HAL
open science

Comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles sous sollicitations cycliques : de l'expérimentation numérique au calcul de structures.

Maxime Vassaux

To cite this version:

Maxime Vassaux. Comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles sous sollicitations cycliques : de l'expérimentation numérique au calcul de structures.. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. École Normale Supérieure de Cachan, 2015. Français. NNT : . tel-01140988

HAL Id: tel-01140988

https://inria.hal.science/tel-01140988v1

Submitted on 10 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

ENSC-YYY/ZZZZ

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Maxime Vassaux

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

Comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles sous sollicitations cycliques : de l'expérimentation numérique au calcul de structures.

Version provisoire à l'attention des rapporteurs et examinateurs

Pierre Rossi	Directeur de Recherche, IFSTTAR	Rapporteur
Frédéric Victor Donzé	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur
Alain Sellier	Professeur, Université Paul Sabatier	Examinateur
Sylvie Michel-Ponnelle	Ingénieur-Chercheur, EDF	Examinatrice
Arnaud Delaplace	Chargé de Recherche, Lafarge	Examinateur
Benjamin Richard	Ingénieur-Chercheur, CEA	Encadrant
Frédéric Ragueneau	Professeur, ENS-Cachan	Encadrant
Alain Millard	Ingénieur-Chercheur, CEA	Directeur

LMT-Cachan

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris

61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Table des matières

Table des matières **i**

Table des figures **v**

Liste des tableaux **xi**

Introduction générale **1**
1 Contexte sociétal 2
2 Démarche scientifique 3
3 Organisation 4

1 État de l'art et motivations **7**
1 Introduction 8
2 Mécanique des matériaux quasi-fragiles 8
2.1 Conséquences de la fissuration sous chargement monotone 9
2.2 Conséquences de la fissuration sous chargement cyclique 15
3 L'expérimentation numérique 21
3.1 Une démarche multi-échelle 21
3.2 Complémentarité de l'expérimentation numérique 23
4 Méthodes de modélisation pour l'expérimentation numérique 25
4.1 Méthodes issues de la mécanique des milieux continus 26
4.2 Méthodes issues de la mécanique des solides indéformables 28
4.3 Discussion 29
5 Synthèse 31

2 Description et développements d'une modélisation fine **33**
1 Introduction 34
2 Philosophie de modélisation fine 35
3 Description du modèle discret 36
3.1 Maillage et forme des particules 36
3.2 Interactions entre particules 39
3.3 Mécanisme de rupture 45
4 Algorithme de résolution implicite quasi-statique 45

4.1 Résolution linéaire séquentielle de l'évolution de la fissuration . . . 47
4.2 Résolution implicite de l'équilibre . . . 48
4.3 Particules indépendantes . . . 57
4.4 Algorithme de résolution global . . . 59
5 Comportement à la rupture et fragilité . . . 62
5.1 Aspects statistiques . . . 63
5.2 Formulation du critère de rupture . . . 64
5.3 Surface de chargement à la rupture . . . 68
6 Synthèse . . . 69

3 Mise en œuvre d'une modélisation fine et expérimentation numérique 71
1 Introduction . . . 72
2 Identification des paramètres . . . 72
2.1 Taille des particules . . . 72
2.2 Élasticité . . . 73
2.3 Rupture . . . 74
2.4 Frottement . . . 75
3 Illustration de la procédure d'identification . . . 76
3.1 Calibration . . . 77
3.2 Validation . . . 79
4 Étude de cas de fissuration complexes . . . 86
4.1 Fissuration en mode mixte I/II . . . 86
4.2 Fissuration en mode II . . . 90
5 Étude de l'efficacité de l'algorithme de résolution . . . 93
6 Expérimentation numérique en traction cyclique uni-axiale . . . 98
6.1 Étude de l'influence d'une perturbation . . . 101
6.2 Simulation d'un essai complet avec rotation de l'éprouvette . . . 106
7 Synthèse . . . 108

4 Formulation et caractérisation d'une modélisation macroscopique 111
1 Introduction . . . 112
2 État de l'art des approches continues de la fissuration . . . 113
2.1 Initiation et propagation de la fissuration . . . 113
2.2 Fermeture de la fissuration . . . 119
3 Définition d'un formalisme de modélisation continue . . . 129
3.1 Thermodynamique des processus irréversibles . . . 129
3.2 Décomposition de la contrainte totale . . . 132
3.3 Application à la théorie de l'endommagement . . . 133
4 Modélisation de la dégradation de la matrice . . . 138
4.1 Modèle initial . . . 139
4.2 Améliorations . . . 139
4.3 Énergie de fissuration et méthodes de régularisation . . . 141
4.4 Étude comparative des formulations . . . 143

5 Modélisation du caractère unilatéral frottant des fissures 148
5.1 Définition du comportement mécanique des fissures 149
5.2 Caractérisation de la fonction de fermeture 149
5.3 Ajout d'un mécanisme dissipatif 152
5.4 Comportement cyclique sous chargement multi-axial 156
6 Algorithme d'intégration du modèle continu 158
7 Synthèse 160

5 Identification numérique d'une modélisation macroscopique et application au calcul de structures 163
1 Introduction 164
2 Stratégie d'identification de la modélisation continue 164
2.1 Identification des modélisations de l'endommagement 165
2.2 Identification de la modélisation des effets cycliques 174
3 Application au calcul d'un voile en béton armé 176
3.1 Descriptif de l'essai 177
3.2 Modélisation et calibration 179
3.3 Résultats 181
4 Synthèse 188

Conclusions et perspectives 191
1 Réalisations et perspectives 192
1.1 Modélisation discrète 192
1.2 Modélisation continue 194
1.3 Expérimentation numérique 196
1.4 Effets hystérétiques et incompatibilité géométrique 196
2 Synthèse finale 197

Bibliographie 199

Table des figures

1.1 Réponse contrainte-déformation en traction uni-axiale [Terrien, 1980]. . . . 9
1.2 Mise en évidence par émission acoustique de la fissuration lors d'un chargement de traction [Maji et Shah, 1988]. 10
1.3 Réponse contrainte-déformation en compression uni-axiale [Ramtani, 1990]. 11
1.4 Développement de la fissuration et de la compaction en compression. . . . 11
1.5 Surface de chargement à la rupture du béton normalisée par rapport à la résistance en compression. 12
1.6 Phénomène de dilatance observé en compression uni-axiale [Ramtani, 1990]. 13
1.7 Influence du diamètre de l'éprouvette sur la résistance en traction [Van Vliet et Van Mier, 2000]. 14
1.8 Influence du taux de chargement sur la résistance en traction [Rossi et al., 1994]. 15
1.9 Mise en évidence de l'effet unilatéral [Mazars et al., 1990]. 16
1.10 Réponse contrainte-déformation à un chargement uni-axial cyclique. 17
1.11 Analyse par corrélation d'image du champ de déplacement vertical lors de la fermeture d'une fissure [Nouailletas, 2013]. 18
1.12 Fissure soumise à des cycles de charge-décharge [Mihai et Jefferson, 2011]. 19
1.13 Déformations locales dans un VER de béton après séchage mesurées par corrélation d'images [Hilaire, 2014]. 20
1.14 Flexion induite par la propagation asymétrique de la fissuration lors d'un essai de traction directe. 24
1.15 Description d'une discontinuité par la E-FEM et la X-FEM, et modifications associées des fonctions de forme [Jirásek et Belytschko, 2002]. 27
1.16 Modèle discret d'une éprouvette rompue et profil de fissuration mesuré [Delaplace, 2008]. 31

2.1 Arrangement volumique optimal dans un carré d'une quantité n de cercles [Nurmela et Östergård, 1997]. 37
2.2 Influence de l'aléa a de la position du centre des particules [D'Addetta, 2004]. 38
2.3 Étapes successives de la génération du maillage [Delaplace, 2008] (de gauche à droite) : génération des centres, triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoi, intersection du diagramme de Voronoi et du contour. 38
2.4 Deux particules liées par une interface cohésive. 39

2.5 Deux particules liées par une cohésion de type poutre (*lattices*). 40
2.6 Deux particules en contact. 42
2.7 Non-linéarité géométrique de contact induite par la forme des particules. . 49
2.8 Non-linéarité mécanique de contact induite par l'aspect unilatéral : évolutions normalisées de l'effort de contact normal et de la raideur. 50
2.9 Influence du prédicteur sur la convergence de l'algorithme. 54
2.10 Mouvement des deux particules en contact étudiées. 55
2.11 Influence de la relaxation numérique et de la taille de l'incrément de chargement sur l'évolution normalisée de l'effort de contact. 56
2.12 Influence de la relaxation numérique lorsque le contact est rompu pour une discrétisation pseudo-temporelle fine. 56
2.13 Illustration de la procédure de parcours en largeur des particules. 58
2.14 Schéma de l'algorithme de résolution global. 61
2.15 Dégradation en compression avec supports adhérents. 63
2.16 Influence de la variabilité des seuils de rupture sur la réponse en traction uni-axiale normalisée par rapport à la limite élastique. 64
2.17 Forme des critères de rupture de type Rankine. 65
2.18 Forme des critères de rupture de type Mohr-Coulomb. 66
2.19 Influence de la formulation du critère de rupture sur la réponse en compression uni-axiale normalisée par rapport à la limite élastique. 67
2.20 Faciès de fissuration finaux en compression uni-axiale avec supports adhérents. 67
2.21 Surfaces de chargement à la rupture normalisées. 69

3.1 Influence de la densité de particules sur les propriétés élastiques macroscopiques. 73
3.2 Influence des paramètres élastiques des poutres sur les propriétés élastiques macroscopiques. 74
3.3 Influence du coefficient de frottement sur la réponse en compression sous confinement latéral de 10 MPa. 76
3.4 Dispositif de l'essai de flexion trois-points [Grégoire et al., 2013]. 77
3.5 Influence des paramètres de rupture sur la réponse normalisée en flexion trois-points. 78
3.6 Influence des paramètres de rupture sur la réponse en flexion trois-points. . 78
3.7 Influence du facteur d'échelle du seuil en rotation $\lambda_{\theta_{cr}}$ sur la réponse au fendage. 79
3.8 Influence de la taille de l'éprouvette sur la réponse en flexion trois-points entaillé au cinquième de la hauteur : expérimental (pointillé), simulation (plein). 80
3.9 Influence de la longueur initiale de l'entaille sur la réponse d'une éprouvette de 0.35 m par 0.10 m en flexion trois-points : expérimental (pointillé), simulation (plein). 80
3.10 Faciès de fissuration d'une poutre entaillée à mi-hauteur. 81
3.11 Faciès de fissuration d'une poutre sans entaille. 81

3.12 Variabilité de la réponse en flexion trois-points. 82
3.13 Influence de la densité du maillage sur la dispersion des chargements au pic. 83
3.14 Description schématique de l'application de conditions aux limites partiellement restreintes. 84
3.15 Influence des conditions aux limites simulées sur la réponse en compression uni-axiale. 85
3.16 Influence des conditions aux limites sur le faciès de fissuration d'un essai de compression uni-axiale. 85
3.17 Dispositif des essais des poutres de Schlangen. 86
3.18 Réponses simulées (plein) et expérimentales (pointillé) des poutres de Schlangen [1993] avec appuis glissants. 87
3.19 Faciès de fissuration simulés et expérimentaux des poutres de Schlangen [1993] avec appuis glissants. 88
3.20 Influence de l'adhérence des appuis sur la réponse des poutres de Schlangen [1993] simplement entaillées. 89
3.21 Influence de l'adhérence des appuis sur la réponse des poutres de Schlangen [1993] doublement entaillées. 89
3.22 Faciès de fissuration pour les poutre simplement entaillée. 90
3.23 Faciès de fissuration pour une poutre de Schlangen [1993] doublement entaillée. 90
3.24 Dispositif et faciès de fissuration de l'essai de cisaillement de Fenwick et Paulay [1968]. 91
3.25 Réponse à l'essai de cisaillement de Fenwick et Paulay [1968] : expérimental (pointillé), simulation (plein). 92
3.26 Agrandissement de la zone pré-fissurée pour une ouverture de fissure imposée à $cw = 0.00006$ mm. 92
3.27 Faciès de fissuration pour une ouverture de fissure imposée à $cw = 0.00032$ mm. 93
3.28 Influence de l'incrément de chargement sur la réponse en compression uni-axiale. 95
3.29 Influence de l'incrément de chargement sur le faciès de fissuration en compression uni-axiale. 96
3.30 Influence de l'incrément de chargement sur l'énergie dissipée par fissuration en compression uni-axiale. 96
3.31 Influence de l'incrément de chargement sur l'énergie dissipée par friction en compression uni-axiale. 97
3.32 Influence de l'incrément de chargement sur le temps de calculs et sur le résidu. 98
3.33 Dimensions, modélisation de l'essai de traction cyclique uni-axial de Nouailletas [2013]. 99
3.34 Trajets de chargement en déformation imposées. 100
3.35 Réponse d'un essai uni-axial cyclique. 101

3.36 Évolutions de l'énergie dissipée par friction et du nombre de contacts au cours d'un essai uni-axial cyclique simulé sans perturbation. 101
3.37 Configuration d'un essai uni-axial cyclique avec une rotation de l'éprouvette. 102
3.38 Réponse simulée lors d'un essai uni-axial cyclique avec une rotation de l'éprouvette. 103
3.39 Évolutions de l'énergie dissipée par friction et du nombre de contacts au cours d'un essai uni-axial cyclique simulé avec une rotation de l'éprouvette. 103
3.40 Schématisation de la conséquence de la relaxation, induite par fissuration, de contraintes internes auto-équilibrées. 104
3.41 Réponse simulée lors d'un essai uni-axial cyclique avec une perturbation locale. 104
3.42 Évolutions de l'énergie dissipée par friction et du nombre de contacts au cours d'un essai uni-axial cyclique simulé avec une perturbation locale. . . 105
3.43 Évolution de la rotation maximale de la partie supérieure de l'éprouvette en fonction des cycles de charge-décharge d'après Nouailletas [2013]. 107
3.44 Réponse complète simulée lors d'un essai uni-axial cyclique avec une rotation de l'éprouvette quantifiée par Nouailletas [2013]. 107

4.1 Décomposition du problème de fissuration [Pensée et al., 2002]. 116
4.2 Description d'un point de Gauss dans un modèle microplans [Bažant et al., 2000]. 118
4.3 Évolution de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure pour des modèles empiriques. 121
4.4 Description du modèle de comportement rhéologique de Duda et Konig [1991]. 122
4.5 Évolution de la contrainte normée en fonction de l'ouverture de fissure dans chaque série du modèle rhéologique de Duda et Konig [1991]. 122
4.6 Réponse complète du modèle de comportement rhéologique de Duda et Konig [1991]. 123
4.7 Réponse du modèle de Richard et Ragueneau [2013]. 125
4.8 Évolution de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure donnée par un opérateur relais. 126
4.9 Distribution des opérateurs relais en fonction du couple de contraintes (σ_c, σ_o) associé [Mertens, 2009]. 126
4.10 Réponse d'un modèle de Preisach-Mayergoyz [Minga, 2013]. 127
4.11 Dispositif des essais de comparaison entre les modèles discret et continu. . 144
4.12 Analyse de sensibilité des réponses en compression pure à k_0. 145
4.13 Analyse de sensibilité des réponses en cisaillement simple à k_0. 146
4.14 Analyse de sensibilité des surfaces de chargement à la rupture à k_0. 147
4.15 Influence de ϵ^f_{max} sur l'évolution de la proportion de fissures refermées lors d'une décharge. 150
4.16 Réponse du modèle sans dissipation énergétique associée à la friction. . . . 151
4.17 Réponse du modèle complet. 154

4.18 Évolution des variables d'état du modèle complet lors d'un cycle de charge-décharge. 155
4.19 Fissure à deux instants de la fermeture. 156
4.20 Influence de l'ajout de la considération des effets cycliques sur les comportements à la rupture. 157
4.21 Diagramme de l'algorithme de résolution local du modèle continu. 159

5.1 Évolution moyenne des énergies lors d'un essai de traction. 166
5.2 Faciès de fissuration en traction pour $\epsilon = 3.0 \times 10^{-3}$. 166
5.3 Réponses en traction des modèles continus et discret. 168
5.4 Histogrammes des énergies élastiques et dissipées des 200 réalisations de l'essai de traction. 169
5.5 Influence de la forme de la distribution des seuils de rupture sur la réponse moyenne de traction. 171
5.6 Influence de la forme de la distribution des seuils de rupture sur la variabilité du pic d'énergie élastique et de l'énergie de fissuration en traction. . 172
5.7 Évolution moyenne des énergies de fissuration obtenues avec le modèle discret selon l'essai. 173
5.8 Analyse de sensibilité de l'évolution de la fonction ϑ au paramètre α_0. . . . 174
5.9 Analyse de sensibilité de l'évolution de la proportion de fissures fermées au niveau de chargement maximal appliqué : ϑ (trait plein), Discret (trait pointillé) 175
5.10 Analyse de sensibilité de l'évolution de l'énergie dissipée par friction au paramètre μ_0 lors d'un cycle de charge-décharge-recharge. 176
5.11 Dimensions du voile en béton armé du benchmark ConCrack [Rivillon et Gabs, 2011]. 177
5.12 Évolution des chargements imposés en effort. 178
5.13 Influence du type d'élément fini retenu pour les armatures sur la réponse à un chargement monotone pour $h^c = 0.10$ m et le déplacement mesuré (9 - 10). 179
5.14 Maillage du voile en béton armé du benchmark ConCrack pour une dimension de maille de $h^c = 0.1$ m. 180
5.15 Influence de la formulation et du déplacement étudié sur la réponse à un chargement monotone pour une taille d'élément fini $h^c = 0.10$ m. 182
5.16 Vue du voile central à la fin de l'essai [Rivillon et Gabs, 2011]. 183
5.17 Influence de la formulation sur la répartition de la déformation longitudinale dans le voile en béton pour un effort de 4.2 MN 184
5.18 Réponse à un chargement cyclique non-alterné. 185
5.19 Énergie dissipée à chaque décharge lors d'un chargement cyclique non-alterné. 185
5.20 Répartition de la déformation plastique axiale dans les armatures pour un chargement de 5.1 MN. 186
5.21 Réponse à un chargement cyclique alterné. 187

5.22 Répartition de la déformation longitudinale dans le voile en béton avec $h^c = 0.03$ m (légende, voir fig. 5.17f). 187
5.23 Énergie dissipée à chaque inversion du chargement lors d'un chargement cyclique alterné. 188

Liste des tableaux

3.1 Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais de Grégoire et al. [2013]. 79
3.2 Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais des poutres de Schlangen [1993]. 87
3.3 Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais de Fenwick et Paulay [1968]. 91
3.4 Valeur des paramètres identifiés sur le béton de Vonk [1992]. 94
3.5 Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais de Nouailletas [2013]. 99

5.1 Moyenne et coefficient de variation des résultats de l'essai de traction. . . . 169
5.2 Propriétés moyennes mesurées des matériaux [Rivillon et Gabs, 2011]. . . . 178
5.3 Valeur des paramètres des modèles continus de béton. 181

Introduction générale

Sommaire

1 Contexte sociétal 2
2 Démarche scientifique 3
3 Organisation 4

1 Contexte sociétal

Qu'il s'agisse des premiers ouvrages en béton de la Rome antique ou encore d'ouvrages en pierre de taille du Paris de la Renaissance, de tous temps, les matériaux quasi-fragiles ont été employés dans l'élaboration de structures du génie civil. Aujourd'hui plus que jamais, les matériaux quasi-fragiles sont les matériaux de construction par excellence, à la fois des plus "écologiques", mais surtout excessivement faciles à mettre en œuvre.

Aussi populaires qu'ils puissent être, les matériaux quasi-fragiles sont pourtant complexes. Leur simple comportement mécanique résulte du couplage d'une multitude de phénomènes d'origines physiques différentes. Les matériaux quasi-fragiles vieillissent, pour le meilleur (amélioration des propriétés au jeune âge) et pour le pire (fluage pouvant induire une perte de précontrainte sur le long terme) ; interagissent avec leur environnement, chimiquement (réaction alcali-silicate, réaction sulfatique interne) et mécaniquement. À cela s'ajoutent, des phénomènes liés à une forte hétérogénéité (retrait de la pâte de ciment et incompatibilités de déformations, effets d'échelles), et à la teneur en eau (pression capillaire). Une liste non-exhaustive qui illustre le défi, des plus stimulants, que représente la compréhension et la modélisation du comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles. Relever ce défi est une nécessité afin d'optimiser la construction des ouvrages en matériaux quasi-fragiles ; et ce, en assurant leur performance structurale, conditionnée par des critères choisis relatifs à l'intégrité, ou plus spécifiquement pour l'industrie nucléaire, à l'étanchéité structurale.

Comprendre l'origine et les conséquences de la dégradation et de la fissuration est un des enjeux clés de ce défi. Ce travail a été entrepris depuis le début du XXe sicle, il est toujours d'actualité. Aujourd'hui, en revanche, il s'étend à des chargements mécaniques plus sophistiqués. Multi-axialité et cyclicité sont deux traits caractéristiques d'une sollicitation sismique. L'étude du comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles dans de telles conditions n'est pas, à proprement parler, nouvelle. Mais compte tenu des récents événements survenus au Japon ou en Haïti, l'intérêt pour les chargements multi-axiaux et cycliques s'intensifie.

Lorsqu'une structure est soumise à une onde sismique, une certaine quantité d'énergie lui est fournie. Afin de retourner dans un état d'équilibre, la structure doit dissiper cette énergie. L'initiation et la propagation de fissures sont un moyen d'y parvenir, malheureusement elles sont aussi une cause de l'effondrement de cette structure. Contrairement à l'acier seul, les matériaux quasi-fragiles renforcés, subissent une perte de capacité structurale progressive, ils laissent donc apparaître des signes avant-coureurs de l'effondrement, pouvant s'avérer salvateurs pour les usagers de la structure. Par ailleurs, au caractère diffus de la fissuration, s'ajoutent les mécanismes hystérétiques initiés sous chargements cycliques, capables de dissiper une quantité importante d'énergie. Bien que l'énergie volumique dissipée par un matériau quasi-fragile soit tout de même plus faible que celle d'un acier, les volumes mis en jeu à l'échelle de la structure sont sensiblement différents. Dans le contexte du génie parasismique, leur utilisation laisse donc apparaître certains avantages.

Afin d'en quantifier la contribution à l'amortissement structural, il devient nécessaire d'être en mesure de modéliser le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles sous chargement mutli-axial et cyclique.

2 Démarche scientifique

La valeur ajoutée d'études de structures complètes du génie civil est conditionnée par le développement de méthodes de modélisation en mesure de reproduire, mais surtout de prédire, le comportement mécanique des matériaux les constituant. L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'amélioration des méthodes de modélisation des matériaux quasi-fragiles, et tout particulièrement sous chargement cyclique.

Afin de simuler la réponse d'une structure, celle-ci est discrétisée en éléments dont le comportement mécanique est connu et modélisable. Or les structures du génie civil sont de taille conséquente, il est donc nécessaire de développer des modèles capables de reproduire le comportement mécanique du matériau, sur une dimension suffisamment grande, pour pouvoir réduire le nombre de ces éléments, et ainsi limiter les coûts de calculs. La dimension du volume associé à un élément est choisie de manière à pouvoir considérer le matériau comme homogène, il est appelé volume élémentaire représentatif (VER). La notion de VER peut être illustrée en imaginant une succession de prélèvements de matériau d'un volume donné dans un volume de taille infinie. La dimension du VER est la dimension du volume à partir duquel le comportement de chaque prélèvement est identique. Plus le matériau est intrinsèquement hétérogène, plus la taille du VER est importante. Ainsi une relation de comportement identique est attribuée aux éléments de discrétisation de la structure. Une telle modélisation fondée sur la théorie de la mécanique des milieux continus et s'appuyant sur la méthode des éléments finis (FEM) est, ici, appelée modélisation "macroscopique".

En revanche, il va de soit que, pour traduire l'ensemble des mécanismes physiques se manifestant, la complexité d'un modèle de comportement mécanique croît avec la dimension des éléments auxquels il est associé. En effet, les combinaisons possibles de mécanismes, certes simples à des échelles inférieures, sont nombreuses. Dans la suite de ce manuscrit, chaque manifestation sur la réponse d'un VER, d'une combinaison de mécanismes survenus à une échelle inférieure, est qualifiée de phénomène macroscopique. Concernant les matériaux quasi-fragiles, fortement hétérogènes, la dimension d'un VER est de l'ordre du décimètre. De nombreuses campagnes expérimentales, ont été et sont toujours nécessaires pour appréhender le comportement d'un tel volume. Mais des lacunes persistent en regard notamment du comportement sous chargements cycliques et multi-axiaux. Plutôt que d'emprunter, la voie de l'expérimentation en laboratoire, difficile et parfois inadéquate, cette étude propose de tirer parti de simulations à une échelle inférieure à celle du VER, pour tenter de combler une partie de ce manque de connaissances.

À une telle échelle, il devient intéressant d'adapter la théorie mécanique employée, et

la méthode numérique associée, en fonction du matériau décrit. Une modélisation ici dite “fine”, fondée sur la mécanique des solides indéformables, mélangeant méthode des éléments discrets (DEM) et modèles dits *lattices*, est donc retenue. Les matériaux quasi-fragiles sont ainsi assimilés à un empilement de grains rigides, cohésif, ayant une forte propension à se décomposer.

La présente thèse propose une démarche de modélisation à deux échelles reposant sur l'utilisation d'un modèle discret et d'un modèle continu, qui, sur la base de quelques données expérimentales permet de remonter jusqu'à la réponse de structures soumises à une sollicitation sismique. Cette démarche de modélisation est illustrée tout au long des six chapitres qui constituent ce manuscrit.

3 Organisation

Ce manuscrit s'articule autour de six chapitres, au sein desquels une démarche de modélisation des matériaux quasi-fragiles à deux échelles est justifiée, développée et mise en œuvre.

Le premier chapitre fournit une justification des choix de démarche et de méthodes de modélisation, au travers d'une revue bibliographique générale. Il constitue un état de l'art des connaissances sur le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles sollicités en chargement monotone ou en chargement cyclique, des démarches multi-échelles couplant modélisations fine et macroscopique, et des méthodes de modélisation numérique fines aptes à reproduire explicitement les hétérogénéités géométriques du matériau, et notamment la fissuration.

Le second chapitre décrit le modèle de comportement fin DEAP2D, fondé sur les méthodes des éléments discrets et les modèles dits *lattices*, initialement développé au LMT-Cachan. Les développements effectués lors de cette thèse y sont aussi présentés. Ces développements concernent d'une part l'introduction du contact et la modification de l'algorithme de résolution de l'équilibre mécanique dans l'objectif de simuler des chargements cycliques, et d'autre part la description de la fissuration d'un *lattice*, et plus particulièrement le choix d'un critère de rupture adapté à des chargements multi-axiaux.

Le troisième chapitre illustre l'utilisation et valide la modélisation fine, discrète, des matériaux quasi-fragiles ainsi développée. La relative simplicité du processus d'identification du modèle est d'abord mise en avant, puis la validation de la description de la rupture choisie, et de l'algorithme de résolution élaboré, est effectuée. Enfin une analyse détaillée de la simulation d'un essai de traction cyclique uni-axiale, et des mécanismes à l'origine des phénomènes macroscopiques observés est proposée.

Le quatrième chapitre établit la formulation de la modélisation macroscopique, continue, de la fissuration dans les matériaux quasi-fragiles. Il débute par une étude bibliographique décomposée en deux parties : la modélisation des phénomènes de dégradation du matériau,

associés à l'initiation de la fissuration ; et la modélisation des phénomènes observés sous chargement cyclique, associés au caractère unilatéral de la fissuration. À l'issue de cette étude, un formalisme physique, fondé sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles, est retenu pour la formulation de modèles de comportement continus phénoménologiques, simples et robustes. En faisant interagir les modélisation discrètes et continues, des propositions de modélisation des différents phénomènes macroscopiques liés à la fissuration sont effectuées. Ces propositions sont réalisées, de manière à s'inscrire dans le formalisme retenu et sur la base d'observations issues de simulations discrètes. Finalement un modèle continu, en mesure de reproduire les phénomènes macroscopiques associés à l'initiation et à la fermeture de la fissuration, est défini.

Le cinquième chapitre continue de mettre en avant l'interaction entre les modélisations discrètes et continues, et pousse l'utilisation de la seconde jusqu'au calcul de structures. Une stratégie d'identification du modèle continu à partir du modèle discret est d'abord établie. Et ensuite, des simulations de la réponse d'une structure du génie civil sujette à des chargements cycliques sont réalisées avec le code de calcul Cast3M développé par le SEMT du DM2S au CEA-Saclay. Afin de démontrer l'efficacité de la démarche de modélisation à deux échelles proposée ; il est vérifié que le modèle macroscopique formulé est capable de reproduire non seulement l'état de dégradation de la structure sous un chargement donné, mais aussi d'évaluer correctement la dissipation énergétique induite par le matériau, et donc par extrapolation la contribution à l'amortissement structural.

Chapitre 1

État de l'art et motivations

Sommaire

1 Introduction 8

2 Mécanique des matériaux quasi-fragiles 8

2.1 Conséquences de la fissuration sous chargement monotone 9

2.2 Conséquences de la fissuration sous chargement cyclique 15

3 L'expérimentation numérique 21

3.1 Une démarche multi-échelle 21

3.2 Complémentarité de l'expérimentation numérique 23

4 Méthodes de modélisation pour l'expérimentation numérique . 25

4.1 Méthodes issues de la mécanique des milieux continus 26

4.2 Méthodes issues de la mécanique des solides indéformables 28

4.3 Discussion 29

5 Synthèse 31

1 Introduction

La formulation de modèles de comportement nécessite une connaissance détaillée des mécanismes influençant la réponse du matériau à décrire. L'étude des phénomènes macroscopiques exhibés par ce matériau est une étape importante pour développer ces connaissances. En ce qui concerne les matériaux quasi-fragiles, celles-ci sont déjà nombreuses, une description non-exhaustive en est fait dans la première partie de ce chapitre.

Cependant des essais, dans une multitude de configurations de plus en plus complexes, doivent encore et toujours être réalisés. Pour plusieurs raisons, et notamment un meilleur contrôle de l'essai, l'accès à de nouvelles quantités observables, ainsi qu'une économie matérielle, il est fait le choix de remplacer une part de l'expérimentation en laboratoire par de l'expérimentation numérique. Les détails de ce choix, parmi d'autres démarches multi-échelle sont explicités dans la seconde partie de ce chapitre.

Dès lors qu'une démarche d'expérimentation numérique est retenue, un choix de modèle numérique s'impose. L'expérimentation numérique ne peut être conduite avec des modèles macroscopiques, comme ceux formulés pour le calcul de structure. L'objectif étant de comprendre la phénoménologie du matériau, un modèle fin, à une échelle inférieure est nécessaire. Plusieurs possibilités de méthodes de modélisation numérique sont explorées dans la troisième partie de ce chapitre.

2 Mécanique des matériaux quasi-fragiles

Le comportement des matériaux quasi-fragiles, hétérogènes dans le cas du béton ou des roches, est complexe et multi-physique. De nombreux phénomènes peuvent être observés à l'échelle macroscopique lorsqu'un volume élémentaire représentatif (VER) de matériau est sollicité.

Afin de développer des modèles capables de prédire le comportement mécanique d'un matériau, la connaissance de sa phénoménologie est primordiale. La qualité d'un modèle de comportement mécanique est évaluée par rapport à sa capacité à prédire et à reproduire ces phénomènes. La phénoménologie du comportement macroscopique du matériau à modéliser est exploitée afin d'orienter et de valider la formulation des modèles présentés dans ces travaux. En avoir une connaissance approfondie semble donc nécessaire.

Comprendre l'origine des phénomènes macroscopiques et déterminer les mécanismes sous-jacents permet d'en améliorer la description. Dans le cas d'une modélisation fine, ces mécanismes peuvent être introduits directement dans le modèle. Dans le cas d'une modélisation macroscopique, le choix de la formulation (plasticité, endommagement, autre) peut être adapté. Néanmoins, il n'est pas nécessaire de considérer l'intégralité du comportement mécanique quel que soit le cas de chargement. Certains phénomènes macroscopiques peuvent ne pas se manifester. De manière à réduire les coûts de calculs et à en améliorer

la robustesse, les phénomènes en question peuvent être négligés. À titre d'exemple, dans le cas de structures en béton renforcées et de chargements sismiques, les phénomènes macroscopiques liés à la dégradation complète du matériau en compression peuvent ne pas être considérés dans une modélisation macroscopique.

Les phénomènes macroscopiques observés expérimentalement lors de la sollicitation d'un VER de matériau quasi-fragile sont en grande partie, de près ou de loin, des conséquences de la fissuration, qu'elle soit diffuse ou localisée. Une revue des phénomènes macroscopiques connus est ici proposée.

Les phénomènes observés sous chargement monotone ne seront que brièvement détaillés, puisqu'il ne font pas l'objet principal de ces travaux. Au contraire les phénomènes observés sous chargement cyclique seront plus longuement présentés.

2.1 Conséquences de la fissuration sous chargement monotone

2.1.1 Perte de rigidité et adoucissement

Un essai de traction uni-axiale met en avant les phénomènes de perte de rigidité et d'adoucissement présentés par les matériaux quasi-fragiles.

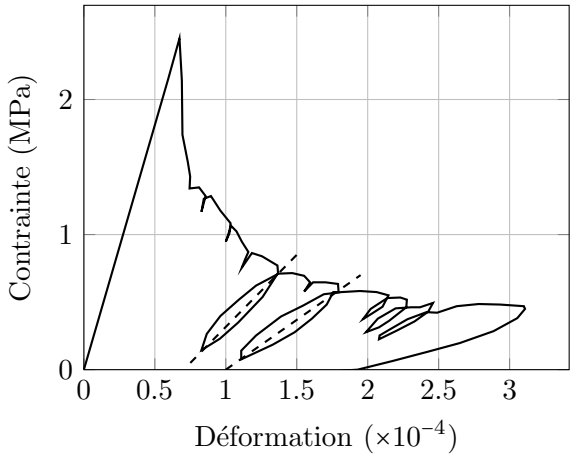


FIGURE 1.1: Réponse contrainte-déformation en traction uni-axiale [Terrien, 1980].

Avant d'atteindre le pic de résistance de l'éprouvette, la fissuration est diffuse. Des microfissures apparaissent en de multiples endroits de l'éprouvette, principalement induites par une concentration de contraintes à proximité de défauts ou de pores. Dans cette première phase, d'un point de vue macroscopique l'éprouvette de matériau semble peu affectée par la fissuration, la réponse uni-axiale du matériau reste d'ailleurs quasiment linéaire (fig. 1.1). Après avoir atteint le pic de résistance de l'éprouvette, la fissuration se localise. Les conséquences de la fissuration sont alors plus visibles, la rigidité (raideur sécante)

de la réponse uni-axiale se dégrade. Cette perte de rigidité s'observe sur les résultats d'expérience de Terrien [1980]. La réalisation de cycles de charge-décharge, à niveau de dégradation constant (lignes en pointillés, fig. 1.1), met en évidence une diminution de la pente de la réponse contrainte-déformation.

La fissuration se développe dans des plans orthogonaux à la direction de chargement (mode I). En conséquence, en chacun de ces plans, la section capable de transmettre des efforts assurant la cohésion du matériau est réduite, ce qui explique la perte de rigidité. La propagation de la fissuration provoque aussi une instabilité de l'éprouvette accompagnée d'un comportement adoucissant. Une fois le pic de résistance initial atteint, l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation est décroissante. L'instabilité du comportement des matériaux quasi-fragiles est la conséquence de la diminution du pic de résistance de l'éprouvette avec la propagation de la fissuration.

Les deux types de fissuration mentionnés précédemment peuvent être mis en évidence par une technique de mesure par émission acoustique [Maji et Shah, 1988]. La figure 1.2 met en évidence l'apparition de vides (fissures) chacun représenté par une croix sur les différents schémas. Des micro-fissures apparaissent d'abord de manière diffuse avant de localiser et former une macro-fissure.

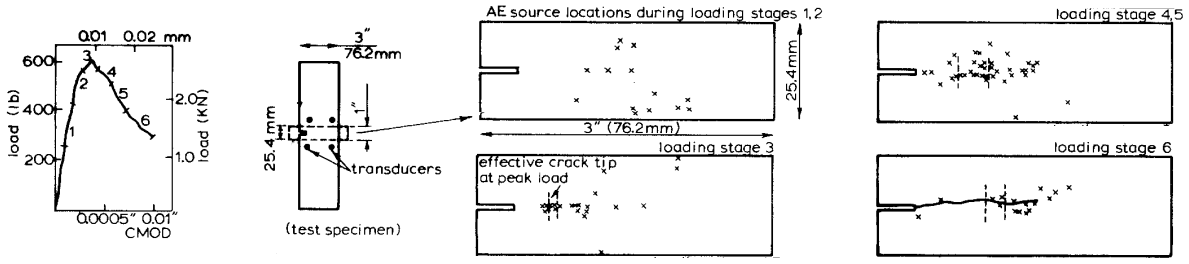


FIGURE 1.2: Mise en évidence par émission acoustique de la fissuration lors d'un chargement de traction [Maji et Shah, 1988].

2.1.2 Dissymétrie du comportement en traction et en compression

Le pic de résistance en compression est généralement estimé une dizaine de fois supérieur au pic de résistance en traction. De plus, bien qu'il soit fortement dépendant des conditions aux limites de l'essai (frettage des supports) et de l'élancement de l'éprouvette testée, le comportement post-pic en compression est moins fragile que le comportement post-pic en traction (fig. 1.3).

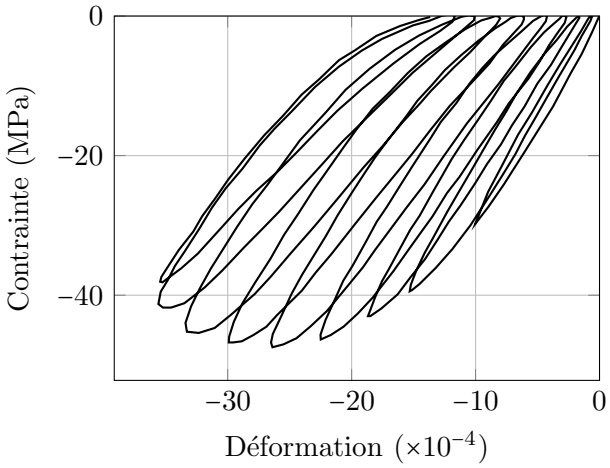


FIGURE 1.3: Réponse contrainte-déformation en compression uni-axiale [Ramtani, 1990].

Une perte de rigidité moins importante est observée en compression. La dissymétrie des réponses observées en traction et en compression s'explique par la différence des mécanismes impliqués. En compression la fissuration est la conséquence de l'effet Poisson (fig. 1.4). Les extensions locales ne sont plus directes, mais induites. La fissuration se propage ainsi colinéairement à la direction de chargement, d'où une influence moindre, dans un premier temps, sur la perte de raideur de l'éprouvette.

L'adoucissement, moins prononcé qu'en traction, celui-ci est atténué par l'écrasement de la porosité du matériau (fig. 1.4). La compaction se manifeste à l'échelle macroscopique par un comportement plastique durcissant, ce qui contraste avec la fragilité d'un comportement endommageant.

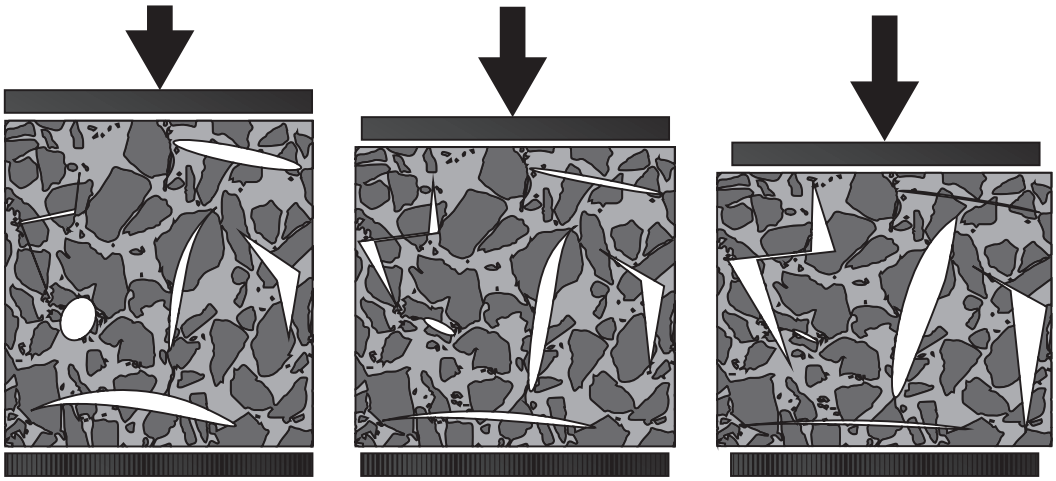


FIGURE 1.4: Développement de la fissuration et de la compaction en compression.

2.1.3 Comportement bi-axial

Deux campagnes expérimentales, plus [Lee et al., 2004] ou moins [Kupfer et al., 1969] récentes font foi en matière de comportement bi-axial. Ces campagnes d'essais donnent une idée assez semblable de la forme de la surface de chargement à la rupture. Elles mettent aussi en évidence une légère dépendance de la forme de la surface à la résistance en compression f_c du béton (fig. 1.5).

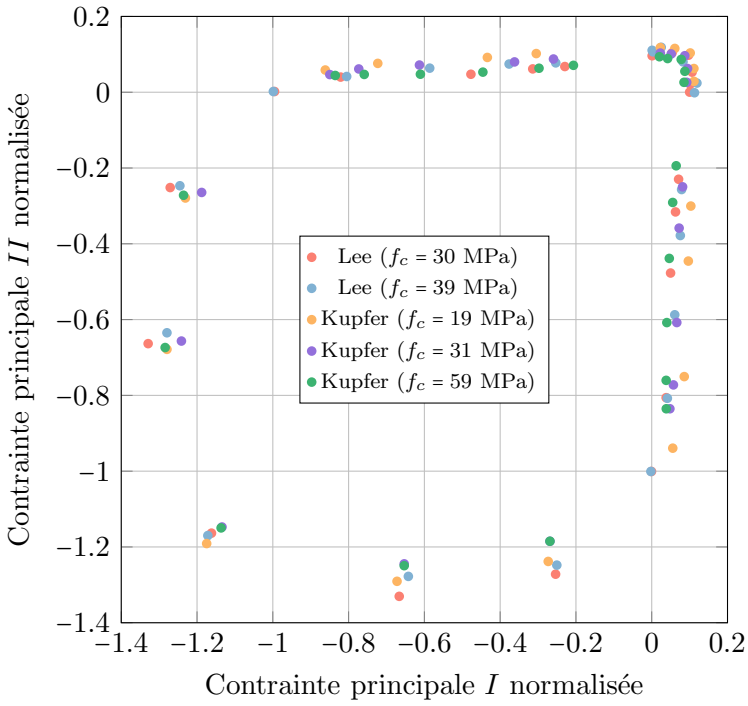


FIGURE 1.5: Surface de chargement à la rupture du béton normalisée par rapport à la résistance en compression.

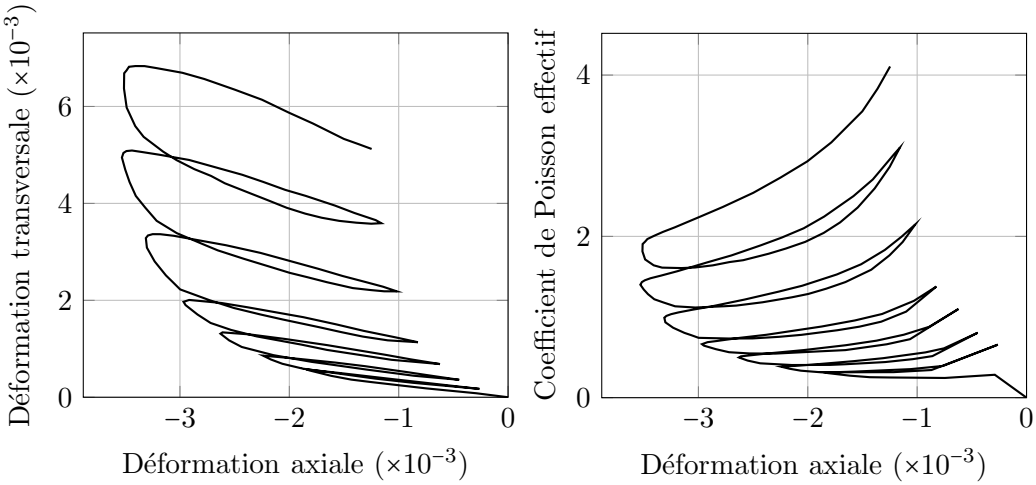
À noter l'absence du cisaillement $(-1/+1)$ pur pour les trajets de chargements étudiés dans lors de ces deux campagnes expérimentales. Il n'existe d'ailleurs que peu de, si ce n'est aucun, résultats expérimentaux de la réponse en cisaillement pur jusqu'à la rupture d'une éprouvette de matériau quasi-fragile.

2.1.4 Dilatance

La dilatance est observée principalement en compression, elle se manifeste par une augmentation du coefficient de Poisson apparent du matériau, lorsque la fissuration se développe (fig. 1.6). La déformation transversale est mesurée lors de l'essai de compression uni-axiale présenté en figure 1.3. Le rapport des déformations transversale et axiale de l'éprouvette est initialement constant. Ce rapport évolue peu jusqu'à l'instant auquel la

déformation axiale associée au pic de résistance est atteinte (fig. 1.3), soit -2.5×10^{-3}. Dès lors, le phénomène de dilatance se manifeste.

La coalescence de fissures colinéairement à la direction de chargement facilite l'expansion latérale de l'éprouvette de matériau : des bandes de matériau se forment, menant à une diminution de la rigidité transverse de l'éprouvette, alors que la rigidité axiale reste peu affectée.



(a) évolution de la déformation transversale (b) évolution du coefficient de Poisson effectif

FIGURE 1.6: Phénomène de dilatance observé en compression uni-axiale [Ramtani, 1990].

2.1.5 Anisotropie induite par le chargement

Une fissure est délimitée par deux surfaces libres de contraintes et de normales opposées, elle possède donc une orientation spécifique. Les propriétés du matériau ne sont ainsi pas affectées par le développement de la fissuration de manière isotrope. L'orientation est déterminée par plusieurs facteurs, et en particulier la direction du chargement. Bien que pour la plupart des matériaux quasi-fragiles, le comportement mécanique puisse être considéré initialement isotrope, la dégradation induite par chargement mécanique peut conduire à une certaine anisotropie.

2.1.6 Effets d'échelle

Selon les dimensions d'un volume de matériau, les propriétés mécaniques de ce dernier, même adimensionnelles, varient. La réalisation de deux essais de traction en tous points identiques, à l'exception des dimensions de l'éprouvette. Par exemple une éprouvette d'une taille donnée et une seconde dont toutes les dimensions sont doublées, l'élancement de l'éprouvette est donc préservé, ne conduira pas aux mêmes valeurs de contraintes limites (élastique ou à la rupture). De plus grandes dimensions d'éprouvettes conduisent à une

plus faible résistance (fig. 1.7). Selon la dimension de l'éprouvette, l'origine de l'effet d'échelle n'est pas identique [Bažant, 1999].

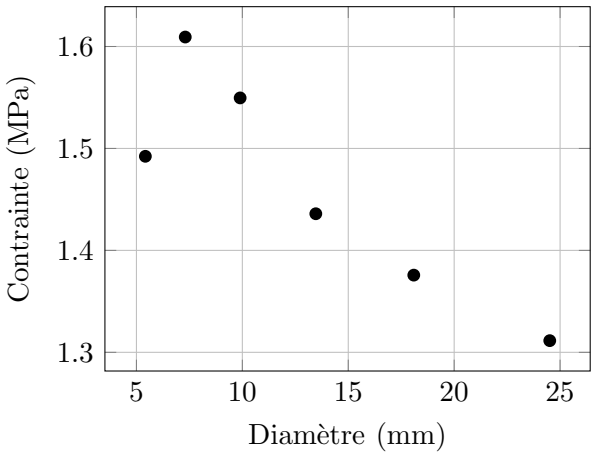


FIGURE 1.7: Influence du diamètre de l'éprouvette sur la résistance en traction [Van Vliet et Van Mier, 2000].

D'une part, l'effet d'échelle est attribué à un effet purement statistique [Rossi et Richer, 1987], pour de petites dimensions. Les matériaux quasi-fragiles ne sont pas des matériaux homogènes, et parmi les hétérogénéités incluses se trouvent des défauts et des pores. Ces derniers sont des zones privilégiées pour l'amorce de fissures. Statistiquement, plus le volume de matériau est important, plus la quantité de défauts et de pores est importante. De fait, la propagation de fissures est facilitée par l'augmentation du volume de matériau.

D'autre part, l'effet d'échelle est attribué à un effet énergétique déterministe [Bažant et Novak, 2000], pour de plus grandes dimensions. Cet effet d'échelle est expliqué par la mécanique linéaire élastique de la rupture.

2.1.7 Effets de vitesse

La vitesse de chargement, autrement dit le temps écoulé pour atteindre un chargement donné, influence certaines propriétés mécaniques des matériaux quasi-fragiles. Diverses études [Watstein, 1953; Reinhardt et al., 1990] ont notamment mis en évidence qu'une augmentation de la vitesse de chargement est accompagnée par :

— une augmentation des contraintes limites ;
— une augmentation de la déformation au pic de résistance ;
— une augmentation du module d'élasticité.

L'augmentation de la vitesse de chargement implique donc une dissipation énergétique plus importante, la phase de fissuration diffuse est plus importante.

Inversement, pour une vitesse de chargement réduite, voire nulle, donc pour un chargement maintenu constant (fluage), il est possible d'observer la rupture pour une contrainte inférieure à la contrainte limite mesurée pour un chargement considéré quasi-statique.

La dépendance du comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles à la vitesse de chargement s'explique par la prédominance de mécanismes différents selon l'ordre de grandeur de la vitesse d'application. À faible vitesse de chargement, le comportement visqueux du matériau (fluage) prédomine [Bažant et Gettu, 1992] ; le matériau continue de se déformer malgré une contrainte appliquée constante. À forte vitesse de chargement, en revanche, les effets inertiels prédominent [Bischoff et Perry, 1991], ils s'opposent à la déformation induite par le chargement ; par exemple lors d'un essai de compression uni-axiale un effet de confinement latéral est observé. Enfin, à vitesse de chargement intermédiaire, le comportement visqueux de l'eau libre présente dans les vides du matériau prédomine [Rossi, 1991] ; l'eau libre exerce une force de rappel sur les parois opposées des vides, s'opposant donc à leur expansion, phénomène connu sous le nom d'effet Stefan.

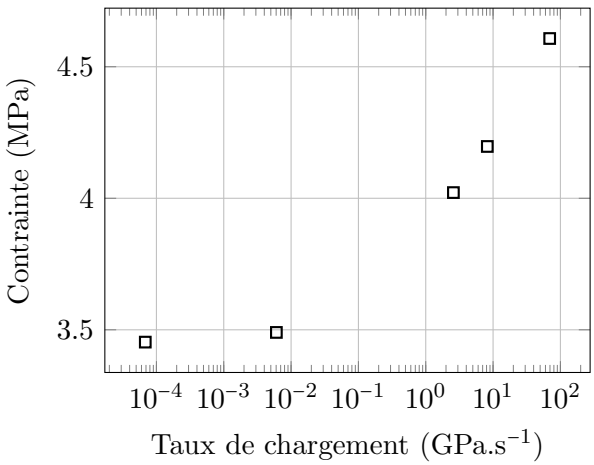


FIGURE 1.8: Influence du taux de chargement sur la résistance en traction [Rossi et al., 1994].

Néanmoins, étant donné les vitesses auxquelles sont appliqués les chargement dans la présente étude, les effets de vitesse dans les matériau quasi-fragiles seront négligés. L'hypothèse de chargements quasi-statiques sera d'ailleurs retenue dans le cadre de la modélisation fine.

2.2 Conséquences de la fissuration sous chargement cyclique

Dans le cadre de calculs de structures, le comportement mécanique sous chargement cyclique peut être associé et limité à la réponse du matériau en chargement uni-axial alterné, soit une succession de tractions endommageantes et de compressions élastiques. De

prime abord, des effets plus complexes liés au cisaillement pur d'une fissure ne sont pas considérés.

2.2.1 Effet unilatéral et déformations résiduelles

Si les phénomènes observés sous chargement monotone sont tous causés, directement ou indirectement, par l'ouverture de fissures, les phénomènes observés sous chargement cyclique sont tous causés par leur fermeture.

L'effet unilatéral est le nom attribué au phénomène de reprise de rigidité observé lors d'un passage en compression suite à un premier chargement de traction endommageant (fig. 1.9).

La reprise de rigidité, donc l'effet unilatéral, est la conséquence du contact initié entre les deux surfaces d'une fissure lorsque l'éprouvette est déchargée. La section du matériau capable de transmettre une sollicitation, préalablement réduite par la propagation de la fissuration lors du chargement de traction, tend à nouveau vers sa valeur initiale, saine, lorsque le matériau est déchargé, puis comprimé.

Dans le cas particulier d'une fissure sollicitée en mode II, soit en cisaillement, il n'est pas fait mention d'effet unilatéral dans la littérature. En revanche, il est plutôt fait mention du phénomène d'engrènement des granulats (*aggregate interlocking*) [Walraven, 1980], auquel est associé la récupération d'une part de la rigidité initiale lors de chargement alterné.

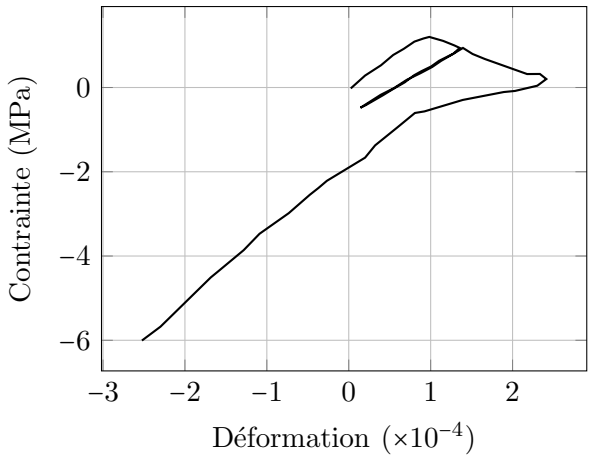


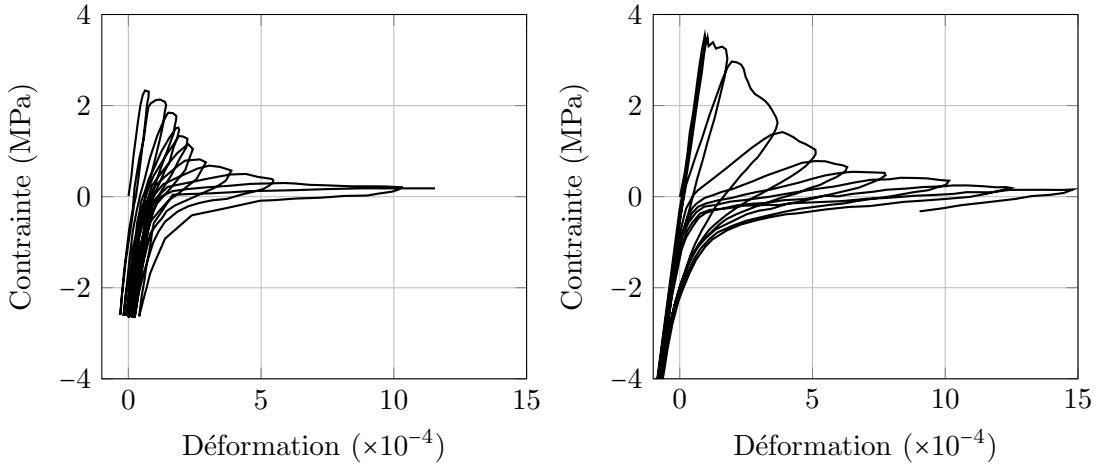
FIGURE 1.9: Mise en évidence de l'effet unilatéral [Mazars et al., 1990].

Des essais cycliques uni-axiaux effectués sur un plus grand nombre de cycles [Reinhardt et Cornelissen, 1984; Nouailletas, 2013] mettent en évidence la progressivité de l'effet unilatéral : les fissures ne se ferment ni simultanément, ni instantanément (fig. 1.10).

L'évolution de la rigidité apparente du matériau, d'une valeur affaiblie vers sa valeur initiale, est continue.

En parallèle, des déformations résiduelles sont observées. Lors d'une décharge, à la suite d'un chargement de traction endommageant, le matériau ne retourne pas à un état de contraintes et de déformations nulles.

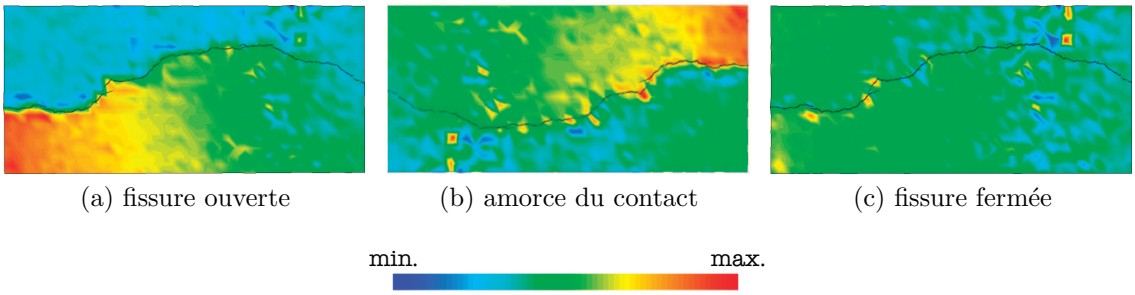
La transition progressive de l'effet unilatéral et l'apparition de déformations résiduelles sont expliquées par un unique mécanisme. Lorsque le matériau est déchargé, des incompatibilités géométriques des surfaces de part et d'autre des fissures sont observées. Autrement dit, les profils topologiques des deux surfaces ne correspondent plus. L'analyse par corrélation d'images d'une fissure (fig. 1.11) met en évidence ces incompatibilités géométriques. Dans le cas d'une fermeture parfaite, le champ de déplacement (représenté par le gradient de couleur) est lisse et continu. Dans le cas présent, des gradients du champ de déplacement importants et inhomogènes sont observés, même après la fermeture de la fissure. Ceci traduit la présence de contraintes localisées, et donc d'un contact entre des topologies non-concordantes des surfaces de la fissure.



(a) [Reinhardt et Cornelissen, 1984] (b) [Nouailletas, 2013]

FIGURE 1.10: Réponse contrainte-déformation à un chargement uni-axial cyclique.

En résumé, des déformations résiduelles apparaissent mais ne sont pas irréversibles, au sens des déformations plastiques. Les déformations résiduelles sont simplement la conséquence des incompatibilités topologiques des surfaces des fissures, dont l'origine n'est pas encore clairement établie dans la littérature. Dès lors que ces incompatibilités géométriques sont effacées, les déformations résiduelles ne se manifestent plus.



(a) fissure ouverte (b) amorce du contact (c) fissure fermée

FIGURE 1.11: Analyse par corrélation d'image du champ de déplacement vertical lors de la fermeture d'une fissure [Nouailletas, 2013].

2.2.2 Effets hystérétiques

Les incompatibilités en front de fissures sont responsables d'un troisième phénomène macroscopique : la génération de boucles d'hystérésis (fig. 1.10). Les effets hystérétiques sont très souvent le signe de la présence de frottement, et d'une dissipation énergétique associée. Dans le cas d'un chargement cyclique uni-axial, c'est effectivement ce dont il s'agit. À l'amorce de la fermeture des fissures, en conséquence de la non-concordance des surfaces des fissures, des contacts sur des plans inclinés sont initiés propices au glissement (fig. 1.12).

Bien que l'origine lointaine des effets hystérétiques (incompatibilités géométriques) ne soit pas remise en cause, il est possible d'envisager une origine directe différente. En effet, dans un contexte différent, celui de la mécanique des roches, l'origine des effets hystérétiques observés sur un joint rocheux irrégulier, rugueux [Goodman, 1976] est attribuée non pas à de la friction, mais à l'écrasement des aspérités des surfaces des fissures. L'écrasement se produit suite aux concentrations de contraintes localisées aux extrémités des aspérités entrant en contact. Ainsi bien que le chargement global n'excède pas la résistance en compression du matériau, ces localisation de contraintes entraînent des ruptures localisées (écrasements).

Il a d'ailleurs été observé que la reprise de rigidité d'un matériau sous chargement cyclique, l'effet unilatéral, est d'autant plus soudaine que la résistance en compression du matériau est élevée [Duffaut et Homand, 2000]. Puisque le fait d'augmenter la résistance en compression influence effectivement les phénomènes macroscopiques observés sous chargement cycliques, l'implication du mécanisme d'écrasement des aspérités est mis évidence, lui-même directement influencé par la résistance en compression du matériau.

Néanmoins, cette hypothèse qui consiste à expliquer les effets hystérétiques par l'écrasement des aspérités, impliquerait qu'à endommagement constant, ceux-ci s'estompent rapidement après quelques cycles. En effet, si aucune nouvelle fissure ne se développe, la proportion d'aspérités restantes après plusieurs cycles de charge-décharge tend à devenir

nulle. Dans le cas d'un joint rocheux, l'atténuation rapide des effets hystérétiques a été observée par Bandis et al. [1983] en pratique après trois cycles.

En revanche, il est tout aussi possible que des effets hystérétiques causés par de la friction s'atténuent à mesure des cycles de charge-décharge, en considérant l'érosion des surfaces de frottement. Des observations récentes effectuées par Crambuer [2013], lors d'un essai de flexion trois-points alternée sur des poutres en béton, appuient davantage cette hypothèse. Ainsi de manière générale, il n'est pour l'instant pas contesté que dans le cas du béton, les effets hystérétiques sont principalement expliqués par un mécanisme de friction.

Quoi qu'il en soit, et étant donné le manque de consensus dans la littérature, il serait donc intéressant de pouvoir analyser plus en détails le comportement sous chargement cyclique du béton pour éclaircir le type de mécanisme directement à l'origine des effets hystérétiques.

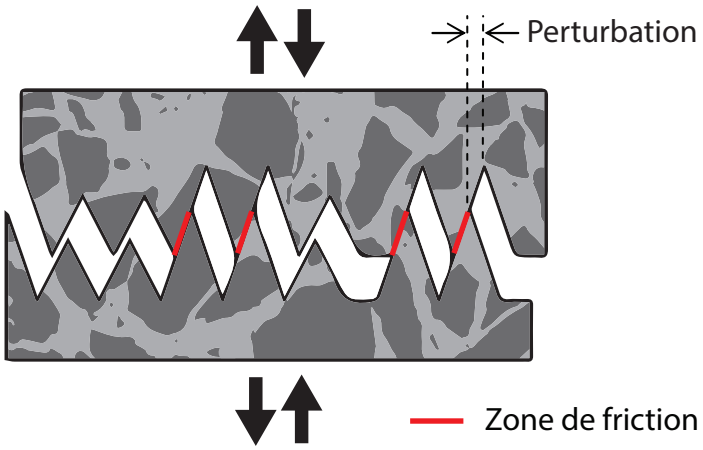


FIGURE 1.12: Fissure soumise à des cycles de charge-décharge [Mihai et Jefferson, 2011].

2.2.3 Incompatibilités géométriques

Bien que les phénomènes macroscopiques observés sous chargement cycliques aient fait l'objet de nombreuses recherches, l'origine d'incompatibilités géométriques des surfaces de fissures justifiant de ces phénomènes l'est en revanche beaucoup moins. Diverses explications peuvent être trouvées dans la littérature. D'un côté, l'hypothèse d'incompatibilités générées par une perturbation locale, au niveau de la fissure, en opposition. D'un autre côté, l'hypothèse d'une perturbation globale introduite par une sollicitation mécanique extérieure incontrôlée.

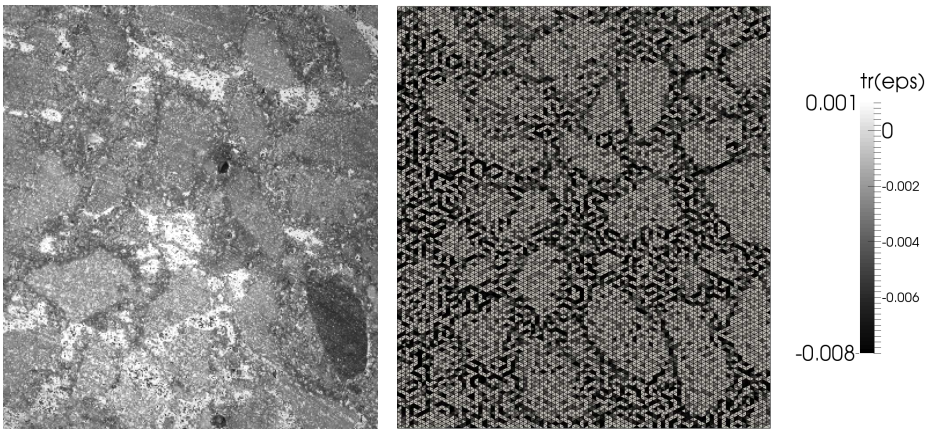
Une perturbation locale se justifie principalement de deux manières :

— comme une conséquence du comportement au jeune âge du béton : le retrait [Briffaut et al., 2013] ;

— comme une conséquence de la présence partielle d'eau libre dans les pores du matériau : dans le cas de roches, une dépendance des effets hystérétiques au degré de saturation du matériau a été observée [Van Den Abeele et al., 2002].

Dans les deux cas, un champ de contraintes hétérogène auto-équilibré est présent dans le volume de matériau étudié. La figure 1.13 met évidence la présence ce champ hétérogène, elle illustre la répartition de déformations locales, après séchage, obtenues par corrélation d'images [Hilaire, 2014].

La propagation de la fissuration dans le volume, crée des surfaces libres de contraintes et induit la relaxation d'une partie des contraintes internes. La ré-équilibration de ces contraintes vient alors perturber la position des surfaces de la fissure venant de s'ouvrir, et conduit aux incompatibilités géométriques constatées. Toujours dans le contexte des perturbations locales, une troisième justification pourrait être la présence dans les fissures de débris de matière, détachés du volume principal de matériau lors de l'initiation de la fissuration. Ces débris, libres de déplacements dans le vide formé par la fissure, seraient alors responsable d'incompatibilités géométriques.



(a) mésostructure du VER (b) trace des déformations locales

FIGURE 1.13: Déformations locales dans un VER de béton après séchage mesurées par corrélation d'images [Hilaire, 2014].

Une perturbation globale, moins souvent proposée, affecte directement les conditions aux limites. Dans le cas d'un chargement uni-axial, il s'agirait par exemple d'un désaxage du vérin appliquant la sollicitation, conséquence d'une propagation non-symétrique de la fissuration et observé expérimentalement, entre autres, par Hordijk et al. [1987]. L'hypothèse d'une perturbation globale est appuyée par l'étude sous chargement cyclique d'un joint rocheux. Gentier [1987] a montré que des cycles de pré-chargement permettent d'atténuer les effets hystérétiques. Ces cycles ont pour effet de réaligner les deux blocs constituant le joint rocheux et donc de diminuer la perturbation globale introduite dans les conditions aux limites.

3 L'expérimentation numérique

Les matériaux quasi-fragiles peuvent être qualifiés de complexes, d'une part en raison de leur comportement fortement adoucissant, et d'autre part en raison de leur forte hétérogénéité structurelle. Ces deux caractéristiques impliquent une forte propension des matériaux quasi-fragiles à présenter des discontinuité de champs de déplacement ou de déformation, et rendent difficile une modélisation à l'échelle du VER, l'échelle à laquelle le matériau doit être considéré comme homogène. Ce type de modèle est qualifié de **modèle macroscopique**, par opposition au terme **modèle fin** employé par la suite, et trouve son utilité pour la simulation de réponses de structures complètes.

La formulation de modèles constitutifs macroscopiques, directement à partir de résultats expérimentaux requiert une quantité d'informations importante, comme il a pu l'être remarqué dans la partie précédente, ce qui rend le processus trop coûteux en termes d'essais en laboratoire. De plus cette démarche présente encore de nombreuses lacunes qualitativement parlant. Ainsi pour contourner le problème, des méthodes dites *multi-échelle* sont employées, et nécessitent le développement de modèles de comportement à une échelle inférieure. Ce type de modèle est qualifié de modèle fin.

3.1 Une démarche multi-échelle

Une démarche multi-échelle consiste à reproduire le comportement d'un matériau à l'aide de plusieurs modèles. À chaque échelle d'intérêt, un modèle est associé. Le passage par une échelle de modélisation inférieure permet de réduire la complexité des équations employées. Les phénomènes d'influence, et donc à reproduire, sont d'autant plus simples et moins nombreux que l'échelle diminue. Le retour à une échelle supérieure de modélisation est ensuite nécessaire pour permettre la réalisation de calculs de structures complètes, dans des temps de calculs raisonnables.

Dans le cadre de ces travaux, seulement deux niveaux de modélisation sont utilisés, s'appuyant sur les modèles qualifiés de fin et de macroscopique. Cependant, le nombre de modèles exploités dans une démarche multi-échelle n'est pas toujours aussi limité. À titre d'exemple, une succession de trois modèles ont été utilisés par Qian [2012] pour décrire un VER de béton. Les modèles permettent de décrire des échelles allant de la pâte de ciment, en passant par le mortier, pour remonter jusqu'au béton. Ainsi à partir de connaissances sur les phases considérées comme homogènes constituant le béton (pâte de ciment, granulats) Qian [2012] extrapole les propriétés d'un VER de béton. À noter que, si les équations utilisées à l'échelle de la pâte de ciment sont amplement simplifiées par rapport à celles employées pour décrire le comportement d'un VER de béton, l'obtention des propriétés du matériau à une échelle aussi fine, en revanche, est fortement complexifiée.

Il n'existe pas une unique démarche multi-échelle, les différentes approches sont nuancées par la manière dont elles font dialoguer les différents modèles relatifs à chaque échelle.

Dans un premier temps, il est possible de distinguer un groupe de démarches multi-échelle, pour lesquelles les différents modèles sont sollicités au sein d'un même calcul [Belytschko et Song, 2010] :

— un couplage fort des modèles, ou utilisation simultanée [Guidault et al., 2007] : Cette démarche multi-échelle s'appuie sur les méthodes de décomposition de domaines. La structure complète est décomposée en deux types de domaines. D'un côté, les domaines modélisés par un modèle macroscopique, dans lesquels les phénomènes complexes, ou fortes non-linéarités, n'ont qu'une faible chance de se manifester. De l'autre côté, les domaines modélisés par le modèle fin, dans lesquels un fort niveau de détail est requis. L'équilibre entre les deux types de domaines est assuré par l'introduction d'une interface, les variables associées à chaque domaine n'étant pas nécessairement identiques ;
— un couplage faible des modèles, ou utilisation hiérarchique (méthodes FE2) [Feyel et Chaboche, 2000] : Cette démarche multi-échelle remplace l'emploi de lois constitutives complexes par un calcul à partir du modèle fin. Les modèles fin et macroscopique sont utilisés en alternance. Un état de sollicitation macroscopique est d'abord déterminé par un calcul réalisé avec le modèle macroscopique. L'état de sollicitation en chaque point de Gauss est ensuite transmis au modèle fin. Un nouveau calcul est effectué avec ce dernier pour les conditions aux limites transmises. L'état de sollicitation obtenu dans le modèle fin est finalement homogénéisé, pour permettre d'actualiser l'état de sollicitation en chaque point de Gauss du modèle macroscopique.

À ce premier groupe de démarches multi-échelle, s'ajoutent deux autres types, pour lesquels les modèles fin et macroscopique sont employés séparément :

— une utilisation en post-traitement [Oliver-Leblond et al., 2013] : Le modèle fin est utilisé à la suite d'un premier calcul complet effectué à l'aide du modèle macroscopique. Le modèle fin est utilisé comme un outil de post-traitement du résultat obtenu par le modèle macroscopique. Dans une zone restreinte, zone dans laquelle se manifestent les discontinuités (fissures) un second calcul est effectué à l'aide du modèle fin exploitant les conditions aux limites extraites du calcul effectué avec le modèle macroscopique. Il est ainsi possible d'extraire des données difficilement accessibles par l'intermédiaire du modèle macroscopique, telles que l'ouverture de fissures. À la différence d'une utilisation hiérarchique, l'alternance entre les modèles macroscopique et fin, n'est effectuée qu'une seule fois, lorsque le calcul sur la base du modèle macroscopique est achevé. Il n'y a donc pas de retour des informations obtenues à l'aide du modèle fin vers le modèle macroscopique ;
— une utilisation en pré-traitement [Delaplace et Desmorat, 2007] : Appelée "expérimentation numérique", cette démarche consiste à remplacer une part des essais en laboratoire par des simulations. En accordant une certaine confiance à la fidélité du modèle, il est possible d'exploiter les résultats de cette expérimentation numérique pour développer et identifier le modèle macroscopique, ensuite utilisé pour le calcul

de structure.

Dans ces travaux de thèse, une démarche d'expérimentation numérique est adoptée. Dans le paragraphe qui suit, les avantages d'une telle démarche multi-échelle sont mis en avant, relativement à une démarche d'expérimentation en laboratoire.

3.2 Complémentarité de l'expérimentation numérique

Une des limites à l'enrichissement et à l'utilisation de modèles continus macroscopiques est leur besoin conséquent en essais deplus en plus complexes.

Concernant leur utilisation, il est principalement question d'essais répétitifs servant à l'identification des paramètres du modèle. L'hétérogénéité des matériaux quasi-fragiles, notamment celle des roches ou du béton, n'est que très peu contrôlée. Or la méso-structure influence significativement la valeur que prennent les paramètres matériaux d'un modèle ; ainsi il est souvent nécessaire d'avoir à ré-identifier ces paramètres d'un jeu d'éprouvettes de matériau à un autre.

Concernant leur enrichissement, il s'agit d'un besoin, certes moindre, d'essais de caractérisation. Dans la section 2, il a été mis en évidence qu'une grande partie de la phénoménologie des matériaux quasi-fragiles a déjà été appréhendée, toutefois il reste encore des configurations de chargement qui n'ont pas ou peu été explorées (chargements cycliques, chargements multi-axiaux) et ce, principalement à cause du caractère fragile de ces matériaux qui pose des problèmes de contrôle de l'expérience. De plus, même si les phénomènes sont quantifiés, les mécanismes en cause ne sont pas nécessairement assimilés. C'est notamment le cas pour les incompatibilités géométriques auxquelles est attribuée l'origine des déformations résiduelles et des effets hystérétiques observés sous chargement cyclique. La cause de ces incompatibilités n'est pas encore clairement expliquée.

Finalement, qu'il s'agisse d'identification ou de caractérisation, les besoins expérimentaux sont importants. Mais l'expérimentation numérique n'a pas pour seule vocation de servir comme simple substitut à l'expérimentation en laboratoire. Au-delà d'un investissement moindre en temps et en ressources matérielles, l'expérimentation numérique permet de lever des obstacles auxquels l'expérimentation en laboratoire est confrontée de manière récurrente, comme :

— garantir la reproductibilité des essais et des résultats ;
— étudier des cas de chargement nécessitant un dispositif complexe ;
— évaluer des quantités difficilement accessibles.

Pour les matériaux quasi-fragiles, les essais de traction illustrent bien ces obstacles. Dans le cas d'un chargement uni-axial, les conditions aux limites en régime post-pic sont difficilement contrôlables. Dès lors que la fissuration ne se propage pas symétriquement, de la flexion peut être induite dans l'éprouvette, il n'est alors plus possible de parler de

traction *pure* (fig. 1.14). Et dans le cas tri-axial, l'essai n'a tout simplement jamais été réalisé.

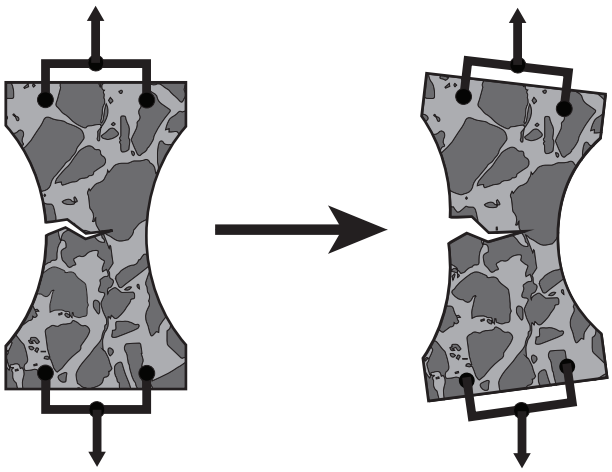


FIGURE 1.14: Flexion induite par la propagation asymétrique de la fissuration lors d'un essai de traction directe.

L'expérimentation numérique permet ainsi de répondre à ces problématiques. Delaplace et Desmorat [2007] ont exploité cette démarche afin de calibrer la sensibilité à l'endommagement $h(\underline{\underline{D}})$ du module de compressibilité hydrostatique effectif, dans le modèle d'endommagement anisotrope de Desmorat et al. [2007]. La calibration de cette sensibilité nécessite la réalisation d'un chargement de traction tri-axiale endommageante, suivie de chargements de traction uni-axiale, successivement, dans les trois directions orthogonales. Cette procédure est nécessaire afin de pouvoir évaluer le tenseur d'endommagement $\underline{\underline{D}}$ à la suite d'un chargement tri-axial. Étant donné la complexité de ce processus, une calibration du modèle de Desmorat et al. [2007] ne pourrait donc tout simplement pas être réalisée en laboratoire.

