



Génération de Maillages Quadrangulaires

Bertrand Pellenard

► To cite this version:

Bertrand Pellenard. Génération de Maillages Quadrangulaires. Géométrie algorithmique [cs.CG]. UNSA, Polytech'Nice Sophia, 2012. Français. NNT : . tel-01098029

HAL Id: tel-01098029

<https://inria.hal.science/tel-01098029v1>

Submitted on 22 Dec 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

ÉCOLE DOCTORALE STIC

**SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE LA
COMMUNICATION**

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis

Mention : INFORMATIQUE

Présentée et soutenue par

Bertrand PELLENARD

Génération de Maillages Quadrangulaires

Thèse dirigée par Pierre ALLIEZ et Jean-Marie MORVAN

soutenue le mardi 18 décembre 2012

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Raphaëlle Chaine	- Maître de conférences	- Université Claude Bernard
	Marc Daniel	- Professeur	- Polytech Marseille
	Nicolas Ray	- Chargé de recherche	- Inria Nancy Grand Est
<i>Directeurs :</i>	Pierre Alliez	- Directeur de recherche	- Inria Sophia Antipolis Méditerranée
	Jean-Marie Morvan	- Professeur	- Université Claude Bernard / KAUST
<i>Examineurs :</i>	Liming Chen	- Professeur	- Ecole Centrale de Lyon
	Julien Tierny	- Chargé de recherche	- CNRS (UMR 5141) - Telecom ParisTech

Résumé : L'objectif de cette thèse est de concevoir des méthodes et algorithmes de génération de maillages quadrangulaires isotropes et anisotropes.

La première contribution est une méthode de maillage quadrangulaire isotrope de domaines 2D, avec un contrôle à la fois sur la taille et sur l'orientation des éléments. Le cœur de l'algorithme repose sur une procédure d'optimisation par étapes qui améliorent successivement la qualité du maillage pour les critères de taille, de forme, d'orientation et de régularité. Cette méthodologie permet le contrôle simultané de la taille et de l'orientation des éléments.

La deuxième contribution est une méthode de calcul automatique d'une métrique anisotrope rectangulaire pour des surfaces lisses par morceaux approchées par des maillages triangulaires. Cette métrique est déduite d'une erreur de tolérance spécifiée par l'utilisateur, et est exprimée en déviation angulaire de la normale à la surface. Elle ne dépend que d'un unique paramètre intuitif de tolérance et est particulièrement bien adaptée pour préserver les bords et les arêtes vives de la surface.

La troisième contribution est une méthode de remaillage polygonal anisotrope de surfaces. L'algorithme utilise une procédure d'optimisation gloutonne qui ajoute, supprime et relocalise des générateurs sur la surface pour satisfaire deux critères liés à la partition et à la conformité du maillage. Ces générateurs induisent une décomposition de la surface à partir de leurs métriques associées pendant la phase d'optimisation, puis une partition de la surface dans la phase finale de maillage. Cette méthodologie permet une bonne adéquation des éléments avec la métrique pendant la phase d'optimisation.

Quadrilateral Mesh Generation

Abstract : The goal of this thesis is to devise methods and algorithms for the automatic generation of isotropic and anisotropic quadrilateral meshes.

The first contribution is a method for isotropic quadrangular meshing of 2D domains, with control upon both element sizing and orientation. At the heart of our algorithm is an optimization procedure which uses several successive steps to improve the mesh quality criteria for size, shape, orientation and regularity. This methodology allows the simultaneous control of element sizing and orientation.

The second contribution is an automatic method for computing an anisotropic rectangular metric on piecewise smooth surfaces approximated by triangle meshes. This metric is derived from a user-specified maximum tolerance error, and is expressed in angular deviation of the normal to the surface. It only depends on a single intuitive tolerance parameter and is shown particularly well suited to preserve boundaries and sharp features.

The third contribution is a method for anisotropic polygonal remeshing of surfaces. The algorithm uses a greedy optimization procedure which adds, removes and relocates generators on the surface to satisfy two criteria related to partitioning and mesh conformity. These generators induce first a surface decomposition from their associated metrics during the optimization step, then a surface partitioning during the final meshing step. This methodology provides a good fit between the metric and the mesh elements during the optimization step.

Remerciements

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivations	1
1.2	Problématique	5
1.3	Etat de l’art	6
1.4	Contributions	16
2	Notions	17
2.1	Distance	17
2.2	Centre de masse	19
2.3	Décomposition-partition-triangulation-maillage	23
2.4	Le cas métrique : triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï	27
3	Maillages isotropes de domaines 2D	35
3.1	Introduction	35
3.1.1	Etat de l’art	36
3.1.2	Contribution	38
3.2	Algorithme	39
3.2.1	Initialisation	39
3.2.2	Relaxation	43
3.2.3	Relaxation conforme	47
3.2.4	Paramétrisations locales	52
3.2.5	Subdivision barycentrique	56
3.2.6	Lissage	56
3.3	Résultats	57
3.4	Conclusion	63
4	Métrique anisotrope	65
4.1	Introduction	65
4.1.1	Etat de l’art	66
4.1.2	Contribution	68
4.2	Construction d’une métrique anisotrope	68
4.2.1	Déviaton entre deux faces	69
4.2.2	ε -région de tolérance associée à une face	69
4.2.3	Rectangle associé à un domaine $B_{2,1}(f, \varepsilon)$	70
4.2.4	Distance sur chaque $B_{2,1}(f, \varepsilon)$	70
4.3	Conclusion	78

5	Maillages anisotropes de surfaces	79
5.1	Introduction	80
5.1.1	Etat de l’art	81
5.1.2	Positionnement et contribution	83
5.2	Algorithme	84
5.3	Décomposition	86
5.4	Maillage	91
5.5	Résultats	95
5.6	Conclusion	102
6	Conclusion et Perspectives	103
	Bibliographie	107

CHAPITRE 1

Introduction

Sommaire

1.1 Motivations	1
1.2 Problématique	5
1.3 Etat de l'art	6
1.4 Contributions	16

1.1 Motivations

Mailler un domaine (2D) ou une surface (3D) consiste à en trouver une partition en éléments simples qui l'approche, tout en satisfaisant à une série de critères de qualité. En règle générale, ces éléments sont des triangles, des quadrangles ou des polygones.

Se situant entre les plus simples maillages triangulaires et les plus généraux maillages polygonaux, les maillages quadrangulaires sont souvent préférés pour plusieurs raisons :

- i) ils permettent de bien approcher des formes complexes et de respecter leurs propriétés différentielles ;
- ii) ils permettent de plaquer des signaux de modulation sur les surfaces ;
- iii) ils permettent de modéliser une surface géométriquement, interactivement et à plusieurs échelles avec les surfaces de subdivision ;
- iv) ils permettent de simuler des phénomènes physiques avec des méthodes aux éléments finis.

De plus, les quadrangles possèdent de meilleures propriétés interpolantes que les triangles [26].

Parmi ceux-là, les maillages anisotropes sont préférés aux maillages isotropes lorsque nous recherchons une bonne approximation avec un petit nombre d'éléments.

1.1.1 Critères

Nous passons maintenant en revue chacun des critères de qualité :

- Partition : décomposer le domaine sans chevauchement ni orphelin (voir section 2.3).
- Approximation : bien approcher la géométrie au sens d'une erreur à définir. En $2D$, nous choisissons de prendre comme erreur la distance de Hausdorff avec le domaine. Pour les surfaces, l'erreur choisie est la déviation maximale des normales.
- Nombre d'éléments : minimiser le nombre d'éléments pour une erreur d'approximation donnée.
- Topologie : chaque élément doit avoir la topologie d'un disque, c'est-à-dire connexe avec un seul bord.
- Convexité : chaque élément doit être convexe.
- Forme : générer une majorité d'éléments de forme carrée ou rectangulaire, c'est-à-dire avec des angles intérieurs proches de 90 degrés.
- Orientation : l'orientation d'un élément doit être en concordance avec un champ d'orientation donné.
- Taille : la taille d'un élément doit être en concordance avec un champ de taille donné. Dans le cas isotrope, la taille des éléments est la longueur moyenne des arêtes. Dans le cas anisotrope, la taille dépend de la direction.
- Alignement : préserver les arêtes vives. L'alignement diffère de l'orientation : l'alignement n'a de sens que proche des arêtes vives.
- Degré : les éléments sont en majorité de degré 4.
- Régularité : minimiser le nombre de sommets irréguliers (de degré différent de 4).
- Conformité : éviter les jonctions en T où c'est possible. En rétro-ingénierie, la conformité est importante car à chaque élément est associé une surface paramétrique de type NURBS qui n'est pas bien définie quand il y a des jonctions en T.

1.1.2 Défi scientifique

La génération automatique de maillages quadrangulaires et polygonaux pour des domaines et des surfaces est encore un défi scientifique en raison de la grande variété de critères et de la qualité recherchée.

Alors qu'une majorité de critères de qualité est souvent désirée, une difficulté majeure en maillage est qu'ils entrent souvent en conflit les uns avec les autres.

- Un champ de croix variable implique la présence de sommets irréguliers, et donc pénalise la régularité du maillage. La figure 1.1 illustre la présence de

sommets irréguliers au milieu d'un champ de croix variable.

- Un champ de taille variable pénalise également la régularité. La figure 1.2 montre que pour obtenir un maillage quadrangulaire pur, il est nécessaire de placer des sommets irréguliers pour connecter des zones de taille différente.
- Minimiser le nombre d'éléments peut impliquer l'anisotropie des éléments ce qui, dans le cas d'un champ de taille variable, pénalise la conformité ainsi que le degré des éléments. La figure 1.3 illustre comment un champ de taille variable favorise la présence de jonctions en T et donc pénalise la conformité.

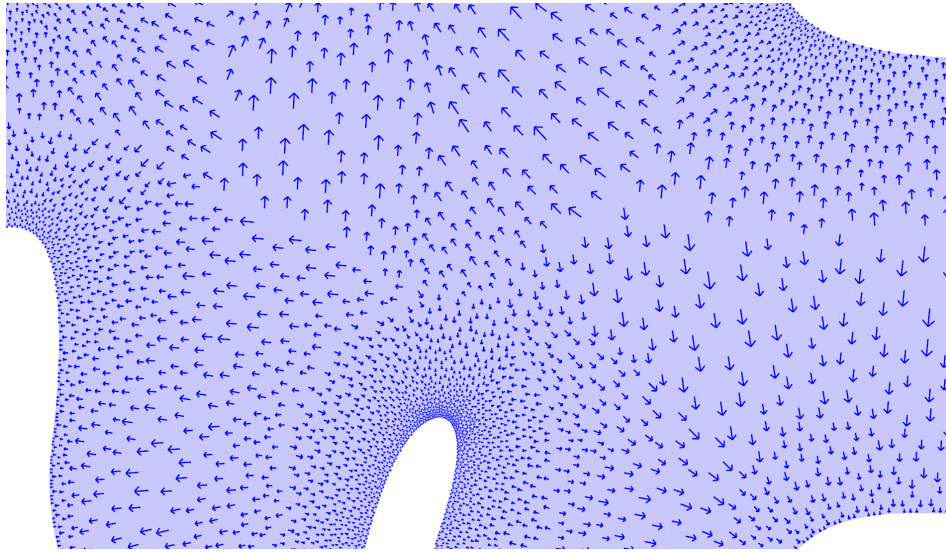


FIGURE 1.1 – Conflit entre les critères d'orientation et de régularité. Un champ de croix variable induit nécessairement la présence de sommets irréguliers. Pour plus de clarté, seul un vecteur de la croix (sur les quatre qui la forment) est représenté.

Un autre aspect ardu vient du fait que même si certains critères de qualité sont définis de manière locale, il n'en demeure pas moins qu'ils possèdent des contraintes globales :

- le nombre d'arêtes sur le bord d'un maillage quadrangulaire pur est pair ;
- la somme totale des indices des sommets respecte le théorème de Poincaré-Hopf ;
- un maillage quadrangulaire pur, régulier et sans bord n'est possible que pour une surface de genre 1 (voir proposition 1).

Proposition 1 Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ un maillage quadrangulaire pur et régulier d'une surface sans bord. Alors la surface est de genre 1.

Preuve : Puisque le maillage est quadrangulaire pur, régulier et sans bord :

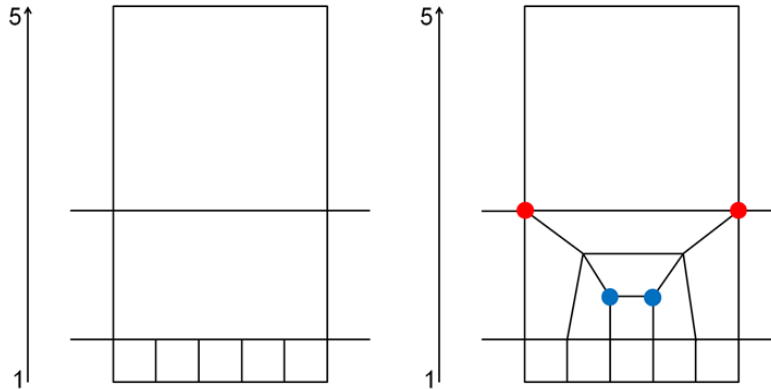


FIGURE 1.2 – Conflit entre les critères de taille et de régularité. Un champ de taille variable induit nécessairement la présence de sommets irréguliers pour connecter des zones de taille différente. Si nous voulons construire un maillage pur quadrangulaire à partir des six éléments donnés, alors des sommets irréguliers vont prendre place sur la partie médiane, et nous les représentons en rouge pour les sommets de degré supérieur à 4 et en bleu pour les sommets de degré inférieur à 4.

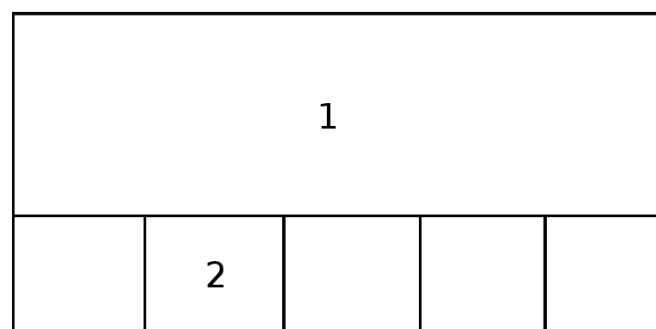


FIGURE 1.3 – Jonctions en T. Le maillage n'est pas conforme, la frontière entre l'élément 1 et l'élément 2 n'est qu'une partie de l'arête de l'élément 1.

- $4\mathcal{F} = 2\mathcal{E}$ (chaque arête est adjacente à exactement deux faces) ;
- $\mathcal{E} = 2\mathcal{V}$ (chaque sommet est incident à exactement quatre arêtes).

D'après le théorème d'Euler, $|\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{F}| = 2(1 - g)$, où g est le genre de la surface. Or, avec les deux relations précédentes, nous obtenons : $|\mathcal{V}| - |\mathcal{E}| + |\mathcal{F}| = 0$. Donc : $2(1 - g) = 0$. Ainsi, $g = 1$. ■

La difficulté à traiter les critères à la fois locaux et globaux peut expliquer la grande variété d'approches proposées dans le domaine de la génération automatique de maillages quadrangulaires (voir section 1.3).

1.1.3 Applications

De nos jours, en animation, les objets sont souvent représentés par des maillages quadrangulaires. Par exemple, un maillage quadrangulaire peut servir de maillage de contrôle à un maillage plus fin obtenu après subdivision de Catmull-Clark [19].

L'objectif est de travailler avec des maillages le plus régulier possible : des sommets irréguliers ou des éléments à forte distorsion (en forme) induisent des artefacts dans le rendu graphique de l'objet. La figure 1.4 illustre comment des sommets irréguliers sur un maillage de base induisent des artefacts sur le maillage subdivisé.

En simulation, des éléments quadrangles sont nécessaires pour la précision de la solution obtenue et pour la discrétisation des opérateurs. À chaque quadrangle est associé une fonction de base qui est en général interpolante, comme par exemples les polynômes de Lagrange ou encore les éléments finis d'Hermite.

En rétro-ingénierie, les maillages quadrangulaires sont préférés aux autres (triangulaires par exemple) puisqu'il est possible d'associer une surface paramétrique de type NURBS sur chacun de ses éléments.

1.2 Problématique

Dans cette thèse, notre objectif est de proposer des méthodes de génération automatique de maillages quadrangulaires et polygonaux de *qualité* pour des domaines de $\mathbb{R}^2$ et pour des surfaces de $\mathbb{R}^3$, où le terme *qualité* est relié aux critères énoncés en section 1.1.

Les données du problème sont de deux types :

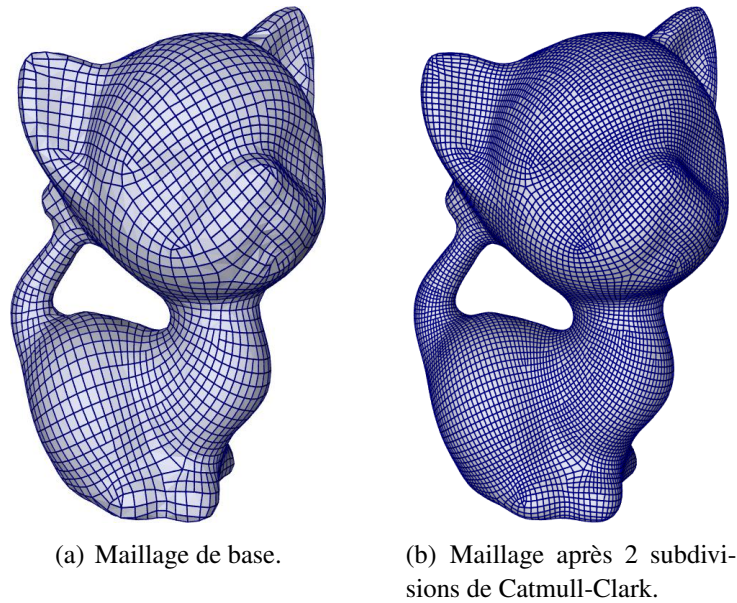


FIGURE 1.4 – Artefacts. Des sommets irréguliers dans le maillage de base induisent des artefacts dans le maillage subdivisé (après 2 subdivisions de Catmull-Clark [19]). Images extraites de Lai *et al.* [49].

- Un domaine de $\mathbb{R}^2$, muni d'un champ de taille et d'un champ de croix. Notons que si les deux champs ne sont pas donnés par l'utilisateur, nous pouvons les calculer à partir de la géométrie d'un domaine (voir section 3.2.1). Le champ de taille peut être uniforme ou non, et la gradation plus ou moins prononcée.
- Une surface de $\mathbb{R}^3$, et une erreur de tolérance.

Le maillage généré doit satisfaire aux critères énoncés en section 1.1.

1.3 Etat de l'art

L'objectif de cette section est de donner un aperçu des méthodes de génération de maillages quadrangulaires et polygonaux dans la littérature [10, 15]. Une présentation spécifique sera donnée au chapitre 3 pour les maillages de domaines de $\mathbb{R}^2$ et au chapitre 5 pour les maillages de surfaces de $\mathbb{R}^3$.

1.3.1 Maillages quadrangulaires

L'état de l'art sur les maillages quadrangulaires peut être divisé en deux catégories : les méthodes dites de génération et les méthodes dites d'optimisation.

1.3.1.1 Méthodes de génération

Nous décrivons ici les méthodes qui permettent de générer un maillage quadrangulaire.

Conversion : Les algorithmes de conversion de maillages triangulaires en maillages quadrangulaires consistent à fusionner des paires de triangles selon leur arête commune [39, 67, 49]. La qualité du maillage quadrangulaire obtenu dépend fortement de celle du maillage triangulaire initial. Deux approches sont alors possibles pour améliorer la qualité du maillage généré : soit pré-traiter en amont le maillage initial [49], soit optimiser le maillage quadrangulaire final [67]. Cependant, en général, ce type de méthodes génère des maillages non réguliers, c'est-à-dire avec des sommets irréguliers. La figure 1.5 illustre deux des méthodes de conversion : Lai *et al.* [49] et Tarini *et al.* [67].

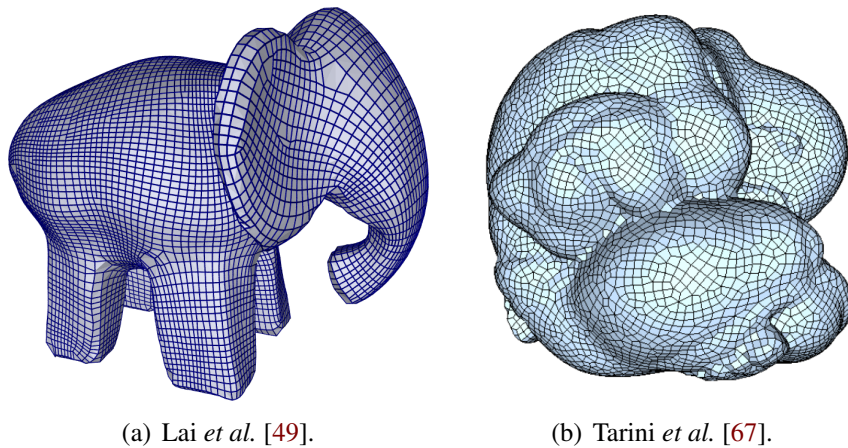
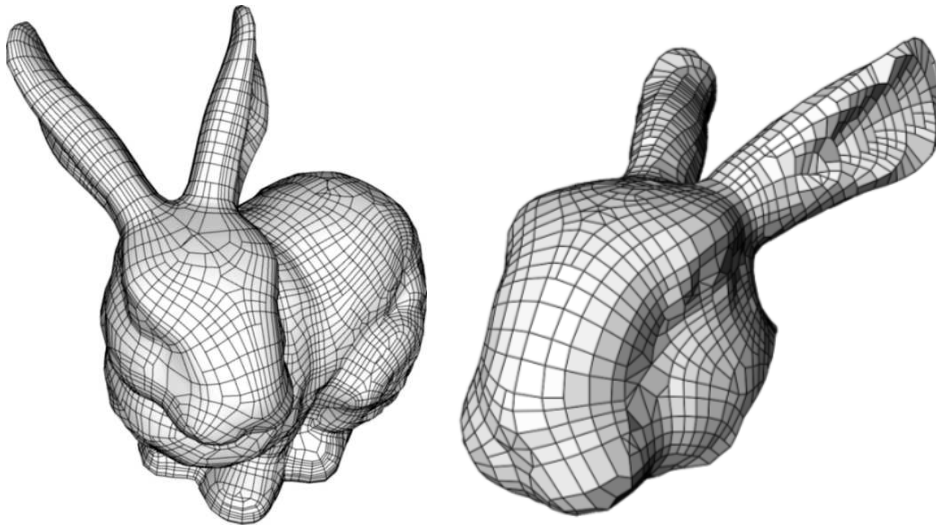


FIGURE 1.5 – Méthodes de conversion. Les maillages générés sont quad-dominants. L'orientation des éléments dépend des arêtes du maillage initial. Images extraites de Lai *et al.* [49] et Tarini *et al.* [67].

Tracé de courbes explicites : Ce type d'algorithmes consiste à tracer des courbes sur la surface afin de guider l'orientation des éléments. L'alignement de ces courbes avec les directions de courbures principales [52, 2] permet une meilleure approximation de la surface. Toutefois, le problème de ces méthodes vient du fait qu'il est impossible de contrôler la distribution de la distorsion en forme sur la surface. De plus, le maillage généré n'est que quad-dominant, et une subdivision de Catmull-Clark est alors nécessaire pour obtenir un maillage quadrangulaire pur. La figure 1.6 illustre deux méthodes de tracé de courbes explicites : celle de Marinov et Kobbelt [52] et celle de Alliez *et al.* [2].



