de la première séquence traitée sont visibles sur la figure 5.5. L'approche est appliquée sur ces données afin d'estimer le mouvement des véhicules.



Figure 5.5 – Séquence de trafic 1.

La qualité des résultats est vérifiée en calculant les trajectoires de points caractéristiques. La figure 5.6 présente une courbe par point et chaque cercle donne la position du point sur l'image concernée. L'intégration temporelle du mouvement, calculée pour obtenir les trajectoires, permet un suivi correct, qui valide a posteriori les champs de mouvement sous-jacents.

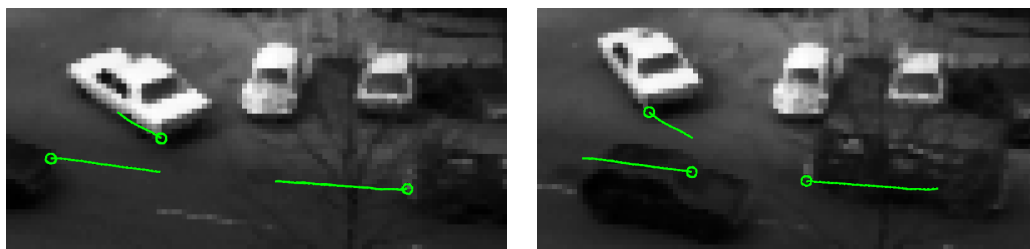


Figure 5.6 – Positions initiale et finale des points caractéristiques.

Une seconde séquence est illustrée sur la figure 5.7. Les trajectoires résultats sont fournies



Figure 5.7 – Séquence de trafic 2.

sur la figure 5.8. En raison de l'accélération des voitures lorsque le feu passe au vert, l'algorithme sous-estime légèrement la vitesse. Une implémentation future incorporera donc, comme dans le chapitre 2, un terme d'accélération.

Quatre images d'une troisième séquence sont visibles sur la figure 5.9. Un ensemble de 40

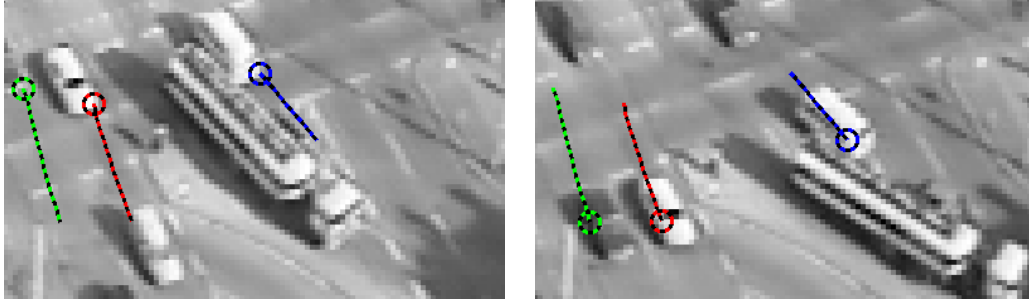


Figure 5.8 – Positions initiale et finale des points caractéristiques.

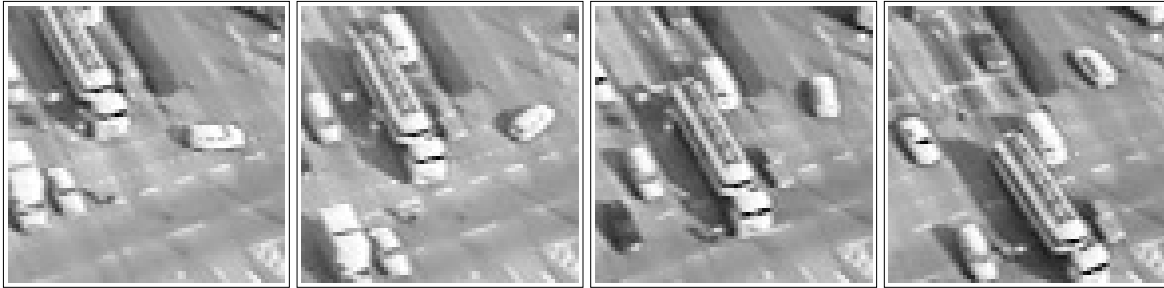


Figure 5.9 – Séquence de trafic 3.

membres de champs de mouvement est construit comme expliqué dans la section 5.2 et quatre d'entre eux sont visibles sur la figure 5.10. La figure 5.11 présente les trajectoires de trois points

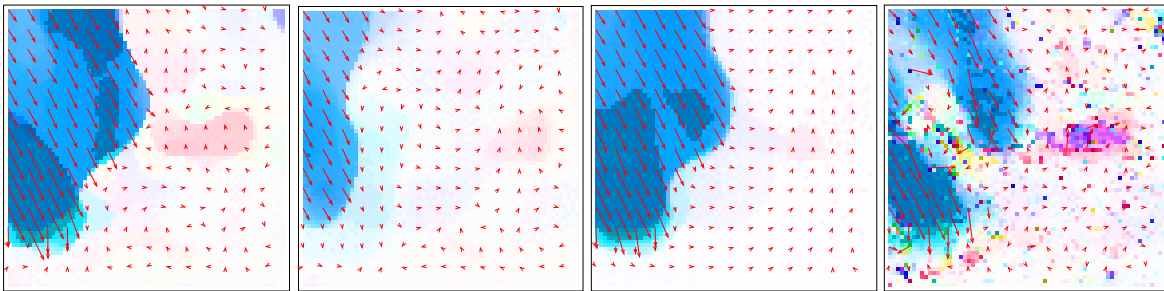


Figure 5.10 – Quatre membres de l'ensemble.

caractéristiques, dont un situé sur un véhicule faisant demi-tour au carrefour.