Dans le cadre de l'étude menée par Delaplace et Desmorat [2007], la complexité de l'essai est le facteur limitant l'accès à l'information, mais il s'avère aussi que parfois l'information recherchée elle-même, soit inaccessible. En cause, le fait que l'information, ou quantité d'intérêt, ne possède que peu ou pas de fondement physique. Chose fréquente dans le cas de modèles macroscopiques phénoménologiques, voire empiriques. En cause, aussi, le fait que d'accéder à la quantité d'intérêt requerrait une instrumentation trop poussée de l'essai, entre autres, la mesure d'une énergie dissipée spécifique à un mécanisme spécifique (fissuration, friction) ou encore l'estimation de la proportion de fissures ouvertes et fermées dans un volume de matériau dégradé.

Les quantités qui viennent d'être mentionnées sont celles qui feront l'objet d'une expérimentation numérique par la suite, notamment pour caractériser les effets unilatéral et hystérétiques.

Néanmoins, avant de procéder à une quelconque expérimentation numérique, il est nécessaire de pouvoir accorder une confiance certaine au modèle fin utilisé, notamment en termes de fidélité et de robustesse. Le choix de la méthode de modélisation numérique adaptée au développement du modèle fin est détaillé dans ce qui suit.

4 Méthodes de modélisation pour l'expérimentation numérique

Le modèle fin se positionne à une échelle inférieure à celle du VER, autrement dit une échelle à laquelle le matériau ne peut plus être considéré comme homogène. L'intérêt du modèle fin est bien évidemment de pouvoir tenir compte des conséquences de la présence d'hétérogénéités. Pour les matériaux quasi-fragiles les hétérogénéités dont il faut tenir compte sont la fissuration, les pores et les défauts, et les autres phases, spécifiques au matériau, se distinguant à l'échelle de modélisation choisie. Dans le cas du béton à l'échelle mésoscopique, par exemple, il s'agit du mortier, de l'interface de transition, et des granulats.

Dès lors qu'il est nécessaire de tenir compte d'hétérogénéités, une modélisation issue de la Méthode des Éléments Finis ou *Finite Element Method* (FEM), entièrement continue, s'avère peu efficace. Reproduire des hétérogénéités initialement présentes dans le matériau (phases de propriétés mécaniques différentes) n'est pas irréalisable, mais nécessite soit l'emploi de maillages adaptés, soit la modification des fonctions de formes associées aux éléments finis traversés par une discontinuité de phase [Nguyen et al., 2010]. Un maillage adapté implique qu'un élément fini ne peut appartenir qu'à une unique phase. Cette solution est coûteuse, car elle impose que le maillage soit suffisamment fin pour que la répartition spatiale de chaque phase soit respectée. La modification des fonctions de formes sur un élément fini constitué de deux phases est réalisée de sorte que la discontinuité des déformations conséquence du changement de propriétés, soit lissée sur l'ensemble de l'élément fini.

Cependant reproduire des hétérogénéités apparaissant lors de l'essai, pour ne pas dire plus simplement des fissures, est plus ardu. Décrire explicitement une fissure dans une modélisation classique par la FEM ne peut se faire autrement que par remaillage complet du volume de matériau modélisé pour laisser apparaître le vide formé. Cette solution n'est évidemment pas envisageable, étant donné les coûts de calculs engendrés par le remaillage complet, d'autant plus lorsqu'il s'agit de matériaux quasi-fragiles dont la fissuration est d'abord diffuse avant de localiser. La seule solution viable reste donc, comme pour des modèles macroscopiques, de répartir la fissuration sur un ou plusieurs éléments, par le biais de la théorie de l'endommagement. Néanmoins, l'emploi de cette théorie pose le même problème au sein d'un modèle fin qu'au sein d'un modèle macroscopique, à savoir celui d'un manque d'objectivité vis-à-vis de la finesse du maillage. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode de régularisation [Wriggers et Moftah, 2006].

Compte tenu des limitations rencontrées par une modélisation issue de la FEM classique, et la démarche d'expérimentation numérique étant réalisée au préalable des calculs de structures (*offline*), il semble raisonnable de se tourner vers des méthodes plus adaptées et plus réalistes, au détriment de coûts de calculs plus importants. Ainsi dans ce qui suit, l'attention sera portée sur les méthodes numériques de modélisation permettant de prendre en compte explicitement des discontinuités de champs.

4.1 Méthodes issues de la mécanique des milieux continus

Plusieurs méthodes de modélisation s'inspirent directement la FEM, et se fondent donc sur la mécanique des milieux continus. Ces méthodes sont ensuite enrichies afin de permettre une description explicite des discontinuités de champs de déplacement et de déformation, sans nécessiter de remaillage complet de la structure modélisée.

Outre l'introduction ponctuelle d'éléments d'interface [Rossi et Richer, 1987; Snozzi et al., 2011], l'enrichissement de la cinématique de la FEM nécessite l'utilisation de fonctions de formes supplémentaires. Pour leur proximité avec la FEM, et donc profitant de nombre de ses développements, la *Embedded Finite Element Method* (E-FEM) [Ortiz et al., 1987] et la *eXtended Finite Element Method* (X-FEM) [Moës et al., 1999], sont parmi les plus populaires.

La première (E-FEM) consiste en un enrichissement local des éléments finis traversés par une discontinuité de champ, des fonctions de formes spécifiques sont introduites (fig. 1.15). Contrairement à ce qui a été mentionné précédemment pour tenir compte d'un changement de phase [Nguyen et al., 2010], les fonctions de formes peuvent ici être discontinues, à l'image de la fonction Heaviside, pour reproduire une discontinuité du champs de déplacement (1.1). La fonction de forme introduite permet de corriger le champ discontinu sur l'élément fini concerné, de manière similaire à un modèle constitutif, ainsi d'un point vue global, le nombre d'inconnues du problème (déplacements nodaux) reste inchangé. D'où le nom de méthode d'enrichissement local.

$$\underline{u}_{E-FEM} = \sum_{i \in I} \underline{u}_i \phi_i + \sum_{e \in E} \underline{\beta}_e \left(H - \sum_{k \in N_e^+} \phi_k \right) \tag{1.1}$$

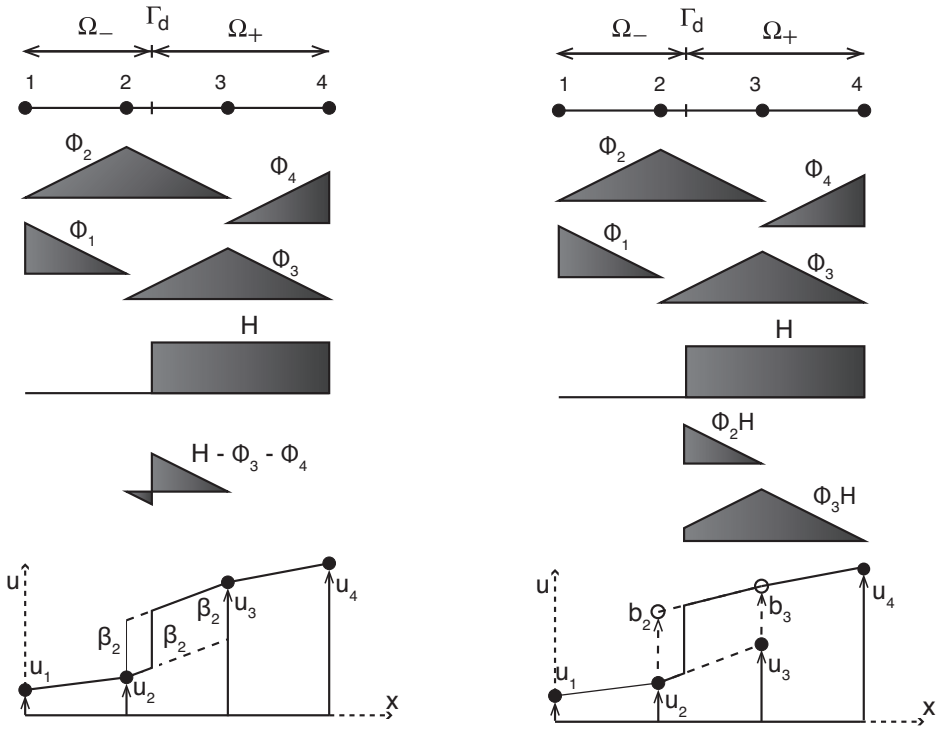
avec $\underline{u}_i$ les déplacements du nœud i, ϕ_i les fonctions de forme classiques du nœud i, I l'ensemble des nœuds, $\underline{\beta}_e$ le saut de déplacement de l'élément enrichi e, E l'ensemble des éléments enrichis, N_e^+ l'ensemble des nœuds de l'élément e situés au-delà de la discontinuité Γ_d, donc appartenant à Ω_+ (fig. 1.15), et H la fonction de Heaviside.

La seconde méthode (X-FEM), à l'inverse, consiste à enrichir globalement les nœuds des éléments finis traversés par une discontinuité de champ, en introduisant des degrés de liberté supplémentaires (fig. 1.15). Le champ discontinu est approché par une combinaison linéaire de fonctions de formes classiques et des degrés de liberté initiaux, à laquelle est

ajoutée une combinaison linéaire de fonctions de formes fondées sur la partition de l'unité [Babuska et Melenk, 1997] et des degrés de libertés supplémentaires introduits (1.2). Cette seconde partie du champ discontinu fait office d'enrichissement global.

$$\underline{u}_{X-FEM} = \sum_{i \in I} \underline{u}_i \phi_i + \sum_{j \in J} \underline{b}_j \phi_j H \tag{1.2}$$

avec $\underline{b}$ les déplacements nodaux additionnels, J l'ensemble des nœuds additionnels.



(a) E-FEM (b) X-FEM

FIGURE 1.15: Description d'une discontinuité par la E-FEM et la X-FEM, et modifications associées des fonctions de forme [Jirásek et Belytschko, 2002].

Les degrés de liberté supplémentaires introduits dans la X-FEM (b_2 et b_3 sur la figure 1.15) permettent de découpler entièrement les déplacements de deux sous-divisions de l'élément fini délimitées par la discontinuité.

Au contraire dans le cas de la E-FEM, il n'est possible d'introduire une discontinuité du champ discrétisé qu'à l'ordre 0 mais pas de ses dérivées d'ordre supérieur. Ainsi, dans une formulation variationnelle classique – le champ discrétisé est le déplacement – il est possible d'observer une discontinuité du champ de déplacement, mais pas de sa dérivée, le champ de déformation. En conséquence, des incompatibilités du champ de déformation peuvent apparaître, ainsi que des contraintes artificielles. Une manière de remédier à

ce problème, en restant dans le cadre de la E-FEM, consiste à utiliser une formulation variationnelle mixte en déplacements et en déformations [Washizu, 1975]. Les deux champs sont alors introduits indépendamment dans la formulation du problème.

Il faut noter que bien d'autres méthodes tout aussi populaires existent dans la littérature et permettent de tenir compte de discontinuités de champs. Elle sont fondées sur un enrichissement de FEM, entre autres la *Generalized Finite Element Method* (G-FEM) [Strouboulis et al., 2000] et la *Meshfree Galerkin Method* [Belytschko et al., 1994], mais leur emploi pour la modélisation de matériaux quasi-fragiles reste rare.

4.2 Méthodes issues de la mécanique des solides indéformables

À l'inverse des méthodes fondées sur mécanique des milieux continus, les méthodes fondées sur la mécanique des solides indéformables, décrivent la matière comme un milieu entièrement discontinu. Il s'agit d'un ensemble de solides, dont la position est ici définie en un point, auxquels peuvent être associés une masse et un volume. Les notions de contraintes et de déformations n'ont plus lieu d'être et sont remplacées par les notions d'efforts et de moments, et de déplacements et de rotations. Toutefois, il est souvent fait appel aux notions de contrainte et de déformation dans le contexte des méthodes fondées sur la mécanique des solides indéformables, pour tenter d'homogénéiser les résultats obtenus.

La Méthode des Éléments Discrets ou *Discrete Element Method* (DEM) [Cundall et Strack, 1979] décrit la matière comme un ensemble de particules rigides complètement indépendantes. Une particule est définie par un centre et une enveloppe, délimitant son volume. Le mouvement d'une particule est entièrement décrit par les degrés de liberté (déplacements et rotations) de son centre. Contrairement à la FEM, la DEM n'est pas une méthode de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. La DEM consiste, assez trivialement, à résoudre l'équilibre de forces ponctuelles appliquées à un ensemble de points, constitué des centres des particules. Les forces dont il est question dans les premiers travaux exploitant la DEM sont le contact et frottement, ces interactions sont suffisantes pour modéliser des empilements granulaires. Par la suite, la cohésion y a été ajoutée, par le biais de modèles dits *lattices* [Kawai, 1978], pour décrire des matériaux quasi-fragiles.

Dans le cadre de la DEM, les particules sont parfaitement rigides donc incapables de subir une quelconque déformation. Afin de permettre la déformation du milieu, chose nécessaire lorsque la DEM est utilisée pour modéliser un milieu initialement continu, les particules sont autorisées à se recouvrir. Une raideur de pénalisation, calculée à partir de la rigidité élastique du matériau, est utilisée pour restreindre de manière réaliste le recouvrement des particules.

La *Discontinuous Deformation Analysis* (DDA) [Shi et Goodman, 1985] palie à cette limitation en permettant une déformation élastique des particules, ou blocs, comme elles sont appelées dans le contexte de cette méthode. Dans les premières versions de la DDA,

les blocs sont caractérisés par les déplacements et rotations de leur centre, comme pour la DEM, ainsi que par un tenseur de déformation, unique pour le bloc entier. Plus aucun recouvrement des blocs n'est permis, le contact est donc géré par une méthode de pénalisation à proprement parler, ou par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'équilibre est trouvé de manière à satisfaire un minimum d'énergie totale du système entier de blocs étudié. Dans des développements plus récents, le calcul de la déformation des blocs s'apparente de plus en plus à un calcul par la FEM [Ghaboussi, 1988], une discrétisation du bloc en sous-élément est réalisée afin de permettre une description plus précise de sa déformée. La DDA tend alors vers un compromis entre les deux méthodes de modélisation numériques que sont la DEM et la FEM.

4.3 Discussion

Chacune des méthodes mentionnées ci-dessus présente un certain nombre d'avantages et d'inconvénients vis-à-vis d'une modélisation fine du comportement des matériaux quasi-fragiles sous chargements cycliques. Le choix de la méthode employée dans le reste de ces travaux s'est fait selon les arguments suivants :

— La E-FEM et ses dérivées sont légères en termes de coûts de calculs grâce à un enrichissement de la cinématique uniquement local. Néanmoins, ces méthodes ont le désavantage de générer des contraintes résiduelles artificielles dans les fissures [Jirásek, 2000], à moins d'employer un enrichissement plus complet des fonctions de formes, pour permettre la discontinuité des déplacements et des déformations quel que soit le mode de sollicitation de la fissure. De plus, l'enrichissement cinématique étant local à l'élément, il ne permet pas de garantir au niveau global de la structure la continuité de la discontinuité, et donc du trajet de fissuration.

— La X-FEM et ses dérivées ont l'avantage de permettre une discontinuité parfaite des champs décrits de part et d'autre d'une fissure ou d'un changement de phase, par l'introduction de degrés de liberté supplémentaires. Ainsi, il est possible de suivre le trajet de fissuration et d'en obtenir une description précise. Cependant, cet enrichissement global du modèle numérique est coûteux en temps de calculs, car les degrés de liberté d'un élément fini traversé par une discontinuité sont dédoublés. La taille du problème à résoudre croît donc rapidement. Ce point est d'autant plus pénalisant que pour les matériaux quasi-fragiles la fissuration est largement diffuse dans les premiers stades de dégradation, avant de localiser. Une quantité plus importante de discontinuités est à prévoir que pour des matériaux à rupture plus fragile.

— La DEM et ses dérivées ont l'inconvénient d'avoir recours à des particules indéformables. Sans une discrétisation suffisamment fine, la description du comportement continu du matériau est en partie dégradée. De plus, les fissures ne peuvent se propager qu'entre les particules, celles-ci étant indéformables et donc indivisibles. Le chemin emprunté par la fissuration n'est donc pas totalement objectif.

Néanmoins, encore une fois, le raffinement de la taille des particules permet de compenser cette lacune. Par ailleurs, la mésostructure d'une partie des matériaux quasi-fragiles, notamment le béton, est un ensemble d'inclusions rigides (granulats) incorporées dans une matrice souple (mortier/pâte de ciment) dans laquelle se localisent les déformations et donc les discontinuités. Cette description se rapproche considérablement de celle d'un empilement granulaire cohésif, structure pour laquelle la DEM s'avère très efficace, sans même considérer de distinction de phases.

— La DDA et ses dérivées semblent les plus complètes, elles permettent une description sans contre-parties cinématiques, aussi bien du milieu continu que des discontinuités. Leur seul inconvénient, de taille, reste les coûts de calculs, ceux-ci augmentent rapidement avec le nombre de blocs considérés. La DDA n'est pas conçue pour l'étude d'un grand nombre de blocs. Or le nombre de blocs ne peut être réduit sans limiter l'objectivité du trajet de fissuration. Les coûts de calculs sont amplifiés par la résolution de problèmes de contact (problèmes non-linéaires) tout en autorisant la déformation des blocs, ce qui implique un nombre de degrés de liberté bien plus conséquent qu'avec la DEM.

En conclusion, aucune méthode de modélisation n'est à exclure impérativement, d'ailleurs la E-FEM [Benkemoun et al., 2010], la X-FEM [Sukumar et Prévost, 2003], la DEM [D'Addetta et al., 2002], et la DDA [Pearce et al., 2000] ont déjà toutes été utilisées pour tenter de reproduire le comportement de matériaux quasi-fragiles jusqu'à la rupture. Toutefois compte tenu de l'objectif de ces travaux, à savoir modéliser le comportement mécanique sous chargement cyclique de matériaux quasi-fragiles, la DEM semble être l'alternative la plus intéressante. En effet, dans la section précédente abordant la phénoménologie des matériaux quasi-fragiles, il a été mis en avant que la plupart des phénomènes macroscopiques observés sous chargements cycliques sont fortement influencés par la description géométrique de la fissuration. Bien que la DEM reste encore loin d'une reproduction fidèle de la topologie d'une fissure, elle permet tout de même d'obtenir des informations exploitables sur la rugosité et la tortuosité [Delaplace, 2008] (fig. 1.16). De plus, les méthodes issues de la mécanique des solides indéformables possèdent une aisance supplémentaire pour reproduire explicitement les mécanismes de contact et de friction au niveau des discontinuités.

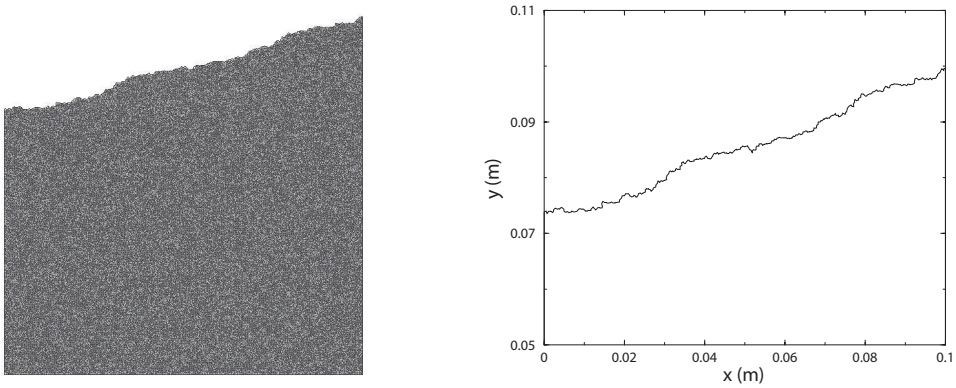


FIGURE 1.16: Modèle discret d'une éprouvette rompue et profil de fissuration mesuré [Delaplace, 2008].

5 Synthèse

Au travers de cette introduction bibliographique, le fondement du travail à venir a été éclairci.

Le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles est déjà largement appréhendé. Une grande partie des phénomènes macroscopiques observés expérimentalement sous chargement monotone est déjà clairement expliquée et physiquement justifiée. Inversement, sous chargement cyclique, des lacunes persistent. Du moins, un consensus ne se dégage pas systématiquement sur l'explication physique qui leur est attribuée. La complexité des essais à concevoir est à mettre en cause. En effet, expérimentalement, il n'est pas simple d'évaluer la dépendance de l'effet unilatéral ou des effets hystérétiques, au niveau de dégradation du matériau, ou encore à la présence partielle d'eau et au comportement au jeune âge.

Bien que l'objectif d'ensemble de cette étude soit la simulation de la réponse de structures complètes, tenter de lever certaines indéterminations du comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles à l'échelle du VER est aussi intéressant. Ainsi le choix d'une démarche d'expérimentation numérique, au sein de laquelle les modèles fins et macroscopiques ne sont que faiblement couplés est adaptée. En effet, une telle démarche permet de porter séparément une attention particulière à l'analyse du comportement fin du matériau, d'une part, et au développement et à la mise en œuvre de modèles macroscopiques, d'autre part. L'homogénéisation des résultats obtenus à l'échelle fine par la formulation d'un modèle macroscopique n'est cependant pas systématique, contrairement aux méthodes mutli-échelle fortement couplées. Le soin de ce travail est laissé à la discrétion du modélisateur, comme il est fait classiquement à partir de résultats d'essais en laboratoire.

Le choix d'un modèle fin fondé sur la méthode aux éléments discrets est propre aux

matériaux quasi-fragiles et au besoin d'étudier le comportement sous chargement cyclique. La capacité des modèles discrets à décrire une discontinuité du champ de déformations sans introduire la moindre contrainte parasite, à reproduire un trajet de fissuration continu et relativement réaliste, et à reproduire le comportement mécanique unilatéral d'une fissure par une gestion simple du contact, en fait l'outil adéquat aux besoins l'étude.

Chapitre 2

Description et développements d'une modélisation fine

Sommaire

1 Introduction 34
2 Philosophie de modélisation fine 35
3 Description du modèle discret 36
3.1 Maillage et forme des particules 36
3.2 Interactions entre particules 39
3.3 Mécanisme de rupture 45
4 Algorithme de résolution implicite quasi-statique 45
4.1 Résolution linéaire séquentielle de l'évolution de la fissuration . . . 47
4.2 Résolution implicite de l'équilibre 48
4.3 Particules indépendantes 57
4.4 Algorithme de résolution global 59
5 Comportement à la rupture et fragilité 62
5.1 Aspects statistiques 63
5.2 Formulation du critère de rupture 64
5.3 Surface de chargement à la rupture 68
6 Synthèse 69

1 Introduction

L'outil d'expérimentation numérique développé dans ce travail s'appuie sur un modèle discret existant DEAP2D initialement conçu par Delaplace [2008]. Une présentation détaillée en est faite. Celle-ci s'attarde sur les choix de modélisation effectués au cours de son élaboration, en vue d'une utilisation de l'outil comme un intermédiaire entre les résultats d'expérience et la mise en œuvre de modèles de comportement macroscopiques pour le calcul de structures. Toutefois, ce modèle discret est encore à un stade de développement où seuls des chargements monotones peuvent être étudiés, et possède une efficacité limitée pour des modes de fissuration autres que la fissuration en mode I. Ainsi, à travers cette thèse deux développements sont proposés : l'introduction du contact frottant et l'utilisation d'un critère de rupture adapté.

L'introduction du contact dans le modèle initial DEAP2D n'est pas, à première vue, un point délicat. Le contact est l'interaction principale considérée dans les modèles issus de la DEM, et ce depuis le premier modèle de ce type développé par Cundall et Strack [1979]. Cependant, les modèles issus de la DEM ne sont pas classiquement utilisés pour étudier le comportement de matériaux cohésifs sujets à fissuration. Les applications scientifiques de ces modèles étant sensiblement différentes, les schémas de résolution numérique utilisés le sont tout autant. Il s'agit très souvent d'une résolution explicite réalisée dans un cadre dynamique. Dans le contexte de ces travaux, et donc l'étude de la fissuration de matériaux cohésifs soumis à des chargements lents, un cadre quasi-statique est plus adapté. Dans le modèle initial DEAP2D, la résolution numérique est réalisée avec le schéma *Saw-Tooth* [Rots et Invernizzi, 2004]. L'usage de ce schéma permet de résoudre de manière stable le problème de fissuration. Cependant lorsque l'interaction de contact est introduite, le schéma *Saw-Tooth* n'est plus fonctionnel, du fait de son caractère explicite et du cadre quasi-statique de l'étude. En effet, la non-linéarité du problème de contact, ne permet plus de conserver la stabilité des résultats. Et l'abandon des effets dynamiques, notamment l'amortissement visqueux, induit des oscillations numériques. Le choix est donc fait d'approfondir le développement du schéma de résolution numérique *Saw-Tooth*, afin de le rendre implicite.

Les problèmes de contact et de résolution numérique mis à part, le modèle initial DEAP2D soulève les mêmes problèmes que les *lattices* en ce qui concerne la dissipation énergétique conséquence de la fissuration. En effet, il est généralement admis que les *lattices* affichent un comportement à la rupture en traction bien trop fragile [Schlangen et Van Mier, 1992]. Pour reproduire un comportement quasi-fragile en traction, les hétérogénéités du matériau sont considérées par le biais de distributions statistiques des paramètres matériaux influençant la rupture. La tendance des *lattices* à afficher un comportement fragile en compression est une problématique moins connue mais qui reste importante. Ainsi la formulation du critère de rupture local est discutée pour répondre à cette problématique.

2 Philosophie de modélisation fine

Le modèle fin développé dans ce travail se caractérise par une combinaison de la DEM et d'un *lattice*. L'objectif des développements à venir est de permettre la reproduction fidèle du comportement mécanique de matériaux quasi-fragiles à une échelle inférieure à celle du VER, et ainsi, par la suite, d'effectuer des expériences numériques, notamment sous chargements cycliques.

Dans le but de mettre en place un modèle discret prédictif, il est nécessaire de s'assurer que le modèle soit aisément identifiable. Peu d'intérêts pourraient être trouvés en ne faisant que reporter à une échelle inférieure, les problèmes rencontrés à l'échelle macroscopique avec les modèles continus. Contrairement à ces modèles, le modèle discret se doit de s'orienter vers une description enrichie de la géométrie et de la physique du milieu et donc vers un usage d'équations constitutives simples. Dans le modèle discret développé, hormis l'introduction d'un modèle de friction et la prise en compte de la rupture fragile, l'ensemble des comportements considérés sont donc réversibles.

Il existe aujourd'hui de nombreuses méthodes pour reproduire des morphologies mésoscopiques, voire microscopiques, réalistes. Des morphologies peuvent être, par exemple, reproduites par analyse d'images [D'Addetta, 2004] ou par seuillage de champs aléatoires corrélés spatialement [Roubin et al., 2015]. Néanmoins, aucune distinction de phase n'est faite dans le modèle discret. Seuls les vides induits par la propagation de la fissuration sont naturellement pris en compte. Ce choix se justifie par le souhait de simplifier, dans la mesure du possible, la procédure d'identification du modèle. Ne pas faire de distinction de phases permet de ne pas avoir à introduire de paramètres matériaux spécifiques à chaque phase, qui à des échelles relativement fines peuvent s'avérer difficiles à identifier [Bažant, 2010]. La discrétisation du milieu dans le modèle discret est effectuée en volumes (particules) rigides et indépendants. En conséquence du choix qui vient d'être effectué, chaque particule représente donc un élément de volume de matériau homogène. En revanche, deux aspects aléatoires sont introduits, d'une part lors de la procédure de discrétisation, et d'autre part lors de l'attribution des propriétés mécaniques. Ainsi, le matériau hétérogène est discrétisé en milieux homogènes probabilistes.

En l'état initial, le modèle DEAP2D ne peut être utilisé qu'à l'étude de chargements monotones, n'impliquant donc que l'ouverture des fissures. En effet, la seule interaction considérée entre les particules est la cohésion. Cette dernière est considérée par le biais d'un réseau de poutres à la manière d'un *lattice* [Hrennikoff, 1941]. Dans la démarche de conserver la simplicité du modèle discret, la fissuration est introduite dans le modèle discret par la possibilité de rupture parfaitement fragile de ces poutres. Aucun mécanisme dissipatif supplémentaire, comme peuvent l'introduire les modèles de zone cohésives [Barenblatt, 1962], n'est pris en compte.

Dans l'objectif d'étendre le domaine de validité du modèle discret issu de DEAP2D à des chargements plus complexes (cycliques, multi-axiaux) une partie de ces travaux de thèse s'intéresse à l'enrichissement des interactions et des modes de fissuration considérés par

le modèle.

3 Description du modèle discret

Les modèles particulaires fondés sur la mécanique des solides indéformables sont intrinsèquement adaptés à la descriptions de mécanismes discontinus. Lorsque ces modèles sont appliqués à l'étude matériaux cohésifs, il est souvent fait le choix de les coupler à des *lattices*, pour assurer la cohésion des particules. Le modèle DEAP2D [Delaplace, 2008], dont est issu le modèle discret décrit ci-dessous, s'inspire de ces deux types de modélisations.

Puisque le modèle discret est formulé en deux dimensions, dans l'ensemble des équations à venir, la troisième dimension est prise de valeur unitaire.

3.1 Maillage et forme des particules

Le maillage du milieu étudié dans le contexte de la DEM est une étape importante. Il n'existe pas d'objectivité des résultats d'une simulation par éléments discrets vis-à-vis du maillage. Contrairement à un calcul par la FEM, pour lequel le maillage est simplement une discrétisation formelle, lors d'un calcul par la DEM la taille et la forme des particules a un sens particulier. Les interactions mécaniques entre les particules sont directement déterminées à partir de la géométrie des particules.

3.1.1 Géométrie des particules

Le choix de la géométrie des particules consiste à en choisir la forme et la régularité du contour.

Forme Il existe principalement deux types de forme de particule, circulaire (ou elliptique) [Hentz et al., 2004] et polygonale [Tillemans et Herrmann, 1995]. La première présente l'intérêt de pouvoir être décrite de manière analytique, l'équation d'un cercle étant connue, les efforts de contact calculés à partir de l'intersection de deux particules sont facilement estimés. Le choix de particules circulaires implique donc une réduction importante des coûts de calculs comparativement au choix de particules polygonales. En revanche, des particules polygonales sont plus adaptées à la description fine de la structure des matériaux quasi-fragiles [Potyondy et Cundall, 2004]. Par exemple, il n'est pas nécessaire de procéder à un enrichissement des interactions entre particules pour reproduire le rapport entre les résistances en traction et en compression [Scholtès et Donzé, 2013]. Des particules polygonales sont aussi plus adaptées à la description des phénomènes inhérents à la fermeture de fissures, impliquant le contact et la friction, notamment sous

chargement cyclique, car une représentation plus réaliste de la rugosité de la fissuration est permise. De plus, des particules polygonales permettent d'éviter l'introduction d'une porosité non-souhaitée [Issa et Nelson, 1992], inévitable avec un empilement de particules circulaires dont la compacité est limitée, quelle que soit la taille des particules (fig. 2.1). En conséquence une meilleure représentation de certains phénomènes macroscopiques, tels que la dilatance, est obtenue avec des particules polygonales [Bashir et Goddard, 1991]. Pour ces raisons, des particules polygonales sont souvent retenues lorsqu'il s'agit de modéliser des matériaux cohésifs et frictionnels.

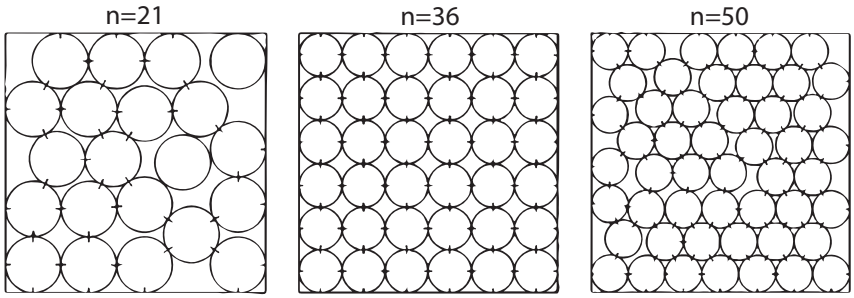
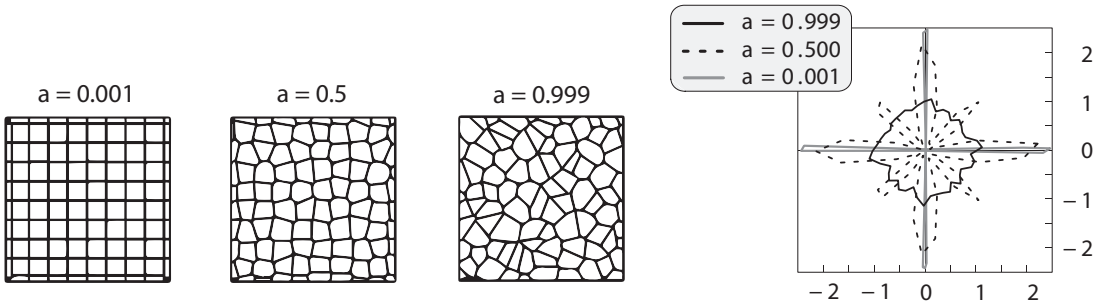


FIGURE 2.1: Arrangement volumique optimal dans un carré d'une quantité n de cercles [Nurmela et Östergård, 1997].

Régularité Le choix d'une forme polygonale effectué, vient le choix de la régularité des polygones maillés. En réalité, il s'agit plutôt du choix de la régularité du *lattice* utilisé pour modéliser la cohésion, mais les deux notions sont intrinsèquement liées. Bien qu'il n'ait pas encore été présenté en détails, le processus de génération du maillage est utilisé afin d'illustrer l'influence de la régularité de la forme des particules. Comme expliqué ci-après à la section 3.1.2, l'aléa du positionnement des centres de particules a dans une grille permet de contrôler la régularité du maillage (fig. 2.2a). Plus l'aléa est grand, plus la forme des polygones est irrégulière. L'orientation des poutres du *lattice*, introduites par la suite pour reproduire la cohésion du matériau (section 3.2.1) est déterminée par le contour des particules. La cohésion entre deux particules est assurée, en reliant leurs centres à l'aide d'une poutre ; la direction de cette poutre est perpendiculaire au côté commun des deux particules (propriété du diagramme de Voronoi). La figure 2.2b montre la corrélation entre l'aléa et l'orientation de ces poutres. Plus l'aléa est grand, plus l'orientation des poutres est répartie de manière uniforme dans toutes les directions. Étant donné qu'initialement la cohésion est la seule interaction se manifestant, une répartition homogène des poutres assurant la cohésion, est nécessaire pour assurer l'isotropie des propriétés élastiques du modèle. En conclusion, afin de décrire un matériau initialement isotrope, le choix de particules de forme irrégulière semble inévitable. Une discrétisation régulière trouve davantage d'intérêt pour la modélisation de milieux organisés, à l'échelle moléculaire [Born et al., 1955].



(a) forme des particules (b) orientation des éléments poutres

FIGURE 2.2: Influence de l'aléa a de la position du centre des particules [D'Addetta, 2004].

3.1.2 Génération du maillage

Le milieu est donc décrit comme un ensemble de particules de forme irrégulière, polygonales, et de taille homogène. La génération du maillage suit la proposition de Moukarzel et Herrmann [1992] et se trouve résumée par la figure 2.3.

D'abord, une grille est superposée à l'élément de matériau à discrétiser. L'espacement des mailles de la grille correspond à la taille moyenne l_p des particules. Ensuite, des points sont générés aléatoirement dans chaque cellule de la grille, ces points représentent les centres de chaque particule. L'hétérogénéité du maillage peut ainsi être contrôlée en ajustant de le positionnement aléatoire des centres. Puis, la triangulation de Delaunay est appliquée à l'ensemble formé par les centres des particules. Les segments délimitant les triangles de Delaunay constituent le réseau de poutre qui assurera la transmission des interactions de cohésion entre les particules. Enfin, la forme polygonale des particules, exploitée pour l'évaluation des interactions de contact, est obtenue par diagramme de Voronoi.

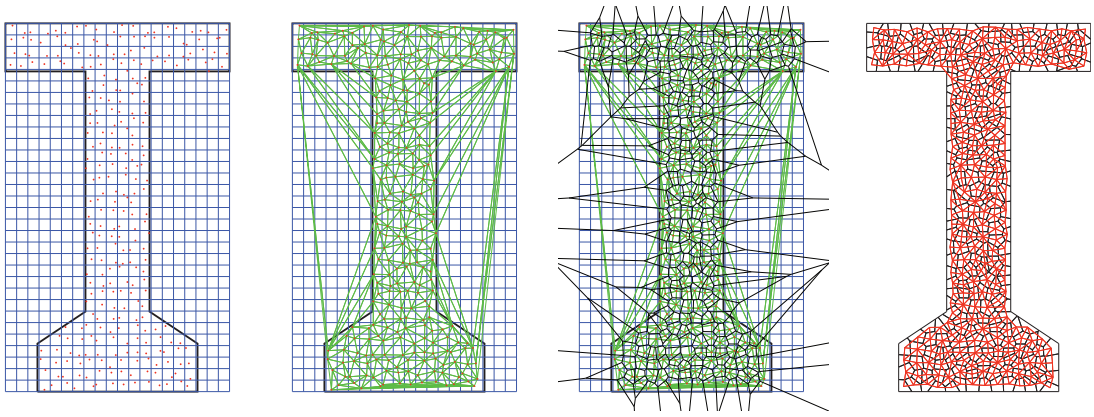


FIGURE 2.3: Étapes successives de la génération du maillage [Delaplace, 2008] (de gauche à droite) : génération des centres, triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoi, intersection du diagramme de Voronoi et du contour.

3.2 Interactions entre particules

3.2.1 Cohésion

La cohésion entre les particules dans un modèle issu de la DEM est le plus souvent reproduite par un *lattice*. Le premier *lattice* a été introduit par Hrennikoff [1941] pour résoudre des problèmes d'élasticité classiques. Le matériau élastique est discrétisé en utilisant des éléments uni-dimensionnels (barres ou poutres) qui permettent de transmettre les efforts entres les nœuds formant le *lattice*. Le développement de la simulation numérique a permis l'extension des *lattices* à l'étude des métaux en ajoutant un comportement fragile aux barres ou aux poutres du *lattice* [Herrmann et al., 1989]. Bažant et al. [1990] et Schlangen et Van Mier [1992] ont ensuite modifié cette approche de modélisation pour l'appliquer à la rupture quasi-fragile du béton sous chargement de traction.

Une alternative aux *lattices*, consiste à utiliser des interfaces cohésives plutôt que des barres ou des poutres [D'Addetta, 2004]. La modélisation de la cohésion par interfaces cohésives s'inspire de travaux effectué dans le cadre de la FEM, afin de prendre en compte des discontinuités. Les éléments d'interfaces ont été introduits plus d'une décennie avant le développement la DEM dans les travaux de [Goodman et al., 1968; Ngo et Scordelis, 1967], dont l'objectif était d'utiliser les éléments d'interface afin de remplacer les vides introduits par les fissures tout en assurant la continuité des déplacements et des déformations dans le modèle.

En comparaison des *lattices*, la modélisation par interfaces cohésives consiste, non plus à placer une unique barre ou poutre entre les centres de deux particules, mais un nombre fini le long de leur interface. Les liens ne relient donc plus les centres de deux particules adjacentes, mais sont répartis sur une bande d'épaisseur nulle au niveau du côté commun aux deux particules, et constituent un élément d'interface.

Contrairement aux liens utilisés dans les *lattices*, les éléments d'interfaces sont des éléments intégrés, dont les points d'intégration sont les barres ou poutres qui le constituent (2.4). Par sommation des différents efforts transitant dans chacun des liens constituant l'interface, le torseur des efforts peut y être intégré. Il est alors transporté au centre des particules concernées.

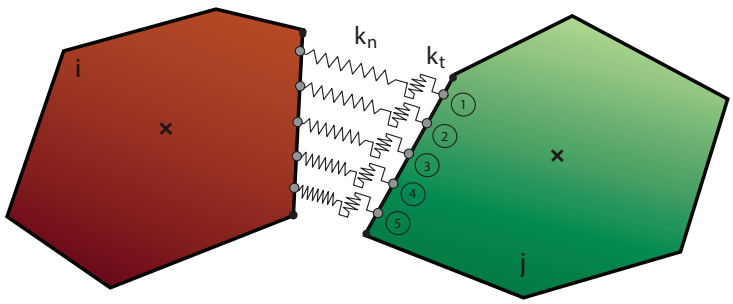


FIGURE 2.4: Deux particules liées par une interface cohésive.

Dans le cadre de ces travaux, un *lattice* de poutres d'Euler-Bernoulli a toutefois été retenu. Le formalisme des *lattices*, basé sur un réseau de nœuds reste bien plus proche, et donc adapté, à un couplage avec un modèle particulaire.

Dans un *lattice*, la poutre $i-j$, liant les particules i et j, possède quatre paramètres (fig. 2.5). Deux d'entre eux, la longueur $l_{b,ij}$ et la section $A_{b,ij}$ – en 2D, égale à la longueur du côté commun aux deux particules – sont directement imposées par la géométrie du maillage généré. Du fait de l'aléa de forme des particules, ces deux paramètres ont des valeurs propres à chaque couple de particules, et donc à chaque poutre. Les deux autres paramètres, le module de Young $\bar{E}$ et le coefficient d'inertie α sont à l'inverse considérés égaux pour chaque poutre. Le coefficient d'inertie α est introduit pour modifier le moment d'inertie de flexion des poutres ($I_{b,ij} = \alpha A_{b,ij}^2/64\pi$) et ainsi contrôler le coefficient de Poisson macroscopique du *lattice*.

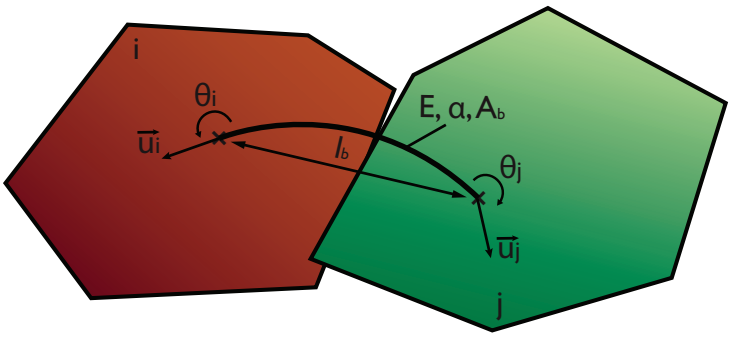


FIGURE 2.5: Deux particules liées par une cohésion de type poutre (*lattices*).

Les forces et moment de cohésion entre deux particules i et j sont formulés de la manière suivante :

$$\underline{F}_{coh,ij} = \begin{cases} F_{N,ij} = \dfrac{\bar{E}A_{b,ij}}{l_{b,ij}}\left(\underline{u}_i - \underline{u}_j\right).\underline{n}_{b,ij} \\ F_{T,ij} = \dfrac{12\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}^3}\left(\underline{u}_i - \underline{u}_j\right).\underline{t}_{b,ij} - \dfrac{6\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}^2}\left(\theta_i - \theta_j\right) \\ M_{Z,ij} = \dfrac{6\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}^2}\left(\underline{u}_j - \underline{u}_i\right).\underline{t}_{b,ij} + \dfrac{4\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}}\left(\theta_i - \dfrac{\theta_j}{2}\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\underline{n}_{b,ij}$ et $\underline{t}_{b,ij}$ sont les vecteurs normal et tangent de la section de la poutre $i-j$.

3.2.2 Contact frottant

La modélisation de la dégradation du béton sous chargements cycliques ou multi-axiaux requiert de tenir compte du contact frottant pouvant avoir lieu entre couples de particules,

et ce, de manière à capturer certains mécanismes spécifiques, tels que la fermeture de fissures ou l'engrènement de rugosité (*"aggregate interlocking"*).

Les poutres assurant la cohésion possèdent un comportement élastique identique en traction et en compression. Afin de ne pas redoubler l'action des poutres lorsque deux particules s'interpénètrent, le contact frottant n'est introduit qu'entre particules non liées par une poutre. L'amplitude, la direction, le sens et le point d'application des efforts de contact frottant sont exprimés comme des fonctions de la surface de recouvrement du couple de particules concerné. Un recouvrement des couples de particules en contact est nécessaire pour permettre la déformation du matériau. En effet, comme cela a été mentionné précédemment, les particules indéformables.

Détection

Pour quantifier l'effort de contact frottant entre deux particules, il est d'abord nécessaire de caractériser leur intersection. Étant donné la forme polygonale des particules, leur intersection ne peut être estimée analytiquement, comme ce peut être le cas pour les particules circulaires. Un algorithme de détection numérique est donc requis. La détection du contact est une opération coûteuse en temps de calculs pour deux raisons :

— Une première raison pour laquelle l'étape de détection du contact est coûteuse est le nombre élevé de couple de particules potentiellement en contact. En effet, si l'algorithme de détection étudie, pour chaque particule du modèle, la possibilité de contact avec toutes les autres particules, le nombre d'opérations est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$ avec n le nombre de particules de la structure. Sachant que chacune de ces opérations est, elle-même, coûteuse et qu'il serait dommageable de devoir restreindre le nombre de particules dans la structure, il n'est pas raisonnable de procéder ainsi.
  Afin de limiter les coûts de recherche, le nombre de couples de particules potentiellement en contact est réduit. La méthode de tri utilisée dans le modèle discret est basée sur une grille de taille constante, étant donné que la taille des particules dans le modèle discret est homogène. Il faut noter qu'il existe d'autres méthodes de tri, plus complexes, basées sur des grilles de tailles adaptatives ou encore sur une organisation en arbre. Une description plus exhaustive des différentes méthodes peut être trouvée dans [Williams et O'Connor, 1995; O'Connor, 1996]. Quant à la méthode choisie, à l'image du processus de disposition des centres de particules lors de la création du maillage, les particules sont à nouveau ordonnées dans une grille à taille de maille constante. L'algorithme de contact n'étudie la possibilité de contact qu'entre des particules situées dans des cases voisines. La taille des mailles de la grille est choisie suffisamment grande pour s'assurer que de particules n'étant pas situées dans la même case ou des cases voisines ne sont pas en contact. En ce qui concerne l'algorithme de détection employé, la taille des mailles de la grille est choisie deux fois plus grande que la taille des mailles de la grille utilisée pour la création du maillage ; le plus grand segment contenu dans n'importe quelle particule du maillage ne dépassera donc pas la taille de maille de la grille de détection.

— Une seconde raison pour laquelle l'étape de détection du contact est coûteuse, ne concerne que les modèles dont le contour des particules ne peut être décrit analytiquement. C'est précisément le cas des particules polygonales. Il s'agit de savoir si les deux particules étudiées sont effectivement en contact, et quelle est l'aire de la surface de recouvrement. En ce qui concerne les particules dont la forme ne peut s'écrire sous la forme d'une équation (cercles, ellipses, etc...), cette opération se fait simplement en résolvant un système d'inéquations, décrivant les domaines occupés par les deux particules étudiées. Ceci est bien moins coûteux que les méthodes mentionnées ci-après pour des particules polygonales.
Du fait de l'intérêt pour diverses applications en mécanique, en électronique ou encore en robotique, et de la complexité du problème, notamment pour réduire le nombre d'opérations nécessaires, les algorithmes de calcul d'intersection de polygones ont fait l'objet de recherches importantes. Un algorithme développé par [O'Rourke et al., 1982] pour le cas des particules polygonales convexes est employé ici. Le nombre d'opérations nécessaire pour calculer l'intersection de deux particules est en $\mathcal{O}(n+m)$ avec n et m leur nombre de côtés respectifs des deux particules.

L'algorithme utilisé pour déterminer le polygone convexe d'intersection de deux particules, elles-mêmes convexes, est développé par O'Rourke et al. [1982].

L'évaluation numérique de l'intersection d'un couple de particules est une procédure coûteuse en temps de calculs. Afin de limiter les coûts de calculs de la phase de détection, le nombre de couples potentiellement en contact à analyser est restreint. Seules deux particules situées relativement proches feront l'objet d'une détection de leur potentielle intersection [Perkins et Williams, 2001].

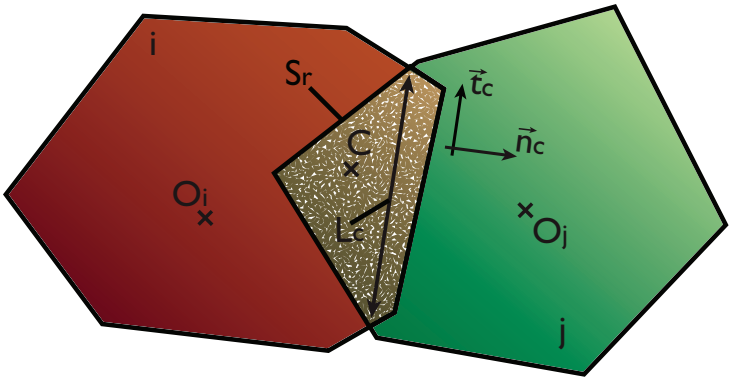


FIGURE 2.6: Deux particules en contact.

Une fois l'intersection de deux particules caractérisée, les propriétés listées ci-dessous peuvent être déterminées (fig. 2.6) :

- la surface d'intersection S_r qui est celle du polygone d'intersection.
- la largeur de la bande contact L_c qui est le plus long segment contenu dans le polygone d'intersection.

- les vecteurs normal $\vec{n}_c$ et tangent $\vec{t}_c$ de contact, déterminés par rapport au plus grand segment contenu dans le polygone d'intersection.
- le point d'application C de l'effort de contact frottant choisi comme le centre d'inertie du polygone d'intersection.

Ces propriétés sont enfin utilisées pour évaluer l'effort de contact frottant.

Effort de contact

La théorie des poutres utilisée pour la cohésion s'avère aussi adaptée à la description de l'effort de contact normal élastique entre deux particules polygonales [Tillemans et Herrmann, 1995; D'Addetta et al., 2002]. Une légère modification est effectuée de manière à introduire la surface d'intersection S_r dans le calcul de l'effort normal transitant dans une poutre fictive de longueur $l_{c,ij}$ et de section $1 \times L_{c,ij}$ (en 2D) :

$$\underline{F}_{cont,ij} = -\frac{\bar{E}\left(1 \times L_{c,ij}\right)}{l_{c,ij}} \frac{S_{r,ij}}{L_{c,ij}} \underline{n}_{c,ij} = -\frac{\bar{E} S_{r,ij}}{l_{c,ij}} \underline{n}_{c,ij} \tag{2.2}$$

où $l_{c,ij}$ est une longueur caractéristique fonction des diamètres des deux particules en contact (2.3) :

$$\frac{1}{l_{c,ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_i} + \frac{1}{D_j}\right) \tag{2.3}$$

Le rapport de la surface d'intersection $S_{r,ij}$ et de la largueur de la bande de contact $L_{c,ij}$ peut être assimilé à un enfoncement moyen d'une particule dans l'autre. C'est pourquoi il est utilisé pour remplacer le déplacement relatif normal dans la formule de l'effort normal de la théorie des poutres.

Effort de frottement

La volonté de vouloir s'affranchir autant que possible de l'emploi de modèles constitutifs en augmentant le détail de la description géométrique du matériau est limitée. Le mécanisme de friction en est un exemple. Même en ayant fait le choix de particules polygonales, dont la présence permet une meilleure description géométrique de la fissuration, il n'est pas possible de s'affranchir complètement de modèles constitutifs. Un raffinement important de la taille des particules serait nécessaire, ce qui impliquerait des coûts de calculs trop élevés.

Néanmoins, la finesse de particule qu'il est possible d'atteindre permet tout de même de représenter correctement la rugosité macroscopique de la fissuration ainsi que sa tortuosité. En conséquence, dans le cadre de modèles discrets appliqués à la modélisation du comportement de matériaux quasi-fragiles, il est rarement fait appel à des modèles constitutifs de frottement plus complexes que le modèle de Coulomb. Le modèle de Coulomb permet de palier au manque de description géométrique de la rugosité microscopique.

Le modèle de friction de Coulomb peut être décrit à l'aide de la seule équation suivante :

$$||\underline{F}_{fric}|| = \min\left(||\underline{F}^{el}_{fric}||, \mu||\underline{F}_{cont}||\right) \tag{2.4}$$

Cette équation traduit que les deux solides sont considérés adhérents tant que la valeur l'effort tangent élastique est strictement inférieure à la valeur de l'effort normal à la surface de contact pondérée par un coefficient de frottement μ. Le glissement entre les deux solides est atteint lorsque $||\underline{F}^{el}_{fric}||$ excède $\mu||\underline{F}_{cont}||$. Dans ce cas, $||\underline{F}_{fric}||$ est alors égal à $\mu||\underline{F}_{cont}||$ ce qui revient à un glissement parfait entre les deux solides.

L'effort normal $\underline{F}_N$ a déjà été défini, il faut maintenant définir la valeur élastique de l'effort tangent $\underline{F}^{el}_{fric}$. Classiquement la partie élastique est définie par une fonction de la vitesse tangente entre les deux particules. Par exemple dans les travaux de [Tillemans et Herrmann, 1995], la partie élastique est écrite en fonction de la vitesse relative tangentielle $\underline{v}^{rel}_{fric}$ entre les deux particules pondérée par un coefficient d'amortissement γ_{fric} et une masse équivalente m^{eff} calculée à partir de la masse des deux particules :

$$\underline{F}^{el}_{fric,ij} = -m^{eff}_{ij}\gamma_{fric,ij}||\underline{v}^{rel}_{fric,ij}||.\underline{t}_{c,ij} \tag{2.5}$$

Bien que physiquement complètement justifiée, cette formulation de la partie élastique de l'effort tangent n'est pas admissible dans le cadre du modèle discret, tel que formulé dans cette étude. Dans un cadre quasi-statique, la vitesse relative entre deux particules n'est pas définie.

Une fois de plus la théorie des poutres est utilisée, la partie élastique de l'effort tangent est donc écrit comme l'effort tranchant dans une poutre en fonction du déplacement relatif de contact tangent auquel est soustrait le déplacement relatif de glissement :

$$\underline{F}^{el}_{fric,ij} = \frac{\bar{E}I_{c,ij}}{l^3_{c,ij}}\left[\left(\underline{u}_{c,ij} - \underline{u}_{c,ji}\right).\underline{t}_{c,ij} - \delta u_{s,ij}\right].\underline{t}_{c,ij} \tag{2.6}$$

où le moment d'inertie $I_{c,ij}$ s'écrit : $I_{c,ij} = \dfrac{1 \times L^3_{c,ij}}{12}$. L'effort élastique est alors exprimé en fonction des déplacements $\underline{u}_{c,ij}$ et $\underline{u}_{c,ji}$ qui sont respectivement les déplacements enregistrés par les particules i et j depuis leur entrée en contact avec les particules j et i, et de δu_s mesurant le déplacement relatif de glissement entre les deux particules. Le déplacement relatif δu_s est actualisé de manière à vérifier le critère de Coulomb. Les deux déplacements $\underline{u}_c$ et δu_s sont remis à zéro lorsque le contact est perdu.

$$\underline{u}^{t+1}_{c,ij} = \begin{cases} \underline{u}^{t}_{c,ij} + \Delta\underline{u}^{t+1}_{c,ij} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont en contact} \\ 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont disjointes} \end{cases} \tag{2.7}$$

3.3 Mécanisme de rupture

La rupture des poutres de cohésion est parfaitement fragile. Le critère de rupture P_{ij} de la poutre liant les particules i et j dépend de la déformation axiale de la poutre ϵ_{ij}, et des rotations des deux particules $\theta_{i,j}$:

$$P_{ij}\left(\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{ij}^{cr}}, \frac{|\theta_j - \theta_i|}{\theta_{ij}^{cr}}\right) > 1 \tag{2.8}$$

où les paramètres de rupture de la poutre $i - j$ sont ϵ_{ij}^{cr}, la limite en extension, et θ_{ij}^{cr}, la limite en rotation. Les déformations axiales ϵ sont classiquement calculées à partir du déplacement relatif des deux particules :

$$\epsilon_{ij} = \frac{||\underline{u}_i - \underline{u}_j||}{l_{b,ij}} \tag{2.9}$$

Lorsque le critère de rupture P_{ij} est atteint, la poutre est retirée du modèle, et une fissure apparaît au niveau du côté commun des deux particules anciennement liées. Une ouverture de fissure locale e_{ij} peut être évaluée en calculant le déplacement relatif de ces deux particules.

4 Algorithme de résolution implicite quasi-statique

Les équations du modèle discret ont été décrites, elles ont une importance certaine sur la réponse obtenue. Toutefois, les équations ne sont pas le seul paramètre d'influence, le choix de l'algorithme de résolution est aussi primordial. D'autant plus, lorsque l'objectif du modèle mis en place est de produire des résultats prédictifs et quantitatifs, comme l'implique une démarche d'expérimentation numérique.

Le modèle discret présenté ici décrit les efforts internes $\underline{F}_{int}$ comme une fonction non-linéaire du déplacements des centres de particules. La non-linéarité des efforts internes est due au caractère non-linéaire élastique des efforts de contacts, et au caractère inélastique de la rupture et de la friction.

Les *lattices* sont généralement utilisés pour l'étude de chargements monotones, et des modes de fissurations en ouverture (mode I ou mode mixte I et II). En ce qui concerne ces applications le contact n'est pas un mécanisme prédominant, ainsi le schéma de résolution *Saw-Tooth* développé par Rots et Invernizzi [2004], spécifiquement développé pour la gestion de la fissuration, s'avère très efficace. Ce schéma de résolution assure la stabilité des résultats, même dans le cas d'un comportement fragile.

Dans le cas de chargements complexes, et plus particulièrement de chargements cycliques, la fermeture de fissures se manifeste, le contact devient alors un mécanisme prédominant.

Les nombreux comportements locaux non-linéaires sont la source d'imprécisions pour un schéma de résolution explicite. L'introduction d'effets visqueux ou d'amortissement, inhérents au contexte dynamique, permet bien souvent de lisser les oscillations numériques liées aux non-linéarités de contact. Néanmoins, il est fait le choix de rester dans un cadre quasi-statique. L'introduction de paramètres arbitrairement identifiés, comme peut l'être un coefficient d'amortissement, est évitée. De plus, un cadre quasi-statique permet d'étudier la propagation de la fissuration de manière objective, vis-à-vis d'effets dynamiques tels que la réflection d'ondes au niveau des interfaces. Ces effets sont encore difficilement modélisés et fortement dépendants des hétérogénéités du matériau, qui comme expliqué précédemment ne sont pas prises en compte. Toutefois, l'algorithme de résolution explicite *Saw-Tooth* ne peut plus être utilisé tel quel. Il est communément accepté, dans le cadre d'autres méthodes discrètes, tels que les *Contact Dynamics* [Moreau, 1988] ou la DDA [Shi et Goodman, 1985], qu'un algorithme de résolution implicite est nécessaire pour obtenir des résultats aussi bien quantitatifs que qualitatifs lorsque le contact est introduit. En effet, il n'est alors plus nécessaire d'utiliser des artifices tels que l'amortissement numérique pour obtenir des valeurs convergées des efforts de contact ou de frottement [Jing, 1998].

Dans l'objectif de surmonter les problèmes d'oscillation et d'imprécision du schéma *Saw-Tooth* en présence de contact et de friction, une version complètement implicite de ce schéma de résolution est proposée. La résolution est menée itérativement de sorte que l'équilibre quasi-statique des efforts internes et des efforts externes $\underline{F}_{ext}$ au pas de temps t puisse s'écrire :

$$\underline{F}_{int}^{t+1}\left(\underline{u}^{t+1}\right) = \underline{F}_{ext}^{t+1} \tag{2.10}$$

En raison de son caractère itératif, une résolution implicite nécessite de faire attention à la robustesse de l'algorithme développé. Par conséquent, le schéma de résolution proposé est séparé en deux étapes, d'une part la résolution de l'équilibre des efforts (cohésion, contact et friction), et d'autre part l'évolution de la fissuration.

L'équilibre est calculé à partir d'un schéma prédicteur-correcteur implicite, alors que l'évolution de la fissuration est traitée à l'aide du schéma *Saw-Tooth* tel que proposé par Rots et Invernizzi [2004]. La gestion séparée du mécanisme de rupture permet de simplifier la prédiction lors de la résolution de l'équilibre, qui n'a alors plus à tenir compte des variations de rigidité induites par la propagation de la fissuration. Par ailleurs, une relaxation numérique est introduite pour corriger les problèmes de robustesse restants.

Bien que le développement du modèle discret dans un cadre quasi-statique induise des coûts de calculs réduits et évite la représentation arbitraire des phénomènes d'amortissement, l'abandon de ces phénomènes ainsi que des effets inertiels rend les mouvements de corps rigides problématiques. Les particules indépendantes de la structure principale, sur lesquelles aucune condition aux limites en déplacement n'est appliquée, nécessitent un traitement particulier afin de conserver une solution unique au problème d'équilibre.

À noter que pour les résultats présentés dans cette section, la normalisation des valeurs est effectuée par rapport aux valeurs maximales atteintes lors de chaque simulation. Par ailleurs, le temps fait référence en réalité au pseudo-temps, étant donné le caractère quasi-statique des simulations.

4.1 Résolution linéaire séquentielle de l'évolution de la fissuration

Pour les *lattices* particulaires, la fissuration consiste à progressivement retirer les poutres du *lattice*, lorsque celles-ci sont considérées comme rompues, et à actualiser la matrice de raideur globale du système, lorsque les conditions de chargement évoluent. À chaque nouvel incrément de chargement, la solution élastique du problème est calculée à partir de la matrice de raideur actualisée à la fin de l'incrément précédent. Cette manière de procéder est par définition explicite.

Le schéma de résolution *Saw-Tooth* est appliqué aux *lattices* particulaires par Delaplace [2008]. L'efficacité de ce schéma de résolution réside dans la manière spécifique dont sont retirées les poutres du *lattice*. Il se distingue des algorithmes explicites classiques, en recalculant l'équilibre des efforts après le retrait de chaque poutre. Le problème d'équilibre est donc résolu comme une succession de problèmes linéaires vis-à-vis de la dégradation de la raideur globale induite par la fissuration. Cette méthode est, elle aussi, explicite, mais s'avère extrêmement stable, le faciès de fissuration obtenu est complètement indépendant de la taille des incréments de chargement.

Dans le modèle discret, l'évolution de la fissuration n'est plus le seul mécanisme non-linéaire, elle est aussi combinée avec le contact et la friction, le chargement ne peut plus être entièrement contrôlé par la rupture des poutres. Dans la version originale de l'algorithme *Saw-Tooth*, le chargement total n'est pas décomposé en incréments. Le chargement entier est appliqué à chaque itération, et une décharge élastique est effectuée jusqu'au point de chargement où rompt le premier élément poutre du *lattice*. La matrice de raideur globale du *lattice* est actualisée, puis le chargement complet est à nouveau appliqué. Ce schéma est répété jusqu'à ce que l'ensemble des poutres devant rompre pour le chargement complet aient rompu. L'introduction du contact et de la friction, ne permet plus de réaliser une décharge élastique jusqu'au point où la première poutre rompt. Il est donc nécessaire de décomposer, de manière classique, le chargement complet en incréments. Néanmoins le critère pour choisir l'élément poutre devant être retiré à une itération donnée reste le même que dans l'algorithme original, il s'agit de l'élément poutre le plus éloigné de son critère de rupture, tel que défini dans la section 3.3. Voici la description d'une itération du schéma de résolution linéaire séquentiel, tel qu'utilisé dans le modèle discret :

1. Début de l'itération $m+1$ au pas de temps t
2. Résolution de l'équilibre des forces et actualisation des déplacements globaux : $\underline{u}^{t,m+1} = \underline{u}^{t,m} + \underline{\Delta u}^{t,m+1}$, en inversant la matrice de raideur globale $\underline{\underline{K}}^{t,m}$.

3. Calcul de l'inverse du critère de rupture pour chacun des couples de particules i et j lié par une poutre : $\gamma_{ij} = \dfrac{1}{P_{ij}}$
4. Si $\min_{i,j} \gamma_{ij} > 1$ passage à l'incrément de chargement $t+1$ et actualisation de $\underline{\underline{K}}^{t+1,0} = \underline{\underline{K}}^{t,m}$, sinon procéder à l'étape suivante.
5. La poutre dont la valeur γ de l'inverse du critère de rupture est la plus faible est considérée rompue, et la matrice de raideur globale $\underline{\underline{K}}_{coh}$ du *lattice* est actualisée : $\underline{\underline{K}}_{coh}^{t,m+1} = \underline{\underline{K}}_{coh}^{t,m} - {}^t\underline{\underline{T}}_{ij}\underline{\underline{K}}_{coh,ij}^{loc}\underline{\underline{T}}_{ij}$
   où la poutre reliant i et j est celle de plus faible valeur γ, $\underline{\underline{K}}_{coh,ij}^{loc}$ est sa matrice de raideur exprimée dans son repère local et $\underline{\underline{T}}_{ij}$ est la matrice de passage de ce repère local au repère global.
6. Procéder à l'itération suivante $m+2$ au même pas de temps t et retourner à l'étape 1.

Il faut noter que l'implémentation d'un tel algorithme est grandement favorisée par le comportement élastique, parfaitement fragile des poutres du *lattice*. Le schéma de résolution *Saw-Tooth* devient coûteux en temps de calculs en présence de modèles constitutifs plus complexes [Cusatis et al., 2011a], car le nombre d'évènements non-linéaires croît rapidement. Toutefois, des tentatives d'application ont été menées pour des comportements plastiques [Rots et al., 2008].

4.2 Résolution implicite de l'équilibre

Comme expliqué précédemment, l'équilibre des interactions est calculé en considérant simultanément la cohésion, le contact et la friction. Le problème d'équilibre est résolu de manière itérative à l'aide d'un schéma prédicteur-correcteur. Ce type de schéma consiste à effectuer une prédiction des efforts internes, puis à venir les corriger pour que les équations constitutives du modèle soient vérifiées. Le caractère implicite de ce schéma implique que les étapes de prédiction et de correction sont répétées jusqu'à ce que la modification des efforts internes apportée par l'étape de correction soit négligeable devant la valeur de ces efforts.

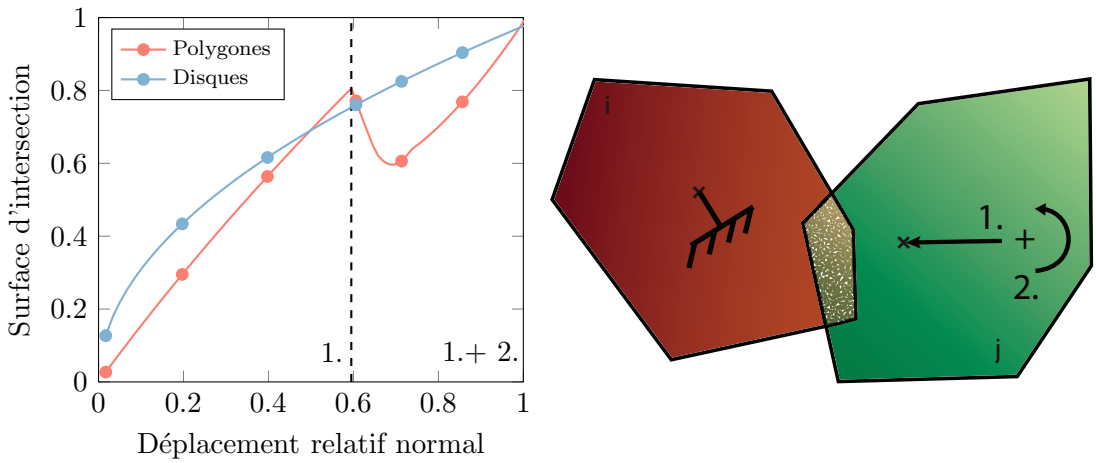
L'attention est portée sur le choix d'un prédicteur adapté aux non-linéarités considérées. Grâce à l'utilisation du schéma *Saw-Tooth*, la fissuration n'évolue pas lors de la résolution du problème d'équilibre, l'interaction de cohésion est donc linéaire élastique. L'interaction de friction est modélisée à l'aide d'un modèle de Coulomb, il s'agit donc d'un comportement linéaire élastique, puis parfaitement plastique. Par conséquent seule l'interaction de contact s'avère compliquée à gérer.

4.2.1 Non-linéarités induites par le contact

Les non-linéarités induites par l'interaction de contact ont deux origines. La première est due à la description géométrique du milieu, autrement dit la forme polygonale des particules, et donc de leur intersection. La seconde origine est mécanique, en raison de l'aspect unilatéral du contact.

L'effort de contact normal est défini comme une fonction de la surface d'intersection des deux particules concernées. Or les degrés de liberté du système à résoudre sont les déplacements et rotations des centres de particules. La forme polygonale des particules rend impossible l'expression analytique de la surface d'intersection de deux particules en fonction de leur degrés de liberté (déplacements et rotations). De plus, étant donné que les particules sont de forme irrégulière, la relation entre l'intersection et le déplacement normal relatif n'est ni lisse, ni monotone, comme ce peut être le cas pour des particules circulaires.

En guise d'illustration, une comparaison entre l'évolution de la surface d'intersection avec le déplacement relatif normal des centres de deux particules polygonales et circulaires est effectuée en figure 2.7. Le mouvement appliqué aux deux particules est d'abord un simple rapprochement, puis (après le trait vertical pointillé) une rotation est ajoutée. L'ajout de la rotation induit temporairement une diminution de la surface d'intersection du couple de particules polygonales, alors que naturellement aucune influence n'est observée pour des particules circulaires.



(a) évolution normalisée de la surface d'intersection

(b) mouvement des particules

FIGURE 2.7: Non-linéarité géométrique de contact induite par la forme des particules.

La non-linéarité mécanique causée par l'aspect unilatéral du contact induit, quant à elle, un problème de continuité du comportement local lors de l'initiation du contact. Selon le modèle constitutif de contact utilisé dans le modèle discret, fondé sur la théorie des

poutres, la raideur de contact s'écrit $k_{c,ij} = {}^{\bar{E}L_{c,ij}}/_{l_{c,ij}}$, où $L_{c,ij}$ est la largeur de la surface d'intersection des deux particules en contact. Dans le cas d'un contact ponctuel, contact sommet-sommet ou côté-sommet (fig. 2.8a), la première dérivée de l'effort de contact par rapport à la pénétration $({}^{S_{r,ij}}/_{L_{c,ij}})$, autrement dit la raideur de contact, est continue, mais la seconde dérivée ne l'est pas. Dans le cas d'un contact linéique (fig. 2.8b), contact côté-côté, il n'y a même plus continuité de la première dérivée puisque L_c passe immédiatement d'une valeur nulle à une valeur finie. Les problèmes liés à ce défaut de continuité seront davantage mis en avant lors de simulations à venir (section 4.2.4).

Des évolutions non-monotones et des discontinuités de la relation de comportement de contact peuvent mener à des singularités ou des instabilités numériques. En effet, il n'est plus garanti que la matrice de raideur globale du système soit définie positive. De plus lorsque le contact est initié ou perdu, des oscillations ou des problèmes de convergence de l'algorithme de résolution itératif peuvent se produire, car la position d'équilibre du système ne peut pas être trouvée.

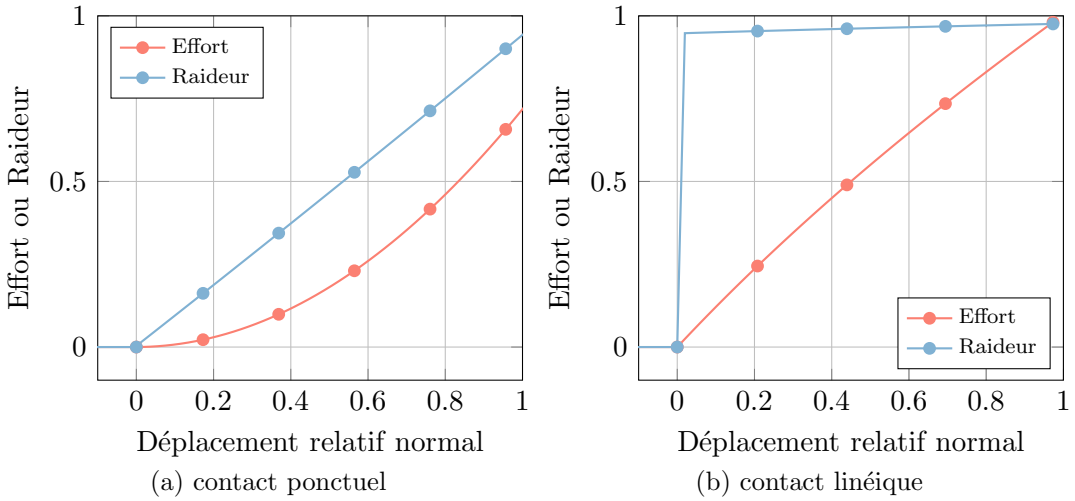


FIGURE 2.8: Non-linéarité mécanique de contact induite par l'aspect unilatéral : évolutions normalisées de l'effort de contact normal et de la raideur.

4.2.2 Description du prédicteur : Modèle de contact linéarisé

Habituellement dans les modèles issus de la DEM, et donc formulés dans un cadre dynamique explicite, l'évolution de degrés de liberté, que sont les déplacements et rotation des centres de particules, sont prédits sans avoir besoin d'inverser la matrice de raideur globale. Ils est prédite à partir des accélérations au pas de temps précédent. Dans le cadre quasi-statique, une telle information n'est pas disponible. Par conséquent, le choix est fait de déterminer l'incrément des déplacements et rotation à l'aide d'une matrice de raideur sécante du système. La définition des interactions non-linéaires est simplifiée, de manière à pouvoir les écrire comme des fonctions linéaires des degrés de liberté du système :

$$\underline{\tilde{F}}_{int} \simeq \underline{\underline{\tilde{K}}}.\underline{u} \tag{2.11}$$

De manière simplifiée, puisque les interactions de cohésion prédominent, un premier prédicteur est testé, négligeant les interactions de contact et de friction. Il est espéré que la correction des efforts internes, pour vérifier les équations constitutives de contact et de friction, soient faibles devant les efforts de cohésion, ainsi l'algorithme pourrait converger rapidement.

La matrice de raideur sécante, n'est autre que la matrice de raideur du *lattice*, autrement dit la matrice utilisée dans l'algorithme *Saw-Tooth* original :

$$\underline{\underline{\tilde{K}}} = \underset{i=1,\ldots,n_{particles}}{\boldsymbol{A}} \left(\sum_{j=1,\ldots,n_{beam}(i)} \left({}^t\underline{\underline{T}}^{ij} \, \underline{\underline{K}}^{loc,ij}_{coh} \, \underline{\underline{T}}^{ij} \right) \right) \tag{2.12}$$

où $\underline{\underline{\tilde{K}}}$ est la matrice sécante utilisée pour la prédiction, l'indice j réfère aux particules liées par une poutre aux particules i. $\underline{\underline{T}}^{ij}$ est la matrice de passage du repère local de la poutre $(\underline{n}_{b,ij},\underline{t}_{b,ij},\underline{z})$ au repère global du système $(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$:

$$\underline{\underline{T}}^{ij} = \begin{bmatrix} cos(\beta) & sin(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sin(\beta) & cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos(\beta) & sin(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin(\beta) & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

avec β l'angle $(\underline{n}_{b,ij},\underline{x})$.

La matrice locale de raideur 6x6 de cohésion $\underline{\underline{K}}^{loc,ij}_{coh}$ est écrite directement à partir de la définition des interactions de cohésion (section 3.2.1) :

$$\underline{\underline{K}}^{loc,ij}_{coh} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{E}A_{b,ij}}{l_{b,ij}} & 0 & 0 & -\frac{\bar{E}A_{b,ij}}{l_{b,ij}} & 0 & 0 \\ & \frac{12\bar{E}I_{b,ij}}{l^3_{b,ij}} & -\frac{6\bar{E}I_{b,ij}}{l^2_{b,ij}} & 0 & -\frac{12\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}} & \frac{6\bar{E}I_{b,ij}}{l^2_{b,ij}} \\ & & \frac{4\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}} & 0 & \frac{6\bar{E}I_{b,ij}}{l^2_{b,ij}} & -\frac{2\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}} \\ & & & \frac{\bar{E}A_{b,ij}}{l_{b,ij}} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{12\bar{E}I_{b,ij}}{l^3_{b,ij}} & 0 \\ & & & & & \frac{4\bar{E}I_{b,ij}}{l_{b,ij}} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

La simulation d'une configuration simple (fig. 2.9) présente déjà des oscillations. Le contact entre les deux particules concernées est successivement détecté puis perdu après chaque itération de prédiction-correction, car l'effort de contact est sous-estimé (nul) pendant la prédiction et sur-estimé lors de la correction. La convergence des efforts internes ne peut pas être obtenue, une prédiction des efforts de contact et de friction semble donc nécessaire.