(a) Marinov et Kobbelt [52].

(b) Alliez *et al.* [2].

FIGURE 1.6 – Méthodes de tracé de courbes explicites. Marinov et Kobbelt [52] et Alliez *et al.* [2] génèrent des maillages quad-dominants, avec une distorsion de forme des éléments. Images extraites de Marinov et Kobbelt [52] et Alliez *et al.* [2].

Paramétrisation : Le but des méthodes de paramétrisation globale est de contrôler la distribution de la distorsion en forme sur la surface via un problème d'optimisation globale. Le principe est de construire une correspondance bijective ϕ entre la surface de $\mathbb{R}^3$ (ou une partie) et un domaine de $\mathbb{R}^2$. Afin de simplifier le problème de quadrangulation : le maillage est l'image réciproque par ϕ d'un maillage de $\mathbb{R}^2$ simple. Si sa géométrie est complexe, la surface est en règle générale partitionnée avec plusieurs éléments pour éviter une trop grande distorsion en forme.

L'idée est alors de considérer une correspondance bijective entre chaque élément de la surface et un domaine de $\mathbb{R}^2$. A priori, il n'y a aucune garantie sur le recollement des parties de maillages aux interfaces entre éléments. Pour cela, des conditions aux bords sont ajoutées dans le problème d'optimisation globale cité précédemment [72].

Une première méthode de paramétrisation globale consiste à décomposer la surface en sous-domaines quadrangles puis à appliquer ce qui précède pour en déduire un maillage quadrangulaire de la surface. Cependant, trouver une décomposition de qualité est encore un problème ouvert. Quelques approches proposent de décomposer la surface à la main [72] ou de manière interactive [70], mais – pour un seul modèle complexe – la décomposition de la surface peut nécessiter jusqu'à plusieurs semaines de travail. D'autres approches sont automatiques et construisent une décomposition à partir du complexe Morse-Smale d'une fonction

[77, 28, 72]. La figure 1.7 illustre comment, une fois les sous-domaines choisis, la méthode de paramétrisation permet de générer un maillage quadrangulaire pur.

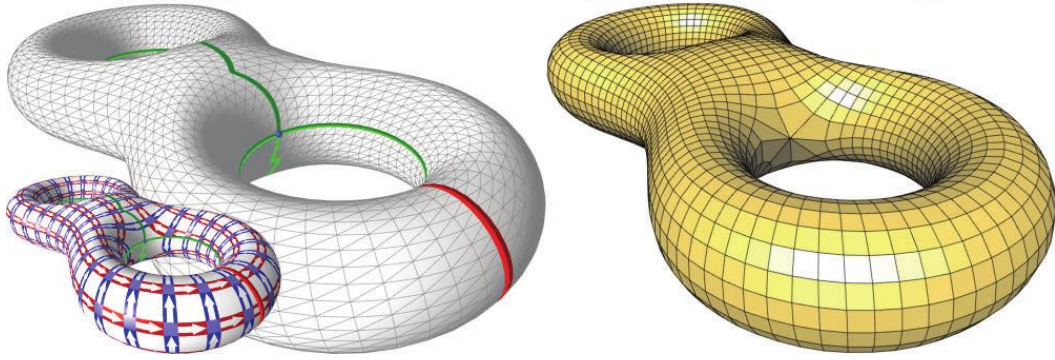


FIGURE 1.7 – Paramétrisation de Tong *et al.* [72]. Les sous-domaines (gauche) sont dessinés à la main. Image extraite de Tong *et al.* [72].

Une autre méthode de paramétrisation globale consiste à calculer un champ d'orientation 4-symétrique sur les triangles [60, 11, 61, 59], le plus lisse possible, à partir de directions de courbures principales [20, 24], qui permet ensuite de guider l'orientation des quadrangles pendant la phase de paramétrisation. Ce genre d'algorithmes [11, 45, 59] permet de générer automatiquement des maillages de bonne qualité, mais il n'y a pas de contrôle direct sur le nombre et la position des sommets irréguliers.

La figure 1.8 compare les résultats générés par trois algorithmes de référence de l'état de l'art des méthodes de paramétrisation [11, 45, 59].

Diagramme de Voronoï centré : Quelques algorithmes de remaillage quadrangulaire utilisent la notion de diagramme de Voronoï (voir section 2.4). Un diagramme de Voronoï centré peut être généré à partir d'un ensemble initial aléatoire de sites en relocalisant itérativement les sites aux centres de masses de leurs cellules de Voronoï associées [29, 51]. Cet algorithme, connu sous le nom de relaxation de Lloyd, minimise une énergie qui est minimale lorsque le diagramme de Voronoï est centré. Lévy et Liu [50] et Baudouin *et al.* [4] généralisent cette notion aux cas des normes L_p , ce qui permet d'obtenir des maillages quad-dominants de bonne qualité. Ce genre d'algorithmes est sensible à l'ensemble de sites initial : le nombre et la position.

La figure 1.9 montre comment la méthodologie de Lévy et Liu [50] permet de générer des maillages quad-dominants de surfaces lisses et lisses par morceaux.

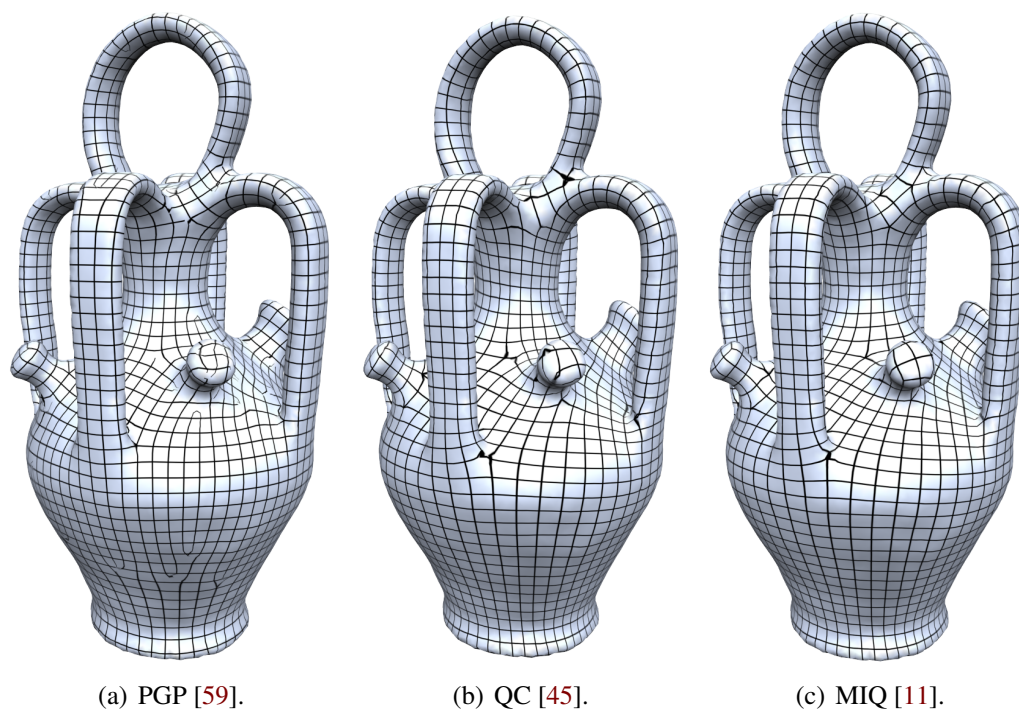


FIGURE 1.8 – Comparaison des trois principales méthodes de paramétrisation globale : Periodic Global Parameterization (PGP) (a) [59], Quad-Cover (QC) (b) [45] et Mixed-Integer Quadrangulation (MIQ) (c) [11]. Images extraites de Bommes *et al.* [10].

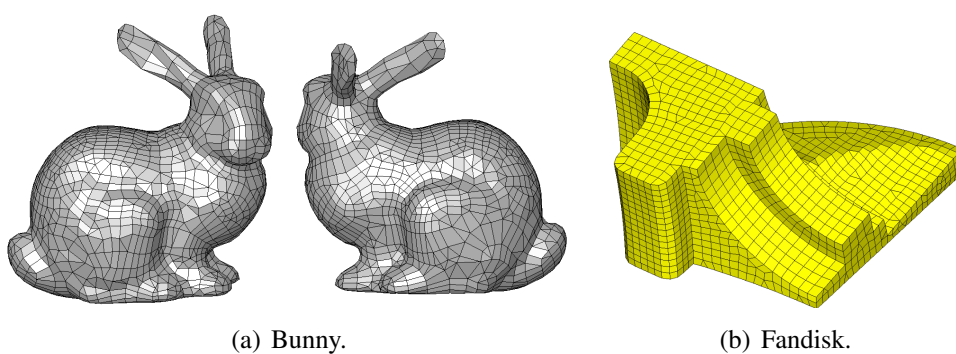


FIGURE 1.9 – Lévy et Liu [50]. Maillages quad-dominants obtenus aussi bien pour des surfaces lisses (a) que lisses par morceaux (b). Images extraites de Lévy et Liu [50].

1.3.1.2 Méthodes d'optimisation

Nous décrivons ici les méthodes qui permettent d'optimiser un maillage quadrangulaire, c'est-à-dire de générer un maillage quadrangulaire de meilleure qualité que le maillage quadrangulaire initial.

Avant, nous rappelons la définition du complexe de base. Le complexe de base $BC(\mathcal{M})$ d'un maillage quadrangulaire $\mathcal{M}$ est une partition de $\mathcal{M}$ en sous-domaines rectangulaires composés d'un ensemble de quadrangles. $BC(\mathcal{M})$ est encore un maillage quadrangulaire et sa complexité est mesurée par son nombre de sommets. Dans certaines applications, il est intéressant de générer un maillage dont le complexe de base est grossier, c'est-à-dire avec peu de sommets.

Optimisation géométrique : Quelques méthodes optimisent les maillages par lissage, c'est-à-dire en déplaçant chaque sommet au barycentre de ses voisins (voir section 3.2.6). Une généralisation du lissage Laplacien [27] sur les maillages triangulaires est possible pour les maillages polygonaux [1]. Cependant, il n'est pas possible de contrôler la qualité du maillage, surtout s'il est grossier. Les algorithmes de lissage basés sur la paramétrisation [57, 28] permettent de générer un maillage de qualité si le complexe de base du maillage initial est grossier.

Simplification : Les méthodes de simplification consistent, à partir d'un maillage quadrangulaire fin, à appliquer un ensemble d'opérateurs qui réduisent la complexité du maillage. À un maillage est associée une énergie qui mesure sa qualité, et à chaque opérateur est associé un coût qui quantifie la différence de qualité entre le maillage avant et après application de l'opérateur. Tarini *et al.* [67] proposent de quantifier cette qualité sous la forme d'homométrie : les arêtes doivent avoir la même longueur l et les longueurs de diagonales doivent être égales à $\sqrt{2}l$. L'algorithme applique le meilleur opérateur (au sens du coût) jusqu'à ce que le nombre d'éléments visés pour le maillage quadrangulaire soit atteint.

La zoologie des opérateurs sur les maillages quadrangulaires est bien plus complexe que celle sur les maillages triangulaires : ces opérateurs peuvent agir soit sur le maillage lui-même [67], soit sur le dual en supprimant des cordes¹ duales [63], des poly-cordes [42, 41, 43] ou des configurations en hélice [9]. La figure 1.11 illustre quelques exemples d'opérateurs sur les maillages quadrangulaires. Ils peuvent être classés en trois catégories : fusion, optimisation et nettoyage. Mis à part la méthodologie proposée par Bommes *et al.* [9], il n'est pas

1. Une corde est un chemin d'arêtes duales, dont les extrémités sont des centres de masse de quadrangles.

possible de contrôler la régularité du maillage avec les méthodes de simplification.

Le point négatif de ces méthodes est qu'elles ne reposent que sur de l'optimisation gloutonne et ne permettent d'estimer qu'un minimum local pour l'énergie sur le maillage. Une des forces de ces méthodes est la fiabilité : elles n'utilisent qu'un ensemble fini d'opérateurs qui préserve la pure quadrangularité du maillage.

La figure 1.10 illustre l'importance de la régularité du maillage quand l'utilisateur souhaite obtenir un complexe de base grossier. La méthodologie de Bommes *et al.* [9] permet de simplifier le complexe de base d'un maillage quadrangulaire.

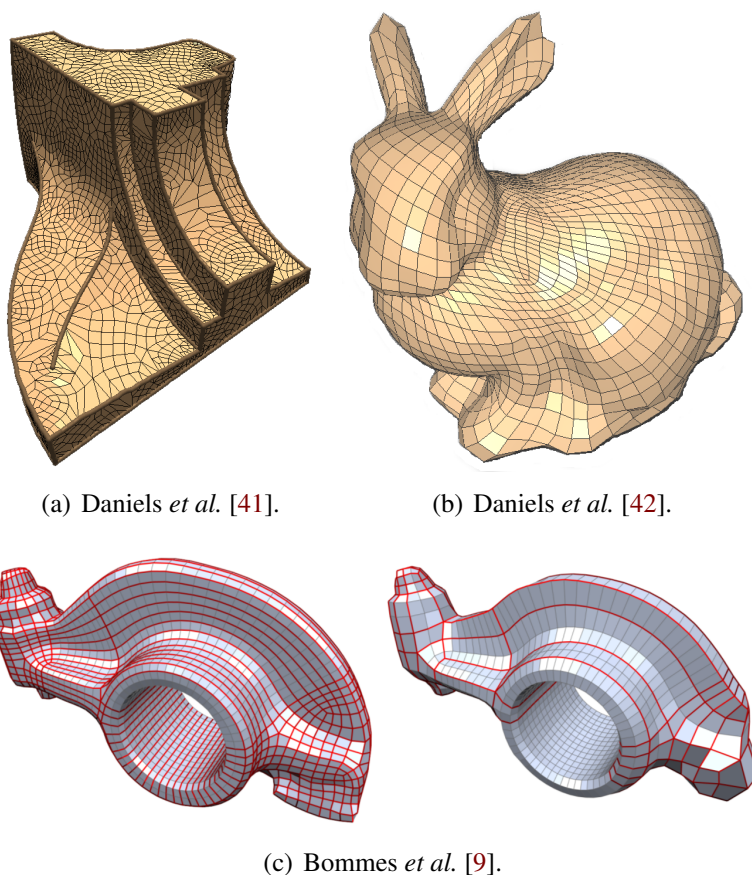


FIGURE 1.10 – Simplification. Les maillages (a) et (b) sont irréguliers et possèdent un complexe de base beaucoup trop fin. Bommes *et al.* [9] propose une méthodologie qui permet d'optimiser un maillage quadrangulaire irrégulier dont le complexe de base est fin (c, gauche) pour rendre son complexe de base grossier. Images extraites de Daniels *et al.* [41, 42] et Bommes *et al.* [9].

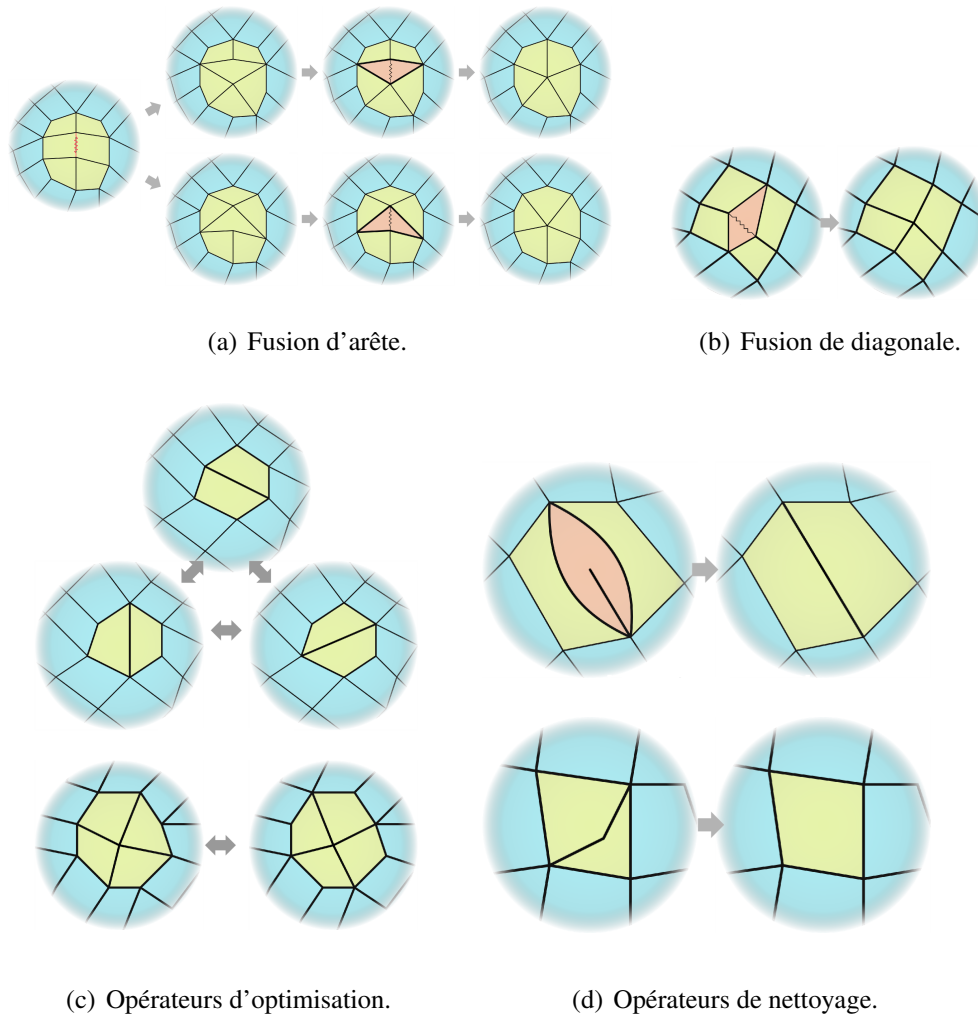


FIGURE 1.11 – Opérateurs sur les maillages quadrangulaires de Tarini *et al.* [67]. Les opérateurs de fusion d'arête (a) et de fusion de diagonale (b) permettent de réduire la complexité d'un maillage quadrangulaire. Les opérateurs d'optimisation (c) permettent de modifier la connectivité du maillage sans changer la complexité, afin d'améliorer la qualité du maillage. Les opérateurs de nettoyage (d) permettent de supprimer d'éventuelles configurations dégénérées. Images extraites de Tarini *et al.* [67].

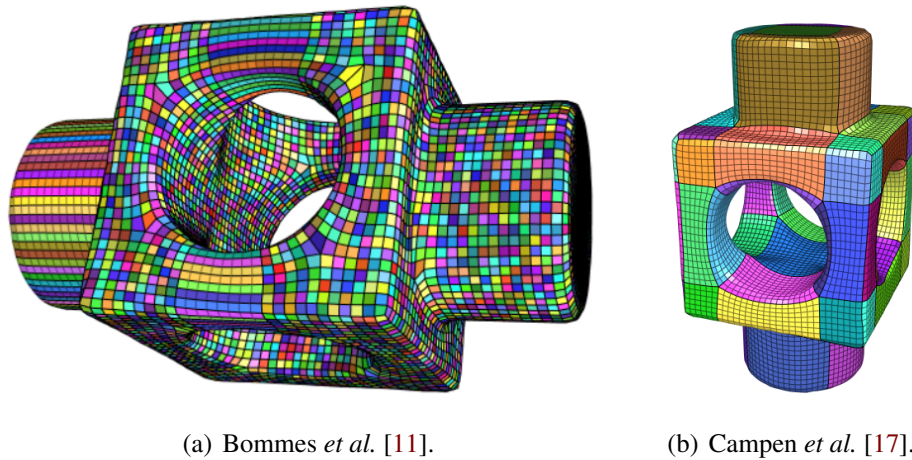


FIGURE 1.12 – Comparaison entre les méthodologies de Bommes *et al.* [11] et de Campen *et al.* [17]. À nombre et type égaux de sommets irréguliers, le maillage généré par Campen *et al.* [17] a un complexe de base plus simple que Bommes *et al.* [11]. Images extraites de Campen *et al.* [17].

Optimisation de la connectivité : Les méthodes basées sur la paramétrisation permettent de générer automatiquement des maillages de bonne qualité avec peu de sommets irréguliers, mais le complexe de base est trop fin, c'est-à-dire qu'il possède trop de sommets (voir figure 1.12(a)). Les méthodes d'optimisation de la connectivité [9, 68] proposent de rendre ce complexe de base aussi grossier que possible. L'idée est de changer la connectivité globale (sans affecter le nombre de sommets irréguliers) grâce à des opérateurs. La connectivité peut être modifiée par des opérateurs globaux sur le maillage quadrangulaire [9, 68], mais aussi en déplaçant des paires de sommets irréguliers [56]. Soulignons que Campen *et al.* [17] sont capables de directement calculer un complexe de base grossier sans optimiser la connectivité d'un maillage quadrangulaire pur, contrairement aux approches basées sur la paramétrisation (voir figure 1.12).

1.3.2 Maillages polygonaux anisotropes

Nous détaillons maintenant les méthodes qui permettent de générer des maillages polygonaux anisotropes.

Ce genre d'approches génère des éléments rectangulaires, mais qui ne sont pas toujours des quadrangles du point de vue topologique (leur degré est arbitraire différent de 4). Le but des maillages anisotropes est d'optimiser le rapport

complexité/distorsion² : à qualité d'approximation égale, et à condition d'étirer les éléments dans les directions de faible courbure, un maillage anisotrope possède moins d'éléments qu'un maillage isotrope.

Alliez *et al.* [2] génèrent des maillages polygonaux anisotropes en alignant les arêtes sur les lignes de courbures minimale et maximale d'un maillage triangulaire initial. Cohen-Steiner *et al.* [23] utilisent la notion d'erreur sur les normales d'une surface triangulée (qui est reliée à la notion de courbure mais qui possède l'avantage de ne recourir à aucun autre estimateur que la déviation des normales) et génèrent une partition qui elle-même induit un maillage sur la surface. Myles *et al.* [54] adaptent les rapports d'aspects des éléments à la courbure locale dans le but d'obtenir une bonne approximation de la surface avec peu d'éléments. Néanmoins, pour éviter des éléments trop fins sur les zones planaires ou paraboliques, cette méthode nécessite de borner l'anisotropie à un rapport d'aspect maximal de 5. Zhang *et al.* [77] généralisent les travaux de Ray *et al.* [59] pour guider la construction du maillage avec une fonction d'anisotropie en plus d'un champ de croix, par l'intermédiaire d'un complexe Morse-Smale ([28]). La figure 1.13 compare le maillage polygonal anisotrope généré par chacune des trois approches suivantes : Cohen-Steiner *et al.* [23], Myles *et al.* [54] et Zhang *et al.* [77].

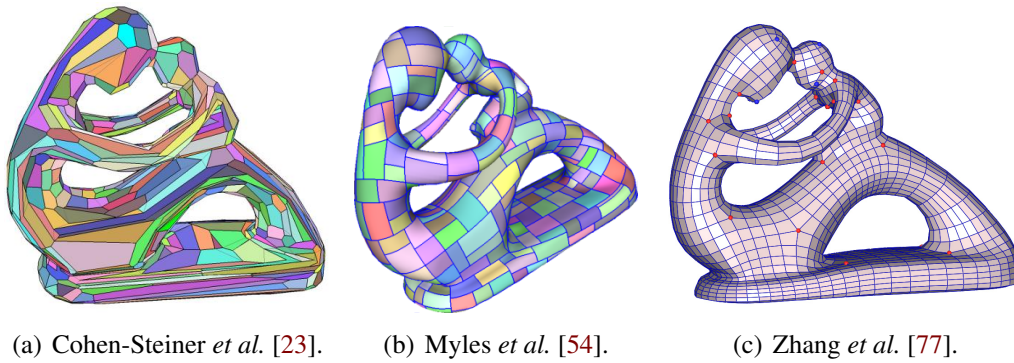


FIGURE 1.13 – Comparaison des méthodologies de Cohen-Steiner *et al.* [23], Myles *et al.* [54] et Zhang *et al.* [77]. L'anisotropie obtenue par Cohen-Steiner *et al.* [23] se fait au détriment du critère de forme. L'anisotropie obtenue par Myles *et al.* [54] est limitée à un rapport d'aspect de 2 dans cet exemple. Le maillage généré par Zhang *et al.* [77] est régulier, mais l'anisotropie n'est pas très prononcée. Images (b) et (c) extraites de Myles *et al.* [54] et Zhang *et al.* [77].