La méthode a également été testée sur des images satellite météorologiques (voir figure 5.12), visualisant le déplacement de cellules convectives. Les images sont acquises à 5km de résolution, toutes les 15 minutes, dans le domaine infrarouge, par le satellite MSG2. Le résultat de l'advection de la frontière d'une cellule est donné sur la figure 5.13.

Les première et dernière images d'une seconde séquence sont visibles sur la figure 5.14. Le résultat permet sur la figure 5.15 de suivre la frontière d'une nuage et de démontrer ainsi l'exactitude de l'estimation du mouvement.

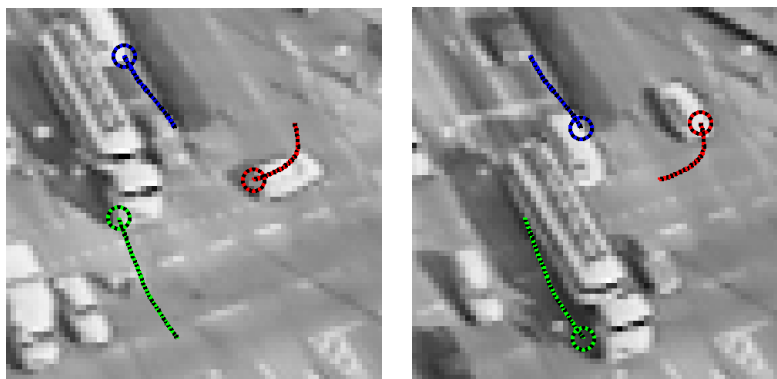


Figure 5.11 – Positions initiales et finales des points caractéristiques.

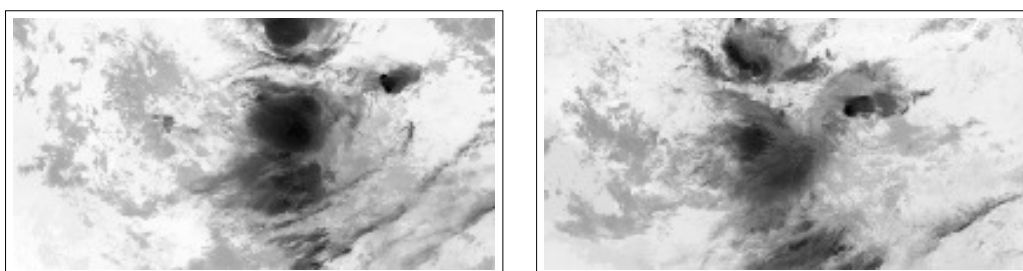


Figure 5.12 – Deux images de la séquence.

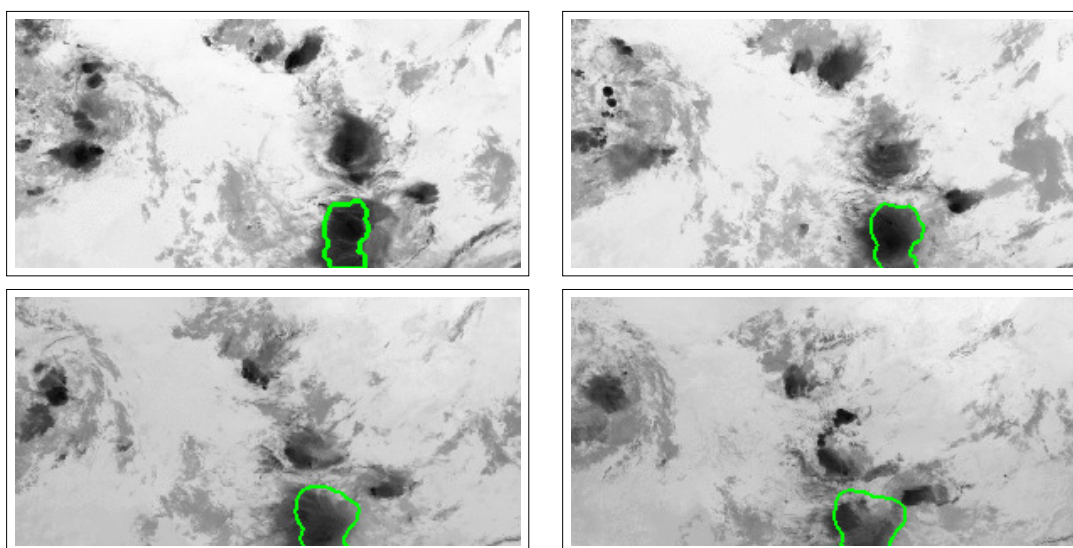


Figure 5.13 – Trajectoires.