Sur la base de la méthode nommée *open-close iteration* introduite par Shi et Goodman [1989], une contribution linéarisée du contact et de la friction est considérée lors de la prédiction. Lorsqu'un contact est détecté entre les particules i et l, à une itération donnée, à l'itération suivante, la contribution de ce contact est ajoutée par le biais d'une matrice de raideur sécante de contact $\underline{\underline{\tilde{K}}}^{loc,il}_{cont}$ à la matrice de raideur globale utilisée pour la prédiction. La matrice $\underline{\underline{\tilde{K}}}^{loc,il}_{cont}$ est calculée à partir des propriétés du contact à l'itération donnée. Ceci implique que la matrice de raideur globale du système utilisée pour la prédiction est actualisée après chaque itération.

$$\underline{\underline{\tilde{K}}} = \underset{i=1,\ldots,n_{particles}}{\boldsymbol{A}} \left(\sum_{j=1,\ldots,n_{beam}(i)} \left({}^t\underline{\underline{T}}^{ij} \underline{\underline{K}}^{loc,ij}_{coh} \underline{\underline{T}}^{ij} \right) + \sum_{l=1,\ldots,n_{contact}(i)} \left({}^t\underline{\underline{T}}^{il} \underline{\underline{\tilde{K}}}^{loc,il}_{cont} \underline{\underline{T}}^{il} \right) \right) \quad (2.15)$$

où l'indice l réfère aux particules dont l'intersection avec la particule i est non-nulle à l'itération donnée.

De manière similaire avec ce qui est fait avec la FEM, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou ses dérivées [Simo et Laursen, 1992] auraient pu être utilisée pour tenir compte du contact entre deux particules. Cependant, avec la DEM un recouvrement des particules (indéformables) doit être autorisé pour reproduire la déformation macroscopique du milieu, ainsi une prédiction linéaire fondée sur les méthodes de pénalisation a été retenue.

Étant donné que le modèle constitutif de contact est déjà très similaire à celui d'une poutre, la prédiction de l'effort de contact entre deux particules est considérée égale à l'effort engendré par l'introduction d'une poutre d'épaisseur égale à la largeur de la surface d'intersection L_c et de longueur l_c. Au final, cela revient à faire les hypothèses suivantes :

- Pour l'effort de contact normal : l'incrément de pénétration est supposé égal à l'incrément de déplacement normal relatif des deux particules en contact :

$$\Delta \tilde{F}_{cont,ij} = \frac{\bar{E} L_{c,ij}}{l_{c,ij}} \left(\Delta \underline{u}_i - \Delta \underline{u}_j \right) . \underline{n}_{ij} \quad (2.16)$$

- Pour l'effort de friction tangent : la prédiction élastique est simplement égale à l'expression exacte puisque l'incrément des déplacements cumulés depuis l'initiation du contact est égal à l'incrément des déplacements totaux :

$$\Delta \underline{u}_{c,ij} = \Delta \underline{u}_i \qquad \Rightarrow \qquad \Delta \tilde{F}_{fric,ij} = \frac{\bar{E} I_{c,ij}}{\left(l_{c,ij}\right)^3} \left(\Delta \underline{u}_i - \Delta \underline{u}_j\right) . \underline{t}_{ij} \tag{2.17}$$

- Pour le moment induit par les efforts de contact et de friction : en réalité aucun parallèle ne peut être fait avec la théorie des poutres puisque le moment est provoqué par le bras de levier entre le point d'application des efforts de contact et de friction – le centre d'inertie de l'intersection des deux particules en contact – et les centres des particules. Néanmoins l'introduction d'une raideur en flexion de poutre est tout de même introduite, car elle permet une amélioration de la prédiction vis-à-vis du moment réel induit :

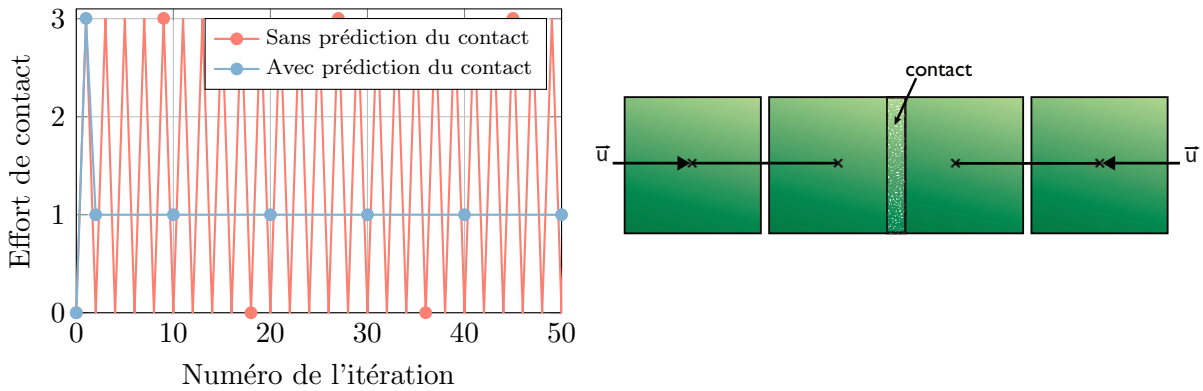
$$\Delta \tilde{M}^f_{c,ij} = \frac{4 \bar{E} I_{c,ij}}{l_{c,ij}} \left(\Delta \theta_i - \frac{\Delta \theta_j}{2}\right) \tag{2.18}$$

Pour résumer, voici la matrice locale de raideur 6x6 utilisée pour la prédiction des interactions de contact et de friction :

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}^{loc,ij}_{cont} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{E} L_{c,ij}}{l_{c,ij}} & 0 & 0 & -\frac{\bar{E} L_{c,ij}}{l_{c,ij}} & 0 & 0 \\ & \frac{12 \bar{E} I_{c,ij}}{l^3_{c,ij}} & 0 & 0 & -\frac{12 \bar{E} I_{c,ij}}{l_{c,ij}} & 0 \\ & & \frac{4 \bar{E} I_{c,ij}}{l_{c,ij}} & 0 & 0 & -\frac{2 \bar{E} I_{c,ij}}{l_{c,ij}} \\ & & & \frac{\bar{E} L_{c,ij}}{l_{c,ij}} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{12 \bar{E} I_{c,ij}}{l^3_{c,ij}} & 0 \\ & & & & & \frac{4 \bar{E} I_{c,ij}}{l_{c,ij}} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Avec une telle étape de prédiction, le schéma prédicteur-correcteur implémenté ici est proche d'une méthode de résolution de Newton. La matrice de raideur globale utilisée pour la prédiction peut être qualifiée de sécante puisque elle suit à chaque itération l'évolution des propriétés du contact et relie les efforts internes aux degrés de liberté totaux. L'utilisation d'une matrice de raideur tangente a été évitée à cause des fortes non-linéarités. En effet, l'évolution de la surface d'intersection en fonction des déplacements nodaux n'est pas monotone, le caractère défini positif de la matrice de raideur tangente n'est pas assuré.

La configuration simple utilisée précédemment (fig. 2.9), pour montrer la nécessité d'une prédiction tenant compte du contact, est simulée à nouveau avec la nouvelle prédiction mise en place. La convergence de la valeur de l'effort de contact, et donc des efforts internes, est obtenue rapidement, en deux itérations.



(a) convergence de l'effort de contact normalisé (b) configuration de la simulation

FIGURE 2.9: Influence du prédicteur sur la convergence de l'algorithme.

4.2.3 Relaxation numérique

En raison de la non-linéarité de contact qualifiée de mécanique, l'algorithme de résolution proposé est sujet à des problèmes de convergence lorsque le contact est initié ou perdu. L'introduction d'amortissement visqueux est une solution pratique pour réduire l'effet de ce type de problème. L'énergie dissipée par l'intermédiaire de l'amortissement permet de limiter les oscillations. Cependant les effets dynamiques n'étant pas considérés, le choix d'introduire une relaxation numérique est effectué.

La relaxation numérique consiste à ne tenir compte que d'une certaine proportion h de l'incrément de déplacement prédit lorsque les variations du résidu relatif (par rapport à la norme des efforts extérieurs) de résolution r sont trop importantes (ici, lorsque celles-ci excèdent 10^{-4}) :

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{u}^{k} + h^{k+1}\Delta\underline{u}^{k+1} \qquad h^{k+1} = \begin{cases} h^{k} & \text{si} \quad |\Delta\underline{r}^{k+1}| \leq 10^{-4} \\ \dfrac{h^{k}}{2} & \text{si} \quad |\Delta\underline{r}^{k+1}| > 10^{-4} \end{cases} \tag{2.20}$$

où $\underline{\Delta u}^{k+1}$ est l'incrément des degrés de liberté (déplacements et rotation) prédit, $\underline{\Delta r}^{k+1}$ est la variation d'incrément et h^{k+1} est le facteur de relaxation à l'itération courante $k+1$.

4.2.4 Validation locale de la résolution implicite de l'équilibre

Dans l'objectif de mettre en évidence l'efficacité du prédicteur choisi, ainsi que la nécessité d'introduire une relaxation numérique, l'étude isolée du mouvement de deux particules en contact est réalisée. Les deux particules sont considérées dans un ensemble carré de

5x5 particules pré-fissuré afin de complexifier leur mouvement par rapport à la première simulation réalisée (fig. 2.9). L'ensemble est pré-fissuré en de multiples endroits, et notamment au niveau de l'interface entre les deux particules étudiées, de manière à permettre plusieurs contacts sans avoir à activer le mécanisme de rupture lors de la simulation, et ainsi éviter d'introduire un biais supplémentaire. La figure 2.10 montre le mouvement des deux particules en contact étudiées (particules aux bords oranges au centre des images). Le contact est mis en valeur par la nuance rouge.

L'ensemble est soumis à un chargement de compression horizontal (images 1 à 3), afin d'établir le contact entre les deux particules puis à un chargement de traction dans la même direction (images 4 à 9), de manière à rompre le contact.

Lors de la simulation de l'essai les parties géométriques et mécaniques de la non-linéarité de contact sont observées. La première se manifeste, car des rotations des deux particules sont induites par des effets structuraux. Et la seconde se manifeste car le contact est presque rompu puis maintenu sur une fine bande : du pas de temps 1200 (image 6) au pas de temps 1700 (image 8). Dans cette période, comme le montre l'illustration du mouvement des particules, la localisation du contact se déplace du bas vers le haut des deux particules, avant d'être complètement rompu.

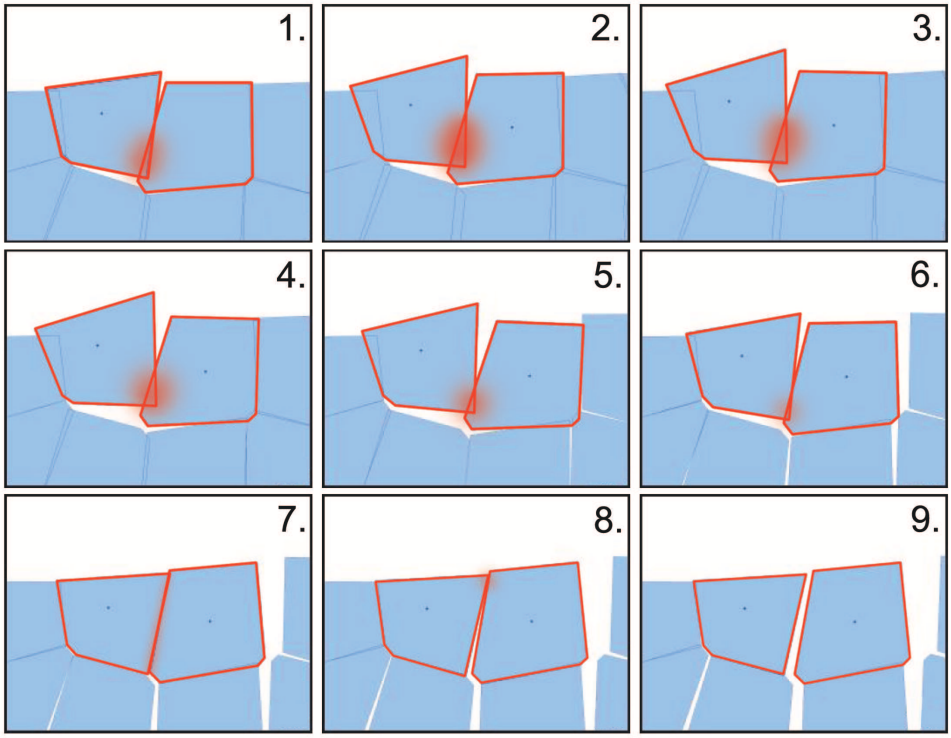
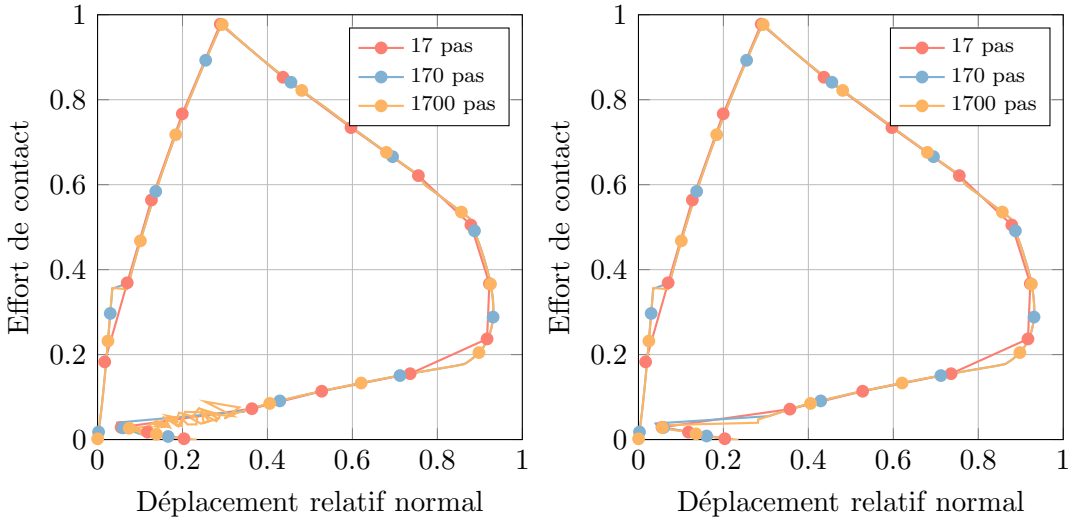


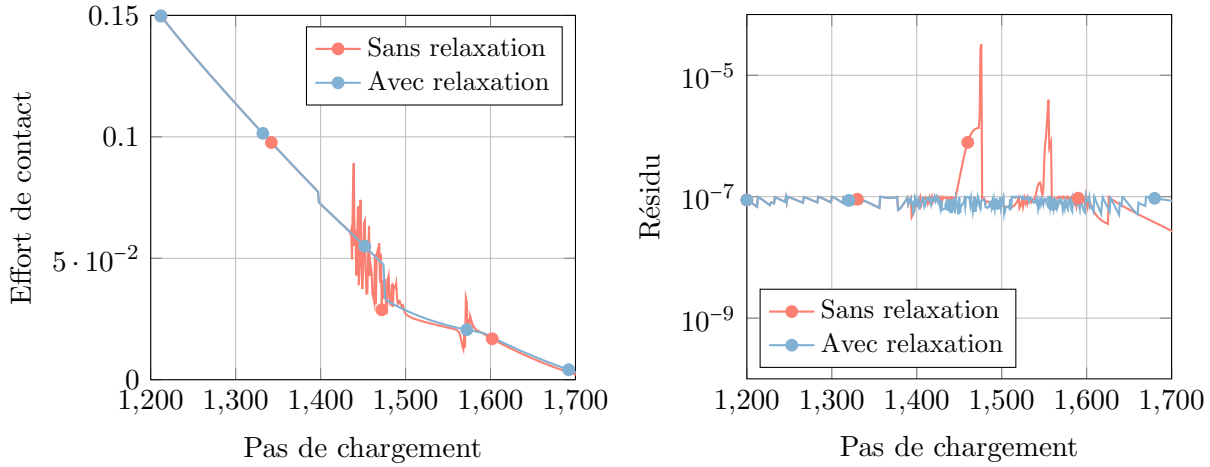
FIGURE 2.10: Mouvement des deux particules en contact étudiées.



(a) sans relaxation numérique (b) avec relaxation numérique

FIGURE 2.11: Influence de la relaxation numérique et de la taille de l'incrément de chargement sur l'évolution normalisée de l'effort de contact.

La simulation montre la stabilité vis-à-vis de l'incrément de chargement de l'algorithme de résolution implicite de l'équilibre sans relaxation numérique (fig. 2.11). Quelle que soit la discrétisation du chargement choisie la réponse suit une évolution identique. Cependant à la fin de la simulation des problèmes de convergence du schéma prédicteur-correcteur sont observés pour une discrétisation fine (1700 pas) du chargement, à cause de la discontinuité de la relation de comportement lorsque le contact est rompu.



(a) évolution normalisée de l'effort de contact (b) évolution de résidu

FIGURE 2.12: Influence de la relaxation numérique lorsque le contact est rompu pour une discrétisation pseudo-temporelle fine.

La figure 2.12 montre plus en détails ce qui se produit lors des 500 derniers pas de chargement, aux environs du moment de la perte du contact, de la simulation finement discrétisée (1700 pas de chargement) en termes d'effort de contact et de résidu.

Comme observé lors de l'étude de la stabilité, la résolution implicite sans relaxation numérique est sujette à des oscillations. L'étude du résidu (fig. 2.12b) met en avant que, sans relaxation numérique, sur certains intervalles la convergence du schéma de résolution implicite n'est pas obtenue – la convergence étant considérée comme atteinte lorsque le résidu est inférieur à 10^{-7}. Les oscillations peuvent s'expliquer par de multiples positions d'équilibre voisines et l'incapacité du schéma de résolution à converger vers l'une d'entre elles.

L'addition de la relaxation numérique au schéma de résolution implicite aide grandement à surmonter cette difficulté, et donc améliore la robustesse du schéma de résolution de manière générale.

4.3 Particules indépendantes

Une particule ou un groupe de particule est considéré comme indépendant, lorsque l'ensemble des poutres du *lattice*, le reliant avec le reste de la structure, sont rompues. Si une particule ou un groupe de particule indépendant n'est plus soumis directement, ou indirectement par l'intermédiaire du *lattice*, à des conditions aux limites suffisantes, un mouvement de corps rigide est autorisé.

Dans le cas classique de la DEM, les groupes de particules indépendants ne sont pas un problème particulier. Le problème d'équilibre est résolu dans le cadre dynamique, au sein duquel les effets inertiels et visqueux sont considérés, ainsi une solution unique au problème existe, même en présence de mouvements de corps rigide. En revanche dans le cadre quasi-statique, les mouvements de corps rigide doivent être empêchés pour préserver l'unicité de la solution.

4.3.1 Détection

La détection de groupes de particules indépendants n'est pas triviale. Lorsqu'un groupe d'au moins deux particules se détache de la structure principale, un critère simple, pour identifier un groupe indépendant, tel que *si une particule ne possède plus aucune poutre de cohésion, et donc est déconnectée du lattice, alors elle est considérée indépendante*, qui fonctionnerait pour un groupe constitué d'une seule particule, n'est plus adapté.

Afin de résoudre ce problème d'identification, il est possible de s'inspirer de la théorie des graphes, dont le contexte d'application est similaire aux *lattices*, autrement dit un ensemble de nœuds et de connexions. Les algorithmes développés dans le cadre de la

théorie des graphes pour détecter des composantes interconnectées s'avèrent très utiles pour résoudre le problème d'identification de groupes de particules indépendants.

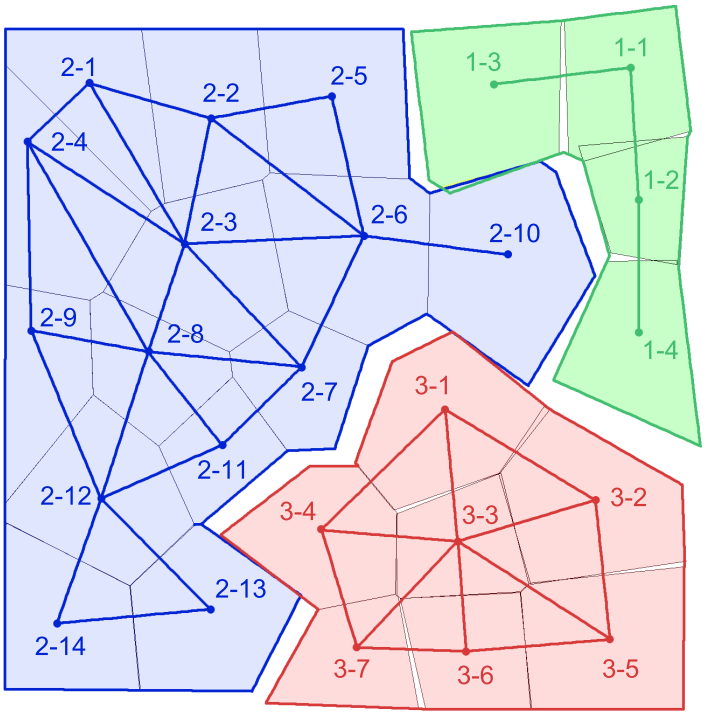


FIGURE 2.13: Illustration de la procédure de parcours en largeur des particules.

Une composante interconnectée est un ensemble de nœuds dans un graphe, entre lesquels un chemin direct ou indirect existe, par le biais d'une ou plusieurs connexions. Dans le cas de *lattices* particulaires, les nœuds sont les particules et le chemin une succession de poutres. Ainsi un groupe de particules indépendant peut être défini comme une composante interconnectée du graphe qui représente les particules et les poutres de la structure modélisée.

Parmi les algorithmes disponibles pour explorer un ensemble de nœuds et leurs connexions, un algorithme simple et efficace a été retenu : l'algorithme de parcours en largeur [Moore, 1959] (*Breadth-First Search*). La méthode de parcours utilisée par cet algorithme consiste à partir d'un nœud, et à explorer l'ensemble des nœuds qui y sont directement liés. Successivement, pour chaque nœud nouvellement exploré, l'ensemble des nœuds inexplorés qui y sont liés sont explorés. Ce schéma est répété jusqu'à ce que plus aucun nouveau nœud ne soit exploré ; une composante interconnectée, et donc un groupe de particules indépendant est alors défini. Cette procédure est répétée à partir d'une nouvelle particule du maillage, ou nœud du graphe, inexplorée, jusqu'à ce que l'ensemble des groupes de particules indépendants soient définis, et donc que l'ensemble des particules du maillage aient été explorées. La figure 2.13 illustre la procédure de parcours en largeur, et propose une possibilité d'ordre d'exploration des particules. Les coordonnées X-Y représentent

l'ordre dans lequel sont parcourus les groupes (X) et les particules (Y) à l'intérieur du groupe (X).

Dans le cas le plus défavorable, l'algorithme de parcours en largeur explorera chaque particule autant de fois qu'elle possède de poutres. En conséquence, la complexité de l'algorithme dépend de la densité de poutres dans le *lattice*. Dans la situation la plus dense, autrement dit si chaque particule est liée à l'ensemble des particules de la structure, la complexité est $O(n^2)$, avec n le nombre de particules de la structure.

Maintenant que la procédure pour identifier les groupes de particules indépendants est établie, il reste à déterminer la possibilité de mouvement de corps rigide. Si un groupe de particules indépendant ne vérifie pas les conditions suivantes, un traitement spécifique, décrit à la section 4.3.2, doit lui être appliqué :

1. une condition aux limites appliquée sur au moins 3 degrés de liberté différents ;
2. une condition aux limites appliquée sur au moins un déplacement dans chaque direction (u_x et u_y).

4.3.2 Traitement numérique

Contrairement à la procédure de détection des groupes de particules indépendants, le traitement numérique d'un groupe de particules susceptible de subir un mouvement de corps rigide est plutôt simple. Les groupes de particules indépendants concernés sont considérés comme n'interagissant plus avec le reste de la structure et sont donc retirés. Ce traitement numérique exprime le fait que dans la plupart des situations, le phénomène d'écaillage induit une perte de matière lorsque des morceaux de matériau quasi-fragile se détachent et s'éloignent de la structure. Cependant, il peut aussi s'avérer limité, lorsque des morceaux de matière se détachent à l'intérieur d'une fissure horizontale, dans ce cas il se peut que ces morceaux influencent encore le comportement mécanique.

Un traitement numérique alternatif pourrait consister à bloquer le mouvement d'un groupe de particules susceptible de subir un mouvement de corps rigide jusqu'à ce que il entre en contact avec le reste de la structure encore considérée. Mais dans certains cas, comme par exemple si l'interaction de contact n'est appliquée qu'en un seul point sur le groupe de particules concerné, l'effort de contact n'est pas équilibré, il en résulte alors un mouvement infini et incontrôlé. Par conséquent le choix de retirer les groupes de particules susceptibles de subir un mouvement de corps rigide a été conservé.

4.4 Algorithme de résolution global

Les algorithmes de résolution des problèmes d'équilibre, de rupture et de gestion des particules indépendantes ont été introduits séparément. Ils sont assemblés au sein de l'algorithme de résolution global de la manière suivante :

→ Boucle sur les pas de temps t.

↳ Boucle sur les itérations m de l'algorithme de résolution du problème de rupture et exploration des groupes de particules indépendants.

↳ Boucle sur les itérations k de l'algorithme de résolution du problème d'équilibre des interactions mécaniques.

Un schéma de l'algorithme de résolution global est présenté en figure 2.14. À noter que la convergence du schéma prédicteur-correcteur est considérée comme atteinte pour un résidu relatif par rapport à la norme des efforts extérieurs, inférieur à 10^{-7}. Cette valeur a conduit à des résultats satisfaisants en termes de précision et de coûts de calculs.

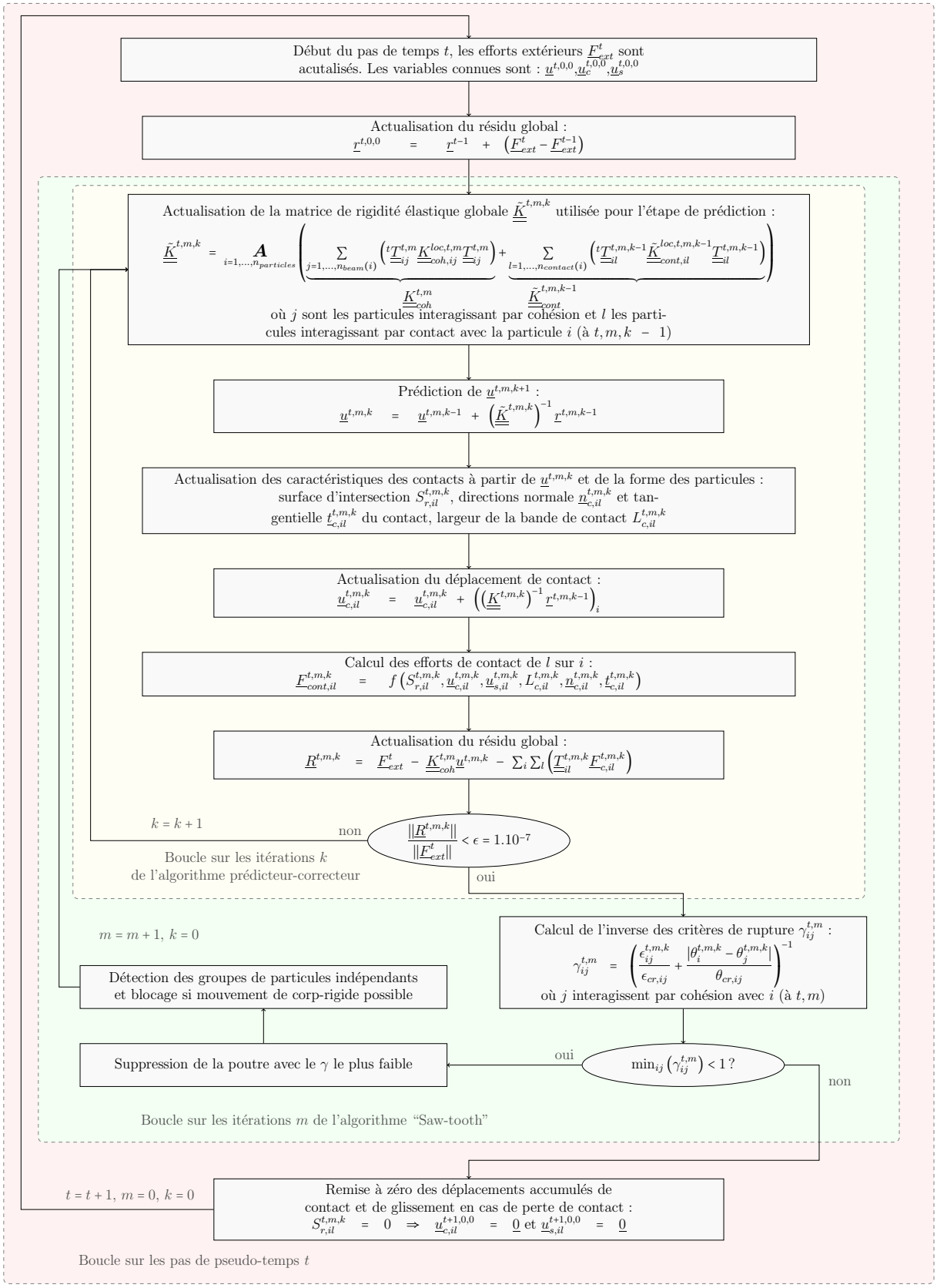


FIGURE 2.14: Schéma de l'algorithme de résolution global.

5 Comportement à la rupture et fragilité

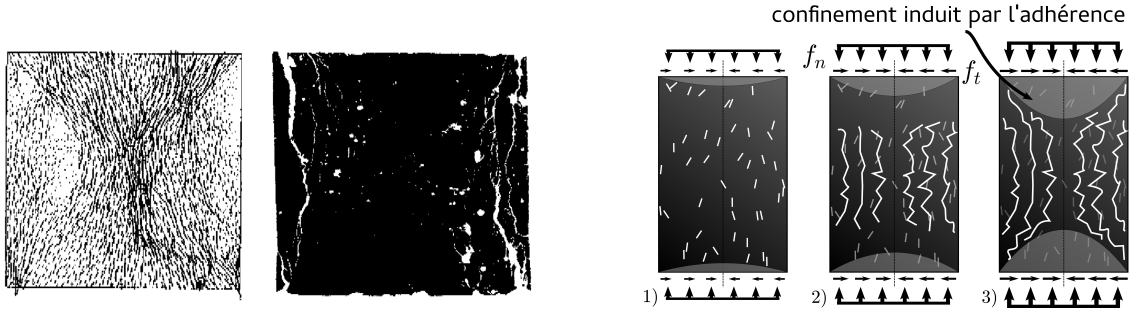
L'utilisation de la combinaison d'un modèle discret et d'un *lattice* muni d'un comportement à la rupture simple, parfaitement fragile, permet de modéliser aisément des faciès de fissuration. Néanmoins, ce type de modèle est toujours limité en termes de dissipation énergétique. En effet, un comportement fragile est aussi observé pour la réponse globale du modèle [D'Addetta et al., 2002]. De plus, la dissipation énergétique est aussi dépendante de la finesse du maillage [Schlangen et Van Mier, 1992].

En traction, la dissipation énergétique en régime post-pic est expliquée par l'apparition de ponts de fissures (*crack face bridging*) due à la présence d'hétérogénéités dans le matériau. Dans le cas du béton, les défauts (pores ou interfaces) forment un chemin préférentiel pour la propagation de la fissuration. Ce chemin n'étant évidemment pas le plus court, comme cela pourrait être le cas dans un milieu homogène, il en résulte une dissipation énergétique plus importante. Pour cette raison, il a été suggéré qu'une description mésoscopique du matériau (description explicite des différentes phases) soit nécessaire pour obtenir une dissipation plus réaliste [Cusatis et al., 2003, 2006]. Cependant, une telle description implique d'introduire des paramètres propres à chacune des phases. La calibration du modèle discret en serait significativement alourdie. Dans le cadre du modèle discret ici développé, il a été choisi d'introduire les hétérogénéités simplement, au moyen de distributions statistiques des paramètres matériaux [Rossi et Richer, 1987]. Seuls les seuils de rupture en extension ϵ_{ij}^{cr}et en rotation θ_{ij}^{cr} sont affectés par ces distributions statistiques, comme proposé par Van Mier et al. [2002]. Une distribution statistique des paramètres élastiques s'avère sans influence significative sur la réponse du modèle. En réalité, les potentielles conséquences d'un aléa des propriétés élastiques sont déjà retranscrites par l'orientation et les dimensions aléatoires des poutres de cohésion, obtenues lors de la génération du maillage (section 3.1).

Afin de reproduire correctement le comportement en traction et d'assurer une certaine indépendance à la finesse du maillage, plusieurs auteurs ont proposé de remplacer le comportement parfaitement fragile des poutres de cohésion par un comportement adoucissant [Davie et Bićanic, 2003; Grassl et Jirásek, 2010]. Il est montré dans cette section qu'il n'est pas nécessaire d'introduire de telles lois. En effet, la seule introduction de la variabilité des seuils de rupture est suffisante. Par ailleurs, la taille des particules, et donc la densité du maillage, est considérée comme un paramètre matériau, par conséquent les problématiques d'indépendance au maillage sont en-dehors du cadre du modèle discret.

En compression, le comportement en régime post-pic n'est pas aussi influencé par les propriétés matérielles et la présence d'hétérogénéités, qu'en traction. La ductilité relative du comportement en compression est plutôt expliquée par des effets structuraux. Les différents mécanismes ayant lieu lors de la dégradation d'un matériau quasi-fragile en compression, selon Rossi et al. [1996] ou Van Mier [2009], sont schématisés en figure 2.15. D'abord, la fissuration est diffuse et n'est visible qu'à basse échelle (microscopique). Ensuite, l'effet Poisson induit des extensions dans la direction perpendiculaire à celle

du chargement appliqué. Des colonnes de matériau sont alors créées, mais à ce point, encore aucune perte de rigidité significative ne peut être observée. Enfin, le chargement au pic est atteint, les fissures commencent à se localiser. Les colonnes préalablement formées s'effondrent sous un chargement en flexion excessif entraînant la rupture complète de l'éprouvette de matériau. La prédominance des effets structuraux pousse à étudier la formulation du critère de rupture P des poutres de cohésion, défini dans la section 3.3.



(a) contraintes principales (à gauche) et faciès de fissuration (à droite) [Vonk, 1992]

(b) schémas des étapes de dégradation

FIGURE 2.15: Dégradation en compression avec supports adhérents.

5.1 Aspects statistiques

Pour une représentation correcte du comportement post-pic en traction, une distribution statistique des seuils de rupture est introduite [Delaplace, 2008]. Des distributions de Gauss ou de Weibull ont été proposées et explorées. Morice [2014] a montré que le champ de déplacement en pointe de fissure est sensiblement le même tant que les distributions utilisées sont identiques en termes de moyenne et d'écart-type. Néanmoins, d'après les conclusions émises par Van Mier et al. [2002] concernant les faciès de fissuration, une distribution de Weibull a été utilisée. La densité de probabilité d'une distribution de Weibull s'écrit :

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \tag{2.21}$$

avec λ le facteur d'échelle et k le facteur de forme de la distribution de Weibull.

Faute de contre-indication, la variabilité spatiale pour les deux seuils de rupture est considérée comme identique. En d'autres termes, l'hypothèse est faite que l'hétérogénéité du matériau influence de manière identique les deux seuils de rupture. Par conséquent le facteur de forme k est identique pour les distributions des deux seuils. Un tirage unique pour les deux seuils de rupture de chaque poutre est effectué, les facteurs d'échelle λ lui sont ensuite appliqués, afin de distinguer le seuil en extension du seuil en rotation. Par ailleurs, aucune valeur limite minimale ou maximale n'a été assignée au tirage des seuils

de rupture contrairement à la proposition de Van Mier et al. [2002] visant à éviter des valeurs de seuils trop éloignées de la valeur moyenne. Ce choix est fait de manière à limiter l'introduction de paramètres additionnels. En effet, l'identification de ces valeurs limites s'avèrerait difficile, et leur nécessité n'est pas évidente.

La figure 2.16 compare la réponse du modèle en traction uni-axiale pour des seuils de rupture établis de manière déterministe (identiques pour chaque poutre, $k \simeq \infty$) et suivant une distribution de Weibull (variation spatiale non corrélée). L'essai de traction directe effectué par Terrien [1980] est utilisé comme référence. Un adoucissement en traction satisfaisant n'est obtenu que si les seuils sont déterminés de manière probabiliste. Pour cette comparaison, les facteurs d'échelle utilisés sont $\lambda_{\epsilon_{cr}} = 2.39\ 10^{-4}$ et $\lambda_{\theta_{cr}} = 3.26\ 10^{-3}$.

Une prise en compte plus avancée de la variabilité spatiale des seuils de rupture impliquerait l'introduction d'une covariance spatiale des distributions statistiques. Ce procédé est déjà plus complexe et reviendrait à construire des morphologies numériques de méso-structures [Roubin, 2013].

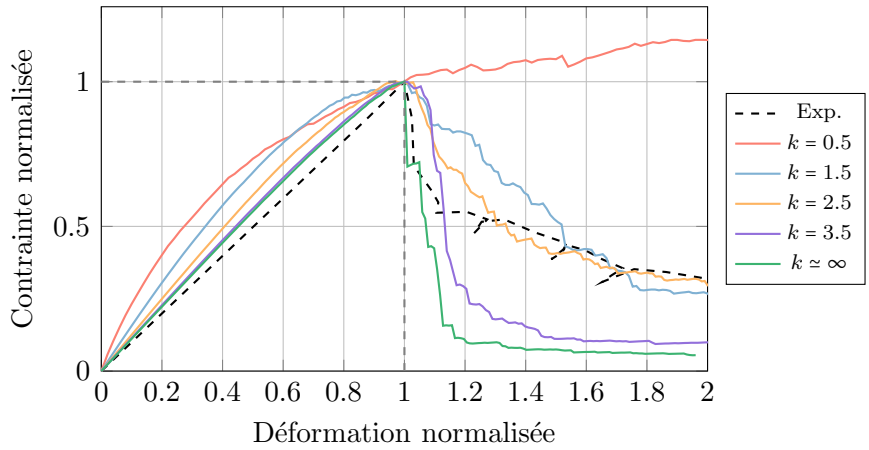


FIGURE 2.16: Influence de la variabilité des seuils de rupture sur la réponse en traction uni-axiale normalisée par rapport à la limite élastique.

5.2 Formulation du critère de rupture

Une variabilité spatiale des seuils de rupture ϵ_{ij}^{cr} et θ_{ij}^{cr} vient d'être introduite de manière à améliorer la dissipation énergétique du modèle en traction. Toutefois, les *lattices* particulaires sont aussi connus pour afficher un comportement excessivement fragile en compression [D'Addetta, 2004]. Afin de résoudre ce problème, la formulation du critère de rupture (2.8) a été étudiée.

De nombreuses formulations peuvent être trouvées dans la littérature [Davie et Bićanic, 2003]. Certaines d'entre elles s'avèrent efficaces pour décrire l'intégralité du comportement

jusqu'à la rupture. Les quelques formulations étudiées sont fondées notamment sur des critères de type Rankine ou Mohr-Coulomb.

Étant donné l'intérêt porté à la dissipation énergétique post-pic de résistance, dans les simulations qui suivent, des supports parfaitement adhérents sont considérés. Il s'agit de la configuration la plus dissipative. Les résultats sont comparés aux essais effectués par Vonk [1992] avec une interface non-traitée entre les supports et l'éprouvette.

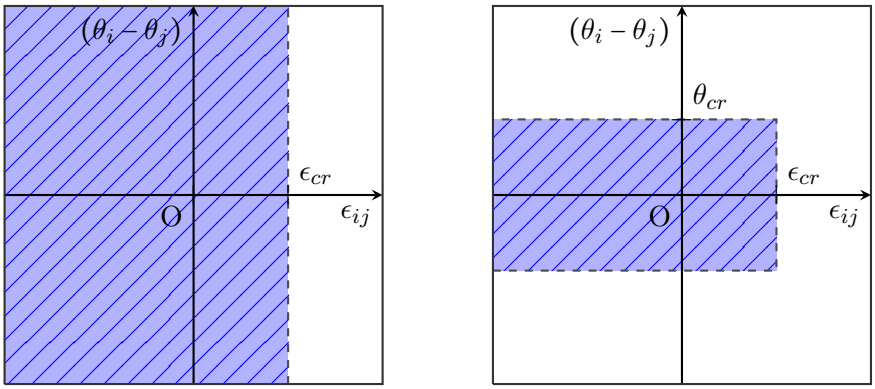
Le critère de rupture le plus simple, en accord avec la cause principale de l'apparition d'une fissure (une extension locale) est un critère de Rankine fonction de l'extension axiale de la poutre (fig. 2.17a) :

$$P_{ij}^{R,ext} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{ij}^{cr}} > 1 \tag{2.22}$$

Ce critère permet de reproduire correctement la rupture en traction ; cependant aucune perte de rigidité n'est observée en compression (fig. 2.19). Il n'est pas possible de dépasser le stade de micro-fissuration diffuse orientée selon la direction de chargement (fig. 2.20).

Un seuil unique en extension n'est donc pas suffisant, et un second seuil en rotation est alors introduit (fig. 2.17b) :

$$P_{ij}^{R,rot} = \frac{|\theta_i - \theta_j|}{\theta_{ij}^{cr}} > 1 \tag{2.23}$$



(a) Rankine en extensions

(b) Rankine en extensions et en rotations

FIGURE 2.17: Forme des critères de rupture de type Rankine.

L'introduction du seuil en rotation permet d'observer une perte de rigidité en compression, mais un comportement trop fragile en régime post-pic est observé (fig. 2.19). La rupture

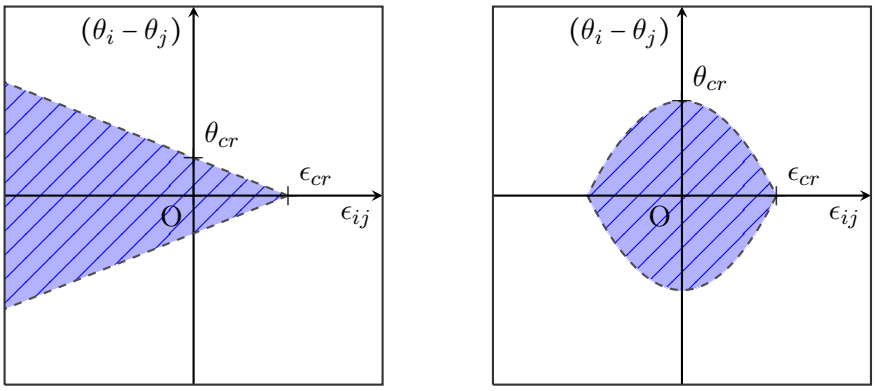
a effectivement lieu de manière simultanée sur toute la largeur de l'éprouvette. Qu'une poutre du *lattice* soit située au cœur de l'éprouvette ou à l'extérieur n'a aucune influence, celles-ci rompent pour un niveau de chargement identique. Le faciès de fissuration est donc horizontal (fig. 2.20).

Ainsi, il s'avère nécessaire d'introduire une dépendance du seuil en rotation au niveau de confinement de la poutre. Plus le niveau d'extension axiale de la poutre est faible, plus il est difficile d'atteindre le seuil en rotation. Un critère de rupture de type Mohr-Coulomb est aini formulé (fig. 2.18a) :

$$P_{ij}^{MC} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{ij}^{cr}} + \frac{|\theta_i - \theta_j|}{\theta_{ij}^{cr}} > 1 \tag{2.24}$$

Le résultat obtenu avec ce critère couplé est satisfaisant. La réponse en compression uniaxiale avec supports adhérents affiche la perte de rigidité et l'adoucissement post-pic souhaités (fig. 2.19). Il est aussi possible de distinguer sur le faciès de fissuration, les trois étapes observées expérimentalement de la dégradation en compression (fig. 2.15) : l'étape de micro-fissuration, l'étape de localisation de la fissuration en colonnes et la rupture finale de l'éprouvette affichant un faciès de fissuration bi-conique (fig. 2.20).

Il faut noter que le terme fonction de l'extension axiale n'est pas mis au carré comme le suggère Herrmann et al. [1989]. En effet, un tel choix annulerait l'influence du confinement lorsque la poutre est comprimée. En conséquence de la forme symétrique du critère local résultant (fig. 2.18b), il résulte une perte totale de la dissymétrie traction/compression du comportement global du modèle.



(a) Mohr-Coulomb avec extensions simples

(b) Mohr-Coulomb avec extensions au carré

FIGURE 2.18: Forme des critères de rupture de type Mohr-Coulomb.

En conclusion le critère de rupture retenu peut être vu comme un critère de type Mohr-Coulomb à deux paramètres (fig. 2.18a), dont le premier, ϵ_{ij}^{cr}, contrôle la position de la pointe du cône formé par la surface seuil et le second, θ_{ij}^{cr}, l'ouverture de ce cône. Une

formulation ainsi enrichie, ne dépendant plus uniquement des extensions locales, s'avère nécessaire du fait de l'échelle toujours trop grossière du modèle discret développé. Un critère de type Mohr-Coulomb est une homogénéisation des mécanismes ayant lieu à plus basse échelle, comme la compaction de pores, omis par le modèle.

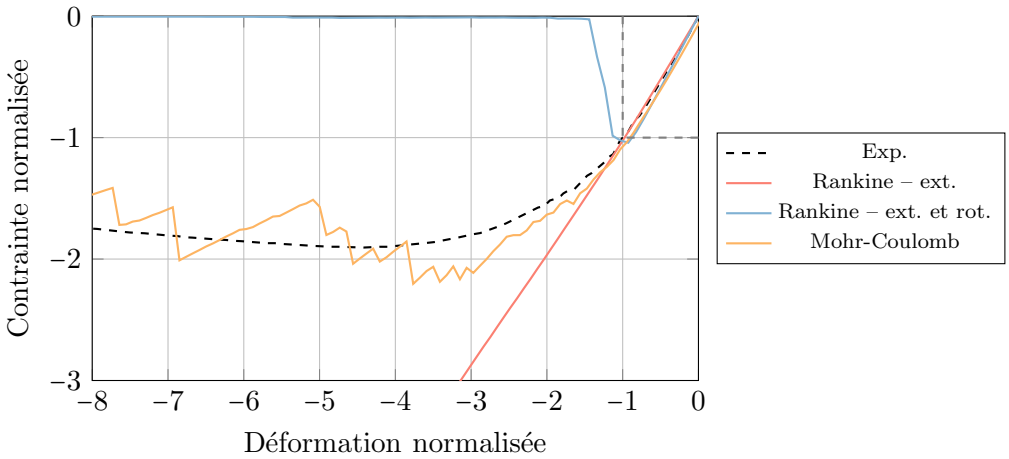
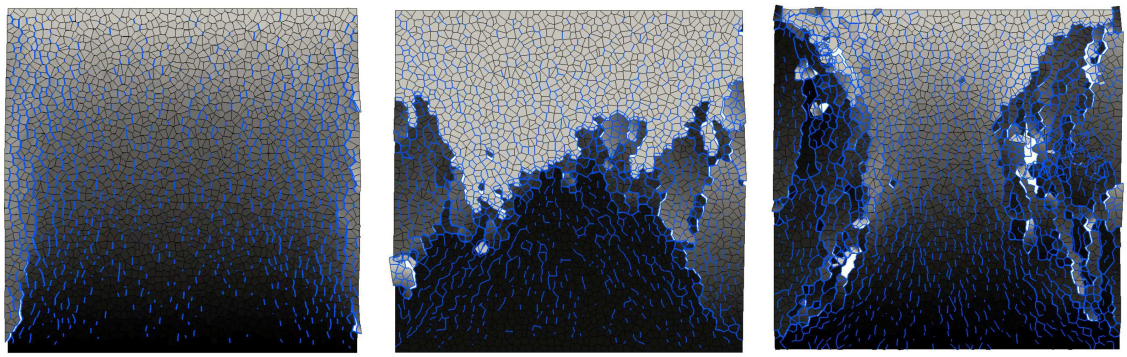


FIGURE 2.19: Influence de la formulation du critère de rupture sur la réponse en compression uni-axiale normalisée par rapport à la limite élastique.

Quant au type de variable à utiliser dans la formulation du critère de rupture, il a été observé que des variables cinématiques (déplacements, rotations) donnent des résultats identiques à des variables statiques (efforts, moments). Ainsi, seuls les résultats obtenus avec des variables cinématiques ont été présentés.



(a) Rankine – extensions (b) Rankine – extenstions et rotations (c) Mohr-Coulomb

FIGURE 2.20: Faciès de fissuration finaux en compression uni-axiale avec supports adhérents.

Le choix des variables cinématiques ou statiques ne permet pas de prendre en compte des mécanismes de dégradation additionnels, bien que les deux critères ne combinent pas

identiquement les sollicitations locales. Les *lattices* emploient classiquement des critères formulés en variables statiques [Schlangen et Van Mier, 1992], mais de manière à simplifier l'écriture du critère de rupture, et à rester dans le cadre de la formulation cinématique des degrés de liberté du modèle discret, des variables cinématiques sont retenues.

5.3 Surface de chargement à la rupture

La capacité du modèle à décrire les chargements au pic en traction (fig. 2.16) et en compression (fig. 2.19) uni-axiales a déjà été établie. En complément, la surface de chargement à la rupture bi-axiale est simulée (fig. 2.21). Le chargement est appliqué en effort afin de pouvoir établir une comparaison avec les résultats expérimentaux de Lee et al. [2004].

Le modèle est purement bi-dimensionnel, ni déformations, ni contraintes ne sont considérées dans la troisième dimension, les fissures ne peuvent donc se développer sous chargement de bi-compression. L'enveloppe des chargements au pic n'existe simplement pas. Quel que soit le chargement appliqué, une micro-fissuration diffuse peut apparaître, mais comme cela peut être le cas lors d'un chargement de tri-compression [Poinard et al., 2010], aucune perte de rigidité, ni rupture ne sont observées.

Afin de confirmer le rôle de la formulation bi-dimensionnelle du modèle, il a virtuellement été introduit un effet "tri-dimensionnel", pour cette simulation uniquement, sous la forme d'une déformation dans la troisième dimension ϵ_{ij}^T. Cette déformation est calculée dans chaque poutre, reliant les particules i et j, comme une fonction du coefficient de Poisson macroscopique élastique de l'éprouvette de matériau testée ν (= 0.2) et de la déformation longitudinale de la poutre ϵ_{ij} :

$$\epsilon_{ij}^T = \nu \epsilon_{ij} \tag{2.25}$$

La rupture d'une poutre peut maintenant avoir lieu, si le critère de rupture est atteint, mais aussi si la déformation dans la troisième dimension atteint le seuil en extension ϵ_{cr}. Le critère de rupture s'écrit alors :

$$P_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{ij}^{cr}} + \frac{|\theta_i - \theta_j|}{\theta_{ij}^{cr}} + \frac{\epsilon_{ij}^T}{\epsilon_{ij}^{cr}} > 1 \tag{2.26}$$

Le résultat montre une enveloppe des chargements au pic (fig. 2.21) de forme très similaire aux enveloppes observées expérimentalement. Une légère surestimation des valeurs des chargements au pic en bi-compression est encore observée. Elle peut être expliquée par la manière dont sont calculées les déformations dans la troisième dimension. En effet, ne tenir compte de déformations dans la troisième dimension induites uniquement par effet Poisson est nécessairement conservatif.

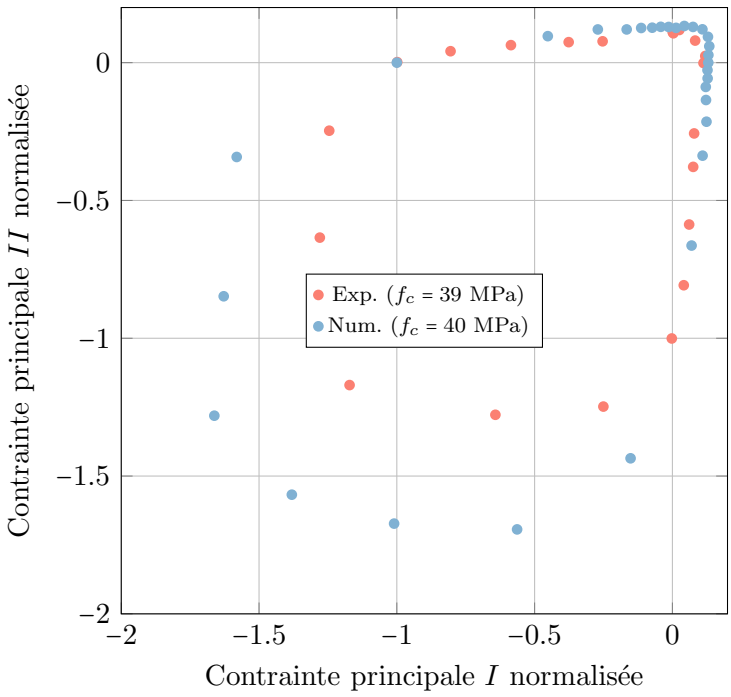


FIGURE 2.21: Surfaces de chargement à la rupture normalisées.

6 Synthèse

Le modèle discret à vocation d'outil d'expérimentation numérique a été introduit en détails. Aussi bien le modèle initial DEAP2D, que les développements effectués ont été présentés. Il s'agit donc d'une combinaison de DEM et de *lattice*. Cette seconde composante est avant tout utilisée pour assurer la cohésion, mais le modèle discret retient aussi des *lattices*, le schéma de résolution numérique et la description de la rupture. Dans l'objectif d'étendre le domaine de validité du modèle discret à des applications multi-axiales et cycliques, la résolution numérique et la modélisation de la rupture ont fait l'objet de développements. Ceux-ci ont été réalisés en tentant de préserver les caractères simple et facilement identifiable du modèle d'origine, prépondérants dans l'objectif d'une utilisation comme machine d'essai virtuelle.

Une modification du schéma de résolution *Saw-Tooth* a été proposée afin de conserver la résolution séquentielle linéaire du mécanisme de rupture des poutres du *lattice*, principal atout du schéma *Saw-Tooth*, tout en permettant de considérer les non-linéarités induites par le contact et la friction. Il en a résulté un algorithme de résolution globalement incrémental implicite, formulés dans un cadre quasi-statique. La stabilité vis-à-vis du mécanisme de rupture, apportée par la résolution de l'équilibre à la suite de la rupture de chaque élément poutre, propre à l'algorithme initial, a été préservée. La stabilité relative au mécanisme de contact, ainsi que la robustesse ont, elles, nécessité l'introduc-

tion d'une étape de prédiction linéaire des efforts de contact fonction des déplacements nodaux. Ces aspects ont été vérifiés en simulant une configuration impliquant un effort de contact hautement non-linéaire en fonction des déplacement nodaux. Les caractères qualitatif et quantitatif, des résultats fournis par le modèle discret sont, quant à eux, vérifiés au chapitre suivant.

La modélisation du mécanisme de rupture a été modifiée afin d'améliorer la dissipation énergétique reproduite par le modèle discret pour des chargements complexes. Des aspects statistiques, déjà présents dans DEAP2D, permettaient de reproduire la dissipation énergétique conséquence de l'hétérogénéité du matériau, particulièrement notable sur des chargements de traction à la rupture. Un critère de rupture local de type Mohr-Coulomb, classiquement issu de l'analyse limite de milieux poreux, a été retenu. Il a permis de tenir compte de mécanismes associés à des échelles plus fines, notamment liés à la présence de pores, non représentés par le modèle. La ductilité du comportement en compression a ainsi pu être reproduite.

La description et le développement du modèle discret maintenant achevés, sa mise en œuvre et sa validation sont maintenant abordées. Le chapitre suivant porte sur la présentation de la procédure d'identification du modèle, relativement simple, du fait des choix de modélisation effectués dans ce chapitre, ainsi que sur la simulation du comportement d'éléments de structure sous chargements complexes, ceci dans le but de valider le modèle discret décrit, et alimenter la modélisation macroscopique continue à venir du comportement sous chargement cyclique des matériaux quasi-fragiles.

Chapitre 3

Mise en œuvre d'une modélisation fine et expérimentation numérique

Sommaire

1 Introduction 72

2 Identification des paramètres 72

2.1 Taille des particules 72

2.2 Élasticité 73

2.3 Rupture 74

2.4 Frottement 75

3 Illustration de la procédure d'identification 76

3.1 Calibration 77

3.2 Validation 79

4 Étude de cas de fissuration complexes 86

4.1 Fissuration en mode mixte I/II 86

4.2 Fissuration en mode II 90

5 Étude de l'efficacité de l'algorithme de résolution 93

6 Expérimentation numérique en traction cyclique uni-axiale . . . 98

6.1 Étude de l'influence d'une perturbation 101

6.2 Simulation d'un essai complet avec rotation de l'éprouvette 106

7 Synthèse 108

1 Introduction

La formulation du modèle discret est maintenant établie. Elle se base sur une combinaison de la DEM et de *lattices*, dont l'algorithme de résolution a été adapté et la gestion de la fissuration, revisitée. Il en résulte un modèle simple à mettre en œuvre, car contenant peu de paramètres et donc identifiable à partir de peu d'essais. Ainsi, une stratégie d'identification systématique est proposée dans un premier temps.

Une validation détaillée des différents développements est proposée dans un second temps. La validité de la stratégie d'identification proposée et les capacités du modèle discret sont illustrées simultanément sur différents essais issus d'une même campagne expérimentale [Grégoire et al., 2013]. Deux campagnes expérimentales supplémentaires impliquant des modes de fissuration plus complexes sont aussi simulées afin de valider le choix du critère de rupture. Et l'efficacité de l'algorithme de résolution implicite élaboré, est comparée et vérifiée sur un essai de compression uni-axiale.

Le modèle discret alors validé, la simulation d'un essai cyclique de traction uni-axiale est alors entreprise. Les mécanismes mis en jeu, impliquant l'apparition des phénomènes associés au caractère unilatéral frottant de la fissuration, sont longuement étudiés. Il s'agit d'une première tentative d'expérimentation numérique, pour expliquer l'origine de ces phénomènes, connaissant les aptitudes et lacunes du modèle discret.

À noter, sauf mention du contraire, que tous les résultats discrets présentés dans ce chapitre sont une moyenne arithmétique sur 50 tirages.

2 Identification des paramètres

2.1 Taille des particules

La densité du maillage est contrôlée en ajustant la taille moyenne des particules l_p. Un compromis doit être trouvé de manière à limiter les coûts de calculs tout en respectant l'homogénéité macroscopique du matériau. Bien qu'il s'agisse d'un paramètre numérique, puisqu'il ne peut être lié directement à une propriété du matériau, l_p se doit d'être d'un ordre de grandeur proche des plus petites fissures qu'il est souhaité reproduire. Ainsi, l_p est d'une dimension comprise entre la taille des plus petits défauts et la taille des granulats. Toutefois, la taille des particules est, avant tout, déterminée selon les critères ci-après.

D'une part, Delaplace [2008] a montré qu'au minimum une cinquantaine de particules doivent être incluses dans la plus petite dimension du milieu discrétisé afin d'observer la convergence des propriétés élastiques (fig. 3.1). D'autre part, le nombre de particules doit rester relativement faible – de manière pragmatique inférieur à 50000 – afin de limiter les coûts de calculs.

En revanche, les propriétés à la rupture, telles que le chargement au pic ou la dissipation énergétique, ne convergent pas lorsque la taille de particule est raffinée, avec ce type de modèle [Oliver-Leblond et al., 2013]. Pour cette raison, la taille de particule l_p est considérée comme un paramètre matériau à part entière. Le reste des paramètres identifiés par la suite n'est valable qu'à taille de particule donnée.

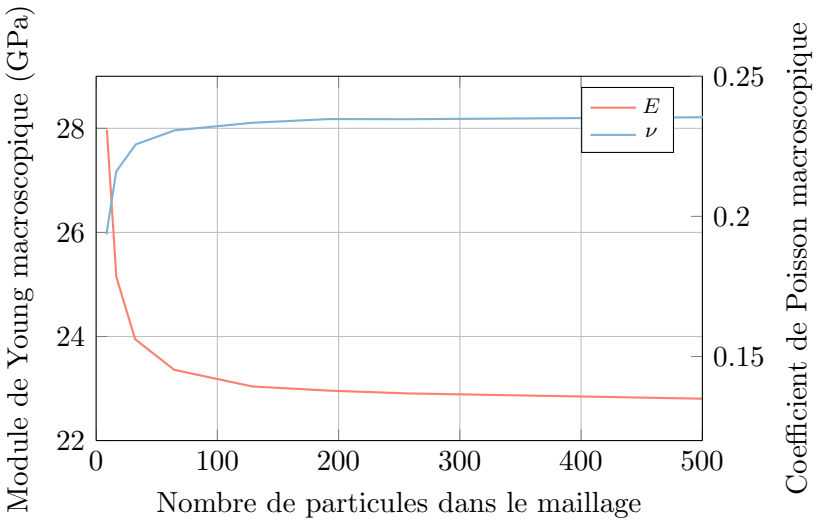


FIGURE 3.1: Influence de la densité de particules sur les propriétés élastiques macroscopiques.

La dépendance des résultats vis-à-vis de la taille de particule peut être illustrée en prenant l'exemple du béton. Bien qu'ici aucune distinction de phase du matériau ne soit faite, il est possible de comparer l'influence de la taille des particules et l'influence de la taille des granulats. En effet, les propriétés mécaniques inélastiques du béton sont fortement dépendantes de la taille des granulats choisis lors de la formulation. Tout comme la taille des granulats contraint le trajet de fissuration dans le béton, la taille des particules (indéformables et incassables) restreint les possibilités de trajets empruntés par la fissuration. Ces restrictions expliquent la dépendance des propriétés mécaniques à la rupture simulées vis-à-vis de la taille des particules.

2.2 Élasticité

Une procédure pour identifier les deux paramètres élastiques, le module de Young $\bar{E}$ et le coefficient d'inertie des poutres α, a été proposée par Delaplace et Desmorat [2007]. Ces deux paramètres sont identifiés par analyse inverse de manière à retrouver le module de Young macroscopique E et le coefficient de Poisson macroscopique ν du matériau. Ces deux propriétés sont obtenues en simulant un essai de traction uni-axiale. L'analyse de sensibilité des deux propriétés macroscopiques aux deux paramètres élastiques du modèle (fig. 3.2), a montré que E est proportionnel à $\bar{E}$ et que ν ne dépend pas de $\bar{E}$. Ainsi

les deux étapes successives de la procédure d'identification des paramètres élastiques du modèle sont :

— Calibrer α de manière à retrouver ν.
— Calibrer $\bar{E}$ de manière à retrouver E.

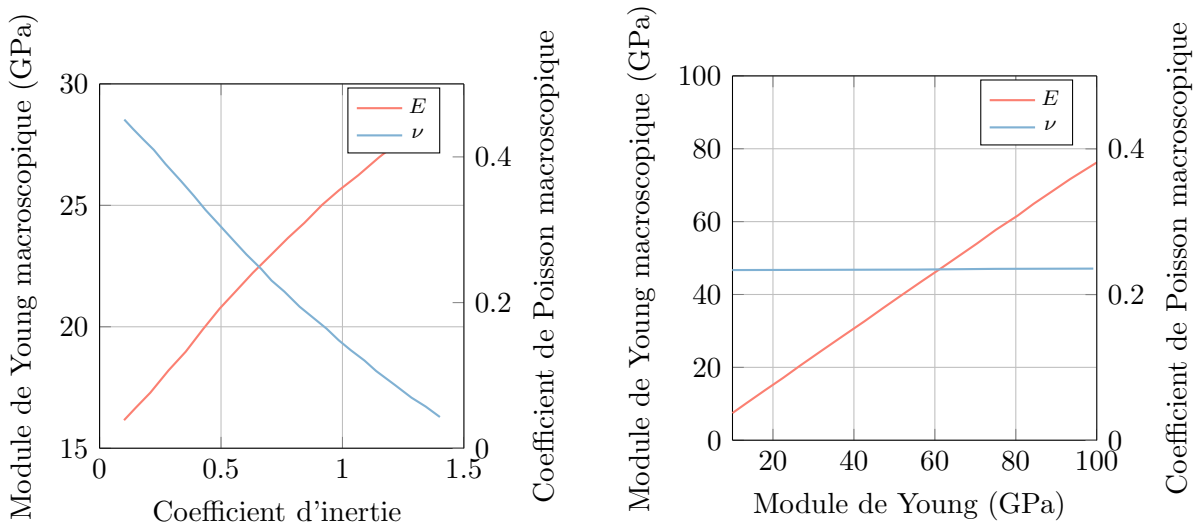


FIGURE 3.2: Influence des paramètres élastiques des poutres sur les propriétés élastiques macroscopiques.

2.3 Rupture

La procédure d'identification des paramètres contrôlant la rupture consiste, elle-aussi, en une analyse inverse effectuée sur des essais de rupture standard. En conséquence du choix de distribution statistique des seuils et d'un critère de type Mohr-Coulomb, les paramètres à identifier sont les facteurs d'échelle des distributions de Weibull du seuil en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ et du seuil en rotation $\lambda_{\theta_{cr}}$, ainsi que le facteur de forme commun k.

Au moyen d'analyses de sensibilité effectuées par la suite lors de la validation de la procédure d'identification, l'influence ou non de chacun de ces trois paramètres sur la réponse de matériaux jusqu'à la rupture a été déterminée. Dans le cas d'un essai quelconque, impliquant de la fissuration mixte en extension (mode I) et en cisaillement (mode II), les trois paramètres ont une influence notable sur la réponse. En revanche, lorsque l'essai sur lequel est effectué l'analyse inverse, ne présente plus que de la fissuration en mode I, l'influence du paramètre $\lambda_{\theta_{cr}}$ n'est pas significative. Enfin pour un même type d'essai, seul le paramètre k influence le comportement post-pic.

La procédure d'identification des paramètres de rupture suivante est ainsi proposée :

— calibrer k sur le comportement post-pic d'un essai impliquant majoritairement de la fissuration en mode I : essai de traction directe, essai de flexion trois-points ;

— calibrer $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ sur le chargement au pic du même type d'essai ;
— calibrer $\lambda_{\theta_{cr}}$ sur le chargement au pic d'un essai impliquant aussi bien de la fissuration en mode I qu'en mode II : essai de compression.

Étant donné qu'un aspect aléatoire est introduit par la génération du maillage et le tirage des seuils de rupture, une moyenne de cinquante simulations du même essai est utilisée pour effectuer une comparaison avec un résultat expérimental.

Il s'agit d'une procédure assez générale, car il n'existe pas de jeu unique d'essais standard permettant de déterminer les paramètres du modèle. Mais il s'avère que les quelques essais proposés ci-dessus présentent une forte sensibilité aux paramètres à identifier, tout en restant simples à mettre en œuvre expérimentalement. Les essais de fendage, de flexion trois-points et de compression sont d'ailleurs des essais fréquemment rencontrés dans la littérature, et exploités afin de caractériser une formulation de béton.

Une réserve est toutefois à émettre concernant l'essai de compression. Les effets du frottement entre les supports de chargement et le matériau influence significativement la réponse de l'éprouvette, aussi bien le chargement au pic que le comportement post-pic. C'est pourquoi dans la mesure du possible, à moins de pouvoir estimer précisément le niveau de frottement à l'interface support-matériau, l'essai de fendage doit lui être préféré. Comme montré par la suite (fig. 3.7), la réponse à l'essai de fendage apparaît être significativement sensible au paramètre $\lambda_{\theta_{cr}}$.

Une procédure d'identification alternative peut être proposée, basée sur des résultats expérimentaux uniquement scalaires : la résistance en traction, la résistance en compression et l'énergie de fissuration. Ces trois résultats expérimentaux, traduisant des comportements mécaniques différents, très souvent fournis dans la littérature, seraient utilisés pour déterminer les trois paramètres contrôlant la rupture dans le modèle discret. Toutefois cette alternative est limitée, et n'est donc pas retenue pour le moment. En effet, la connaissance des conditions aux limites de l'essai de compression est problématique, et à cela s'ajoute le fait que la simple valeur de l'énergie de fissuration obtenue lors d'un essai de flexion trois-points fournit moins d'informations que la réponse complète en régime post-pic.

2.4 Frottement

La prise en compte du frottement, par l'intermédiaire du critère de Coulomb, introduit le dernier paramètre à identifier : le coefficient de frottement μ.

Une fois de plus, l'identification est effectuée par analyse inverse. Les essais fortement dépendants du coefficient de frottement sont rares. Un essai de compression avec confinement latéral est généralement employé [Tran et al., 2011]. En effet, en se replaçant dans le contexte des mécanismes de dégradation présentés auparavant (fig. 2.15), juste avant d'atteindre le pic de chargement, des colonnes se forment dans le matériau. Le confine-

ment latéral supplémentaire appliqué force ces colonnes à rester en contact, et accroît donc l'importance du frottement lors des étapes de dégradation post-pic. La simulation, avec le modèle discret, d'un essai de compression avec un confinement latéral de 10 MPa, pour différentes valeurs du coefficient de frottement, est présentée en figure 3.3. Une dépendance notable de la réponse post-pic au coefficient de frottement est effectivement observée.

Tout comme pour l'identification des paramètres de rupture, dans la mesure où les conditions aux limites entre les supports et le matériau, et en plus ici, la manière dont le confinement est appliqué sont bien connues, l'essai de compression sous confinement latéral est un essai adéquat à l'identification du coefficient de frottement. Dans le cas contraire, il est toujours possible de se référer à la littérature, où la valeur du coefficient de frottement est très souvent considérée égale à $\mu = 0.7$ [Cusatis et al., 2011b].

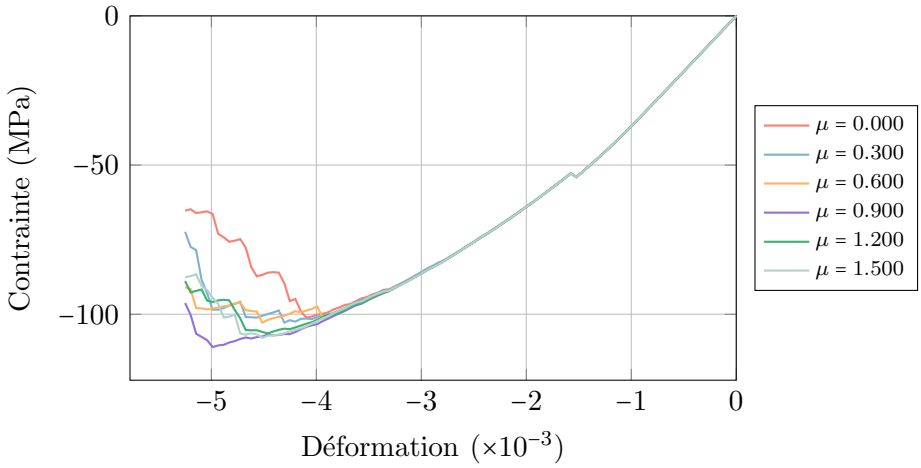


FIGURE 3.3: Influence du coefficient de frottement sur la réponse en compression sous confinement latéral de 10 MPa.

3 Illustration de la procédure d'identification

Dans la section 2, plusieurs essais ont été introduits pour réaliser l'identification du modèle discret. Ces essais doivent être effectués sur le même échantillon de matériau ; dans le cas du béton, il s'agit d'au moins considérer la même formulation, voire la même gâchée.

Dans cette section, les données expérimentales sont issues de la campagne expérimentale réalisée par Grégoire et al. [2013]. Cette campagne contient de nombreux essais de flexion trois-points (F3P), dont la configuration est détaillée en figure 3.4, des essais de fendage et des essais de compression uni-axiale.

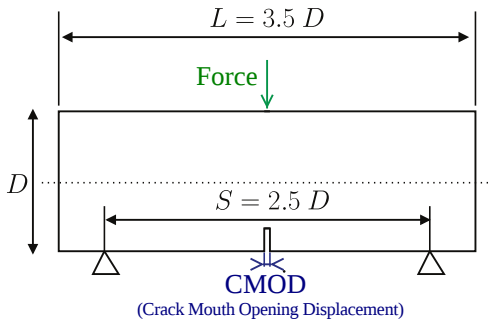


FIGURE 3.4: Dispositif de l'essai de flexion trois-points [Grégoire et al., 2013].

3.1 Calibration

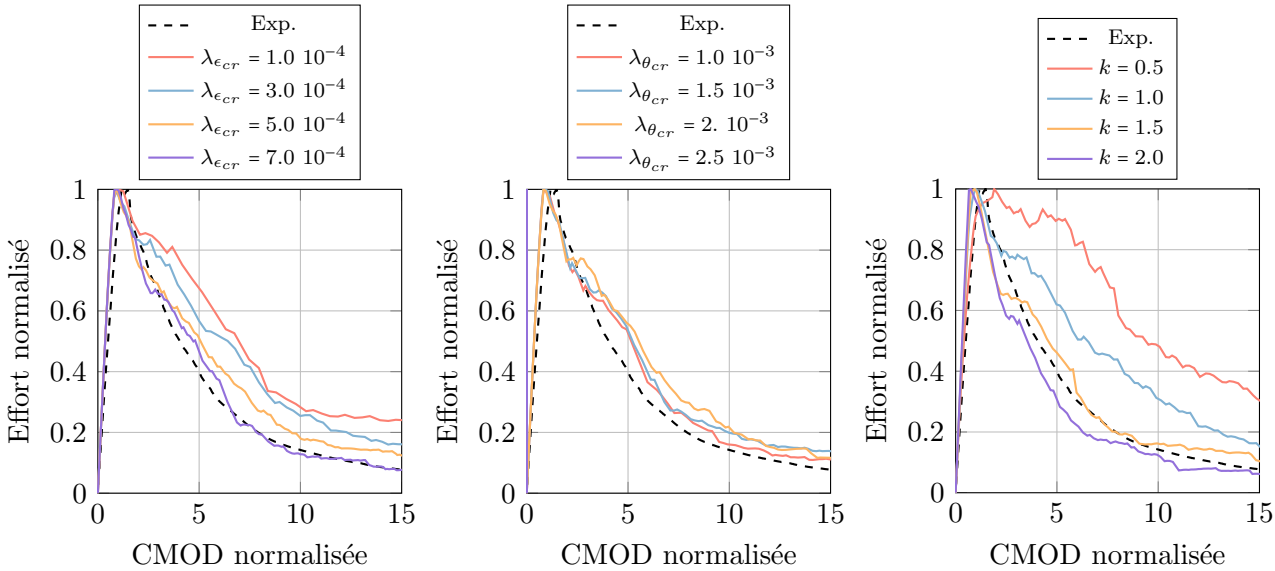
La taille de particule est fixée à $l_p = 2$ mm. Cette taille garantit une densité minimale de particules correcte pour la majeure partie des essais. Seule la plus petite taille de poutre des essais de flexion trois-points risque de poser problème, car elle ne contient que 25 particules dans la plus petite dimension. Cet essai ne sera donc utilisé que pour valider la prise en compte de l'effet d'échelle, en plus des trois autres tailles de poutres, plus grandes, disponibles. À noter que la dimension des granulats utilisés pour les essais de Grégoire et al. [2013] est comprise entre 4 mm et 10 mm, donc relativement proche de la dimension l_p choisie.

Les paramètres élastiques, le module de Young et le coefficient d'inertie des poutres sont fixés respectivement à $\bar{E} = 46$ GPa et $\alpha = 0.83$ de manière à retrouver les propriétés macroscopiques du béton utilisé, soit $E = 37$ GPa et $\nu = 0.21$.

Avant de calibrer les paramètres de rupture k, $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ et $\lambda_{\theta_{cr}}$, l'analyse de sensibilité dont il a été question précédemment est effectuée sur un essai de flexion trois-points réalisé sur une poutre non-entaillée, de longueur 0.35 m et de hauteur 0.10 m, et un essai de fendage réalisé sur un cylindre de diamètre 0.215 m.

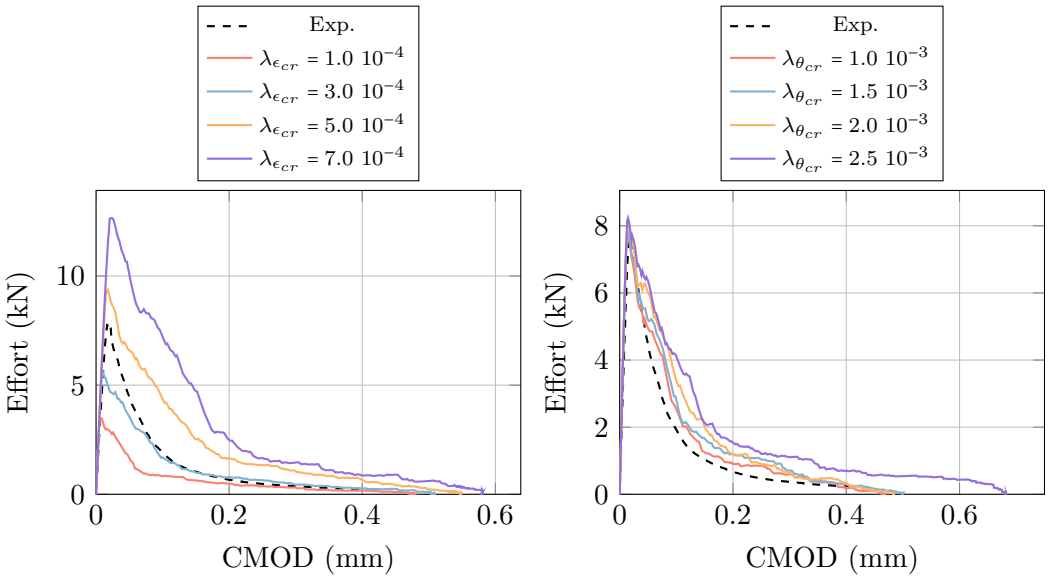
Dans un premier temps l'influence des trois paramètres de rupture est observée sur la réponse post-pic de l'essai de flexion trois-points (fig. 3.5). Sur cette figure, la réponse normalisée est tracée, soit F/F_{max} en fonction de $CMOD/CMOD_{max}$ (composante normale de l'ouverture de fissure). De cette manière, l'influence des paramètres sur la réponse post-pic ne dépend pas du chargement au pic. Seul le facteur de forme k influence la réponse post-pic en flexion trois-points, sa valeur est alors calibrée à $k = 1.4$.