2. La distorsion s'exprime ici en fonction de la déviation des normales.

1.4 Contributions

Ce paragraphe décrit les trois contributions de cette thèse.

Notre première contribution est un algorithme de maillage quadrangulaire isotrope de domaines $2D$, avec un contrôle sur la taille et l'orientation des éléments. Le cœur de notre algorithme est une procédure d'optimisation qui, à partir d'un partitionnement grossier d'un domaine $2D$, améliore chacun des critères de qualités pour les maillages (taille, forme, orientation, degré, régularité) un par un, dans un ordre précautionneusement choisi afin de ne pas pénaliser les critères déjà (partiellement) satisfaits. La valeur ajoutée de notre première contribution est le contrôle simultané sur la taille et l'orientation.

Notre deuxième contribution est la définition, ainsi qu'un algorithme de calcul d'une métrique anisotrope rectangulaire, définie en chaque face triangulaire d'un maillage triangulaire d'une surface. Cette métrique est dérivée d'une erreur de tolérance sur les normales donnée par l'utilisateur, conjuguée à la volonté de favoriser, lors d'une prochaine étape de maillage, des polygones anisotropes rectangulaires. Notre méthode se révèle bien adaptée au cas de surfaces lisses par morceaux (avec arêtes vives). Les avantages de cette métrique sont qu'elle ne dépend que d'un unique paramètre intuitif (relatif à la déviation maximale des normales) et qu'elle préserve les bords et les arêtes vives.

Notre troisième contribution est un algorithme de remaillage polygonal anisotrope de surface. Notre algorithme utilise une procédure d'optimisation gloutonne qui ajoute, supprime et relocalise des générateurs sur un maillage triangulaire surfacique afin de satisfaire deux critères liés à la partition et à la conformité, tout en respectant la métrique anisotrope sur le maillage. Les générateurs induisent une décomposition de la surface à partir de leurs métriques associées. Notre méthode permet d'atteindre la concordance stricte du maillage avec une métrique anisotrope donnée.

CHAPITRE 2

Notions

Le premier chapitre présente les notions fondamentales qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. La notion de distance sur $\mathbb{R}^n$ est définie en section 2.1. La section 2.2 s'intéresse à la notion de centre de masse. La section 2.3 introduit les notions de décomposition, partition, triangulation et maillage. La section 2.4 présente des algorithmes de calcul de diagrammes de Voronoï.

Sommaire

2.1	Distance	17
2.2	Centre de masse	19
2.3	Décomposition-partition-triangulation-maillage	23
2.4	Le cas métrique : triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï	27

Le cadre de notre travail est principalement *métrique*. Les algorithmes qui y sont décrits consistent essentiellement à minimiser (le carré d') une distance entre un point courant et le point recherché, ou entre un triangle courant et le triangle recherché.

2.1 Distance

Ce paragraphe rappelle et précise les définitions standards, et fixe les notations classiquement utilisées dans la théorie des espaces métriques.

- Si X est un ensemble quelconque, une distance sur X est une application $d : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$ les trois propriétés suivantes :
 1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (axiome de séparation) ;
 2. $d(y, x) = d(x, y)$ (axiome de symétrie) ;
 3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (X, d) est un *espace métrique*.

- Soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. La *boule ouverte* de centre x et de rayon r est l'ensemble des points de X dont la distance à x est inférieure à r :

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

En particulier, si X est un espace vectoriel, la *boule unité centrée* est la boule de centre l'origine, et de rayon 1.

Nous utiliserons par la suite des distances classiques (induites par des normes) sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

- La *valeur absolue* est une norme sur $\mathbb{R}$, dont la distance associée d est définie en posant pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Plus généralement,

- La norme $\|\cdot\|_1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ en posant pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

induit la *distance de Manhattan* d_1

$$\begin{aligned} d_1 : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|. \end{aligned}$$

- La norme $\|\cdot\|_2$ définie sur $\mathbb{R}^n$ en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

induit la *distance euclidienne*

$$\begin{aligned} d_2 : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}. \end{aligned}$$

- La norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^n$ en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$$

induit la distance de Tchebychev

$$\begin{aligned} d_\infty : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |y_i - x_i|. \end{aligned}$$

- Si d est une distance quelconque sur $\mathbb{R}^n$, et A est une matrice diagonale dont les coefficients sont positifs (pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$A {}^t(x_1, \dots, x_n) = {}^t(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n),$$

où $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$), alors l'application d_A définie par

$$d_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(A\mathbf{x}, A\mathbf{y})$$

est une métrique sur $\mathbb{R}^n$, appelée *métrique à poids* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

La figure 2.1 illustre les boules unités centrées de quelques distances.

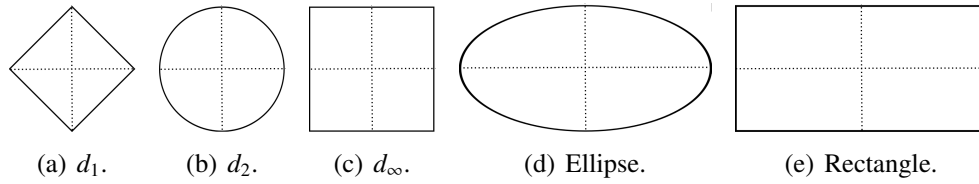


FIGURE 2.1 – Exemples, en dimension 2, de boules unités centrées pour les distances usuelles d_1 (a), d_2 (b) et d_∞ (c), puis pour la distance d_2 avec les poids $(\frac{1}{4}, 1)$ (d) et enfin pour la distance d_∞ avec les poids $(\frac{1}{2}, 1)$ (e)).

2.2 Centre de masse

Notre travail utilise la notion de *centre de masse* (ou *centre de gravité*).

1. Rappelons d'abord la définition du centre de masse d'une partie finie $\Omega = \{m_1, \dots, m_p\}$ de $\mathbb{R}^n$, chaque point m_i étant affecté d'un coefficient $\alpha_i \in \mathbb{R}_*^+$. Le centre de masse (ou barycentre) de Ω est le point

$$m_\Omega^{\alpha*} = \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{Om_i}}{\sum_{i=1}^p \alpha_i},$$

où l'indice α désigne le p -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. Cette définition est affine, puisqu'indépendante de l'origine choisie. Comme les coefficients α_i sont positifs, le point $m_\Omega^{\alpha*}$ appartient à l'enveloppe convexe des points $m_1, \dots, m_p$.

2. Cette construction se généralise à une partie compacte Ω de $\mathbb{R}^n$. Notons $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, et introduisons sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ la mesure de Lebesgue. Soit

$$\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_*^+,$$

une fonction *densité* intégrable et strictement positive. Le centre de masse $m_{\Omega}^{\rho^*}$ de Ω (muni de la densité ρ) est le point de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$m_{\Omega}^{\rho^*} = \frac{\int_{y \in \Omega} y \rho(y) dy}{\int_{y \in \Omega} \rho(y) dy}, \quad (2.1)$$

où le symbole $\int$ désigne ici l'intégrale de Lebesgue des fonctions vectorielles, et où

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est la fonction qui affecte à tout point $m \in \mathbb{R}^n$ ses coordonnées dans la base canonique. Rappelons que $m_{\Omega}^{\rho^*}$ appartient encore à l'enveloppe convexe de Ω , mais pas forcément à Ω .

Une digression sur la mesure de Lebesgue - Il est important pour nous de remarquer que le point $m_{\Omega}^{\rho^*}$ est indépendant de toute métrique définie sur $\mathbb{R}^n$. Outre le fait qu'aucune métrique n'intervient explicitement dans sa définition, nous devons nous souvenir que l'intégrale de Lebesgue est, elle aussi, indépendante de toute métrique. Rappelons à cet effet le résultat suivant [37] :

Théorème 2 – *La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est l'unique mesure telle que,*

$$\lambda([a, b]) = b - a,$$

pour tout couple (a, b) de nombres réels tels que $a \leq b$.

– *La mesure de Lebesgue λ_n sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est l'unique mesure telle que, pour tout pavé borné $P_1 \times \cdots \times P_n$ de $\mathbb{R}^n$, on ait :*

$$\lambda_n(P_1 \times \cdots \times P_n) = \lambda(P_1) \cdots \lambda(P_n).$$

– *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par rotation et par translation.*

Nous déduisons immédiatement que seule la valeur de la mesure de l'intervalle $]0, 1]$ suffit à définir la mesure de Lebesgue¹.

Cependant, lorsqu'un calcul explicite de centre de masse de Ω s'impose, il peut être difficile de l'effectuer directement à partir de la formule 2.1. Nous pouvons alors approcher le point $m_{\Omega}^{\rho^*}$ en construisant une suite qui converge vers ce point, et qui minimise une énergie qui, elle, dépend d'une métrique adéquate. Nous utiliserons alors le résultat suivant :

1. Nous pourrions également remarquer que si nous remplaçons la mesure de Lebesgue par un produit de celle-ci par un scalaire, le centre de masse ainsi défini reste inchangé.

Proposition 3 Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ une fonction densité intégrable de classe C^1 . Soit

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_*^+$$

l'application définie en posant

$$f(p) = \int_{y \in \Omega} \|p - y\|_2^2 \rho(y) dy. \quad (2.2)$$

Alors

$$\arg \min_{p \in \mathbb{R}^n} f(p) = \{m_{\Omega}^{\rho*}\}.$$

En d'autres termes, la fonctionnelle f admet un unique minimum qui est le centre de masse de Ω muni de la densité ρ .

Preuve - Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle lisse sans contrainte. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \int_{y \in \Omega} 2(p_i - y_i) \rho(y) dy,$$

donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = 2p_i \int_{y \in \Omega} \rho(y) dy - 2 \int_{y \in \Omega} y_i \rho(y) dy \quad ,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2} = 2 \int_{y \in \Omega} \rho(y) dy > 0 \quad .$$

L'unique point critique de la fonction f est alors le point $p = (p_1, \dots, p_n)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$p_i = \frac{\int_{y \in \Omega} y_i \rho(y) dy}{\int_{y \in \Omega} \rho(y) dy}.$$

Nous réécrivons de manière concise :

$$p = \frac{\int_{y \in \Omega} y \rho(y) dy}{\int_{y \in \Omega} \rho(y) dy}.$$

Démontrons maintenant que ce point est bien un minimum de l'énergie définie en 2.2. Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad .$$

La matrice hessienne de f est donc une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont strictement positifs. Ce point est donc bien l'unique minimum de la fonction f . ■

3. Cette proposition motive notre extension de la notion de centre de masse, que nous plaçons maintenant dans un cadre purement métrique.

Définition 1 Soit (X, d) un espace métrique fini (non vide), Y une partie (non vide) de X ,

$$\rho : Y \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

une fonction poids. Soit

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$$

la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{y \in Y} \rho(y) d(x, y)^2.$$

On appelle centre de masse de Y pondérée par ρ la partie

$$C(Y, \rho) = \arg \min_{x \in X} f(x).$$

Naturellement, sans hypothèse supplémentaire, $C(Y, \rho)$ peut être la partie vide, ou une partie comprenant un ou plusieurs éléments.²

Un exemple - L'exemple suivant est celui qui nous intéresse dans les chapitres futurs. Avec les notations de la Définition 1, c'est une situation où $Y = X$. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble fini de triangles de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, d'intérieurs non vides et disjoints deux à deux. Notons $c(t)$ le centre de gravité d'un triangle générique t . Soit

$$d : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

l'application définie en posant, pour tous $t_1 \in \mathcal{T}$ et $t_2 \in \mathcal{T}$,

$$d(t_1, t_2) = \|c(t_1) - c(t_2)\|_2.$$

2. Nous pourrions envisager d'étendre cette définition aux espaces métriques infinis, en remplaçant la somme finie par une somme infinie dénombrable ou non, mais nous n'utiliserons dans le cadre de notre travail que la situation simple où X est finie.

Comme les triangles sont deux à deux d'intérieurs disjoints, d est une distance sur $\mathcal{T}$. Soit ρ une fonction de densité positive définie sur $\mathcal{T}$. Le centre de masse de $\mathcal{T}$ muni de la fonction ρ est la partie (non vide) de $\mathcal{T}$

$$C(\mathcal{T}, \rho) = \arg \min_{t \in \mathcal{T}} f(t),$$

où

$$f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

est la fonction définie par

$$f(t) = \sum_{u \in \mathcal{T}} \rho(u) d(t, u)^2. \quad (2.3)$$

Il est clair que $C(\mathcal{T}, \rho)$ n'est pas vide, mais il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'il soit réduit à un seul élément.

2.3 Décomposition-partition-triangulation-maillage

Le principe des algorithmes que nous proposons pour générer des maillages quadrangles est de trouver une partition (voire une décomposition) d'une triangulation donnée. Ce paragraphe introduit ces notions.

2.3.1 Décomposition

Définition 2 Soit X un ensemble.

- Un ensemble D de parties de X (c'est-à-dire une partie de $\mathcal{P}(X)$) est une décomposition de X si aucun élément de D n'est vide.
- On dit qu'un élément de X est un chevauchement s'il appartient à au moins deux éléments de D .
- On dit qu'un élément de X est un orphelin s'il n'appartient à aucun élément de D .

La figure 2.2 représente une décomposition d'un rectangle avec 3 sous-ensembles. La décomposition possède une zone qui n'appartient à aucun sous-ensemble et deux zones où deux sous-ensembles se chevauchent.

2.3.2 Partition

Définition 3 Soit X un ensemble. Un ensemble Q de parties de X (c'est-à-dire une partie de $\mathcal{P}(X)$) est une partition de X si :

- aucun élément de Q n'est vide ;
- l'union des éléments de Q est égale à X ;
- les éléments de Q sont deux à deux disjoints.

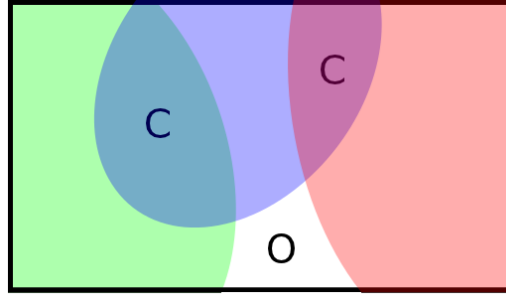


FIGURE 2.2 – Décomposition. En reprenant les notations de la définition 2.3, X est le rectangle de bord noir, et les sous-ensembles de la décomposition sont les formes colorées. La zone taguée avec un O représente les orphelins tandis que les deux zones taguées d'un C représentent les chevauchements.

Ainsi, une partition est une décomposition sans chevauchement ni orphelin. La figure 2.3 représente une partition d'un rectangle avec 3 sous-ensembles.

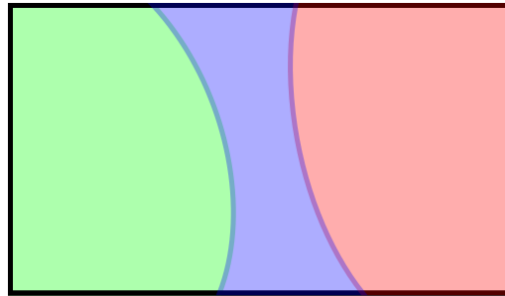


FIGURE 2.3 – Partition. En reprenant les notations de la définition 3, X est le rectangle de bord noir qui est partitionné avec 3 sous-ensembles.

2.3.3 Triangulation dans $\mathbb{R}^n$

Les principales étapes de nos algorithmes de calcul agissent sur une triangulation dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Ce paragraphe en rappelle la définition. Nous reprenons la terminologie de Boissonnat et Yvinec [8].

Définition 4 – *Un simplexe de dimension m dans $\mathbb{R}^n$, (ou m -simplexe), est l'enveloppe convexe de $m + 1$ points affinement indépendants ($m + 1$ points $p_0, \dots, p_m$ sont affinement indépendants si les m vecteurs $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_m}$ sont indépendants).*

- Une l -face d'un simplexe engendré par un ensemble de $k+1$ points affinement indépendants est un sous-ensemble de $l+1$ points (avec $l < k$).
- Une triangulation $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de simplexes tel que l'intersection de deux simplexes de $\mathcal{T}$ est soit vide, soit une l -face commune (avec $l \leq k-1$, où k est égal au minimum des dimensions des deux simplexes).
- La dimension de la triangulation est la dimension maximale des simplexes qui la composent. Une triangulation de dimension m s'appelle une m -triangulation.
- Les simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3 sont respectivement des points, des segments, des triangles et des tétraèdres.
- Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$. Une m -triangulation de $\mathcal{P}$ est une triangulation dont $\mathcal{P}$ est l'ensemble des sommets, et m est la dimension maximale des ses simplexes.

2.3.4 Maillage

Le but de ce paragraphe est de décrire comment extraire un maillage à partir d'une partition sur une 2-triangulation dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Soit une 2-triangulation $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et soit Q une partition de $\mathcal{T}$. La figure 2.5(a) illustre un exemple de partition sur une 2-triangulation d'un cercle dans $\mathbb{R}^2$.

Nous définissons d'abord la notion de maillage puis nous montrons comment extraire un maillage à partir de la partition Q .

Définition 5 Une maillage $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ est la donnée de trois ensembles :

- un ensemble de sommets : chaque sommet est défini par ses coordonnées.
- un ensemble d'arêtes : une arête est une paire de sommets.
- un ensemble de faces : une face de degré n est un n -uplet de sommets.

Définition 6 Soit Q une partition d'une 2-triangulation $\mathcal{T}$. Soit v un sommet de $\mathcal{T}$. On note $I(v)$ le nombre d'éléments de Q qui entourent le sommet v . On dit que v est un méta-sommet si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- v est un sommet intérieur de $\mathcal{T}$ et $I(v) \geq 3$;
- v est un sommet du bord de $\mathcal{T}$ et $I(v) \geq 2$.

On note $\mathcal{V}(\mathcal{T}, Q)$ l'ensemble des méta-sommets de $\mathcal{T}$ relatifs à la partition Q .

La figure 2.4 visualise les sous-domaines de la partition Q entourant un sommet.

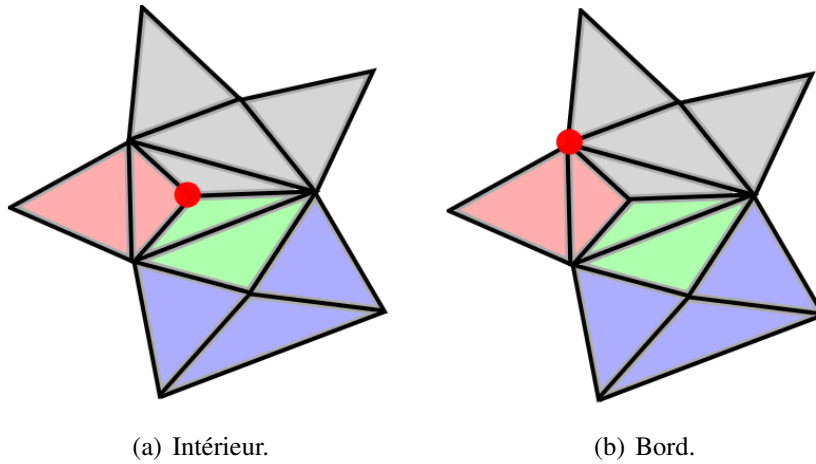


FIGURE 2.4 – Nombre de sous-ensembles d’une partition qui entourent un sommet. Pour le sommet intérieur v , les sous-ensembles gris, rouge et vert l’entourent, donc $\mathcal{I}(v) = 3$ (a). Pour le sommet du bord v , les sous-ensembles gris et rouge l’entourent, donc $\mathcal{I}(v) = 2$ (b).

Nous supposons maintenant que chaque élément de Q est un disque topologique, connexe, avec un seul bord. Pour générer un maillage à partir d’une partition, il est important pour nous de parcourir le bord des éléments, et que ce bord soit circulaire et en un seul morceau.

Définition 7 Soit Q une partition d’une 2-triangulation $\mathcal{T}$. Soit v_1, v_2 deux sommets de $\mathcal{T}$. On dit que le couple (v_1, v_2) est une méta-arête si :

- i. v_1 et v_2 sont des méta-sommets ;
- ii. il existe un chemin d’arêtes dans $\mathcal{T}$ et il existe deux éléments q_a, q_b de la partition tel que chaque arête du chemin a une face adjacente qui appartient à q_a et l’autre qui appartient à q_b .

On note $\mathcal{E}(\mathcal{T}, Q)$ l’ensemble des méta-arêtes de $\mathcal{T}$ relatives à la partition Q .

Définition 8 Soit Q une partition d’une 2-triangulation $\mathcal{T}$. Soit $q \in Q$ un élément de la partition. La méta-face de q , notée $\mathcal{F}_Q(q)$, est l’ensemble (ordonné sur le bord de q , à permutation près) des méta-sommets sur le bord de q . On note $\mathcal{F}(\mathcal{T}, Q)$ l’ensemble de méta-faces de $\mathcal{T}$ relatives à la partition Q .

Définition 9 Soit Q une partition d’une 2-triangulation $\mathcal{T}$. Le maillage associé à Q sur $\mathcal{T}$ est la donnée de :

- des méta-sommets $\mathcal{V}(\mathcal{T}, Q)$ (cf définition 6) ;

- des méta-arêtes $\mathcal{E}(\mathcal{T}, Q)$ (cf définition 7);
- des méta-faces $\mathcal{F}(\mathcal{T}, Q)$ (cf définition 8);

La figure 2.5 illustre comment nous pouvons extraire un maillage à partir d'une partition d'une 2-triangulation dans $\mathbb{R}^2$.

Le maillage ainsi défini est un maillage polygonal dont les méta-faces ne sont en général pas planaires.

2.4 Le cas métrique : triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï

Notre travail sur la génération de maillages 2D isotropes utilise la notion de triangulation de Delaunay. Le cadre est maintenant métrique.

2.4.1 Triangulation de Delaunay

Définition 10 Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$), muni de la métrique euclidienne. Une n -triangulation de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite de Delaunay si l'hypersphère circonscrite à chaque n -simplexe est vide de tous les autres points de $\mathcal{P}$.

Lorsque $n = 2$, la condition de la définition 10 signifie que les cercles circonscrits aux triangles ne contiennent aucun autre élément de $\mathcal{P}$.

Proposition 4 Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$. Supposons que les points de $\mathcal{P}$ sont en position générale, (c'est-à-dire qu'aucun $n + 2$ -uplet de points ne sont sur une même hypersphère). Alors il existe une unique triangulation de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui soit de Delaunay.