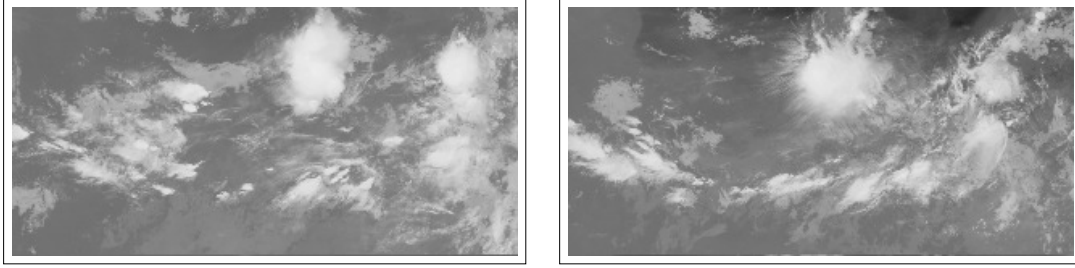


Figure 5.14 – Deuxième séquence.

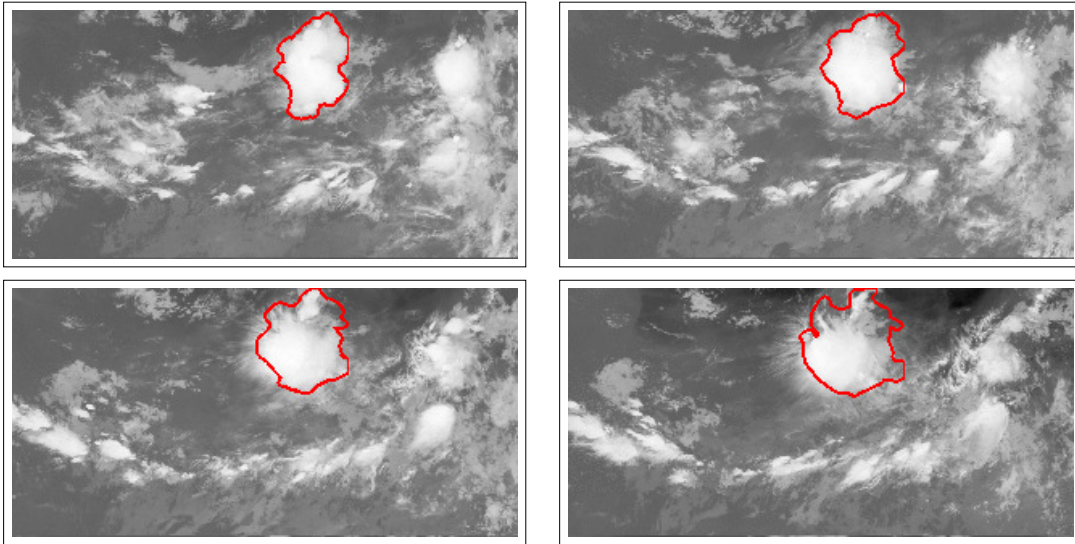


Figure 5.15 – Advection de la frontière du nuage.

5.4 Conclusion

Ce chapitre décrit une méthode d'estimation de mouvement basée sur le filtre de Kalman d'ensemble. L'ensemble initial de champs de mouvement est défini à partir de propriétés images et de méthodes de flot optique, disponibles dans la littérature. L'effet de rétrécissement de l'ensemble, habituel après quelques étapes d'analyse, est pris en compte au moyen de la construction d'ensembles d'observations et d'une méthode de localisation, toutes deux définies par les propriétés images. L'approche est testée sur des données synthétiques, qui permettent de quantifier les processus, et sur des données de trafic et des acquisitions satellite.

Les perspectives de ce travail concernent la prise en compte de l'accélération dans la dynamique, comme nous l'avons discuté au chapitre 2 et la description des objets et structures visualisés par les images comme dans le chapitre 4. Le traitement temps réel des données sera effectué grâce à deux étapes supplémentaires. La réduction du modèle d'évolution, selon une approche fenêtre glissante, permettra d'obtenir un vecteur d'état limité à une vingtaine de composantes, pour lequel l'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble pourra être appliqué à bas coût. Par ailleurs, toutes les étapes de la méthode doivent être parallélisées : filtre pour l'assi-

milation, calcul des bases mouvement et image, et réduction du modèle.

Conclusion et perspectives

Les chapitres 2 à 5 de ce document ont présenté les grandes lignes de la recherche que j'ai effectuée sur la problématique de l'assimilation d'images. Ce dernier chapitre a pour objet de résumer brièvement l'ensemble des travaux effectués dans Clime sur une période de quatre ans, puis de donner des indications concernant les objectifs scientifiques sur la prochaine période.

6.1 Résumé des travaux

Estimation du vecteur d'état. Application au traitement d'image

Un système d'assimilation 4D-Var a été développé et adapté aux différents types de dynamique visualisée sur les séquences d'images : mouvement stationnaire, constance lagrangienne, équations shallow water, approximation géostrophique. Ce système a été appliqué pour différentes applications telles que l'estimation du mouvement et le suivi d'objets. Les modèles d'évolution implémentés ont été utilisés pour étudier des types de données variés, aussi bien des images satellitaire de l'océan et de l'atmosphère que des vidéos de trafic routier.