Dans un second temps, l'influence des deux paramètres restant à identifier, les facteurs d'échelle, est observée sur le chargement au pic de la réponse au même essai de flexion trois-points (fig. 3.6). La fissuration de cet essai est du mode I, ainsi une influence du paramètre $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ est remarquée, mais pas du paramètre $\lambda_{\theta_{cr}}$, sa valeur est alors calibrée à $\lambda_{\epsilon_{cr}} = 4.34\ 10^{-4}$.



(a) facteur d'échelle en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ (b) facteur d'échelle en rotation $\lambda_{\theta_{cr}}$ (c) facteur de forme

FIGURE 3.5: Influence des paramètres de rupture sur la réponse normalisée en flexion trois-points.



(a) facteur d'échelle en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ (b) facteur d'échelle en rotation $\lambda_{\theta_{cr}}$

FIGURE 3.6: Influence des paramètres de rupture sur la réponse en flexion trois-points.

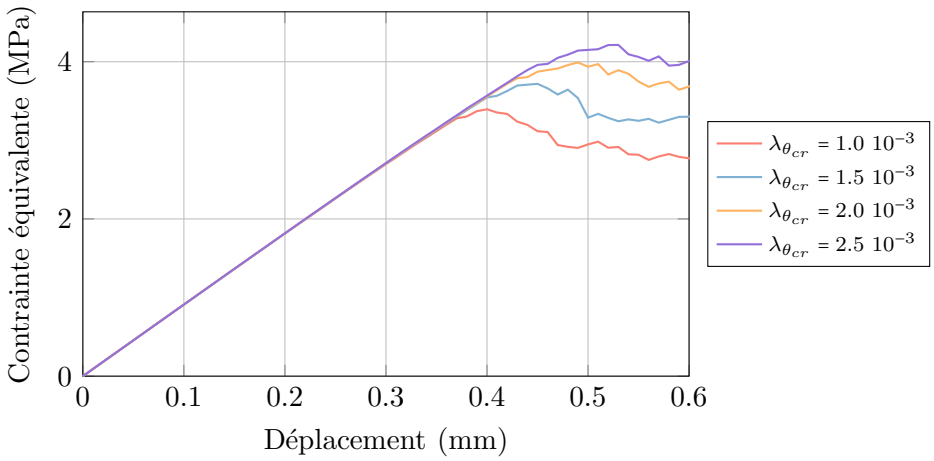


FIGURE 3.7: Influence du facteur d'échelle du seuil en rotation $\lambda_{\theta_{cr}}$ sur la réponse au fendage.

L'ensemble des paramètres matériaux identifiés pour simuler le comportement du béton de Grégoire et al. [2013] est résumé dans le tableau 3.1.

l_p (m)	α	$\bar{E}$ (GPa)	$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	$\lambda_{\theta_{cr}}$	k	μ
0.002	0.83	46	4.34 10^{-4}	1.85 10^{-3}	1.8	0.7

TABLE 3.1: Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais de Grégoire et al. [2013].

3.2 Validation

Le jeu de paramètres identifié sur un essai de flexion trois-points non-entaillé, de longueur 0.35 m et de hauteur 0.10 m, et sur un essai de fendage sur un cylindre de 0.215 m de diamètre, est à présent utilisé pour simuler des essais de flexion trois-points de différentes dimensions et longueurs d'entaille, ainsi qu'un essai de compression uni-axiale.

3.2.1 Effets d'échelle et effets de forme sur un essai de flexion trois-points

La capacité d'un modèle de comportement mécanique à reproduire les effets d'échelle et de forme est essentielle lorsque ce modèle est utilisé pour décrire un matériau quasi-fragile. De manière générale, une reproduction correcte de ces effets sur le chargement au pic et la réponse post-pic de résistance requiert une calibration du modèle sur différentes tailles d'éprouvettes. Ce point est souligné par Le Bellégo et al. [2003], en ce qui concerne les modèles continus d'endommagement non-locaux, et par Hoover et Bažant [2014], en ce qui concerne les modèles de fissuration cohésive. Par ailleurs, les jeux de paramètres identifiés sont généralement limités à un faible intervalle de tailles et de géométries d'éprouvettes

[Grégoire et al., 2013]. Enfin, la reproduction de l'effet d'échelle pour les modèles continus d'endommagement non-locaux nécessite l'identification d'une longueur interne.

Dans le cas du modèle discret, la longueur interne est la taille caractéristique des particules déterminée selon des critères qui ne sont absolument pas influencés par le respect des effets d'échelle et de forme. Le modèle, calibré sur une unique taille d'éprouvette (0.35 m par 0.10 m) et une unique longueur d'entaille (nulle), fournit des résultats prédictifs pour trois tailles d'éprouvettes et deux longueurs d'entaille différentes (figs. 3.8 et 3.9). Le modèle discret est capable de reproduire les effets d'échelle et de forme observés, non seulement sur l'effort appliqué au pic de résistance, mais aussi sur l'allure de la réponse post-pic. Cette aptitude est principalement acquise en considérant la variabilité des propriétés matérielles à l'échelle de la modélisation par le biais d'aspects statistiques.

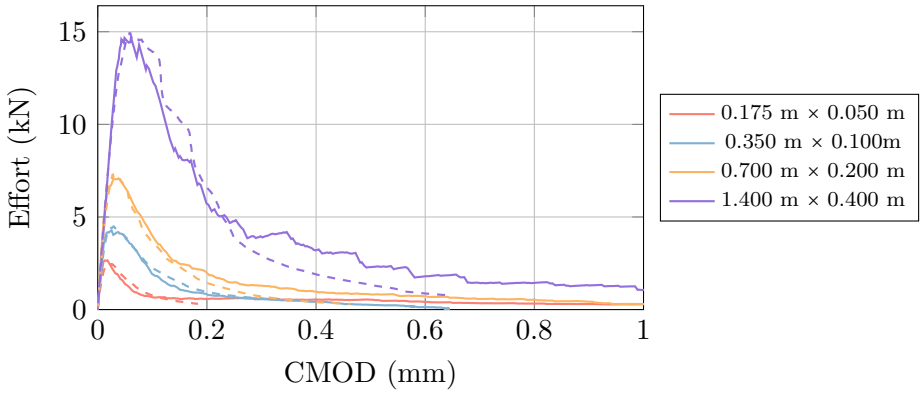


FIGURE 3.8: Influence de la taille de l'éprouvette sur la réponse en flexion trois-points entaillé au cinquième de la hauteur : expérimental (pointillé), simulation (plein).

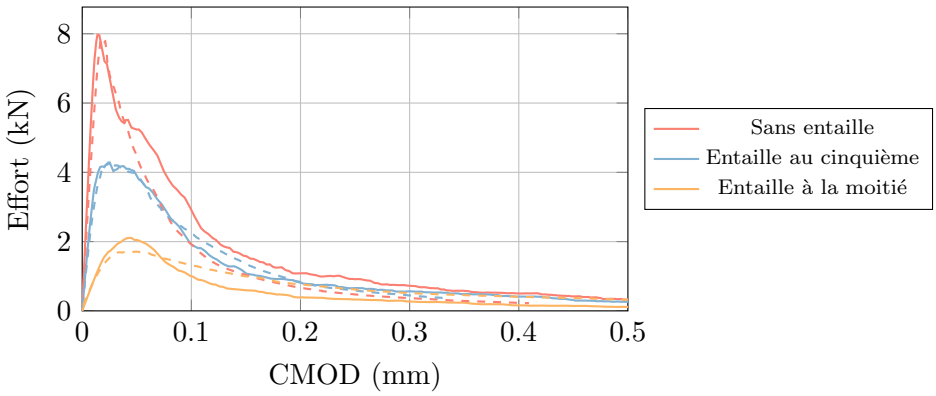


FIGURE 3.9: Influence de la longueur initiale de l'entaille sur la réponse d'une éprouvette de 0.35 m par 0.10 m en flexion trois-points : expérimental (pointillé), simulation (plein).

La validation des effets d'échelle et de forme est poursuivie avec l'étude des faciès de fissuration. La fissuration n'est pas seulement localisée en pointe de macro-fissure, mais s'étale

sur un certain volume appelé *fracture process zone* [Hillerborg et al., 1976]. L'étude des faciès de fissuration obtenus à maillage identique, avec et sans entaille (fig. 3.10 et 3.11), montre que le modèle discret est aussi capable de reproduire les processus d'initiation et de propagation de la fissuration.

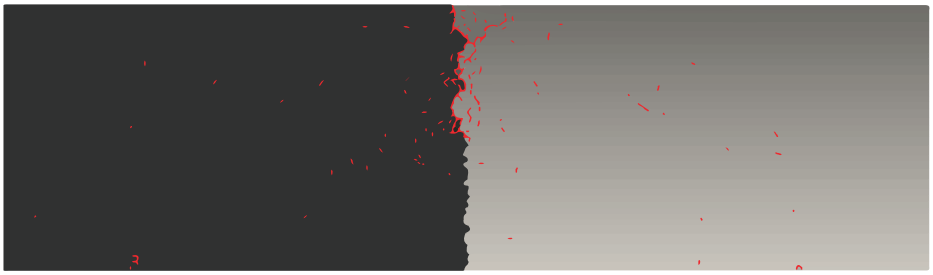


FIGURE 3.10: Faciès de fissuration d'une poutre entaillée à mi-hauteur.

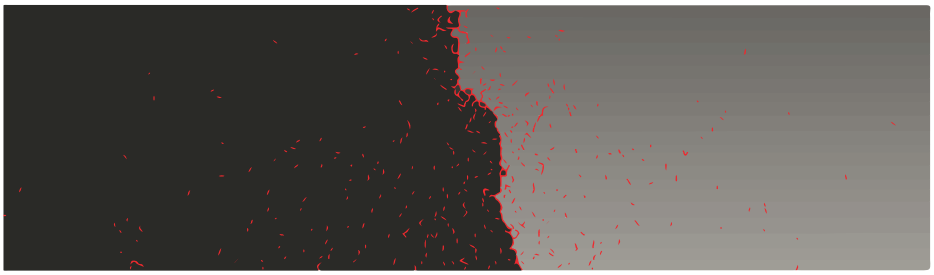


FIGURE 3.11: Faciès de fissuration d'une poutre sans entaille.

3.2.2 Dispersion des résultats

La dispersion des réponses fournies par le modèle discret est étudiée sur un essai de flexion trois-points sur une poutre entaillée jusqu'au cinquième de la hauteur, de longueur 0.35 m et de hauteur 0.10 m (fig. 3.12). La variabilité des réponses simulées semble plus importante que la variabilité des réponses expérimentales. Plusieurs explications peuvent être fournies :

— seules trois expériences ont été effectuées sur chaque essai de flexion trois-points, ce qui n'est peut-être pas suffisant pour capturer la variabilité réelle de la réponse expérimentale ;

— le facteur de forme des distributions des seuils de rupture k, utilisé pour contrôler la réponse post-pic de l'essai, influence aussi significativement la dispersion des résultats, et sa valeur est peut-être sous-estimée ;

— le maillage n'est peut-être pas suffisamment raffiné pour ces dimensions d'éprouvette, ce qui conduirait à un faciès de fissuration excessivement influencé par la forme des particules.

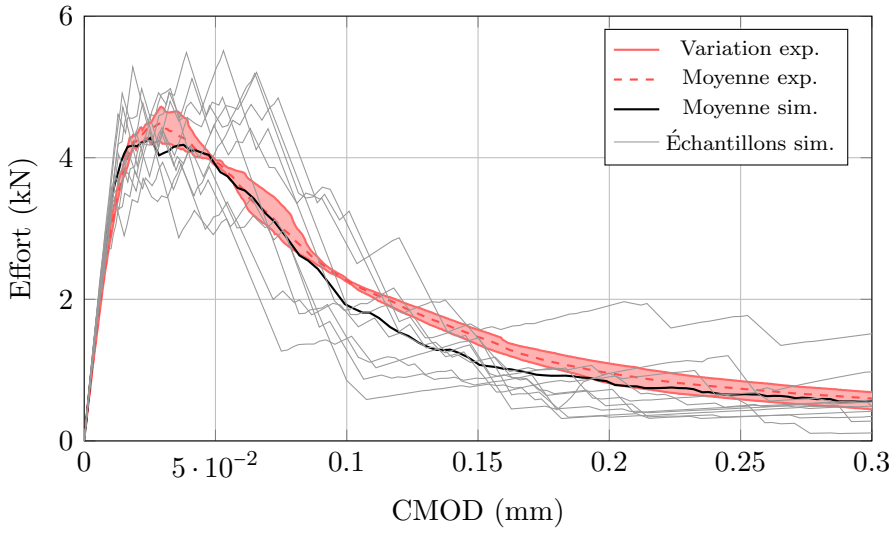


FIGURE 3.12: Variabilité de la réponse en flexion trois-points.

Étant donné que les données expérimentales sont limitées à trois résultats, et qu'il n'est pas possible de modifier le paramètre k sans modifier la qualité des résultats, seule la responsabilité de la quantité de particules dans le maillage peut être explorée.

Le nombre de particules augmente avec la taille de l'échantillon, l'étude de l'influence de la taille de l'échantillon sur le coefficient de variation des chargements au pic (relatif au chargement moyen au pic) présente donc un intérêt (fig. 3.13). Il est possible de noter que le coefficient de variation simulé décroît lorsque la taille de l'éprouvette, et donc le nombre de particules dans l'éprouvette, augmente et semble converger vers la valeur expérimentale. Deux conclusions opposées peuvent être tirées de cette observation.

D'un côté, il peut être conclu que la taille de particule influence non seulement la convergence des propriétés élastiques mais aussi la convergence de le coefficient de variation du chargement au pic. Autrement dit, la faible densité du maillage serait la conséquence de la dispersion des résultats.

D'un autre côté, il peut être conclu que l'augmentation des dimensions de l'éprouvette masque les effets de l'aléa local des propriétés mécaniques à la rupture, à l'échelle de la structure. Cela revient à dire, qu'avec l'augmentation des dimensions de l'éprouvette, les propriétés globales du matériau sont homogénéisées.

En faisant abstraction de la première valeur, le coefficient de variation expérimental apparaît croître en fonction de la taille d'éprouvette. Les résultats expérimentaux vont donc à l'encontre de la seconde conclusion. Cette croissance pourrait s'expliquer par une augmentation de l'incertitude induite par une augmentation de la présence de défauts dans le matériau. Mais en admettant que la seconde conclusion soit véridique, il est alors possible de considérer que la dispersion observée expérimentalement est non représentative de la réalité et ce, du fait de la quantité limitée de réalisations expérimentales.

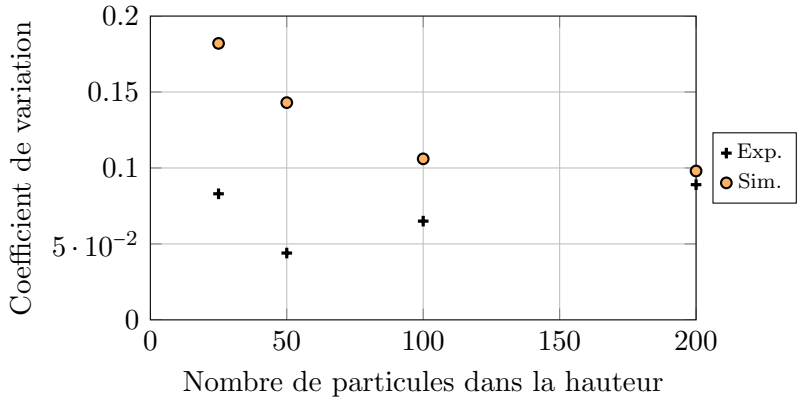


FIGURE 3.13: Influence de la densité du maillage sur la dispersion des chargements au pic.

Quoi qu'il en soit, une densité de particule grossière, comme c'est le cas ici, reste une option intéressante à faible coûts de calculs. De plus, la dispersion des réponses simulées est conservative. En effet, les réponses simulées englobent intégralement le faisceau expérimental (fig. 3.12).

3.2.3 Réponse complète en compression

Les essais de compression sont généralement compliqués à simuler, du fait du manque d'information sur les conditions aux limites réellement appliquées. Le niveau de frottement à l'interface entre l'éprouvette et les supports de chargement est difficile à évaluer. Ce frottement a une importance notable sur la réponse en compression. En effet, des états de contraintes fortement multi-axiaux peuvent être générés selon le niveau de frottement.

Par ailleurs, du fait de la formulation dans le cadre quasi-statique du modèle, les conditions aux limites au niveau des supports doivent être appliquées de manière à ne permettre aucun mouvement de corps rigide, ni induire de déformations restreintes injustifiées.

Conditions aux limites partiellement restreintes

La figure 3.14 illustre l'application de conditions aux limites partiellement restreintes. Le support de chargement interagit avec la première couche de particules (en rouge sur la fig. 3.14). Afin de simuler une interface parfaitement glissante entre l'éprouvette et le support, seul un déplacement vertical devrait être appliqué sur les particules rouges, sans appliquer de déplacement horizontal. Cependant, un mouvement de corps rigide horizontal serait alors permis. Une solution, généralement utilisée dans le cadre de simulations en éléments finis, consisterait à bloquer horizontalement un élément (une particule en éléments discrets) de la ligne rouge. Mais dans le cas très probable où la fissuration locali-

serait autour de cette particule, et une fois celle-ci détachée complètement de l'éprouvette, le problème initial de mouvement de corps rigide initial surviendrait de nouveau.

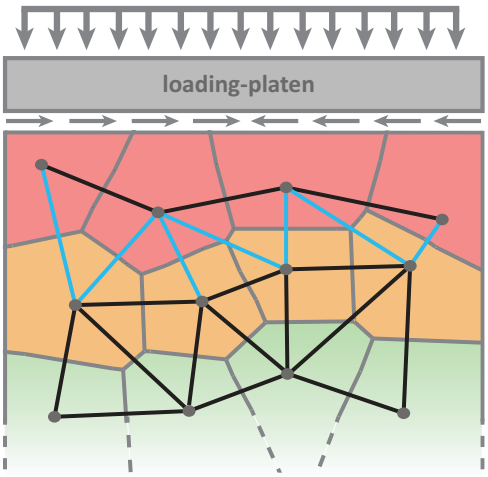


FIGURE 3.14: Description schématique de l'application de conditions aux limites partiellement restreintes.

La solution finalement retenue consiste à appliquer les conditions aux limites sur deux couches de particules. Sur la première couche (rouge) le déplacement vertical est toujours appliqué, et les déplacements horizontaux sont bloqués. Sur la seconde couche (orange sur la fig. 3.14), seul le déplacement vertical est appliqué. Jusqu'ici, les conditions aux limites appliquées sont équivalentes à une interface parfaitement adhérente entre l'éprouvette et le support.

De manière à simuler une adhérence partielle entre le support et l'éprouvette, le niveau des contraintes de cisaillement transmises entre le support et l'éprouvette est ajusté. La rigidité des poutres de cohésion (bleues sur la fig. 3.14) reliant les particules des première (rouge) et seconde (orange) couches est réduite. Ces poutres de cohésion sont aussi considérées incassables pour éviter la localisation de la fissuration entre ces deux couches de particules. Le coefficient de correction de rigidité des poutres de cohésion bleues est nommé k_p. Une rigidité nulle ($k_p = 0$) de ces poutres de cohésion équivaut à une interface parfaitement glissante entre le support et l'éprouvette, alors qu'une rigidité intacte ($k_p = 1$), comme expliqué précédemment, équivaut à une adhérence parfaite.

Simulations

Les réponses expérimentales et simulées en compression d'un cylindre de hauteur 0.140 m et de diamètre 0.074 m sont présentées en figure 3.15. La sensibilité de la réponse au niveau d'adhérence à l'interface entre le support et l'éprouvette est étudiée.

Selon le rapport expérimental une plaque de Teflon a été placée à l'interface entre le support et l'éprouvette, ainsi peu ou pas d'adhérence était attendue ($k_p = 0$). Toutefois, la

réponse expérimentale en compression n'est correctement reproduite que pour des conditions aux limites partiellement restreintes avec $k_p = 0.0015$.

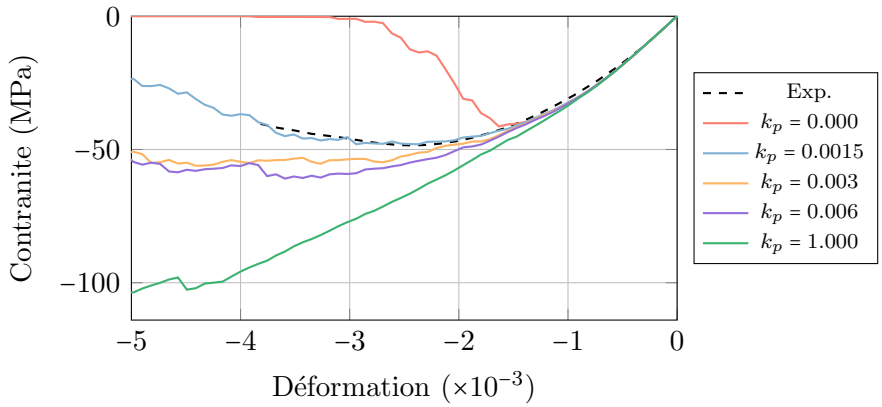
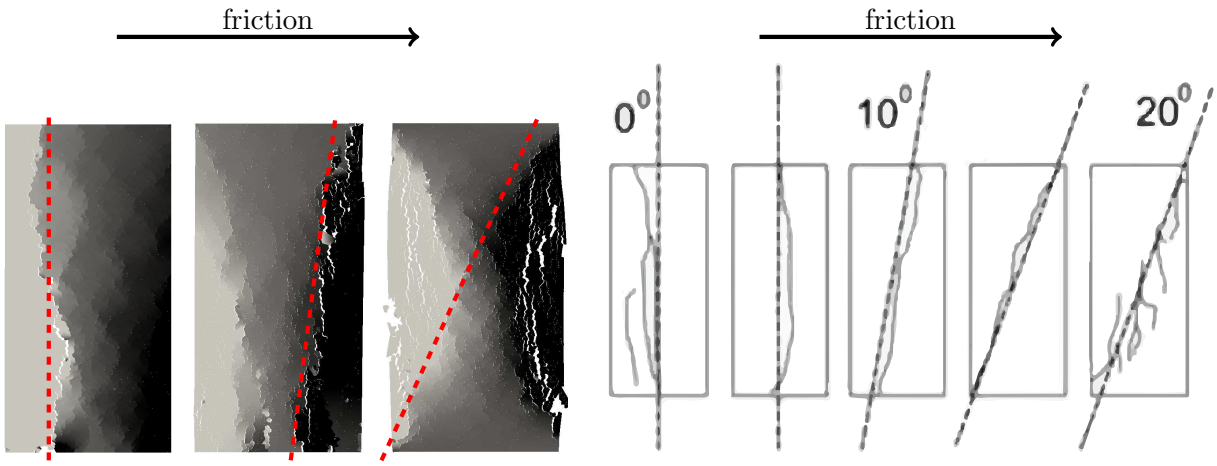


FIGURE 3.15: Influence des conditions aux limites simulées sur la réponse en compression uni-axiale.

Expérimentalement, il a été observé que l'inclinaison de la bande de localisation de la fissuration dépend du niveau d'adhérence entre les supports et l'éprouvette [Kotsovos, 1983]. Plus l'adhérence est forte, plus la bande de localisation est inclinée. Le modèle discret reproduit correctement cette observation expérimentale, en augmentant la valeur du paramètre k_p, la bande de localisation simulée s'incline (trait rouge pointillé, fig. 3.16).



a) Simulation b) Expérimental

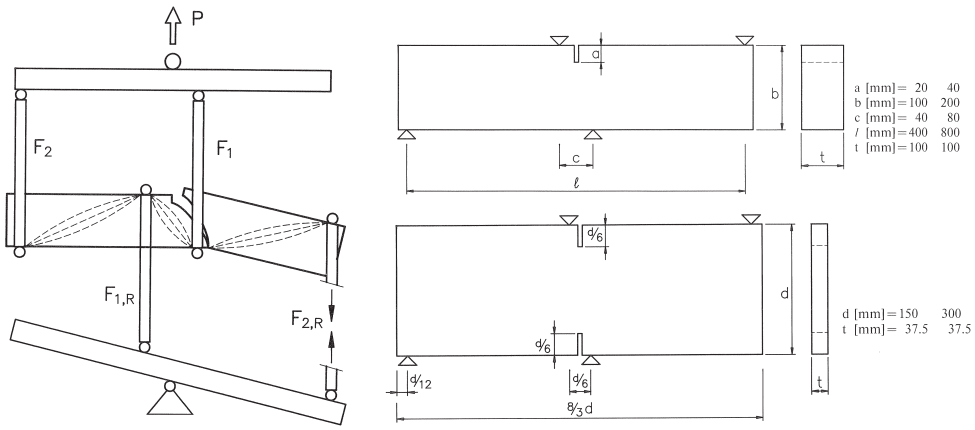
FIGURE 3.16: Influence des conditions aux limites sur le faciès de fissuration d'un essai de compression uni-axiale.

4 Étude de cas de fissuration complexes

La validation du modèle est poursuivie sur des essais quasi-structuraux. La capacité du modèle discret à reproduire une fissuration en mode I a déjà été évaluée précédemment, ainsi seules des situations de fissuration en mode mixte (I/II) sont étudiées. Les paramètres du modèle discret identifiés précédemment ne peuvent être utilisés directement pour ces essais. Malheureusement, les propriétés des matériaux utilisés pour ces essais ne sont pas identiques à celles des matériaux utilisés pour les essais de Grégoire et al. [2013], sur lesquels se base l'identification réalisée précédemment. De plus, les résultats expérimentaux fournis avec les rapports des essais quasi-structuraux ne sont pas suffisants pour effectuer la procédure d'identification complète du modèle, telle que proposée dans la section 2.1.

Ainsi, l'ensemble des paramètres identifiés sur la campagne d'essais de Grégoire et al. [2013] sont globalement réutilisés, mais le module de Young des poutres du *lattice* $\bar{E}$ et le facteur d'échelle de la distribution du seuil de rupture en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ sont légèrement ajustés de manière à optimiser la réponse du modèle. L'optimisation est réalisée, pour chaque campagne d'essais quasi-structuraux, sur le résultat obtenu sur une des configurations fournies. Pour cette raison, les résultats présentés dans cette section ne peuvent être qualifiés de totalement prédictifs. Néanmoins, il est montré que le modèle discret est capable de prédire la conséquence d'un changement de géométrie ou de conditions aux limites sur la réponse du matériau et les faciès de fissuration.

4.1 Fissuration en mode mixte I/II



(a) dispositif de chargement (b) dimensions des poutres

FIGURE 3.17: Dispositif des essais des poutres de Schlangen.

Schlangen [1993] a testé des poutres simplement entaillées (SEN) et doublement entaillées

(DEN) soumises à des chargements de flexion complexe sur quatre appuis (fig. 3.17). L'évolution de l'effort appliqué, de l'ouverture des lèvres de fissure (CMOD), et du glissement des lèvres de fissure (CMSD) sont observées pour des appuis glissants et fixes.

Comme expliqué précédemment, le modèle est identifié à nouveau sur la réponse effort-CMOD d'une poutre SEN sur appuis glissants. Le module de Young $\bar{E}$ est calibré de manière à retrouver la pente initiale de la réponse. Le facteur d'échelle de la distribution du seuil en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ est modifié pour ajuster le chargement au pic. L'ensemble des paramètres matériaux utilisés pour les simulations de la campagne d'essais de Schlangen [1993] est résumé dans le tableau 3.2.

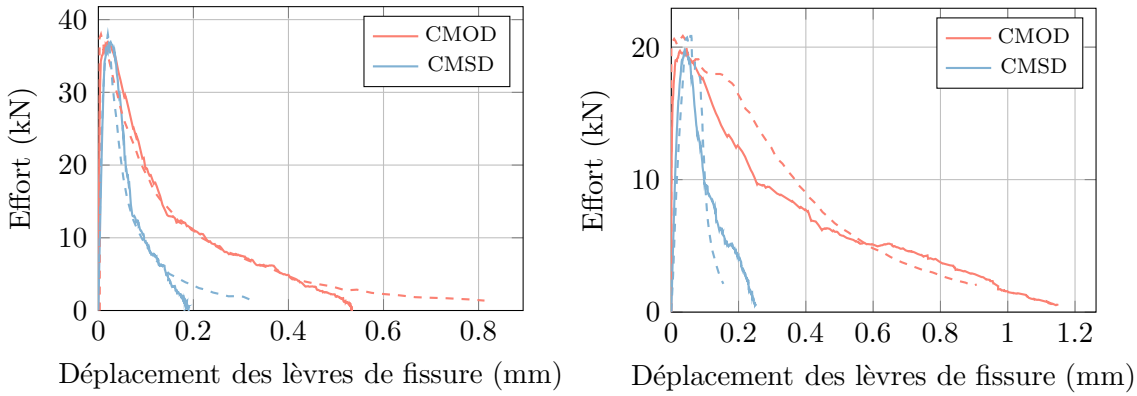
l_p (m)	α	$\bar{E}$ (GPa)	$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	$\lambda_{\theta_{cr}}$	k	μ
0.002	0.83	42	3.26 10^{-4}	1.85 10^{-3}	1.4	0.7

TABLE 3.2: Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais des poutres de Schlangen [1993].

4.1.1 Appuis glissants

Dans un premier temps, les réponses obtenues des poutres SEN et DEN avec appuis glissants sont simulées. Trois des quatre supports ont des déplacements horizontaux libres, alors que l'appui à gauche sous la poutre est bloqué horizontalement pour éviter les mouvements de corps rigide.

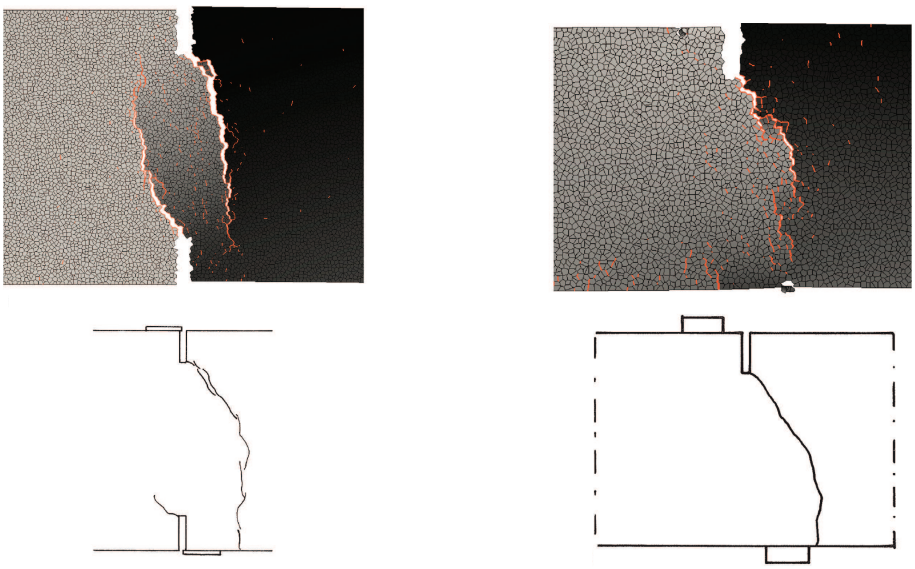
Le modèle discret est capable de reproduire correctement aussi bien les réponses expérimentales effort-CMOD que effort-CMSD, qu'il s'agisse d'une poutre simplement ou doublement entaillée (fig. 3.18).



(a) poutre simplement entaillée (b) poutre doublement entaillée

FIGURE 3.18: Réponses simulées (plein) et expérimentales (pointillé) des poutres de Schlangen [1993] avec appuis glissants.

Les faciès de fissuration simulés sont aussi en très bon accord avec les faciès observés expérimentalement. Le faciès de fissuration d'une réalisation est présenté en figure 3.19. Le faciès de fissuration n'est évidemment pas identique pour chaque réalisation mais les tendances expérimentales sont toujours observées.



(a) poutre simplement entaillée (b) poutre doublement entaillée

FIGURE 3.19: Faciès de fissuration simulés et expérimentaux des poutres de Schlangen [1993] avec appuis glissants.

4.1.2 Appuis fixes

D'après une analyse par la FEM des essais des poutres de Schlangen [1993] effectuée par Geers et al. [2000], la modélisation des appuis fixes requiert une attention particulière. En effet, les appui fixes ne peuvent être considérés comme parfaitement rigides. Par conséquent, la méthodologie exposée dans la section 3.2.3, a de nouveau été utilisée pour assouplir la rigidité des appuis. Le coefficient de correction de la rigidité des appuis est modifié pour passer de conditions aux limites aux appuis parfaitement fixes ($k_p = 1$) à des à des conditions aux limites considérées comme glissantes ($k_p = 0$).

Pour les poutres SEN, la seule donnée expérimentale est le déplacement relatif δ_2 (voir [Schlangen, 1993]) de l'appui du coin supérieur gauche de la poutre par rapport à une barre fixée sur la ligne moyenne de la poutre. Ce déplacement relatif est grandement influencé par les mouvements de corps rigide du dispositif de chargement expérimental. Pour cette raison, il n'a pas été possible de reproduire l'évolution de l'effort par rapport au déplacement δ_2 (fig. 3.20). Cette justification s'appuie notamment sur le fait que, comme il est montré par la suite (fig. 3.22), des résultats intéressants ont tout de même été obtenus concernant le faciès de fissuration lors de cette simulation, ce qui laisserait penser que la

simulation n'est pas totalement erronée.

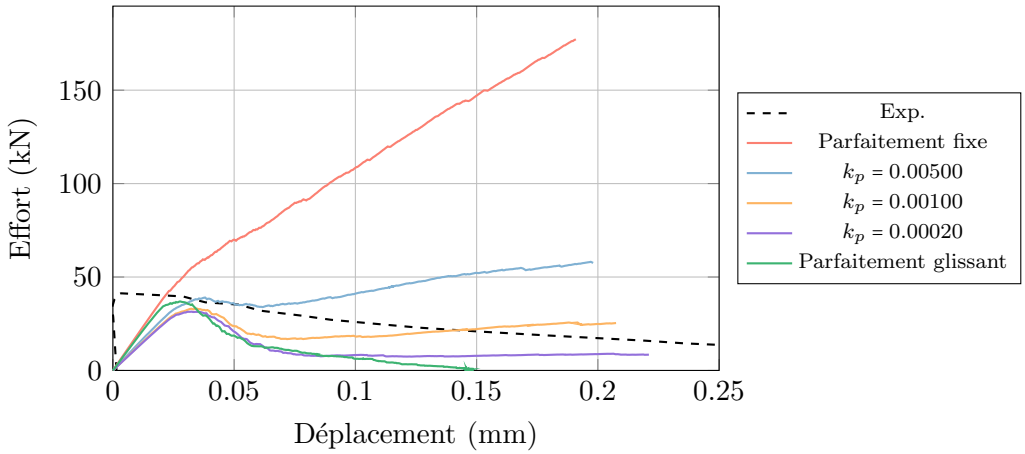


FIGURE 3.20: Influence de l'adhérence des appuis sur la réponse des poutres de Schlangen [1993] simplement entaillées.

Pour les poutres DEN, une moyenne des mesures expérimentales du CMOD et du CMSD est exploitée. L'évolution de l'effort et de ce déplacement moyen a pu être simulée. La réponse obtenue est comparée avec la réponse expérimentale en figure 3.21. Pour des appuis parfaitement fixes, la partie centrale de la poutre où se forment les fissures ne peut pas se dilater dans la direction horizontale. La fissuration ne peut donc pas se propager correctement. Ni le pic de résistance, ni la rupture de la poutre ne sont atteints. En revanche, une réponse correcte est obtenue pour un coefficient de correction de la rigidité des appuis de $k_p = 0.001$.

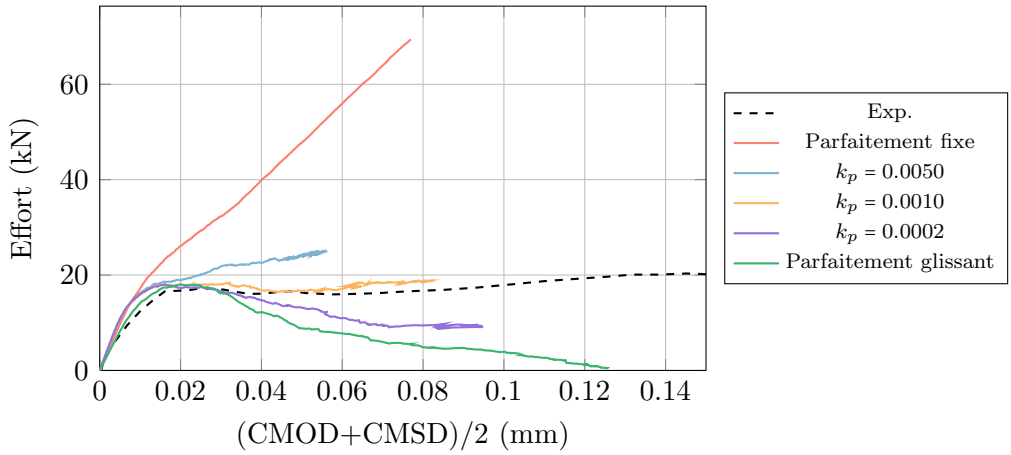
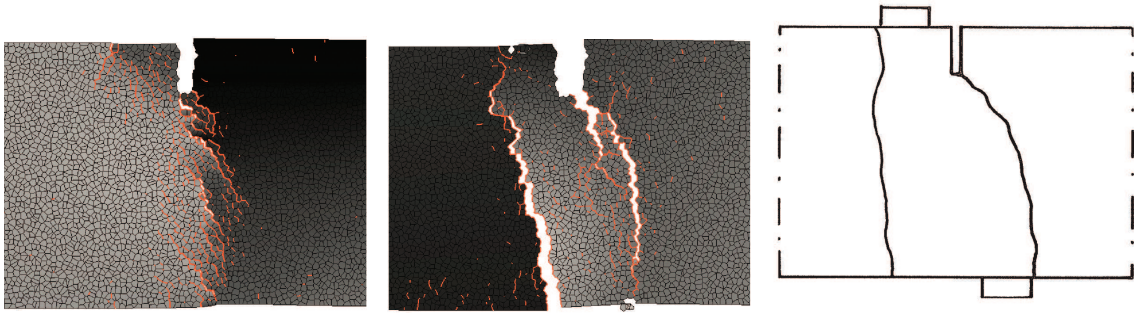


FIGURE 3.21: Influence de l'adhérence des appuis sur la réponse des poutres de Schlangen [1993] doublement entaillées.

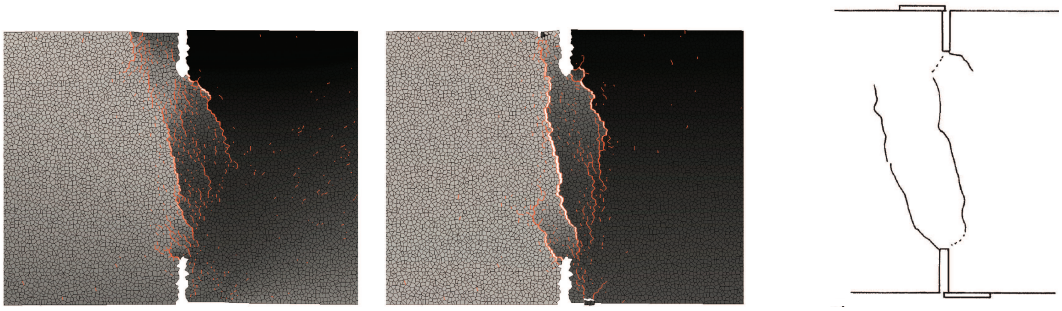
En ce qui concerne les faciès de fissuration (fig. 3.22 et 3.23), pour la poutre simple-

ment entaillée la fissure incurvée entre le sommet de l'entaille et le support de chargement inférieur est correctement reproduite, il en est de même pour la fissure verticale remontant jusqu'au support de chargement supérieur. Pour la poutre doublement entaillée, la simulation permet d'obtenir deux fissures incurvées antisymétriques initiées aux extrémités de chaque entaille ainsi qu'une fissure centrale au cœur de la poutre, toutes observées expérimentalement.



(a) simulé avec appuis fixes (b) simulé avec appuis modifiés (c) expérimental

FIGURE 3.22: Faciès de fissuration pour les poutre simplement entaillée.



(a) simulé avec appuis fixes (b) simulé avec appuis modifiés (c) expérimental

FIGURE 3.23: Faciès de fissuration pour une poutre de Schlangen [1993] doublement entaillée.

4.2 Fissuration en mode II

L'essai proposé par Fenwick et Paulay [1968] permet d'étudier le comportement d'une éprouvette de béton entièrement fissurée, soumise à un chargement de cisaillement (fig. 3.24). L'éprouvette de longueur 0.450 m et de hauteur 0.100 m est d'abord chargée en traction uni-axiale pour former une fissure localisée entre les deux petites entailles à mi-longueur. La génération de la fissuration par chargement, plutôt que par découpe permet d'assurer une certaine rugosité des lèvres de la fissure. Ensuite, l'espacement des entailles

est maintenu de manière à conserver une ouverture d'entaille constante, et le chargement de cisaillement est finalement appliqué.

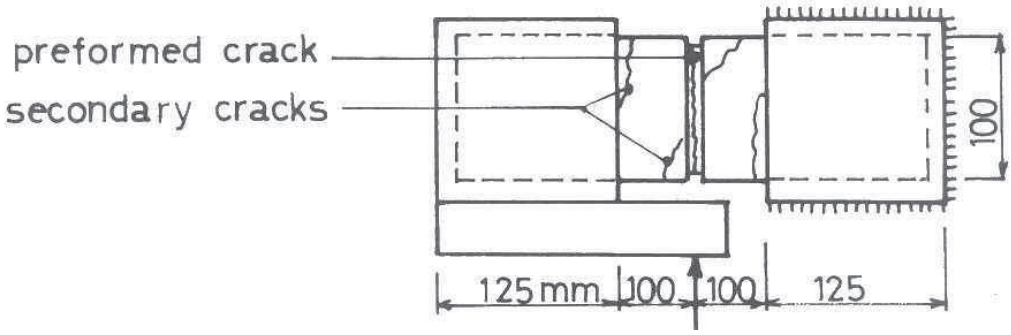


FIGURE 3.24: Dispositif et faciès de fissuration de l'essai de cisaillement de Fenwick et Paulay [1968].

L'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement de cisaillement (imposé verticalement) pour différentes ouvertures de fissures, autrement dit différents niveaux de confinement, est disponible expérimentalement [Walraven, 1980]. Le facteur d'échelle de la distribution du seuil en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ est à nouveau identifié de manière à retrouver la réponse expérimentale pour la plus petite ouverture de fissure (cw = $0.00006m$). Cette ouverture de fissure est retenue, car il s'agit de la configuration la plus proche d'un matériau sain, non-fissuré. Le module de Young $\bar{E}$ des poutres du *lattice*, n'est cette fois-ci pas modifié, car il n'influence que très peu la réponse. L'ensemble des paramètres matériaux utilisés pour les simulations de la campagne d'essais de Fenwick et Paulay [1968] est résumé dans le tableau 3.3.

l_p (m)	α	$\bar{E}$ (GPa)	$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	$\lambda_{\theta_{cr}}$	k	μ
0.002	0.83	46	5.23 10^{-4}	1.85 10^{-3}	1.4	0.7

TABLE 3.3: Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais de Fenwick et Paulay [1968].

Le modèle discret est capable non seulement de reproduire les valeurs de chargement au pic de résistance, mais aussi l'allure des réponses pré-pic expérimentales lissées (fig. 3.25). Il faut noter sur la partie pré-pic des réponses un passage à tangente horizontale particulièrement visible pour de forts confinements, soit une ouverture de fissure faible. Ce passage peut être interprété comme la manifestation du phénomène d'*aggregate interlocking*. Les contraintes de cisaillement transitent au travers de la fissure par l'intermédiaire d'incompatibilités géométriques. Ce transfert de contraintes est interrompu, et un glissement, traduit par un passage à tangente nulle de la réponse, se produit lorsque les particules à l'interface de la fissure, responsables d'incompatibilités géométriques, se détachent du fait de la rupture de toutes les poutres les reliant au *lattice*. Le glissement produit perdure

jusqu'à ce que de nouvelles incompatibilités de géométries au niveau de la fissure soient générées.

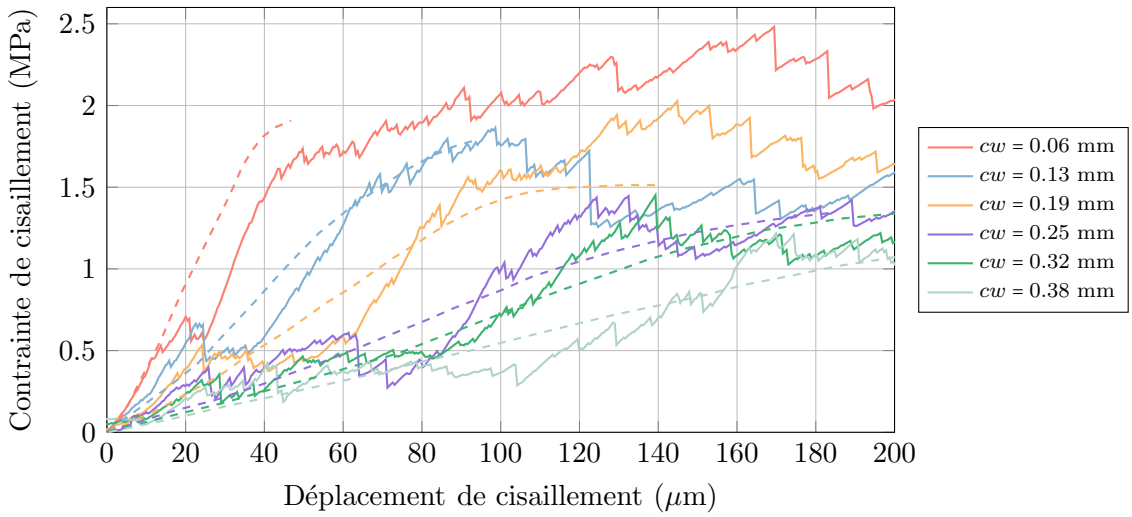


FIGURE 3.25: Réponse à l'essai de cisaillement de Fenwick et Paulay [1968] : expérimental (pointillé), simulation (plein).

Il semble peu probable que le modèle discret reproduise correctement le phénomène d'*aggregate interlocking* sans l'usage de particules polygonales. Ce phénomène peut être observé en figure 3.26 dans les zones mises en évidence par les pointillés. Un ensemble de particules, initialement attaché à la partie gauche de l'éprouvette, est en contact avec la partie droite et assure le transfert des contraintes dans la fissure.

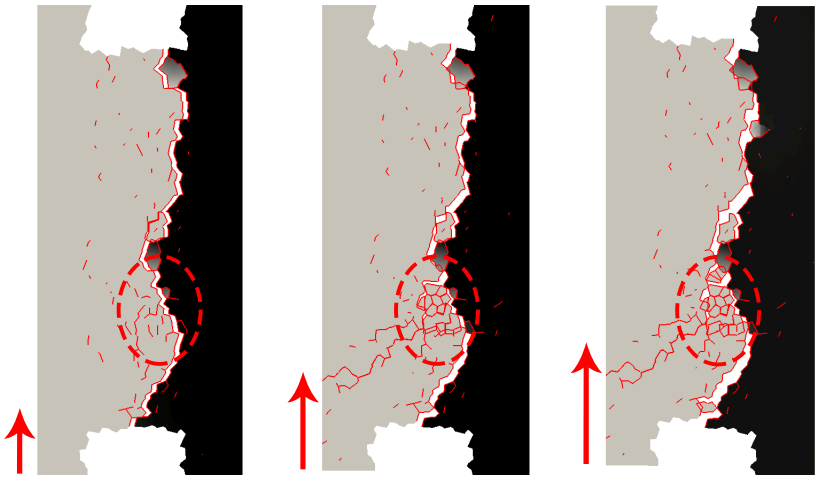


FIGURE 3.26: Agrandissement de la zone pré-fissurée pour une ouverture de fissure imposée à $cw = 0.00006$ mm.

Cependant, les points de contact entre les deux parties de l'éprouvette sont peu nom-

breux. Des concentrations de contraintes sont alors induites en ces points. L'ensemble de particules mis en relief par les pointillés voit la totalité des poutres le reliant au reste du *lattice* se rompre, il se retrouve détaché. La restriction imposée sur le déplacement d'une partie de l'éprouvette par l'autre est donc levée, la partie de gauche peut ainsi glisser librement vis-à-vis de la partie droite.

Concernant le faciès de fissuration de l'éprouvette dans sa totalité (fig. 3.27), la simulation est qualitativement similaire à l'expérience (fig. 3.24). En effet, les fissures secondaires verticales sont reproduites, tout comme les fissures primaires diagonales.

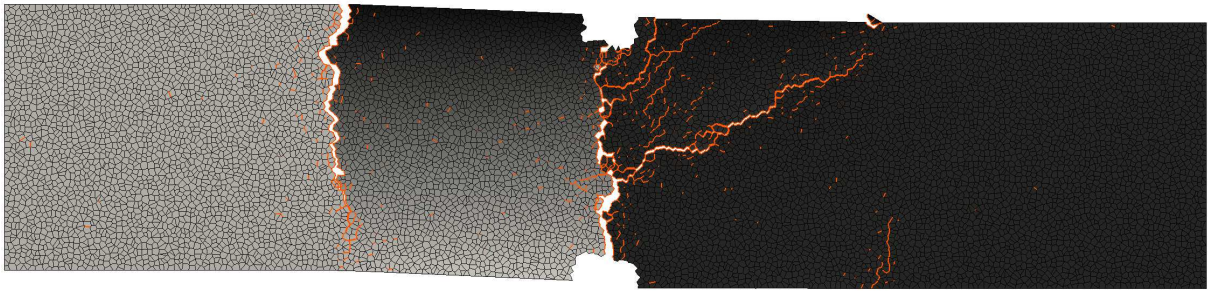


FIGURE 3.27: Faciès de fissuration pour une ouverture de fissure imposée à $cw = 0.00032$ mm.

5 Étude de l'efficacité de l'algorithme de résolution

L'objectif de cette section est de valider sur une simulation entière l'efficacité du schéma de résolution numérique proposé au chapitre 2, lors duquel il n'a été validé que localement. Un essai de compression uni-axial est retenu pour mettre en avant les qualités du schéma de résolution proposé. L'essai de compression possède l'intérêt de provoquer simultanément les non-linéarités de contact et de rupture. Ainsi un schéma classique de type *Saw-Tooth* risque de s'avérer instable. Les résultats obtenus par les deux types de schéma de résolution sont comparés.

Les simulations sont réalisées pour différentes tailles d'incrément de déformation normale $\Delta\epsilon$. Les tailles d'incrément testées sont définies de manière à être capable de suivre les non-linéarités de la réponse en compression. Par ailleurs, des tailles d'incréments excessivement fines ne sont pas étudiées, les coûts de calculs en termes de temps et de mémoire étant trop importants. Un récapitulatif des coûts de calculs est proposé en figure 3.32a. Les simulations sont donc réalisées pour les tailles d'incrément de déformation imposée suivants : $\Delta\epsilon = 7.10^{-5}$, $\Delta\epsilon = 7.10^{-6}$, $\Delta\epsilon = 7.10^{-7}$, $\Delta\epsilon = 7.10^{-8}$.

Il est à noter que les simulations sont réalisées sur dix tirages de maillage et des seuils de rupture, les résultats scalaires proposés en sont une moyenne.

L'essai de compression avec contact direct entre l'éprouvette et les supports de chargement, réalisé par Vonk [1992] sur un cube de béton de 0.1 m de côté est utilisé comme référence. La réponse du matériau présente l'intérêt de se prolonger longtemps après le pic de chargement, là où les non-linéarités de contact et de rupture sont prédominantes. Les conditions aux limites appliquées pour simuler l'essai de compression uni-axiale de la campagne de Grégoire et al. [2013] sont conservées. Néanmoins, une fois de plus il a été nécessaire d'ajuster le module de Young $\bar{E}$ des poutres du *lattice* en fonction du module de Young macroscopique et le facteur d'échelle de la distribution du seuil de rupture en extension $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ en fonction du pic de résistance. Le jeu de paramètres ajusté est valable pour les deux schémas comparés. L'ensemble des paramètres matériaux utilisés pour les simulations de l'essai de compression uni-axial de Vonk [1992] est résumé dans le tableau 3.4.

l_p (m)	α	$\bar{E}$ (GPa)	$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	$\lambda_{\theta_{cr}}$	k	μ
0.002	0.83	48	3.57 10^{-4}	1.85 10^{-3}	1.4	0.7

Table 3.4: Valeur des paramètres identifiés sur le béton de Vonk [1992].

Lors des simulations, plusieurs résultats sont analysés :

- L'évolution de la contrainte normale en fonction de la déformation normale.
- L'évolution de l'énergie dissipée par fissuration E_F^d en fonction du pseudo-temps calculée incrémentalement selon Rinaldi et Lai [2007], comme suit :

$$E_F^{d,t+1} = E_F^{d,t} + \frac{1}{2}\left({}^T\underline{u}^{t+1}.\underline{\underline{K}}_{coh}^t.\underline{u}^t \quad - \quad {}^T\underline{u}^t.\underline{\underline{K}}_{coh}^{t+1}.\underline{u}^{t+1}\right) \tag{3.1}$$

- L'évolution de l'énergie dissipée par friction E_μ^d en fonction du pseudo-temps calculée incrémentalement par la méthode des trapèzes, comme suit :

$$E_\mu^{d,t+1} = E_\mu^{d,t} + \sum_{i=1,\dots,n_{particules}} \left[\sum_{j=1,\dots,n_{contact}^i} \frac{1}{2}\left({}^T\left(\underline{F}_{fric,ij}^{t+1} + \underline{F}_{fric,ij}^t\right).\left(\Delta\delta u_{s,ij}\underline{t}_{c,ij}\right)^{t+1}\right)\right] \tag{3.2}$$

  avec $n_{contact}^i$ le nombre de contacts détectés sur la particule i.
- Le faciès de fissuration.

D'un côté, les trois premiers résultats procurent une information globale quantitative sur la réponse simulée. Les énergies dissipées permettent d'étudier spécifiquement l'efficacité des schémas de résolution vis-à-vis de chaque mécanisme non-linéaire, en distinguant la rupture du contact frottant. D'un autre côté, les faciès de fissuration procurent une information locale qualitative, et permettent d'évaluer le réalisme physique de la réponse simulée.

La réponse expérimentale en compression uni-axiale est relativement ductile (fig. 3.28). À paramètres identifiés, la réponse obtenue reste toutefois fortement dépendante du

schéma de résolution choisi. Quelle que soit la taille de l'incrément de chargement, les réponses obtenues par l'intermédiaire du schéma explicite sont visiblement trop fragiles, la dégradation complète de l'éprouvette intervient rapidement après avoir le pic de résistance. Au contraire les réponses obtenues avec le schéma implicite sont plus ductiles. Les réponses du schéma explicite, pour différents incréments de déformation, sont relativement proches, les pics de résistance sont identiques et la dégradation complète est toujours observée dans un intervalle restreint de déformation allant de $3.5.10^{-3}$ à $4.5.10^{-3}$. Bien que des problèmes de convergence ne soient pas observés, à haut niveau de déformation de l'éprouvette, les réponses obtenues par le schéma explicite restent éloignées des réponses obtenues par le schéma implicite ou expérimentalement.

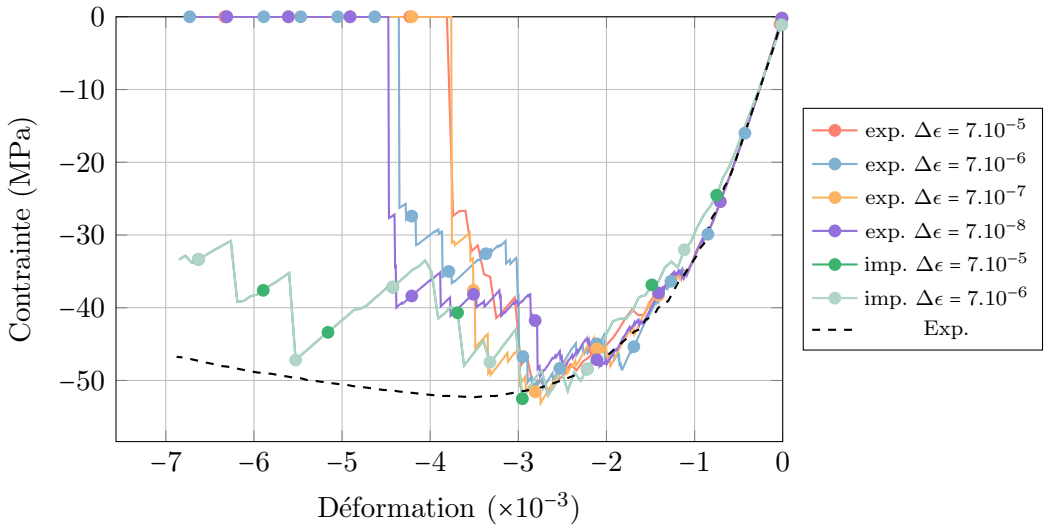
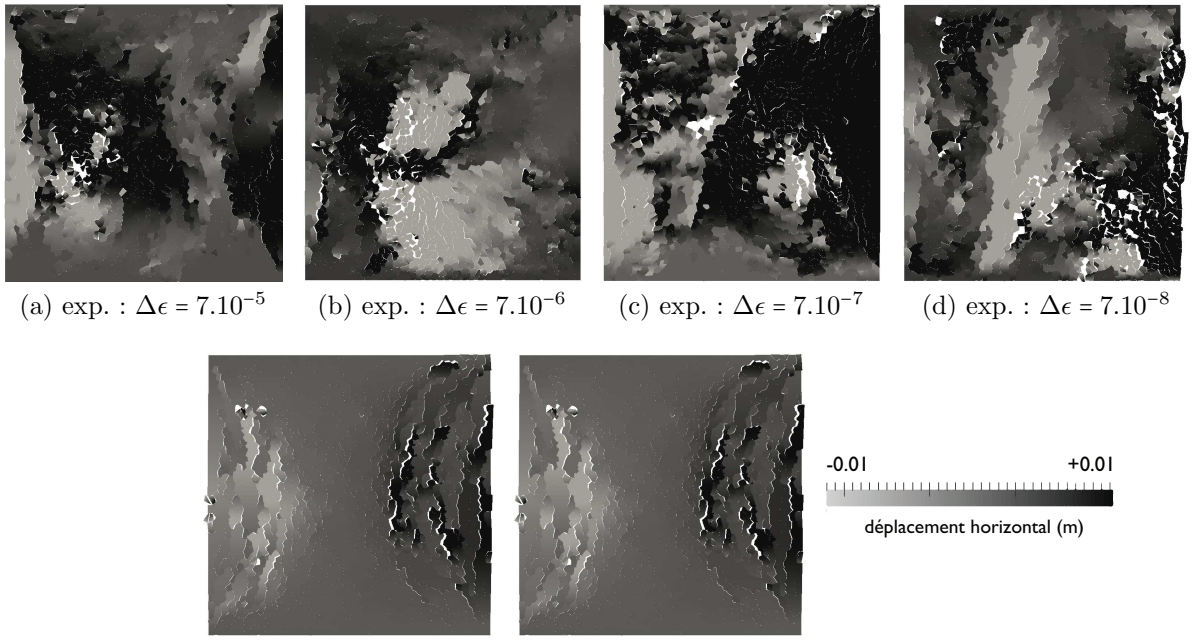


FIGURE 3.28: Influence de l'incrément de chargement sur la réponse en compression uniaxiale.

Les simulations réalisées à l'aide d'un schéma de résolution explicite affichent une dissipation énergétique par fissuration plus importante que celles réalisées avec un schéma implicite (fig. 3.30). Les faciès de fissurations observés en fin de simulation (fig. 3.29) montrent que dans le cas d'une résolution explicite la propagation des fissures est irrégulière et désordonnée du fait de la rupture fragile des éprouvettes, alors que dans le cas d'une résolution implicite, la propagation des fissures est classique des essais de compression avec supports adhérents. Les éprouvettes simulées avec un schéma explicite semblent avoir rompu entièrement sans localisation particulière de la fissuration, ce qui expliquerait la quantité plus importante d'énergie dissipée par fissuration.

En parallèle, la réponse post-pic des éprouvettes simulées avec un schéma explicite étant quelque peu chaotique, de la friction est potentiellement induite dans l'intégralité de l'éprouvette. Il semble donc raisonnable de conclure que les énergies dissipées par friction sont complètement faussées (fig.3.31).



(a) exp. : $\Delta\epsilon = 7.10^{-5}$ (b) exp. : $\Delta\epsilon = 7.10^{-6}$ (c) exp. : $\Delta\epsilon = 7.10^{-7}$ (d) exp. : $\Delta\epsilon = 7.10^{-8}$

(e) imp. : $\Delta\epsilon = 7.10^{-5}$ (f) imp. : $\Delta\epsilon = 7.10^{-6}$

FIGURE 3.29: Influence de l'incrément de chargement sur le faciès de fissuration en compression uni-axiale.

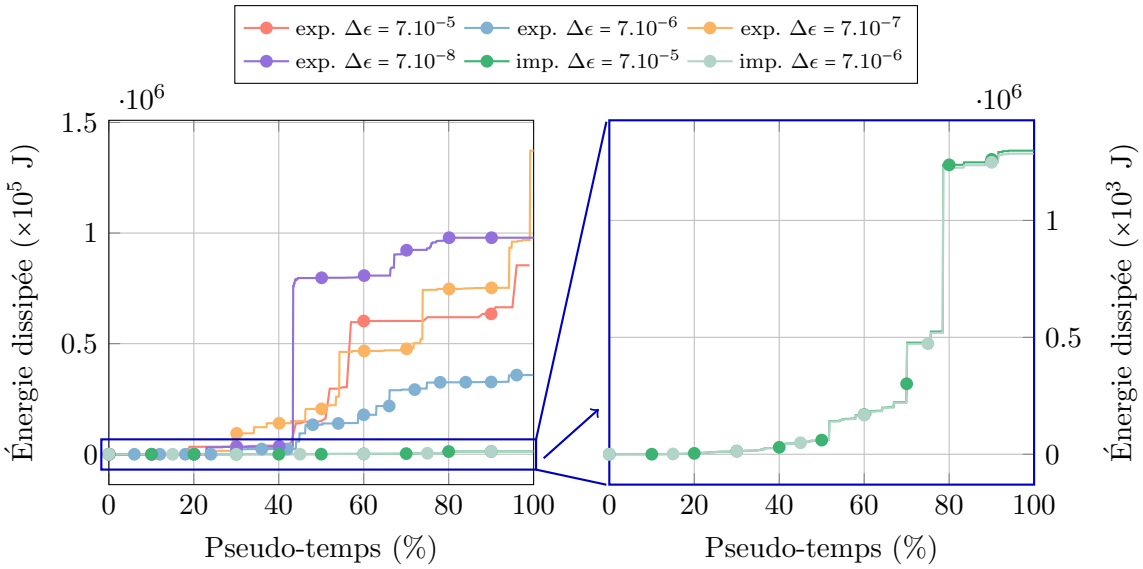


FIGURE 3.30: Influence de l'incrément de chargement sur l'énergie dissipée par fissuration en compression uni-axiale.

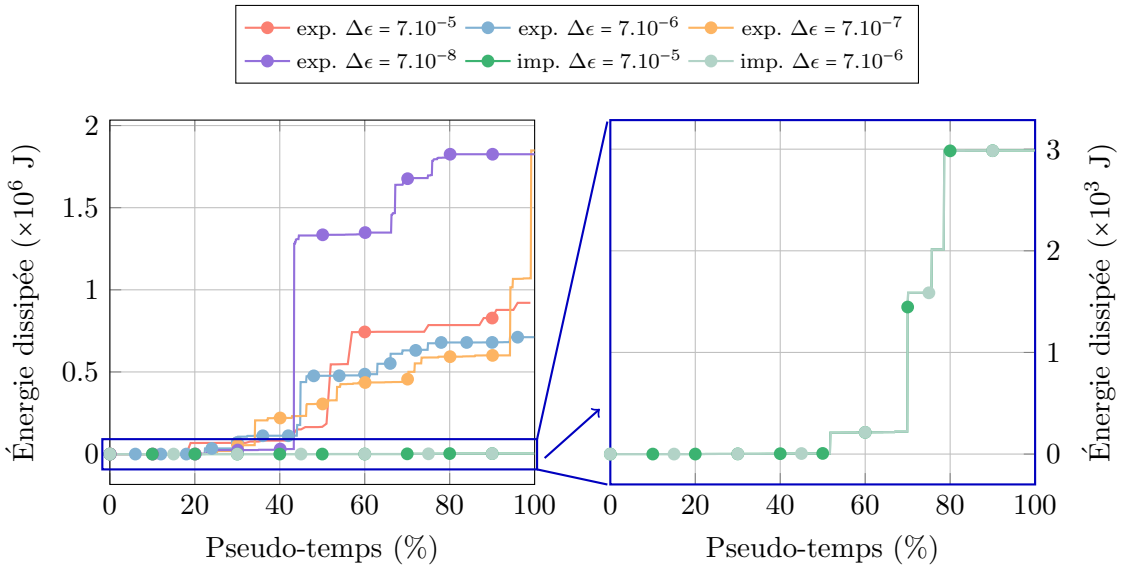
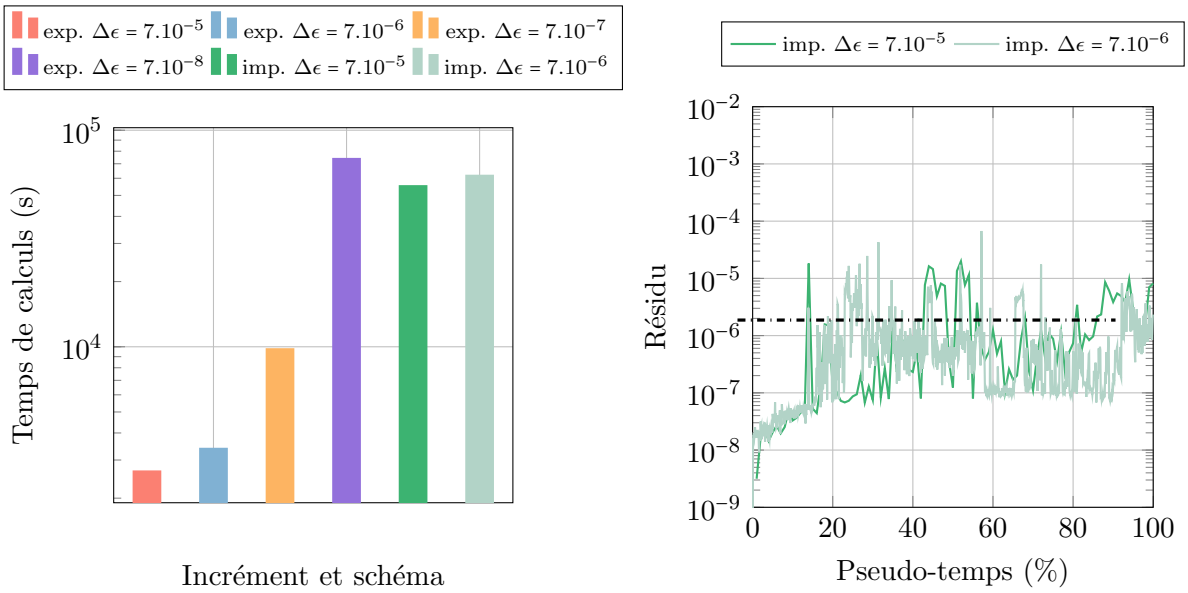


FIGURE 3.31: Influence de l'incrément de chargement sur l'énergie dissipée par friction en compression uni-axiale.

Les difficultés de résolution numérique de l'équilibre lors de la simulation d'un essai de compression peuvent s'expliquer de la manière suivante. D'abord, lors de la phase de fissuration diffuse, le mécanisme de rupture est prédominant, cependant après la coalescence de la micro-fissuration diffuse en fissures macroscopiques colinéaires à la direction du chargement, les mécanismes de rupture et de contact interagissent fortement. La propagation des fissures macroscopiques est alors hautement influencée par le mécanisme de contact frottant intervenant aux surfaces des fissures. En conséquence, si le mécanisme de contact frottant n'est pas correctement intégré, les conséquences sont directement observées sur les faciès de fissuration et la réponse post-pic de l'éprouvette. D'autant plus qu'un nombre important de contact est initié et que, comme il a été remarqué lors de la mise en place du schéma de résolution implicite (sec. 4), les efforts de contact frottant peuvent être rapidement mal évaluées si une attention particulière n'est pas portée sur la résolution de l'équilibre

Dans le cas présent de l'essai de compression, la nécessité d'avoir recours à un schéma de résolution numérique ne se fait pas sentir par un besoin de limiter les temps de calculs. La résolution implicite est presque aussi longue que la résolution explicite avec un incrément de chargement $\Delta\epsilon = 1.10^{-8}$. Néanmoins l'utilisation de la résolution implicite reste inévitable pour des essais de compression, si la réponse complète d'éprouvettes de matériau quasi-fragile doit pouvoir être suivie jusqu'à la rupture. Le faible caractère quantitatif de l'estimation des efforts de contact frottant dû à la résolution explicite, conduit à une perte complète du caractère qualitatif de la réponse simulée, ce qui se manifeste par une rupture irréaliste et fragile de l'éprouvette. Une résolution itérative de l'équilibre des forces semble indispensable pour corriger les problèmes d'oscillations, générées par les non-linéarités comportementales liées à l'initiation de contacts et amplifiées par l'absence

d'amortissement visqueux. D'ailleurs, en plus d'une convergence inconditionnelle et d'une meilleure précision des résultats, le schéma de résolution implicite ne présente pas de soucis de robustesse, le résidu n'excède que rarement la valeur de 10^{-5} (fig.3.32b).



(a) Temps de calculs (b) Résidu

FIGURE 3.32: Influence de l'incrément de chargement sur le temps de calculs et sur le résidu.

6 Expérimentation numérique en traction cyclique uni-axiale

Un essai de traction uni-axiale cyclique est une succession de cycles constitués d'une phase de charge en traction, donnant lieu à l'initiation et à la propagation de la fissuration, et d'une phase de décharge jusqu'à un niveau de compression suffisant pour observer la fermeture complète de l'ensemble des fissures développées lors des phases de charge, autrement dit la reprise totale de raideur de l'éprouvette de matériau sollicitée. Le chargement est imposé en déplacement et appliqué à l'extrémité supérieure de l'éprouvette (fig. 3.33). La déformation totale résultante imposée suit une évolution telle que celles proposées en figure 3.34.

Les résultats disponibles dans la littérature pour un essai de traction cyclique avec fermeture complète de la fissuration restent rares, étant donné la complexité de leur réalisation [Reinhardt et Cornelissen, 1984; Nouailletas, 2013]. Ainsi l'analyse des résultats reste avant tout qualitative.

Les récents essais de traction cyclique effectués par Nouailletas [2013] sont utilisés comme

référence (fig. 3.35a) pour les simulations à venir. L'éprouvette sollicitée est un prisme de 0.3m de hauteur, de 0.15 m de largeur, et 0.05 m d'épaisseur, entaillé à mi-hauteur sur toute l'épaisseur afin de localiser la macro-fissuration (fig. 3.33). Une taille de particule de 0.002 m est, à nouveau, retenue. Les paramètres du modèle discret sont ajustés pour retrouver les propriétés de la gâchée de béton mesurées au préalable, au moyen d'essais standard par Nouailletas [2013]. Le module de Young et la résistance en traction du matériau à retrouver sont respectivement égaux à 37 GPa et 3 MPa. Étant donné l'objectif d'étudier le comportement cyclique, l'accent est mis sur la reproduction de la dégradation de l'éprouvette observée expérimentalement, afin de s'affranchir autant que possible d'un biais induit par des états de fissuration différents entre l'expérience et la simulation.

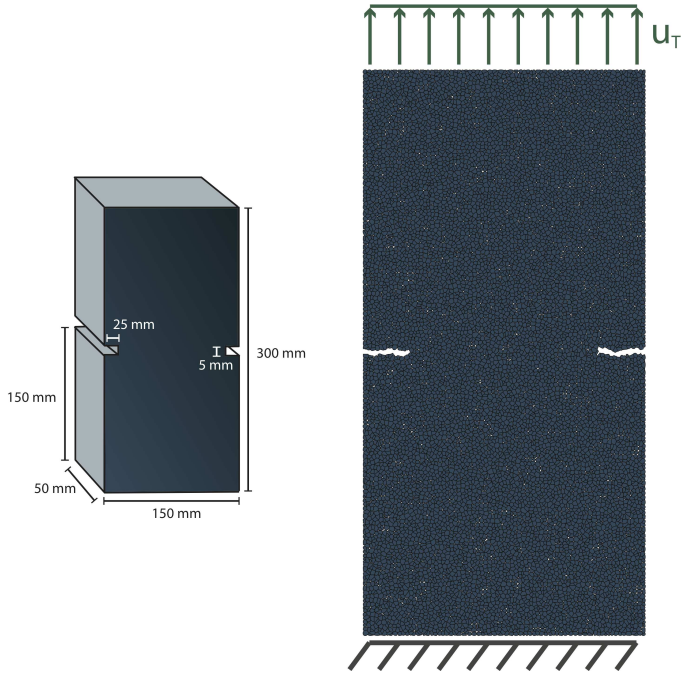


FIGURE 3.33: Dimensions, modélisation de l'essai de traction cyclique uni-axial de Nouailletas [2013].

L'ensemble des paramètres matériaux utilisés pour les simulations de la campagne d'essais de Nouailletas [2013] est résumé dans le tableau 3.5.

l_p (m)	α	$\bar{E}$ (GPa)	$\lambda_{\epsilon_{cr}}$	$\lambda_{\theta_{cr}}$	k	μ
0.002	0.83	37.5	4.45 10^{-4}	1.85 10^{-3}	1.4	0.7

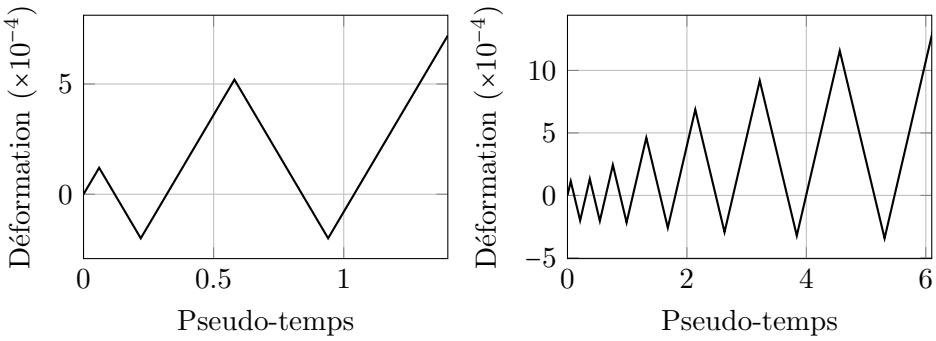
TABLE 3.5: Valeur des paramètres identifiés sur le béton de la campagne d'essais de Nouailletas [2013].

La simulation d'un essai de traction cyclique uni-axiale avec le modèle discret est l'occasion d'explorer les hypothèses justifiant l'apparition d'incompatibilités géométriques

des surfaces de fissures, présentées auparavant (voir chapitre 1). Une validation quantitative de l'hypothèse retenue est proposée. Il est peu probable que des incompatibilités géométriques se manifestent avec le modèle discret, tel qu'il a été développé, lors de la simulation d'un chargement cyclique de traction pure. L'introduction de perturbations représentatives des hypothèses mentionnées semble nécessaire.

Deux types de perturbations sont introduites. La première, dite globale, est induite par un biais expérimental, les conditions aux limites n'induisent pas de la traction pure. La seconde, dite locale, est la conséquence de la relaxation, par fissuration, d'un champ de contraintes hétérogène auto-équilibré interne à l'éprouvette, causé par le retrait au jeune âge ou la présence partielle d'eau libre dans les pores du matériau.

L'hypothèse d'incompatibilités géométriques engendrées par la présence de débris de matériau, détachés de l'éprouvette, dans les fissures n'est pas étudiée. Compte tenu de la formulation du modèle discret dans un cadre quasi-statique, l'étude du mouvement de ces débris n'est pas possible (voir chapitre 2).



(a) simulations comparatives (b) simulation complète

FIGURE 3.34: Trajets de chargement en déformation imposées.