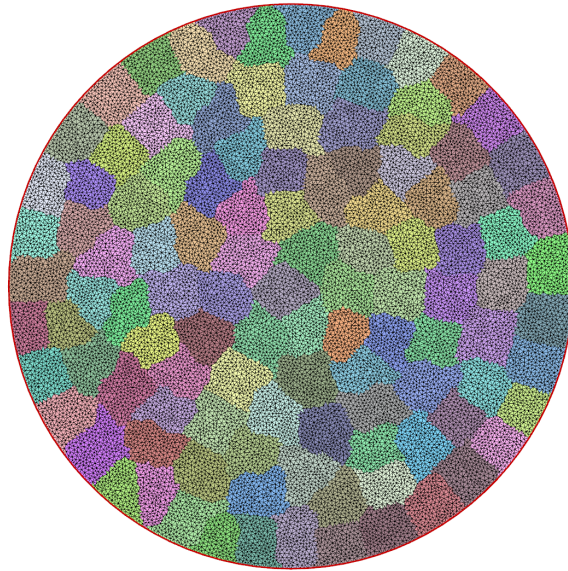
En dimension 2, la condition de la proposition 4 signifie qu'aucun 4-uplet de points ne sont sur un même cercle. La figure 2.6 montre la triangulation de Delaunay d'un ensemble $\mathcal{P}$ de 12 points : c'est la triangulation de Delaunay dont l'ensemble de sommets est exactement $\mathcal{P}$.

2.4.2 Diagramme de Voronoï

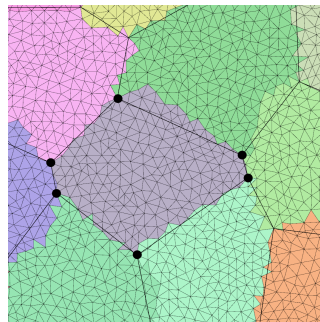
Le diagramme de Voronoï permet de créer une partition d'un espace métrique donné.

2.4.2.1 Généralités

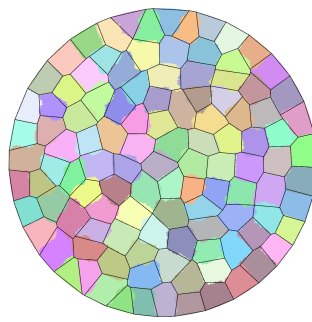
Définition 11 Soit (X, d) un espace métrique. Soit $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ une partie (fini) de X . À chaque élément s_i on associe la région $V(s_i)$ de Ω constituée des éléments



(a) Partition



(b) Méta-sommets



(c) Méta-faces et maillage

FIGURE 2.5 – Génération d'un maillage à partir d'une partition sur une 2-triangulation dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ La partition est représentée avec des sous-ensembles de couleurs différentes (a). Pour le sous-ensemble gris, les méta-sommets sont mis évidence avec des disques noirs (b). L'ensemble des méta-sommets et des méta-faces permettent de définir le maillage associé à la partition et à la 2-triangulation (c).

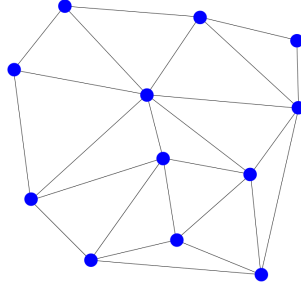


FIGURE 2.6 – Triangulation de Delaunay d'un ensemble de 12 points du plan.

les plus proches de s_i :

$$V(s_i) = \left\{ \omega \in X : \forall j \in [1, m], d(\omega, s_i) \leq d(\omega, s_j) \right\}.$$

Traditionnellement, un élément s_i de $\mathcal{S}$ s'appelle un site et $V(s_i)$ s'appelle la cellule associée à s_i . L'ensemble des $V(s_i)$ est appelé le diagramme de Voronoï de $\mathcal{S}$ sur X .

Considérons le cas où X est un domaine compact Ω de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_m\}$ est un ensemble de m sites appartenant à Ω . La figure 2.7 illustre un exemple de diagramme de Voronoï pour un ensemble de 12 sites dans l'ensemble $[0, 1] \times [0, 1]$ muni de la distance euclidienne d_2 .

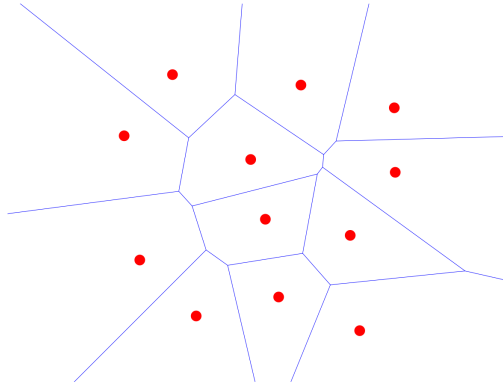


FIGURE 2.7 – Diagramme de Voronoï d'un ensemble de 12 points.

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites dépend naturellement de la distance choisie. La figure 2.8 montre que pour un ensemble de sites fixés, le diagramme de Voronoï diffère selon la distance choisie : d_1 , d_2 .

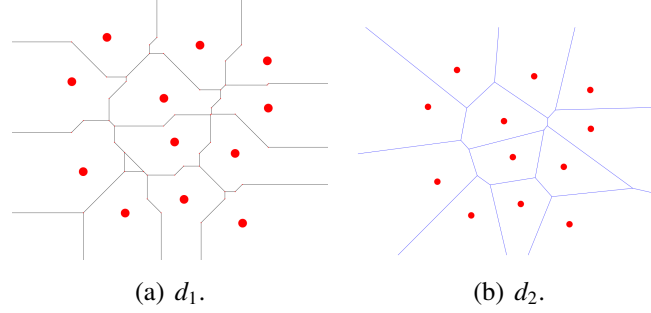


FIGURE 2.8 – Diagramme de Voronoï pour la distance d_1 (a) et pour la distance d_2 (b).

Nous allons maintenant présenter un calcul explicite du diagramme de Voronoï d'un ensemble fini de triangles sur une 2-triangulation Ω dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. L'algorithme que nous présentons permet de générer une partition de Ω . De manière analogue à Cohen-Steiner *et al.* [23], nous générons une partition de Ω en inondant Ω d'un triangle à la fois à partir de l'ensemble des sites (qui sont des triangles). Nous utilisons une queue de priorité globale initialisée avec tous les triangles incidents aux sites (exceptés ceux qui sont déjà des sites). Les triangles sont extraits de la queue et ajoutés à un sous-ensemble selon l'ordre croissant de leur distance avec le site associé (c'est la distance d définie en section 2.2). Notons que si un triangle est à égal distance de deux sites, alors la règle du premier testé-premier attribué est appliquée. La queue est ensuite actualisée avec les triangles voisins du triangle extrait. Les triangles sont extraits jusqu'à ce que la queue soit vide, c'est-à-dire jusqu'à ce que tous les triangles appartiennent chacun à un sous-domaine de la partition.

2.4.2.2 Diagramme de Voronoï sur un ensemble muni d'une famille de métriques

La définition 11 se généralise comme suit :

Définition 12 Soit X un ensemble, $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_m\} \subseteq X$ un ensemble de sites. On suppose qu'à chaque site s_i est associé une distance d^i sur X . Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on définit la partie $V(s_i)$ de X constituée des éléments les plus proches de s_i :

$$V(s_i) = \left\{ \omega \in X : \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, d^i(\omega, s_i) \leq d^j(\omega, s_j) \right\}.$$

L'ensemble des $V(s_i)$ s'appelle le diagramme de Voronoï des couples (s_i, d_i) , $1 \leq i \leq m$.

Comme l'ont remarqué Labelle et Shewchuk [48] puis Wormser *et al.* [7], les cellules de Voronoï associées ne sont pas nécessairement connexes.

2.4.3 Diagramme de Voronoï centré

Comme illustré sur la figure 2.7, le centre de masse d'une cellule de Voronoï ne coïncide pas nécessairement avec le site de cette cellule. Ceci conduit à donner la définition suivante :

Définition 13 *Un diagramme de Voronoï est dit centré si chaque site appartient à l'ensemble des centres de masse de sa cellule associée.*

Remarquons que si Ω est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors le centre de masse de la cellule de Voronoï associée est unique, et la définition 13 signifie simplement que chaque site coïncide avec le centre de masse de sa cellule de Voronoï.

2.4.3.1 Algorithme de génération de diagrammes de Voronoï centrés

Nous présentons un algorithme qui permet de générer un diagramme de Voronoï centré sur une partie compacte Ω de $\mathbb{R}^n$, munie d'une fonction densité intégrable ρ à valeurs réelles strictement positives.

Le but de l'algorithme que nous présentons est de trouver un minimum de la fonction $\mathcal{F}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \Omega \times \cdots \times \Omega \times \text{Partition}(m, \Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ (p_1, \dots, p_m, \{C_1, \dots, C_m\}) &\longmapsto \sum_{i=1}^m \int_{y \in C_i} \|y - p_i\|_2^2 \rho(y) dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

où p_i est un point de Ω et $\text{Partition}(m, \Omega)$ désigne l'ensemble des partitions de Ω en m sous-domaines.

Considérons une famille $\mathcal{S}_m$ de m sites initiaux. L'algorithme est constitué d'une répétition des trois étapes suivantes :

1. la première construit le diagramme de Voronoï de $\mathcal{S}_m$: les cellules de Voronoï sont notées $V_1, \dots, V_m$;
2. la seconde détermine le centre de masse des m cellules $V_1, \dots, V_m$;
3. la troisième relocalise les sites aux centres de masse de leur cellule de Voronoï associée.

Nous proposons de formuler une nouvelle énergie $\mathcal{H}$, plus simple que $\mathcal{F}$, qui prend en compte notre connaissance initiale d'une partition (la partition engendrée par les m sites initiaux).

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p_1, \dots, p_m) &\longmapsto \sum_{i=1}^m \int_{y \in V_i} \|y - p_i\|_2^2 \rho(y) dy, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\{V_1, \dots, V_m\}$ forme une partition de Ω .

La Proposition suivante affirme que la fonctionnelle définie en 2.5 admet un unique minimum.

Proposition 5 *Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{V_1, \dots, V_m\}$ une partition de Ω , et soit $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ une fonction intégrable. Le problème de minimisation de la fonctionnelle*

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie en 2.5 admet une unique solution qui est le m -uplet $(p_1, \dots, p_m)$ où :

$$p_i = \frac{\int_{y \in V_i} y \rho(y) dy}{\int_{y \in V_i} \rho(y) dy},$$

ou, de manière plus détaillée (et rigoureuse) :

$$p_i = \left(\frac{\int_{y \in V_i} y_1 \rho(y) dy}{\int_{y \in V_i} \rho(y) dy}, \dots, \frac{\int_{y \in V_i} y_n \rho(y) dy}{\int_{y \in V_i} \rho(y) dy} \right),$$

avec $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve : De manière analogue à la preuve de la proposition 3 :

- soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(p_1, \dots, p_m) = 0$ ssi $p_i = \frac{\int_{y \in V_i} y \rho(y) dy}{\int_{y \in V_i} \rho(y) dy}$;
- les coefficients diagonaux de la matrice hessienne de f sont positifs ;
- les coefficients non diagonaux de la matrice hessienne de f sont nuls.

Ce m -uplet est donc bien l'unique minimum de la fonction $\mathcal{H}$. ■

Remarquons que si les régions sont convexes, alors leurs centres de masses appartiennent à ces régions. Le minimum de cette fonctionnelle correspond aux centres de masses calculés lors de la deuxième étape de l'algorithme.

Les derniers algorithmes de génération de diagrammes de Voronoï centrés [50, 31, 29] utilisent des méthodes de type Newton ou quasi-newton pour minimiser la fonctionnelle $\mathcal{H}$.

Nous allons maintenant discuter de la convergence. Soit un ensemble initial de sites. Emelianenko *et al.* [32] ont démontré que sous les conditions suivantes :

2.4. Le cas métrique : triangulation de Delaunay, diagramme de Voronoï 33

- le domaine Ω est convexe et borné ;
- la fonction de densité ρ est intégrable sur Ω et presque partout positive,

les sites obtenus après application répétée des trois étapes de algorithmes précédent permet d'approcher un minimum de la fonction $\mathcal{F}$ définie en 2.4. La fonction $\mathcal{F}$ n'admet pas nécessairement un unique minimum. En effet, en prenant par exemple un cercle et un ensemble de sites, faire pivoter les sites autour du centre de gravité du cercle ne modifie pas l'énergie $\mathcal{F}$.

2.4.3.2 Diagramme de Voronoï centré défini sur un ensemble de triangles

Nous présentons maintenant un algorithme de calcul du diagramme de Voronoï centré d'un ensemble de triangles sur une 2-triangulation de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. L'algorithme 1 décrit le pseudo-code de l'analogue de l'algorithme décrit précédemment mais appliqué cette fois à un ensemble de triangles.

Algorithme 1 : Relaxation

Données :

- 2-triangulation (dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) ;
- m sites (triangles)

début

tant que *pas de convergence* **faire**

 Diagramme de Voronoï des sites;

 Pour chaque site, calcul d'un centre de masse de sa cellule associée

 Relocalisation d'un site à un centre de masse de sa cellule associée

Résultat : m sites optimisés

Maillages isotropes de domaines 2D

Nous proposons une méthode de maillage quadrangulaire isotrope de domaines 2D, avec un contrôle à la fois sur la taille et sur l'orientation des éléments. Le cœur de l'algorithme repose sur une procédure d'optimisation par étapes qui améliorent successivement la qualité du maillage pour les critères de taille, de forme, d'orientation, de degré et de régularité. Cette méthodologie permet le contrôle simultané de la taille et de l'orientation des éléments. Nos expérimentations montrent comment les maillages quadrangulaires générés respectent un large éventail de champs de taille et de champs de croix donnés.

Sommaire

3.1	Introduction	35
3.1.1	Etat de l'art	36
3.1.2	Contribution	38
3.2	Algorithme	39
3.2.1	Initialisation	39
3.2.2	Relaxation	43
3.2.3	Relaxation conforme	47
3.2.4	Paramétrisations locales	52
3.2.5	Subdivision barycentrique	56
3.2.6	Lissage	56
3.3	Résultats	57
3.4	Conclusion	63

3.1 Introduction

La génération automatique de maillages quadrangulaires isotropes pour des domaines 2D arbitraires est encore un défi scientifique majeur en raison de la grande variété de critères et de la qualité recherchée.

Le critère de base que nous imposons est que le domaine soit maillé avec uniquement des quadrangles convexes. Nous voulons aussi générer des maillages

quadrangulaires tels que, localement, les éléments : i) soient bien formés, c'est-à-dire soient proches, en forme, de carrés, ii) soient de taille en concordance avec le champ de taille initial, iii) soient orientés en concordance avec le champ de croix initial (une orientation modulo 90 degrés) et iv) aient leurs arêtes alignées avec le bord du domaine.

Les utilisateurs requièrent souvent un critère plus global : la régularité, qui correspond à la prédominance de sommets réguliers, c'est-à-dire de degré 4¹ à l'intérieur du domaine et (en général) de degré 2 sur le bord.

Alors que ces critères de qualité sont souvent tous recherchés, une des difficultés majeure en maillage est qu'ils entrent souvent en conflit les uns avec les autres (voir section 1.1). Un autre aspect ardu vient du fait que même si les critères de qualité sont définis de manière locale, il n'en demeure pas moins qu'ils possèdent des contraintes globales (voir section 1.1).

Une autre notion importante en maillage est la conformité. Cette notion n'a de sens que dans le cas où un maillage n'est pas quadrangulaire pur mais polygonal et possède alors des jonctions en T . La méthodologie à base d'optimisation que nous proposons ne garantit pas que le maillage soit quadrangulaire pur. La figure 3.1(a) illustre des éléments non quadrangles de forme carrée. Pour générer un maillage quadrangulaire pur, nous appliquons une subdivision de Catmull-Clark. La conformité correspond à la manière dont les éléments se rencontrent aux arêtes. Si l'intersection entre deux éléments est seulement une partie d'arête, alors on parle de non-conformité dans la direction orthogonale à cette partie d'arête. Nous appelons configuration 1-conforme (respectivement 2-conforme) quand il n'y a non-conformité que dans une seule direction (respectivement dans les deux directions) (voir figure 3.1).

3.1.1 Etat de l'art

La difficulté à traiter les critères à la fois locaux et globaux peut expliquer la grande variété d'approches proposées dans le domaine de la génération automatique de maillages quadrangulaires.

En incluant les méthodes dédiées à la génération de maillages quadrangulaires de surfaces, la riche littérature sur ce sujet comprend des approches qui procèdent par quadrangulation [16, 5], empilement de carrés [65], avancée de front [55], conversion [12], décimation [41], complexes Morse-Smale [28, 77, 40], partition-

1. Une sommet de degré k possède k cellules intérieures adjacentes.

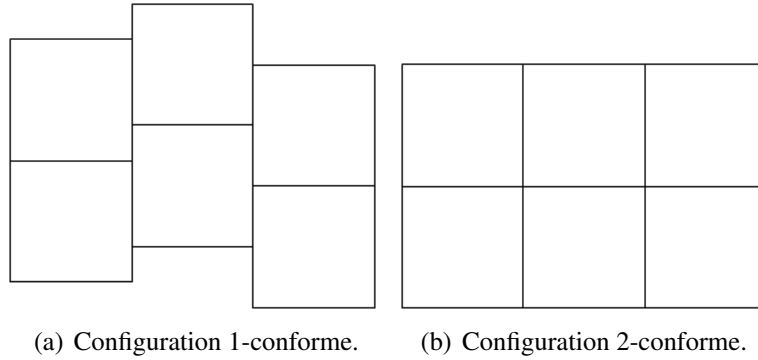


FIGURE 3.1 – Configuration conformes. Configuration 1-conforme : il y a non-conformité dans la direction horizontale (a). Les éléments sont de forme carrée, mais ce ne sont pas des quadrangles du point de vue topologique car leur degré est différent de 4. Configuration 2-conforme (b).

nement [6, 50], opérateurs locaux et globaux [57, 49], tissage de fils [76], axe médian [58], tracé de lignes de courbure [2, 52] et paramétrisation [59, 72, 11].

Parmi ces approches, quelques-unes favorisent la concordance du maillage final avec un champ de croix initial par construction [52] ou en calculant le champ de croix le plus lisse possible à partir d'un ensemble d'orientations contraintes [11]. La concordance avec un champ de taille initial est soit dérivée du maillage triangulaire avant conversion [12], soit encodée dans une fonction de densité avant partitionnement [50]. La régularité du maillage est contrôlée soit explicitement en plaçant interactivement un petit nombre de sommets irréguliers avant la paramétrisation [72], soit indirectement à travers un champ de croix lisse [11]. La régularité peut être améliorée à posteriori à travers, par exemple, des opérateurs préservant l'endomorphisme de grille afin de générer des complexes de base simples [9]. La stricte concordance locale à la fois au champ de taille et au champ de croix est un problème reconnu pour être délicat dans la plupart des approches utilisant une formulation variationnelle globale, et presque aucune des approches dites *fin vers grossier* basées sur la décimation [41, 57] ne conduit à des maillages en concordance à la fois avec le champ de taille et avec le champ de croix. La méthodologie proposée par Shimada *et al.* [65] permet, pour des domaines simples, de générer des maillages en concordance avec un champ de taille et un champ de croix donnés (voir figure 3.2 pour la concordance avec un champ de croix donné).

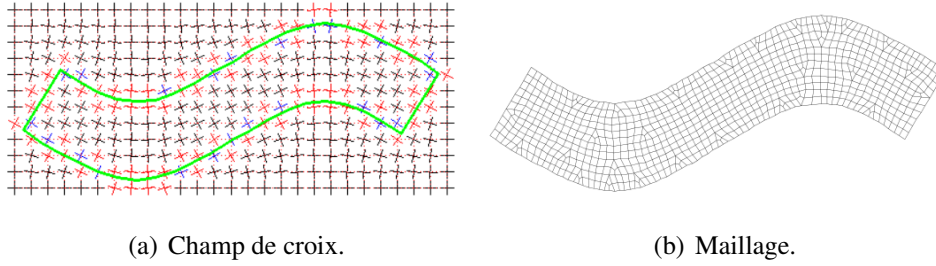


FIGURE 3.2 – Shimada *et al.* [65]. Le champ de taille est uniforme. Le maillage généré (b) est en concordance avec le champ de croix initial (a). Images extraites de Shimada *et al.* [65].

3.1.2 Contribution

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme simple pour le maillage isotrope de domaines 2D. Nous générons des maillages en concordance avec un champ de taille et un champ de croix donnés. Notre approche diffère des précédentes dans le sens où notre méthodologie peut être vue comme le miroir des algorithmes de raffinement (par exemple de Delaunay) qui subdivisent localement le maillage pour un élément à la fois jusqu'à ce que tous les critères de qualité soient satisfaits. Plutôt que de raffiner l'élément qui ne satisfait pas *un* des critères comme dans l'algorithme de raffinement de Delaunay, nous choisissons d'améliorer tout le maillage en ajoutant un critère à la fois, dans un ordre particulier afin de ne pas affecter les autres critères (voir tableau 3.1). Le tableau 3.2 compare notre approche avec le raffinement de Delaunay.

	<i>Taille</i>	<i>Forme</i>	<i>Orientation</i>	<i>Degré</i>	<i>Regularité</i>
Initialisation (3.2.1)	●	●			
Relaxation (3.2.2)	○	●	●		
Relaxation conforme (3.2.3)	○	○	○	●	●
Paramétrisations locales (3.2.4)	○	○	○	●	●
Subdivision barycentrique (3.2.5)	○	×	○	●	○
Lissage (3.2.6)	○	●	○	○	○

TABLE 3.1 – Chaque étape de l'algorithme améliore différents critères de qualité. ● : le critère est partiellement satisfait ; ● : le critère est satisfait ; × : le critère n'est pas préservé ; ○ : le critère est préservé.

Raffinement de Delaunay	Notre Algorithme
Tant qu'il reste des éléments mauvais raffiner le maillage	Optimiser le maillage pour : 1. la taille 2. la forme 3. l'orientation 4. le degré 5. la régularité
Mauvais : ne satisfait pas un des critères de taille, d'isotropie	

TABLE 3.2 – Notre approche se situe en miroir du raffinement de Delaunay. Le raffinement de Delaunay consiste à raffiner le maillage tant que la qualité du maillage pour tous les critères n'est pas satisfaisante. Notre approche consiste à améliorer tout le maillage en ajoutant les critères un par un, dans un ordre précautionneusement choisi.

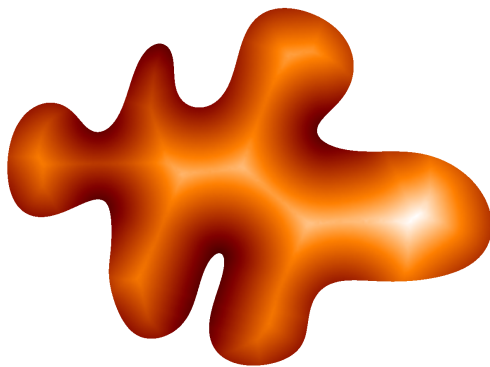
3.2 Algorithme

La donnée de notre algorithme est un domaine fermé muni d'un champ de taille et d'un champ de croix (voir figure 3.3). Le champ de taille est soit spécifié par l'utilisateur, soit calculé automatiquement comme une fonction de Lipschitz à partir de la taille locale caractéristique estimée sur le bord du domaine [3]. Le champ de croix est soit spécifié par l'utilisateur, soit calculé automatiquement comme le champ le plus lisse avec des contraintes tangentielles sur le bord [25]. Notons que pour générer un champ de croix, nous pouvons aussi utiliser l'approche de Bommes *et al.* [11], qui est à base de résolution d'équations à variables mixtes (entières et réelles).