Une approche d'estimation du mouvement au moyen d'un filtre minimax a également été implémentée, qui repose sur une méthode itérative dont l'initialisation est effectuée par les résultats du 4D-Var. Il s'agit d'assurer des propriétés d'optimalité sur le résultat et d'associer une mesure d'incertitude à l'estimation. À chaque itération, 1- une estimation minimax de la fonction image est obtenue à partir des acquisitions image et de l'estimation du mouvement à l'étape précédente. Cette fonction image vérifie l'équation linéaire du transport par le mouvement, 2- Le mouvement estimé à l'itération précédente est utilisé dans les équations de Navier-Stokes afin de se ramener à un problème linéaire. Une nouvelle estimation minimax du mouvement est alors calculée. Les deux points sont itérés jusqu'à convergence.

L'approche 4D-Var et celle du filtre minimax ont été appliquées au problème de l'estimation des données manquantes, liées au bruit d'acquisition ou aux occlusions (par exemple les nuages sur les images satellite de l'océan). L'intérêt de l'approche est que les valeurs manquantes sont restituées au moyen des lois d'évolution et donc des acquisitions passées ou futures, et non en fonction du voisinage spatial.

Utilisation de modèles réduits

La Décomposition Orthogonale Propre a été utilisée pour estimer des espaces vectoriels de taille réduite, permettant la représentation des images et des champs de mouvement. Des modèles réduits ont alors été obtenus par projection de Galerkin des équations d'évolution sur ces espaces. Sans information additionnelle sur le mouvement, nous avons défini une méthode par fenêtre glissante : 1- sur la première sous-fenêtre, le mouvement est estimé par assimilation d'images dans un modèle complet (sur la grille image) ou dans un modèle réduit à base fixe, 2- sur les sous-fenêtres suivantes, la POD est réalisée sur les champs de mouvement obtenus par simulation à partir du résultat de la fenêtre précédente.

Un travail spécifique a été dédié à la conception de bases optimales à partir de propriétés définies par l'utilisateur : géométrie du domaine, conditions aux bords, propriétés des images et du mouvement (par exemple mouvement à divergence nulle).

Erreur modèle. Estimation de l'accélération

Les modèles image reposent sur des heuristiques concernant l'évolution des images et du mouvement. Considérer que ces heuristiques ne sont que des approximations, et ajouter un terme d'erreur modèle aux équations d'évolution conduit au développement de méthodes d'assimilation 4D-Var dites à contraintes faibles. Nous avons implémenté une méthode d'assimilation de données incrémentale pour estimer le mouvement dans ce contexte, afin de démontrer que ce type d'approche permet une amélioration de l'estimation et une localisation en temps des termes d'erreurs.

Une méthode d'estimation de l'accélération a également été implémentée en ajoutant ce terme à l'équation d'évolution lagrangienne. La validation de cette accélération a été effectuée sur des données de trafic. Pour des données satellites océanographiques, cette estimation de l'accélération permet d'obtenir une évaluation des forces de gravité et de Coriolis, sous-jacentes à la dynamique des images.

Opérateur d'observation non linéaire

Les séquences d'images satellite montre le déplacement de structures météorologiques, comme les nuages, ou d'objets océaniques, comme les vortex. Elles correspondent à des mesures de variables physiques telle que la pression, la température de surface, la hauteur d'eau, la concentration en chlorophylle, etc. Ces objets et ces variables ne sont pas forcément inclus dans les composantes du vecteur d'état. Un opérateur d'observation non linéaire, voire implicite, est alors nécessaire.

L'intérêt d'utiliser un opérateur d'observation non linéaire, correspondant à l'équation du flot optique dans sa forme originale, est démontré pour l'estimation du mouvement dans le contexte de grands déplacements.

Le problème du suivi d'objet a été étudié au moyen d'opérateurs d'observation implicites, basés sur la fonction caractérisant l'objet. L'utilisation de telles fonctions, caractéristiques des structures images, permet une estimation du mouvement améliorée en raison de l'impact de la variable adjointe de cette fonction sur la variable adjointe du mouvement lors de l'intégration rétrograde de l'assimilation variationnelle 4D-Var.

Construction d'ensembles à partir de propriétés images

Des travaux d'estimation du mouvement ont été menés au moyen du filtre de Kalman d'en-

semble. Celui-ci permet le calcul de la matrice de covariance d'erreur de l'estimation à partir des membres de l'ensemble et ne nécessite pas la propagation en temps de la matrice analytique, comme c'est le cas pour le filtre de Kalman. Un point clé pour l'implémentation de ce filtre est la construction de l'ensemble initial, qui est ensuite intégré en temps par le modèle. Dans notre approche, l'ensemble des champs de mouvement est conçu à partir d'un champ initial, choisi en raison de sa pertinence, et d'une perturbation selon une loi normale dont la matrice de covariance est elle-même estimée à partir des images. Un grand nombre de méthodes de flot optique de la littérature est tout d'abord appliqué aux données, avec des paramétrisations optimales. Puis la matrice de covariance des champs obtenus est calculée afin de caractériser l'incertitude initiale sur le mouvement et de permettre le calcul de l'ensemble des champs de mouvement. Le rétrécissement qui s'observe habituellement après les phases d'analyse du filtre de Kalman d'ensemble est résolu en construisant des ensembles d'observations et en définissant une méthode de localisation, dont la matrice associée est basée sur des propriétés des images.