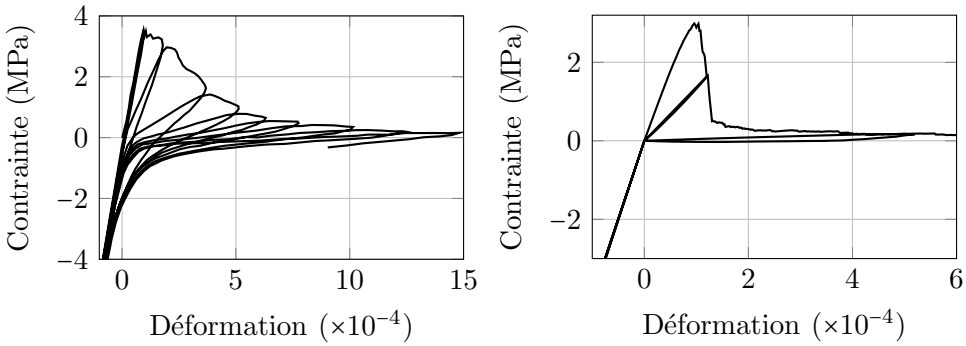
Dans un premier temps, les deux hypothèses sont donc étudiées en simulant la réponse de l'éprouvette entaillée soumise à deux cycles de chargement d'amplitude croissante (fig. 3.34a). L'objectif est de tirer des conclusions qualitatives quant à l'hypothèse justificative la plus réaliste. Pour alimenter l'étude comparative, l'évolution de la contrainte globale en fonction de la déformation globale de l'éprouvette est analysée et mise en rapport avec les observations expérimentales. L'évolution du nombre de contacts détectés à chaque instant, traduisant la quantité de fissures fermées, et de l'énergie dissipée par friction (voir l'équation 3.2 pour le calcul), quantifiant l'implication du mécanisme de friction activé en surface de fissure, tout au long de l'application du chargement sont aussi fournies.

Dans un second temps, le chargement complet appliqué par Nouailletas [2013] est simulé. L'éprouvette est soumise à 9 cycles de charge-décharge (fig. 3.34b), tout en introduisant le type de perturbation retenu de manière quantitative.

6.1 Étude de l'influence d'une perturbation

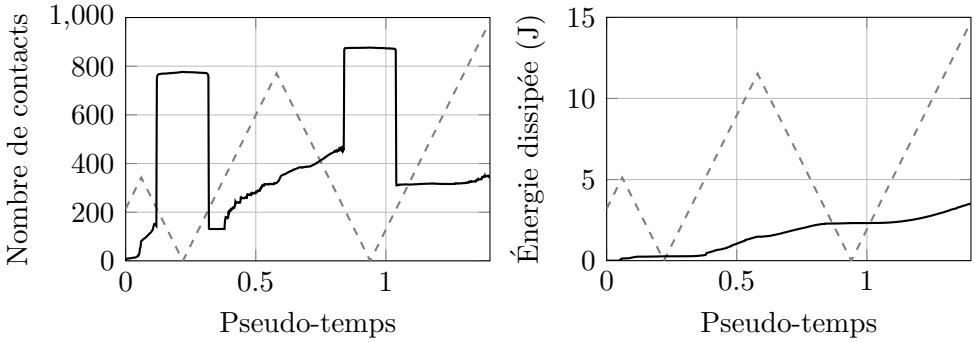
6.1.1 Sans perturbation

Avant d'explorer les conséquences de l'introduction de chaque perturbation, une simulation de référence est menée en l'absence de contraintes internes initiales et pour un chargement cyclique de traction pure (fig. 3.33). Les résultats sont présentés en figures 3.35b, 3.36a, 3.36b.



(a) expérimental [Nouailletas, 2013] (b) sans perturbation

FIGURE 3.35: Réponse d'un essai uni-axial cyclique.



(a) nombres de contacts (b) énergie dissipée

FIGURE 3.36: Évolutions de l'énergie dissipée par friction et du nombre de contacts au cours d'un essai uni-axial cyclique simulé sans perturbation.

6.1.2 Perturbation globale

La première perturbation étudiée est d'ordre expérimental. La perturbation est globale et affecte les conditions aux limites de l'essai. Il peut s'agir d'un désalignement du vérin appliquant le chargement, ce qui engendre un décalage horizontal des parties inférieure et

supérieure de l'éprouvette, une fois la fissuration localisée ; ou encore, d'une rotation de la partie supérieure de l'éprouvette causée par une fissuration asymétrique.

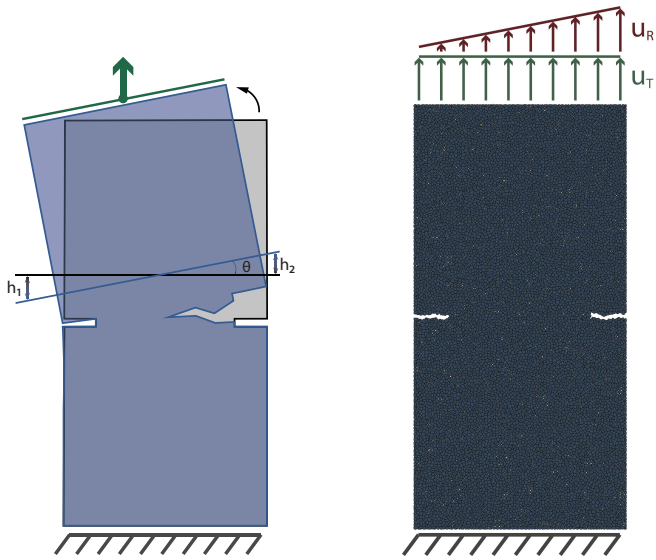
Dans le cas présent, une rotation est introduite, car elle a été observée expérimentalement par Nouailletas [2013] (fig. 3.43). Néanmoins, pour avoir été simulé, un désalignement du vérin conduit à des résultats très similaires aux résultats qui vont suivre. La rotation est simulée en appliquant un gradient linéaire de déplacement vertical dans la largeur l de l'éprouvette (fig. 3.37b). Le gradient de déplacement est lié à l'angle de rotation θ de la partie supérieure de l'éprouvette par la relation :

$$\theta = arctan\left(\frac{h_2 - h_1}{l}\right) = arctan\left(\frac{u_R}{l}\right) \tag{3.3}$$

La rotation est appliquée proportionnellement au déplacement de traction pure imposé u_T, lors de chaque phase de charge. L'incrément de rotation est calculé de la manière suivante :

$$\Delta\theta = arctan\left(\frac{\Delta u_R}{l}\right) = arctan\left(\frac{\alpha \Delta u_T}{l}\right) \tag{3.4}$$

En faisant varier le coefficient de proportionnalité α, une analyse de sensibilité est menée au niveau de rotation θ_{max} atteint à la fin de la seconde phase de charge. À titre d'exemple, en prenant $\alpha = 0.1$ et une déformation à la fin de la seconde phase de charge égale à $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$, il vient $\theta_{max} \simeq 0.0057°$.



(a) rotation expérimentale (b) rotation simulée

FIGURE 3.37: Configuration d'un essai uni-axial cyclique avec une rotation de l'éprouvette.

Les résultats sont présentés en figures 3.38, 3.39a, 3.39b.

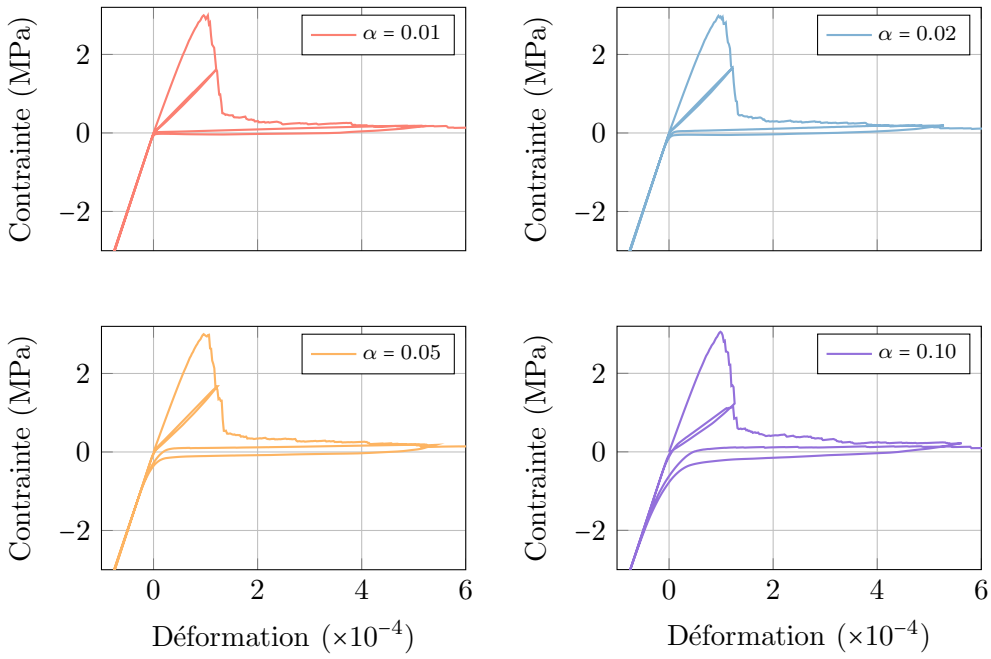
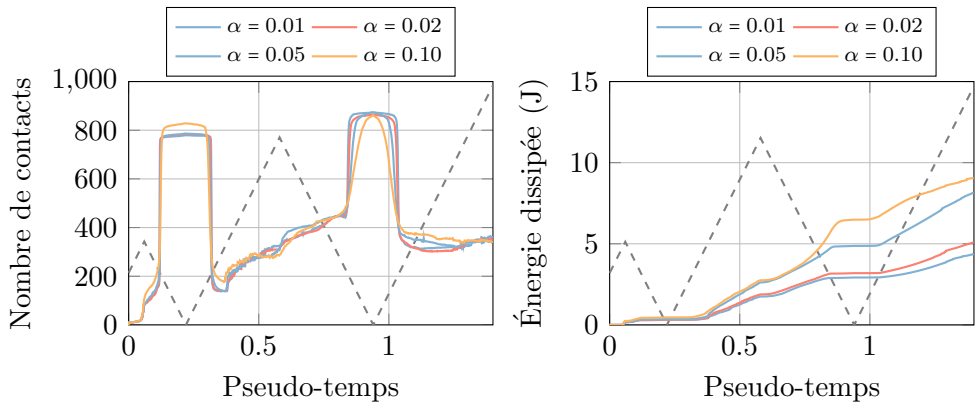


FIGURE 3.38: Réponse simulée lors d'un essai uni-axial cyclique avec une rotation de l'éprouvette.



(a) nombres de contacts (b) énergie dissipée

FIGURE 3.39: Évolutions de l'énergie dissipée par friction et du nombre de contacts au cours d'un essai uni-axial cyclique simulé avec une rotation de l'éprouvette.

6.1.3 Perturbation locale

La seconde perturbation étudiée est d'ordre poromécanique. Qu'il s'agisse du retrait au jeune âge ou de la présence partielle d'eau libre, un champ de contraintes interne à

l'éprouvette est induit. Ce champ est en équilibre initialement et hétérogène, du fait de la mésostructure du matériau (voir chapitre 1, fig. 1.13).

La propagation de la fissuration rompt l'équilibre de ce champ de contraintes. Une fissure étant constituée d'un couple de surfaces libres de contraintes, les contraintes initialement présentes sont relaxées. La mésostructure du matériau se déforme alors de manière permanente pour retrouver son équilibre, et la topologie des surfaces des fissures est perturbée.

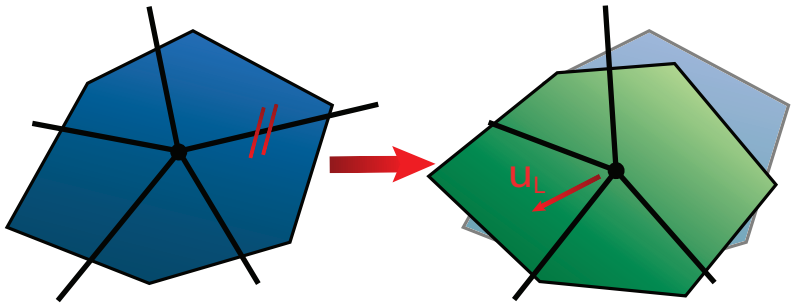


FIGURE 3.40: Schématisation de la conséquence de la relaxation, induite par fissuration, de contraintes internes auto-équilibrées.

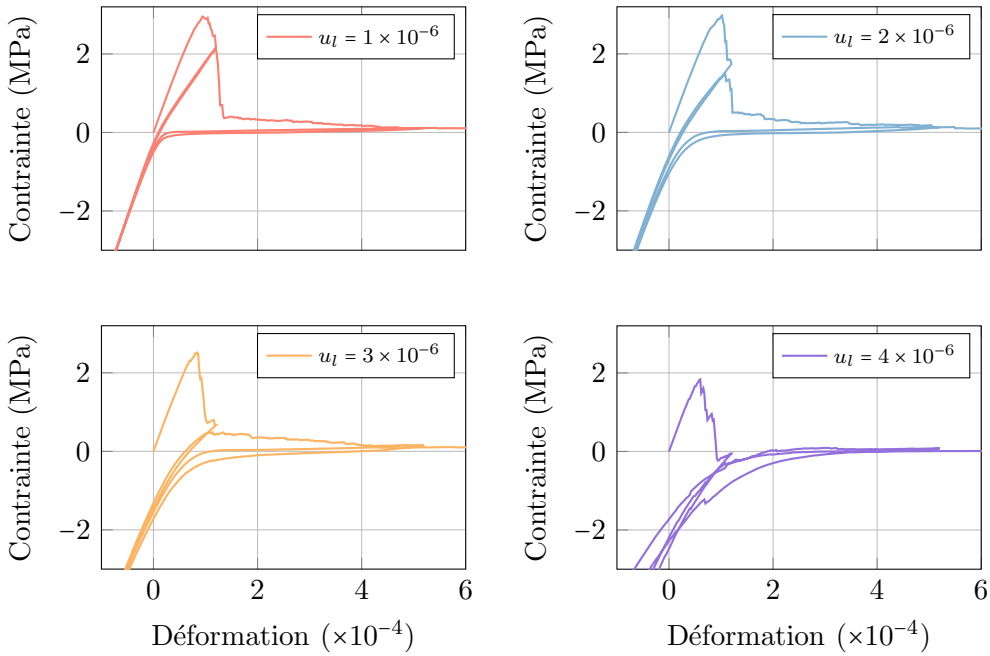
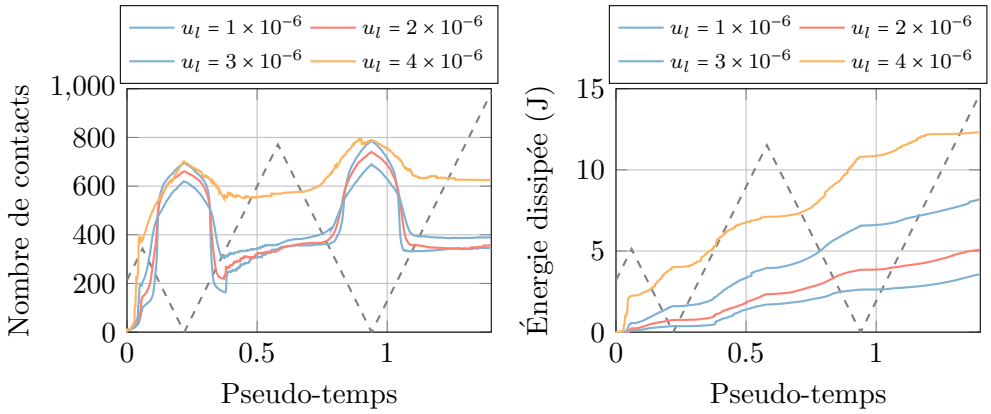


FIGURE 3.41: Réponse simulée lors d'un essai uni-axial cyclique avec une perturbation locale.

Seule la conséquence de ce mécanisme sur le mouvement des particules du modèle discret est simulée. Autrement dit, lorsqu'une poutre du *lattice* rompt, les deux particules ancien-

nement liées subissent un mouvement, dont l'amplitude, la direction et le sens sont corrélés au champ de contraintes internes initial. Par soucis de simplicité, la direction et le sens sont considérés aléatoires et l'amplitude suit une distribution statistique équiprobable dans l'intervalle de valeurs défini par $[0; u_L]$. Aucune rotation des particules n'est appliquée, celle-ci n'ayant qu'une faible influence. Le procédé mis en place est schématisé en figure 3.40.

Les résultats sont présentés en figures 3.41, 3.42a, 3.42b.



(a) nombres de contacts (b) énergie dissipée

FIGURE 3.42: Évolutions de l'énergie dissipée par friction et du nombre de contacts au cours d'un essai uni-axial cyclique simulé avec une perturbation locale.

6.1.4 Discussion des résultats

La simulation de deux cycles de chargement de traction sans introduire de perturbation conduit à une réponse de l'éprouvette peu satisfaisante (fig. 3.35b). Parmi l'ensemble des phénomènes observés expérimentalement sous chargement cyclique, seul l'effet unilatéral est reproduit, et n'est d'ailleurs pas progressif. L'évolution du nombre de contacts lors de l'essai (fig. 3.36a) subit deux sauts de valeurs importants, chacun correspondant à la fermeture suivie de l'ouverture simultanée d'une grande majorité des fissures formées. L'évolution de l'énergie dissipée par friction (fig. 3.36b), analysée conjointement à l'évolution du nombre de contacts lors de l'essai, montre que lorsque la majorité des fissures sont fermées aucune énergie n'est dissipée. Par contre, une certaine dissipation est observée en fin de charge et début de décharge du second cycle, instant auquel le nombre de contacts augmente progressivement. Le niveau d'effort normal dans les fissures est alors suffisamment faible pour permettre le glissement frottant. Sur la réponse de l'éprouvette (fig. 3.35b), il peut d'ailleurs être observé la formation d'une boucle d'hystérésis de petite taille à l'instant correspondant (entre la seconde décharge et la troisième charge).

En résumé, sans introduire de perturbation, peu ou pas d'incompatibilités géométriques

des surfaces des fissures sont engendrées. La fermeture des fissures étant simultanée, aucun glissement frottant n'a lieu. L'introduction d'une perturbation semble donc nécessaire afin de différer la fermeture des fissures.

La simulation de deux cycles de chargement de traction en introduisant une perturbation, locale ou globale, conduit à des résultats plus satisfaisants. Pour une amplitude de perturbation suffisamment conséquente, l'ensemble des phénomènes attendus sont observés sur les réponses de l'éprouvette (fig. 3.38 et 3.41). En effet la reprise de raideur, et donc l'effet unilatéral, sont progressifs, et des déformations résiduelles ainsi que des boucles d'hystérésis de taille significative se manifestent. Avec l'augmentation de l'amplitude de la perturbation, les évolutions du nombre de contacts (fig. 3.39a et 3.42a) sont davantage lissées, à tel point que l'évolution ne semble pas saturer vers un plateau, lors de décharges. Par ailleurs, les évolutions de l'énergie dissipée par friction (fig. 3.39b et 3.42b) atteignent des niveaux significativement plus élevés.

Il apparaît qu'une perturbation locale (fig. 3.42a) est plus efficace qu'une perturbation globale (fig. 3.39a) pour différer la fermeture des fissures. En parallèle, les niveaux d'énergie dissipée par friction atteints sont plus élevés avec une perturbation locale (fig. 3.42b) qu'avec une perturbation globale (fig. 3.39b).

Néanmoins, une perturbation locale ne possède qu'un réalisme limité. Pour une amplitude permettant d'observer des boucles d'hystérésis de taille intéressante ($u_L = 3 \times 10^{-6}$ ou $u_L = 4 \times 10^{-6}$) l'introduction de la perturbation affecte par la même occasion le comportement monotone. En effet, la contrainte limite élastique est amoindrie (fig. 3.41). Les incompatibilités géométriques engendrées pour de telles amplitudes de perturbation sont exagérées, il en résulte des concentrations de contraintes irréalistes aux niveau des surfaces des fissures, et une dégradation de l'éprouvette supplémentaire. Il est notamment possible d'observer, pour $u_L = 4 \times 10^{-6}$ des irrégularités de la réponse (fig. 3.41), traduisant l'amorce de nouvelles fissures, même en phase de décharge. Autre témoin d'incompatibilités géométriques exagérées, l'évolution du nombre de contacts (fig. 3.42a), dont la valeur minimale reste anormalement élevée pour une amplitude $u_L = 4 \times 10^{-6}$ par rapport aux évolutions associées à des amplitudes de perturbation moindres.

En conclusion, l'introduction de chacune des perturbations conduit à un comportement sous chargement cyclique plus réaliste. Toutefois, une perturbation globale semble d'autant plus justifiée qu'elle ne dégénère pas le comportement monotone du matériau. Les incompatibilités géométriques ne sont pas amplifiées au point d'induire une fissuration parasite.

6.2 Simulation d'un essai complet avec rotation de l'éprouvette

Suite à l'étude comparative menée, le chargement complet de l'essai mis en place par Nouailletas [2013] est simulé en considérant une perturbation induite par rotation de la partie supérieure de l'éprouvette.

Expérimentalement, Nouailletas [2013] a mesuré la rotation du support supérieur de son éprouvette au cours de chaque cycle. La valeur de l'incrément de rotation est déterminé de manière à ce qu'à la fin de chaque phase de charge, la rotation simulée soit équivalente à la rotation mesurée par Nouailletas [2013] (fig. 3.43).

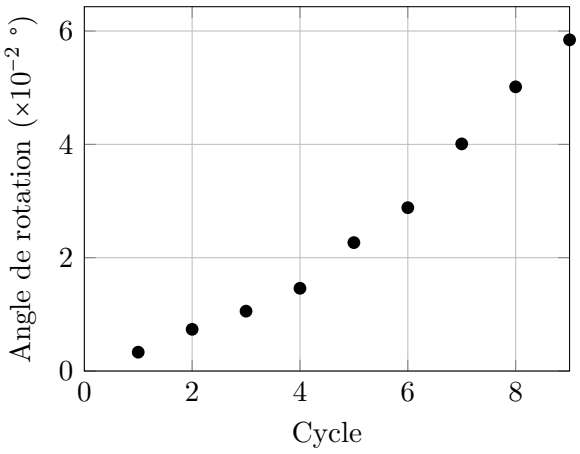


FIGURE 3.43: Évolution de la rotation maximale de la partie supérieure de l'éprouvette en fonction des cycles de charge-décharge d'après Nouailletas [2013].

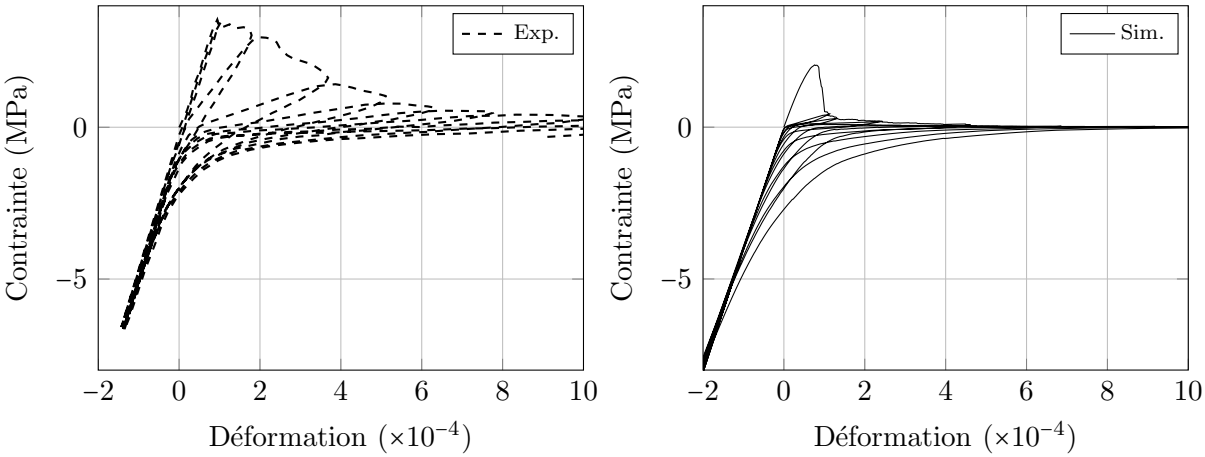


FIGURE 3.44: Réponse complète simulée lors d'un essai uni-axial cyclique avec une rotation de l'éprouvette quantifiée par Nouailletas [2013].

La réponse complète de l'éprouvette simulée est présentée en figure (fig. 3.44). Il est intéressant de noter la proximité de la réponse obtenue et de la réponse expérimentale (fig. 3.35a) pour des niveaux de rotation de la partie supérieure de l'éprouvette quantitativement identiques.

7 Synthèse

Une procédure d'identification générale du modèle discret a été proposée. Comme souhaité, elle reste simple et nécessite peu d'essais. Les trois paramètres contrôlant la rupture peuvent être idéalement identifiés à partir de deux essais, sollicitant des modes de fissuration différents. Ainsi, l'identification du modèle a été réalisée et a été validée sur plusieurs essais issus d'une même campagne. Un essai de flexion trois-points a été utilisé afin d'évaluer les paramètres k et $\lambda_{\epsilon_{cr}}$ contrôlant l'énergie de fissuration, et la résistance en fissuration en mode I du matériau. Puis un essai de fendage a été utilisé, moins adapté, mais affichant tout de même une certaine sensibilité au paramètre $\lambda_{\theta_{cr}}$ contrôlant plutôt la résistance en mode II du matériau. Les paramètre identifiés ont permis de retrouver, de manière prédictive, les résultats expérimentaux relatifs aux effets d'échelles et de forme, sans modifications. En compression, des résultats quantitatifs ont aussi été retrouvés, mais dans ce cas particulier les conditions aux limites de l'essai ont dû être ajustées, car indéterminées. Les simulations n'ont donc pu être qualifiées de prédictives.

Pareillement, les simulations cherchant à valider le comportement du modèle discret sous des modes de fissuration complexes (mixte I/II et II) ont fourni des résultats satisfaisants, mais ont, cette fois-ci, requis une identification nouvelle de certains paramètres pour s'adapter au béton utilisé. Les résultats d'essais de caractérisation pour ces bétons n'étant pas fournis, comme c'est d'ailleurs rarement le cas lors de campagnes d'essais complexes, une analyse inverse a dû être conduite pour procéder à l'identification. Pour ces campagnes d'essais le caractère qualitatif du modèle discret a donc été validé, mais le caractère prédictif ne l'a été que partiellement, par la reproduction de la réponse expérimentale dans des configurations de chargement alternatives.

L'étude de la performance de l'algorithme de résolution développé, en termes de qualité des résultats plus qu'en termes d'efficacité numérique, a ensuite été menée. Des résultats représentatifs de l'échelle macroscopique (réponses et énergies dissipées) ainsi que de l'échelle locale (faciès de fissuration) ont affiché une stabilité supérieure lorsque l'algorithme implicite a été utilisé. Cette étude a ainsi confirmé que le choix effectué concernant une résolution implicite, et surtout concernant le prédicteur linéaire des efforts de contact, est d'un intérêt non-négligeable dans le contexte de simulations quasi-statiques. Cet aspect est particulièrement important pour la suite du travail, car dans l'objectif de procéder à une identification numérique du modèle continu, il est nécessaire que les résultats fournis par le modèle discret soient quantitatifs.

La confiance ainsi accordée au modèle discret, tant au niveau de la représentativité des mécanismes de rupture, qu'au niveau de la résolution numérique de l'équilibre, a permis d'en faire une première utilisation comme outil d'expérimentation numérique. La simulation d'un essai de traction cyclique uni-axiale a alors été entreprise. Il n'a pas été possible de reproduire les effets hystérétiques en simulant l'essai avec le modèle tel quel. Le mécanisme physique expliquant leur origine, et plus spécifiquement l'origine d'une incompatibilité géométrique des surfaces d'une fissure, était donc nécessairement absent. De

ce constat, deux explications ont été envisagées, et les mécanismes associés ont été introduits. D'un côté, une incompatibilité géométrique induite localement, par les conséquences supposées de la relaxation d'un champ de contraintes initial interne, induit par exemple par la présence d'eau libre ou par les effets du retrait au jeune âge. De l'autre côté, une incompatibilité géométrique induite globalement, par une rotation de l'éprouvette lors de l'essai. Au vu des réponses obtenues, et notamment des phénomènes macroscopiques observés pour chaque tentative d'explication, même si la manière dont elles ont été introduite est discutable, une incompatibilité associée à une rotation de l'éprouvette semble plus réaliste. Cette observation a d'ailleurs été appuyée par une simulation plus réaliste effectuée en introduisant une rotation quantifiée directement d'après les mesures effectuées lors de l'essai en laboratoire.

Dans le chapitre suivant, la formulation du modèle de comportement continu sera proposée notamment en s'appuyant sur une modélisation phénoménologique fondée sur la théorie de l'endommagement et la thermodynamique des processus irréversibles. Ce cadre général sera ensuite précisé, de manière à reproduire des comportements spécifiques caractérisés à l'aide du modèle discret ainsi validé.

Concernant la modélisation continue des phénomènes associés au caractère unilatéral frottant des fissures (effets unilatéral et hystérétiques) les simulations discrètes servant de référence tiendront compte des observations tirées de la courte campagne d'expérimentation numérique sur essai cyclique, et la rotation de l'éprouvette sera donc prise en compte.

Chapitre 4

Formulation et caractérisation d'une modélisation macroscopique

Sommaire

1 Introduction 112

2 État de l'art des approches continues de la fissuration 113

2.1 Initiation et propagation de la fissuration 113

2.2 Fermeture de la fissuration 119

3 Définition d'un formalisme de modélisation continue 129

3.1 Thermodynamique des processus irréversibles 129

3.2 Décomposition de la contrainte totale 132

3.3 Application à la théorie de l'endommagement 133

4 Modélisation de la dégradation de la matrice 138

4.1 Modèle initial 139

4.2 Améliorations 139

4.3 Énergie de fissuration et méthodes de régularisation 141

4.4 Étude comparative des formulations 143

5 Modélisation du caractère unilatéral frottant des fissures 148

5.1 Définition du comportement mécanique des fissures 149

5.2 Caractérisation de la fonction de fermeture 149

5.3 Ajout d'un mécanisme dissipatif 152

5.4 Comportement cyclique sous chargement multi-axial 156

6 Algorithme d'intégration du modèle continu 158

7 Synthèse 160

1 Introduction

L'outil d'expérimentation numérique discret est à présent défini, adapté aux chargements cycliques et multi-axiaux, et validé. L'attention est dorénavant portée sur l'élaboration d'un modèle de comportement macroscopique pour matériaux quasi-fragiles, en vue du calcul de structures sujettes à des sollicitations sismiques. À une telle échelle de modélisation, il devient trop coûteux de chercher à décrire explicitement la fissuration, comme cela peut être le cas avec le modèle discret. Une modélisation continue basée sur la FEM est donc proposée.

L'outil d'expérimentation numérique peut être exploité pour fournir des résultats de référence permettant de caractériser les comportements mécaniques à introduire dans le modèle continu. Afin de préciser les points nécessitant une amélioration et donc une analyse à l'échelle fine, une revue bibliographique des modélisations existantes des phénomènes associés à l'ouverture, mais surtout à la fermeture des fissures est réalisée.

Sur la base de cette revue, un choix de modélisation est effectué. Celui-ci est ancré dans le formalisme des Matériaux Standards Généralisés (MSG) [Halphen et Nguyen, 1975] fondé sur la thermodynamique des processus irréversibles. Des conditions d'admissibilité sont ainsi posées sur les aspects du modèle continu à définir. Une première ébauche des équations du modèle continu est alors proposée. Le comportement mécanique global d'un VER est décomposé en une partie associée au comportement de matériau restant non-fissuré, et une partie associée au comportement des fissures. Les équations permettant de décrire le comportement de chaque partie sont formulées à partir d'essais numériques de caractérisation simulés à l'aide du modèle discret.

Le cas du comportement de la matrice saine décrit par le potentiel Ψ^m est d'abord traité. Les expressions du potentiel de dissipation φ^m et de $\Psi^{m,D}$ contrôlant l'évolution de la variable d'endommagement scalaire sont encore libres de choix. Leurs expressions sont déterminées de manière à améliorer le comportement multi-axial jusqu'à la rupture. Les réponses en cisaillement et en compression sont notamment analysées, mais davantage d'importance est accordée à la première, car il est considéré qu'elle joue un rôle prédominant dans la réponse de structures, notamment celles en béton armé. Il est souvent fait le choix d'identifier les modèles de comportement de manière à obtenir un comportement en traction et en compression satisfaisant. Cependant, les non-linéarités du comportement en compression sont rarement impliquées dans la réponse d'une structure. Au contraire, l'influence du comportement en cisaillement pourrait être davantage significative.

Le cas du comportement des fissures décrit par le potentiel Ψ^f est ensuite abordé. Contrairement à la partie associée au comportement de la matrice saine, l'intégralité du potentiel thermodynamique et des potentiels de dissipations est à définir, il s'agit de deux contributions novatrices de ce travail. L'objectif recherché lors de la formulation du potentiel est l'amélioration de la description des effets hystérétiques, par rapport à des modèles existants tels que le modèle de Richard et Ragueneau [2013]. Il est aussi recherché une

plus grande robustesse, qui n'est à ce jour par garantie par des modélisations de l'effet unilatéral introduisant une discontinuité de la relation de comportement.

À noter, sauf mention du contraire, que tous les résultats discrets présentés dans ce chapitre sont une moyenne arithmétique sur 50 tirages.

2 État de l'art des approches continues de la fissuration

La revue bibliographique suivante est décomposée en deux parties : la première, générale, concernant la modélisation des phénomènes liés à la dégradation induite par l'apparition de la fissuration, sous chargement monotone, et la seconde, plus détaillée, relative aux phénomènes associés au caractère unilatéral frottant de la fissuration, sous chargement cyclique.

2.1 Initiation et propagation de la fissuration

2.1.1 Approche phénoménologique

Une approche phénoménologique consiste à modéliser le comportement mécanique d'un matériau tout en se fondant sur des notions théoriques, conceptuelles, à la différence d'une approche empirique. Historiquement afin de considérer la fissuration tout en développant une modélisation continue, deux théories se sont distinguées : les théories de la plasticité et de l'endommagement. Une grande majorité des modèles constitutifs continus développés peut être associée à l'une des deux théories, si ce n'est les deux.

Les théories de la plasticité et de l'endommagement ont été longuement développées. La théorie de la plasticité introduite initialement pour modéliser le comportement des métaux, a seulement ensuite été appliquée aux matériaux quasi-fragiles [Chen et Chen, 1975]. La théorie de l'endommagement, quant à elle, a été introduite plus récemment [Kachanov, 1958]. Un tel développement de ces théories en fait une base robuste pour la formulation de modèle constitutifs continus. De plus les théories de la plasticité et de l'endommagement sont aisément retranscrites dans le formalisme des MSG, garantissant ainsi le respect des principes fondamentaux de la thermodynamique. Ce formalisme est présenté en section 3.1. Dans le cadre d'une approche phénoménologique, le respect du formalisme des MSG est un atout majeur, car très souvent les modèles issus de ce type d'approche perdent toute justification physique.

Les modèles continus fondés sur les théories de la plasticité ou de l'endommagement sont en réalité similaires, ils ne se distinguent que la manière dont sont réparties dans le milieu continu les déformations inélastiques liées à la fissuration.

Les modèles continus fondés sur la théorie de la plasticité appliqués au béton [Feenstra et De Borst, 1996; Grassl et al., 2002] utilisent une décomposition de la déformation totale d'un VER de matériau $\underline{\underline{\epsilon}}$, en une déformation élastique $\underline{\underline{\epsilon}}^e$ associée à la fraction volumique de matériau sain déformé, et une déformation plastique $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ associée à la fraction volumique des fissures ouvertes. La contrainte dans le VER de matériau $\underline{\underline{\sigma}}$ est calculée en utilisant la loi de Hooke (4.1) en fonction du tenseur d'élasticité d'ordre 4 $\boldsymbol{C}$, de $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^p$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^e = \boldsymbol{C} : \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p\right) \tag{4.1}$$

Les modèles continus fondés sur la théorie de l'endommagement [Kachanov, 1958; Rabotnov et Leckie, 1969; Hult, 1979], différemment, considèrent la conséquence de la fissuration sur la raideur du VER de matériau. Cette raideur diminue lorsque la fissure se propage. Une variable d'endommagement D, pouvant aussi bien être scalaire que tensorielle, est ainsi introduite dans la relation de comportement (4.2). Aucune déformation inélastique n'est explicitement introduite, mais il est possible de considérer que la théorie de l'endommagement décompose aussi la déformation totale en une partie saine $(1 - D)\,\underline{\underline{\epsilon}}$ et une partie fissurée $D\underline{\underline{\epsilon}}$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D)\,\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}} = \boldsymbol{C} : \left(\underline{\underline{\epsilon}} - D\underline{\underline{\epsilon}}\right) \tag{4.2}$$

Par définition, dans la théorie de la plasticité, la déformation inélastique est plastique et donc irréversible. À l'inverse, dans la théorie de l'endommagement, la déformation inélastique est proportionnelle à la déformation totale. Lorsque le matériau est déchargé, dans le premier cas, des déformations résiduelles apparaissent, au contraire du second. Par ailleurs, dans la théorie de la plasticité, la raideur du VER de matériau reste intacte même après propagation de la fissuration, alors que dans la théorie de l'endommagement, cette raideur est diminuée de manière irréversible. Les deux théories se rejoignent toutefois sur le fait que, une fois la déformation totale décomposée, la partie inélastique de la déformation, associée à la fissuration, très logiquement, n'induit aucune contrainte.

De par leurs différences, les théories de la plasticité et de l'endommagement s'avèrent adéquates dans des configurations de chargement précises. En traction, comme expliqué au premier chapitre, la fissuration se propage orthogonalement à la direction de chargement. Dans une section de VER orthogonale à la direction de chargement, la propagation des fissures en réduit la capacité à transmettre des sollicitations. Le terme "section efficace" est utilisé pour décrire la fraction de section de VER capable de transmettre des efforts [Simo et Ju, 1987; Lemaitre, 1984; Chaboche, 1988]. La réduction de la section efficace du matériau peut être directement associée avec une baisse de la raideur du VER de matériau :

$$D = \frac{S_0 - \tilde{S}}{S_0} \qquad \rightleftharpoons \qquad 1 - D = \frac{\tilde{S}}{S_0} \tag{4.3}$$

avec S_0 la section initiale du matériau sain, et $\tilde{S}$ la section efficace du matériau fissuré.

De plus peu de déformations résiduelles sont engendrées directement par la propagation de fissures en traction. Des déformations résiduelles peuvent être observées mais sont expliquées par des mécanismes différents (sec. 2.2). La théorie de l'endommagement semble donc plus appropriée à la modélisation continue de la dégradation induite par un chargement de traction.

En revanche, en compression, la fissuration se propage, avant tout, colinéairement à la direction de chargement par effet Poisson local. Une réduction de la section efficace du VER de matériau n'est que peu observée avant la rupture complète. Mais la compaction de la porosité, et plus largement la fermeture de défauts d'épaisseur non nulle dans la direction orthogonale au chargement, s'ajoute aux mécanismes présents (fig. 1.4). D'un point de vue continu, ce mécanisme est associé à une réduction permanente du volume de matériau. De plus, à une échelle mésoscopique, voire microscopique, le comportement de la porosité implique de la friction. Ainsi la réponse en compression met davantage en avant des déformations inélastiques irréversibles qu'une diminution de la raideur apparente [Willam et Warnke, 1975; Menetrey et Willam, 1995]. La théorie de la plasticité semble donc plus appropriée à la modélisation continue de la dégradation induite par un chargement de compression.

Afin d'utiliser au mieux les capacités des deux théories, des modèles mixtes dits *Plastic-Damage Models* ont été développés [Lubliner et al., 1989; Lee et Fenves, 1998].

Une troisième théorie, la mécanique linéaire élastique de la rupture (LEFM), est aussi à l'origine de plusieurs modèles continus de la fissuration [Rice, 1968]. La LEFM a a servi de fondement pour la formulation des modèles dits *smeared-crack* [Rashid, 1968; De Borst et Nauta, 1985; Rots et al., 1985], *crack-band* [Bažant et Oh, 1983] et *fictitious crack* [Hillerborg et al., 1976]. Toutefois, ces modèles continus issus de la LEFM sont forts similaires aux modèles issus la théorie de l'endommagement. Il est possible d'envisager les modèles *smeared-crack* et *crack-band* comme des modèles d'endommagement anisotrope.

2.1.2 Approche micro-mécanique

En opposition à l'approche phénoménologique, représentée par les théories de la plasticité et de l'endommagement, une approche fondée sur une considération micro-mécanique de la fissuration s'est développée, plus récemment, depuis le début des années 1980. Les fondements de l'approche micro-mécanique ont été posés, notamment, par les ouvrages rédigés par Mura [1987]; Nemat-Nasser et Hori [1999]. Des applications directes de cette approche aux matériaux quasi-fragiles ont été réalisées par [Andrieux et al., 1986; Gambarotta et Lagomarsino, 1993; Pensée et al., 2002]. Les modèles continus issus d'une approche micro-mécanique sont établis à partir d'une description précise et quantitative des mécanismes observés à une échelle inférieure. L'information acquise à une échelle

inférieure est "remontée" à l'échelle de la description macroscopique par intégration. Les mécanismes observés à une échelle inférieure sont moyennés sur un VER.

Homogénéisation

À l'échelle fine le matériau n'est pas considéré comme homogène. Les modèles issus d'une approche micro-mécanique ont recours à une méthode dite "d'homogénéisation", analytique ou numérique, pour effectuer la "remontée" d'information depuis l'échelle fine et recouvrer une certaine continuité et homogénéité.

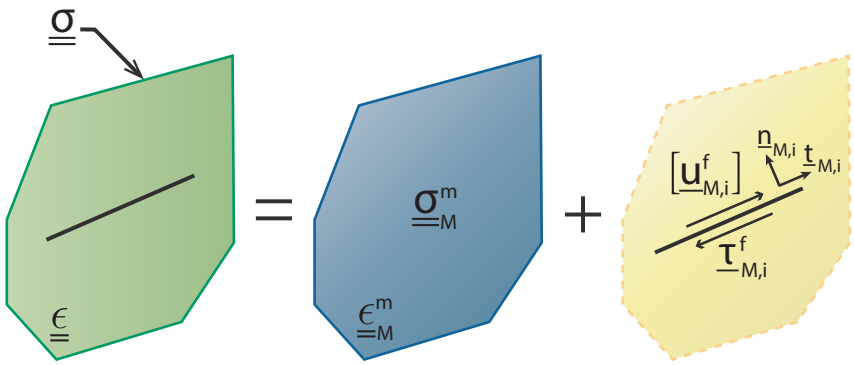


FIGURE 4.1: Décomposition du problème de fissuration [Pensée et al., 2002].

Les schémas d'homogénéisation de Mori-Tanaka [Mori et K, 1973], de Ponte Castaneda-Willis [Ponte Castaneda et Willis, 1995] ou encore fondé sur la solution du problème d'Eshelby [Eshelby, 1957] sont les plus employés. Ces schémas diffèrent de par leur niveau de complexité, chacun permettant de considérer avec plus ou moins de détails les mécanismes présents à l'échelle inférieure.

À titre d'exemple, lors de l'homogénéisation d'une structure matrice-fissures (fig. 4.1), l'interaction entres les fissures est souvent négligée. Selon le cas de chargement simulé et donc le mode de propagation de fissuration impliqué, les hypothèses simplificatrices pourront être adaptées. Il résulte de la méthode d'homogénéisation un tenseur de raideur effectif du VER de matériau, tenant compte de la dégradation subie. Ce type de modèle peut ainsi être considéré comme un modèle d'endommagement continu issu d'une approche, non plus phénoménologique, mais micro-mécanique.

L'homogénéisation est réalisée par réécriture de l'énergie libre volumique, permettant de déduire le tenseur de raideur homogénéisé $\tilde{\boldsymbol{C}}$ du VER de matériau fissuré. Avant homogénéisation, l'énergie libre volumique Ψ d'un VER Ω constitué d'une matrice $(.)^m$ et de N familles de fissures $(.)_i^f$, définies par leur normale $\underline{n}$, peut s'écrire en fonction des quantités microscopiques $(.)_M$ de la manière suivante [Pensée et al., 2002] :

$$\Psi = \Psi^m + \sum_{i \in N} \Psi_i^f$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2|\Omega|}\iiint_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}^m_M : \underline{\underline{\sigma}}^m_M \mathrm{d}V + \sum_{i\in N}\left(\frac{1}{2|\Omega|}\iiint_{\Omega_i} \underline{\underline{\epsilon}}^f_{M,i} : \underline{\underline{\sigma}}^f_{M,i}\mathrm{d}V\right)\\
&= \frac{1}{2|\Omega|}\iiint_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}^m_M : \boldsymbol{C}^m : \underline{\underline{\epsilon}}^m_M \mathrm{d}V + \sum_{i\in N}\left(\frac{1}{2|\Omega|}\iint_{\omega_i} \left\{\underline{\tau}^f_{M,i}.\left[\underline{u}^f_{M,i}\right]_t + \underline{\underline{\sigma}}^f_{M,i} : \left(\underline{n}_{M,i}\otimes\underline{n}_{M,i}\right)\left[u^f_{M,i}\right]_n\right\}\mathrm{d}S\right)
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

où $\underline{\underline{\sigma}}_M$ et $\underline{\underline{\epsilon}}_M$ sont les tenseurs de contraintes et de déformations microscopiques ; $\underline{\tau}_M$ et $[\underline{u}_M]_t$ les vecteurs efforts et sauts de déplacement tangents, $[u_M]_n$ les sauts de déplacement normal et ω la surface de la fissure.

L'objectif de l'homogénéisation est de pouvoir écrire cette énergie sous forme intégrée, en fonction des quantités macroscopiques, et ainsi définir $\tilde{\boldsymbol{C}}$:

$$
\Psi = \underline{\underline{\epsilon}} : \tilde{\boldsymbol{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{4.5}
$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}$ est le tenseur de déformation macroscopique du VER.

Le schéma d'homogénéisation permet de passer de l'écriture microscopique détaillée des variables d'état ($\underline{\underline{\sigma}}_M$, $\underline{\underline{\epsilon}}_M$, $\underline{\tau}_M$, et $[\underline{u}_M]$), tenant compte explicitement de la fissuration ainsi que de son ouverture et de son orientation, à l'écriture macroscopique ($\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$) moyennée sur le VER. Le passage d'une écriture à l'autre est effectué sous certaines hypothèses, qui permettent de faciliter l'écriture d'une solution analytique ou la résolution numérique du problème mécanique élémentaire posé, par exemple une absence d'interaction entre les fissures, ou une forme elliptique des fissures.

Après application de différentes hypothèses et l'utilisation de solutions élémentaires de problèmes d'élasticité et de mécanique de la rupture, Pensée et al. [2002] obtiennent l'écriture suivante de l'énergie libre volumique pour un VER élastique affaibli par une famille de méso-fissures d'orientation identique $\underline{n}$:

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \underline{\underline{\epsilon}} : \boldsymbol{C}^m : \underline{\underline{\epsilon}}\\
&\quad - D\frac{8(1-\nu^m)}{3E^m}\left\{\langle \underline{\underline{\epsilon}} : \boldsymbol{C}^m : \underline{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}}\rangle_+^2 + \frac{4\mu^m}{1-\nu^m/2}\left[\left(\underline{\underline{\epsilon}}.\underline{\underline{\epsilon}}\right) : \underline{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}} - \underline{\underline{\epsilon}} : \left(\underline{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}}\otimes\underline{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}}\right) : \underline{\underline{\epsilon}}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

avec D la densité de micro-fissures, $\underline{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}} = \underline{n}\otimes\underline{n}$ et E^m, ν^m et μ^m, respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, et le second coefficient de Lamé de la matrice.

Peu de variables internes (D et $\underline{n}$) doivent finalement être introduites pour décrire la dégradation d'un VER.

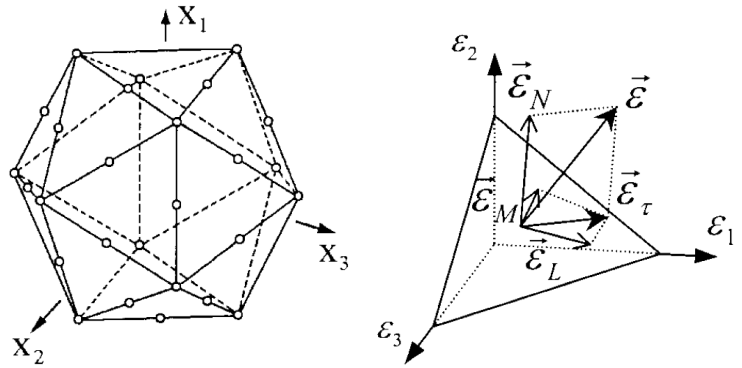
À partir de l'équation de Ψ, l'écriture de $\tilde{\boldsymbol{C}}$ se déduit, mais par soucis de légèreté, elle ne sera pas précisée ici.

Modèles microplans

Les modèles dits "microplans" développés par Bažant et Oh [1985], bien que n'étant pas directement fondés sur une approche micro-mécanique, s'en rapprochent d'un point de vue méthodologique. Le point commun des modèles microplans et des modèles issus d'une approche micro-mécanique est le passage préalable par l'écriture du comportement à une échelle fine avant d'homogénéiser cette écriture par le biais d'une méthode d'intégration numérique fondée le principe des travaux virtuels dans le cas des modèles microplans.

Alors que les approches micro-mécaniques classiques fondées sur un schéma d'homogénéisation résolvent des problèmes élémentaires de type matrice-inclusion, pour homogénéiser la réponse d'un VER, les modèles microplans moyennent la réponse d'une quantité finie de modèles simples phénoménologiques (e.g. des modèles d'endommagement scalaires) chacun pouvant caractériser par exemple la réponse d'un groupe de fissures de même orientation. Ainsi en se limitant localement à un endommagement isotrope, il est possible de reproduire l'anisotropie induite par le chargement.

Chaque modèle simple est associé à un microplan, définissant son orientation. Un ensemble de plans est défini en chaque point de Gauss. La figure 4.2a représente un point de Gauss discrétisé en microplans.



(a) discrétisation d'un point de Gauss (b) définition d'un microplan

FIGURE 4.2: Description d'un point de Gauss dans un modèle microplans [Bažant et al., 2000].

La transition entre l'état de sollicitation global ($\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}$, moyenné, et l'état de sollicitation local au niveau de chaque microplan ($\underline{\sigma}_M, \underline{\epsilon}_M$), comme défini en figure 4.2b, est effectuée par l'intermédiaire du principe des travaux virtuels écrit sur une demi-sphère de surface Ω faisant office de VER :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} (\underline{\sigma}_M . \underline{\epsilon}_M) \, \mathrm{d}S \tag{4.7}$$

Les modèles microplans sont ainsi fondés sur une approche intermédiaire aux approches phénoménologiques et micro-mécaniques. Ces modèles permettent de remplacer l'utilisation de modèles constitutifs complexes, qu'ils soient issus d'une approche micro-mécanique analytique ou d'une approche phénoménologique, par la réponse homogénéisée, au moyen d'une méthode d'intégration numérique d'une succession de modèles simples.

2.1.3 Discussion

En raison d'une description, au plus large, mésoscopique du matériau et des équations simples qui régissent ces échelles, la quantité de données d'entrée requises pour la mise en œuvre d'un modèle issu d'une approche micro-mécanique ou d'un modèle microplan est relativement faible.

Néanmoins, dans le cas d'une approche micro-mécanique, et d'une méthode d'homogénéisation analytique, la dégradation modélisée reste sommaire notamment quant à la description de l'anistropie réelle induite par la fissuration. Les modèles issus d'une méthode homogénéisation numérique (e.g. modèles microplans) pêchent quant à eux par des coûts de calculs élevés. En effet, l'homogénéisation est réalisée lors de la simulation, les équations mises en œuvre restent donc toujours simples, puisque définies à une échelle fine, mais en contre partie une intégration numérique est nécessaire à chaque itération. Dans les deux cas, le domaine d'application des modèles issus de ce type d'approche est encore restreint, peu de simulations à l'échelle de la structure ont été réalisées. Ainsi, l'approche phénoménologique de la modélisation continue de la dégradation des matériaux quasi-fragiles reste à ce jour la plus utilisée pour sa relative légèreté et sa robustesse numérique.

La justification physique de modèles issus d'une approche phénoménologique est moins évidente que celle de modèles issus d'une approche micro-mécanique, toutefois par la formulation de tels modèles en respectant le formalisme des MSG, il est possible de garantir le respect des principes fondamentaux de la thermodynamique.

2.2 Fermeture de la fissuration

La modélisation des phénomènes liés au caractère unilatéral frottant des fissures pose deux problèmes distincts. D'une part, un problème de formulation mathématique, car la prise en compte de l'effet unilatéral mène à une discontinuité de la relation de comportement du matériau, car la raideur passe d'une valeur endommagée à une valeur saine, et donc à une perte de robustesse du modèle [La Borderie, 1991]. D'autre part, un problème de description, car peu de modèles sont capables de reproduire fidèlement le comportement expérimental observé par Reinhardt et Cornelissen [1984] ou encore Nouailletas [2013].

Néanmoins, dans le cas des matériaux quasi-fragiles, du fait des incompatibilités géométriques en surface de fissure, l'effet unilatéral est progressif, car l'ensemble des fissures contenues dans un VER ne se referment pas simultanément. Le problème de discontinuité de relation de comportement est donc régularisé dans la mesure où l'ensemble du problème physique est considéré, autrement dit que les conséquences de l'incompatibilité géométrique sont considérées.

Les méthodes de modélisation ne visant qu'à annuler l'effet de l'endommagement sans tenir compte des autres phénomènes observés sous chargement cyclique ne seront donc pas présentées. Il s'agit en général de décompositions en parties positive et négative [Ladevèze, 1983; La Borderie, 1991] ou décomposition spectrale [Ju, 1989; Chaboche, 1993; Halm et Dragon, 1996] des contraintes ou des déformation. La robustesse de ce second groupe de méthodes est limitée, car elles engendrent une perte d'unicité du potentiel thermodynamique [Cormery et Welemane, 2002].

La revue bibliographique qui suit s'attarde en revanche sur les modèles proposant une description empirique, phénoménologique ou mésoscopique de l'ensemble des phénomènes induits par les mécanismes impliqués lors du chargement cyclique d'une fissure.

2.2.1 Approche empirique

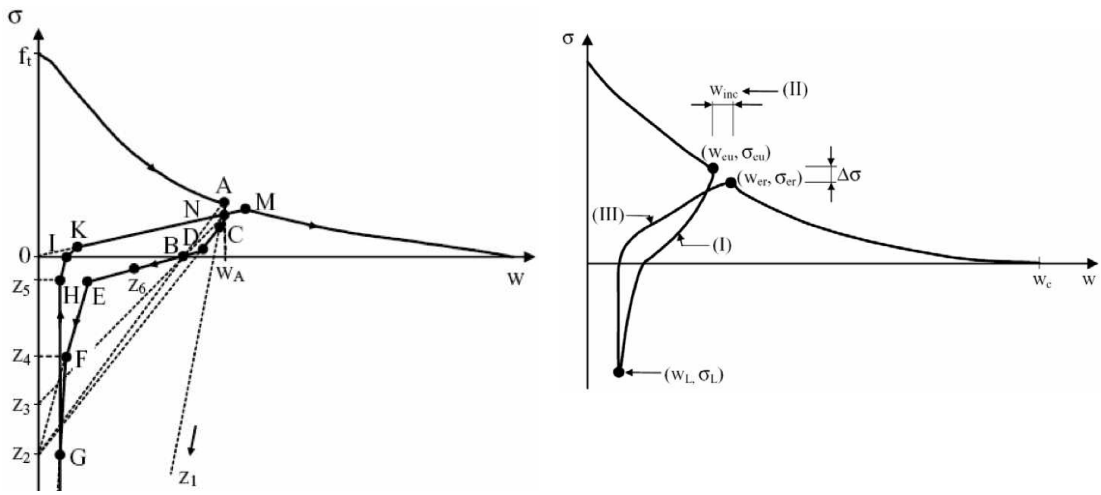
Dès les années 1980, après la publication des premiers résultats d'essais d'éprouvettes de béton soumises à un chargement cyclique [Reinhardt et Cornelissen, 1984], des modèles empiriques de comportement ont été proposés [Gylltoft, 1984; Reinhardt et al., 1986; Yankelevsky et Reinhardt, 1989; Hordijk, 1991]. Ces premières tentatives de modélisation proposent dans un formalisme uni-dimensionnel, un jeu d'équations capable de reproduire l'ensemble des phénomènes associés à la fermeture des fissures (fig. 4.3).

La réponse uni-axiale du matériau est décomposée en intervalles délimités par un niveau de sollicitation (σ ou ϵ), et une vitesse de chargement ($\dot{\sigma}$ ou $\dot{\epsilon}$) qui permet principalement de distinguer s'il s'agit d'une charge ou d'une décharge.

Les limites de chaque intervalle sont annotées sur les réponses uni-axiales (fig. 4.3) par un point noir. Selon le modèle, la réponse uni-axiale est décomposée en un plus ou moins grand nombre d'intervalles. À chaque intervalle i correspond une relation de comportement spécifique :

$$\sigma^i = E\epsilon^e + f^i(w) \tag{4.8}$$

L'expression de la contrainte σ^i sur l'intervalle est fonction de la déformation élastique ϵ^e et de l'ouverture de fissure w. La composante de σ^i associée à ϵ^e est toujours déterminée par la loi de Hooke. Pour l'expression de la composante de σ associée à w, en revanche, une fonction f^i empirique spécifique à l'intervalle i est introduite.



(a) [Yankelevsky et Reinhardt, 1989] (b) [Hordijk, 1991]

FIGURE 4.3: Évolution de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure pour des modèles empiriques.

Pour le modèle proposé par Hordijk [1991], en cas de décharge, soit l'intervalle I sur la figure (4.3b), la relation s'écrit :

$$\frac{\sigma}{f_t} = \frac{\sigma_{eu}}{f_t} \frac{1}{3\left(w_{eu}/w_c\right) + 0.4} \left\{ 0.014 \left[ln\left(\frac{w_{eu}}{w_c}\right)\right]^5 - 0.57\left(1 - \frac{w_{eu}}{w_c}\right)^{1/2} \right\} \tag{4.9}$$

en cas de recharge, soit l'intervalle III, la relation s'écrit :

$$\frac{\sigma}{\sigma_L} = 1 + \left(\frac{c_3}{c_3+1}\right)\left(\frac{\sigma_{er}}{\sigma_L}\right)\left\{\frac{1}{c_3}\left(\frac{w - w_L}{w_{er} - w_L}\right)^{c_3/5} + \left[1 - \left(1 - \frac{w - w_L}{w_{er} - w_L}\right)^2\right]^{c_4}\right\} \tag{4.10}$$

avec :

$$\begin{cases} c_3 = 3\left(3\frac{f_t - \sigma_L}{f_t}\right)^{-\left(1+\frac{w_{eu}}{2w_c}\right)} + \left[1 - \left(\frac{w_{eu}}{w_c}\right)^{0.71 f_t / f_t - \sigma_L}\right] \\ c_4 = \left[2\left(3\frac{f_t - \sigma_L}{f_t}\right)^{-3} + \frac{1}{2}\right]^{-1} \end{cases} \tag{4.11}$$

De manière plus générale, la relation de comportement définie sur chaque intervalle peut être, soit linéaire (fig. 4.3a), ce qui nécessite de déterminer un nombre important d'intervalles pour obtenir une réponse fidèle, soit non-linéaire (fig. 4.3b).

Le modèle proposé par Hordijk [1991] présente l'avantage d'utiliser des fonctions non-linéaires, dont la continuité entre chacune est assurée, ainsi le risque de problèmes de convergence de l'intégration numérique au passage d'un intervalle à un autre est réduit.

2.2.2 Approches phénoménologique

Une compréhension plus approfondie des mécanismes à l'origine du comportement irréversible observé sous chargement cyclique a permis d'y associer des concepts mécaniques existants, notamment la friction, et ainsi de développer des modèles de comportement phénoménologiques. Deux classes de modèles phénoménologiques sont distinguées.

Modèles rhéologiques

Le modèle de comportement proposé par Duda et Konig [1991] consiste en une décomposition de la contrainte totale σ en trois termes σ^s avec $s = \{A, B, C\}$. Le modèle peut être schématisé comme trois séries de ressorts de raideur $K^{s,i}$ et de patins glissants de contrainte seuil $\sigma_y^{s,i}$ en parallèle avec $i = [0; 2]$ (fig. 4.4).

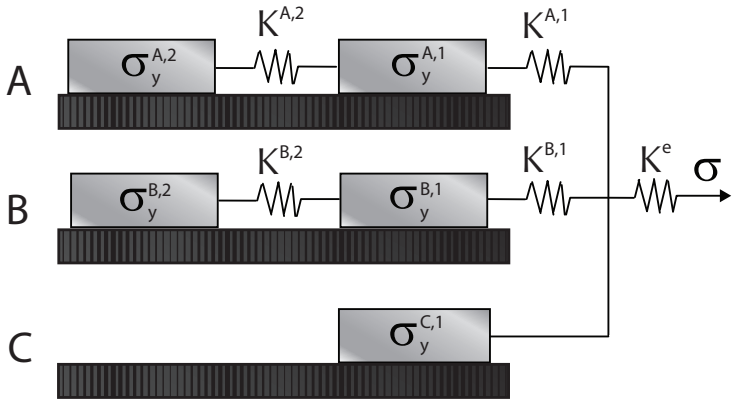
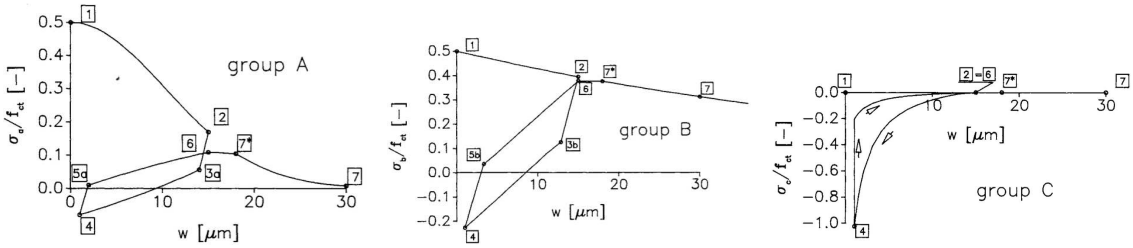


FIGURE 4.4: Description du modèle de comportement rhéologique de Duda et Konig [1991].



(a) série A (b) série B (c) série C

FIGURE 4.5: Évolution de la contrainte normée en fonction de l'ouverture de fissure dans chaque série du modèle rhéologique de Duda et Konig [1991].

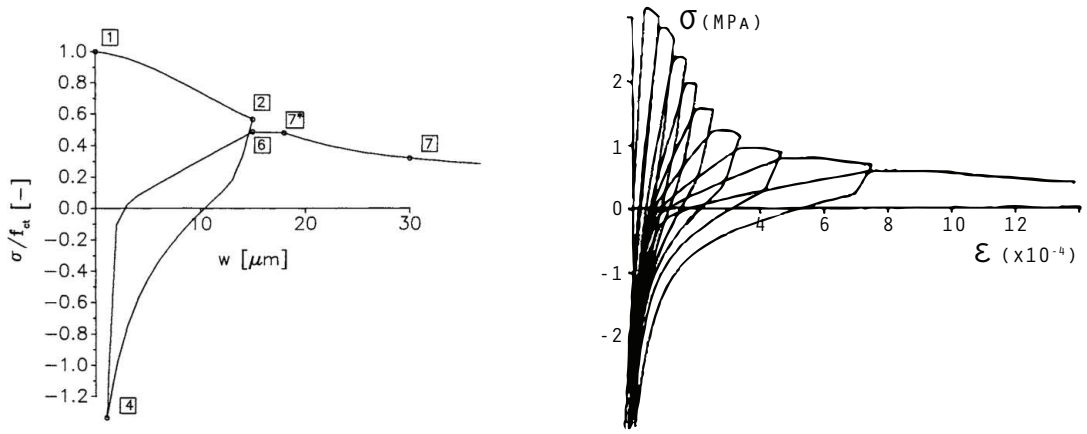
Phénoménologiquement, d'après l'auteur, une première série A de patins et de ressorts reproduit le comportement cohésif endommageant et hystérétique entre la pâte de ciment et les granulats (fig. 4.5a). Une seconde série B traduit le comportement hystérétique de

friction entre la pâte de ciment et les granulats (fig. 4.5b). Enfin, une troisième série C, consitutée d'un unique patin hyperbolique, retranscrit le niveau de compression requis pour atteindre progressivement la fermeture totale des fissures (fig. 4.5c).

Similairement aux modèles empiriques (4.8), la contrainte totale σ (fig 4.6a) est obtenue par la somme de la contribution de la partie élastique, ici un ressort de raideur K^e, et d'une combinaison de la contribution $\sigma^s(w)$ de chaque série en parallèle.

$$\sigma = \sigma^e\left(K^e\right) + f\left(\sigma^A, \sigma^B, \sigma^C\right) \tag{4.12}$$

La réponse obtenue est présentée en figure 4.6b.



(a) évolution de la contrainte totale normée en fonction de l'ouverture de fissure

(b) évolution de la contrainte totale en fonction de la déformation totale

FIGURE 4.6: Réponse complète du modèle de comportement rhéologique de Duda et Konig [1991].

Modèles plastiques

Bien qu'associés à un unique mécanisme, l'initiation de contact frottant entre les surfaces des fissures, l'effet unilatéral et les effets hystérétiques sont considérés séparément.

Effet unilatéral

L'effet unilatéral peut être introduit de différentes manières :

— par une séparation de la variable d'endommagement de manière à affecter indépendamment les parties positives et négatives des tenseurs de contraintes ou de déformations [Ladevèze, 1983] :

$$\Psi^e = \frac{1}{2}\left(1 - D^+\right)\langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_+ : \boldsymbol{C} : \langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_+ + \frac{1}{2}\left(1 - D^-\right)\langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_- : \boldsymbol{C} : \langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_- \tag{4.13}$$

soit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(1 - D^+\right)\boldsymbol{C} : \langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_+ + \left(1 - D^-\right)\boldsymbol{C} : \langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_- \tag{4.14}$$

où D^+ et D^- sont respectivement les variables d'endommagement associées aux parties positives et négatives de la contrainte (en supposant que $\partial\langle \underline{\underline{x}}\rangle_+/\partial\left(\underline{\underline{x}}\right) = \mathbf{1}$) ;

— par l'introduction d'une variable interne [Matallah et La Borderie, 2009] :

$$\Psi^e = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\epsilon}} - SD\underline{\underline{\epsilon}}^{in}) : \boldsymbol{C} : (\underline{\underline{\epsilon}} - SD\underline{\underline{\epsilon}}^{in}) \tag{4.15}$$

soit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \boldsymbol{C} : (\underline{\underline{\epsilon}} - SD\underline{\underline{\epsilon}}^{in}) \tag{4.16}$$

avec $\underline{\underline{\epsilon}}^{in}$ un tenseur de déformations permanentes et S la variable interne de refermeture de fissures, dont la valeur évolue entre 1 lorsque les fissures sont ouvertes et 0 lorsque les fissures sont fermées ce qui a pour effet d'annuler l'effet de la variable d'endommagement D. L'évolution de S peut suivre une évolution simple, linéaire dépendante de la trace de $\underline{\underline{\sigma}}$ [Richard et Ragueneau, 2013], ou plus complexe, à l'image d'une variable plastique régie par de multiples potentiels de dissipation définis pour chaque phase de charge et de décharge [Oliveira, 2003].

Effets hystérétiques

Les effets d'hystérétiques sont le plus souvent expliqués par un mécanisme de friction engendré par une incompatibilité géométrique au niveau des surfaces d'une fissure. D'un point de vue macroscopique, ce mécanisme de friction peut être reproduit par une modélisation fondée sur la théorie de la plasticité.

Tout comme pour l'effet unilatéral, les effets hystérétiques sont décrits de multiples façons dans la littérature [Ragueneau et al., 2000; Matallah et La Borderie, 2009; Richard et Ragueneau, 2013; Sellier et al., 2013], mais il est possible d'observer une méthodologie commune.

La contrainte totale $\underline{\underline{\sigma}}$ est décomposée de manière à faire apparaître une contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{fr}$ chargée de retranscrire le comportement mécanique frottant en cisaillement des fissures.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^{fr} \tag{4.17}$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}^e$ chargée de retranscrire le reste du comportement élastique du matériau affecté par les variations de raideur effective du VER, autrement dit l'endommagement et l'effet unilatéral.

La théorie de la plasticité est donc appliquée à la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{fr}$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{fr} = f\left(D\boldsymbol{C} : \left(\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)^{\mathrm{D}} - \underline{\underline{\epsilon}}^{fr}\right)\right) \tag{4.18}$$

avec $\underline{\underline{\epsilon}}^{fr}$ la déformation déviatorique plastique associée au glissement.

L'équation (4.18) illustre la dépendance de la contrainte de cisaillement dans les fissures $\underline{\underline{\sigma}}^{fr}$ à la déformation de cisaillement élastique associée aux fissures $D\left(\underline{\underline{\epsilon}}^D - \underline{\underline{\epsilon}}^{fr}\right)$ et au tenseur d'élasticité du milieu $\boldsymbol{C}$.

Enfin, le glissement, et donc la plasticité sont activés par le potentiel de dissipation φ^{fr} suivant :

$$\varphi^{fr} = g\left(\sqrt{\mathrm{J}_2\left(\underline{\underline{\sigma}}^{fr} - \underline{\underline{X}}^{fr}\right)}\right) \tag{4.19}$$

avec $\underline{\underline{X}}^{fr}$ la contrainte de rappel de l'écrouissage associé au glissement.

La description des effets hystérétiques ne diffère selon les modèles que par le choix des fonctions f et g, dont la modification permet de tenir compte de mécanismes supplémentaires pouvant influencer l'évolution du glissement frottant dans les fissures.

Un exemple de réponse obtenue est proposé en figure 4.7.

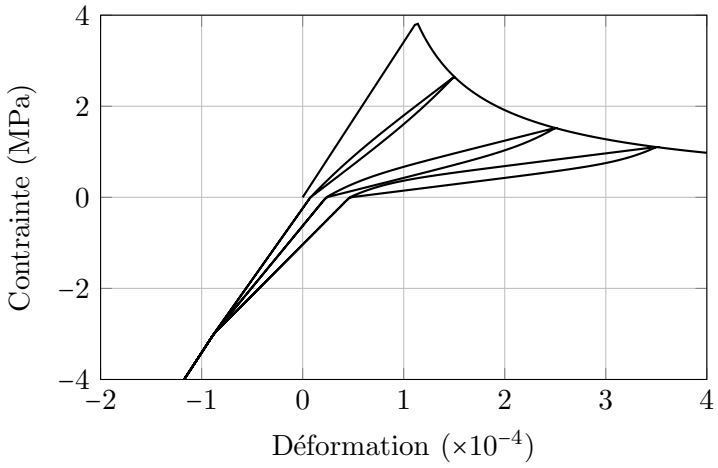


FIGURE 4.7: Réponse du modèle de Richard et Ragueneau [2013].

2.2.3 Approche intégrée

Les modèles ici qualifiés d'intégrés sont sur le fond similaires aux modèles issus d'une approche micro-mécanique, à un détail près : ils traitent non pas de l'ouverture des micro-fissures, mais de leur fermeture. Les modèles intégrés dérivent des modèles hystérétiques de Preisach-Mayergoyz [Mayergoyz, 1991].

Le tenseur des contraintes macroscopiques s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \left(\underline{\underline{\epsilon}} - D\underline{\underline{\epsilon}}^{f}(w)\right) \tag{4.20}$$

avec $\underline{\underline{\epsilon}}^{f}$ le tenseur des déformations associées à l'ouverture des fissures w estimée par intégration sur le VER.

Une description du comportement mésoscopique d'une fissure soumise à un cycle de décharge-charge est établie. Autrement dit, il est fait le choix d'une évolution de la contrainte transitant dans une fissure en fonction de son ouverture. Le modèle proposé

par Guyer et al. [1995] se base sur des opérateurs hystérétiques dits "relais" pour décrire ce comportement (fig. 4.8).

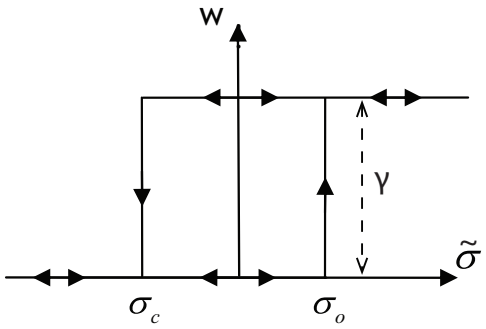
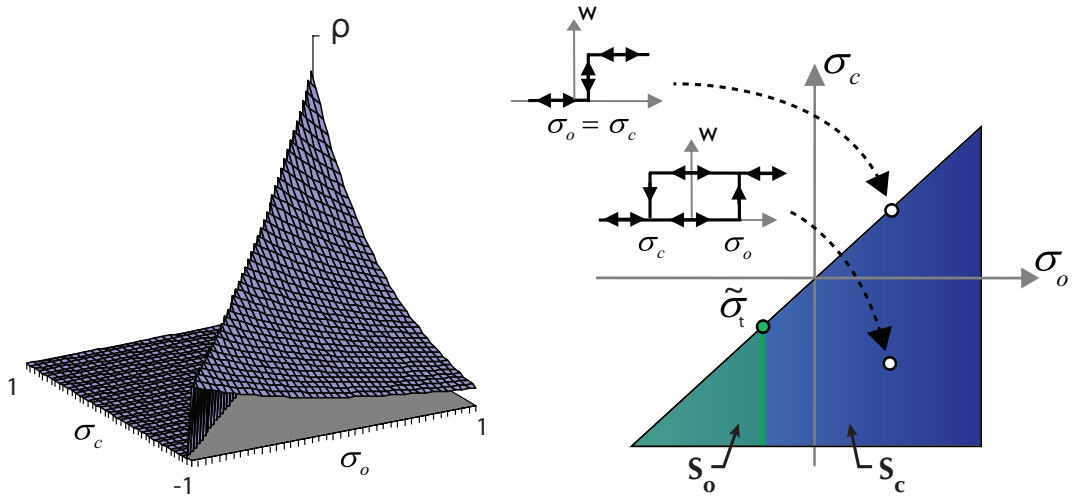


FIGURE 4.8: Évolution de la contrainte en fonction de l'ouverture de fissure donnée par un opérateur relais.

L'opérateur relais associe à des niveaux de contrainte distincts σ_c et σ_o, les transitions, respectivement, d'un état ouvert à fermé, et d'un état fermé à ouvert, de la fissure. L'ouverture d'un opérateur relais est constante et vaut γ. L'aire située à l'intérieur du trajet (σ-w_R) suivi par l'opérateur relais correspond à l'énergie dissipée par friction dans la fissure. Le cas où σ_c = σ_o correspond à un comportement réversible de l'opérateur relais.



(a) exemple de distribution $\rho(\sigma_c, \sigma_o)$ (b) espace S de Preisach-Mayergoyz

FIGURE 4.9: Distribution des opérateurs relais en fonction du couple de contraintes (σ_c, σ_o) associé [Mertens, 2009].

Ensuite, un aspect statistique est introduit concernant les contraintes σ_c et σ_o de chaque opérateur relais. L'emploi d'une densité $\rho(\sigma_c, \sigma_o)$ de distribution des opérateurs relais

dans l'espace $S(\sigma_c, \sigma_o)$, appelé espace de Preisach-Mayergoyz (fig. 4.9) traduit le fait que les fissures ne se ferment pas à des niveaux de contraintes identiques, et de même en ouveture. Cette observation est justifiable par l'explication de l'origine des phénomènes macroscopiques par des incompatibilités géométriques entre les surfaces des fissures.

À noter que la forme de la distribution ρ (fig. 4.9a) retranscrit une plus forte probabilité de voir une fissure se fermer et s'ouvrir pour un même niveau de contrainte, ce qui physiquement représente un état sans incompatibilités géométriques. De plus, il est impossible d'observer une fissure telle que $\sigma_c > \sigma_o$ ce qui impliquerait une production d'énergie.

Enfin pour déterminer la quantité de fissures ouvertes et la quantité de fissures fermées, l'espace S est décomposé en une partie S_o associée au fissures ouvertes et S_c associée au fissures fermées (fig. 4.9b). La décomposition de S dépend du niveau de contrainte $\tilde{\sigma}$ ainsi que de l'historique de chargement.

À chaque fissure ouverte correspond une ouverture de fissure $w_R = \gamma$ et à chaque fissure fermée, une ouverture de fissure nulle $w_R = 0$ (fig. 4.8). Par intégration de la distribution ρ sur l'espace S, l'ouverture de fissure totale w est calculée :

$$\begin{aligned} w &= \iint_S w_R \rho(\sigma_c, \sigma_o) d\sigma_c d\sigma_o \\ &= \gamma \iint_{S_o} \rho(\sigma_c, \sigma_o) \mathrm{d}\sigma_c \mathrm{d}\sigma_o \end{aligned} \tag{4.21}$$

Un exemple de réponse obtenue est proposé en figure 4.10.