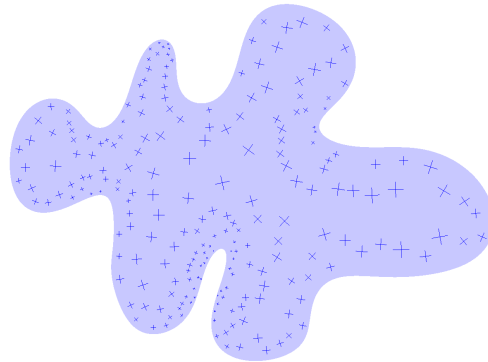
L'algorithme procède principalement par partitionnement et par des paramétrisations locales sur un maillage triangulaire support fin et isotrope (voir figure 3.3(c)), obtenu par raffinement de Delaunay. Nous donnons ci-dessous le pseudo-code de notre algorithme, tandis que la figure 3.4 décrit visuellement ses principales étapes.

3.2.1 Initialisation

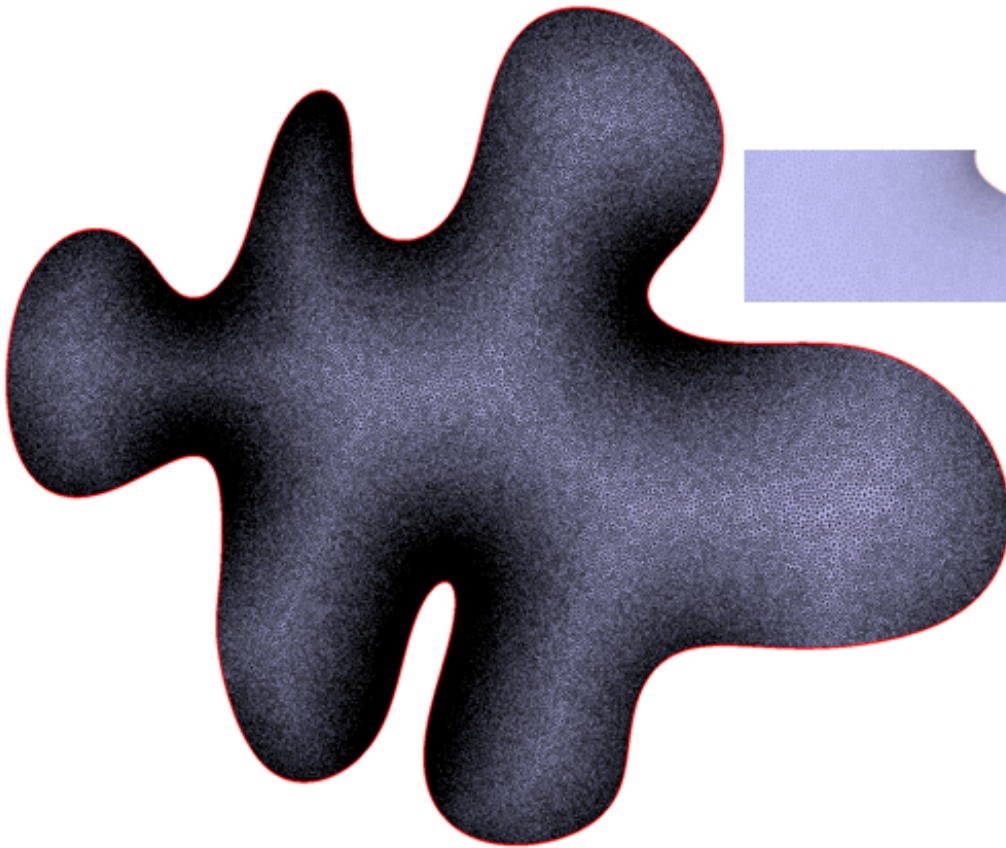
Nous construisons un maillage support $\mathcal{M}$ comme une triangulation de Delaunay contrainte 2D dont le bord est une ligne polygonale qui approche le bord du domaine. Un raffinement de Delaunay [64, 62] est ensuite appliqué à $\mathcal{M}$ jusqu'à ce que les triangles soient à la fois bien formés (isotropes) et de taille en concordance avec une petite fraction du champ de taille donné : par défaut 0.1 (voir figure 3.3(c)).



(a) Champ de taille.



(b) Champ de croix.



(c) Maillage support.

FIGURE 3.3 – Données. L'algorithme prend comme entrée un domaine fermé muni d'un champ de taille (a) et d'un champ de croix (b). Il agit sur un maillage triangulaire support obtenu par raffinement de Delaunay relativement au champ de taille (c).

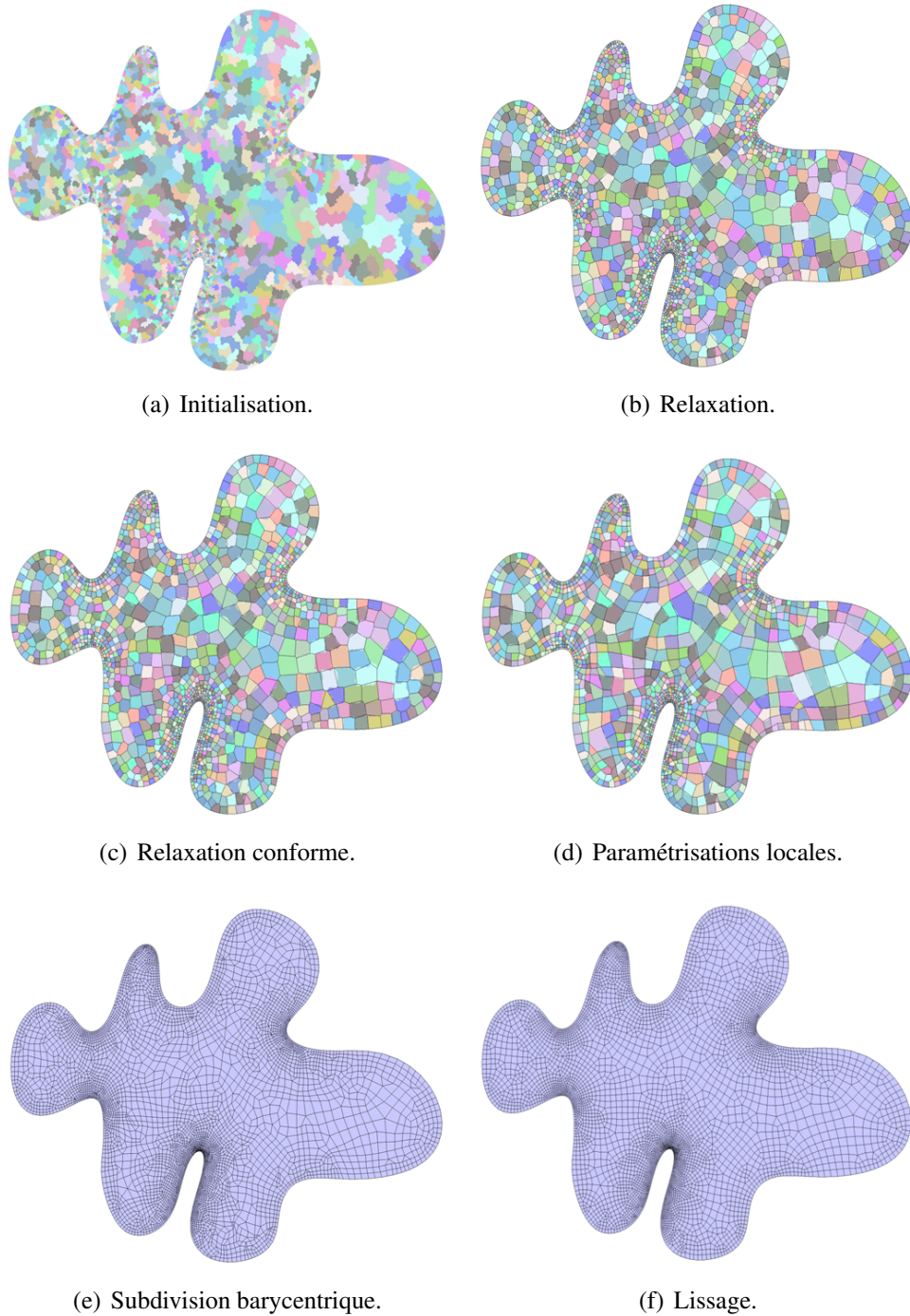


FIGURE 3.4 – Algorithme. L'initialisation partitionne le maillage triangulaire 3.3(c) afin de satisfaire aux critères de taille et de forme (a). Une relaxation améliore la partition pour les critères de forme et d'orientation, tout en préservant la taille (b). Une relaxation conforme améliore le degré des éléments et la régularité (c). Une série de paramétrisations locales améliore encore plus le degré et la régularité (d). Une subdivision barycentrique génère un maillage quadrangulaire pur (e). Le lissage améliore enfin la forme des quadrangles (f). 1000 quadrangles, temps total : 40 s.

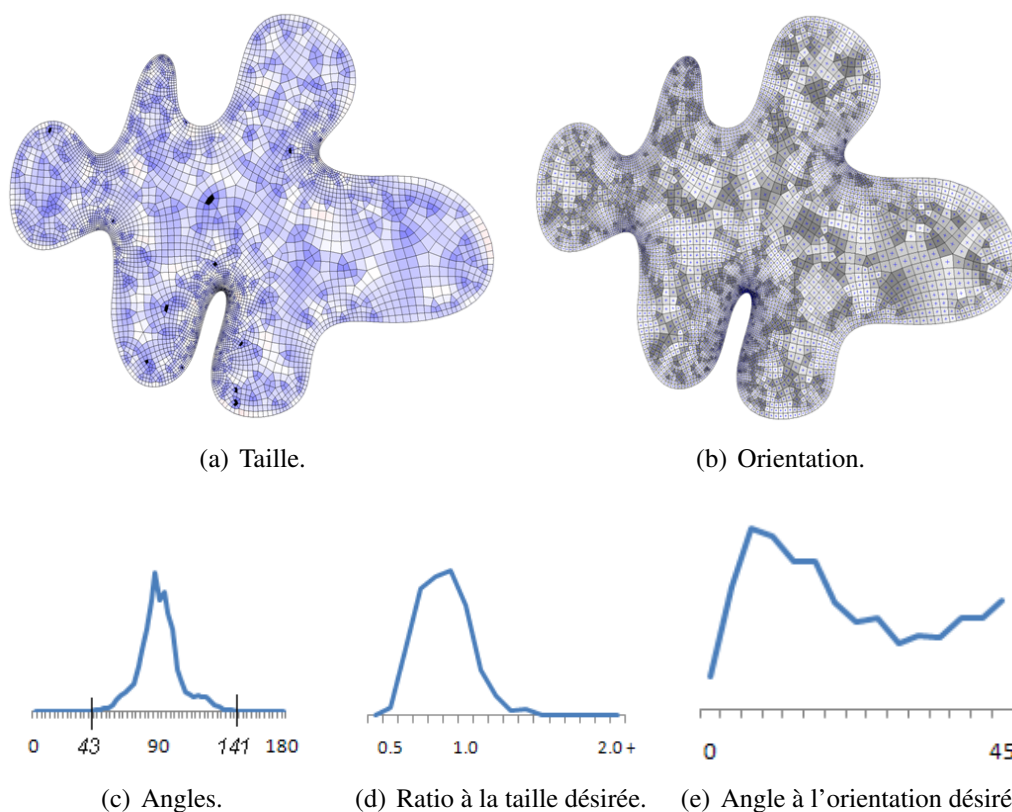


FIGURE 3.5 – Résultats. Nous illustrons la concordance avec le champ de taille à l'aide d'une rampe colorée du blanc au bleu (respectivement du blanc au rouge) pour des éléments plus petits (respectivement plus grands) que le champ de taille donné (a). Nous illustrons la concordance au champ de croix à l'aide d'une rampe colorée du blanc au gris (b). Les sommets irréguliers sont représentés en rouge pour un excès de degré (> 4) et en bleu pour un déficit de degré (< 4). Nous montrons la distribution des angles (c), aussi bien que les distributions quantifiant la concordance avec la taille (d) et l'orientation (e).

Algorithme 2 : Algorithme de maillage quadrangulaire 2D**Input** : Domain 2D, champ de taille, champ de croix**begin**

1. Initialisation (3.2.1)
2. Relaxation (3.2.2)
3. Relaxation conforme (3.2.3)
4. Paramétrisations locales (3.2.4)
5. Subdivision barycentrique (3.2.5)
6. Lissage (3.2.6)

Output : Maillage quadrangulaire pur

L'étape d'initialisation a pour but de générer une partition en concordance avec le champ de taille donné et qui satisfait grossièrement le critère de forme (voir tableau 3.1)

D'abord, nous générons un sous-domaine par triangle de $\mathcal{M}$. Puis, nous fusionnons récursivement des paires de sous-domaines en utilisant une queue de priorité sur les opérations de fusion jusqu'à ce que le critère relatif à la taille soit satisfait (voir figure 3.4(a)). Dans le but de favoriser les éléments isotropes, les opérations de fusion sont extraites de la queue dans l'ordre décroissant de leur score de compacité, ce dernier étant défini comme le quotient entre l'aire et le carré du périmètre :

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{L}^2},$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}$ représentent respectivement l'aire et le périmètre d'un sous-domaine. L'idée de cette étape est similaire à la méthodologie de Garland *et al.* [36]. Notons que par construction, nous garantissons que chaque sous-domaine possède la topologie d'un disque en excluant les fusions qui ne donneraient pas un disque topologique.

À la fin de cette étape, nous obtenons une partition de $\mathcal{M}$ en m sous-domaines. Pour chaque sous-domaine, nous pouvons choisir un triangle parmi ceux qui minimisent la fonctionnelle définie dans l'équation 2.3 de la section 2.2. Cet ensemble de triangles, appelés sites, sert de point de départ à la procédure de relaxation qui suit.

3.2.2 Relaxation

L'étape de relaxation a pour but d'optimiser la partition initiale pour les critères de forme et d'orientation tout en préservant la taille (voir tableau 3.1). L'optimisa-

tion est obtenue grâce à un algorithme de partitionnement discret (voir section 2.4) qui agit sur le maillage support afin de favoriser les éléments carrés qui soient à la fois de la bonne taille et bien orientés relativement au champ de taille et au champ de croix [74].

Les éléments sont de forme carrée parce que la boule unité pour la distance (d_∞) choisie est un carré.

De manière similaire à Lévy et Liu [50], nous considérons la métrique $L_\infty^{\mathcal{R}}$ relativement au repère orthonormé local $\mathcal{R} = (\vec{u}, \vec{v})$ spécifié par le champ de croix. La distance $d_\infty^{\mathcal{R}}$ relativement au repère local $\mathcal{R}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} d_\infty^{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ (p, q) &\longmapsto \max(|(p - q) \cdot \vec{u}|, |(p - q) \cdot \vec{v}|). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Comme décrit en section 2.4, nous générons un diagramme de Voronoï centré sur le maillage triangulaire support à partir de l'ensemble de sites décrit ci-dessus. La figure 3.6 décrit quelques itérations.

Comme attendu, cette étape de relaxation conduit à une partition du domaine triangulaire avec des sous-domaines de forme presque carrée, bien orientés et de bonne taille (de manière similaire à l'approche de conditionnement carré [65]), même si un champ de taille variable induit inévitablement une distorsion de la forme.

Nous observons sur la figure 3.7 que, même s'ils sont bien formés, les sous-domaines ne sont généralement pas conformes dans les deux directions (voir les nombreuses jonctions en T).

Nous décrivons dans le prochain paragraphe une procédure de relaxation, appelée relaxation conforme, qui a pour but de générer des configurations quasi 2-conformes.

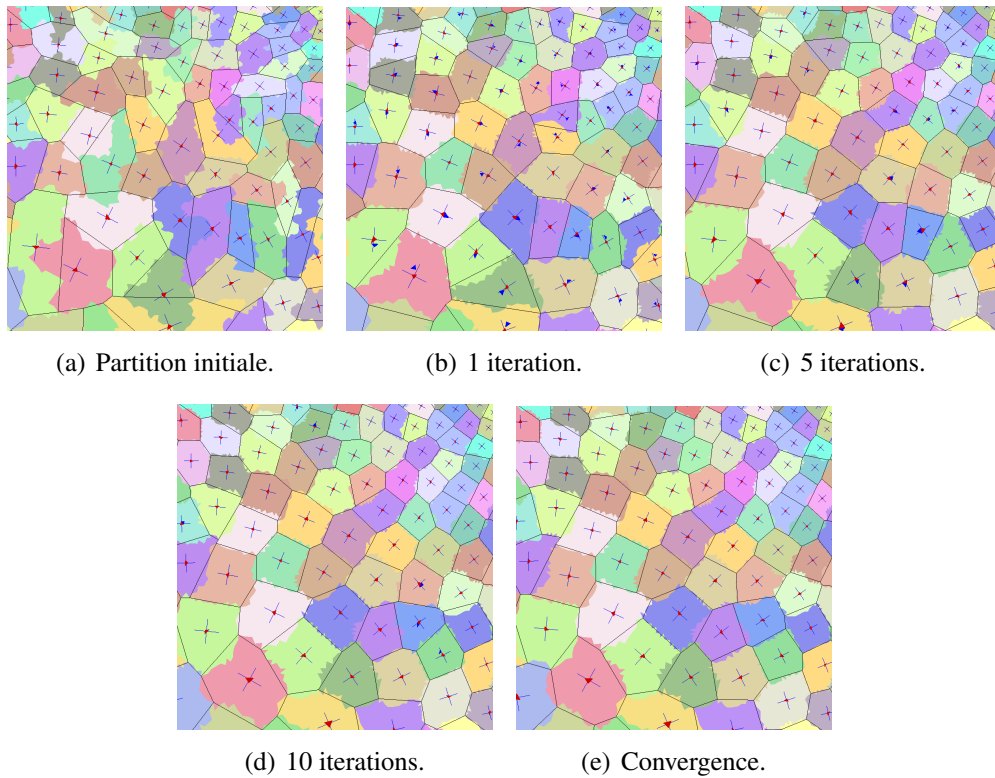
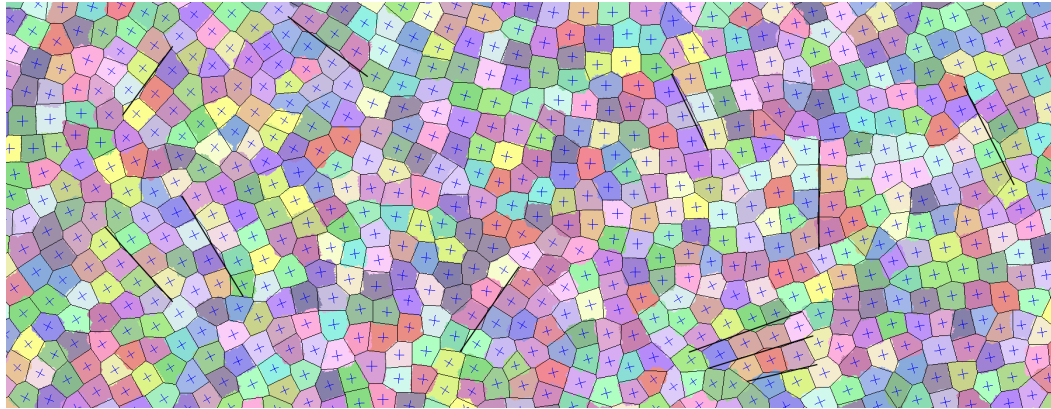
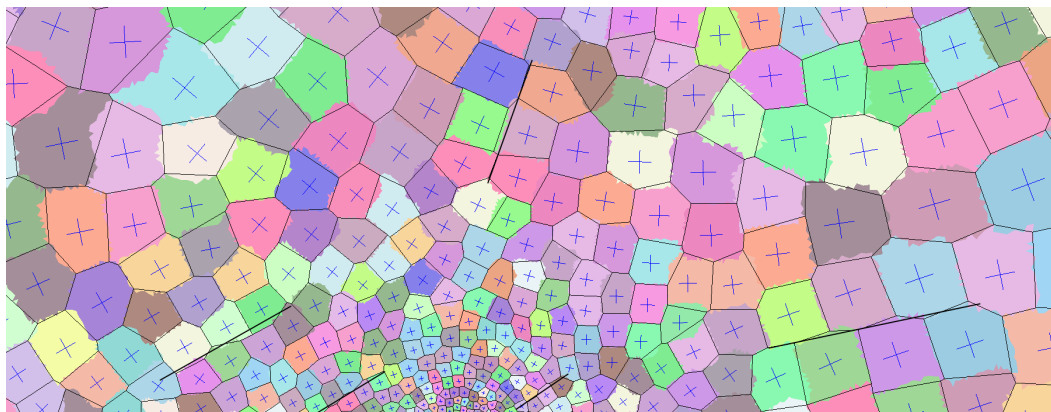


FIGURE 3.6 – Algorithme de génération d'un diagramme de Voronoï centré. L'algorithme est celui décrit dans l'algorithme 1 de la section 2.4 et agit sur un maillage triangulaire support que nous ne montrons pas pour plus de clarté. Le champ de taille est non-uniforme, et le champ de croix est montré.



(a) Champ de taille uniforme.



(b) Champ de taille non-uniforme.

FIGURE 3.7 – Après relaxation, pour un champ de taille uniforme (haut) et non-uniforme (bas). Les sous-domaines ne sont en général pas conformes dans une direction du champ de croix. Les lignes noires mettent en évidence des directions conformes localement.

3.2.3 Relaxation conforme

En regardant attentivement la figure 3.7, nous constatons, sans le démontrer, que la partition est en général déjà conforme dans une direction (1-conforme). Nous l'expliquons par le nombre de générateurs initiaux et leurs positions. La figure 3.8(a) schématise les configurations 1-conformes. Notre but est de transformer ces configurations 1-conformes en configurations 2-conformes (voir figure 3.8(c)). Pour cela, nous appliquons une nouvelle relaxation afin que la partition ait des configurations quasi 2-conformes (voir figure 3.8(b)).

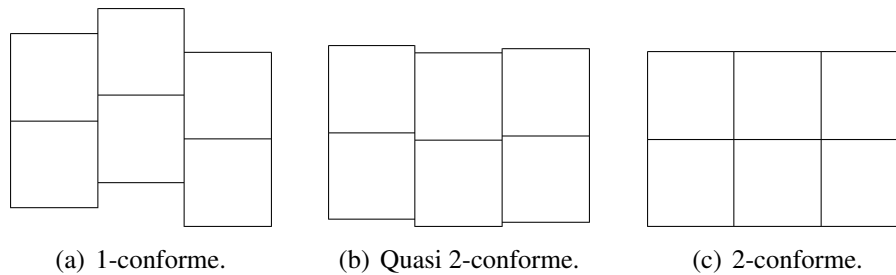


FIGURE 3.8 – Partition avec des carrés. Configuration générique après relaxation (a). Configuration générique après relaxation conforme (b). Configuration idéale visée (c).

Une description intuitive de la procédure de relaxation conforme est donnée dans la figure 3.8 : nous pouvons translater petit à petit les trois colonnes verticalement pour atteindre une configuration parfaitement 2-conforme (figure 3.8(c)). Afin d'obtenir cette translation, nous proposons de simplement translater le centre de masse pendant la procédure de relaxation. La seule difficulté réside maintenant dans la manière de calculer le vecteur de translation.

Même si cela paraît simple à première vue, détecter les configurations 1-conformes dans une direction (verticale ou horizontale) n'est pas trivial : il est nécessaire de trouver la direction et la taille du vecteur de translation (voir figure 3.9). De plus, le champ de taille et le champ de croix varient tous les deux sur le domaine, ce qui demande aussi, en plus de translater les sous-domaines, de modifier la taille pour atteindre la conformité.

Les sous-domaines déjà quadrangles ou triangles (c'est-à-dire avec 4 ou 3 méta-sommets) ne sont pas translatés. Alors que nous supposons qu'après relaxation les sous-domaines sont carrés (du point de vue géométrique, c'est-à-dire en forme), ils sont en général de degré 6 (voir figures 3.8(a) et 3.10).