L'ensemble de ces travaux a été réalisé dans le contexte de collaborations internes à l'équipe-projet Clime et dans le cadre de partenariat ou de contrats avec des laboratoires extérieurs.

6.2 Objectifs futurs

Les objectifs que j'ai définis sur la prochaine période reposent sur le constat suivant. De nombreuses applications sont possibles pour les méthodes d'assimilation de données dans le domaine de la prévision immédiate, en incluant plus ou moins de physique dans les équations utilisées. Il s'agit par exemple de la prévision des pluies dans le domaine des crues rapides afin de mieux maîtriser les urgences d'évacuation. Il s'agit aussi de la prévision de la couverture nuageuse pour la prévision photovoltaïque. Il s'agit encore du déplacement de nappes polluantes pour la surveillance du littoral. Tous ces contextes nécessitent de travailler à la résolution des images et d'avoir des analyses et prévisions mises à jour à chaque acquisition, en temps réel par rapport à la période d'acquisition. Il faut aussi assurer que toutes les prévisions effectuées soient accompagnées d'une valeur d'incertitude, afin que les prises de décisions ultérieures soient associées à un risque quantifié. À partir de ce constat, les activités que je souhaite réaliser s'orientent autour des points décrits ci-dessous, avec en fil directeur la nécessité d'intensifier l'aspect opérationnel des outils développés.

Réduction de modèle

La construction de bases optimales a démontré son aptitude pour l'estimation du mouvement. Les objectifs à moyen terme concernent la construction de bases image incorporant des propriétés sur les structures, en les incluant dans la fonction quadratique minimisée. D'autres pistes sont la construction de bases multi-échelles et de bases variables en temps par apprentissage sur les sorties des modèles.

Les algorithmes liés à la réduction de modèles ayant été parallélisés, l'objectif est de les utiliser pour traiter de grandes bases de données de la mer Noire, dans le contexte d'une collaboration avec le MHI à Sébastopol, afin de tester l'intérêt de l'assimilation des pseudo-observations ob-

tenues par les Modèles Images dans une implémentation à résolution fine (sub mesoscale) du modèle d'océan Nemo.

Méthodes d'ensemble

Même si une grande partie des études a été consacrée aux méthodes d'assimilation variationnelle 4D-Var, des travaux ont débuté sur l'utilisation de méthodes d'ensemble, qui vont être intensifiés dans le futur. D'une part, ces méthodes semblent plus pertinentes pour le traitement de séquences d'images qui présentent des discontinuités de dynamique. En effet, l'algorithme du 4D-Var, même s'il inclut un terme d'erreur modèle dans sa formulation faible, réalise un lissage temporel à partir des données qui perturbe l'estimation des changements de dynamique. D'autre part, le filtre de Kalman d'ensemble a une structure séquentielle, qui le rend particulièrement intéressant pour les applications temps réel et le traitement à la volée des données au fur et à mesure des acquisitions.

Trois points d'étude sont attendus sur les prochaines années qui concernent la définition de l'ensemble initial au moyen des bases optimales définies pour la réduction de modèle, la calibration d'ensemble pour permettre la réalisation d'estimation en évitant les étapes d'analyse liées à l'application des équations de Kalman, avec pour conséquence le rétrécissement de l'ensemble, et la définition des matrices de covariance d'erreur en incluant les résultats de segmentation des images.

Estimation d'incertitude

Les méthodes d'ensemble permettent d'accéder directement à une mesure d'incertitude sur l'estimation, si l'ensemble est convenablement calibré et si les erreurs d'observation et d'ébauche sont correctement modélisées. Ces travaux sont envisagés dans la période future comme nous l'avons expliqué ci-dessus.

Une alternative est d'utiliser les méthodes basées sur le filtre minimax. L'objectif est d'estimer le mouvement au moyen d'une méthode itérative, initialisée par la méthode du 4D-Var, ou d'utiliser la version réduite du filtre minimax sur les espaces vectoriels définis par les bases optimales du mouvement et des images. Ce thème de recherche est lié à la collaboration avec IBM Research.

Reconstruction de champs océanographiques 3D à partir de données image

L'arrivée de Julien Brajard, chercheur au Locean, et la définition d'un projet de collaboration avec le MHI vont conduire à intensifier les activités autour du modèle d'océan NEMO <http://www.nemo-ocean.eu/> Deux buts majeurs sont identifiés : assimiler dans NEMO la circulation de surface et la topographie pycnocline estimées par Modèle Image et reconstruire des profils verticaux à partir d'observations de surface.