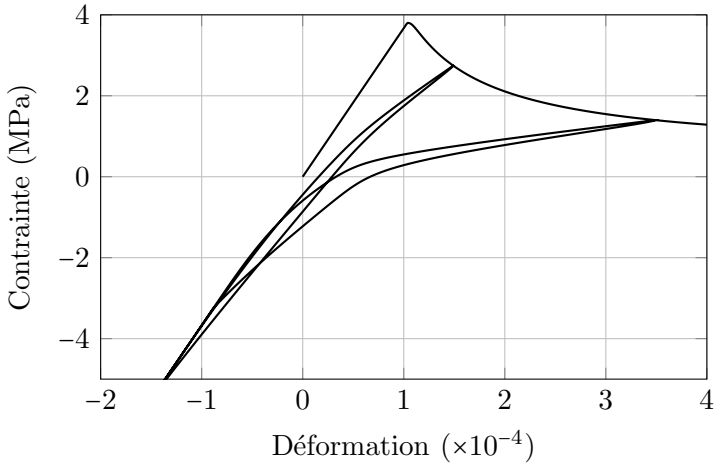


FIGURE 4.10: Réponse d'un modèle de Preisach-Mayergoyz [Minga, 2013].

2.2.4 Discussion

La réponse en traction cyclique uni-axiale de chacun des modèles présentés est intéressante. Dans un formalisme uni-dimensionnel, les modèles permettent tous de reproduire l'effet

unilatéral et les effets hystérétiques. Toutefois, la fidélité de la réponse fournie varie d'un type de modèle à l'autre. De manière générale, les modèles phénoménologiques fondés sur la théorie de la plasticité peinent à reproduire qualitativement l'intégralité des phénomènes associés au caractère unilatéral frottant des fissures. L'exemple du modèle de Richard et Ragueneau [2013] (fig. 4.7) met notamment en avant des boucles d'hystérésis dont la courbure n'est pas réaliste.

Le manque de contrôle de la réponse est le contre-coût de la robustesse garantie par le formalisme des MSG. Ce formalisme contraint l'évolution des variables internes, et permet facilement d'en réaliser l'extension tri-dimensionnelle. Inversement, une extension des modèles empiriques, rhéologiques et intégrés semble difficilement envisageable.

En ce qui concerne les modèles empiriques une formulation tri-dimensionnelle pose des problèmes de robustesse, au vu des discontinuités introduites par la décomposition de la réponse en intervalles, entre lesquels la relation de comportement n'est pas continue [Gylltoft, 1984; Reinhardt et al., 1986; Yankelevsky et Reinhardt, 1989]. Et même si la continuité est assurée [Hordijk, 1991], il apparaît clairement que les équations établies sont trop complexes pour être mises sous forme tensorielle.

Le même reproche peut être fait aux modèles rhéologiques. De plus, bien que des notions physiques aient été introduites par l'intermédiaire de ressorts et de patins, leur lien respectif avec un mécanisme précis reste peu évident. La souplesse du modèle est garantie par un nombre important de patins et de ressorts, ce qui explique la fidélité de la réponse obtenue, mais le nombre de paramètres introduits est prohibitif pour permettre une identification simple du modèle.

L'extension des modèles de Preisach-Mayergoyz est elle limitée par l'utilisation impérative de variables scalaires. En effet, l'ouverture des fissures w et le niveau de contrainte $\tilde{\sigma}$ sont utilisées pour déterminer la proportion de fissures ouvertes et fermées. Cependant une première tentative de généralisation bi-dimensionnelle a été effectuée avec succès par Mertens [2009] en s'appuyant sur une décomposition de Kelvin. En outre, contrairement aux modèles empiriques et rhéologiques, le nombre de paramètres introduits est limité. Seules l'ouverture de l'opérateur relais γ et la densité de distribution des opérateurs ρ sont à identifier. L'analogie entre des incompatibilités géométriques et un aspect statistique de l'ouverture et de la fermeture des fissures semble donc justifiée.

Dans l'objectif de simuler la réponses de structures, une modélisation robuste hors du cadre uni-dimensionnel est nécessaire. De ce fait, et par consistance avec la modélisation de la dégradation retenue à la section précédente, une modélisation des phénomènes dissipatifs associés à la fermeture des fissures fondée sur la théorie de la plasticité, s'inscrivant dans le formalisme des Matériaux Standards Généralisés est retenue. En revanche il est nécessaire d'améliorer la qualité de la réponse obtenue par ce type de modèle. Dans la suite des travaux, une nouvelle description est ainsi proposée, tenant compte des résultats obtenus avec le modèle discret, ainsi que de la piste avancée par les modèles de Preisach-Mayergoyz, à savoir l'introduction d'un caractère statistique dans la description de la

fermeture des fissures, pour en observer une évolution progressive.

3 Définition d'un formalisme de modélisation continue

À la suite de cette étude, une approche phénoménologique fondée sur les théories bien connues de l'endommagement et de la plasticité est retenue. La relative facilité à intégrer ce type d'approche dans le formalisme des MSG s'avère tout à fait adaptée au besoin de définir un cadre de modélisation continue, précisé plus en détails par la suite en s'appuyant sur des simulations issues du modèle discret.

Un tel cadre est maintenant proposé. Le formalisme des MSG fondé sur la thermodynamique des processus irréversibles est introduit. Puis une première forme de potentiel thermodynamique est proposée basée sur une distinction du comportement mécanique du matériaux sain, et du comportement mécanique des fissures.

3.1 Thermodynamique des processus irréversibles

La thermodynamique des processus irréversibles fournit un fondement théorique qui permet la formulation de modèles constitutifs continus. Le formalisme des Matériaux Standards Généralisés a ainsi été proposé par Halphen et Nguyen [1975] ; il permet de faire le lien entre des modèle constitutifs phénoménologiques et les principes fondamentaux de la thermodynamique. La justification physique, et par la même occasion la robustesse numérique, des modèles développés respectant ce formalisme sont fortement améliorées. Dans le contexte des matériaux quasi-fragiles et donc d'une approximation continue de comportements intrinsèquement discontinus - fissuration - une telle garantie est loin d'être superflue, tant le choix de modélisation (continue) est en inadéquation avec le problème réel (discret). Le formalisme des MSG a initialement été appliqué à la modélisation, fondée sur la mécanique de l'endommagement, du comportement de matériaux quasi-fragiles par Lemaitre [1984].

3.1.1 Potentiel thermodynamique

L'application du formalisme des MSG consiste à définir un potentiel thermodynamique, dont découle un ensemble de lois d'état. Le potentiel peut s'écrire de manières différentes : soit comme l'énergie libre volumique de Helmholtz, soit comme l'enthalpie libre de Gibbs du système étudié. La différence entre ces deux classes de potentiels est le type de formulation résultant, respectivement en déformations ou en contraintes.

L'énergie libre volumique d'Helmholtz Ψ est écrite en fonction du tenseur des déformations :

$$\Psi = \Psi(\underline{\underline{\epsilon}}, T, V_i^k) \tag{4.22}$$

L'enthalpie libre volumique de Gibbs χ s'écrit, elle, en fonction du tenseur des contraintes :

$$\chi = \chi(\underline{\underline{\sigma}}, T, V_i^k) \tag{4.23}$$

avec V_i^k les i variables internes du phénomène k.

Une ou plusieurs variables internes peuvent être attribuées à chaque phénomène macroscopique. Par exemple en ce qui concerne le phénomène de dégradation, en général deux variables internes sont introduites, D l'endommagement et z un écrouissage. Les variables dont est fonction le potentiel thermodynamique choisi sont appelées variables d'état. Leurs variables duales sont appelées variables associées.

À noter qu'il est possible de passer d'un potentiel thermodynamique à l'autre en effectuant la transformée de Legendre-Fenchel :

$$\chi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \Psi \tag{4.24}$$

L'utilisation de l'énergie libre volumique d'Helmholtz comme potentiel conduit à un modèle piloté par l'évolution des déformations. Dans le cadre de l'implémentation du modèle dans un code de calcul par éléments finis, c'est un avantage, car les calculs sont allégés par l'emploi de schémas d'intégration locaux explicites. En effet, l'évolution de la sollicitation est contrôlée par des incréments de déformation. L'état de déformation est donc toujours connu.

3.1.2 Lois d'état

Le potentiel une fois défini, les lois d'état sont déterminées à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem. Cette inégalité découle du second principe de la thermodynamique et retranscrit la positivité de la dissipation intrinsèque du système notée Φ. Les lois d'état sont donc déterminées tout en s'assurant de la validité thermodynamique du modèle.

Le second principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\Phi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{e} + T\dot{s} - \frac{\vec{q}.\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \tag{4.25}$$

avec T la température, s l'entropie volumique, e l'énergie interne volumique et $\vec{q}$ le flux de chaleur volumique.

Or l'énergie libre volumique de Helmholtz s'écrit :

$$\Psi = e - Ts \tag{4.26}$$

Le second principe devient donc :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \dot{\Psi} - \dot{T}s - \frac{\vec{q}.\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \tag{4.27}$$

Or dΨ est une différentielle totale exacte, car Ψ est un potentiel d'état :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_i^k}\dot{V_i^k} \tag{4.28}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} - \underline{\underline{\sigma}}\right) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} - s\right)\dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_i^k}\dot{V_i^k} - \frac{\vec{q}.\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \tag{4.29}$$

Une première loi d'état est obtenue en supposant une transformation élastique, donc au cours de laquelle aucune variable interne n'évolue ($V_i^k = 0$) et isotherme ($T = 0$ et $\vec{\nabla}T = 0$). L'inégalité de Clausius-Duhem devant être vérifiée quel que soit $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \tag{4.30}$$

Une seconde loi d'état est obtenue en supposant un chargement thermique uniforme ($\vec{\nabla}T = 0$) impliquant une dilatation élastique ($V_i^k = 0$) non retreinte ($\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$) :

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \tag{4.31}$$

La variable interne associée du phénomène décrit par V_i^k est notée A_i^k :

$$A_i^k = \frac{\partial \Psi}{\partial V_i^k} \tag{4.32}$$

Afin de vérifier la positivité de la dissipation intrinsèque, il est donc nécessaire de vérifier en tout instant :

$$A_i^k \dot{V_i^k} - \frac{\vec{q}.\vec{\nabla}T}{T} \geq 0 \tag{4.33}$$

3.1.3 Potentiel de dissipation

Un potentiel de dissipation est associé à chaque phénomène macroscopique décrit. Soit le potentiel de dissipation φ^k, homogène et convexe par rapport aux variables associées (A_i^k), attribué au phénomène k.

Les lois d'évolutions des variables d'état (V_i^k) en fonction des variables associées (A_i^k) peuvent maintenant être déduites par la condition de normalité. Les variables internes doivent évoluer orthogonalement au convexe défini par le potentiel de dissipation φ^k afin de vérifier le principe de Hill [Hill, 1950]. Ce principe stipule que la solution d'un problème d'équilibre est la solution qui engendre une dissipation énergétique maximale. Les lois d'évolution des variables internes d'état attribuées à un même phénomène, régies par le même potentiel de dissipation, sont alors liées par un unique multiplicateur de Lagrange λ^k.

$$\dot{V}_i^k = \dot{\lambda}^k \frac{\partial \varphi^k}{\partial A_i^k} \tag{4.34}$$

Pour un mécanisme, un couple (φ^k, λ^k) est donc défini. L'évolution de ce couple est régie par les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda}^k \geq 0\,; \qquad \varphi^k \leq 0\,; \qquad \dot{\lambda}^k \varphi^k = 0 \tag{4.35}$$

Lorsque le phénomène k en question est activé, la valeur de $\dot{\lambda}^k$ est obtenue grâce à une nouvelle condition, qui garantit que l'état du matériau reste dans le domaine admissible défini par le potentiel de dissipation :

$$\dot{\varphi}^k = 0 \tag{4.36}$$

Cette égalité est appelée condition de consistance, il s'agit de la dernière condition nécessaire pour déterminer $\dot{\lambda}^k$ et donc l'évolution des variables internes d'état.

3.2 Décomposition de la contrainte totale

Au vu des modélisations existantes du problème de fissuration sous chargement cyclique, il est décidé de suivre une méthodologie similaire, autrement dit le comportement total du matériau fissuré est décomposé en deux parties : d'une part le comportement de la partie restante de matériau sain, et de l'autre le comportement des fissures, incluant toutes les interactions se manifestant lorsque celles-ci se ferment.

Afin de distinguer le comportement mécanique de la matrice saine et des fissures, la contrainte totale de l'élément de volume $\underline{\underline{\sigma}}$ est décomposée en deux tenseurs distincts :

- $\underline{\underline{\sigma}}^m$ la contrainte effective transitant dans la matrice saine de l'élément de volume, classique des modèles d'endommagement, soit : $\underline{\underline{\sigma}}^m = \tilde{\boldsymbol{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}$.
- $\underline{\underline{\sigma}}^f$ la contrainte transitant dans l'ensemble des fissures de l'élément de volume, lorsque celles-ci se referment. En contrôlant l'évolution de cette contrainte, les phénomènes liés à la fermeture des fissures sont introduits.

Deux potentiels thermodynamiques Ψ^m et Ψ^f sont définis et respectivement associés aux comportements mécaniques de la matrice saine et des fissures :

$$\Psi = \Psi^m + \Psi^f \tag{4.37}$$

À ce stade, le potentiel thermodynamique associé au comportement des fissures est laissé entièrement libre, et sera déterminé au chapitre suivant à partir des résultats issus de simulations discrètes. Sur ce dernier point, il en est de même pour le potentiel thermodynamique associé au comportement de la matrice saine, cependant avant de procéder à sa détermination complète, les possibilités de formulation sont réduites, en statuant sur la définition de la variable d'endommagement et par application du formalisme des MSG.

3.3 Application à la théorie de l'endommagement

Dans un premier temps, la problématique de la définition de la variable d'endommagement, notamment sa signification et les degrés de liberté qui lui sont associés sont maintenant discutés. Dans un second temps, le raisonnement duquel découle l'expression de la loi d'évolution de la variable d'endommagement est présenté. L'objectif est d'expliciter les composantes du modèle continu, issues du formalisme MSG, contrôlant cette évolution dans l'objectif de les modifier par la suite.

L'endommagement est un phénomène qui dépend fortement de l'historique du chargement. Il se décrit physiquement comme la diminution de section efficace du VER, suite à l'apparition de micro-fissures. Or le développement des micro-fissures a lieu, préférentiellement, dans la direction normale aux extensions locales. L'endommagement peut donc évoluer indépendamment dans chaque direction de l'espace. Bien que dans un état initial non-endommagé un matériau puisse être caractérisé comme isotrope, cette hypothèse n'est plus valable lorsque les micro-fissures se développent, il est alors fait mention d'anisotropie induite. L'anisotropie induite complexifie la description de l'endommagement, d'autant plus lorsque qu'un regain de rigidité est considéré en cas de fermeture mécanique des fissures.

3.3.1 Définition de la variable d'endommagement

Théoriquement, l'endommagement est considéré comme une détérioration des propriétés élastiques du matériau. L'endommagement affecte donc le tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ d'ordre 4. Dans le cas le plus général d'anisotropie, il est donc nécessaire de considérer une variable d'endommagement tensorielle d'ordre 8 pour relier le tenseur d'élasticité non-endommagé $\boldsymbol{C}$ au tenseur d'élasticité effectif, endommagé, $\tilde{\boldsymbol{C}}$. Cette approche n'est toutefois pas raisonnable. Numériquement, d'abord, une gestion indépendante de l'évolution de chaque composante d'un tenseur d'ordre 8 limite la robustesse d'un modèle. Expérimentalement,

ensuite, les paramètres associés à l'évolution de chaque composante doivent être identifiés.

Une représentation vectorielle de l'endommagement est exclue, le potentiel thermodynamique associé n'est plus invariant par changement de base [Murakami et Kamiya, 1997]. Un tenseur d'endommagement d'ordre 2 symétrique est donc la représentation la plus simple de l'anisotropie admissible. Il s'avère qu'elle est suffisante dans la plupart des cas de chargement d'après [Kachanov, 1992].

La définition de la variable d'endommagement est un compromis entre efficacité numérique et fidélité physique. Cette définition est établie afin de réduire l'ordre de la variable d'endommagement, tout en conservant un modèle thermodynamiquement admissible. Dans la littérature diverses définitions de la variable d'endommagement ont été explorées.

Principe de contrainte effective

La variable d'endommagement $\boldsymbol{D}$, par le biais d'une fonction tensorielle d'endommagement $\boldsymbol{M}$, relie la contrainte totale et la contrainte effective :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^m \tag{4.38}$$

En s'appuyant sur l'écriture de la contrainte effective, le cas le plus général d'anisotropie correspond donc à un tenseur d'endommagement $\boldsymbol{D}$ d'ordre 8. Une restriction à un endommagement orthotrope permet de supposer un tenseur d'ordre 2 symétrique. Le tenseur d'endommagement peut être diagonalisé, cette représentation correspond à un matériau contenant trois groupes orthogonaux de micro-fissures colinéaires. Les normales respectives à chaque groupe sont les directions principales de la fonction tensorielle d'endommagement.

La relation de comportement élastique du matériau endommagé, reliant le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^m$ au tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}^m$, est déduite en effectuant l'hypothèse d'équivalence (ou conservation) d'une quantité, entre le matériau sain et le matériau endommagé. L'hypothèse d'équivalence est le plus souvent faite en déformations ou en énergie.

Dans le cas d'une équivalence en déformation, il advient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^m = \underline{\underline{\epsilon}}^m \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^m = \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^m \\ &\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^m = \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^m \\ &\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}^m = \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right) : \left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^m\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

La partie élastique du potentiel thermodynamique s'écrit enfin :

$$\Psi^{m,e} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}}^m : \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{D}\right) : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^m \tag{4.40}$$

Décomposition de l'endommagement

Une manière de conserver une variable d'endommagement d'ordre réduit, tout en enrichissant la représentation de la fissuration, est de décomposer la variable d'endommagement en plusieurs variables indépendantes, auxquelles sont attribuées un type fissuration spécifique. La quantité de scalaires descriptifs de la fissuration est tout de même augmentée, mais dans une moindre mesure qu'en augmentant l'ordre de la variable d'endommagement.

Le procédé est illustré en considérant des variables d'endommagement scalaires. En considérant un modèle d'endommagement isotrope, le potentiel s'écrit :

$$\Psi^{m,e} = \frac{1}{2}\left(1 - D\right) \underline{\underline{\epsilon}}^{m} : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^{m} \tag{4.41}$$

avec D l'unique variable d'endommagement scalaire.

Les décompositions suivantes peuvent alors être appliquées [Ladevèze, 1983] :

— Une décomposition en parties hydrostatique et déviatorique

$$\Psi^{m,e} = \frac{1}{2}\left(1 - D^{H}\right) 3K \left(tr\left(\underline{\underline{\epsilon}}^{m}\right)\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(1 - D^{D}\right) 2G \left(\underline{\underline{\epsilon}}^{m}\right)^{\mathrm{D}} : \left(\underline{\underline{\epsilon}}^{m}\right)^{\mathrm{D}} \tag{4.42}$$

où D^{H} et D^{D} sont respectivement les variables d'endommagement associées aux parties hydrostatique et déviatorique de la contrainte totale.
Relativement à un modèle d'endommagement isotrope, une telle décomposition permet de tenir compte d'une dépendance du coefficient de Poisson à la fissuration, et ainsi reproduire le phénomène de dilatance.

— Une décomposition en parties positive et négative

$$\Psi^{m,e} = \frac{1}{2}\left(1 - D^{+}\right) \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}^{m} \right\rangle_{+} : \boldsymbol{C} : \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}^{m} \right\rangle_{+} + \frac{1}{2}\left(1 - D^{-}\right) \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}^{m} \right\rangle_{-} : \boldsymbol{C} : \left\langle \underline{\underline{\epsilon}}^{m} \right\rangle_{-} \tag{4.43}$$

où D^{+} et D^{-} sont respectivement les variables d'endommagement associées aux parties positive et négative de la contrainte (en supposant que $\partial\langle \underline{\underline{x}} \rangle_{+} / \partial\left(\underline{\underline{x}}\right) = \mathbf{1}$).
Relativement à un modèle d'endommagement isotrope, une telle décomposition permet à la fois de différencier le comportement en traction et en compression du matériau, et de reproduire l'effet unilatéral.

Il ne s'agit là que d'une courte illustration, de multiples décompositions ont été explorées dans la littérature, comme par exemple, la décomposition fondée sur les tenseurs propres de Kelvin. Elle permet une séparation de la variable d'endommagement selon 6 invariants du tenseur d'élasticité [Rychlewski, 1984].

À noter tout de même qu'une décomposition de la variable d'endommagement revient à postuler qu'il existe effectivement différents types de fissures. D'un point de vue physique, cette hypothèse est peu justifiée, le comportement mécanique d'une fissure n'est pas différentiable, par exemple, selon le type de chargement qui en est à l'origine.

Choix d'un modèle d'endommagement isotrope

Les quelques propositions de définitions de la variable d'endommagement illustrent qu'il est possible d'ajuster la quantité de variables scalaires, descriptives de la dégradation du matériau, aux exigences en terme de représentativité. Une diversification des phénomènes liés à la fissuration pris en compte passe nécessairement par une démultiplication des degrés de liberté dans la description de l'endommagement. Seul un choix judicieux de ces derniers permet d'en limiter le nombre.

Une amélioration de la représentativité d'une variable d'endommagement se fait nécessairement au détriment de la robustesse d'un modèle de comportement. La complexité est proportionnelle à la quantité de variables à faire évoluer. Compte tenu de l'objectif final de ces travaux, à savoir le calcul de structure, la robustesse du modèle continu proposé est primordiale.

Par la suite il est donc fait le choix d'un modèle d'endommagement continu isotrope. Aucune décomposition de la variable d'endommagement scalaire n'est employée. Il est laissé au potentiel de dissipation et à la loi d'évolution de la variable d'endommagement le soin de tenir compte notamment de la dissymétrie du comportement en traction et en compression. En ce qui concerne l'effet unilatéral, il n'est pas géré par le modèle associé à la dégradation du matériau. Comme les autres phénomènes observés sous chargement cyclique, il sera reproduit par un modèle continu dédié à la fermeture des fissures, dont la variable d'endommagement est un paramètre d'entrée.

Le potentiel thermodynamique retenu s'écrit donc sous la forme la plus simple :

$$\Psi^m = \frac{1}{2}\left(1 - D\right) \underline{\underline{\epsilon}}^m : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^m + \Psi^{m,D}(z) \tag{4.44}$$

Les choix des potentiels de dissipation φ^m et de la partie du potentiel thermodynamique $\Psi^{m,D}$ associés au phénomène d'endommagement sont laissés en suspens. Ces deux points sont gardés comme degrés de liberté pour la proposition de modèle à venir (voir chapitre 5). Une étude comparative de différentes combinaisons de potentiels de dissipation et de fonctions de consolidation sera menée afin d'en montrer les limites.

3.3.2 Évolution de l'endommagement

Compte tenu du caractère purement irréversible de la fissuration, la variable d'endommagement est une fonction strictement croissante. Conventionnellement, la variable d'endommagement passe d'une valeur nulle dans le cas d'un matériau sain, à une valeur égale à 1 dans le cas d'un matériau ayant atteint la ruine.

L'évolution de la variable d'endommagement est définie par une fonction critère, qui n'est autre que le potentiel de dissipation dans le formalisme des MSG, et une fonction de consolidation. La fonction critère définit les conditions de sollicitation du VER selon lesquelles la variable d'endommagement peut croître. La fonction de consolidation permet

de faire évoluer la forme de la fonction critère afin de garantir la stricte croissance de la variable d'endommagement. À noter que la fonction critère peut être dissociée du potentiel de dissipation, mais l'évolution des variables internes n'est plus considérée "associée", alors le respect de l'inégalité de Clausius-Duhem n'est plus garanti.

L'écriture de l'évolution de la variable d'endommagement est maintenant explicitée en utilisant les principes imposées par le formalisme des MSG.

Soit le potentiel thermodynamique, dans une forme générale, Ψ^m :

$$\Psi^m\left(\underline{\underline{\epsilon}}^m, D, z\right) = \Psi^{m,e}\left(\underline{\underline{\epsilon}}^m, D\right) + \Psi^{m,D}\left(z\right) \tag{4.45}$$

avec $\Psi^{m,e}$ la partie élastique du potentiel thermodynamique, $\underline{\underline{\epsilon}}^m$ le tenseur des déformations totales, D la variable interne d'endommagement, z la variable interne d'écrouissage, et $\Psi^{m,D}$ la partie du potentiel thermodynamique associée à l'écrouissage appelée fonction de consolidation.

En exploitant l'inégalité de Clausius-Duhem (4.25), les lois d'état sont :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \frac{\partial \Psi^m}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^m} = \frac{\partial \Psi^{m,e}}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^m} \qquad Y = -\frac{\partial \Psi^m}{\partial D} = -\frac{\partial \Psi^{m,e}}{\partial D} \qquad Z = -\frac{\partial \Psi^m}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}\left(z\right)}{\mathrm{d}z} \tag{4.46}$$

avec Y le taux de restitution d'énergie et Z, respectivement les variables associées de l'endommagement et de l'écrouissage.

Le potentiel de dissipation φ^m, qui doit être choisi comme une fonction convexe des variables internes associées, est aussi laissé dans une forme générale, soit :

$$\varphi^m = \varphi^{m,D}\left(Y\right) - Z \tag{4.47}$$

avec $\varphi^{m,D}$ la partie du potentiel de dissipation associée à l'endommagement.

Bien souvent le potentiel de dissipation n'est qu'une fonction linéaire de l'écrouissage. Ici, ce choix est effectué pour simplifier les calculs suivants.

Et d'après la seconde de condition de Kuhn-Tucker (4.35) :

$$\varphi^m\left(Y, Z\right) \leq 0 \tag{4.48}$$

D'après le principe de Hill :

$$\begin{cases} \dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y} \\ \dot{z} = \dot{\lambda}\frac{\partial \varphi^m}{\partial Z} = -\dot{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \qquad \dot{D} = -\dot{z}\left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right) \qquad \Rightarrow \qquad D = -\left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right) z \tag{4.49}$$

La dernière implication est possible puisque initialement l'endommagement et l'écrouissage sont égaux et nuls.

Or d'après la condition de consistance (4.36) :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^m = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial \varphi^m}{\partial Z}\dot{Z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \dot{Y} = \left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)^{-1}\dot{Z} \end{aligned} \tag{4.50}$$

Enfin, en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_{Y_0}^{Y} \mathrm{d}u = \int_{Z_0}^{Z} \left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)^{-1} \mathrm{d}v \Leftrightarrow Y - Y_0 &= \int_0^z \left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w \\ \Leftrightarrow Y - Y_0 &= \left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)^{-1} \int_0^z \frac{\mathrm{d}^2\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z \\ \Rightarrow Y - Y_0 &= \left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}(z) - \cancel{\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}(0)}\right) \\ \Rightarrow z &= \left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}(Y - Y_0) \\ \Rightarrow D &= -\left(\frac{\partial \varphi^m}{\partial Y}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}\right)^{-1}(Y - Y_0) \end{aligned} \tag{4.51}$$

le terme $\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}(0)$ disparaît car Z est initialement nul.

L'évolution de la variable d'endommagement est donc clairement déterminée par le choix du potentiel de dissipation φ^m et de $\Psi^{m,D}$.

4 Modélisation de la dégradation de la matrice

Les choix de modélisation en terme de dégradation du matériau effectués jusqu'à présent suivent une volonté de proposer un modèle de comportement continu dont la robustesse est suffisante pour permettre de mener à terme des calculs de structures sous chargement cyclique. Ainsi un modèle d'endommagement isotrope établi dans le formalisme des Matériaux Standards Généralisés a été retenu pour décrire la dégradation du matériau. La partie associée à la matrice saine Ψ^m du potentiel thermodynamique Ψ s'écrit :

$$\Psi^m = \frac{1}{2}(1 - D)\,\underline{\underline{\epsilon}} : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}} + \Psi^{m,D}(z) \tag{4.52}$$

Dans la continuité de cette démarche, il est décidé de limiter les degrés de liberté d'évolution de l'unique variable scalaire d'endommagement. Il a été montré (4.51) que l'évolution de la variable d'endommagement D est déduite de l'écriture du potentiel de dissipation φ^m et de la fonction de consolidation $\Psi^{m,D}$. Ainsi une écriture unique, quel que soit l'état de sollicitation dans le matériau, de φ^m et $\Psi^{m,D}$ est recherchée.

À partir d'une évolution de D de référence, dérivant des travaux de Mazars [1984], deux améliorations sont proposés afin d'améliorer le comportement sous sollicitations multi-axiales. L'une affecte φ^m, et donc la surface élastique du matériau ; l'autre affecte $\Psi^{m,D}$ et donc le comportement adoucissant.

4.1 Modèle initial

Le critère de Mazars [1984] est ici reformulé dans un cadre thermodynamique, ce qui donne lieu à l'écriture d'un potentiel de dissipation non-associé φ^m en fonction d'un taux de restitution d'énergie $\bar{Y}$ et de la variable interne associé de l'écrouissage Z :

$$\varphi^m = \bar{Y} - (Y_0 + Z) \tag{4.53}$$

Le taux $\bar{Y}$ est écrit en fonction de la déformation équivalente ϵ_{eq} :

$$\bar{Y} = \frac{1}{2} E \epsilon_0 \epsilon^{eq} \tag{4.54}$$

avec la limite de déformation élastique ϵ_0, la déformation équivalente de Mazars [1984] $\epsilon^{eq} = \sqrt{\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+}$, et le paramètre seuil Y_0, écrit de la même manière : $Y_0 = \frac{1}{2} E \epsilon_0^2$.

La fonction de consolidation $\Psi^{m,D}$ est choisie selon la forme proposée par Feenstra et De Borst [1996] :

$$\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}(z) = -\frac{1}{B_0} ln \left[\frac{Y_0}{\bar{Y}} (1 + z) \right] \tag{4.55}$$

Un tel choix permet d'écrire explicitement et simplement la relation entre l'énergie de fissuration $G_{F,0}$, une longueur caractéristique de l'élément fini h^c et le paramètre B_0. Dans le cadre d'une régularisation en énergie de fissuration, la fonction de consolidation de Feenstra et De Borst [1996] autorise une souplesse plus importante que celle proposée par Mazars [1984], en terme de dimension h^c admissible d'élément fini.

À partir de l'équation (4.51), en utilisant le potentiel non-associé et en remplaçant Y par $\bar{Y}$, l'évolution de D s'écrit :

$$D = 1 - \frac{Y_0}{\bar{Y}} \exp\left[-B_0 \left(\bar{Y} - Y_0 \right) \right] \tag{4.56}$$

Pour la suite le modèle initial sera notée "formulation ∅".

4.2 Améliorations

Le modèle initial reproduit déjà convenablement le comportement en traction. Les deux améliorations sont élaborées de manière à n'avoir aucune incidence sur cette partie du comportement, celle-ci fera office d'étalonnage lors du comparatif effectué ensuite (voir 4.4).

Chaque amélioration introduit un paramètre supplémentaire k_0 permettant d'influencer le comportement sous sollicitation multi-axiale, du cisaillement à la compression.

4.2.1 Potentiel de dissipation

De multiples formulations de φ^m permettent de considérer les effets d'un chargement multi-axial [Drucker et Prager, 1952; De Vree et al., 1995; François, 2008]. Nombre d'entre elles peuvent être assimilées à une actualisation de $\bar{Y}$, comme le propose Ragueneau et al. [2008]. La dépendance de φ^m à $\bar{Y}$ restant inchangée, l'équation (4.56) est donc toujours valable.

Une reformulation de φ^m n'a de conséquences attendues que sur la forme de la surface de chargement à la rupture. Néanmoins, l'évolution de $\bar{Y}$ est affectée et donc par la même occasion D (4.56). Dans le cas du potentiel de dissipation proposé par François [2008],$\bar{Y}$ est formulée selon l'équation (4.57) ce qui permet d'obtenir une surface de chargement à la rupture hautement fidèle à l'expérience quel que soit le chargement multi-axial appliqué. Néanmoins, il devient nécessaire de modifier $\Psi^{m,D}$ pour compenser l'évolution exponentielle de $\bar{Y}$ dans l'estimation de D, et éviter une rupture trop fragile.

$$\bar{Y} = \frac{1}{2}\epsilon_0\sigma^{eq} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\left[\mathrm{J}_2\left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\right)\right]^{1/2} + k_0\left\{\left[\exp\left(\frac{\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}}{k_0}\right) : \exp\left(\frac{\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}}{k_0}\right)\right]^{1/2} - 3^{1/2}\right\}\right) \tag{4.57}$$

Ici, un potentiel de dissipation dont la formule est une fonction linéaire du tenseur des déformations est retenue (4.58) [Ragueneau et al., 2008]. Une dépendance au niveau contraction volumique du matériau est introduite par rapport au potentiel de dissipation initial. Cette dépendance est contrôlée par le paramètre k_0.

$$\bar{Y} = \frac{1}{2}E\epsilon_0\epsilon^{eq} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\sqrt{\langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_+ : \langle\underline{\underline{\epsilon}}\rangle_+} + \frac{k_0}{K}\left\langle \mathrm{I}_1\left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\right)\right\rangle_-\right) \tag{4.58}$$

avec K le module de compressibilité.

Contrairement à la proposition de Ragueneau et al. [2008], un passage par le tenseur de contraintes $\left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\right)$ est effectué. Ainsi, en traction $\left\langle \mathrm{I}_1\left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\right)\right\rangle_- = 0$. Ceci s'avère utile dans l'objectif d'une comparaison des formulations améliorées sur la base d'un comportement en traction uni-axiale identique.

Pour la suite la formulation dont le potentiel de dissipation a été amélioré sera notée "formulation φ^m".

4.2.2 Fonction de consolidation

La formulation de $\Psi^{m,D}$ est adaptée en considérant que la propagation de la fissuration dans un volume de matériau est ralentie lorsque ce-dernier est confiné :

$$\frac{\mathrm{d}\Psi^{m,D}}{\mathrm{d}z}(z) = -\frac{\kappa}{B_0} ln\left[\frac{Y_0}{\bar{Y}}(1+z)\right] \tag{4.59}$$

avec la variable κ chargée de retranscrire le niveau de confinement :

$$\kappa = 1 + k_0\left(\frac{\langle \underline{\underline{\sigma}}^m\rangle_- : \langle \underline{\underline{\sigma}}^m\rangle_-}{\left(\underline{\underline{\sigma}}^m\right) : \left(\underline{\underline{\sigma}}^m\right)}\right)^{1/2} = 1 + k_0\left(\frac{\langle \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\rangle_- : \langle \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\rangle_-}{\left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\right) : \left(\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}\right)}\right)^{1/2} \tag{4.60}$$

Ainsi, pour cette formulation, le paramètre k_0 mesure l'influence du niveau de confinement. Une écriture de κ en fonction du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^m$ est préférable pour les mêmes raisons que précédemment. L'évolution de l'endommagement s'écrit finalement :

$$D = 1 - \frac{Y_0}{\bar{Y}}\exp\left[-\frac{B_0}{\kappa}\left(\bar{Y} - Y_0\right)\right] \tag{4.61}$$

Pour la suite la formulation dont la fonction de consolidation est améliorée sera notée "formulation $\Psi^{m,D}$".

4.3 Énergie de fissuration et méthodes de régularisation

Le comportement en traction uni-axiale des trois formulations est identique. En effet, dans le cas de la formulation $\Psi^{m,D}$, κ vaut 1 pour un chargement de traction ; dans le cas de la formulation φ^m, la dérivée partielle du potentiel de dissipation par rapport à $\bar{Y}$ est inchangée. La loi d'évolution de la variable d'endommagement est donc identique pour chaque formulation.

En l'absence d'autre mécanismes dissipatifs, l'aire sous la courbe contrainte-déformation, jusqu'à la rupture ($\epsilon = +\infty$) représente l'énergie volumique dissipée par fissuration $g_{F,0}$. L'expression de la loi d'évolution de D permet de la calculer analytiquement en fonction des paramètres ϵ_0 et B_0 :

$$\begin{aligned} g_{F,0} &= \int_{\epsilon=0}^{+\infty} \sigma^m \mathrm{d}\epsilon \\ &= \int_{\epsilon=0}^{+\infty} (1-D)E\epsilon\mathrm{d}\epsilon \\ &= \frac{1}{2}E\epsilon_0^2 + \int_{\epsilon=\epsilon_0}^{+\infty} E(1-D)\epsilon\mathrm{d}\epsilon \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}E\epsilon_0^2 + \int_{\epsilon=\epsilon_0}^{+\infty} E\epsilon\frac{Y_0}{\bar{Y}}\exp\left[-B_0\left(\bar{Y}-Y_0\right)\right]\mathrm{d}\epsilon \\
&= \frac{1}{2}E\epsilon_0^2 + \int_{\epsilon=\epsilon_0}^{+\infty} E\epsilon_0\exp\left[-\frac{B_0E\epsilon_0}{2}\left(\epsilon-\epsilon_0\right)\right]\mathrm{d}\epsilon \\
&= \frac{1}{2}E\epsilon_0^2 + \left[-\frac{2}{B_0}\exp\left[-\frac{B_0E\epsilon_0}{2}\left(\epsilon-\epsilon_0\right)\right]\right]_{\epsilon=\epsilon_0}^{+\cancel{\infty}} \\
&= \frac{1}{2}E\epsilon_0^2 + \frac{2}{B_0}
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

En admettant les paramètres matériaux figés, l'énergie volumique dissipée par fissuration jusqu'à la rupture $g_{F,0}$, écrite de cette manière, est donc une constante. L'énergie dissipée par fissuration est donc proportionnelle au volume dégradé. Elle s'écrit :

$$
\begin{aligned}
G_{F,0} &= h^c \times g_{F,0} \\
&= h^c\left(\frac{E}{2}\epsilon_0^2 + \frac{2}{B_0}\right)
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

avec h^c la dimension du volume dégradé dans la direction normale au plan de fissuration.

Or d'après la théorie de la mécanique de la rupture, l'énergie dissipée par fissuration dans un volume dépend plutôt de la surface de fissures ouvertes. L'énergie surfacique dissipée par fissuration $G_{F,0}$ doit donc être constante. En pratique, lors d'une simulation continue, le volume dégradé correspond à celui d'un élément fini, ou plus précisément une bande d'éléments finis située le long de la fissure, d'un unique élément fini dans l'épaisseur duquel se localise l'endommagement. L'énergie dissipée par fissuration dépend donc de la finesse du maillage par lequel le milieu est discrétisé.

Dans la mesure où le maillage est homogène, $g_{F,0}$ peut être ajustée au préalable d'une simulation en fonction de h^c, de manière à retrouver l'énergie de fissuration $G_{F,0}$ mesurée expérimentalement ou par le biais de simulations discrètes (fig. 2.1). La limite de déformation élastique ϵ_0 possède un sens physique bien déterminé et indépendant de h^c, elle n'est donc pas modifiée, mais ce n'est pas le cas de B_0. Le paramètre B_0 est donc ajusté en fonction de h^c :

$$
B_0 = \frac{2h^c}{G_{F,0} - \frac{E\epsilon_0^2h^c}{2}} \tag{4.64}
$$

En revanche lorsque la finesse de maillage est fortement hétérogène, deux solutions existent afin de palier ce problème de dépendance au maillage :

— Les méthodes dites de "régularisation" en énergie de fissuration [Hillerborg et al., 1976], consistent simplement en une modification de l'énergie volumique dissipée spécifique pour chaque élément fini. Les méthodes de régularisation n'ajoutent aucun coût de calculs supplémentaires, puisqu'elles consistent simplement en une

modification des propriétés matérielles de chaque élément fini. De plus le faciès de fissuration est préservé, dans la mesure où la réponse mécanique de chaque élément fini reste adoucissante. Cependant, les méthodes de régularisation nécessitent, dans un premier temps de pouvoir calculer analytiquement l'expression de l'énergie volumique dissipée par le modèle, et dans un second temps de pouvoir exprimer un paramètre du modèle en fonction de cette dernière. Ces conditions ne sont pas systématiquement vérifiées, et limitent les choix des expressions de la fonction de consolidation et du potentiel de dissipation.

— Les méthodes dites "non-locales" [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987], qui comme leur nom l'indique, consistent à délocaliser l'endommagement, ou plutôt limiter la localisation. L'endommagement n'évolue donc plus dans une bande de l'épaisseur d'un unique élément fini, mais dans une bande dont l'épaisseur est déterminée par un paramètre supplémentaire, appelé "longueur de corrélation". Les méthodes non-locales sont simples d'utilisation, elles présentent l'avantage d'être systématiques, et nécessitent uniquement de définir la valeur de la longueur de corrélation. Il n'est pas nécessaire de pouvoir écrire l'énergie de fissuration en fonction des paramètres du modèle, donc de pouvoir calculer analytiquement l'énergie de fissuration. Néanmoins, afin de répartir l'endommagement sur plusieurs éléments finis, il est nécessaire d'effectuer des itérations supplémentaires entre l'équilibre global, et la résolution des équations du modèle de comportement local. Les méthodes non-locales sont donc coûteuses numériquement, puisqu'elles démultiplient le nombre de résolutions de l'équilibre global à chaque incrément de chargement. Par ailleurs, puisque l'endommagement est réparti sur une bande de plusieurs éléments finis d'épaisseur, la fidélité du faciès d'endommagement est réduite en comparaison aux méthodes de régularisation.

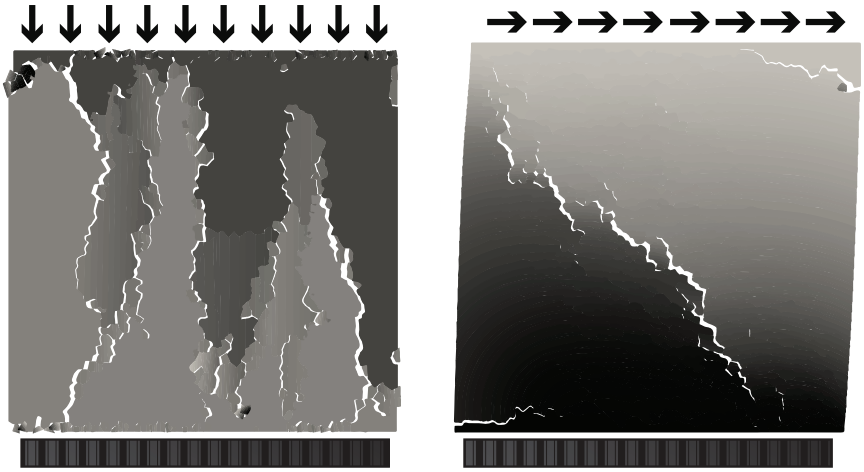
Les deux méthodes sont compatibles avec les formulations proposées, et pourront être utilisées si nécessaire lors de calculs de structures effectués avec Cast3M.

4.4 Étude comparative des formulations

L'influence du paramètre k_0 sur le comportement bi-axial de chacune des formulations est maintenant étudiée. Cette étude est menée à autres paramètres constants.

La comparaison des formulations est effectuée sur les réponses en cisaillement et en compression pure, ainsi que sur la surface de chargement à la rupture. Une analyse de sensibilité de chacun de ces résultats au paramètre k_0 est effectuée pour les deux formulations améliorées.

Pour chaque essai, le résultat obtenu par la formulation ∅ n'est pas présenté, mais il est identique aux résultats obtenus avec les deux autres formulations pour $k_0 = 0$.



(a) essai de compression pure (b) essai de cisaillement simple

FIGURE 4.11: Dispositif des essais de comparaison entre les modèles discret et continu.

4.4.1 Essai de compression pure

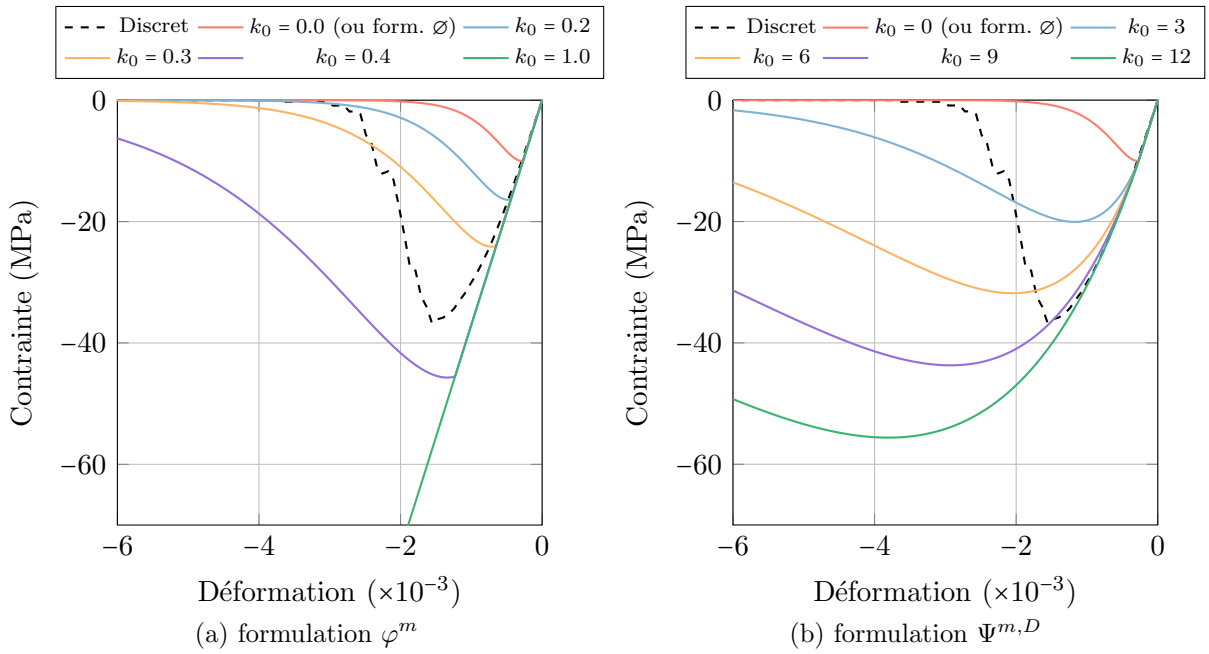
Un essai de compression pure (fig. 4.11a), donc en absence totale de friction au niveau des supports, est simulé avec le modèle discret selon le protocole présenté précédemment (voir chapitre 3), en utilisant un coefficient correction de rigidité k_p nul. À noter que la réponse obtenue par simulation discrète est relativement fragile en l'absence totale de friction entre l'éprouvette et les supports de chargement.

Le comportement initial du modèle continu en compression, celui obtenu avec la formulation $\varnothing$, possède une ductilité correcte en comparaison au résultat de référence, cependant la contrainte au pic de résistance est largement sous-estimée, celle-ci se situe aux environs de 10 MPa. La dégradation en compression n'est pas différenciée de la dégradation en traction, si ce n'est que les extensions qui l'engendrent sont induites par effet Poisson.

La formulation φ^m permet de retarder l'apparition du pic de résistance en compression, sans affecter le comportement adoucissant post-pic, ainsi la fragilité de la réponse en compression est identique à celle de la réponse en traction.

La formulation $\Psi^{m,D}$ ne modifie pas la limite élastique du matériau en compression, ainsi la non-linéarité du comportement apparaît dès 10 MPa comme pour la formulation $\varnothing$. Mais la modification de la fonction d'écoulement permet d'atteindre le pic de résistance pour des niveaux de déformation bien plus élevés, l'évolution de la variable d'endommagement est suffisamment lente pour que le comportement inélastique ne soit pas immédiatement adoucissant. En revanche, pour atteindre un niveau de résistance au pic similaire à la référence, le comportement post-pic devient excessivement ductile. La ductilité est plutôt

similaire à celle obtenue pour un essai de compression avec une friction non-nulle entre les supports de chargement et l'éprouvette.



(a) formulation φ^m (b) formulation $\Psi^{m,D}$

FIGURE 4.12: Analyse de sensibilité des réponses en compression pure à k_0.

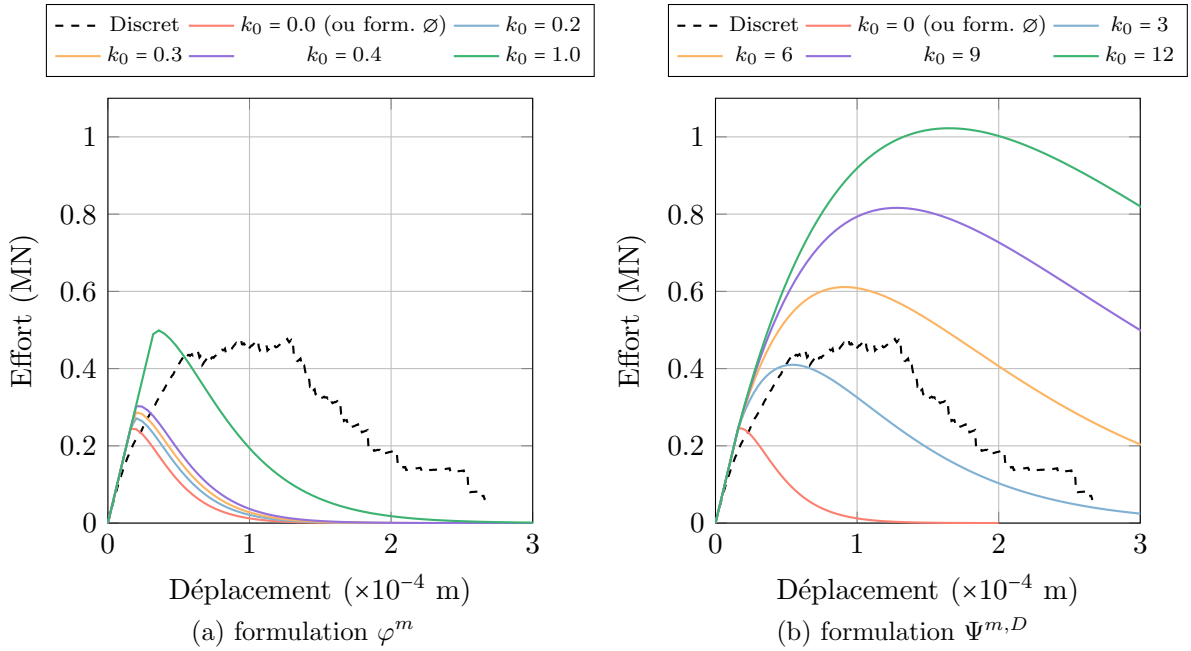
4.4.2 Essai de cisaillement simple

Dans l'idéal un essai de cisaillement pur aurait été utilisé, cependant il est difficile de garantir un état macroscopique de cisaillement pur avec un modèle mésoscopique, une fois le pic de chargement et l'initiation de la fissuration atteints. Un essai de cisaillement simple (fig. 4.11b), facilitant l'étude de la réponse du VER, est finalement retenu.

La formulation ∅ atteint un pic de résistance en cisaillement simple à 0.25 MN, une valeur presque deux fois inférieure au pic de résistance obtenu avec la simulation de référence discrète. Relativement, le comportement post-pic semble plus fragile. Il est intéressant de noter, toutefois, que le pic de résistance est proche de la première perte de linéarité observée sur le résultat de référence. Cette perte de linéarité est expliquée par l'amorce de fissures horizontales dans les coins supérieur droit et inférieur gauche de l'éprouvette, au début de l'essai, avant l'apparition de la fissuration oblique (fig. 4.11b).

La formulation φ^m permet, tout comme en compression pure, de retarder l'apparition du pic de résistance, sans affecter le comportement adoucissant. Cependant la formulation φ^m est, cette fois-ci, bien moins sensible à la variation du paramètre k_0. Afin d'atteindre un pic de résistance similaire à la référence discrète, il est nécessaire d'augmenter significativement la valeur de k_0.

La formulation $\Psi^{m,D}$ retarde, encore une fois l'apparition du pic de résistance, tout en maintenant la valeur de la limite élastique à sa valeur d'origine. Bien que l'évolution de la variable d'endommagement soit ralentie avant le pic de résistance, une fois ce dernier atteint, il ne semble pas que la variation de k_0 affecte la ductilité de la réponse. La vitesse d'adoucissement semble similaire quelle que soit la valeur de k_0. Le décalage entre la limite élastique et le pic de résistance, permis par la modification de la fonction de consolidation, permet en quelque sorte de reproduire la première de non-linéarité induite par l'amorce de fissures horizontales.



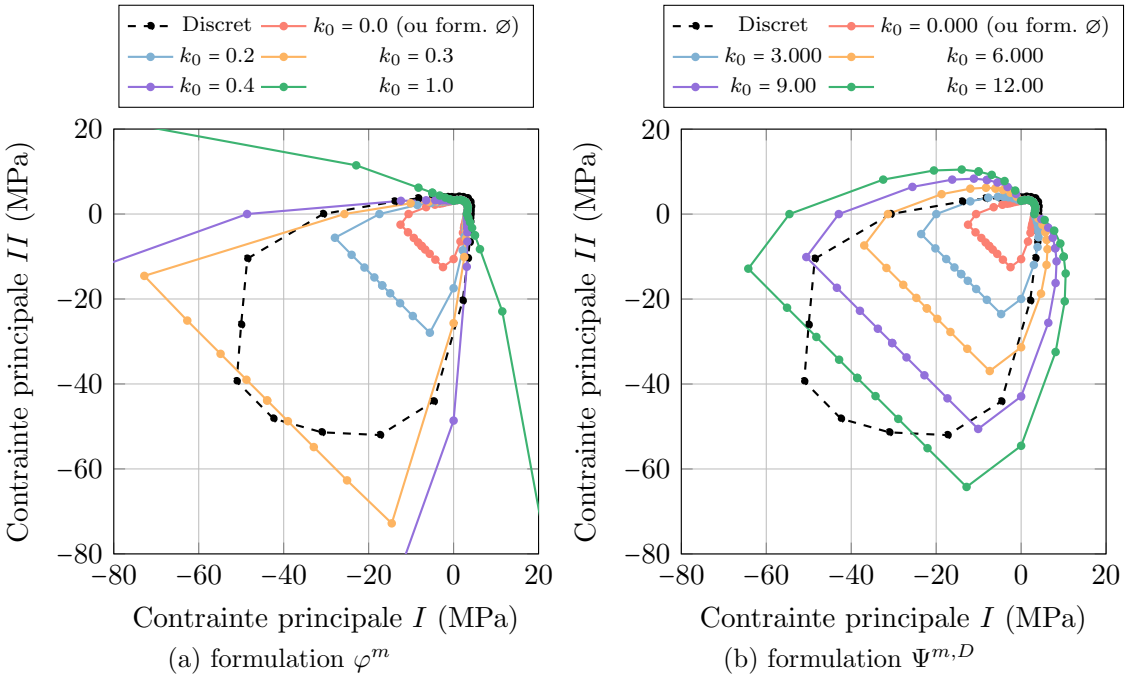
(a) formulation φ^m (b) formulation $\Psi^{m,D}$

FIGURE 4.13: Analyse de sensibilité des réponses en cisaillement simple à k_0.

4.4.3 Essais bi-axiaux de chargement à la rupture

La surface de chargement à la rupture est évaluée à partir de chargements bi-axiaux appliqués en efforts. Les points de chargement à la rupture correspondent à l'état de contrainte appliqué au pic de résistance, ce qui se traduit numériquement par une divergence des algorithmes de résolution des modèles discrets et continus.

Bien que la surface de chargement simulée par le modèle discret ait nécessité une modification du critère de rupture (voir chapitre 2), pour tenir compte d'un effet tri-dimensionnel à l'origine de la rupture en bi-compression, elle conserve une forme proche des surfaces de chargement à la rupture obtenues expérimentalement. Elle ne sert pas ici de référence, mais plutôt d'indicateur.



(a) formulation φ^m (b) formulation $\Psi^{m,D}$

FIGURE 4.14: Analyse de sensibilité des surfaces de chargement à la rupture à k_0.

La surface de chargement obtenue avec la formulation ∅ est, comme attendue, largement sous-estimée. Néanmoins, elle possède une forme correcte, tant que le chargement n'est pas en bi-compression.

La formulation φ^m permet efficacement d'étendre la surface de chargement, en conservant la dissymétrie de résistance en traction et en compression. Puisque la formulation dont le potentiel de dissipation a été amélioré tient compte de la trace de la partie négative du tenseur des contraintes, les directions de chargement correspondant à une combinaison de contraintes principales positives ne sont pas affectées.

La formulation $\Psi^{m,D}$ influence semblablement la surface de chargement à la rupture. Par contre, la formulation $\Psi^{m,D}$ permet d'étendre plus significativement la surface de chargement dans les directions associées au cisaillement, moins dans celles associées à la compression, inversement à la formulation φ^m.

Pour finir sur les surfaces de chargement à la rupture, aucune formulation n'est capable de traduire l'influence du caractère hydrostatique du chargement en bi-compression sur le pic de résistance, observé expérimentalement ou sur les simulations discrètes.

4.4.4 Bilan

Chacune des formulations présente un intérêt différent selon la direction de chargement préférentielle :

— La formulation φ^m peut être exploitée de deux manières différentes :
  - Si la compression est privilégiée, alors k_0 est choisi dans l'intervalle $[0.3; 0.4]$, ce qui permet d'obtenir, en plus d'une réponse en compression satisfaisante, une surface de chargement correcte. Par contre la résistance en cisaillement est clairement sous-estimée.
  - Si le cisaillement est privilégié, alors k_0 est choisi à une valeur proche de 1.0, la réponse en cisaillement est alors correcte, bien que toujours trop fragile, mais il n'est plus possible de rompre en compression ou en bi-compression.

— Le même raisonnement peut être appliqué pour la formulation $\Psi^{m,D}$, mais la nuance selon le choix de direction préférentielle est moins significatif. Au vu des aptitudes très intéressantes en cisaillement de cette formulation, cette direction de chargement est privilégiée. Ainsi en choisissant k_0 dans l'intervalle $[3.0; 6.0]$, la réponse en cisaillement est très proche de la référence discrète, aussi bien en terme de pic de résistance qu'en terme d'adoucissement ; et la réponse en compression pure est légèrement plus faible que la référence, le pic de résistance est compris dans l'intervalle $[20; 30]$ MPa.

Finalement, pour les calculs de structures à venir, la compression sera privilégiée pour le choix du paramètre k_0 de la formulation φ^m, ainsi deux formulations améliorées du modèle initial sont tenues à disposition, chacune permettant de décrire convenablement un comportement spécifique. Il sera donc possible sur le calcul de structure en question de déterminer quel comportement est prédominant en observant la qualité de la réponse fournie par chaque formulation.

5 Modélisation du caractère unilatéral frottant des fissures

La description du comportement mécanique des fissures est réalisée en deux temps. D'abord, afin de considérer la fermeture progressive des fissures lors de la décharge d'une éprouvette endommagée et donc l'augmentation progressive de la raideur, une modélisation élastique non-linéaire est employée. Cette modélisation se fonde sur l'idée, confirmée à l'aide du modèle discret, que les valeurs de la déformation à laquelle se ferment les fissures ouvertes suivent une distribution normale. Ensuite seulement, la notion de mécanisme dissipatif est introduite. Par similarité avec le modèle de frottement de Coulomb, la théorie de la plasticité, et plus précisément une modélisation plastique parfaite est employée pour retranscrire les effets hystérétiques associés au glissement frottant initié entre les surfaces des fissures.

5.1 Définition du comportement mécanique des fissures

Le comportement mécanique des fissures, décrit par la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^f$, est dans un premier temps considéré comme élastique. La contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^f$ est définie comme une fonction de la déformation associée aux fissures de l'élément de volume étudié $\underline{\underline{\epsilon}}^f$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^f = D \times \underline{\underline{\epsilon}} \tag{4.65}$$

Une telle définition du tenseur de déformation associé aux fissures est aussi trouvée dans les travaux de Matallah et al. [2010], dans lesquels il est d'ailleurs dénommé tenseur d'ouverture des fissures.

L'évolution élastique de $\underline{\underline{\sigma}}^f$ en fonction de $\underline{\underline{\epsilon}}^f$ est supposée de la forme suivante :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^f = \vartheta \boldsymbol{C} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^f \tag{4.66}$$

En d'autres termes, le module tangent de l'évolution de la contrainte transmise par les fissures est proportionnel au module d'élasticité sain $\boldsymbol{C}$ et à une fonction scalaire ϑ. La fonction ϑ retranscrit la proportion de raideur saine récupérée, soit la proportion de fissures dans le VER qui se sont fermées. ϑ évolue ainsi entre les valeurs 0, lorsque toutes les fissures sont ouvertes, et 1, lorsque toutes les fissures sont fermées. La fonction ϑ est considérée comme dépendante de $\underline{\underline{\epsilon}}^f$, soit : $\vartheta = \vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)$.

Le comportement mécanique des fissures $\underline{\underline{\sigma}}^f = f\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)$ suit donc un comportement élastique non-linéaire.

La partie élastique du potentiel thermodynamique associé aux fissures est donc de la forme :

$$\Psi^{f,e} = \int \left(\int \vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right) \boldsymbol{C} : \mathrm{d}\underline{\underline{\epsilon}}^f \right) \mathrm{d}\underline{\underline{\epsilon}}^f \tag{4.67}$$

en admettant que $\vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)$ soit de classe $\mathcal{C}^0$, alors le potentiel $\Psi^{f,e}$ vérifie les conditions d'admissibilité thermodynamique.

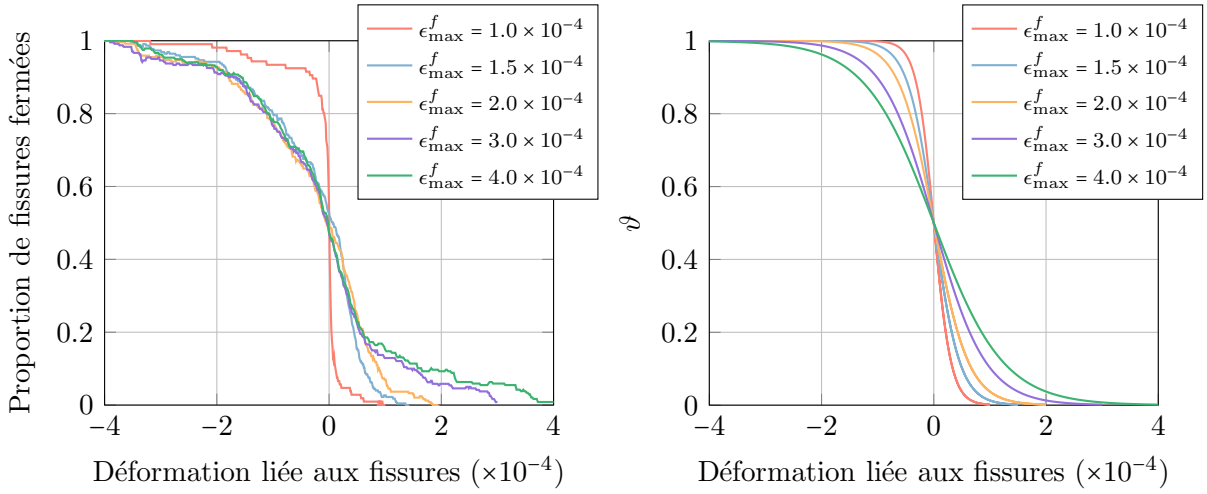
Le cadre de modélisation des phénomènes associés au caractère unilatéral frottant de la fissuration est ainsi établi, le modèle discret est à présent exploité pour définir une expression analytique de la fonction ϑ.

5.2 Caractérisation de la fonction de fermeture

Comme expliqué auparavant, la fonction ϑ traduit la proportion de fissures refermées, autrement dit qui participent à la transmission des effort dans l'élément de volume étudié. L'évolution de ϑ est caractérisée en observant, à l'aide du modèle discret, l'évolution de la quantité de contacts détectés lors d'un cycle de charge-décharge de traction uni-axiale

(fig. 4.15a). L'étude est menée pour différents niveaux d'endommagement, c'est-à-dire différents niveaux de chargement maximal appliqués lors de la phase de charge notés $\epsilon^f_{\max}$.

Afin d'observer une quantité homogène à ϑ, le nombre de contacts détectés est normalisé par rapport au nombre de fissures induites par le chargement. La proportion de fissures fermées est ainsi tracée en fonction de la déformation liée aux fissures axiale appliquée ϵ^f.



(a) simulation discrètes (b) fonction de fermeture ϑ avec $\lambda_0 = 6.5$

FIGURE 4.15: Influence de ϵ^f_{max} sur l'évolution de la proportion de fissures refermées lors d'une décharge.

Quel que soit $\epsilon^f_{\max}$, l'évolution de la proportion de fissures fermées tend vers une sigmoïde, centrée en $\epsilon^f = 0$. Autrement dit, la quantité de fissures nouvellement fermées suit une distribution gaussienne centrée en 0. Les notions probabilistes introduites par le modèle de Preisach-Mayergoyz (voir 2.2.3) sont aussi mises en évidence par les simulations discrètes. $\vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)$ est ainsi définie comme une sigmoïde centrée :

$$\vartheta = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left[-f\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)\right]} \tag{4.68}$$

Le niveau de chargement maximal appliqué semble avoir une certaine influence sur l'évolution de la proportion de fissures fermées. L'évolution est d'autant plus rapide que ϵ^f_{max} est faible. Cette dépendance semble toutefois saturer pour des valeurs élevées de ϵ^f_{max}. D'où :

$$\vartheta = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left[-f\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f, \underline{\underline{\epsilon}}^f_{max}\right)\right]} \tag{4.69}$$

avec $\underline{\underline{\epsilon}}^f_{\max} = \underline{\underline{\epsilon}}^{f,t_m}$, et le pseudo-temps t_m tel que $\mathrm{I}_1\left(\underline{\underline{\epsilon}}^{f,t_m}\right) = \max\limits_{\forall t}\left[\mathrm{I}_1\left(\underline{\underline{\epsilon}}^{f,t}\right)\right]$.

Afin de conserver le caractère scalaire de ϑ dans un formalisme tri-dimensionnel, la fonction f s'appuie sur le premier invariant des tenseurs de déformations, et sur un paramètre α_0 pour garder un contrôle sur l'inclinaison de la pente à l'origine de ϑ.

$$\vartheta = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left[-\alpha_0 \frac{\mathrm{I}_1\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)}{\mathrm{I}_1\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f_{\max}\right)}\right]} \tag{4.70}$$

Avec une telle formulation et un paramètre $\alpha_0 = 6.5$, l'influence de ϵ^f_{max} sur l'évolution de ϑ (fig. 4.15b) est semblable à l'influence sur la proportion de fissures fermées observée grâce au modèle discret (fig. 4.15a).

À paramètre α_0 identifié (voir 2.2.1), la réponse complète du modèle incluant le comportement élastique non-linéaire associé aux fissures sous chargement de traction cyclique uni-axiale est présentée en figure 4.16.

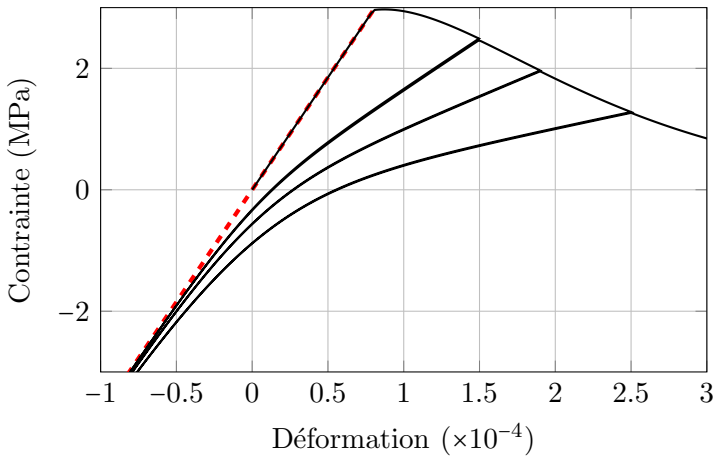


FIGURE 4.16: Réponse du modèle sans dissipation énergétique associée à la friction.

Le modèle continu ainsi formulé reproduit correctement la reprise de raideur progressive, parabolique, observée expérimentalement. Des déformations résiduelles sont d'ores et déjà observables en traction, mais sont ensuite compensées au passage en compression. Lorsque la décharge se poursuit en compression, la réponse tend vers le comportement sain du matériau (en rouge sur la figure 4.16) sans présence de décalage des déformations.

Concernant la robustesse du modèle, l'expression de ϑ étant continue, Ψ^f est thermodynamiquement admissible et la relation de comportement établie est donc entièrement continue.

Le parallèle entre ce modèle et les modèles de Preisach-Mayergoyz ne s'arrête pas à la considération d'un aspect statistique, ϑ est en fait semblable à la distribution ρ des

opérateurs relais dans le domaine de Preisach. Plus précisément ϑ possède la même signification que ρ le long de la diagonale $\sigma_o = \sigma_c$, à ceci près, que la première est fonction des déformations et la seconde des contraintes.

Par ailleurs, aucune loi dissipative n'a encore été introduite dans la description du comportement des fissures, il est donc normal de n'observer aucun effet hystérétique. Le choix de la loi dissipative à adopter fait l'objet de ce qui suit.

5.3 Ajout d'un mécanisme dissipatif

L'association des effets hystérétiques à un glissement frottant des surfaces des fissures justifie la description de ce phénomène par la théorie de la plasticité. Une généralisation tri-dimensionnelle du modèle de frottement parfait de Coulomb est employée.

5.3.1 Formulation

Potentiel thermodynamique et lois d'état

De manière générale en théorie de la plasticité, le potentiel thermodynamique Ψ^f s'écrit comme une partie élastique $\Psi^{f,e}$ complétée d'une partie plastique $\Psi^{f,p}$, afin de tenir compte du glissement par l'introduction de deux variables internes, la déformation plastique dans les fissures $\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}$ telle que $\underline{\underline{\epsilon}}^f = \underline{\underline{\epsilon}}^{f,e} + \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}$, et un écrouissage cinématique $\underline{\underline{\alpha}}^f$:

$$\begin{aligned}\Psi^f &= \Psi^{f,e}\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f - \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\right) + \Psi^{f,p}\left(\underline{\underline{\alpha}}\right)\\ &= \int\left(\int \vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f - \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\right)\boldsymbol{C} : \mathrm{d}\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f - \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\right)\right)\mathrm{d}\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f - \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\right) + \frac{1}{2}\gamma_0\underline{\underline{\alpha}}^f : \underline{\underline{\alpha}}^f\end{aligned} \tag{4.71}$$

avec γ_0 le module d'écrouissage cinématique.

Or $\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}$ est indépendant de $\underline{\underline{\epsilon}}^f$. De plus $\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}$ est une déformation plastique et traduit une déformation à volume constant, son premier invariant est ainsi nul, d'où $\vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f - \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\right) = \vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)$. De plus, un écrouissage n'est pas considéré ici nécessaire pour traduire un frottement parfait, donc γ_0 est considéré nul. Alors :

$$\Psi^f = \int\left(\int \vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)\boldsymbol{C} : d\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)\mathrm{d}\underline{\underline{\epsilon}}^f - \frac{1}{2}\vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p} : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p} \tag{4.72}$$

Soit :

$$\Psi^f = \Psi^{f,e}\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right) - \frac{1}{2}\vartheta\left(\underline{\underline{\epsilon}}^f\right)\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p} : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p} \tag{4.73}$$

D'après l'inégalité de Clausius-Duhem (4.25), les lois d'états s'écrivent :

$$\begin{cases}\underline{\underline{\sigma}}^f = \frac{\partial\Psi^f}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}^f} = \int \vartheta\boldsymbol{C} : d\underline{\underline{\epsilon}}^f - \frac{1}{2}\frac{\partial\vartheta}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}^f}\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p} : \boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\\ \underline{\underline{\sigma}}^f = -\frac{\partial\Psi^f}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}} = \vartheta\boldsymbol{C} : \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}\end{cases} \tag{4.74}$$

La continuité de la relation de comportement, requiert une continuité de l'évolution de $\underline{\underline{\sigma}}^f$, il faut donc s'assurer que ϑ soit $\mathcal{C}^2$. Étant donné que ϑ est une fonction sigmoïde, la continuité de la relation de comportement découlant de ce potentiel est vérifiée.

Potentiel de dissipation et lois d'évolution

Concernant le potentiel de dissipation retenu, il prend la forme d'un critère de Drucker-Prager :

$$\varphi^f = \sqrt{\mathrm{J}_2\left(\underline{\underline{\sigma}}^f\right)} + \mu_0 \mathrm{I}_1\left(\underline{\underline{\sigma}}^f\right) \tag{4.75}$$

avec μ_0 un paramètre assimilé à un coefficient de frottement.

Petit aparté sur la signification physique du modèle. Un rapprochement peut être fait entre le choix de ce potentiel de dissipation et la justification physique des effets hystérétiques. Le terme en J_2 du critère est une fonction du déviateur du tenseur des contraintes, il quantifie donc le cisaillement dans les fissures. Lorsque ce terme excède le terme en $\mu_0\mathrm{I}_1$, fonction de la trace du tenseur des contraintes, qui peut donc être assimilé à la pression normale dans les fissures, le glissement frottant est observé.

En outre, le terme J_2 quantifiant le niveau de cisaillement dans les fissures, est fonction de ϑ par l'intermédiaire de $\underline{\underline{\sigma}}^f$. Le niveau de cisaillement dépend alors de la proportion de fissures ouvertes. Lorsque les fissures sont ouvertes le terme en J_2 tend à être nul. En ce point le modèle ici proposé se distingue notamment du modèle de Richard et Ragueneau [2013], pour lequel la contrainte utilisée dans le potentiel de dissipation de glissement ne tient pas compte de l'ouverture des fissures (4.18). Le terme quantifiant le niveau de cisaillement est évalué en considérant les fissures fermées en permanence, soit à partir d'un tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{fr} = D\boldsymbol{C} : \left(\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)^{\mathrm{D}} - \underline{\underline{\epsilon}}^{fr}\right)$. Le niveau de cisaillement est estimé à partir d'un tenseur des contraintes dont le sens physique est limité, ce qui pourrait être une explication à la forme peu réaliste des boucles d'hystérésis.

Retour à présent sur l'écriture des lois d'évolutions du modèle plastique. La condition de normalité des écoulements des variables d'état par rapport au potentiel de dissipation fournit les lois d'évolution en fonction d'un unique multiplicateur de Lagrange λ^f, lorsque le glissement est activé :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{f,p} = \dot{\lambda}^f \frac{\partial \varphi^f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^f} \tag{4.76}$$

En exploitant les lois d'état (4.74), il advient :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^f = \dot{\lambda}^f \vartheta \boldsymbol{C} : \frac{\partial \varphi^f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^f} \tag{4.77}$$

Le potentiel de dissipation n'est plus formulé en déformations, comme cela a pu être le cas pour la modélisation de la dégradation, les variations de contraintes et d'écrouissage sont donc implicites. La valeur du multiplicateur de Lagrange est toujours obtenue en

vérifiant la condition de consistance (4.36) déduite des conditions de Kuhn-Tucker (4.35), mais son obtention requiert une résolution itérative. L'algorithme *Return-Mapping* [Simo et Taylor, 1986] est alors employé.

À l'itération n il s'écrit :

$$\Delta\varphi^{f,n} = \cancel{\varphi^{f,n}} - \varphi^{f,n-1} \tag{4.78}$$

Or :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi^{f,n} &= \left(\frac{\partial\varphi^f}{\partial\underline{\underline{\sigma}}^f}\right)^n : \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{f,n} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi^f}{\partial\underline{\underline{\sigma}}^f}\right)^n : \left(\Delta\lambda^{f,n}\vartheta^n\boldsymbol{C} : \left(\frac{\partial\varphi^f}{\partial\underline{\underline{\sigma}}^f}\right)^n\right)\end{aligned} \tag{4.79}$$

Donc :

$$\Delta\lambda^{f,n} = \frac{-\varphi^{f,n-1}}{\vartheta^n\left(\frac{\partial\varphi^f}{\partial\underline{\underline{\sigma}}^f}\right)^n : \boldsymbol{C} : \left(\frac{\partial\varphi^f}{\partial\underline{\underline{\sigma}}^f}\right)^n} \tag{4.80}$$

Une fois le multiplicateur de Lagrange évalué, le tenseur des contraintes associé aux fissures $\underline{\underline{\sigma}}^f$ peut être actualisé.

5.3.2 Résultat et limites

À paramètre μ_0 identifié (voir 2.2.2), la réponse finale du modèle continu avec prise compte des phénomènes liés à la fermeture de la fissuration est présentée en figure 4.17.