Nous avons alors besoin de choisir quatre méta-sommets particuliers formant un carré localement aligné avec le champ de croix (voir figure 3.10). Nous calcu-

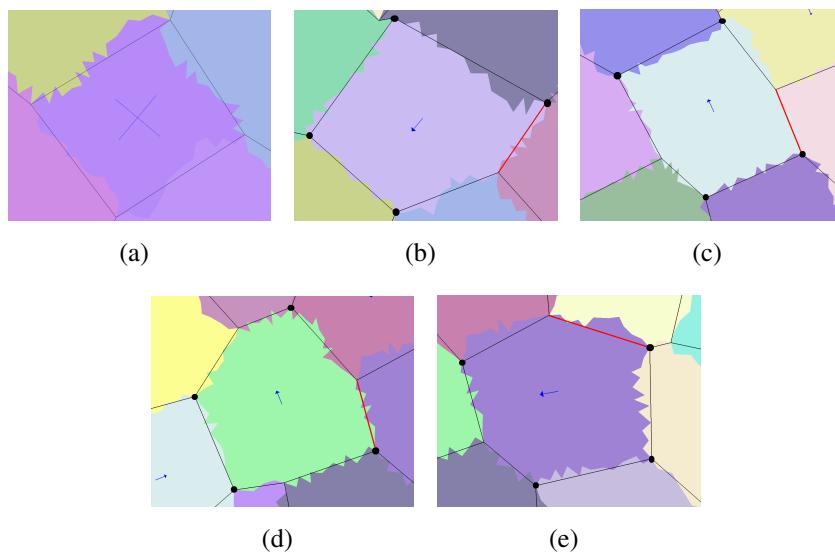


FIGURE 3.9 – Translation. Nous montrons des exemples de vecteurs de translation par ordre croissant d’ambiguïté. Les coins choisis du quadrangle sont dessinés en noir. Un sous-domaine qui est déjà quadrangle n’est pas traduit (a). Un sous-domaine dont un côté est composé de deux méta-arêtes (b). Un sous-domaine avec deux côtés parallèles composés de deux méta-arêtes (c). Un sous-domaine avec trois côtés composés de deux méta-arêtes (d). Un autre cas ambigu (e).

lons d'abord le triangle centre de masse² du sous-domaine de la même manière que dans l'étape de relaxation (voir section 3.2.2). Sa croix (donnée par le champ de croix initial) est prise comme repère orthonormé local : $\mathcal{R} = (\vec{u}, \vec{v})$. Notons $v_1, \dots, v_p$ ($p > 4$) les méta-sommets du sous-domaine, ordonné en circulant sur le bord du sous-domaine. Pour décider lesquels des méta-sommets sont choisis comme coins (ordonnés) c_1, c_2, c_3, c_4 , nous maximisons – par programmation dynamique – l'alignement des côtés avec les axes de $\mathcal{R}$ en maximisant l'énergie suivante :

$$\mathcal{E} = \max_{\substack{\vec{a} \in \{\vec{u}, \vec{v}\} \\ \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subset \{v_1, \dots, v_p\}}} \left[\min \left(|\vec{c_1 c_2} \cdot \vec{a}|, |\vec{c_2 c_3} \cdot \vec{a}^{90}|, |\vec{c_3 c_4} \cdot \vec{a}|, |\vec{c_4 c_1} \cdot \vec{a}^{90}| \right) \right],$$

où $\vec{a}^{90}$ représente le vecteur $\vec{a}$ (qui peut être égal à $\vec{u}$ ou à $\vec{v}$) pivoté de 90 degrés.

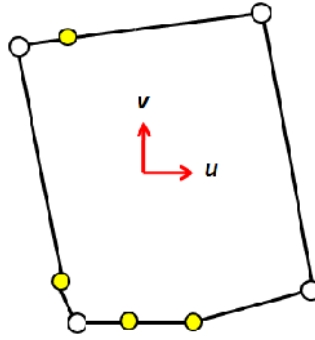


FIGURE 3.10 – Calcul des coins d'un sous-domaine. Un sous-ensemble de l'ensemble des méta-sommets (disques jaunes et blancs) est choisi *via* une procédure de maximisation par programmation dynamique. Les sommets blancs sont appelés *coins*.

En plus de choisir les coins, le maximum de $\mathcal{E}$ fournit la direction locale de référence du champ de croix pour chaque côté ($\vec{u}$ ou $\vec{v}$). Pour chaque méta-arête, nous calculons ensuite la longueur de sa projection sur sa direction de référence ($\vec{u}$ or $\vec{v}$). Entre deux coins consécutifs sur le bord du sous-domaine, il y a soit une méta-arête, soit deux méta-arêtes, soit plus de méta-arêtes. S'il n'y a qu'une méta-arête, alors elle est rejetée. S'il y a deux méta-arêtes, alors la plus courte est sélectionnée. S'il y a plus de deux méta-arêtes, alors la plus courte parmi les deux extrémales est sélectionnée. Puisqu'il y a au maximum quatre coins par sous-domaine, il y a au maximum quatre méta-arêtes sélectionnées. Parmi celles-là, nous

2. Plus précisément, nous choisissons un triangle parmi l'ensemble des triangles centres de masses si cet ensemble n'est pas un singleton.

choisissons la plus longue, notée e . Nous translatons ensuite le centre de masse le long d'une ligne parallèle à sa direction de référence, dans la direction opposée à l'extrémité qui est un coin méta-sommet. La longueur de la translation est choisie comme une fraction (0.2 dans nos expérimentations) de la longueur de la projection de e sur la direction de référence (voir figure 3.11).

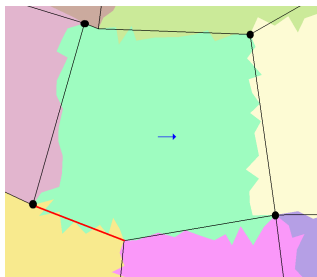


FIGURE 3.11 – Vecteur de translation sur le centre de masse d'un sous-domaine.

Le nombre d'itérations de relaxation conforme est un paramètre spécifié par l'utilisateur (fixé à 20 dans les exemples fournis).

La figure 3.12 montre comment cette relaxation conforme transforme des configurations initiales 1-conformes en configurations quasi-2-conformes. Ces dernières peuvent être rendues 2-conformes par une série de paramétrisations locales qui nous décrivons dans le prochain paragraphe.

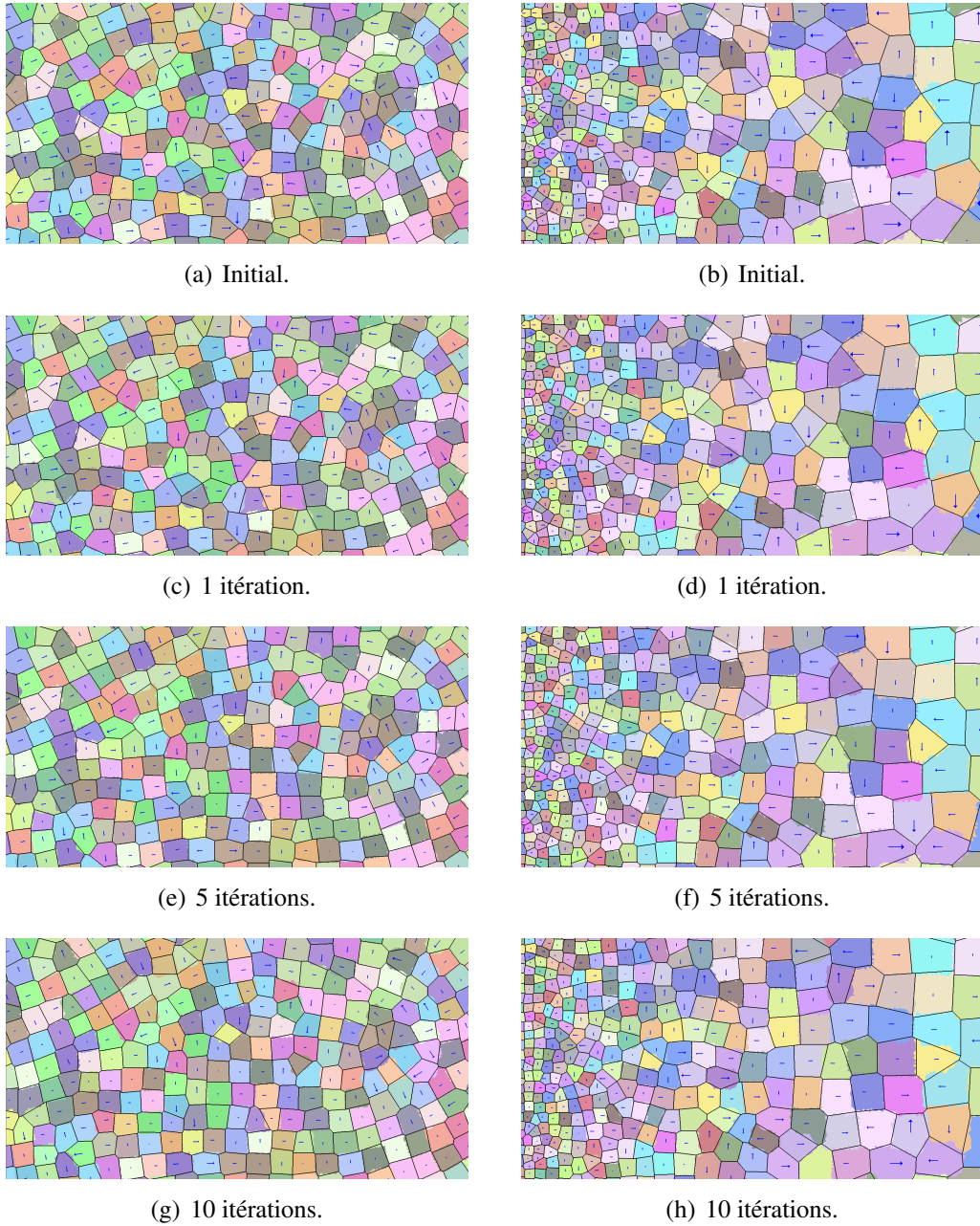


FIGURE 3.12 – Relaxation conforme avec un champ de taille uniforme (gauche) et non-uniforme (droite). De haut en bas : initial, 1 itération, 5 itérations et 10 itérations. Pour transformer des configurations initiales 1-conformes en configurations quasi 2-conformes, les centres de masse de deux sous-domaines adjacents sont localement translatés, ce qui peut introduire des distorsions de taille.

3.2.4 Paramétrisations locales

L'étape de relaxation conforme favorise les configurations quasi 2-conformes (voir figure 3.8(b)) que nous aimerions transformer en configurations 2-conformes (voir figure 3.8(c)) afin d'améliorer les critères de degré et de régularité (voir tableau 3.1) sans affecter négativement les critères satisfaits lors des précédentes étapes.

La figure 3.12 montre que beaucoup de configurations quasi 2-conformes exhibent des arrangements de sous-domaines similaires du point de vue topologique. Nous appelons *papillon* un ensemble de quatre sous-domaines incidents à une courte méta-arête (voir figure 3.13). Inspirés par Pietroni *et al.* [57], nous supprimons de telles configurations grâce à des paramétrisations locales sur des domaines carrés, qui fusionnent deux méta-sommets de degré 3 en un méta-sommet de degré 4.

Pour chaque papillon, nous considérons l'union des quatre sous-domaines A, B, C, D comme un sous-domaine Ω_{ABCD} , et nous classifions d'abord ses méta-sommets comme décrit dans la figure 3.13. Alors que les méta-sommets intérieurs (noir) et à l'interface de deux sous-domaines parmi A, B, C, D peuvent facilement être classifiés grâce à la topologie (en utilisant les relations d'adjacence entre sous-domaines), distinguer les quatre coins parmi les autres méta-sommets (qui peuvent être nombreux lorsque le champ de taille varie rapidement) nécessite d'incorporer un critère géométrique lié à l'orientation locale des sous-domaines.

Contrairement à la manière de choisir les coins pendant l'étape de relaxation conforme, l'orientation n'est cette fois pas donnée par le champ de croix mais dépend des quatre sous-domaines (l'idée derrière ce choix est encore de ne pas détruire ce que les précédentes étapes ont construit). Notons $V_{AB}, V_{BC}, V_{CD}, V_{DA}$ les quatre méta-sommets aux interfaces. Nous estimons un repère local de référence en sélectionnant deux droites par analyse par composantes principales des paires de segments ($[V_{AB}, V_B], [V_{CD}, V_D]$) et ($[V_{DA}, V_D], [V_{BC}, V_B]$) [22]. Parmi ces deux droites, la plus fiable (c'est-à-dire la droite avec la variance minimale dans la direction orthogonale) est choisie comme direction de référence. Pour sélectionner quatre coins parmi les méta-sommets, nous utilisons encore l'approche par programmation dynamique utilisée en section 3.2.3.

Notre but est de paramétriser Ω_{ABCD} sur un domaine carré et d'associer ses triangles à un unique sous-domaine (noté A, B, C ou D) de la partition tel que i) les coins méta-sommets choisis coïncident avec les coins d'un carré de référence, ii) les interfaces sur le bord de Ω_{ABCD} soient préservées, iii) les deux méta-sommets intérieurs soient fusionnés en un méta-sommet de degré 4 et iv) Ω_{ABCD} soit partitionné en 4 sous-domaines qui ont chacun la topologie d'un disque.

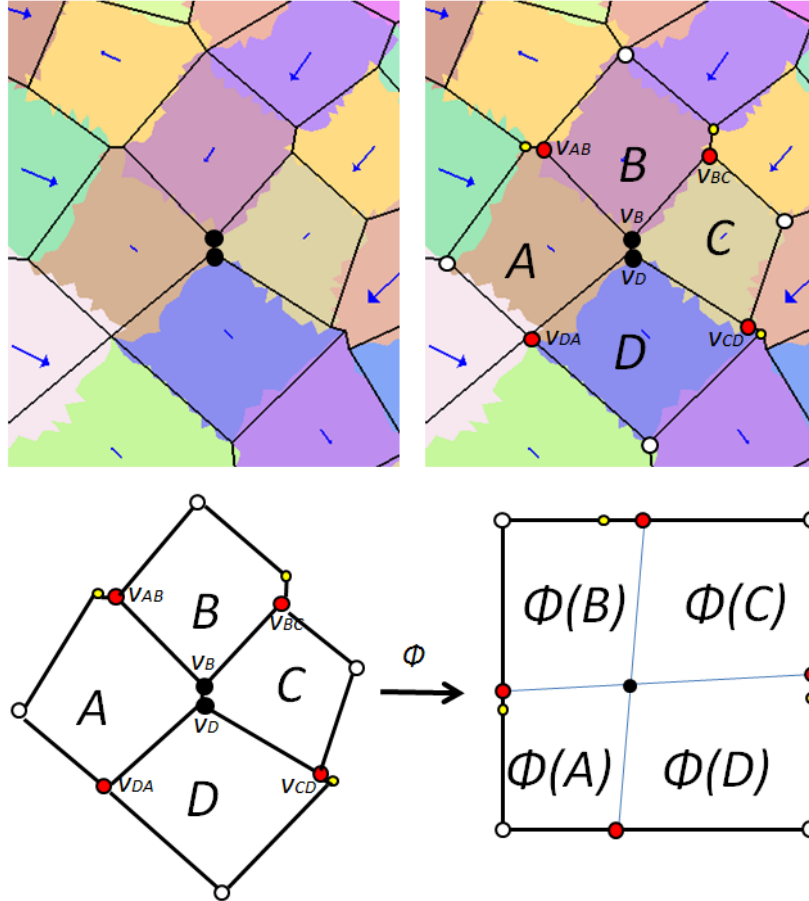
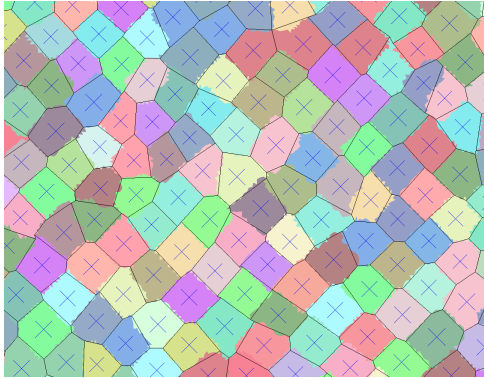


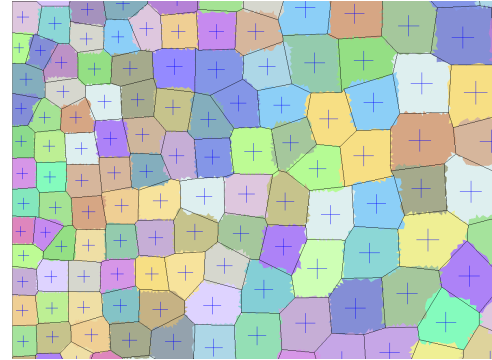
FIGURE 3.13 – Configuration en papillon. En haut à gauche : une courte méta-arête qui connecte deux méta-sommets de degré 3 (en noir) que partagent quatre sous-domaines. En haut à droite : parmi les méta-sommets de ces quatre sous-domaines, nous identifions deux sommets intérieurs (noir), quatre méta-sommets d'interface séparant deux à deux les quatre sous-domaines A, B, C, D (rouge), quatre coins (blanc), et les méta-sommets restants (jaune). Bas : les quatre sous-domaines paramétrisés sur un carré. La paramétrisation préserve la topologie des interfaces sur la frontière des quatre sous-domaines. Quelques sous-domaines peuvent être plus petits dans l'espace des paramètres afin de respecter au mieux le champ de taille.

Nous appelons ϕ la paramétrisation de Ω_{ABCD} sur le domaine carré. Nous contraignons d'abord le bord de $\phi(\Omega_{ABCD})$ de telle sorte que les coins choisis soient respectés et en utilisant une paramétrisation qui respecte les rapports de longueur entre ces sommets. Nous paramétrisons ensuite Ω_{ABCD} en utilisant les coordonnées par valeur moyenne [33] et nous calculons, dans l'espace des paramètres, le point d'intersection $\phi(v^*)$ entre les deux segments $(\phi(V_{AB})\phi(V_{CD}))$ et $(\phi(V_{BC})\phi(V_{DA}))$. Le plus proche sommet (de degré au moins 4) de $\phi(v^*)$ est alors calculé et son image réciproque par ϕ sera le méta-sommet central de degré 4. Une fois les sommets intérieurs et ceux du bord fixés, une étape naïve de partitionnement basée sur l'appartenance aux quadrilatères dans l'espace des paramètres peut conduire à un partitionnement qui ne respecte pas le critère de topologie. Pour cette raison, nous traçons quatre chemins d'arêtes de $\phi(v^*)$ vers $\phi(V_{AB})$, $\phi(V_{BC})$, $\phi(V_{CD})$, $\phi(V_{DA})$, dans l'ordre croissant des longueurs afin de déterminer des interfaces propres entre les sous-domaines. Ces chemins d'arêtes sont contraints de ne pas s'intersecter (sauf au sommet central) et de ne passer par aucun des sommets du bord de $\phi(\Omega_{ABCD})$ (exceptés V_{AB} , V_{BC} , V_{CD} , V_{DA}). Après cette procédure, chaque triangle Ω_{ABCD} appartient à un unique sous-domaine de la partition, et cela termine la procédure de suppression des configurations dites papillons.

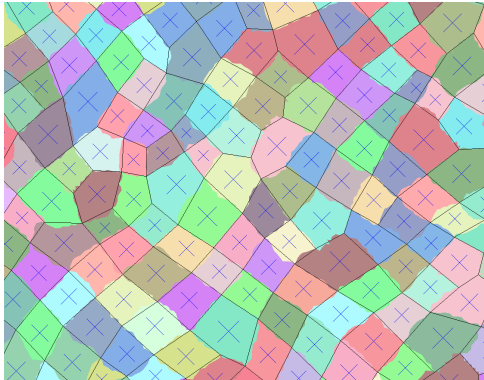
Pour éviter une distorsion de taille et d'orientation dans le maillage final, nous supprimons seulement les papillons dont la longueur de la méta-arête intérieure est plus petite qu'une fraction du champ de taille local (0.25 dans nos expérimentations). Nous utilisons une queue de priorité dynamique afin de prendre en compte les papillons par ordre croissant de longueur de méta-arête. La figure 3.14 illustre comment les paramétrisations locales améliorent les critères de degré et de régularité pour des champs de taille uniformes et non-uniformes.



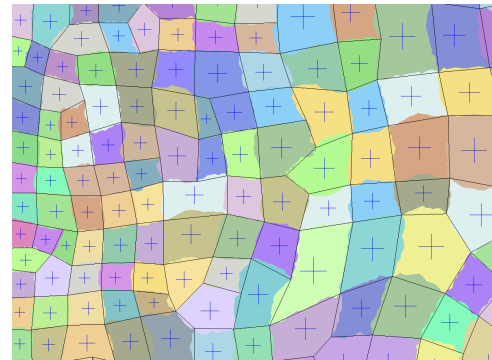
(a) Champ de taille uniforme. Avant les paramétrisations locales.



(b) Champ de taille non-uniforme. Avant les paramétrisations locales.



(c) Champ de taille uniforme. Après les paramétrisations locales.



(d) Champ de taille non-uniforme. Après les paramétrisations locales.

FIGURE 3.14 – Paramétrisations locales. Champ de taille uniforme : avant (a) et après (b) les paramétrisations locales. Champ de taille non-uniforme : avant (c) et après (d) les paramétrisations locales. Le champ de croix est montré.

3.2.5 Subdivision barycentrique

Après l'étape des paramétrisations locales, il n'y a aucune garantie que les éléments soient de degré 4. Expérimentalement, nous obtenons de l'ordre de 75% de quadrangles pour des champs de taille uniformes et de l'ordre de 60% pour des champs de taille non uniformes. Nous appliquons alors une subdivision barycentrique (voir figure 3.4(e)) afin d'obtenir des éléments de degré 4, c'est-à-dire un maillage quadrangulaire pur et ainsi satisfaire le critère de degré (voir tableau 3.1). La longueur des arêtes des quadrangles est alors réduite d'un facteur 2 comparé au maillage avant subdivision. Ce facteur est pris en compte dans toutes les précédentes étapes de l'algorithme.

3.2.6 Lissage

Près des jonctions en T, une subdivision barycentrique déforme les quadrangles. Nous appliquons alors quelques itérations de lissage laplacien (voir figures 3.4(f) et 3.15) afin d'améliorer le critère de forme. Rappelons que le lissage laplacien consiste à replacer un sommet d'un maillage en un point qui est une combinaison convexe de ses voisins [15]. Plus précisément, soit $\mathcal{V}^i = \{v_0^i, \dots, v_{N-1}^i\}$ les sommets initiaux d'un maillage. Une itération de lissage Laplacien :

1. génère un ensemble de sommets $\mathcal{V}^f = \{v_0^f, \dots, v_{N-1}^f\}$ tel que : pour chaque $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$v_j^f = \frac{1}{|\mathcal{N}(v_j^i)|} \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_j^i)} v_j,$$

où $\mathcal{N}(v)$ représente l'ensemble de sommets adjacents à v ;

2. relocalise chaque sommet v_j^i en v_j^f .