Bibliographie

- [1] <http://vision.middlebury.edu/flow/>.
- [2] <http://www.autodiff.org/>.
- [3] J. L. Anderson. An adaptive covariance inflation error correction algorithm for ensemble filters. *Tellus A*, 59 :210—224, 2007.
- [4] J. L. Anderson and S. L. Anderson. A Monte Carlo implementation of the nonlinear filtering problem to produce ensemble assimilations and forecasts. *Monthly Weather Review*, 127 :2741—2758, 1999.
- [5] J. Arnsperg. Optic acceleration. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 364–373, 1988.
- [6] C. Avenel, E. Mémin, and P. Pérez. Tracking closed curves with non-linear stochastic filters. In *Conference on Space-Scale and Variational Methods*, 2009.
- [7] S. Baker, D. Scharstein, J. P. Lewis, S. Roth, M. J. Black, and R. Szeliski. A database and evaluation methodology for optical flow. *International Journal on Computer Vision (IJCV)*, 92 :1–31, March 2011.
- [8] J. P. Benzécri. *L'Analyse des données. Tome 1 : la Taxinomie*. Dunod, 1973.
- [9] J. P. Benzécri. *L'Analyse des données. Tome 2 : l'Analyse des correspondances*. Dunod, 1973.
- [10] D. Béréziat. *Contributions aux méthodes variationnelles pour le calcul du flot optique : prise en compte des informations spatiales et temporelles*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie. École doctorale Édite de Paris, November 2010.
- [11] D. Béréziat and I. Herlin. Solving ill-posed image processing problems using data assimilation. *Numerical Algorithms*, 56(2) :219–252, February 2011.
- [12] D. Béréziat and I. Herlin. Non linear observation equation for motion estimation. In *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 1521–1524, Orlando, Florida, USA, October 2012.
- [13] D. Béréziat and I. Herlin. Image-based modelling of ocean surface circulation from satellite acquisitions. In *International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP)*, January 2014.
- [14] D. Béréziat, I. Herlin, and L. Younes. A generalized optical flow constraint and its physical interpretation. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 2487–2492, 2000.
- [15] M. Bertalmío, G. Sapiro, and G. Randall. Morphing active contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 22(7) :733–737, July 2000.
- [16] S. Beyou, A. Cuzol, S. S. Gorthi, and E. Mémin. Weighted ensemble transform Kalman filter for image assimilation. *Tellus A*, 65, January 2012.
- [17] M. J. Black and P. Anandan. The robust estimation of multiple motions : Parametric and piecewise-smooth flow fields. *Computer Vision and Image Understanding*, 63(1) :75 – 104, 1996.

- [18] T. Brox, A. Bruhn, N. Papenberg, and J. Weickert. High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. In Springer-Verlag, editor, *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume 4, pages 25–36, Prague, Czech Republic, May 2004.
- [19] D. J. Butler, J. Wulff, G. B. Stanley, and M. J. Black. A naturalistic open source movie for optical flow evaluation. In A. Fitzgibbon et al. (Eds.), editor, *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Part IV, LNCS 7577, pages 611–625. Springer-Verlag, October 2012.
- [20] R. H. Byrd, P. Lu, and J. Nocedal. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *Journal on Scientific and Statistical Computing*, 16(5) :1190–1208, 1995.
- [21] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 8(6) :679–698, 1986.
- [22] Alexandre J. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 57(04) : 785–796, 1973.
- [23] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Pérez. Dense estimation of fluid flows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 24(3) :365–380, March 2002.
- [24] Georges-Henri Cottet and Petros Koumoutsakos. *Vortex methods : Theory and practice*. Cambridge University Press, June 2000. 514 pages.
- [25] Anne Cuzol, Pierre Hellier, and Etienne Memin. A low dimensional fluid motion estimator. *International Journal of Computer Vision*, 75(3) : 329–349, December 2007.
- [26] J. D’Adamo, N. Papadakis, E. Mémin, and Artana G. Variational assimilation of POD low-order dynamical systems. *Journal of Turbulence*, 8(9) :1–22, 2007.
- [27] A. E. Deane, I. G. Kevrekidis, G. E. Karniadakis, and S. A. Orszag. Low-dimensional models for complex geometry flows - Application to grooved channels and circular cylinders. *Physics of Fluids*, 3 : 2337–2354, October 1991.
- [28] P. Dérian, P. Héas, C. Herzet, and E. Mémin. Wavelets to reconstruct turbulence multifractals from experimental image sequences. In *7th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP-7*, Ottawa, Canada, July 2011.
- [29] P. Dérian, P. Héas, C. Herzet, and E. Mémin. Wavelets and optical flow motion estimation. *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications*, 2012.
- [30] R. Deriche. Using Canny’s criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, 1(2) :167–187, 1987.
- [31] K. Drifi. *Motion estimation by data assimilation in dynamic reduced order models*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, July 2013.
- [32] K. Drifi and I. Herlin. Assimilation d’images dans un modèle réduit pour l’estimation du mouvement. In *Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, Bordeaux, France, September 2011.
- [33] K. Drifi and I. Herlin. Coupling reduced models for optimal motion estimation. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 2651–2654, Tsukuba, Japan, November 2012.