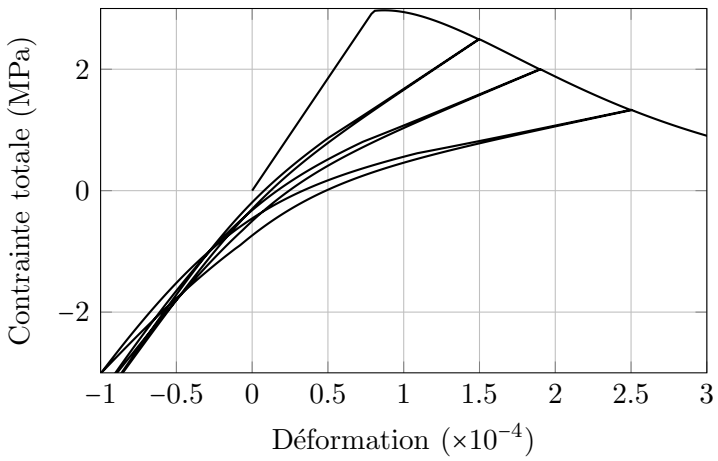
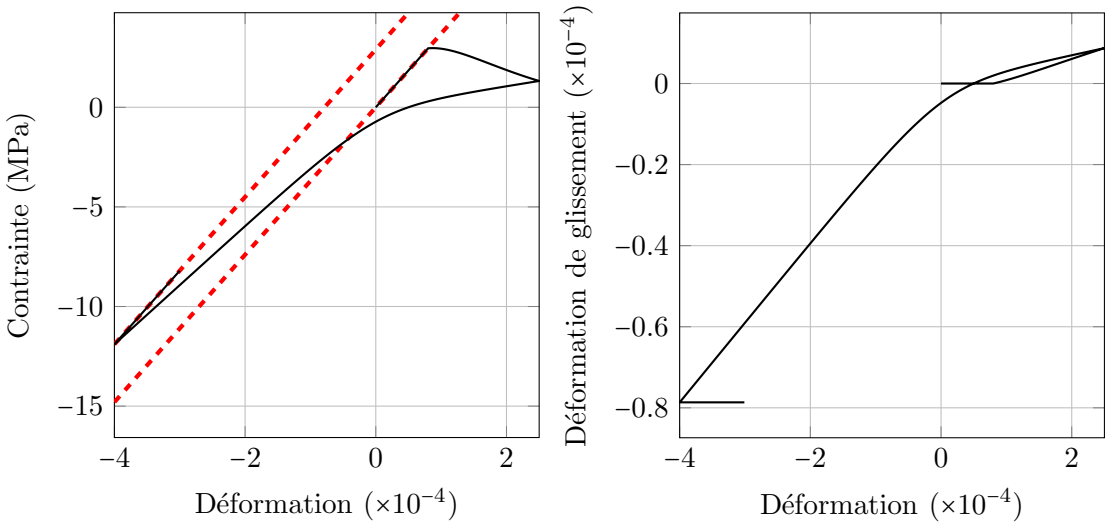


FIGURE 4.17: Réponse du modèle complet.

La représentativité du modèle sous chargement cyclique, vis-à-vis de la réponse du modèle discret (fig. 3.44) ou des réponses expérimentales (fig. 1.10), est significativement améliorée. L'intégralité des phénomènes recherchés (effet unilatéral progressif, effets hystérétiques, déformations permanentes) sont correctement reproduits. Une dépendance au niveau d'endommagement de la taille des boucles d'hystérésis est même observée.

Une limite de ces choix de modélisation des effets cycliques doit toutefois être relevée. Lorsque l'éprouvette est déchargée puis comprimée, le glissement frottant des fissures ne cesse d'être activé, ce qui explique les décalages observés en fin de chaque décharge (fig. 4.17). La figure (4.18) illustre plus en détails ce problème, un chargement de compression élevé est appliqué à la suite d'un premier chargement de traction ayant initié l'endommagement.



(a) évolution de la contrainte (b) évolution de la déformation de glissement

FIGURE 4.18: Évolution des variables d'état du modèle complet lors d'un cycle de charge-décharge.

Sur la réponse de l'éprouvette (fig. 4.18a), le trait pointillé rouge représente la raideur saine. Contrairement à la réponse obtenue avant l'introduction du glissement (fig. 4.16), il semble que la raideur tangente ne retrouve plus sa valeur initiale, même à des niveaux de compression élevés.

Une explication peut être trouvée en regardant l'évolution de la déformation plastique $\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}$ (fig. 4.18b) traduisant le glissement. En déchargeant puis en comprimant l'éprouvette le potentiel de dissipation φ^f est activé, et les déformations plastiques augmentent. Cependant il apparaît que leur évolution ne sature pas, et ce quelle que soit l'amplitude du chargement de compression appliqué. Puisque le glissement ne cesse pas, une partie de la raideur de l'éprouvette n'est jamais récupérée ; plus précisément, puisque $\underline{\underline{\epsilon}}^{f,p}$ est déviatorique et que l'écrouissage est nul, l'intégralité de la raideur en cisaillement associée

au module de cisaillement élastique G n'est pas récupérée. À noter qu'en recharge, le glissement est désactivé et donc la raideur tangente est bien égale à la raideur saine.

Cette observation est une contre-partie de la simplicité du modèle établi. Lorsque en décharge, les fissures se ferment, un glissement frottant est effectivement généré, ce qui est en accord avec le choix d'un comportement plastique parfait. Néanmoins, lorsque les fissures sont complètement fermées, l'emboîtement des aspérités empêche tout glissement (fig 4.19), bien que le niveau de cisaillement local puisse être élevé. Un modèle de plasticité cinématique parfait ne suffit pas pour représenter ce mécanisme. En effet, dans le potentiel φ^f les termes en J_2 et en I_1 évoluent proportionnellement, donc il n'est pas possible que le terme en I_1 reprenne le dessus, et que le glissement soit désactivé.

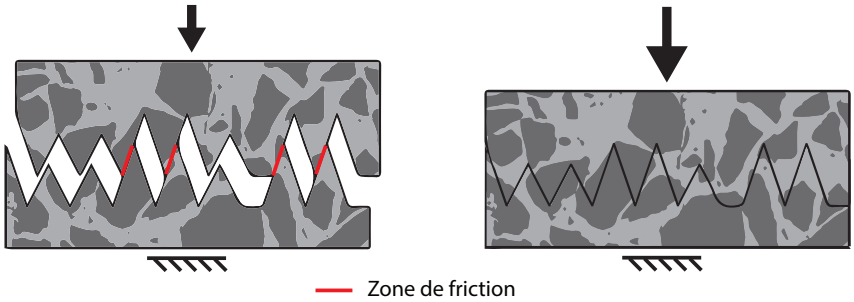


FIGURE 4.19: Fissure à deux instants de la fermeture.

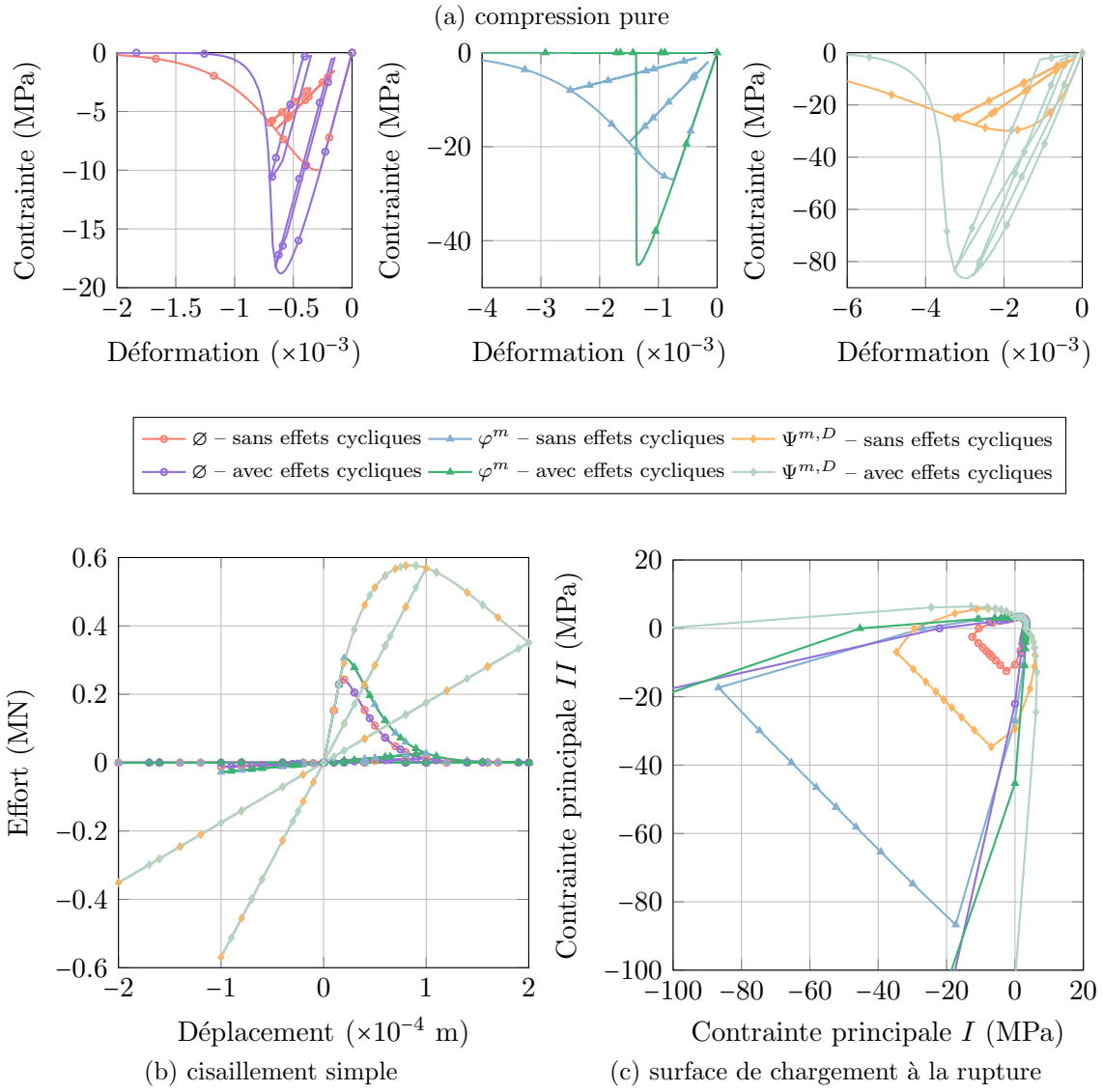
Aucune piste d'amélioration du modèle de plasticité n'a pour l'instant été trouvée, cependant de manière presque empirique une évolution non-linéaire du terme en I_1 pourrait être considérée afin de permettre la saturation du glissement.

5.4 Comportement cyclique sous chargement multi-axial

Le comportement multi-axial, résultant du couplage des modélisations de la dégradation (voir 4) et des effets cycliques, est maintenant analysé. La modélisation des effets cycliques n'a pas été établie en prenant en considération ce type de chargement, il est donc nécessaire de vérifier, que le couplage ne détériore pas significativement le comportement multi-axial.

L'étude est menée en considérant les paramètres du modèle d'endommagement identifiés sans tenir compte des effets cycliques (2.1). Ainsi, les réponses sous différents chargements étant étudiées à paramètres identiques, seule l'introduction de la modélisation des effets cycliques peut être tenue pour responsable des différences observées.

Les réponses cycliques en compression pure et en cisaillement simple, ainsi que la surface de chargement à la rupture sont analysées (fig. 4.20).



(b) cisaillement simple

(c) surface de chargement à la rupture

FIGURE 4.20: Influence de l'ajout de la considération des effets cycliques sur les comportements à la rupture.

L'influence de l'introduction des effets cyclique dans le modèle de d'endommagement n'est pas identique dans chaque direction de chargement :

— En compression pure, le comportement à la rupture est fortement altéré. Le pic de résistance est sensiblement augmenté, et en particulier pour les formulations ∅ et $\Psi^{m,D}$. La réponse est aussi plus fragile. En compression la trace du tenseur des déformations, et donc la trace du tenseur des déformations dans les fissures est négative, ϑ est donc non-nulle, et contre-balance l'effet de l'endommagement. Il est intéressant de noter qu'en considérant l'effet de la fermeture des fissures, la formulation ∅ atteint un pic de résistance en compression pure convenable, sans, finalement, modifier la modélisation de la dégradation à proprement parler. Par

ailleurs, sous chargement alterné, dans la mesure où le comportement n'est pas rendu trop fragile, des effets hystérétiques ainsi que des déformations résiduelles peuvent être observées. Les déformations résiduelles sont de l'ordre de celles qu'induiraient un modèle plastique, or ici le seul comportement plastique introduit est celui associé au glissement.

— En cisaillement simple, il n'y a tout bonnement aucune influence, ni sur le comportement à la rupture, ni sur le comportement cyclique. Aucune reprise de raideur n'est à noter lors de l'alternance du chargement.

— Sur la surface de chargement à la rupture, l'unique conséquence est l'impossibilité d'atteindre un pic de résistance lors d'un chargement de bi-compression. Bien que la variable d'endommagement soit proche de 1, aucune perte de rigidité n'est observée, puisque immédiatement compensée par la fermeture des fissures, qui se traduit par la fonction ϑ, elle aussi proche de 1.

Dès lors que la modélisation des effets cycliques est introduite dans le modèle d'endommagement, un état de contraction ($\mathrm{I}_1\left(\underline{\underline{\epsilon}}^{f,t_m}\right) < 0$) retarde la rupture, et plus fortement un état de bi-compression, l'empêche. Comme il l'a été mentionné lors de l'analyse de sensibilité du paramètre k_0 (voir 4.4), pour l'identification de la formulation $\Psi^{m,D}$, le comportement en cisaillement est privilégié, ainsi aucun changement de l'identification du paramètre k_0 n'est à attendre avec l'introduction des effets cycliques. En revanche, pour l'identification de la formulation φ^m, le comportement en compression est privilégié pour l'identification de k_0, la valeur du paramètre doit donc être adaptée, dans la mesure où les effets cycliques sont considérés.

6 Algorithme d'intégration du modèle continu

Le modèle continu ainsi établi, incluant la modélisation du comportement de la matrice, laissant libre le choix de la formulation du modèle d'endommagement, et la modélisation du comportement des fissures est récapitulé en figure 4.21. Ce schéma décrit l'algorithme permettant de résoudre la relation de comportement non-linéaire entre l'état de contrainte dans le VER et l'état de déformations. L'intégration de l'endommagement et de la reprise de rigidité est explicite, et l'intégration de la plasticité est implicite.

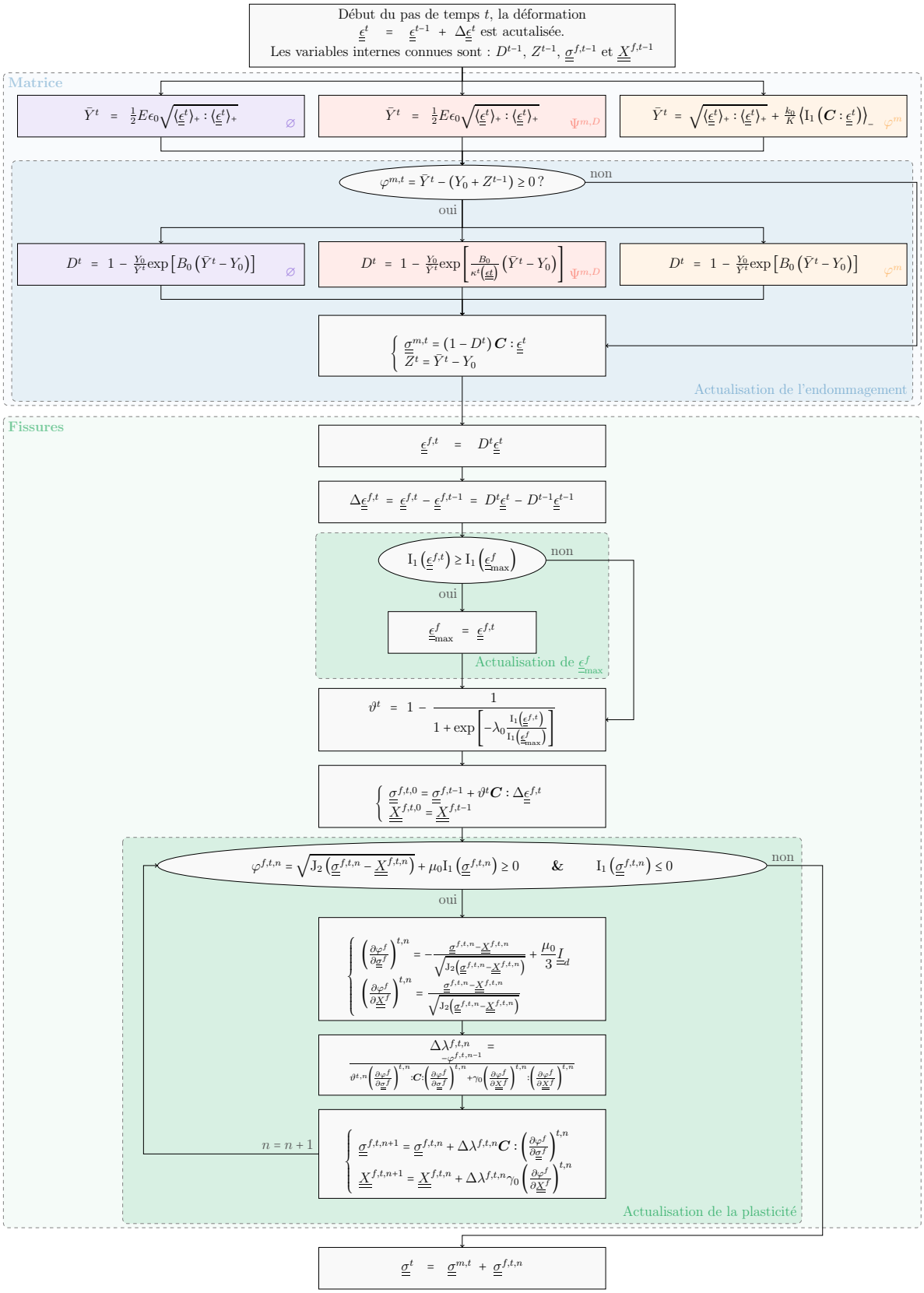


FIGURE 4.21: Diagramme de l'algorithme de résolution local du modèle continu.

7 Synthèse

Une revue bibliographique des modélisations continues existantes des phénomènes associés à la fissuration, aussi bien sous chargements cycliques que monotones, a permis d'explorer différentes approches de modélisation : empirique, phénoménologique et intégrée. Les modélisations empiriques, qui se basent directement sur le contenu qu'elles cherchent à reproduire, en général la réponse du matériau, ont évidemment montré une bonne représentativité du comportement, mais souffrent d'une formulation souvent unidimensionnelle, difficilement extensible à trois dimensions. Les modèles phénoménologiques, qui se fondent sur des théories constitutives telles que la plasticité ou l'endommagement, n'affichent pas nécessairement une telle représentativité, mais ont l'avantage d'exploiter des théories longuement et toujours développées, d'ores et déjà formalisées en trois dimensions. Les modèles intégrés, incluant les modèles micro-mécaniques, micro-plans et de Preisach, qui s'appuient sur une description à une échelle inférieure à l'échelle du VER, allient réalisme physique, représentativité et formalisme tri-dimensionnel. Ce dernier est inhérent aux procédures d'homogénéisation sur lesquelles reposent ces modèles. Néanmoins, il leur en coûte leur simplicité d'utilisation et leur légèreté.

Une modélisation phénoménologique a finalement été retenue comme base pour le cadre de modélisation continue élaboré. Ce choix a notamment été influencé par la facilité à intégrer cette approche de modélisation dans le formalisme des MSG, permettant de définir des conditions d'admissibilité, qui éviteront par la suite d'élaborer une modélisation continue en contradiction avec les principes fondamentaux de la thermodynamique. Les évolutions des variables internes d'un même phénomène devront être liées à l'expression d'un unique potentiel de dissipation, et ne pourront donc être complètement indépendantes. Dans l'objectif d'entreprendre des simulations structurales, une garantie de robustesse, ainsi que des coûts de calculs faibles ont ainsi été décisifs dans le choix d'une approche phénoménologique.

Dans la foulée, il a aussi été proposé pour l'élaboration du modèle continu, de distinguer dès le début, les contributions mécaniques de la matrice de matériau saine et des fissures. La description de la dégradation permettant d'isoler le comportement de la partie saine est fondée sur la théorie de l'endommagement. Toujours sur des considérations de robustesse, une unique variable d'endommagement scalaire a été retenue. L'évolution de cette variable a pu être décrite intégralement en appliquant le formalisme des MSG, en fonction du potentiel thermodynamique $\Psi^{m,D}$ et du potentiel de dissipation φ^m. La description du caractère unilatéral frottant des fissures a, lui, été laissé entièrement libre de choix.

Le modèle discret a ainsi pu être exploité pour la production de résultats numériques de référence pour caractériser les comportements mécaniques indéfinis du modèle continu, décrits par les potentiels $\Psi^{m,D}$, φ^m et Ψ^f, ainsi que d'éventuels potentiels de dissipation liés au comportement irréversible des fissures. Le modèle discret a pu notamment être mis à profit en simulant la réponse de matériaux quasi-fragiles, difficilement mesurée expérimentalement, à un chargement de cisaillement ; ainsi qu'en analysant la proportion

de fissures ouvertes et fermées à tout instant d'un chargement de traction cyclique uni-axiale.

La modélisation de la dégradation de la matrice a été réalisée de manière à affiner le représentativité du comportement multi-axial. Sur la base d'un résultat de référence issu de simulations discrètes, en cisaillement simple, et d'une formulation des plus triviales de l'endommagement, un modèle initial et deux formulations améliorées ont été proposées, pour lesquelles les potentiels $\Psi^{m,D}$ et φ^m ont été définis : la formulation $\varnothing$; une première formulation améliorée $\Psi^{m,D}$ pour laquelle la fonction de consolidation de l'endommagement a été adaptée ; et une seconde formulation améliorée φ^m pour laquelle le potentiel de dissipation a été modifié. Les lacunes affichées par la formulation $\varnothing$ sous chargement multi-axial ont pu être partiellement corrigées par les deux formulations, tout en préservant la réponse en traction. La première formulation améliorée a notamment permis d'augmenter la ductilité de la réponse du VER pour des chargements allant du cisaillement à la compression, ainsi que d'agrandir partiellement la surface de chargement à la rupture. La seconde formulation améliorée a, quant à elle, très peu affecté la ductilité du comportement, qui, d'après les résultats issus de simulations discrètes ne semblait pas nécessiter d'amélioration significative en compression pure. En revanche, la surface de chargement à la rupture a été adaptée de manière à obtenir un pic de résistance correct en compression.

La modélisation du caractère unilatéral frottant des fissures a été formulée afin de reproduire le comportement expérimental observé par Nouailletas [2013] et simulé à l'aide du modèle discret au chapitre 3. Plus spécifiquement, l'objectif visé était de reproduire l'évolution de la proportion de fissures fermées quel que soit l'état de chargement. Cette donnée a été extraite par l'intermédiaire de simulation discrètes. Une fonction ϑ chargée de retranscrire cette quantité, a ainsi été intégrée dans une modélisation, d'abord élastique non-linéaire du comportement des fissures. Le niveau de déformation associé à la fermeture d'une fissure affichant un aspect statistique centré autour d'une déformation moyenne nulle, la fonction ϑ a pu être associée à une fonction de répartition, autrement dit une sigmoïde. Une telle fonction présentant l'avantage d'être continue et continument dérivable, elle a permis de régulariser la modélisation de l'effet unilatéral et de vérifier certaines conditions d'admissibilité du potentiel Ψ^f établies par le formalisme des MSG, tout en améliorant la représentativité du modèle. Le caractère frottant a été ajouté, ensuite, par le biais d'une modélisation plastique des plus simples. Un potentiel de dissipation de type Drucker-Prager, généralisation tri-dimensionnelle du critère de frottement Coulomb, a été utilisé. Aucun écrouissage n'a été nécessaire à l'image d'un modèle de glissement frottant parfait. Aux déformations résiduelles déjà introduites par la fermeture progressive des fissures induite par l'expression sigmoïdale de ϑ, les effets hystérétiques ont ainsi été ajoutés.

Seule la réponse sous chargement de traction cyclique uni-axiale n'a été considérée pour caractériser le comportement des fissures. L'influence de l'incorporation du comportement des fissures sur la réponse multi-axiale du modèle continu a alors été analysée. Malheureu-

sement aucune influence n'a été observée sur le comportement en cisaillement cyclique. Par contre le comportement en compression cyclique a été enrichi, des effets hystérétiques ont ainsi pu être observés en compression, sans le moindre ajout de plasticité dans le comportement de la matrice, ainsi qu'une élévation significative du pic de résistance, même pour le modèle initial. Un point négatif est tout de même à noter, l'incorporation du comportement des fissures élimine toute possibilité de rupture sous sollicitation de compression bi-axiale. Néanmoins, cet aspect ne devrait pas être pénalisant car ce type de rupture n'est que rarement rencontré à l'échelle de la structure.

De manière plus générale, il est à noter que la modélisation continue du comportement des fissures est relativement indépendante du modèle de dégradation choisi. Ainsi a partir du moment où ce dernier permet d'exprimer la densité de fissuration sous la forme d'une variable scalaire, la modélisation du comportement des fissures peut lui être adjointe. Celle-ci peut donc être perçue comme un module complémentaire pour la plupart des modèles de dégradation existants.

Chapitre 5

Identification numérique d'une modélisation macroscopique et application au calcul de structures

Sommaire

1 Introduction 164

2 Stratégie d'identification de la modélisation continue 164

2.1 Identification des modélisations de l'endommagement 165

2.2 Identification de la modélisation des effets cycliques 174

3 Application au calcul d'un voile en béton armé 176

3.1 Descriptif de l'essai 177

3.2 Modélisation et calibration 179

3.3 Résultats 181

4 Synthèse 188

1 Introduction

Une modélisation continue du comportement des matériaux quasi-fragiles a été proposée au chapitre précédent. L'identification des paramètres du modèle continu est la dernière étape avant de pouvoir procéder aux calculs de structures. L'identification des paramètres, tout comme la caractérisation des équations de la modélisation continue, permet d'exploiter l'outil d'expérimentation numérique proposé. Par équivalence de résultats obtenus avec les modèles continu et discret, ce-dernier considéré comme référence, l'ensemble des paramètres matériaux introduits dans le modèle continu sont identifiés. L'utilisation d'un premier modèle comme référence permet une maîtrise parfaite des conditions aux limites des essais de comparaison lors de l'identification du second. La démarche d'identification numérique est illustrée avec les paramètres du modèle discret identifiés sur le béton de Grégoire et al. [2013].

Des calculs de structures peuvent maintenant être réalisés. Le cas d'un voile en béton armé soumis à un chargement de cisaillement alterné est traité. Avant d'étudier le comportement cyclique, il est fait en sorte de retrouver une dégradation identique, ou du moins similaire. Puisque les paramètres du modèle continu sont déjà figés, la possibilité de pouvoir adapter la modélisation spécifique de la dégradation de la matrice est intéressante. Une fois le modèle continu complètement établi, des analyses de la réponse sous chargement cyclique, ainsi que du comportement dissipatif de la structure sont menées.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en avant l'intérêt de la démarche de modélisation à deux échelles, comme outil d'identification de modèle macroscopique. Ainsi pour l'ensemble des simulations réalisées au cours de ce chapitre, les paramètres du modèle continu identifiés ne sont pas recalibrés. Le béton utilisé pour le voile étudié est considéré similaire au béton de Grégoire et al. [2013]. Ainsi un paramètre du modèle continu n'est modifié que si une valeur est directement fournie par le rapport d'expérience, et s'avère différente. À noter que seuls le module de Young et la résistance élastique sont concernés, les valeurs pour d'autres paramètres ne sont pas fournies.

À noter, sauf mention du contraire, que tous les résultats discrets présentés dans ce chapitre sont une moyenne arithmétique sur 50 tirages.

2 Stratégie d'identification de la modélisation continue

L'identification est réalisée en comparant les résultats de simulations discrètes et continues sur une même éprouvette. Ainsi, la comparaison entre les deux modèles n'est pas altérée par les effets d'échelles. L'éprouvette simulée est supposée représenter un VER, elle est modélisée, d'un côté par un ensemble de particules discrètes, et de l'autre, par un unique élément fini muni du modèle continu.

La campagne d'essais expérimentaux de Grégoire et al. [2013] a permis d'identifier complètement le modèle discret, qui peut maintenant être utilisé pour produire des résultats de référence. La comparaison des trois modèles continus est effectuée sur la base de ces résultats. Pour rappel, les paramètres du modèle discret figurent dans le tableau 3.1. En ce qui concerne le comportement cyclique, l'introduction de la perturbation expérimentale mesurée par Nouailletas [2013] est aussi introduite (voir chapitre 3).

2.1 Identification des modélisations de l'endommagement

L'identification est entièrement réalisée sur un essai de traction uni-axiale en comparant les comportements d'un élément fini cubique de 0.1 m de côté simulés avec chaque formulation du modèle continu, et le comportement moyen sur 200 réalisations d'un carré de 0.1 m de côté simulé avec le modèle discret.

Le comportement en traction étant identique quel que soit k_0, cette stratégie d'identification est commune à chaque formulation.

Après avoir identifié les paramètres élastiques macroscopiques du modèle continu (E = 37 GPa, ν = 0.21) par analyse inverse, les paramètres contrôlant le comportement à la rupture sont identifiés en réalisant une équivalence en énergie entre les deux modèles.

Dans le modèle discret, l'énergie totale E_{tot} introduite dans l'éprouvette à un instant donné se décompose en une énergie élastique E_E, une énergie dissipée par fissuration E_F^d et une énergie dissipée par friction E_μ^d, l'énergie cinétique reste nulle puisque la vitesse de déformation est négligeable :

$$E_{tot} = E_E + E_F^d + E_\mu^d \tag{5.1}$$

Puisque l'identification est réalisée sur un essai de traction, l'énergie dissipée par friction reste négligeable tout au long de l'essai.

À la rupture, l'énergie totale est donc égale à l'énergie dissipée par fissuration.

L'énergie totale E_{tot} est obtenue à partir de l'aire sous la courbe de la contrainte en fonction de la déformation de l'éprouvette issue de simulations discrètes (fig .5.3).

L'énergie dissipée par fissuration E_F^d est calculée incrémentalement selon Rinaldi et Lai [2007], comme suit :

$$E_F^{d,t+1} = E_F^{d,t} + \frac{1}{2}\left({}^T\underline{u}^{t+1}.\underline{\underline{K}}_{coh}^{t}.\underline{u}^{t} \quad - \quad {}^T\underline{u}^{t}.\underline{\underline{K}}_{coh}^{t+1}.\underline{u}^{t+1}\right) \tag{5.2}$$

Cette expression est la somme de l'énergie élastique contenue dans chaque poutre du *lattice* ayant rompu, à laquelle est soustraite l'énergie redistribuée dans le *lattice*, au moment de la rupture de chaque poutre.

L'énergie élastique est calculée comme la différence entre l'énergie totale et l'énergie dissipée par fissuration.

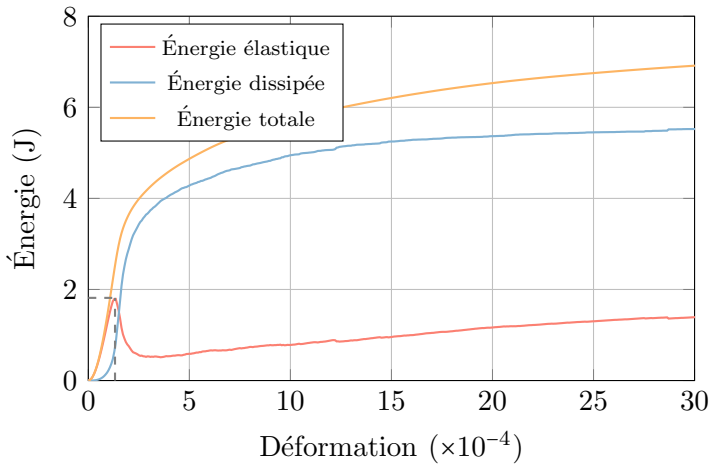


FIGURE 5.1: Évolution moyenne des énergies lors d'un essai de traction.

L'évolution de l'énergie élastique E_E^d (fig. 5.1) et la réponse en traction (fig. 5.3) mettent en évidence des ponts de fissures (*crack face bridging*) [Schlangen et Van Mier, 1992]. Ce phénomène consiste en une superposition de plusieurs fissures macroscopiques dans la partie dégradée de l'éprouvette. Ici en figure 5.2, deux fissures se sont propagées, ces fissures ne coïncidant pas, l'éprouvette continue de se déformer sans rompre. Bien que la déformation atteigne 3.0×10^{-3}, la rupture complète de l'éprouvette n'est toujours pas observée (fig. 5.3). Un regain d'énergie élastique est observé, puisque l'éprouvette continue d'accumuler de l'énergie, sans que le ligament de matériau à la jonction entre les deux fissures ne cède (fig. 5.1). Ce regain d'énergie élastique semble quelque peu exagéré. Bien que l'apparition de ponts de fissures soit avérée expérimentalement, il est raisonnable de penser que ce ligament de matériau aurait dû rompre pour des déformations plus faibles. Pour la suite de l'identification, afin de contourner cette limite du modèle discret, il sera fait abstraction de l'écart final entre l'énergie totale et l'énergie dissipée. L'énergie en théorie dissipée par fissuration à la rupture $E_{F,0}^d$ sera prise comme l'énergie dissipée par fissuration à la fin de l'essai : $E_F^d\,(\epsilon = 3.0 \times 10^{-3})$, bien que la rupture complète n'ait pas encore eu lieu.

FIGURE 5.2: Faciès de fissuration en traction pour $\epsilon = 3.0 \times 10^{-3}$.

2.1.1 Identification de ϵ_0

D'abord, une équivalence en énergie élastique volumique (5.3) est effectuée pour déterminer ϵ_0. Ce paramètre décrit la limite de déformation élastique, qui est associée au pic d'énergie élastique $E_{E,0}$ atteint avant la propagation de la fissuration (en trait pointillé sur la figure 5.1), estimé ici à : $E_{E,0} = 2.023$ J.

$$\frac{E_{E,0}}{V^d} = Y_0 = \frac{1}{2}E\epsilon_0^2 \tag{5.3}$$

avec V^d le volume de l'éprouvette discrète, ici, 0.1x0.1x1.0 m^3.

Soit :

$$\epsilon_0 = \sqrt{\frac{2E_{E,0}}{V^d E}} \tag{5.4}$$

La limite de déformation élastique vaut alors : $\epsilon_0 = 1.042 \times 10^{-4}$.

2.1.2 Identification de B_0

Ensuite une équivalence en énergie surfacique (5.5) est effectuée pour déterminer B_0 à partir de l'énergie dissipée par fissuration à la rupture, estimée ici à : $E^d_{F,0} = 5.683$ J.

$$\frac{E^d_{F,0}}{S^d} = g^c_{F,0} \times h^c \tag{5.5}$$

avec S^d la section de l'éprouvette discrète dans le plan de la fissure, ici, 0.1x1.0 m^2, h^c la dimension de l'élément fini dans la direction orthogonale au plan de la fissure, ici 0.1 m, et $g^c_{F,0}$ est l'énergie volumique dissipée à la rupture par le modèle continu définie selon l'équation (4.62).

Soit l'expression de B_0 d'après (4.64) :

$$B_0 = \frac{2h^c S^d}{E^d_{F,0} - \frac{h^c}{h^d}E^d_{E,0}} \tag{5.6}$$

avec h^d la dimension de l'éprouvette discrète dans la direction orthogonale au plan de la fissure, ici 0.1 m.

Le paramètre B_0 vaut alors : $B_0 = 4.483 \times 10^{-3}\text{J}^{-1}.\text{m}^3$.

La réponse obtenue avec le modèle continu identifié sur le modèle discret par équivalences en énergies est comparée à la réponse obtenue avec le modèle discret en figure 5.3.

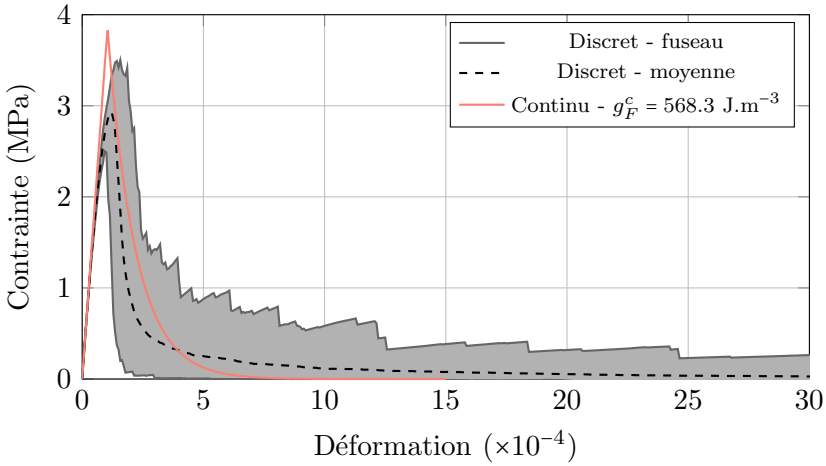


FIGURE 5.3: Réponses en traction des modèles continus et discret.

Compte tenu de cette identification du comportement à la rupture du modèle continu uniquement basée sur une équivalence énergétique, la similarité des réponses obtenues permet de conclure que les modèles discrets et continus ne sont pas si distincts énergétiquement parlant. Cependant, plusieurs disparités de comportement peuvent être notées :

— Le pic de résistance et le début de l'initiation de la dégradation coïncident pour le modèle d'endommagement, contrairement au modèle discret, ce qui explique la surestimation de la limite de déformation élastique.

— La fissuration se propage d'abord rapidement, puis ralentit lorsque des ponts de fissures apparaissent, pour le modèle discret ; inversement, pour le modèle d'endommagement, la propagation de la dégradation semble plus régulière, ainsi à énergie dissipée équivalente, la déformation à la rupture est plus faible. Une évolution de la fonction de consolidation asymptotique comme proposée par Mazars et Pijaudier-Cabot [1989] pourrait permettre de résoudre ce problème.

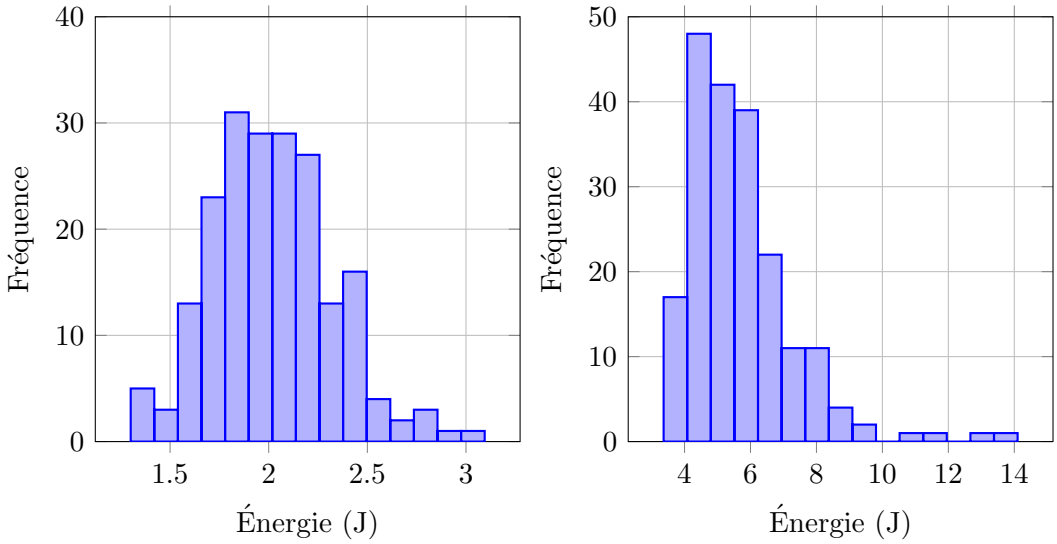
2.1.3 Identification de k_0

À l'exception de k_0, tous les paramètres des modèles d'endommagement sont maintenant déterminés. En ce qui concerne l'identification du paramètre k_0, il faut se référer à l'analyse de sensibilité à ce paramètre des réponses en cisaillement simple et en compression pure, et tenir compte des conclusions de l'étude du couplage des modélisations de l'endommagement et des effets cycliques (voir chapitre 4). Ainsi k_0 est identifié à 0.28 pour la formulation φ^m si le couplage avec la modélisation des effets cycliques est présent, à 0.31 dans le cas contraire de manière à réajuster le pic de résistance en compression. Il est identifié à 4.5 pour la formulation $\Psi^{m,D}$ quel que soit le cas, puisque le comportement en cisaillement n'est pas influencé par le couplage.

2.1.4 Variabilité des paramètres

Bien qu'en théorie un VER est défini tel que les propriétés mécaniques, et donc la répartition des défauts, soient identiques d'un volume à un autre, en pratique, il est fréquent de considérer qu'une incertitude persiste. Ainsi un aléa des paramètres du modèle de comportement est introduit. Ce choix de description présente aussi l'avantage de provoquer la localisation de la fissuration, dans une ou plusieurs zones de résistance faible.

En admettant que l'aléa sur la valeur des paramètres soit introduit simplement au moyen d'une distribution normale, il convient de déterminer les propriétés de ces distributions. Une étude statistique est donc menée sur les 200 réalisations de l'essai de traction.



(a) pic d'énergie élastique $E^d_{E,0}$ (b) énergie dissipée à la rupture $E^d_{F,0}$

FIGURE 5.4: Histogrammes des énergies élastiques et dissipées des 200 réalisations de l'essai de traction.

Observations

Les histogrammes des énergies $E^d_{E,0}$ et $E^d_{F,0}$ (fig. 5.4) permettent de déduire les moyennes et les coefficients de variation de chaque paramètre (5.1).

$E^d_{E,0}$		$E^d_{F,0}$		ϵ_0		B_0	
$\bar{x}$ (J)	c_v	$\bar{x}$ (J)	c_v	$\bar{x}$	c_v	$\bar{x}$ ($J^{-1}.m^3$)	c_v
2.023	0.151	5.683	0.278	1.042×10^{-4}	0.076	4.483×10^{-3}	0.455

TABLE 5.1: Moyenne et coefficient de variation des résultats de l'essai de traction.

La variabilité du pic d'énergie élastique est faible comparativement à la variabilité de

l'énergie dissipée à la rupture. En conséquence, la variabilité du paramètre ϵ_0 est aussi limitée, par contre, la variabilité du paramètre B_0, fonction à la fois de $E^d_{E,0}$ et de $E^d_{F,0}$, est importante. La variabilité de B_0 est d'ailleurs plus élevée que celle de $E^d_{F,0}$, ce qui laisse présumer que les variabilités de $E^d_{E,0}$ et de $E^d_{F,0}$ ne sont pas corrélées. Puisque B_0 est fonction de ces deux énergies, la variabilité de B_0 est fortement dépendante de leur covariance. Effectivement, la mesure de la covariance des deux énergies est faible $\mathrm{cov}\left(E^d_{E,0}, E^d_{F,0}\right) = 0.047$, soit un coefficient de corrélation $\rho_{E^d_{E,0},E^d_{F,0}} = 0.103$. Il n'y a donc pas lieu de considérer qu'une résistance élastique élevée implique une dissipation à la rupture importante.

À noter que la variabilité du module de Young macroscopique E est nulle d'une réalisation discrète à une autre. Les réalisations sont effectivement simulées pour une densité de particules à laquelle les propriétés élastiques de l'éprouvette discrète sont convergées, et aucune variabilité du module d'Young $\bar{E}$ des poutres du *lattice* n'est introduite.

Les histogrammes des énergies $E^d_{E,0}$ et $E^d_{F,0}$ (fig. 5.4) ont été obtenus pour 200 réalisations de l'essai de traction pour lesquels le maillage (diagramme de Voronoi avec aléa de la position des nœuds) ainsi que les seuils de rupture des poutres du *lattice* (distributions de weibull) présentent une certaine variabilité. Il est intéressant de constater que, pour un tel échantillon de réalisations, la distribution de $E^d_{E,0}$ semble tendre vers une loi normale centrée, et s'éloigne donc de l'aspect statistique introduit localement ; alors que la distribution de $E^d_{F,0}$ tend vers une distribution non-centrée dont le maximum de probabilité est inférieur à la médiane de la distribution, ce qui pourrait être considéré comme une distribution log-normale ou de Weibull. Il est à noter que des observations similaires, concernant la limite élastique, ont été effectuées par Wang et al. [2015] en simulant explicitement la morphologie mésoscopique du matériau.

De manière générale, il pourrait être recommandé, dans la mesure où des distributions probabilistes des paramètres du modèle continu contrôlant l'énergie élastique et l'énergie de fissuration à la rupture sont employées, d'utiliser respectivement une distribution normale et une distribution de Weibull (ou log-normale).

Par ailleurs, les types des distributions probabilistes associées aux énergies macroscopiques peuvent être interprétées de la manière suivante :

— il est aussi probable de rencontrer un VER à haute limite qu'un VER à basse limite élastique. L'énergie élastique serait donc caractérisée par la résistance moyenne des poutres locales ;

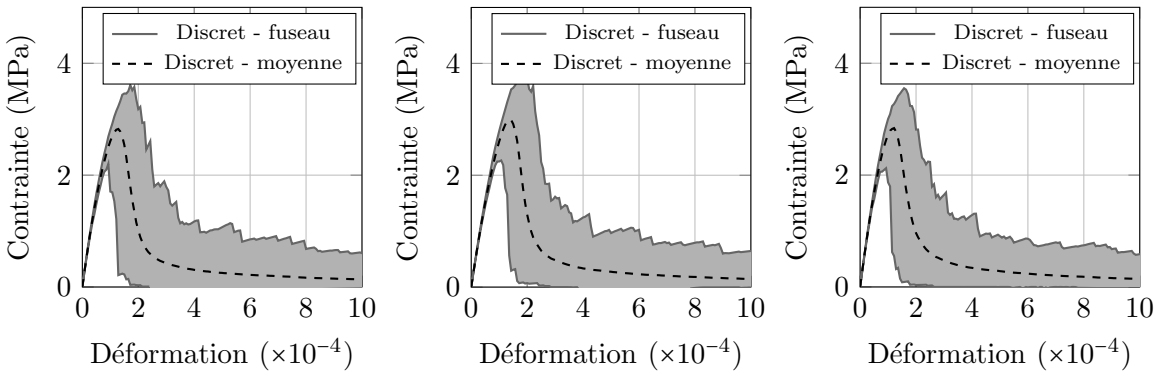
— il est plus probable de rencontrer un VER à basse énergie à la rupture qu'un VER à haute énergie à la rupture. L'énergie à la rupture serait donc davantage influencée par la probabilité de rencontrer des poutres faibles, autrement dit la théorie du "maillon le plus faible" retranscrite macroscopiquement par la loi de Weibull. Conclusion somme toute cohérente, puisque le trajet de fissuration, et notamment la tortuosité, correspondent au trajet nécessitant un minimum d'énergie.

Afin d'appuyer la validité de ces conclusions, il est maintenant fait l'étude de l'influence de l'incertitude locale, induite par le maillage et le choix de la distribution des seuils de rup-

ture, sur l'incertitude globale, représentée par la variabilité des énergies macroscopiques $E^d_{E,0}$ et $E^d_{F,0}$.

Influence de l'incertitude fine sur l'incertitude macroscopique

Il est intéressant de regarder si ces différents constats sont influencés, d'une part par la variabilité du maillage, et d'autre part par la forme de la distribution des seuils de rupture locaux. Les histogrammes des énergies $E^d_{E,0}$ et $E^d_{F,0}$ sont donc à nouveau construits à partir des résultats de 1000 réalisations de l'essai de traction, à maillage strictement identique, pour des distributions des seuils uniforme, normale (tronquée de ses valeurs négatives) et de Weibull. Les premier et second moments des distributions normales et uniformes des seuils sont calibrés de manière à obtenir une réponse en traction satisfaisante, en terme de résistance au pic et de fragilité. Les premier et second moments des distributions de Weibull des seuils, sont conservés tels qu'identifiés auparavant. Les réponses obtenues sont présentées en figure 5.5.



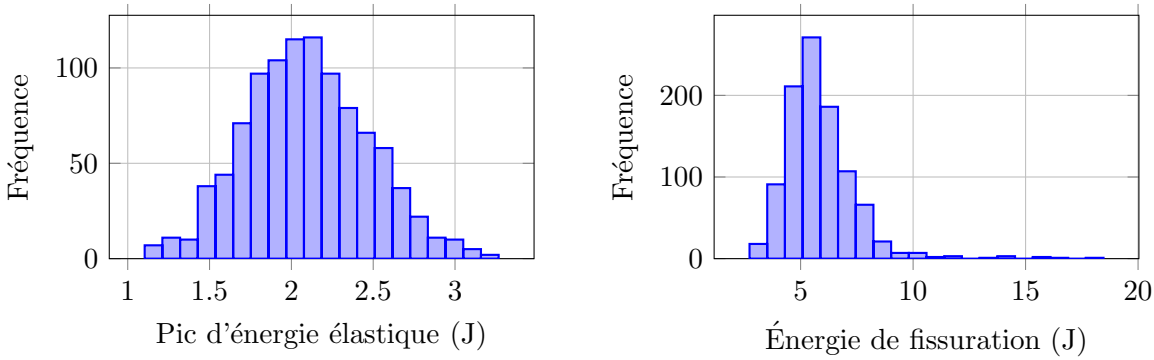
(a) distribution uniforme (b) distribution normale (c) distribution de Weibull

FIGURE 5.5: Influence de la forme de la distribution des seuils de rupture sur la réponse moyenne de traction.

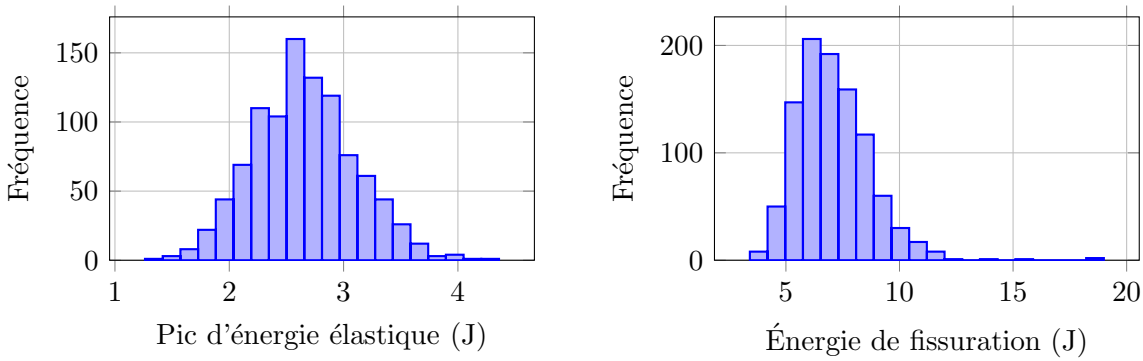
Les histogrammes des énergies $E^d_{E,0}$ et $E^d_{F,0}$ pour chaque forme de distribution sont présentés en figure 5.6. La réalisation des essais de traction sur un maillage identique et la modification de la distribution des seuils de rupture locaux ne semble pas influencer les histogrammes. Il apparaît que les observations effectuées sur la forme de la distribution du pic d'énergie élastique et de l'énergie de fissuration à la rupture sont valables indépendamment de ces deux aspects contrôlant la variabilité de la structure de l'éprouvette. La forme de la distribution des seuils locaux et les formes des distributions des énergies macroscopiques ne semblent pas liées. Il n'y aurait donc pas transfert de la distribution des incertitudes de l'échelle fine à l'échelle macroscopique.

La question de la nécessité de l'emploi d'une loi de Weibull localement pour la distribution des seuils de rupture peut alors se poser. L'emploi d'une loi normale ou de Weibull semble

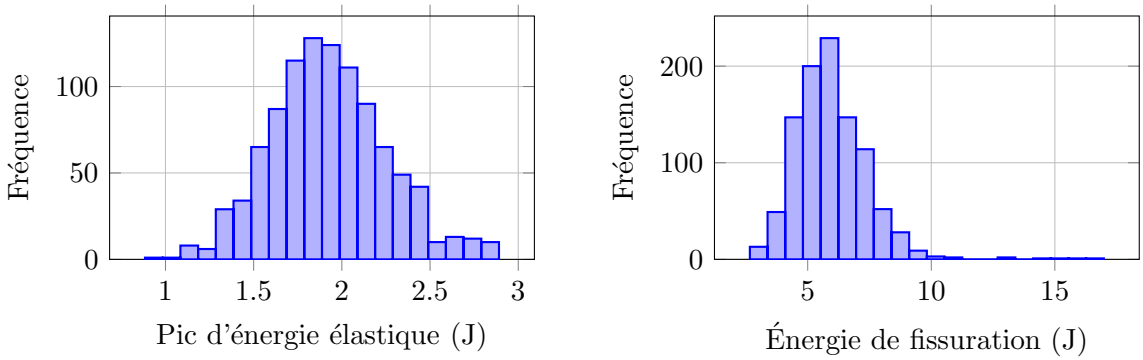
plus justifiée qu'une loi uniforme. En effet, l'incertitude sur la valeur des seuils de rupture locaux n'est pas suffisante pour qu'il ne soit pas possible de dégager une valeur dominante. En comparaison à la loi normale, la loi de Weibull présente l'avantage d'être par définition positive. Cependant elle implique des hypothèses supplémentaires sur la répartition de l'incertitude par rapport à une loi normale tronquée, qui finalement ne s'avèrent pas nécessaires, au regard des résultats obtenus sur l'essai de traction.



(a) distribution uniforme



(b) distribution normale



(c) distribution de Weibull

FIGURE 5.6: Influence de la forme de la distribution des seuils de rupture sur la variabilité du pic d'énergie élastique et de l'énergie de fissuration en traction.

Les conclusions précédentes sur la forme et la signification des distributions de $E^d_{E,0}$ et $E^d_{F,0}$ peuvent donc être tirées indépendamment de la distribution locale choisie et de l'aléa introduit par la discrétisation de l'éprouvette.

2.1.5 Choix de l'essai d'identification

Toujours dans l'objectif de réaliser des calcul de structures, la question peut se poser de savoir si l'énergie de fissuration en traction, et plus largement l'essai de traction, est la plus adaptée pour quantifier la dissipation énergétique du volume de matériau décrit par un élément fini.

D'une part, il n'est pas certain qu'une seule fissure se propage dans l'élément, une identification du comportement par rapport à l'énergie nécessaire pour ouvrir une unique fissure est donc contestable. Néanmoins, il n'est pas plus certain qu'une unique fissure se propage lors d'un essai de traction, comme l'illustre l'apparition de ponts de fissures. Sur ce point, le choix de l'énergie que doit avoir dissipé un élément fini à la rupture, ne peut être effectué qu'en connaissance des dimensions du volume qu'il décrit, du chargement appliqué sur la structure, et des modes de dégradation qui en découlent.

D'autre part, il faut dissocier l'énergie nécessaire à la propagation, et l'énergie nécessaire à l'initiation puis à la propagation d'une fissure. Selon la manière dont l'élément fini est situé dans le maillage de la structure, il se peut qu'il ne soit que simplement traversé par une fissure initiée auparavant, dans un autre élément. Ainsi tenir compte de l'énergie dissipée pour initier la fissure n'est peut-être pas nécessaire.

Des essais de flexion trois-points sur une poutre entaillée à mi-hauteur ou non, peuvent être envisagés, pour isoler respectivement, la propagation seule, ou l'initiation et la propagation d'une unique fissure.

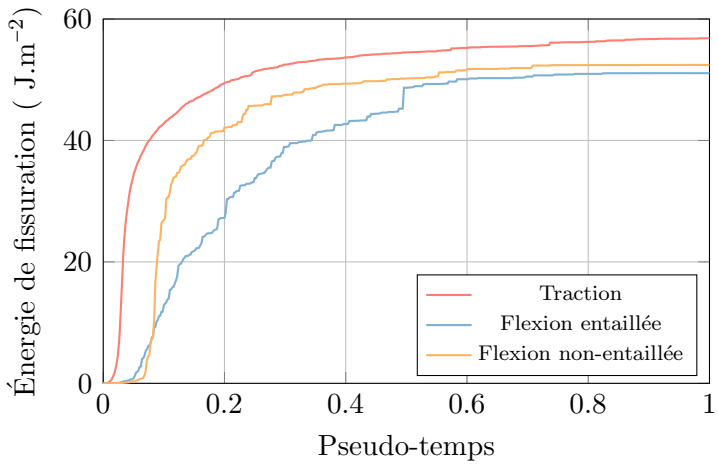


FIGURE 5.7: Évolution moyenne des énergies de fissuration obtenues avec le modèle discret selon l'essai.

Une comparaison de l'énergie de fissuration obtenue pour chacun de ces essais est effectuée en figure (5.7). Les énergies de fissuration pour chaque essai sont données en fonction du pseudo-temps, la rupture complète dans chaque configuration étant survenue à l'instant $t = 1$. Les nuances entre chaque essai ne sont pas significatives, et notamment entre les essais de flexion trois-points sur poutres entaillée et non-entaillée. Le coût énergétique supplémentaire nécessaire à l'initiation d'une fissure serait donc faible, ici : $\delta E_{F,0} = 1.35$ J.m^{-2} (écart final entre les courbes jaune et bleue), autrement dit négligeable. Comme attendu, l'énergie de fissuration mesurée lors de l'essai de traction est plus élevée, du fait de la multi-fissuration de l'éprouvette.

2.2 Identification de la modélisation des effets cycliques

La modélisation des phénomènes liés à la fermeture des fissures n'introduit que deux paramètres matériau supplémentaires, α_0 et μ_0. Une stratégie d'identification de ces paramètres peut facilement être mise en place, toujours sur la base du modèle discret.

2.2.1 Identification de α_0

Le paramètre α_0 est calibré en comparant l'évolution de ϑ avec l'évolution de la proportion de fissures fermées, issue de simulations d'un cycle de charge-décharge (fig. 4.15a). La comparaison est effectuée à un niveau de chargement maximal appliqué donné, ici $\epsilon^f_{\max} = 2.0 \times 10^{-4}$ (fig. 5.8).

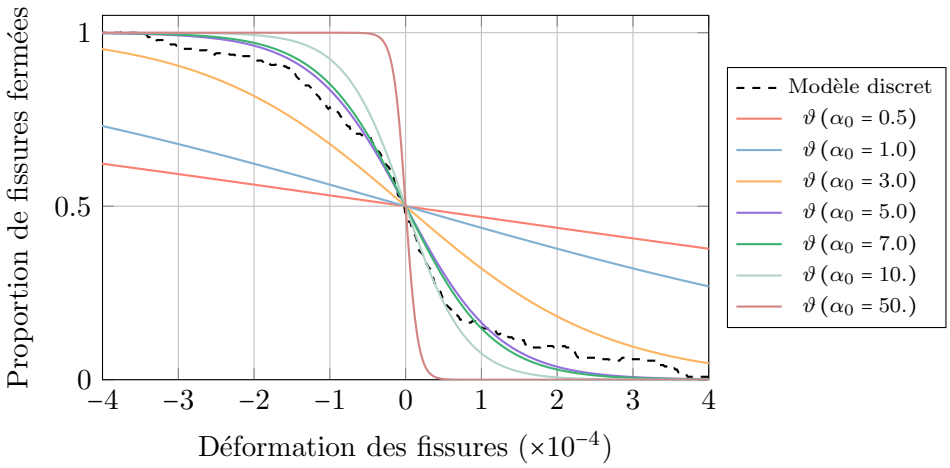


FIGURE 5.8: Analyse de sensibilité de l'évolution de la fonction ϑ au paramètre α_0.

La valeur du paramètre est identifiée à $\alpha_0 = 6.5$. La calibration, ainsi que le choix de la fonction ϑ est validée en comparant l'évolution de la fonction ϑ avec des résultats discrets pour d'autres niveaux de chargement $\epsilon^f_{\max}$ (fig. 5.9).

Tout en conservant la valeur identifiée du paramètre α_0, la fonction ϑ reproduit correctement l'influence du niveau de chargement maximal sur l'évolution de la fermeture des fissures. En conclusion, ce résultat confirme le choix de formulation de la fonction de fermeture ϑ effectué, et notamment concernant la dépendance au niveau de chargement maximal appliqué introduit grâce à la normalisation par rapport à déformation maximale enregistrée $\epsilon^f_{\max}$.

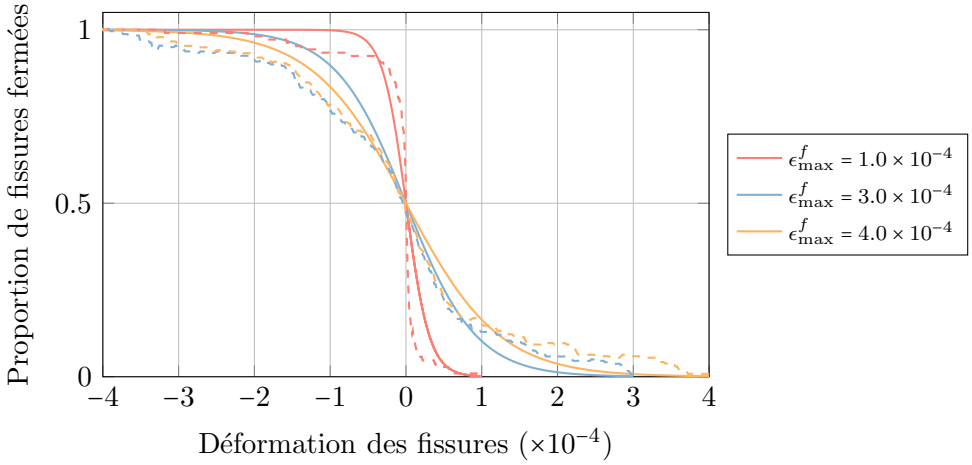


FIGURE 5.9: Analyse de sensibilité de l'évolution de la proportion de fissures fermées au niveau de chargement maximal appliqué : ϑ (trait plein), Discret (trait pointillé)

2.2.2 Identification de μ_0

Une fois α_0 identifié, le paramètre μ_0 reste le seul point de contrôle de l'énergie dissipée par friction du modèle. Il est aussi identifié par analyse inverse. L'énergie dissipée par friction sur un cycle de charge-décharge-recharge à endommagement constant est utilisée comme point de comparaison des deux modèles.

L'énergie dissipée par friction par un élément de volume de matériau est évaluée par une méthode propre à chaque modèle :

— Pour le modèle discret, pour rappel, l'énergie dissipée est calculée incrémentalement comme la somme de l'énergie localement dissipée sur l'ensemble des couples de particules en contact ij détectés, soit :

$$E_\mu^{d,t+1} = E_\mu^{d,t} + \sum_{i=1,\dots,n_{particules}} \left[\sum_{j=1,\dots,n^i_{contact}} \frac{1}{2} \left({}^T \left(\underline{F}^{t+1}_{fric,ij} + \underline{F}^{t}_{fric,ij} \right) . \left(\Delta\delta u_{s,ij} \underline{t}_{c,ij} \right)^{t+1} \right) \right] \quad (5.7)$$

avec $n^i_{contact}$ le nombre de contacts détectés sur la particule i.

— Pour le modèle continu, l'énergie dissipée par friction est calculée incrémentalement comme l'intégrale sur l'élément de volume Ω du produit tensoriel de la contrainte dans les fissures et de la déformation plastique associée aux fissures, soit :

$$E_{\mu}^{c,t+1} = E_{\mu}^{c,t} + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\sigma}}^{f,t+1} + \underline{\underline{\sigma}}^{f,t} \right) : \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{f,p,t+1} \right] dV \tag{5.8}$$

L'évolution des énergies dissipées par les modèles discret et continu lors d'un cycle de charge-décharge-recharge pour une déformation maximale enregistrée $\epsilon_{\max}^{f} = 2.0 \times 10^{-4}$ est tracée en figure 5.10.

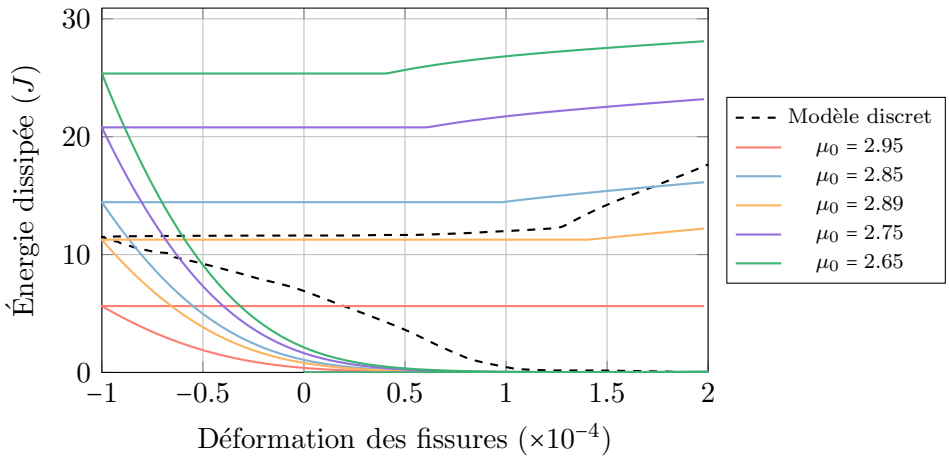


FIGURE 5.10: Analyse de sensibilité de l'évolution de l'énergie dissipée par friction au paramètre μ_0 lors d'un cycle de charge-décharge-recharge.

Le paramètre μ_0 est ainsi calibré à une valeur $\mu_0 = 2.89$.

À noter que les énergies dissipées par friction, retranscrites par chaque modèle, suivent des évolutions fortement similaires tout au long du cycle de charge-décharge-recharge. Cette observation conforte le choix de modélisation effectué pour tenir compte des effets hystérétiques malgré la limite soulignée au chapitre précédent.

3 Application au calcul d'un voile en béton armé

Le modèle continu est à présent complètement calibré, le travail effectué peut être validé plus largement en procédant à la simulation de la réponse d'une structure constituée de béton.

L'essai structural étudié correspond à un voile en béton armé soumis à un chargement horizontal cyclique non-alterné et alterné. Dans les deux cas de chargement, une dégradation induite par cisaillement est attendue. À cela s'ajoute, dans le cas d'un chargement cyclique

alterné, une fissuration fortement multi-directionnelle. La complexité de ce cas d'étude permet ainsi d'analyser, non seulement la qualité du modèle macroscopique, mais aussi sa robustesse.

Avant d'étudier le comportement cyclique du voile, le choix de la formulation du modèle d'endommagement de la matrice est donc prédominant, car la qualité de la représentation de la fissuration conditionne la reproduction des effets hystérétiques. Ainsi les simulations de la réponse du voile en béton armé, s'organiseront en deux étapes. D'abord, le choix de la formulation du modèle d'endommagement est effectué, par la simulation d'un chargement monotone, qui n'est autre que l'enveloppe du chargement cyclique non-alterné. Le modèle d'endommagement le plus efficace en termes de réponse et de faciès de fissuration est retenu. Ensuite, la simulation des chargements cycliques, non-alterné et alterné, est réalisée.

3.1 Descriptif de l'essai

L'essai de voile en béton armé simulé a été réalisé dans le cadre du projet CEOS.fr pour le benchmark ConCrack [Rivillon et Gabs, 2011]. Le détail de la géométrie et du ferraillage du voile est décrit par la figure 5.11.

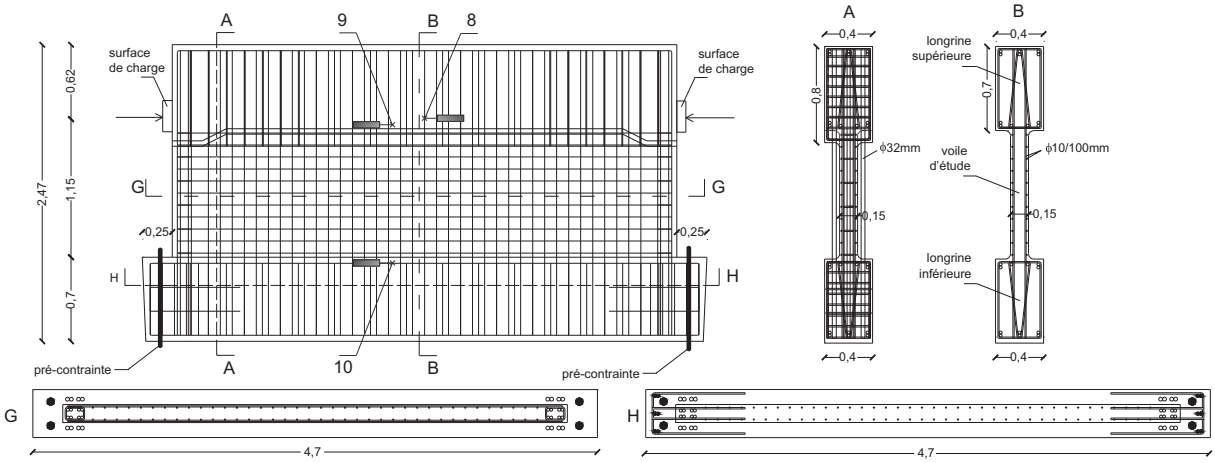
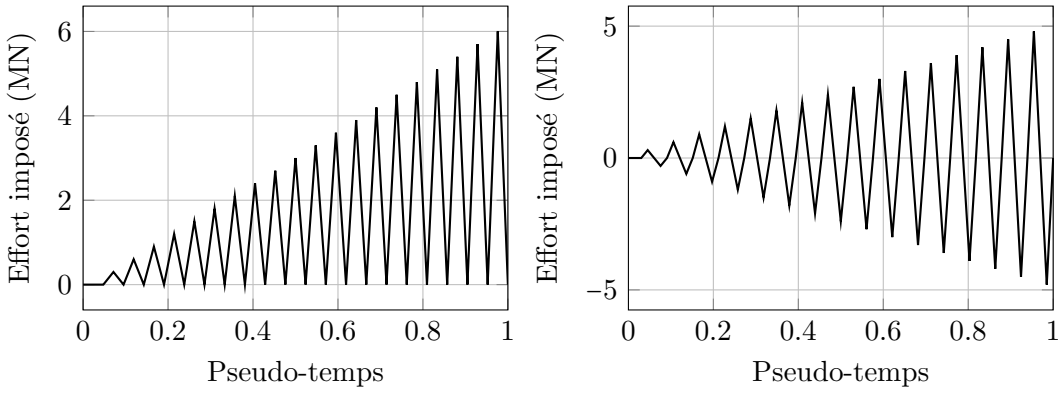


FIGURE 5.11: Dimensions du voile en béton armé du benchmark ConCrack [Rivillon et Gabs, 2011].

La structure étudiée est composée de trois parties, un voile mince central dans lequel se concentre l'ensemble des non-linéarités mécaniques, et deux longrines épaisses en parties supérieure et inférieure, dont le comportement mécanique reste vraisemblablement élastique. La longrine inférieure est maintenue sur le bâti par le biais de tiges précontraintes verticales, disposées de part et d'autre du voile. Ainsi un effort de précontrainte vertical de 1 MN est appliqué de chaque côté dans la longrine inférieure. L'application de

la précontrainte permet de réduire les mouvements horizontaux et verticaux de la longrine inférieure, et ainsi limiter la rotation de la structure autour de l'axe normal au plan du voile.

Le voile en béton armé est soumis à un chargement cyclique horizontal qui engendre une sollicitation de cisaillement (fig. 5.12). L'effort est appliqué au niveau des surfaces de charges (fig. 5.11). Dans le cas d'un chargement non-alterné (succession de charges et de décharges) l'effort horizontal n'est appliqué que sur une seule surface de charge. Dans le cas d'un chargement alterné, l'effort est appliqué, à tour de rôle, sur les deux surfaces de charge. Les deux configurations de chargement correspondent respectivement aux maquettes numérotées 2 et 3 dans le rapport d'expérience [Rivillon et Gabs, 2011]. Le chargement est appliqué en effort, et à faible vitesse, de manière à pouvoir négliger les effets dynamiques.



(a) succession de charges et de décharges (b) chargement alterné

FIGURE 5.12: Évolution des chargements imposés en effort.

Les propriétés moyennes du béton et des aciers constituant les voiles sont respectivement récapitulées dans le tableau 5.2. Les propriétés des matériaux sont considérées identiques pour les voiles 2 et 3.

Module de Young (GPa)	22.0
Résistance en traction (MPa)	3.3
Résistance en compression (MPa)	42.5

(a) béton

Module de Young (GPa)	169.7
Limite élastique (MPa)	555.0
Contrainte à la rupture (MPa)	641.8

(b) acier

TABLE 5.2: Propriétés moyennes mesurées des matériaux [Rivillon et Gabs, 2011].

Trois extensomètres sont disposés horizontalement sur la structure afin d'acquérir le déplacement total au niveau du point 8 et le déplacement relatif entre les points 9 et 10 (fig. 5.11).

3.2 Modélisation et calibration

La structure en béton est modélisée à l'aide d'éléments finis cubiques (en vert et gris sur la figure 5.14). Pour les armatures en acier (en orange, rouge et marron sur la figure 5.14), des éléments poutre de Timoshenko sont utilisés. Le choix de ce type d'éléments poutre a été effectué, après avoir tenté sans succès de simuler les réponses des voiles, en utilisant des éléments barre ou poutre d'Euler. Dans les deux cas, la réponse du voile obtenue est excessivement fragile (fig. 5.13). Les éléments barre et poutre d'Euler, possédant une rigidité en cisaillement limitée, une fois la fissuration amorcée à l'interface entre le voile et la longrine inférieure, celle-ci s'y localise entièrement, plus aucun transfert d'efforts n'est assuré entre le voile et la longrine, ce qui prévient l'apparition de la fissuration oblique répartie dans le voile observée expérimentalement (fig. 5.16). D'ailleurs, il est possible d'observer que la structure renforcée avec des éléments poutre de Timoshenko possède une rigidité initiale plus importante, et plus proche de celle de la structure expérimentale, que les structures renforcées avec des éléments barre ou poutre d'Euler, pour lesquelles la rigidité initiale est d'ailleurs identique (fig. 5.13). Des éléments poutre de Timoshenko se sont donc avérés nécessaires, ce qui pourrait être expliqué par le fait que la dégradation de l'interface du béton aux interfaces entre les longrines et le voile central, y induit une localisation des déformations de cisaillement. Cette localisation se produit dans une bande de hauteur faible, en conséquence l'élancement de la portion des armatures en acier chargée de reprendre ces déformations de cisaillement est fortement réduit. Des éléments poutre d'Euler ou des éléments barre ne sont alors plus adaptés.

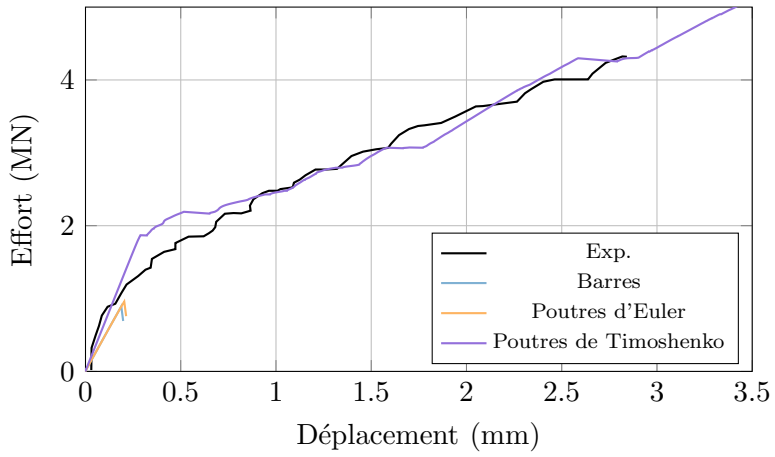


FIGURE 5.13: Influence du type d'élément fini retenu pour les armatures sur la réponse à un chargement monotone pour $h^c = 0.10$ m et le déplacement mesuré (9 - 10).

À ce propos, deux types de discrétisation sont utilisées. Pour la première, grossière, la longueur des éléments poutres et le coté des éléments cubiques mesure approximativement $h^c = 0.1$ m ; pour la seconde, plus fine, cette même dimension mesure $h^c = 0.03$ m. La première longueur est retenue, car elle correspond à la dimension généralement associée

à un VER de béton. L'efficacité du modèle continu est ainsi évaluée à l'échelle à laquelle il a été conçu. La seconde longueur, quant à elle, n'est retenue qu'afin d'analyser le faciès de fissuration.

La longrine inférieure est supposée encastrée au bâti selon sa face inférieure, et quatre efforts ponctuels de 0.5 MN, sont appliqués de chaque côté par le biais de deux barres d'ancrage (en marron sur la figure 5.14), pour une précontrainte totale de 2 MN.

Le chargement est appliqué horizontalement, de manière répartie, alternativement sur les surfaces de charge (en bleu sur la figure 5.14).

L'interface entre l'acier et le béton est considérée parfaite.

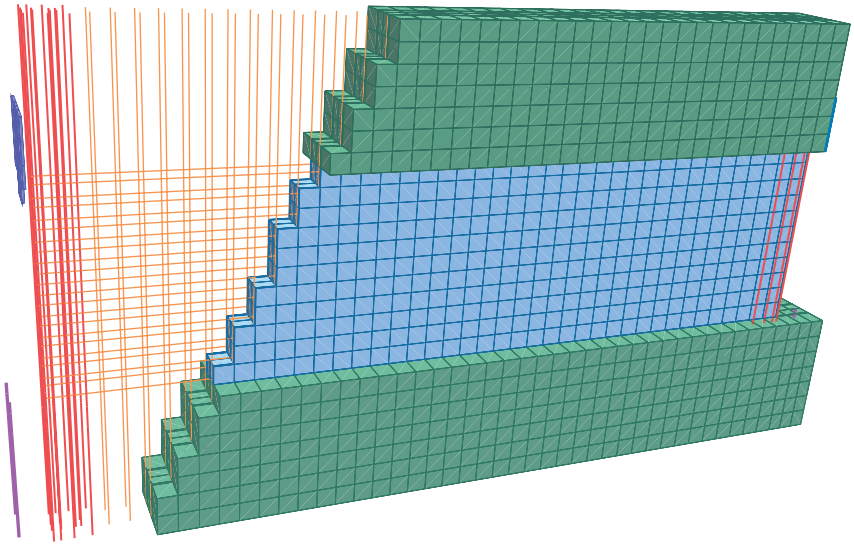


FIGURE 5.14: Maillage du voile en béton armé du benchmark ConCrack pour une dimension de maille de $h^c = 0.1$ m.