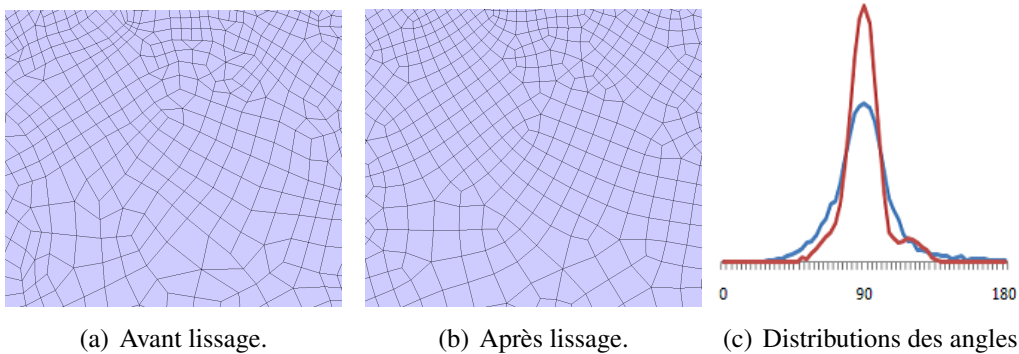


FIGURE 3.15 – Lissage. Maillage avant (a) et après lissage (b). Nous comparons les distributions d'angle avant (bleu) et après (rouge) lissage (c).

3.3 Résultats

Notre algorithme est implanté en C++ en utilisant la bibliothèque CGAL [21]. Tous les exemples sont calculés sur un PC comprenant un simple cœur cadencé à $2.40GHz$. Chaque exemple met en évidence les sommets irréguliers en bleu pour un déficit de degré, et en rouge pour un excès de degré. Pour représenter la concordance au champ de croix donné, nous utilisons une rampe de couleur du blanc au noir, où le blanc est utilisé pour une parfaite concordance et le noir pour une distorsion de 45 degrés. Pour représenter la concordance au champ de taille donné, nous utilisons une rampe de couleur du blanc au bleu (respectivement rouge), pour des éléments plus petits (respectivement plus grands) que désirés. Nous représentons aussi les distributions d'angle, de concordance au champ de taille et de concordance au champ de croix.

Nous présentons un grand nombre d'exemples de complexité variable, pour divers champs de taille, dans le but de montrer la qualité de nos résultats.

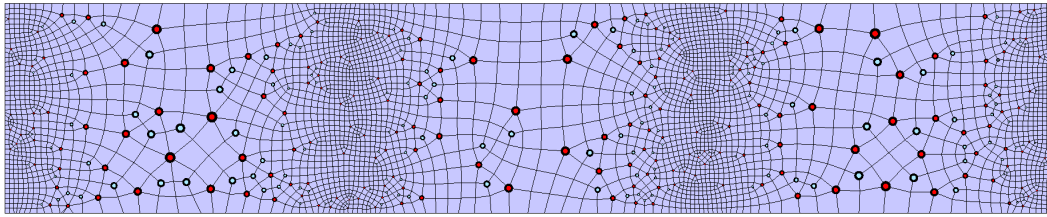
La figure 3.17 montre comment le maillage quadrangulaire final respecte à la fois la taille et l'orientation sur une carte géographique. Le champ de croix initial correspond à la plus grande fonction 1-Lipschitz contrainte à satisfaire la taille locale caractéristique estimée sur le bord du domaine initial [3]. Le champ de croix est calculé comme le champ le plus lisse à partir de contraintes tangentielles sur le bord du domaine initial. La distribution des angles est montrée (voir figure 3.17(e)), avec 80% d'angles dans l'intervalle $[75 - 105]$. Le temps de calcul est de 150 secondes, dont le tiers est consacré aux paramétrisations locales. Le pic de mémoire atteint est de 200 Mo.

La figure 3.16 décrit un exemple avec un champ de croix constant associé à un champ de taille qui varie rapidement. Inévitablement, des sommets irréguliers apparaissent à la jonction entre des zones de maillage fin et grossier, et nous observons une distorsion (partielle) sur l'orientation. La figure 3.20 montre un exemple de domaine trivial avec un champ de croix constant, où sont comparés champs de taille uniforme et non-uniforme. La figure 3.19 décrit des exemples pour un champ de taille uniforme et des champs de croix variables calculés pour être le plus lisse possible tout en respectant des contraintes tangentielles sur le bord du domaine.

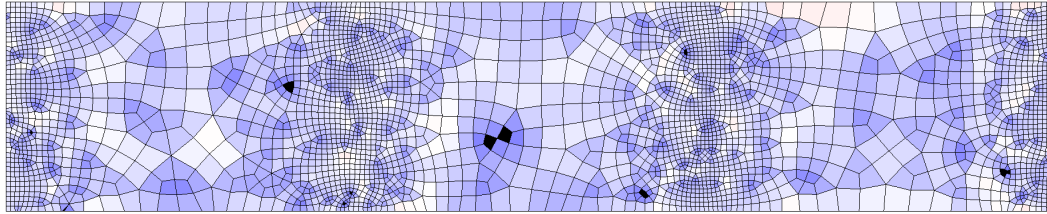
La figure 3.21 compare nos résultats avec Bommes *et al.* [11] en utilisant un champ de taille constant puisque cette méthode ne permet pas de traiter le cas de champs de taille variables. Notre approche préserve mieux l'orientation proche du bord du domaine, au prix d'un plus grand nombre de sommets irréguliers.

Nous ne pouvons contrôler directement le nombre de sommets dans le maillage final puisqu'il dépend à la fois du champ de taille initial et du nombre de sous-domaines de degré 4 après l'étape des paramétrisations locales (expérimentalement, environ 70%).

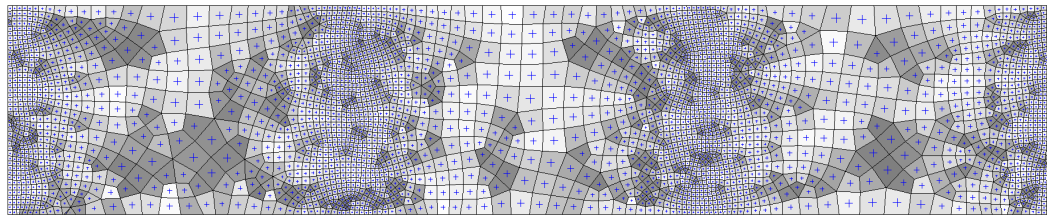
L'efficacité de notre algorithme peut être améliorée en accélérant l'étape de relaxation [73] et par des optimisations numériques pendant l'étape des paramétrisations locales.



(a) Maillage final et sommets irréguliers.



(b) Concordance avec le champ de taille.



(c) Concordance avec le champ de croix.

FIGURE 3.16 – Champ de taille non-uniforme défini par $h(x) = 0.01 \left(2 + \sin \left(6x\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right)$, $0 < x < 1$. Temps total : 120 s.

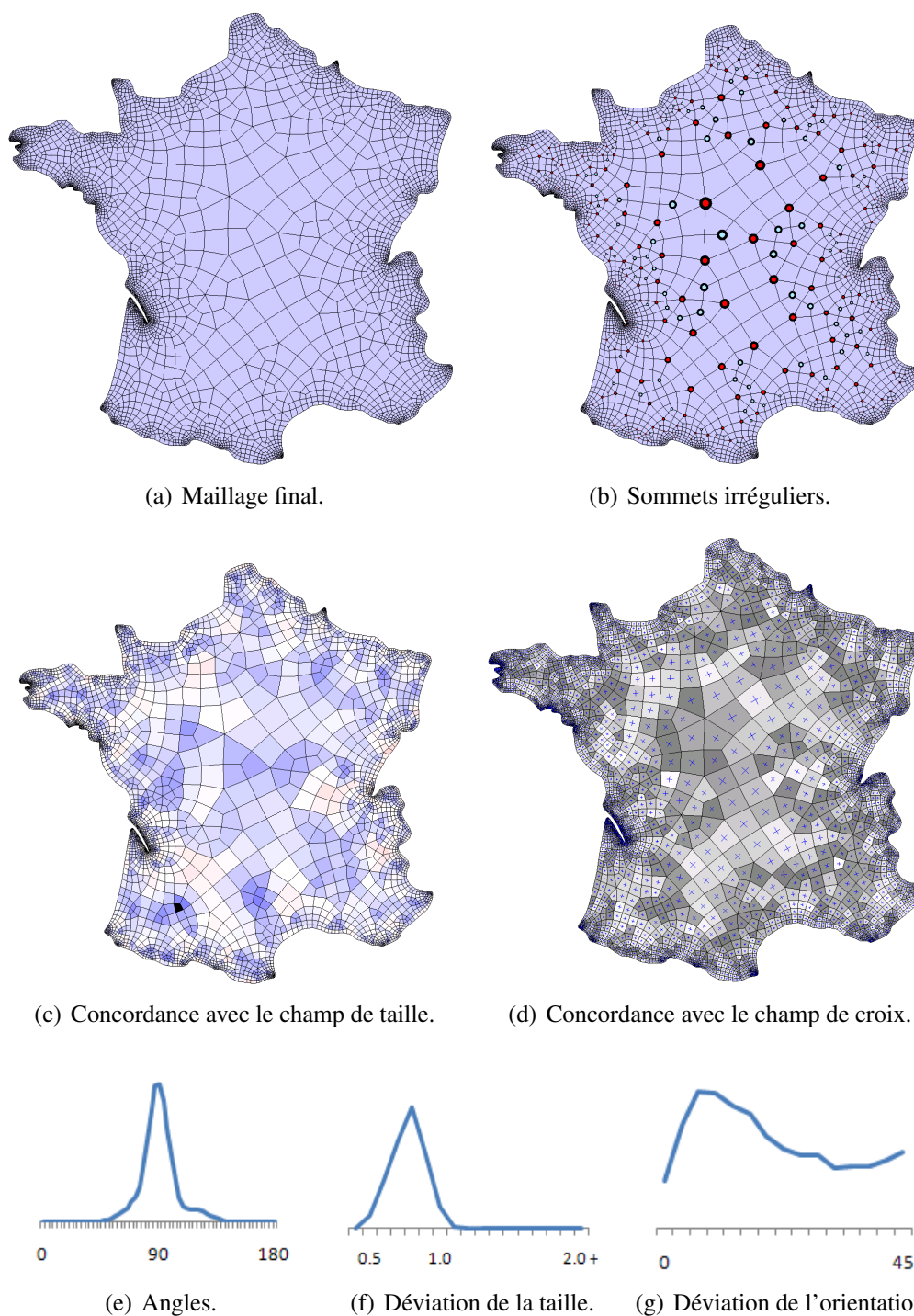


FIGURE 3.17 – France. Le maillage final (a) contient 77% de sommets réguliers (b). Il respecte aussi bien le champ de taille (c) que le champ de croix (d), les distributions (e), (f), (g) quantifient la déviation entre la taille (respectivement l'orientation) réelle et la taille (respectivement l'orientation) désirée. 4500 quadrangles, temps total : 150 s.

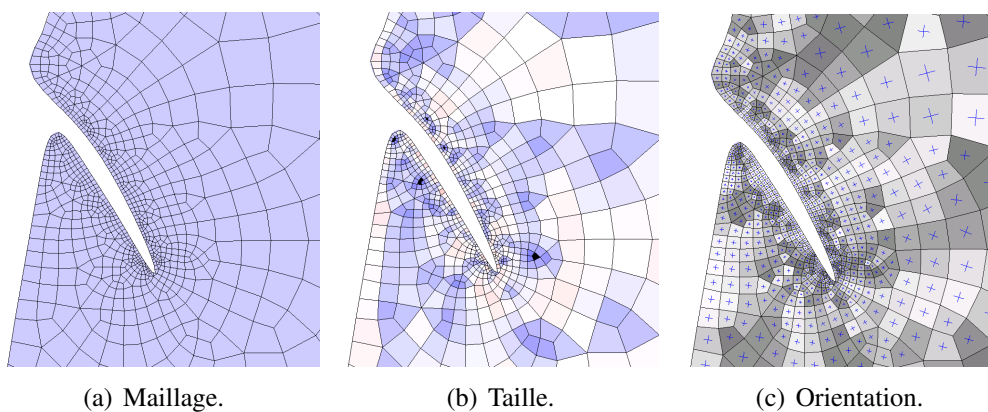
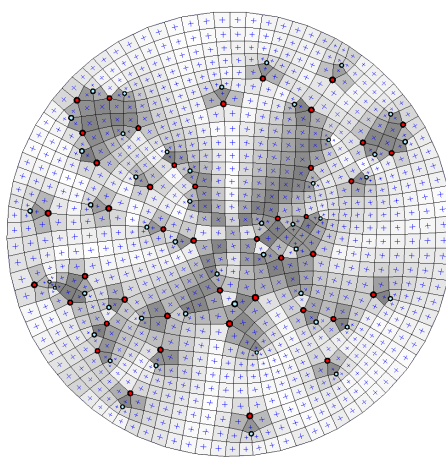
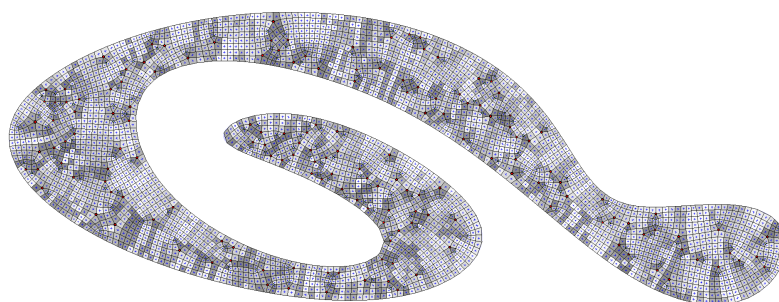


FIGURE 3.18 – Gironde. Cette partie du maillage de la France (voir figure 3.17) respecte à la fois le champ de taille et le champ de croix.

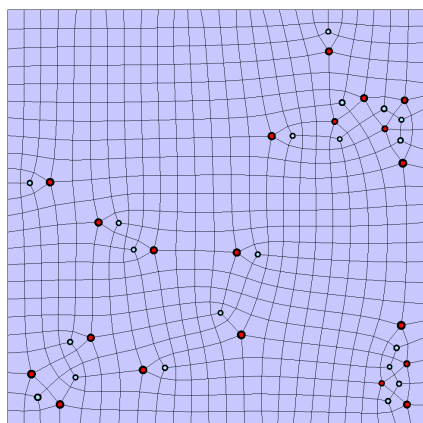


(a) Disque.

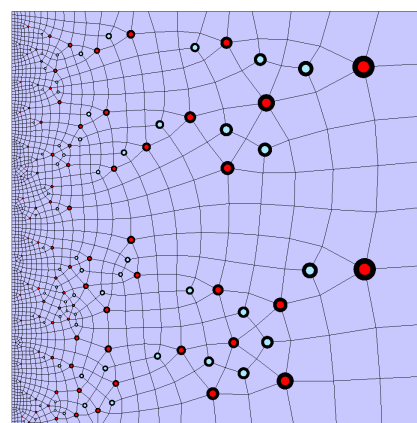


(b) Forme libre.

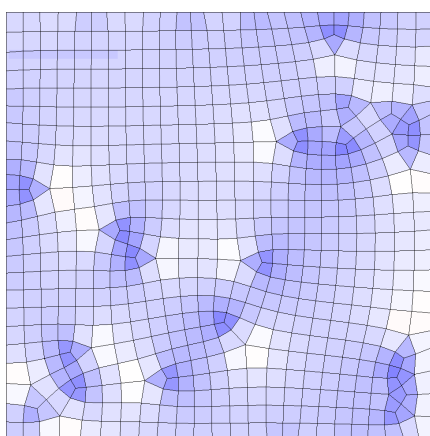
FIGURE 3.19 – Champ de taille uniforme et champ de croix non-uniforme. Temps total : 250 s. et 80 s.



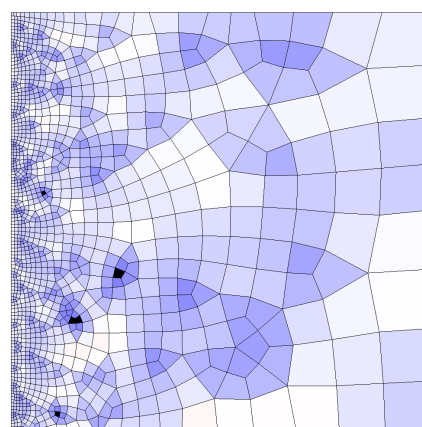
(a) Champ de taille uniforme.



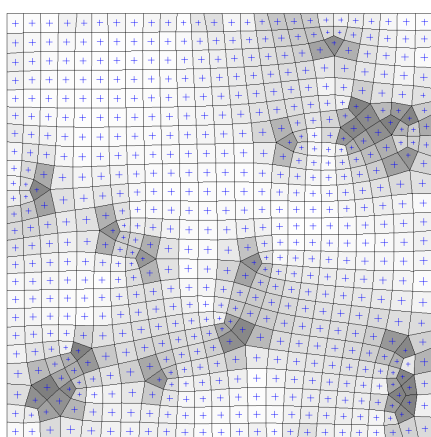
(b) Champ de taille non-uniforme.



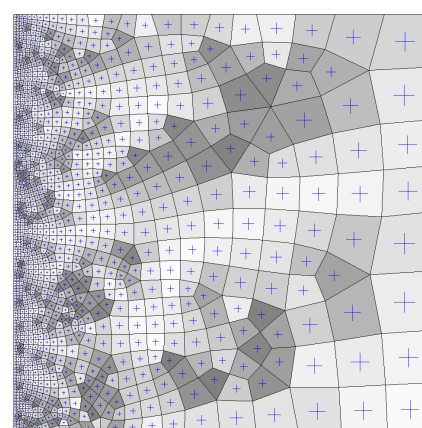
(c) Taille (uniforme).



(d) Taille (non-uniforme).

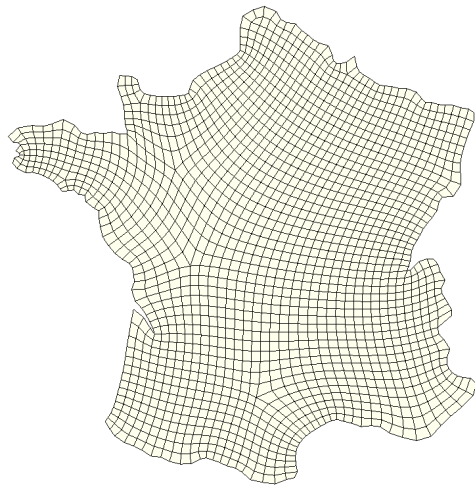


(e) Orientation (uniforme).

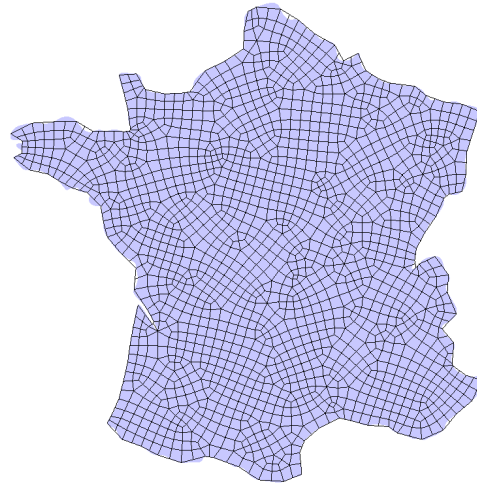


(f) Orientation (non-uniforme).

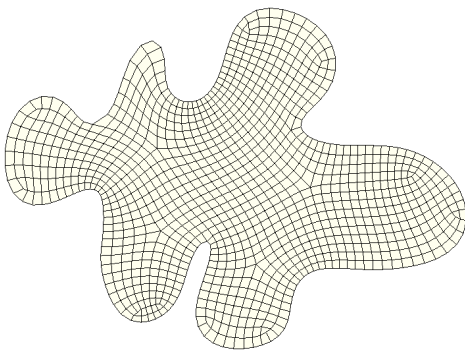
FIGURE 3.20 – Champ de taille uniforme (gauche) et non-uniforme (droite). Le champ de croix est constant et aligné avec les axes. Temps total : 15 s et 30 s.



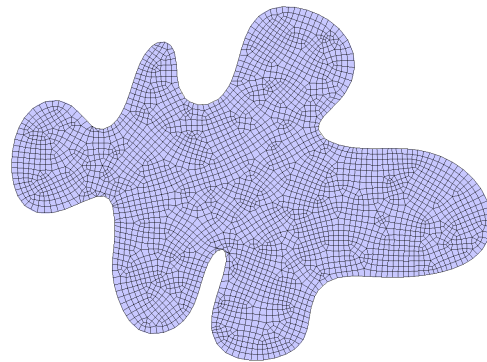
(a) France [11].



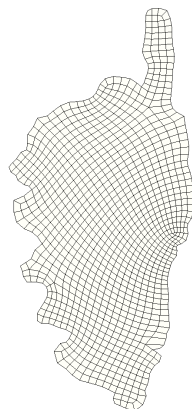
(b) France.



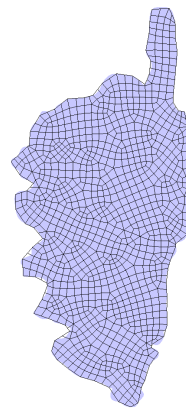
(c) Forme libre [11].



(d) Forme libre.



(e) Corse [11].



(f) Corse.

FIGURE 3.21 – Comparaison avec Bommes *et al.* [11]. Le champ de croix est tangentiel sur le bord du domaine initial. Les maillages produits par Bommes *et al.* [11] sont plus réguliers mais induisent une plus grande distorsion en forme.

3.4 Conclusion

Nous avons proposé une approche pour générer automatiquement des maillages quadrangulaires pour des domaines $2D$ arbitraires. La méthodologie consiste à appliquer une succession d'étapes afin d'améliorer une partition pour un critère (taille, forme, orientation, degré, régularité). L'ordre des étapes est choisi de telle sorte que la suivante ne pénalise pas ce que la précédente avait déjà satisfait.

Alors que les autres approches similaires (tel que Shimada *et al.* [65]) ne montrent que des exemples sur des domaines simples et avec des champs de croix lisses, nos expérimentations confirment que les maillages quadrangulaires construits respectent à la fois le champ de taille et le champ de croix donnés, même sur des domaines complexes avec des champs variant rapidement.

Respecter à la fois la taille et l'orientation induit un grand nombre de sommets irréguliers. Pour les applications nécessitant des complexes de base grossiers, nous pourrions éventuellement améliorer notre approche en autorisant l'utilisateur à adapter le compromis entre la concordance aux champs en entrée (de taille et de croix) et la régularité.

Nous souhaitons améliorer d'une part l'étape de relaxation conforme en adoptant une stratégie quand l'actuelle échoue, et d'autre part l'étape des paramétrisations locales en la rendant plus générale afin d'éliminer plus de sommets irréguliers.

Notre approche est principalement basée sur de la relaxation et des paramétrisations locales. Puisque les principales étapes de notre algorithme consistent seulement à trouver une partition d'un maillage triangulaire support, notre implantation est simple, fiable, et robuste.

La plupart des étapes de notre algorithme semblent aussi pouvoir se généraliser au cas des maillages hexaédriques, exceptée l'étape de subdivision barycentrique. Comme travail futur, nous envisageons d'étendre les principaux principes de notre approche au cas des maillages hexaédriques.

Métrieque anisotrope

Le but de ce chapitre est de définir une *métrieque anisotrope rectangulaire* sur une 2-triangulation dans $\mathbb{R}^3$. Elle est définie en chaque face de la triangulation. Elle dépend d'un paramètre $\varepsilon > 0$ (*erreur de tolérance sur les normales*) spécifié par l'utilisateur. Cette métrieque est un outil qui permet, lors d'un remaillage, de favoriser des polygones anisotropes rectangulaires. Ce dernier point sera précisé dans le chapitre 5.