- [34] G. Evensen. The ensemble Kalman filter : Theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 53 :343–367, 2003.
- [35] J. Hadamard. *Lecture on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [36] T. M. Hamill, Jeffrey S. Whitaker, and C. Snyder. Distance-dependent filtering of background error covariance estimates in an ensemble Kalman filter. *Monthly Weather Review*, 129 :2776–2790, 2001.
- [37] L. Hascoët and V. Pascual. Tapenade 2.1 user's guide. Technical Report 0300, INRIA, 2004.
- [38] L. Hascoët and V. Pascual. The Tapenade Automatic Differentiation tool : Principles, Model, and Specification. *ACM Transactions On Mathematical Software*, 39(3), 2013.
- [39] I. Herlin, D. Béréziat, and K. Drifi. Learning reduced models for motion estimation on ocean satellite images. In *Hydrodynamic modeling of the Black Sea Dynamics*, Sevastopol, Ukraine, September 2011.
- [40] I. Herlin, D. Béréziat, and N. Mercier. Recovering missing data on satellite images. In A. Heyden and F. Kahl, editors, *Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA)*, volume 6688 of *Lecture Notes on Computer Sciences*, pages 697–707, Ystad Saltsjöbad, Sweden, May 2011. Springer Verlag.
- [41] I. Herlin, D. Béréziat, N. Mercier, and S. Zhuk. Divergence-free motion estimation. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume 7575 of *Lecture Notes on Computer Sciences*, pages 15–27, Firenze, Italy, October 2012.
- [42] I. Herlin and K. Drifi. Learning reduced models for motion estimation on long temporal image sequences. In *International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, Munich, Germany, July 2012.
- [43] I. Herlin and E. Huot. Monitoring surface currents from uncertain image observations. Brno, Czech Republic, September 2012.
- [44] C. Homescu, L.R. Petzold, and R. Serban. Error estimation for reduced-order models of dynamical systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4) :1,693–1,714, 2005.
- [45] B.K.P. Horn and B.G. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203, 1981.
- [46] P. L. Houtekamer and H. L. Mitchell. Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique. *Monthly Weather Review*, 128 :796–811, 1998.
- [47] [http ://i21www.ira.uka.de/image_sequences/](http://i21www.ira.uka.de/image_sequences/). Nibelungen-platz, 1995.
- [48] X. Hu and N. Ahuja. Estimating motion of constant acceleration from image sequences. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 655–659, 1993.
- [49] W. Hundsdorfer and E.J. Spee. An efficient horizontal advection scheme for the modeling of global transport of constituents. *Monthly Weather Review*, 123(12) :3,554–3,564, 1995.
- [50] E. Huot, I. Herlin, N. Mercier, and E. Plotnikov. Estimating apparent motion on satellite acquisitions with a physical dynamic model. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pages 41–44, Istanbul, Turkey, August 2010. Springer Verlag. MoAT3.1.

- [51] E. Huot, I. Herlin, and G. Papari. Optimal orthogonal basis and image assimilation : Motion modeling. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Sydney, Australia, December 2013.
- [52] E. Huot, I. Herlin, G. Papari, and K. Drifi. Surface circulation from satellite images : Reduced model of the black sea. In National Academy of Science of Ukraine, editor, *Proceedings of Integrated system of the Black and Azov seas' monitoring international conference*, Kiev, Ukraine, September 2013. Marine Hydrophysical Institute.
- [53] E. Huot, G. Papari, I. Herlin, and K. Drifi. Motion estimation on ocean satellite images by data assimilation in a wavelets reduced model. In *General Assembly of the European Geophysical Society (EGS)*, volume 15, Vienna, Austria, April 2013. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013EGUGA..15.9644H>.
- [54] T. Isambert, J.-P. Berroir, and I. Herlin. A multiscale vector spline method for estimating the fluids motion on satellite images. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, number Part IV, pages 665–676, Marseille, France, October 2008. Springer.
- [55] T. Isambert, I. Herlin, and J.-P. Berroir. Fast and stable vector spline method for fluid flow estimation. In *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 505–508, 2007.
- [56] S. Kadri Harouna, P. Dérian, P. Héas, and E. Mémin. Divergence-free wavelets and high order regularization. *International Journal of Computer Vision*, 2012.
- [57] S. Kadri Harouna and V. Perrier. Effective construction of divergence-free wavelets on the square. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 240 :74–86, March 2012.
- [58] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, 82(Series D) :35–45, 1960.
- [59] F. Le Dimet and O. Talagrand. *Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects.*, pages 97–110. Tellus, 1986.
- [60] Y. Lepoittevin, D. Béréziat, I. Herlin, and N. Mercier. Continuous tracking of structures from an image sequence. In *International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP)*, pages 386–389, Barcelona, Spain, February 2013. Springer-Verlag.
- [61] Y. Lepoittevin, I. Herlin, and D. Béréziat. Assimilation de données pour estimer le mouvement et suivre un objet. In *Journées francophones des jeunes chercheurs en vision par ordinateur (ORASIS)*, Cluny, France, June 2013.
- [62] Y. Lepoittevin, I. Herlin, and D. Béréziat. Object's tracking by advection of a distance map. In *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 3612–3616, Melbourne, Australia, September 2013. IEEE.
- [63] Yann Lepoittevin, Isabelle Herlin, and Dominique Béréziat. Continuous tracking of structures from an image sequence. Grenoble, France, April 2013.
- [64] R. LeVeque. *Numerical Methods for Conservative Laws*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 2nd edition, 1992.
- [65] J.-L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971.