Le comportement des armatures en acier est reproduit par un modèle plastique à écrouissage isotrope, dont les paramètres correspondent directement aux propriétés du matériau (tab. 5.2b). La déformation à la rupture n'étant pas précisée dans le rapport d'expérience, une valeur standard est utilisée, soit 10 %.

Le comportement du béton des longrines (en vert sur la figure 5.14) est considéré élastique. Le comportement du béton du voile central (en gris sur la figure 5.14) est à ce stade laissé libre, les trois formulations du modèle continu sont utilisées avant de choisir la plus adaptée. La calibration des trois formulations ne diffère que pour le paramètre k_0 dont les valeurs sont directement issues des simulations discrètes de la réponse multi-axiale d'un VER, conduites au chapitre précédent. Pour les paramètres restant, le module de Young et la moyenne de la limite de déformation élastique sont ajustés aux propriétés du béton mesurées expérimentalement. À noter que bien que le module de Young du béton soit faible, pour les résistances en traction et en compression mesurées, il est tout de même

conservé. Le paramètre B_0 est réévalué en fonction de la dimension du maillage, afin de conserver l'énergie de fissuration estimée à l'aide du modèle discret. Les paramètres contrôlant le comportement cyclique et l'aléa, et k_0 sont maintenus inchangés par rapport à l'identification réalisée au chapitre précédent. Les paramètres utilisés pour le béton sont récapitulés dans le tableau 5.3.

E (GPa)	ϵ_0 ($\bar{x}$)	ϵ_0 (c_v)	B_0 (J^{-1}.m^3)	k_0	α_0	μ_0
22	1.5×10^{-4}	0.076	3.53×10^{-3} (h^c = 0.10 m) 1.06×10^{-3} (h^c = 0.03 m)	4.5 (form. $\Psi^{m,D}$) 0.28 (form. φ^m)	6.5	2.89

TABLE 5.3: Valeur des paramètres des modèles continus de béton.

3.3 Résultats

3.3.1 Chargement monotone

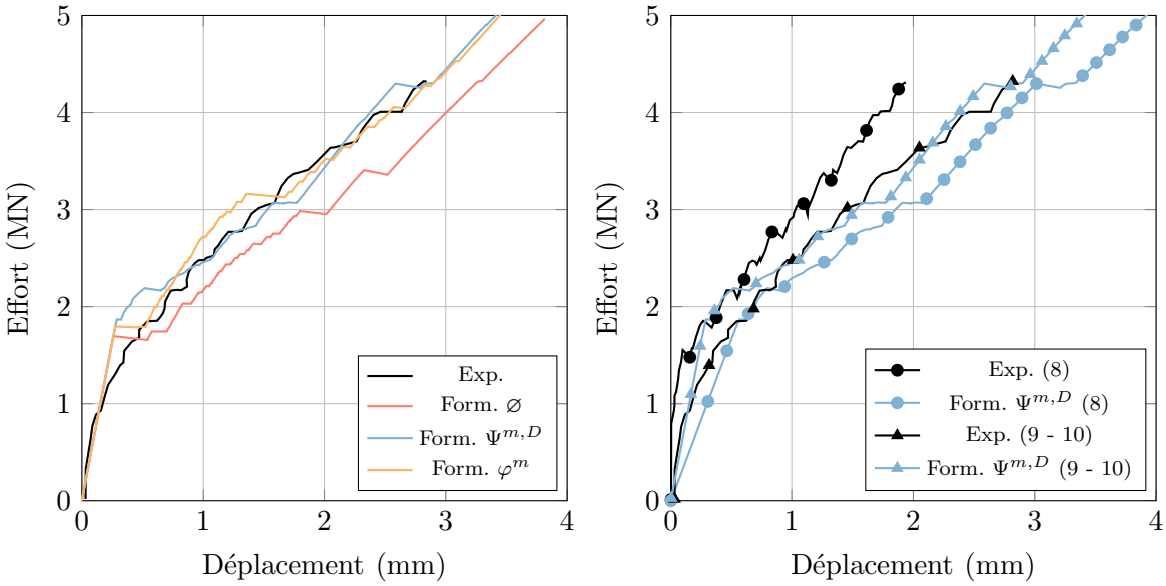
Le comportement mécanique du voile central sous chargement monotone est d'abord étudié. L'objectif est de vérifier la qualité de la réponse et du faciès de fissuration obtenu, et de déterminer la formulation la plus adéquate, avant de procéder à l'étude sous chargement cyclique.

Réponse globale

L'évolution de l'effort horizontal appliqué en fonction du déplacement relatif entre les extensomètres 9 et 10 est étudié (fig. 5.15a). Suite à l'emploi de poutres de Timoshenko, pour la modélisation des armatures d'acier, les réponses obtenues avec chacun des modèles d'endommagement sont très similaires. La forte densité d'armatures est en partie responsable. Ainsi, avec chaque modèle d'endommagement il est possible d'observer une réponse bi-linéaire du voile. Dans la première phase, élastique, la raideur du voile est correctement reproduite. Dans la seconde phase, faisant suite à l'amorce de la fissuration dans le béton, la raideur du voile n'est alors plus correctement estimée qu'avec les modèles révisés, la formulation $\varnothing$ fourni une réponse légèrement trop souple.

Identiquement à la réponse expérimentale, des sauts sont observés tout au long de la seconde phase de la réponse. Ceux-ci correspondent à l'apparition progressive de fissures obliques dans l'intégralité du voile. En revanche, quel que soit le modèle, la rupture finale du voile n'est pas reproduite. Expérimentalement, la rupture finale a été attribuée à une ruine en compression du béton au niveau de l'appui du verin pour un effort de 4.71 MN. Ce mécanisme de ruine n'est pas observé ici, car le comportement de la longrine supérieure sur laquelle est appliqué l'effort est considéré élastique. Néanmoins, d'importantes déformations longitudinales de compression sont relevées, dans le coin supérieur gauche du voile (fig. 5.17), mais celles-ci n'aboutissent pas à la rupture.

Pour l'analyse de la réponse globale du voile, seule l'évolution de la force en fonction du déplacement relatif entre les extensomètres 9 et 10 a finalement été retenue. En effet, le déplacement mesuré par l'extensomètre 8 n'est pas cohérent. La réponse obtenue est plus rigide que la réponse obtenue à partir d'un déplacement relatif, or ce devrait être le contraire (fig. 5.15b).



(a) influence du modèle d'endommagement (b) influence du déplacement étudié

FIGURE 5.15: Influence de la formulation et du déplacement étudié sur la réponse à un chargement monotone pour une taille d'élément fini $h^c = 0.10$ m.

Faciès de fissuration

L'analyse de l'état de fissuration du voile est réalisée à partir d'une photographie du voile à la rupture (fig. 5.16) et du champ de déformation longitudinale (dans la plus grande dimension) du voile pour un effort de 4.2 MN (fig. 5.17). Concernant les résultats issus des simulations, les résultats obtenus pour $h^c = 0.10$ m ne sont pas détaillés. Une telle taille d'éléments finis ne permet pas d'observer des quantités locales (fig. 5.17d). À la place, les résultats obtenus pour $h^c = 0.03$ m sont présentés.

Les tendances principales de l'état de fissuration sont retrouvées par les simulations, et notamment l'orientation de la fissuration. Celle-ci varie selon le modèle utilisé, mais suit toujours une direction oblique similaire à la fissuration photographiée. En revanche, la densité de fissure semble bien inférieure à ce qui a été observé expérimentalement. De plus, la localisation des déformations longitudinales, censée correspondre à l'ouverture de fissures, est largement sous-estimée par les simulations, au moins d'un ordre de grandeur.

L'absence de dégradation de l'interface acier-béton est un début d'explication de l'écart

obtenu entre l'expérience et les simulations. En effet, deux simulations d'un même essai tirant, l'une avec une interface parfaite et l'autre avec une interface dégradable, géométriquement représentative (description explicite des nervures de l'acier), ont mis en évidence l'apparition d'une fissuration plus diffuse et donc moins ouverte, lorsque l'interface entre l'acier et le béton est fidèlement reproduite [Michou, 2015]. Toutefois, cette explication ne justifie pas, pour autant, un tel écart de concentration de déformation longitudinale, environ cinquante fois inférieure. Cet écart s'explique davantage par la taille des éléments finis employés toujours trop importante, même pour $h^c = 0.03$ m. En effet, la localisation de la déformation longitudinale est limitée par cette dimension, celles-ci sont donc davantage réparties en comparaison des déformations mesurées expérimentalement. Des tailles d'éléments finis plus faibles n'ont pas été simulées en raison de temps de calculs prohibitifs. De plus, pour de si faibles dimensions, la signification d'une modélisation macroscopique perd de son sens, l'échelle de modélisation du comportement du matériau n'est plus en accord avec la dimension des volumes attribués à un élément fini.

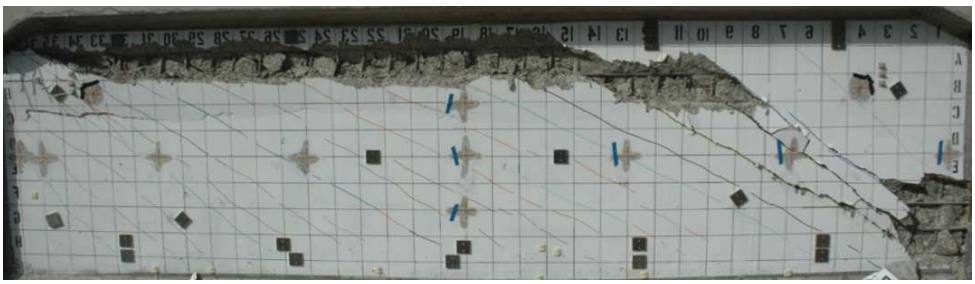
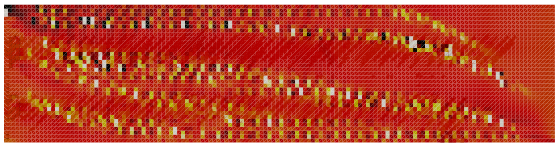


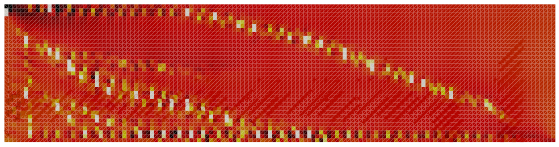
FIGURE 5.16: Vue du voile central à la fin de l'essai [Rivillon et Gabs, 2011].

Comparativement, les différents modèles ne se distinguent que très peu au niveau du faciès de fissuration obtenu. Les déformations longitudinales obtenues sont de valeurs similaires. Il peut être noté que la densité de fissuration est plus importante avec la formulation ∅, ce qui est cohérent avec la perte de raideur plus conséquente obtenue avec cette même formulation, et le fait que ce modèle ait une surface de chargement à la rupture plus petite, donc une propension à fissurer plus importante en cisaillement et en compression. Les deux modèles révisés présentent des faciès proches, moins denses, et ne se distinguent que par la localisation d'une fissure différente. Au vu du faciès expérimental issu de la corrélation d'image, les deux faciès sont cohérents. En revanche, le faciès obtenu avec la formulation $\Psi^{m,D}$ semble plus proche du faciès relevé sur la photographie du voile, à savoir une ouverture de fissure importante à proximité de la longrine supérieure, qui ne se propage obliquement vers la longrine inférieure qu'à l'approche de l'extrémité opposée du voile.

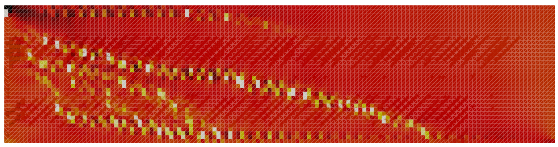
Pour la suite des simulations seul le modèle considéré comme le plus efficace est retenu. Les résultats, notamment globaux, sont davantage fidèles à l'expérience lorsque simulés à partir de l'une des deux formulations améliorées. Sur le dernier constat effectué en matière de faciès de fissuration, la formulation $\Psi^{m,D}$ a été retenue pour la suite.



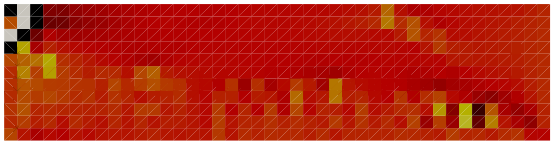
(a) formulation $\varnothing - h^c = 0.03$ m



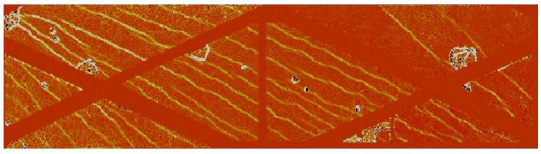
(b) formulation $\Psi^{m,D} - h^c = 0.03$ m



(c) formulation $\varphi^m - h^c = 0.03$ m



(d) formulation $\Psi^{m,D} - h^c = 0.10$ m



(e) expérimental ($\epsilon \times 5.10^{-2}$)

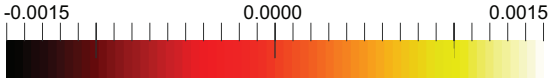


FIGURE 5.17: Influence de la formulation sur la répartition de la déformation longitudinale dans le voile en béton pour un effort de 4.2 MN

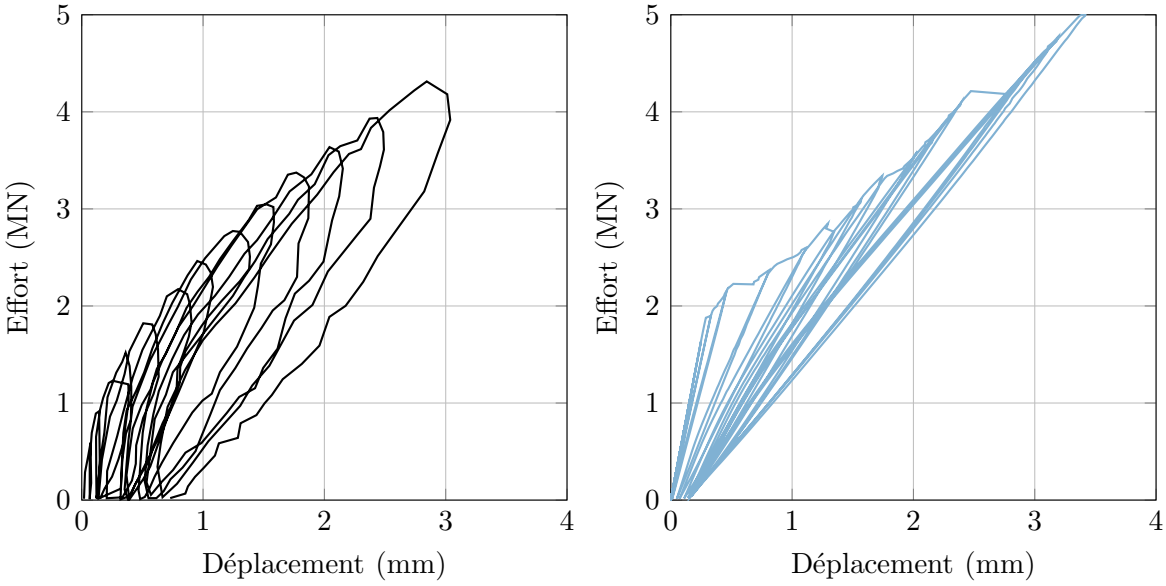
3.3.2 Chargement cyclique non-alterné

Une première analyse de la réponse du modèle sous chargement cyclique est effectuée pour un chargement non-alterné, ainsi la qualité de la réponse n'est pas dégradée par une potentielle incapacité du modèle à reproduire l'anisotropie de la fissuration induite par un cisaillement alternativement dans deux sens opposés.

L'enveloppe de la réponse simulée est toujours proche de la réponse expérimentale, elle laisse aussi entrevoir l'apparition d'une dissipation énergétique par effets hystérétiques (fig. 5.18). En effet, des déformations résiduelles et des boucles d'hystérésis sont générées.

Au premier abord cette dissipation énergétique semble sous-estimée par rapport à la réponse expérimentale. Toutefois, ce constat est atténué par l'observation sur les résultats expérimentaux d'un glissement à effort nul en fin de décharges. Ce-dernier tend à provoquer la surestimation des boucles d'hystérésis. À noter, cependant, que même si ces déplacements de glissement parasites avaient été soustraits, les boucles d'hystérésis expérimentales resteraient bien plus importantes que les boucles simulées.

Afin de proposer une analyse quantitative de la dissipation énergétique, l'aire des boucles d'hystérésis associées à chaque décharge, correspondant à une énergie dissipée, ont été estimées (fig. 5.19).



(a) expérimental (b) formulation $\Psi^{m,D}$

FIGURE 5.18: Réponse à un chargement cyclique non-alterné.

Les dissipations énergétiques expérimentales et simulées suivent une évolution similaire. Effectivement, les effets hystérétiques sont croissants avec le développement de la fissuration. De plus, une même diminution de l'énergie dissipée aux environs de 3 MN est observée. Par contre, en accord avec les premières observations qualitatives, les effets hystérétiques sont bien sous estimés. Un rapport entre 2 et 3 est constaté.

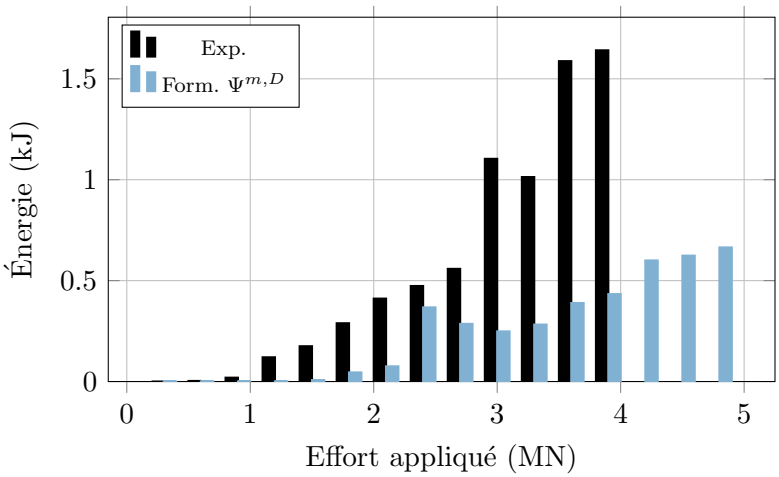


FIGURE 5.19: Énergie dissipée à chaque décharge lors d'un chargement cyclique non-alterné.

Une dernière analyse est effectuée sur ce cas de chargement afin de déterminer le matériau

à l'origine de la dissipation énergétique. Le champ de déformation plastique axial dans les armatures d'acier est tracé pour le chargement maximal simulé, soit 5.1 MN (fig. 5.20). Seuls deux éléments sur l'ensemble du ferraillage ont atteint leur limite élastique. Autrement dit, peu d'énergie est dissipée par le treillis d'armatures, confortant donc les capacités dissipatives d'un volume de béton fissuré.

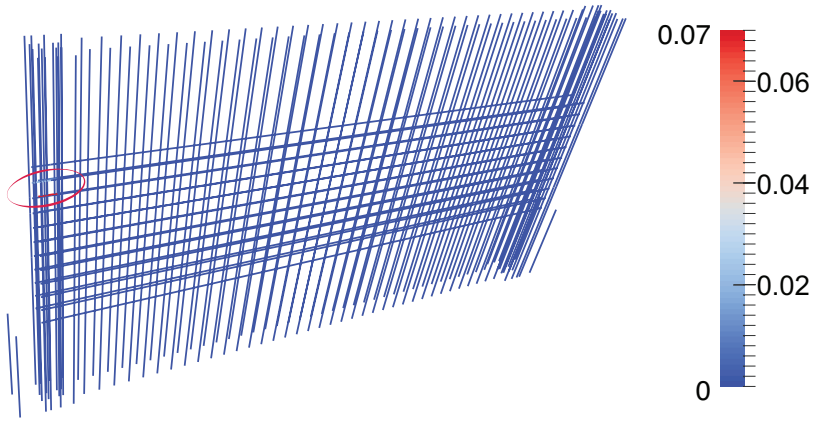


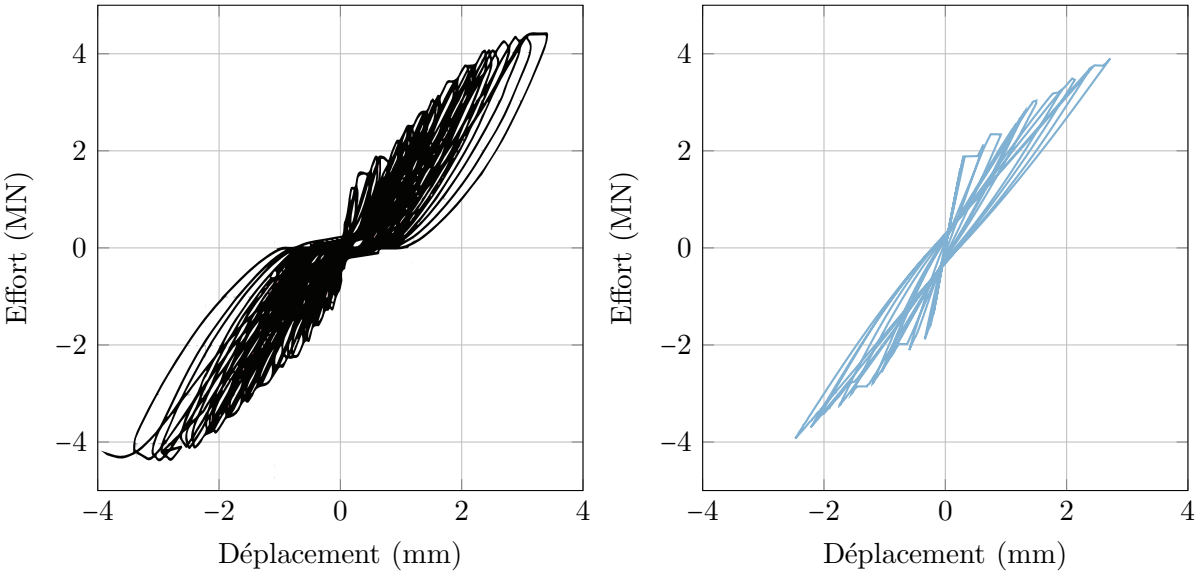
FIGURE 5.20: Répartition de la déformation plastique axiale dans les armatures pour un chargement de 5.1 MN.

Il est à noter que les armatures plastifiées sont situés à proximité de la surface d'application du chargement (cercle rouge). La déformation axiale atteinte par ces armatures est proche de leur limite de déformation à la rupture (10 %). Ceci laisse imaginer que la rupture finale du voile simulée est proche, et comme observé expérimentalement, par rupture au niveau du point d'application de l'effort.

3.3.3 Chargement cyclique alterné

Dernière simulation de cette étude, un chargement alterné. Chose complexe, car la fissuration devrait posséder deux orientations différentes selon le sens de chargement, l'emploi d'un modèle d'endommagement isotrope pourrait s'avérer pénalisant.

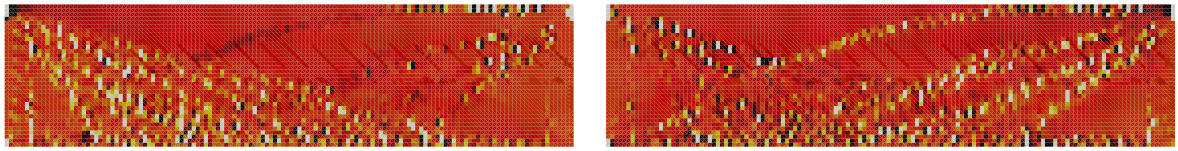
Une fois de plus, l'enveloppe de la réponse est correctement reproduite, dans les deux sens de chargement (fig. 5.21). L'anisotropie induite par la fissuration du voile n'est donc pas préjudiciable pour la réponse globale, même pour des éléments de taille h^c = 0.10 m. Comme sous chargement monotone, le faciès de fissuration n'est montré qu'avec des éléments de taille h^c = 0.03 m, il illustre que les deux familles de fissures générés, respectivement par chaque sens de chargement, ne se recoupent qu'en peu d'éléments finis (fig. 5.22). Il semble donc que tant que les zones où se localisant des fissures d'orientation différente sont de dimensions réduites, une variable d'endommagement scalaire est suffisante pour reproduire la réponse globale de la structure.



(a) expérimental (b) formulation $\Psi^{m,D}$

FIGURE 5.21: Réponse à un chargement cyclique alterné.

Dans l'incapacité d'obtenir le détail des points composant la courbe expérimentale, l'énergie dissipée par cycle n'a pu être évaluée, mais l'équivalent pour les simulations est tout de même fourni (fig. 5.23). Il est ainsi possible de remarquer que d'importants niveaux d'énergie sont dissipés à chaque cycle. En comparaison à de simples cycles de charge-décharge, un cycle sous chargement alterné dissipe plus du double d'énergie. Par exemple pour un effort de 3.5 MN, l'énergie passe de 0.4 kJ à 2.3 kJ.



(a) pour un effort de 3.9 MN (b) pour un effort de −3.9 MN

FIGURE 5.22: Répartition de la déformation longitudinale dans le voile en béton avec $h^c = 0.03$ m (légende, voir fig. 5.17f).

Toutefois, à l'approche de l'origine, la réponse simulée semble différer de la réponse expérimentale. Alors qu'expérimentalement, une phase de glissement est observée, à la transition entre l'ouverture d'une famille de fissures et la fermeture de l'autre famille. Ce glissement, n'est pas reproduit par les simulations, ce qui conduit, cette fois-ci à des boucles d'hystérésis surestimées, la réponse ne passant pas par un état d'effort et de déplacement nul. Ce mécanisme de glissement est généralement observé expérimentalement

pour des structures en béton armé [Lowes et Altoontash, 2003], une explication spécifique, telle que la dégradation du béton en compression au niveau des appuis pouvant induire des déformation résiduelle importantes est à proscrire. Il semblerait qu'une fois de plus l'explication la plus probable, de l'incapacité du modèle à reproduire le glissement, soit l'absence d'un comportement dégradable de l'interface acier-béton.

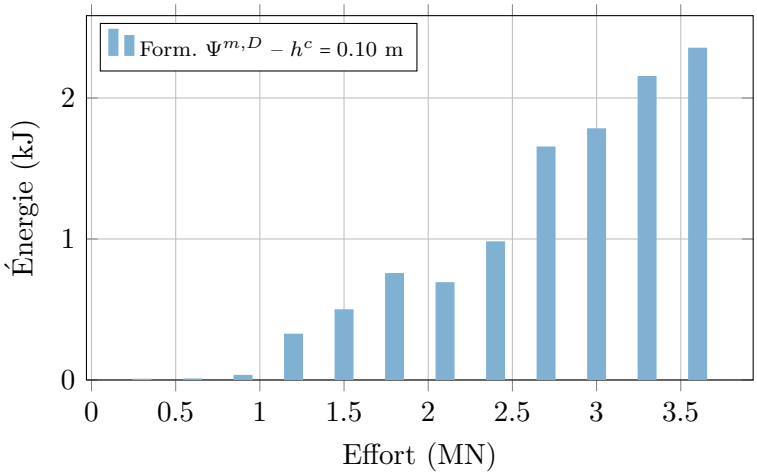


FIGURE 5.23: Énergie dissipée à chaque inversion du chargement lors d'un chargement cyclique alterné.

4 Synthèse

Une stratégie d'identification du modèle continu, complètement défini, a été établie. Comme la première étape de caractérisation, effectuée au chapitre précédent, cette seconde étape a été l'occasion de mettre à profit des résultats issus des simulations discrètes. Pour l'identification du modèle continu, le modèle discret a davantage été employé pour sa capacité à fournir une quantification de la dissipation énergétique de chaque mécanisme, aussi bien de la fissuration que de la friction. Le modèle discret a aussi été utile quant à sa capacité à tenir compte de l'incertitude relative à la structure interne d'un VER de matériau quasi-fragile, et ainsi permettre de réaliser des analyses statistiques de son influence sur les résultats macroscopiques, ici les énergies élastique au pic de résistance et de fissuration à la rupture. L'intérêt de l'outil d'expérimentation réside alors dans la possibilité d'effectuer des analyses statistiques sur la base d'un très grand nombre de réalisations et à faible coût matériel.

L'identification des paramètres communs à chaque formulation du comportement de la matrice a pu être effectuée entièrement par équivalence énergétique avec le modèle discret. Des équivalences en énergies volumique et surfacique ont été réalisées pour identifier, respectivement la limite élastique, et le comportement adoucissant en traction. Ainsi à taille d'élément fini fixée, puisque l'identification est réalisée par équivalence en énergie

surfacique, l'énergie de fissuration est régularisée dès l'identification. Le dernier paramètre du modèle de dégradation, contrôlant différemment le comportement multi-axial des deux formulations améliorées n'a, quant à lui, pas pu être identifié de manière plus élaborée que par analyse inverse. L'identification des paramètres de la modélisation du comportement des fissures a été réalisée de manière identique. Le paramètre contrôlant la vitesse d'évolution de la proportion de fissures fermées a été identifié par analyse inverse, et le coefficient de frottement des fissures a été identifié par équivalence en énergie dissipée par friction.

L'élaboration de la modélisation continue du problème de fissuration alors achevée et calibrée, l'efficacité du modèle continu proposé a été évaluée lors d'un calcul de structure. Le modèle continu, incluant différentes formulations du modèle de dégradation de la matrice, a été utilisé pour simuler le comportement d'un voile en béton armé soumis à un chargement de cisaillement cyclique alterné. L'intégralité des simulations ont été conduites avec le modèle identifié à partir du modèle discret, seules les propriétés matérielles mises à disposition dans les rapports d'expérience ont été ajustées. Autrement dit, les paramètres associés aux comportements adoucissant et hystérétiques sont restés inchangés.

Avant tout, la robustesse du modèle continu proposé a été mise en avant. Des chargements monotones et cycliques, alterné ou non, ont pu être simulés sans difficultés. La robustesse du modèle continu est en grande partie due à son intégration explicite des mécanismes d'ouverture et de fermeture de la fissuration, seul le mécanisme de friction y fait exception. À cela, s'ajoute l'emploi d'une variable d'endommagement scalaire, limitant fortement les difficultés associées à l'inversion de la relation de comportement. Ainsi, comme peu de modèles le proposent, des résultats satisfaisants de simulations d'un voile en béton armé sous chargement alterné quasi-statique ont pu être obtenus.

En termes de résultats globaux, le modèle continu a montré des résultats satisfaisants, et plus particulièrement lorsqu'il s'agissait de reproduire la dégradation. La raideur apparente de la structure a toujours été correctement estimée, quel que soit le chargement, monotone ou cyclique, appliqué. Les effets hystérétiques ont aussi été reproduits, tant les boucles d'hystérésis que les déformations résiduelles, et ont pu être associés intégralement au comportement mécanique du béton. En effet, des résultats concernant le comportement des armatures en acier, ont montré que peu voire aucun phénomène dissipatif, n'y était activé. Cependant les effets hystérétiques sont encore fortement sous-estimés, comme l'a montré l'analyse du voile sous chargement cyclique non-alterné. Deux explications peuvent être proposées, d'un côté la négligence de certains mécanismes dissipatifs, principalement la dégradation de l'interface entre l'acier et le béton ; d'un autre côté, une mauvaise description locale de la fissuration, ne permettant donc pas d'activer les phénomènes hystérétiques de manière précise.

En termes de résultats locaux, effectivement, le modèle continu a montré des résultats moins satisfaisants. Néanmoins, le faciès de fissuration a été relativement bien reproduit, et en particulier son orientation. Mais la densité de fissures, ainsi que leur ouverture n'ont pu être correctement estimées. Une raison potentielle est encore une fois la négligence de la

dégradation de l'interface entre l'acier et le béton, celle-ci pourrait notamment expliquer une faible densité de fissuration.

Quelles que soient les lacunes mises en avant par le modèle continu, celles-ci semblent difficilement imputables à la description isotrope de l'endommagement. Ainsi, le choix d'une formulation du modèle continu d'endommagement à variable scalaire, et le gain de robustesse associé, est entièrement justifié, tant que celui-ci est capable de retranscrire le comportement inélastique du matériau dans l'ensemble des directions de chargement, et en particulier les directions associées à la traction et au cisaillement lorsqu'il s'agit de matériau quasi-fragile.

Pour conclure, il résulte de cette étude que l'amortissement structural observé dans les structures en béton armé, ne peut être uniquement expliqué par les effets hystérétiques introduits par le béton et les aciers seuls. Des phénomènes dissipatifs supplémentaires doivent être introduits, et notamment la dégradation de l'interface acier-béton.

Conclusions et perspectives

Sommaire

1 Réalisations et perspectives 192

1.1 Modélisation discrète 192

1.2 Modélisation continue 194

1.3 Expérimentation numérique 196

1.4 Effets hystérétiques et incompatibilité géométrique 196

2 Synthèse finale 197

1 Réalisations et perspectives

1.1 Modélisation discrète

Afin de constituer un outil d'expérimentation numérique à l'échelle d'un VER de matériau quasi-fragile, un modèle de comportement pour matériaux quasi-fragiles fin, fondé sur la méthode aux éléments discrets et les modèles dits *lattices*, a été élaboré. Les développements de ce modèle se sont appuyés sur un modèle bi-dimensionnel existant, DEAP2D, capable de décrire efficacement et explicitement l'initiation et la propagation de la fissuration en mode I, sous chargement monotone. Une extension aux chargements cycliques et multi-axiaux a été proposée, tout en préservant un caractère simple et facilement identifiable. Deux refontes essentielles du modèle ont donc été nécessaires et entreprises lors de cette thèse.

1.1.1 Algorithme et temps de calculs

La première refonte du modèle discret a concerné la conception d'un nouvel algorithme de résolution de l'équilibre mécanique pour accueillir les interactions de contact. Initialement le modèle discret était résolu comme une succession de problèmes élastiques linéaires, en accord avec la présence d'un unique mécanisme non-linéaire : la fissuration. Il tirait parti du caractère discret de la description parfaitement fragile de la rupture dans un *lattice*. Ainsi la rupture de chaque élément du *lattice* définissait la transition d'un problème élastique au suivant, avec une matrice de raideur actualisée. L'introduction du mécanisme de contact frottant, un mécanisme hautement plus non-linéaire, du point de vue des modèles discrets à particules polygonales, n'a plus permis l'utilisation seule d'un tel algorithme de résolution linéaire séquentiel. En cause, la nécessité d'une actualisation de la raideur sécante du système bien plus fréquente. Cependant, l'intérêt de ce type d'algorithme reste indéniable afin de traiter de problèmes de fissuration, avec stabilité et robustesse. Il a donc été adapté au sein d'un algorithme de résolution incrémental et implicite, de type prédicteur-correcteur.

La qualité des résultats, en termes de robustesse et de stabilité, a fait l'objet de toutes les attentions lors de la conception de l'algorithme de résolution ; elle a été validée dans l'objectif d'étudier le comportement du matériau sous chargement quasi-statique. En effet, la fiabilité des résultats fournis par le modèle discret a été démontrée, comparativement à un algorithme explicite, démuni de prédiction des efforts de contact. Ainsi, il a été possible d'extraire des résultats quantitatifs, auxquels une certaine confiance a pu être accordée, tels que des énergies dissipées par fissuration ou frottement, exploités dans le cadre de la mise en œuvre du modèle continu. En revanche la performance numérique de l'algorithme en tant que telle n'a pas été une préoccupation. Des choix, contestables, ont ainsi été effectués afin de privilégier la qualité des résultats. Des choix, qui, dans un cadre bi-dimensionnel ne sont que légèrement pénalisants, mais, qui, dans un cadre tri-dimensionnel

pourraient devenir prohibitifs. Une résolution implicite, impliquant une actualisation des surfaces d'intersection des contacts à chaque itération ; et un prédicteur dépendant de l'état des contacts, et imposant donc l'assemblage de la matrice de raideur sécante à chaque itération, sont extrêmement coûteux en temps de calculs. Une résolution explicite, à partir d'un algorithme prédicteur-correcteur à faible nombre d'itérations, pourrait être envisagée bien que l'ajout d'effets dynamiques, et surtout visqueux, soit probablement nécessaire pour maintenir une robustesse identique. Il est d'ailleurs aussi contestable de vouloir maintenir une formulation quasi-statique. Même si celle-ci évite l'introduction de paramètres identifiés arbitrairement, elle est particulièrement pénalisante en présence de mouvements de corps rigides, et prive de la possibilité d'étudier le comportement de particules, seules ou groupées, une fois détachées du volume sur lequel sont appliquées les conditions aux limites.

Par ailleurs, une évolution vers un cadre tri-dimensionnel semble tout a fait justifiée. Dans l'objectif d'étudier des éléments de structure en béton armé par exemple, et ainsi pouvoir caractériser le comportement de l'interface acier-béton, les travaux de Heitz [2013] ont montré qu'une formulation bi-dimensionnelle n'est pas suffisante,et passe à largement à côté des effets de confinement. Le modèle initial DEAP est déjà implanté en trois dimensions, mais les améliorations apportées au modèle bi-dimensionnel doivent lui être adaptées. Le problème principal relève de l'introduction du contact, et plus particulièrement de la phase de détection. En effet, la détection du volume d'intersection de deux polyèdres est bien plus coûteuse que la détection de la surface d'intersection de deux polygones. Deux solutions peuvent être envisagées à l'avenir. La dégradation de l'estimation des efforts de contact, par une approximation sphérique de la forme des particules polyédrales, ou alors, une solution plus pérenne, qui consisterait à la parallélisation du modèle discret, et notamment de la procédure de détection. Les gains en termes de coûts de calculs seraient conséquents, du fait de son caractère hautement parallélisable. En effet, l'estimation de l'intersection d'un couple de particules est entièrement indépendante de celle du couple voisin. La barrière majeure limitant un usage tri-dimensionnel serait alors levée.

1.1.2 Mécanismes de rupture

La seconde refonte du modèle discret a concerné la modélisation du mécanisme de rupture des poutres du *lattice*. Une étude a été menée sur l'influence du critère de rupture, afin d'en retenir une formulation adaptée aux chargement multi-axiaux. Il a été fait en sorte de conserver le caractère simple du critère, à un nombre de paramètres faible, pour qu'il reste aisément identifiable. Un critère de Mohr-Coulomb à deux paramètres, formulé en variables cinématiques a ainsi été retenu. L'emploi d'un tel critère a permis de reproduire le caractère ductile d'un essai de compression. Néanmoins, la question se pose encore de savoir, quels mécanismes manquent encore au modèle discret, pour reproduire ce type de comportement sans faire appel à un critère issu d'analyses limites. Dans la mesure où le niveau de représentativité du modèle discret serait suffisant, un critère basé sur

la définition même de la fissuration, à savoir un mécanisme induit par des extensions locales, devrait suffire. Au vu des travaux menés par D'Addetta [2004], il ne semble pas que la simplicité de description induite par l'utilisation d'un *lattice* soit en cause. En effet, un critère de Mohr-Coulomb apparaît aussi comme nécessaire en présence d'interfaces cohésives entre les particules. Par contre, il serait intéressant d'explorer l'influence de la porosité sur les mécanismes de rupture en compression, et notamment sur la ductilité de la réponse. L'ajout de la porosité pourrait être réalisé par l'introduction explicite de vides, plutôt que par l'introduction d'un caractère plastique des poutres du *lattice*. Contrairement à l'état actuel, une implication plus importante du mécanisme de friction, au niveau des pores écrasés, pourrait être attendue.

La procédure d'identification, reposant sur une analyse inverse et ne nécessitant que deux essais courants, a été validée sur une campagne d'essais variés réalisés sur un même béton. Le modèle discret a ainsi pu démontrer sa capacité à reproduire, de manière prédictive, des effets d'échelles et de formes sans recalage. Il s'est aussi avéré efficace pour des configurations de chargement plus complexes impliquant de la fissuration en mode mixte. Toutefois, pour ces configurations complexes, une réidentification partielle du modèle discret sur la base de quelques données matérielles a été nécessaire. La prédictivité du modèle n'a donc pu être garantie. Sur ce point, la validation du modèle discret a été particulièrement limitée par le manque de connaissance précise des conditions aux limites, et, bien que peu de paramètres aient à être calibrés par le manque de données sur le matériaux utilisé.

1.2 Modélisation continue

À partir de la théorie de l'endommagement inscrite dans le formalisme des Matériaux Standards Généralisés, une modélisation phénoménologique continue isotrope de la dégradation des matériaux quasi-fragiles a été proposée. L'écriture de ce modèle, et notamment des potentiels contrôlant l'évolution de la variable d'endommagement, a été enrichie afin de reproduire l'augmentation de la résistance et de la ductilité pour des états de contraintes à composante de compression croissante. Une attention toute particulière a été portée sur la réponse en cisaillement, qui a pu être caractérisée et identifiée à partir de simulations discrètes. L'introduction, notamment, d'une dépendance au niveau de confinement du matériau, dans la fonction de consolidation de l'endommagement a permis de reproduire correctement la réponse en cisaillement jusqu'à la rupture.

À partir d'un formalisme identique fondé, cette fois-ci, sur une combinaison d'élasticité non-linéaire et de théorie de la plasticité, une modélisation continue des phénomènes associés à la fermeture de la fissuration a été développée. La caractérisation de ces phénomènes a été réalisée à partir de résultats originaux issus du modèle discret, tels que la proportion de fissures fermées et l'énergie dissipée par friction. Il en a résulté une modélisation continue vérifiant les conditions dictées par la thermodynamique des processus irréversibles et fidèle à la réponse observée sous chargement de traction cyclique uni-axiale. Le modèle continu a aussi présenté des aspects intéressants, bien que non

recherchés initialement, en compression cyclique.

Un modèle robuste a donc été élaboré, grandement aidé par l'emploi d'une variable d'endommagement scalaire. Ce modèle, effets hystérétiques mis à part, est entièrement explicite, puisque constitué uniquement de potentiels formulés en déformations. Par ailleurs, les continuités de la réponse et de la relation du comportement sont vérifiées quelques soient les phénomènes macroscopique activés. Le modèle continu ainsi mis en place est donc particulièrement adapté au calcul de structures.

Les capacités du modèle continu formulé ont été vérifiées par la simulation du comportement cyclique d'un voile en béton armé. À la suite d'une identification des paramètres du modèle continu sur la base de simulations discrètes et de quelques données expérimentales, une bonne fidélité des résultats globaux en terme de dégradation de la structure a été obtenue. L'introduction des effets hystérétiques induits par le béton a été significatif, mais insuffisamment, pour expliquer à lui-seul l'origine l'amortissement structural. La dégradation de l'interface acier-béton est apparue, par son absence, comme tout aussi nécessaire que le caractère unilatéral frottant des fissures pour reproduire l'amortissement structural réel.

Finalement peu d'intérêt a été porté aux résultats locaux, tels que l'ouverture de fissure. Sur ce point, la modélisation continue a rapidement été mise en défaut. Mais la question se pose plutôt de savoir si la démarche de modélisation elle-même n'est pas davantage responsable. À de si importantes dimensions de VER, et donc de modélisation, tenter de déterminer une ouverture de fissure peut sembler être une extrapolation abusive de la capacité initiale du modèle continu. Par ailleurs contourner cette limitation en affinant la taille des éléments finis employés, sans en modifier le modèle constitutif, pour se rapprocher de la dimension de la quantité d'intérêt peut paraître tout aussi discutable. Une telle démarche signifie qu'il est possible de décorréler entièrement la dimension des éléments finis du modèle de comportement qu'il leur est attribué. Or, dans le cas de matériaux quasi-fragiles, les effets d'échelles sont prédominants. De plus, à l'échelle du VER certains types de dégradation sont pertinents, par exemple en compression, mais semblent peu réalistes à des échelles inférieures.

Ainsi lorsqu'il s'agit d'analyser des résultats à des échelles inférieures à l'échelle du VER, des méthodes de post-traitement de calculs menés à l'aide de modèles macroscopiques semblent plus adaptées [Oliver-Leblond, 2013]. Elles constituent une alternative efficace, dans l'attente de pouvoir employer des modèles numériques formulés à l'échelle de la grandeur d'intérêt, qu'il s'agisse de méthodes permettant de décrire la fissuration de manière discrète ou continue. D'ailleurs, des calculs de structure effectués à l'aide de modèles discrets, en partie simplifiés, affichent déjà des résultats prometteurs [Yamamoto et al., 2014].

1.3 Expérimentation numérique

La démarche de modélisation mise en place a consisté à développer un modèle continu pouvant être perçu comme une réduction du modèle discret. Après avoir ciblé les phénomènes prépondérants, et devant être reproduits pour le calcul de structures, ils ont été étudiés par le biais du modèle discret, avant d'en proposer une modélisation réduite, continue. Dans le cas présent, cette stratégie de modélisation a été exploitée à la fois pour le comportement en cisaillement dans l'objectif de simuler la réponse du voile du benchmark ConCrack ; et pour le comportement sous chargement cyclique, afin d'être en mesure d'évaluer la part d'amortissement attribuée au matériau quasi-fragile.

L'intérêt d'utiliser une modélisation fine a résidé dans sa capacité à jouer le rôle d'intermédiaire entre l'expérience et la modélisation macroscopique. Le modèle discret n'a requis que très peu d'essais pour être identifié, et a permis ensuite d'extrapoler les résultats nécessaires. Une infinité de cas de chargement ont pu être simulés, pour lesquels les conditions aux limites comme les quantités mesurées ont été idéalement maîtrisées, ce qui a facilité l'exploitation des résultats issus du modèle fin avec le modèle macroscopique. Il a pu être possible de simuler la réponse d'un VER de béton en cisaillement simple, et d'extraire des énergies dissipées spécifiques à chaque mécanisme dissipatif. Une stratégie d'identification de l'ensemble des paramètres du modèle continu a alors été proposée sur la base de résultats issus du modèle discret.

1.4 Effets hystérétiques et incompatibilité géométrique

La courte campagne d'expérimentation numérique menée sur le comportement cyclique en traction uni-axiale a permis d'effectuer quelques observations intéressantes, tirées de la connaissance des mécanismes capable d'être reproduits par le modèle discret. Le modèle tel que développé n'a pas permis de reproduire directement les effets hystérétiques attendus. L'influence de mécanismes supplémentaires a alors été étudiée. Il est ressorti de cette étude, qu'une perturbation d'ordre expérimental est probablement à l'origine des effets hystérétiques, de la présence de déformations résiduelles et du caractère progressif de l'effet unilatéral. Ces phénomènes macroscopiques ont pu être liés, au moins qualitativement, à la rotation de l'éprouvette lors d'un essai de traction.

En poursuivant ce raisonnement, en cause de leur origine liée à une erreur expérimentale, les effets hystérétiques pourraient être exclus du comportement idéalisé en traction cyclique uni-axial d'un VER de béton. Cependant, ce raisonnement est peut être excessif, notamment si l'explication d'une incompatibilité géométrique induite par des effets internes (retrait, présence d'eau libre) était aussi avérée. Une campagne expérimentale, en laboratoire, en l'absence de perturbation sur des essais de traction cyclique indirecte tels que proposés par Morice [2014], ou une simulation plus précise des effets du retrait, pourrait permettre d'apporter des réponses supplémentaires.

Mais dans l'hypothèse où se raisonnement soit justifié, il serait intéressant de se poser la question de savoir s'il existe un réel besoin de modéliser les effets hystérétiques observés, comme des phénomènes induits par un chargement de traction uni-axiale (mode I). En effet, il apparaît peu probable qu'ils se manifestent ainsi à l'échelle de la structure, et donc en l'absence de perturbation expérimentale. Il semblerait alors davantage nécessaire de s'attarder sur la modélisation de ces mêmes effets hystérétiques, associés à de la friction en surface de fissure, lorsqu'une fissure se propage en mode II, autrement dit la modélisation du phénomène d'*aggregate interlocking* [Jefferson et al., 2014].

2 Synthèse finale

L'objectif initial de ce travail était de contribuer à la modélisation du comportement, sous sollicitation sismique, des matériaux quasi-fragiles. Le besoin sous-jacent était d'évaluer l'apport de l'emploi de matériaux quasi-fragiles dans la réalisation d'ouvrages structuraux, vis-à-vis de la problématique parasismique et d'amortissement structural.

Une modélisation macroscopique, continue, phénoménologique, fondée sur les théories de l'endommagement et de la plasticité, adaptée au calcul de structures à été proposée. Elle permet à la fois de mener à terme, avec certitude, des calculs à grande échelle, tout en considérant des phénomènes prépondérants à l'échelle du matériau. Pour y parvenir, une démarche reposant sur l'expérimentation numérique à été mise en place. Elle a permis de faire le lien entre les données expérimentales matérielles disponibles, généralement en faible quantité, et les équations sophistiquées des modèles continus. L'expérimentation numérique n'a été rendue possible que par l'élaboration, en amont, d'une modélisation fine, basée sur une description géométrique détaillée du matériau, autorisant une description mécanique triviale, pouvant être mise en œuvre à partir des seules données expérimentales à disposition. En accordant aux simulations issues de cette modélisation fine une confiance équivalente aux expériences réalisées en laboratoire, sur la base de la campagne de validation réalisée, un outil d'expérimentation numérique a ainsi été conçu, en mesure de fournir des résultats de référence à l'échelle du VER, en quantité illimitée et à faible coût. En outre, un outil d'expérimentation entièrement maîtrisé, des conditions aux limites aux limites mécaniques.

L'exploitation d'un tel outil a nécessité la définition d'un cadre de formulation des modèles macroscopiques afin d'orienter le choix des essais numériques à conduire. Une partie de ce cadre a été imposée par le contexte de l'étude, autrement dit la sollicitation sismique, et les chargements multi-axiaux et cycliques en résultant. En y ajoutant certaines exigences en termes de robustesse numérique et de justification physique, qui se sont traduites par l'inscription du modèle macroscopique dans le formalisme des Matériaux Standards Généralisés, le nombre de points indéterminés restant, à caractériser et à identifier, a été réduit. L'indétermination concernant ces points a été levée, à partir de simulations fines sur des configurations spécifiques, notamment des chargements de cisaillement et de

traction cyclique uni-axiale. L'intérêt de l'expérimentation numérique a ainsi été montré par la production de résultats originaux, en termes de configurations d'essais (cisaillement) ou de quantités analysées (quantité de fissures fermées, analyses statistiques).

Le modèle macroscopique à finalement été mis en œuvre et appliqué au calcul de structures, dans une tentative de répondre à la problématique initiale, à savoir évaluer la contribution du matériau quasi-fragile à l'amortissement dans une structure qu'il constitue. Le modèle macroscopique a d'abord été caractérisé et identifié à partir de quelques données expérimentales extrapolées à l'aide du modèle fin, puis exploité pour simuler le comportement cyclique de structures simples (poutres en béton armé) et plus complexes (voile précontrainte en béton armé), impliquant donc la présence de sollicitations multi-axiales. Il est ressorti des simulations, une capacité du modèle macroscopique à prédire, autrement dit sans recallage, le comportement mécanique global d'une structure sous chargement cyclique, ainsi que la quantification de la contribution partielle du béton à l'amortissement structural sous sollicitation cyclique.

La démarche d'élaboration du modèle macroscopique proposée dans ce travail est finalement identique à la démarche de modélisation constitutive classique. D'une campagne d'expérimentation un certain nombre d'observations et de conclusions est tiré, permettant d'alimenter la formulation de modèles phénoménologiques. L'unique différence se fait par la substitution de l'expérience en laboratoire par l'expérience numérique. Au contraire du reste des démarches multi-échelles, le couplage entre les deux modèles n'est pas numérique, il est opéré par l'utilisateur, selon des considérations qui lui semblent les plus adaptées.

Bien que dans l'application l'expérimentation numérique donne l'accès à une quantité illimitée de données nouvelles, l'expérimentation numérique reste cependant limitée fondamentalement. À l'inverse de l'expérimentation en laboratoire, les résultats qu'elle fournit ne découlent pas d'une vérité absolue, qu'est la réalité intégrant la totalité des mécanismes existants, mais ils découlent d'un système n'intégrant que les mécanismes que le mécanicien a su observer et modéliser. L'expérimentation numérique accorde une confiance totale en des modèles, certes des plus fins et détaillés, mais qui par définition resteront toujours limités par l'incertitude humaine sur le comportement de la matière à des échelles encore inférieures.

Bibliographie

Andrieux, S., Bamberger, Y. et Marigo, J.-J. (1986). Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. Journal de mécanique théorique et appliquée, 5(3):471–513.

Babuska, I. et Melenk, J. (1997). The partition of unity method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:727–758.

Bandis, S. C., Lumsden, A. C. et Barton, N. R. (1983). Fundamentals of rock joint deformation. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 20:249–268.

Barenblatt, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advances in applied mechanics, 7(1):55–129.

Bashir, Y. M. et Goddard, J. D. (1991). A novel simulation method for the quasi-static mechanics of granular assemblages. Journal of Rheology, 35(5):849–885.

Bažant, Z. (1999). Size effect on structural strength : a review. Archive of Applied Mechanics, 69:703–725.

Bažant, Z. P. (2010). Can multiscale-multiphysics methods predict softening damage and structural failure. International Journal for Multiscale Computational Engineering, 8(1):61–67.

Bažant, Z. P., Caner, F. C., Carol, I., Adley, M. D. et Akers, S. A. (2000). Microplane model m4 for concrete. i : Formulation with work-conjugate deviatoric stress. Journal of Engineering Mechanics, 126(9):944–953.

Bažant, Z. P. et Gettu, R. (1992). Rate effects and load relaxation in static fracture of concrete. ACI Materials Journal, 89(5):456–468.

Bažant, Z. P. et Novak, D. (2000). Energetic-statistical size effect in quasibrittle failure at crack initiation. ACI Materials Journal, 97(3):381–392.

Bažant, Z. P. et Oh, B. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. Materials and structures, 16(93):155–177.

Bažant, Z. P. et Oh, B. H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. Journal of Engineering Mechanics, 111(4):559–582.

Bažant, Z. P., Tabbara, M., Kazemi, M. et Pijaudier-Cabot, G. (1990). Random particle model for fracture of aggregate and fibre composites. Journal of Engineering Mechanics, 116(8):1686–1705.

Belytschko, T., Lu, Y. Y. et Gu, L. (1994). Element-free galerkin methods. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 37:229–256.

Belytschko, T. et Song, J.-H. (2010). Coarse-graining of multiscale crack propagation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 81(5):537–563.

Benkemoun, N., Hautefeuille, M., Colliat, J.-B. et Ibrahimbegovic, A. (2010). Failure of heterogeneous materials : 3d meso-scale fe models with embedded discontinuities. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 82(13):1671–1688.

Bischoff, P. H. et Perry, S. H. (1991). Compressive behaviour of concrete at high strain rates. Materials and structures, 24(6):425–450.

Born, M., Huang, K. et Lax, M. (1955). Dynamical theory of crystal lattices. American Journal of Physics, 23(7):474–474.

Briffaut, M., Benboudjema, F., La Borderie, C. et Torrenti, J.-M. (2013). Creep consideration effect on meso-scale modeling of concrete hydration process and consequences on the mechanical behavior. Journal of Engineering Mechanics, 139(12):1808–1817.

Chaboche, J.-L. (1988). Continuum damage mechanics : Part ii—damage growth, crack initiation, and crack growth. Journal of applied mechanics, 55(1):65–72.

Chaboche, J.-L. (1993). Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage. International Journal of Damage Mechanics, 2(4):311–329.

Chen, A. C. T. et Chen, W.-F. (1975). Constitutive relations for concrete. Journal of Engineering Mechanics, 101:465–481.

Cormery, F. et Welemane, H. (2002). A critical review of some damage models with unilateral effect. Mechanics Research Communications, 29(5):391–395.

Crambuer, R. (2013). Contribution à l'identification de l'amortissement : approches expérimentales et numériques. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Cundall, P. A. et Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. Geotechnique, 29:47–60.

Cusatis, G., Bažant, Z. et Cedolin, L. (2006). Confinement-shear lattice csl model for fracture propagation in concrete. Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 195(52):7154–7171.

Cusatis, G., Bažant, Z. P. et Cedolin, L. (2003). Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression. i : Theory. Journal of Engineering Mechanics, 129(12):1439–1448.

Cusatis, G., Mencarelli, A., Pelessone, D. et Baylot, J. (2011a). Lattice discrete particle model (ldpm) for failure behavior of concrete. i : Theory. Cement Concrete Comp., 33(9):881–890.

Cusatis, G., Mencarelli, A., Pelessone, D. et Baylot, J. (2011b). Lattice discrete particle model (ldpm) for failure behavior of concrete. ii : Calibration and validation. Cement Concrete Comp., 33(9):891–905.

D'Addetta, G. A. (2004). Discrete models for cohesive frictional materials. Thèse de doctorat, Universität Stuttgart.

D'Addetta, G. A., Kun, F. et Ramm, E. (2002). On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials. Granular Matter, 4:77–90.

Davie, C. T. et Bićanic, N. (2003). Failure criteria for quasi-brittle materials in lattice-type models. Communications in Numerical Methods in Engineering, 19:703–713.

De Borst, R. et Nauta, P. (1985). Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. Engineering Computations, 2(1):35–46.

De Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M. et Van Gils, M. A. J. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. Computers & Structures, 55(4):581–588.

Delaplace, A. (2008). Modélisation discrète appliquée au comportement des matériaux et des structures. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Delaplace, A. et Desmorat, R. (2007). Discrete 3d model as complimentary numerical testing for anisotropic damage. International Journal of Fracture, 148:115–128.

Desmorat, R., Gatuingt, F. et Ragueneau, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. Engineering Fracture Mechanics, 74(10):1539–1560.

Drucker, D. C. et Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quarterly of applied mathematics, 10(2):157–165.

Duda, H. et Konig, G. (1991). Rheological material model for the stress-crack-width relation of concrete under monotonic and cyclic tension. ACI Materials Journal, 88(3): 278–287.

Duffaut, P. et Homand, F. (2000). Manuel de mécanique des roches. Manuel de mécanique des roches. Presses de l'École des Mines.

Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 241(1226):376–396.

Feenstra, P. H. et De Borst, R. (1996). A composite plasticity model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 33(5):707–730.

Fenwick, R. C. et Paulay, T. (1968). Mechanisms of shear resistance of concrete beams. Journal of the Structural Division, 94:2235–2350.

Feyel, F. et Chaboche, J. (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elasto-viscoplactic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, 183:309–330.

François, M. (2008). A new yield criterion for the concrete materials. Comptes Rendus Mécanique, 336(5):417–421.

Gambarotta, L. et Lagomarsino, S. (1993). A microcrack damage model for brittle materials. International Journal of Solids and Structures, 30(2):177–198.

Geers, M. G. D., De Borst, R. et Peerlings, R. H. J. (2000). Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams. Engineering Fracture Mechanics, 65(2-3):247–261.

Gentier, S. (1987). Morphologie et comportement hydromécanique d'une fracture naturelle dans le granite sous conrainte normale. BRGM, Orléans.

Ghaboussi, J. (1988). Fully deformable discrete element analysis using a finite element approach. Computers and Geotechnics, 5(3):175–195.

Goodman, R. E. (1976). Methods of geological engineering in discontinuous rocks. West Publishing Co.

Goodman, R. E., Taylor, R. L. et Brekke, T. L. (1968). A model for the mechanics of jointed rock. Journal of Soil Mechanics & Foundations Div.

Grassl, P. et Jirásek, M. (2010). Meso-scale approach to modelling the fracture process zone of concrete subjected to uniaxial tension. International Journal of Solids and Structures, 47:957–968.

Grassl, P., Lundgren, K. et Gylltoft, K. (2002). Concrete in compression : a plasticity theory with a novel hardening law. International Journal of Solids and Structures, 39(20):5205–5223.

Grégoire, D., Rojas-Solano, L. B. et Pijaudier-Cabot, G. (2013). Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 37(10):1434–1452.

Guidault, P., Allix, O., Champaney, L. et Navarro, J. (2007). A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures. Computers & structures, 85(17):1360–1371.

Guyer, R. A., McCall, K. R. et Boitnott, G. N. (1995). Hysteresis, discrete memory, and nonlinear wave propagation in rock : A new paradigm. Physical review letters, 74(17):3491.

Gylltoft, K. (1984). A fracture mechanics model for fatigue in concrete. Matériaux et Construction, 17(1):55–58.

Halm, D. et Dragon, A. (1996). A Model of Anisotropic Damage by Mesocrack Growth ; Unilateral Effect. International Journal of Damage Mechanics, 5(4):384–402.

Halphen, B. et Nguyen, Q. S. (1975). Sur les matériaux standard généralisés. Journal de mécanique, 14:39–63.

Heitz, T. (2013). Caractérisation expérimentale et numérique de la fissuration à l'interface acier-béton. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Hentz, S., Daudeville, L. et Donzé, F.-V. (2004). Identification and validation of a discrete element model for concrete. J. Eng. Mech., 130:709–719.

Herrmann, H. J., Hansen, A. et Roux, S. (1989). Fracture of disordered, elastic lattices in two dimensions. Physical Review B, 39(1):637–648.

Hilaire, A. (2014). Étude des déformations différées des bétons en compression et en traction, du jeune âge au long terme. Application aux enceintes de confinement. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Hill, R. (1950). The Mathematical Theory of Plasticity, The Oxford Engineering Science Series. Oxford.

Hillerborg, A., Modeer, M. et Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and Concrete Research, 6:773–782.

Hoover, C. G. et Bažant, Z. P. (2014). Cohesive crack, size effect, crack band and work-of-fracture models compared to comprehensive concrete fracture tests. International Journal of Fracture, 187(1):133–143.

Hordijk, D. A. (1991). Local approach to fatigue of concrete. Thèse de doctorat, T.U. Delft, The Netherlands.

Hordijk, D. A., Reinhardt, H. W. et Cornelissen, H. A. W. (1987). Fracture mechanics parameters of concrete from uniaxial tensile tests as influenced by specimen length. Dans Proceedings of International Conference on the Fracture of Concrete and Rocks, pages 138–149.

Hrennikoff, A. (1941). Solution of problems of elasticity by the framework method. Journal of applied mechanics, 8(4):169–175.

Hult, J. (1979). Continuum damage mechanics - capabilities, limitations and promises. Mechanisms of deformation and fracture, pages 233–247.

Issa, J. A. et Nelson, R. B. (1992). Numerical analysis of micromechanical behaviour of granular materials. Engineering computations, 9(2):211–223.

Jefferson, A. D., Mihai, I. C. et Lyons, P. (2014). An approach to modelling smoothed crack closure and aggregate interlock in the finite element analysis of concrete structures. Computational Modelling of Concrete Structures, pages 219–223.

Jing, L. (1998). Formulation of discontinuous deformation analysis (dda) – an implicit discrete element model for block systems. Engineering Geology, 49(3):371–381.

Jirásek, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188(1):307–330.

Jirásek, M. et Belytschko, T. (2002). Computational resolution of strong discontinuities. Dans Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V, Vienna University of Technology, Austria.

Ju, J. W. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories : Constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids and Structures, 25(7):803–833.

Kachanov, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk, 8:26–31.

Kachanov, L. M. (1992). Effective Elastic Properties of Cracked Solids : Critical Review of Some Basic Concepts. Applied Mechanics Reviews, 45(8):304.

Kawai, T. (1978). New discrete models and their application to seismic response analysis of structures. Nuclear Engineering and Design, 48(1):207–229. Special Issue Structural Mechanics in Reactor Technology - SMIRT IV.

Kotsovos, M. D. (1983). Effect of testing techniques on the post-ultimate behaviour of concrete in compression. Materiaux et construction, 16(1):3–12.

Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. et Rusch, H. (1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. Dans ACI Journal proceedings, volume 66. ACI.

La Borderie, C. (1991). Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton. Thèse de doctorat, Université Paris 6.

Ladevèze, P. (1983). On an anisotropic damage theory. Dans Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media, J. P. Boehler ed. 1993, pages 355–363.

Le Bellégo, C., Dubé, J.-F., Pijaudier-Cabot, G. et Gérard, B. (2003). Calibration of nonlocal damage model from size effect tests. European Journal of Mechanics A/Solids, 22:3346.

Lee, J. et Fenves, G. L. (1998). Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. Journal of Engineering Mechanics, 124(8):892–900.

Lee, S.-K., Song, Y.-C. et Han, S.-H. (2004). Biaxial behavior of plain concrete of nuclear containment building. Nuclear Engineering and Design, 227(2):143–153.

Lemaitre, J. (1984). How to use damage mechanics. Nuclear Engineering and Design, 80(2):233–245.

Lowes, L. et Altoontash, A. (2003). Modeling reinforced-concrete beam-column joints subjected to cyclic loading. Journal of Structural Engineering, 129(12):1686–1697.

Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. et Oñate, E. (1989). A plastic-damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 25(3):299–326.

Maji, A. et Shah, S. P. (1988). Process zone and acoustic-emission measurements in concrete. Experimental Mechanics, 28(1):27–33.

Matallah, M. et La Borderie, C. (2009). Inelasticity-damage-based model for numerical modeling of concrete cracking. Engineering Fracture Mechanics, 76(8):1087–1108.

Matallah, M., La Borderie, C. et Maurel, O. (2010). A practical method to estimate crack openings in concrete structures. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 34(15):1615–1633.

Mayergoyz, I. D. (1991). The Classical Preisach Model of Hysteresis. Springer.

Mazars, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Mazars, J., Berthaud, Y. et Ramtani, S. (1990). The unilateral behavior of damage concrete. Eng. Fract. Mech., 35:629–635.

Mazars, J. et Pijaudier-Cabot, G. (1989). Continuum damage theory-application to concrete. Journal of Engineering Mechanics, 115(2):345–365.

Menetrey, P. et Willam, K. J. (1995). Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. ACI structural Journal, 92(3):311–318.

Mertens, S. (2009). Hysteresis, damage and moisture effects in quasi-brittle porous materials. Thèse de doctorat, K.U. Leuven, Belgium.

Michou, A. (2015). Analyse expérimentale et modélisation du comportement de structures précontraintes. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

Mihai, I. C. et Jefferson, A. D. (2011). A material model for cementitious composite materials with an exterior point eshelby microcrack initiation criterion. International Journal of Solids and Structures, 48(24):3312 – 3325.

Minga, E. (2013). Lois de comportement cyclique pour matériaux quasi-fragiles. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Moës, N., Dolbow, J. et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46(1):131–150.

Moore, E. F. (1959). The shortest path through a maze. Bell Telephone System.

Moreau, J. J. (1988). Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. Dans Nonsmooth mechanics and Applications, pages 1–82. Springer.

Mori, T. et K, T. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metallurgica, 21(5):571–574.

Morice, E. (2014). Fissuration dans les matériaux quasi-fragiles : approche numérique et expérimentale pour la détermination d'un modèle incrémental à variables condensées. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Moukarzel, C. et Herrmann, H. J. (1992). A vectorizable random lattice. Journal of Statistical Physics, 68:911–923.

Mura, T. (1987). Micromechanics of defects in solids, volume 3. Springer.

Murakami, S. et Kamiya, K. (1997). Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics. International Journal of Mechanical Sciences, 39(4):473–486.

Nemat-Nasser, S. et Hori, M. (1999). Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials, volume 2. Elsevier Amsterdam.

Ngo, D. et Scordelis, A. C. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. J. Am. Concr. Inst., 64:152–163.

Nguyen, D., Lawrence, C., La Borderie, C., Matallah, M. et Nahas, G. (2010). A mesoscopic model for a better understanding of the transition from diffuse damage to localized damage. European Journal of Environmental and Civil Engineering, 14(6-7):751–776.

Nouailletas, O. (2013). Comportement d'une discontinuité dans un géomatériau sous sollicitation chemo-mécanique : expérimentations et modélisations. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Nurmela, K. J. et Östergård, P. R. J. (1997). Packing up to 50 equal circles in a square. Discrete & Computational Geometry, 18(1):111–120.

O'Connor, R. M. (1996). A distributed discrete element modeling environment : algorithms, implementation and applications. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, The U.S.A.

Oliveira, D. V. (2003). Experimental and numerical analysis of blocky masonry structures under cyclic loading. Thèse de doctorat, Universidade do Minho.

Oliver-Leblond, C. (2013). Comportement à rupture des structures : Description à deux échelles des mécanismes locaux appliquée aux matériaux fragiles renforcés. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Oliver-Leblond, C., Delaplace, A., Ragueneau, F. et Richard, B. (2013). Non-intrusive global/local analysis for the study of fine cracking. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 37(8):973–992.

O'Rourke, J., Chien, C.-B., Olson, T. et Naddor, D. (1982). A new linear algorithm for intersecting convex polygons. Computer Graphics and Image Processing, 19(4):384–391.

Ortiz, M., Leroy, Y. et Needleman, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 61(2):189–214.

Pearce, C. J., Thavalingam, A., Liao, Z. et Bićanić, N. (2000). Computational aspects of the discontinuous deformation analysis framework for modelling concrete fracture. Engineering Fracture Mechanics, 65(2):283–298.

Pensée, V., Kondo, D. et Dormieux, L. (2002). Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. Journal of Engineering Mechanics, 128(8):889–897.

Perkins, E. et Williams, J. R. (2001). A fast contact detection algorithm insensitive to object sizes. Engineering Computations, 18(1/2):48–62.

Pijaudier-Cabot, G. et Bažant, Z. P. (1987). Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics, 1113:1512–1533.

Poinard, C., Malecot, Y. et Daudeville, L. (2010). Damage of concrete in a very high stress state : experimental investigation. Materials and Structures, 43(1-2):15–29.

Ponte Castaneda, P. et Willis, J. R. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 43(12):1919–1951.

Potyondy, D. O. et Cundall, P. A. (2004). A bonded-particle model for rock. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 41(8):1329–1364.

Qian, Z. (2012). Multiscale Modeling of Fracture Processes in Cementitious Materials. Thèse de doctorat, T.U. Delft, The Netherlands.

Rabotnov, I. U. N. et Leckie, F. A. (1969). Creep problems in structural members. North-Holland Publishing Company Amsterdam.

Ragueneau, F., Desmorat, R. et Gatuingt, F. (2008). Anisotropic damage modelling of biaxial behaviour and rupture of concrete structures. Computers and Concrete, 5(4):417–434.

Ragueneau, F., La Borderie, C. et Mazars, J. (2000). Damage model for concrete like materials coupling cracking and friction, contribution towards structural damping : first uniaxial application. Mechanics Cohesive Frictional Materials, 5:607–625.

Ramtani, S. (1990). Contribution a la modélisation du comportement multi-axial du béton endommagé avec description du caractère uni-latéral. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI.

Rashid, Y. R. (1968). Analysis of prestressed concrete vessels. Nuclear Engineering Design, 7:334–355.

Reinhardt, H. W. et Cornelissen, H. A. W. (1984). Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading. Cement and concrete research, 14(2):263–270.

Reinhardt, H. W., Cornelissen, H. A. W. et Hordijk, D. A. (1986). Tensile tests and failure analysis of concrete. Journal of Structural Engineering, 112(11):2462–2477.

Reinhardt, H. W., Rossi, P. et Van Mier, J. G. M. (1990). Joint investigation of concrete at high rates of loading. Materials and Structures, 23(3):213–216.

Rice, J. R. (1968). Mathematical analysis in the mechanics of fracture. Fracture : an advanced treatise, 2:191–311.

Richard, B. et Ragueneau, F. (2013). Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings : Formulation, numerical implementation and applications. Engineering Fracture Mechanics, 98:383–406.

Rinaldi, A. et Lai, Y. C. (2007). Statistical damage theory of 2d lattices : Energetics and physical foundations of damage parameter. International Journal of Plasticity, 23:1796–1825.

Rivillon, P. et Gabs, A. (2011). Projet national de recherche ceos.fr, axe 2 – expérimentations, rapport n°eem 09 26023877-c. Rapport technique, Technical Report, CSTB.

Rossi, P. (1991). A physical phenomenon which can explain the mechanical behaviour of concrete under high strain rates. Materials and Structures, 24(6):422–424.

Rossi, P. et Richer, S. (1987). Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach. Materials and Structures, 20:334–337.

Rossi, P., Ulm, F.-J. et Hachi, F. (1996). Compressive behavior of concrete : physical mechanisms and modeling. Journal of Engineering Mechanics, 11:1038–1043.

Rossi, P., Van Mier, J. G. M., Toutlemonde, F., Le Maou, F. et Boulay, C. (1994). Effect of loading rate on the strength of concrete subjected to uniaxial tension. Materials and Structures, 27(5):260–264.

Rots, J. G., Belletti, B. et Invernizzi, S. (2008). Robust modeling of rc structures with an "event-by-event" strategy. Engineering Fracture Mechanics, 75(3):590–614.

Rots, J. G. et Invernizzi, S. (2004). Regularized sequentially linear saw-tooth softening model. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28(7-8):821–856.

Rots, J. G., Nauta, P., Kuster, G. M. A. et Blaauwendraad, J. (1985). Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete. Delft University of Technology.

Roubin, E. (2013). Meso-scale FE and morphological modeling of heterogeneous media : applications to cementitious materials. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Roubin, E., Vallade, A., Benkemoun, N. et Colliat, J.-B. (2015). Multi-scale failure of heterogeneous materials : A double kinematics enhancement for embedded finite element method. International Journal of Solids and Structures, 52(0):180 – 196.

Rychlewski, J. (1984). On hooke's law. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 48(3):303–314.

Schlangen, E. (1993). Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. Thèse de doctorat, T.U. Delft, The Netherlands.

Schlangen, E. et Van Mier, J. G. M. (1992). Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites. Cement and Concrete Composites, 14:105–118.

Scholtès, L. et Donzé, F.-V. (2013). A {DEM} model for soft and hard rocks : Role of grain interlocking on strength. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 61(2):352–369.

Sellier, A., Casaux-Ginestet, G., Buffo-Lacarrière, L. et Bourbon, X. (2013). Orthotropic damage coupled with localized crack reclosure processing. part i : Constitutive laws. Engineering Fracture Mechanics, 97:148–167.

Shi, G.-H. et Goodman, R. E. (1985). Two dimensional discontinuous deformation analysis. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 9(6):541–556.

Shi, G.-h. et Goodman, R. E. (1989). Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 13(4):359–380.

Simo, J. C. et Ju, J. (1987). Strain and stress based continuum damage models formulation. International Journal of Solids and Structures, 23:821–840.

Simo, J. C. et Laursen, T. A. (1992). An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. Computers & Structures, 42(1):97–116.

Simo, J. C. et Taylor, R. L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22(3): 649–670.

Snozzi, L., Caballero, A. et Molinari, J.-F. (2011). Influence of the meso-structure in dynamic fracture simulation of concrete under tensile loading. Cement and Concrete Research, 41(11):1130–1142.

Strouboulis, T., Babuška, I. et Copps, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. Computer methods in applied mechanics and engineering, 181(1):43–69.

Sukumar, N. et Prévost, J.-H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method part i : Computer implementation. International Journal of Solids and Structures, 40(26):7513–7537.

Terrien, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. BLPC, 105:65–72.

Tillemans, H.-J. et Herrmann, H. J. (1995). Simulating deformations of granular solids under shear. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, 217(3-4):261–288.

Tran, V. T., Donzé, F.-V. et Marin, P. (2011). A discrete element model of concrete under high triaxial loading. Cement and Concrete Composites, 33(9):936–948.

Van Den Abeele, K. E.-A., Carmeliet, J., Johnson, P. A. et Zinszner, B. (2002). Influence of water saturation on the nonlinear elastic mesoscopic response in earth materials and the implications to the mechanism of nonlinearity. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 107(B6):ECV 4 1–11.

Van Mier, J. G. M. (2009). Mode ii fracture localization in concrete loaded in compression. Journal of Engineering Mechanics, 135:1–8.

Van Mier, J. G. M., Van Vliet, M. R. A. et Wang, T. K. (2002). Fracture mechanisms in particle composites : statistical aspects in lattice type analysis. Mech. Mater, 34:705–724.

Van Vliet, M. R. A. et Van Mier, J. G. M. (2000). Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. Engineering Fracture Mechanics, 65:165–188.

Vonk, R. A. (1992). Softening of concrete loaded in compression. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.

Walraven, J. C. (1980). Aggregate interlock : a theoretical and experimental analysis. Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Delft, The Netherlands.

Wang, X. F., Yang, Z. J., Yates, J. R., Jivkov, A. P. et Zhang, C. (2015). Monte carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores. Construction and Building Materials, 75:35–45.

Washizu, K. (1975). Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon press.

Watstein, D. (1953). Effect of straining rate on the compressive strength and elastic properties of concrete. Dans ACI Journal Proceedings, volume 49. ACI.

Willam, K. J. et Warnke, E. P. (1975). Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. Dans Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, volume 19, page 174. ISMES, Bergamo, Italy.

Williams, J. R. et O'Connor, R. (1995). A linear complexity intersection algorithm for discrete element simulation of arbitrary geometries. Engineering computations, 12(2):185–201.

Wriggers, P. et Moftah, S. O. (2006). Mesoscale models for concrete : Homogenisation and damage behaviour. Finite Elements in Analysis and Design, 42(7):623 – 636. The Seventeenth Annual Robert J. Melosh Competition The Seventeenth Annual Robert J. Melosh Competition.

Yamamoto, Y., Nakamura, H., Kuroda, I. et Furuya, N. (2014). Crack propagation analysis of reinforced concrete wall under cyclic loading using rbsm. European Journal of Environmental and Civil Engineering, 18(7):1–13.

Yankelevsky, D. Z. et Reinhardt, H. W. (1989). Uniaxial behavior of concrete in cyclic tension. Journal of Structural Engineering, 115(1):166–182.