- [66] M. Loève. *Probability Theory*. Springer-Verlag, 1978.
- [67] John Leask Lumley. The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [68] O. Mac Aodha, G.J. Brostow, and M. Pollefeys. Segmenting video into classes of algorithm-suitability. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 1054–1061, 2010.
- [69] Vivien Mallet. Ensemble forecast of analyses : Coupling data assimilation and sequential aggregation. *Journal of Geophysical Research*, 115(D24303), December 2010.
- [70] H. H. Nagel and W. Enkelmann. An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, PAMI-8(5) :565–593, Sept 1986.
- [71] M. Nielsen, L. Florack, and R. Deriche. Regularisation and scale space. Technical Report RR 2352, INRIA, septembre 1994.
- [72] T. Oguz, P. La Violette, and U. Unluata. The upper layer circulation of the black sea : Its variability as inferred from hydrographic and satellite observations. *Journal of geophysical research*, 78(C8) :12,569–12,584, aug 1992.
- [73] P. R. Oke, P. Sakov, and S. P. Corney. Impacts of localisation in the EnKF and EnOI : experiments with a small model. *Ocean Dynamics*, 57(1) :32–45, 2007.
- [74] N. Papadakis, P. Héas, and E. Mémin. Image assimilation for motion estimation of atmospheric layers with shallow-water model. In *Asian Conference on Computer Vision*, pages 864–874, Tokyo, Japan, November 2007.
- [75] N. Papadakis and E. Mémin. Variational optimal control technique for the tracking of deformable objects. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Rio de Janeiro, Brazil, October 2007.
- [76] N. Papadakis and E. Mémin. A variational technique for time consistent tracking of curves and motion. *J. Math. Imaging Vis.*, 2008.
- [77] Nicolas Papadakis. *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs*. Thèse, Université Rennes 1, November 2007.
- [78] G. Papari, P. Campisi, and N. Petkov. New families of Fourier eigenfunctions for steerable filtering. *IEEE Transactions on Image processing - In press*, 2012.
- [79] N. Peterfreund. Robust tracking of position and velocity with Kalman snakes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 21(6) :564–569, June 1999.
- [80] M. Raffel, C.E. Willert, S.T. Wereley, and J. Kompenhans. *Particle Image Velocimetry : A Practical Guide*. Experimental Fluid Mechanics. Springer London, Limited, 2007.
- [81] Mojtaba Rajaei, Sture K. F. Karlsson, and Lawrence Sirovich. Low-dimensional description of free-shear-flow coherent structures and their dynamical behaviour. *Journal of Fluid Mechanics*, 258 : 1–29, 1994.
- [82] Y. Rath, N. Vaswani, A. Tannenbaum, and A.J. Yezzi. Tracking deforming objects using particle filtering for geometric active contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 29(8) :1470–1475, August 2007.

- [83] D. Rempfer. Investigations of boundary layer transition via Galerkin projections on empirical eigenfunctions. *Physics of Fluids*, 8 : 175–188, January 1996.
- [84] M. Restelli, L. Bonaventura, and R. Sacco. A semi-Lagrangian discontinuous Galerkin method for scalar advection by incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 216(1) :195–215, 2006.
- [85] P. Sakov and P. R. Oke. A deterministic formulation of the ensemble Kalman filter : An alternative to ensemble square root filters. *Tellus*, 2008.
- [86] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, 1999.
- [87] D. Shulman and J.-Y. Herve. Regularization of discontinuous flow fields. In *Workshop on Visual Motion*, pages 81–86, Mar 1989.
- [88] S. Stanković, I. Djurović, and R. Herpers. Velocity and acceleration estimation in video sequences by the local polynomial periodogram. In *International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, 2003.
- [89] D. Sun, S. Roth, and M. Black. Secrets of optical flow estimation and their principles. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pages 2432–2439, 2010.
- [90] M. Sussman and E. Fatemi. An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1999.
- [91] D. Suter. Motion estimation and vector splines. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 939–942, 1994.
- [92] Richard Szeliski and Heung-Yeung Shum. Motion estimation with quadtree splines. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18 : 1199–1210, 1996.
- [93] A. N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624–1627, 1963.
- [94] O. Titaud, A. Vidard, I. Souopgui, and F.-X. Le Dimet. Assimilation of image sequences in numerical models. *Tellus A*, 62 :30–47, 2010.
- [95] G. K. Vallis. *Atmospheric and oceanic fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2006. 745 pp.
- [96] C. Vogel, S. Roth, and K. Schindler. View-consistent 3d scene flow estimation over multiple frames. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Lecture Notes on Computer Sciences, Zürich, Switzerland, September 2014.
- [97] S. Volz, A. Bruhn, L. Valgaerts, and H. Zimmer. Modeling temporal coherence for optical flow. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2011.
- [98] A Wedel, D. Cremers, T. Pock, and H. Bischof. Structure- and motion-adaptive regularization for high accuracy optic flow. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pages 1663–1668, Sept 2009.

- [99] M. Werlberger, T. Pock, and H. Bischof. Motion estimation with non-local total variation regularization. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, San Francisco, CA, USA, June 2010.
- [100] R. Wildes and M. Amabile. Physically based fluid flow recovery from image sequences. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 969–975, June 1997.
- [101] Yu-Te Wu, Takeo Kanade, Ching-Chung Li, and Jeffrey Cohn. Image registration using wavelet-based motion model. *International Journal of Computer Vision*, 38 : 129–152, 2000. 10.1023/A : 1008101718719.
- [102] A. Yilmaz, O. Javed, and M. Shah. Object tracking : A survey. *ACM Computing Surveys*, 38(4 2006) :13, 2006.
- [103] C. Zhu, R.H. Byrd, P. Lu, and J. Nocedal. L-BFGS-B : Algorithm 778 : L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4) :550–560, 1997.