Sommaire

4.1	Introduction	65
4.1.1	Etat de l'art	66
4.1.2	Contribution	68
4.2	Construction d'une métrieque anisotrope	68
4.2.1	Déviati on entre deux faces	69
4.2.2	ε -région de tolérance associée à une face	69
4.2.3	Rectangle associé à un domaine $B_{2,1}(f, \varepsilon)$	70
4.2.4	Distance sur chaque $B_{2,1}(f, \varepsilon)$	70
4.3	Conclusion	78

4.1 Introduction

Certaines méthodes de remaillage [47, 2, 50] utilisent une métrieque sur une surface triangulée initiale pour guider la génération des nouveaux éléments. D'autres méthodes [23, 14, 35, 34] de remaillage sont guidées par une "erreur de tolérance" qui s'exprime en termes de déviation des normales des faces.

Notre positionnement se situe à l'interface de ces deux types de méthodes : celles dites "guidées erreur" et celles dites "guidées métrieque". Plus précisément, l'algorithme de remaillage présenté au chapitre 5 est guidé par une métrieque, elle-même guidée par une erreur de tolérance.

Une métrique sur une surface lisse $\mathcal{S}$ est généralement définie en chaque point m de cette surface par la donnée d'une forme bilinéaire symétrique définie positive

$$s_m : T_m\mathcal{S} \times T_m\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

($T_m\mathcal{S}$ désigne ici le plan tangent à $\mathcal{S}$ en m), ou, ce qui est équivalent, par la donnée en chaque point m , de l'ellipse

$$\mathcal{E}_m = \{z \in T_m\mathcal{S} : s_m(z, m) = 1\} \subset T_m\mathcal{S}.$$

Par un procédé classique, cette métrique permet ensuite de définir la distance entre deux points quelconque de $\mathcal{S}$. Notre approche s'inspire de cette construction.

- Nous associons à chaque face f un domaine $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ dépendant d'un paramètre ε fixé a priori.
- Puis, nous construisons un rectangle $R(f, \varepsilon)$ (et non une ellipse) "au dessus de f " (plus précisément, dans un plan orthogonal à une normale moyenne calculée sur $B_{2,1}(f, \varepsilon)$) qui nous permet de définir une distance $d_\infty^{M_{f,\varepsilon}}$ sur $B_{2,1}(f, \varepsilon)$, faisant ainsi de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ un espace métrique.

Ainsi, si cette construction s'inspire de la construction lisse, elle en diffère sur les points suivants :

- l'ellipse est remplacée par un rectangle ;
- la distance $d_\infty^{M_{f,\varepsilon}}$ n'est plus définie sur $\mathcal{S}$ toute entière mais sur le voisinage $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ de f .

Cette métrique est un outil qui permettra de générer des polygones à la fois "rectangulaires", et *proche* de la surface triangulée. Le mot *proche* doit être ici mis en résonance avec le paramètre $\varepsilon > 0$, que nous appellerons "erreur maximale de tolérance".

4.1.1 Etat de l'art

Les travaux de Mirebeau [53] justifient, du point de vue théorique, l'intérêt de générer des maillages anisotropes plutôt qu'isotropes. Ces travaux sont consacrés au problème de l'approximation de fonctions par des éléments finis polynomiaux par morceaux sur des triangulations, et sur des maillages plus généraux. Mirebeau s'intéresse à la situation où le maillage est construit en adaptation avec la fonction approchée, et peut donc comporter des éléments de taille, de rapport d'aspect et d'orientation fortement variables. Mirebeau a apporté des garanties théoriques à l'observation de l'amélioration apportée par ces méthodes adaptatives en comparaison avec les méthodes non-adaptatives ou adaptatives isotropes.

Guider la génération d'un maillage anisotrope par une métrique implique donc de considérer une métrique anisotrope. Un moyen répandu de représenter une métrique est sous la forme d'une ellipse : les directions des axes sont déduites d'un

paramètre d'angle θ , et les tailles dans chacune des deux directions du repère choisi sont représentées par deux nombres réels r_1 et r_2 (voir figure 4.1).

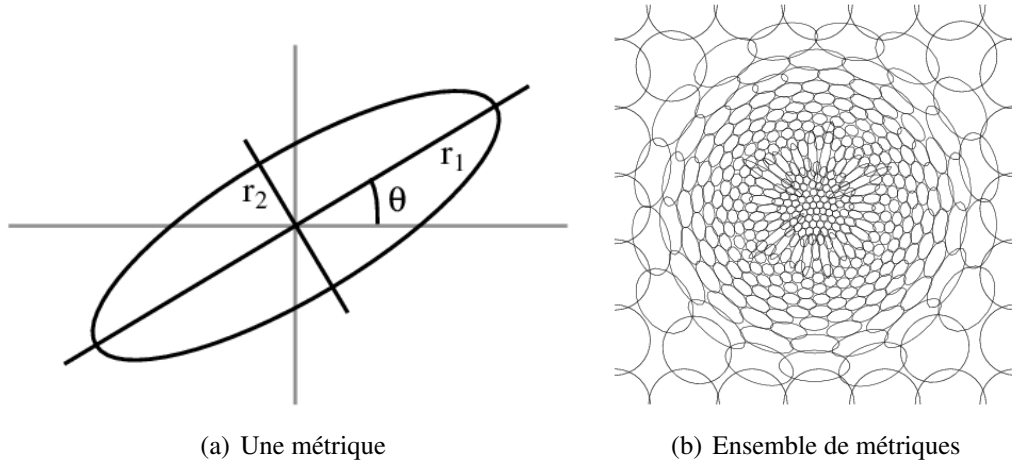


FIGURE 4.1 – Représentation de la métrique sous forme d'ellipses. L'angle θ correspond à l'angle entre le repère de $\mathbb{R}^2$ aligné avec les axes et le repère choisi, tandis que r_1 et r_2 sont les tailles dans les deux directions du repère choisi. (b) Ensemble de métriques pour un domaine donné (b). Images extraites de Bossen et Heckbert [13].

Un moyen répandu de calculer une métrique anisotrope est à base d'estimateurs de courbure [2, 59, 50]. Néanmoins, il existe deux inconvénients majeurs à ce type d'approches :

- premièrement, l'estimateur de courbure est dépendant du domaine : il dépend du voisinage autour d'un point et il ne prend pas en compte le fait que le domaine soit borné (voir figure 4.2) ;
- deuxièmement, l'estimateur de courbure ne prend pas en compte les arêtes vives, exceptées les méthodes de filtrage bilatéral [44].

En outre, le choix du voisinage dans l'estimateur de courbure n'est relié à aucun paramètre intuitif. Les estimateurs locaux de courbure peuvent conduire à des métriques incorrectes. Par exemple, une zone parabolique induit une dimension infinie dans la direction de la courbure principale nulle, alors que la surface initiale est évidemment bornée (voir figure 4.2). Ces approches nécessitent souvent de borner l'anisotropie de la métrique [50], typiquement avec un rapport d'aspect maximum de 5. De plus, les estimateurs locaux de tenseur de courbure ne sont pertinents que dans le cas de surfaces lisses, alors que les maillages anisotropes sont souvent utilisés pour générer des maillages simplifiés de surfaces lisses par morceaux où l'approximation est importante proche des arêtes vives.

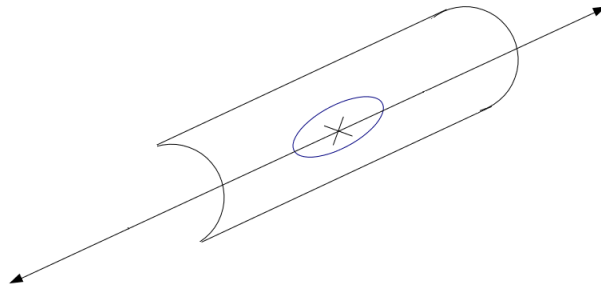


FIGURE 4.2 – Limite des estimateurs de courbure. Un estimateur de courbure sur le cylindre conduit à une taille infinie dans une direction, alors que le domaine est borné.

Un autre moyen de calculer une métrique anisotrope est de mesurer la déviation des normales au plan tangent [47] ou à plusieurs plans tangents, proche des arêtes vives [50], ce qui nécessite également de borner l'anisotropie, toujours d'un facteur maximum de 5 en terme de rapport d'aspect [47].

Nous proposons de calculer une métrique avec un rapport d'aspect non borné (contrairement à Myles *et al.* [54] et Lévy et Liu [50], voir figure 4.3).

4.1.2 Contribution

Étant donnée une surface triangulée S de $\mathbb{R}^3$, nous calculons une métrique anisotrope rectangulaire "au dessus de" chaque face de S . Cette métrique dépend d'un paramètre ε fixé par l'utilisateur, lié à une erreur maximale de tolérance sur les normales de S . Cette métrique

- est rectangulaire,
- autorise des rapports d'aspect arbitraires,
- n'est pas centrée sur chaque face.

C'est un outil qui permet, lors d'un remaillage de S , de favoriser des polygones rectangulaires et de préserver les arêtes vives.

4.2 Construction d'une métrique anisotrope

Soit S une 2-triangulation dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté. Soit $\varepsilon > 0$ une erreur de tolérance (on prendra $\varepsilon < 45^\circ$). On suppose S orientée, chaque face f de S est donc dotée d'un vecteur normal unitaire canonique $\vec{n}_f$, compatible avec l'orientation. Le but de ce paragraphe est de définir une métrique au voisinage de chaque face f de S . Cette définition utilise plusieurs ingrédients que nous précisons maintenant.

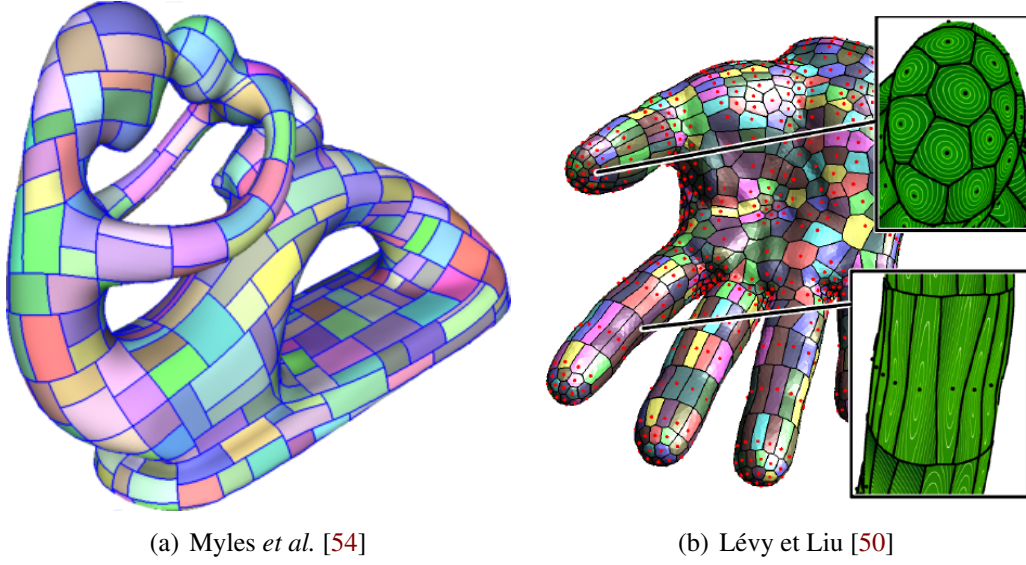


FIGURE 4.3 – Anisotropie bornée. Les algorithmes de remaillage proposé par Myles *et al.* [54] et Lévy et Liu [50] nécessitent, pour obtenir de bons résultats, de borner l'anisotropie de la métrique.

4.2.1 Déviation entre deux faces

Définition 14 La déviation entre deux faces f_1 et f_2 de $\mathcal{S}$ est l'angle $\widehat{(\vec{n}_{f_1}, \vec{n}_{f_2})}$ défini par leurs normales $\vec{n}_{f_1}$ et $\vec{n}_{f_2}$.

4.2.2 ε -région de tolérance associée à une face

Définition 15 L' ε -région de tolérance $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ d'une face f de $\mathcal{S}$ relative à une erreur de tolérance ε est la composante connexe de f de l'ensemble des faces de $\mathcal{S}$ dont la déviation à f est inférieure à ε :

$$B_{2,1}(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{S}, \widehat{(\vec{n}_g, \vec{n}_f)} \leq \varepsilon\}.$$

En introduisant la fonction

$$\begin{aligned} d_{2,1} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (p, q) &\longmapsto \widehat{(\vec{n}_q, \vec{n}_p)} \end{aligned}$$

on a :

$$B_{2,1}(f, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{S}, d_{2,1}(f, g) \leq \varepsilon\}.$$

Remarquons que $d_{2,1}$ n'est pas une distance sur $\mathcal{S}$. En effet, $d_{2,1}$ vérifie l'axiome de symétrie et l'inégalité triangulaire, mais ne vérifie pas l'axiome de séparation (voir section 2.1).

La figure 4.7 présente des exemples de régions de tolérance (en gris foncé) pour des formes canoniques et des pièces mécaniques. En général la région de tolérance n'est pas rectangulaire.

4.2.3 Rectangle associé à un domaine $B_{2,1}(f, \varepsilon)$

Soit f une face de $\mathcal{S}$, $c(f)$ son isobarycentre, $\vec{n}_f$ sa normale unitaire, $\varepsilon > 0$, et $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ l' ε - région de tolérance de f . Définissons

- $\vec{n}$ le vecteur normal moyen des faces qui appartiennent à $B_{2,1}(f, \varepsilon)$.
- $\vec{n}^\perp$ le plan (affine) orthogonal à $\vec{n}$ passant par $c(f)$.
- $\Pi_{\vec{n}^\perp} B_{2,1}(f, \varepsilon)$ la projection orthogonale de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ sur le plan $\vec{n}^\perp$.

Ces objets nous permettent de définir canoniquement un rectangle au dessus de chaque face f , dans le plan $\vec{n}^\perp$:

Définition 16 On appelle rectangle associé à la face f et à l'erreur de tolérance ε le plus grand rectangle $R_{f,\varepsilon}$ inscrit dans $\Pi_{\vec{n}^\perp}(B_{2,1}(f, \varepsilon))$ contenant $\Pi_{\vec{n}^\perp}(c(f))$.

- Remarquons que le rectangle $R_{f,\varepsilon}$ est parfaitement déterminé si l'on connaît
- la position de son centre $\Gamma(f)$ (qui peut très bien se trouver en dehors de f)
ou, ce qui revient au même, le vecteur de translation $\overrightarrow{c(f)\Gamma(f)}$,
 - et deux vecteurs orthogonaux parallèles à ses côtés $\vec{u}_f$ et $\vec{v}_f$.

Notons que $(\vec{u}_f \wedge \vec{v}_f, \vec{n}_f) \leq \varepsilon$. Chaque face g de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ vérifiant $(\vec{n}_g, \vec{n}_f) \leq \varepsilon$, $\vec{n}$ vérifie $(\vec{n}, \vec{n}_f) \leq \varepsilon$. Puisque $\vec{u}_f$ et $\vec{v}_f$ sont deux vecteurs directeurs du plan $\vec{n}^\perp$, l'inégalité $(\vec{u}_f \wedge \vec{v}_f, \vec{n}_f) \leq \varepsilon$ est bien vérifiée.

Notons aussi que le plus grand rectangle existe nécessairement, qu'il possède au moins un point qui touche le bord de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$. En revanche, il n'y a pas unicité.

4.2.4 Distance sur chaque $B_{2,1}(f, \varepsilon)$

La construction précédente permet de définir une *distance* sur chaque domaine $B_{2,1}(f, \varepsilon)$. En effet, montrons le résultat suivant :

Lemme 6 Soit f une face d'une surface triangulée $\mathcal{S}$. Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. L'application

$$\begin{aligned} d_\infty^{M_{f,\varepsilon}} : B_{2,1}(f, \varepsilon) \times B_{2,1}(f, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (p, q) &\longmapsto \max \left\{ \frac{|\vec{pq} \cdot \vec{u}_f|}{\|\vec{u}_f\|^2}, \frac{|\vec{pq} \cdot \vec{v}_f|}{\|\vec{v}_f\|^2} \right\}. \end{aligned}$$

est une distance sur $B_{2,1}(f, \varepsilon)$.

Démonstration La seule difficulté est de montrer que l'axiome de séparation est satisfait : soient p, q deux points de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ tels que $d_{\infty}^{M_{f,\varepsilon}}(p, q) = 0$. Alors $\vec{pq} \cdot \vec{u}_f = 0$ et $\vec{pq} \cdot \vec{v}_f = 0$. Donc, soit $\vec{pq} = \vec{0}$ (i.e $p = q$), soit $\vec{pq}$ est parallèle à $\vec{u}_f \wedge \vec{v}_f$. Le deuxième cas est exclu puisque comme, ε est inférieur à 45 degrés, l'angle maximal entre $\vec{pq}$ et le plan moyen de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ est inférieur à 90 degrés.

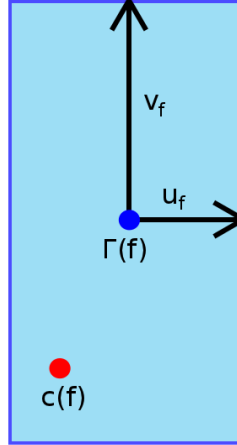


FIGURE 4.4 – Rectangle associé à la métrique d'une face f . La face f est représentée par le point $c(f)$. La métrique n'est pas centrée en $c(f)$. Le vecteur de translation de la métrique est le vecteur d'origine $c(f)$ et d'extrémité $\Gamma(f)$.

L'algorithme 3 suivant présente la construction du rectangle $R_{f,\varepsilon}$ associée à une face f relativement à une erreur de tolérance ε .

- La première étape consiste à calculer $B_{2,1}(f, \varepsilon)$: l' ε -région de tolérance de f relative à l'erreur de tolérance ε .
- La deuxième étape consiste à calculer le vecteur normal moyen $\vec{n}$ des faces qui appartiennent à $B_{2,1}(f, \varepsilon)$.
- La troisième étape consiste à construire le plan (affine) $\vec{n}^\perp$ orthogonal à $\vec{n}$ passant par $c(f)$.
- La quatrième étape consiste à projeter orthogonalement $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ sur le plan $\vec{n}^\perp$.
- Enfin, la cinquième et dernière étape consiste à calculer le plus grand (au sens de l'aire) rectangle $R_{f,\varepsilon}$ inscrit dans $\Pi_{\vec{n}^\perp}(B_{2,1}(f, \varepsilon))$ contenant $\Pi_{\vec{n}^\perp}(c(f))$.

Lors de cette dernière étape, nous utilisons un algorithme existant qui calcule, en dimension 2, le plus grand rectangle vérifiant les propriétés suivantes :

- ses côtés sont alignés avec les axes de $\mathbb{R}^2$;

- il est inclus dans un carré englobant (dont les côtés sont alignés avec les axes de $\mathbb{R}^2$);
- il qui ne contient aucun élément d'un ensemble de points donnés à priori.

Nous avons d'abord modifié cet algorithme pour que le plus grand rectangle cherché contienne un point donné. Nous appliquons ensuite l'algorithme de la manière suivante. Les points à éviter correspondent aux sommets du bord de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$. Plus précisément, ce sont les projections de ces points sur le plan $\vec{n}^\perp$, ramenés dans $\mathbb{R}^2$. Le rectangle calculé est ensuite ramené dans $\mathbb{R}^3$ par la transformation inverse. Remarquons que cet algorithme calcule un rectangle dont les côtés sont alignés avec les axes. Pour éviter cette restriction, nous échantillonnons uniformément l'espace des directions dans l'intervalle $[0, 45^\circ]$. Le rectangle choisi est alors le plus grand parmi l'ensemble des rectangle calculés pour chaque direction. La figure 4.5 illustre le plus grand rectangle (bleu) inscrit dans la région de tolérance (gris) contenant la face sélectionnée (rouge).

Algorithme 3 : Rectangle associé à une face et à une erreur de tolérance

Données :

- S : 2-triangulation de $\mathbb{R}^3$;
- Face f de S ;
- Erreur de tolérance ε .

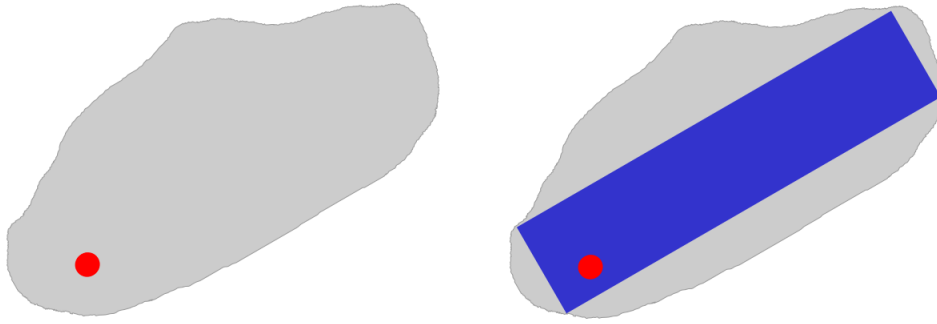
début

1. Calcul de l' ε -région de tolérance $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ de f ;
2. Calcul du vecteur normal moyen $\vec{n}$ de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$;
3. Calcul du 2-plan (affine) $\vec{n}^\perp$ orthogonal à $\vec{n}$ passant par le centre de f ($c(f)$) ;
4. Calcul de la projection orthogonale $\Pi_{\vec{n}^\perp}(B_{2,1}(f, \varepsilon))$ de $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ sur $\vec{n}^\perp$;
5. Calcul du plus grand rectangle $R_{f,\varepsilon}$ inscrit dans $\Pi_{\vec{n}^\perp}(B_{2,1}(f, \varepsilon))$ contenant $\Pi_{\vec{n}^\perp}(c(f))$.

Résultat : Rectangle $R_{f,\varepsilon}$

La figure 4.6 décrit les principales étapes de l'algorithme de calcul d'une métrique anisotrope rectangulaire pour une face d'un modèle non-trivial : fertility. Pour une face donnée (voir figure 4.6 (a)), l' ε -région de tolérance $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ est calculée (voir figure 4.6 (b)), puis, modulo une projection (décrite dans l'algorithme 3), le plus grand rectangle inscrit dans $B_{2,1}(f, \varepsilon)$ contenant $c(f)$ est calculé.

La figure 4.7 décrit la métrique anisotrope rectangulaire évaluée pour une seule face pour des formes lisses et des formes lisses par morceaux. Même si l' ε -région



(a) Projection en 2D de la région de tolérance (b) Plus grand rectangle inscrit contenant le point de requête.

FIGURE 4.5 – Plus grand rectangle inscrit dans une forme libre contenant un point de requête. Étant donné la projection 2D de la région de tolérance et du point de requête. Notre extension de l'algorithme de Orlowski [69] permet d'obtenir un rectangle qui contient nécessairement le point de requête et dont les côtés ne sont pas nécessairement alignés avec les axes de $\mathbb{R}^2$.

de tolérance est de forme quelconque, notre algorithme de calcul de la métrique (ou plus précisément le calcul du rectangle qui engendre la métrique, comme décrit dans la définition 16) est capable d'extraire un rectangle strictement à l'intérieur de cette région de tolérance contenant la face donnée.

La figure 4.8 décrit l'ensemble des vecteurs de translation pour toutes les faces de $\mathcal{S}$. Notons que sur les six faces d'un parallélépipède, tous les vecteurs de translation pointent vers le centre de la face, ce qui est intrinsèquement redondant. Nous expliquerons comment notre procédure d'optimisation gloutonne tire avantage de cette redondance pour sélectionner le meilleur générateur parmi le grand nombre de degrés de liberté qu'offre cette redondance. Notons aussi que proche des arêtes vives, la métrique anisotrope centrée usuelle décrite par une ellipse ou par un rectangle centré sur la face ne préserve pas l'arête vive.

La figure 4.9 décrit la métrique anisotrope rectangulaire évaluée en quelques faces du modèle hippo. La métrique peut être localement redondante (si plusieurs vecteurs de translation pointent vers la même zone), et conflictuelle à la fois en taille et en orientation.

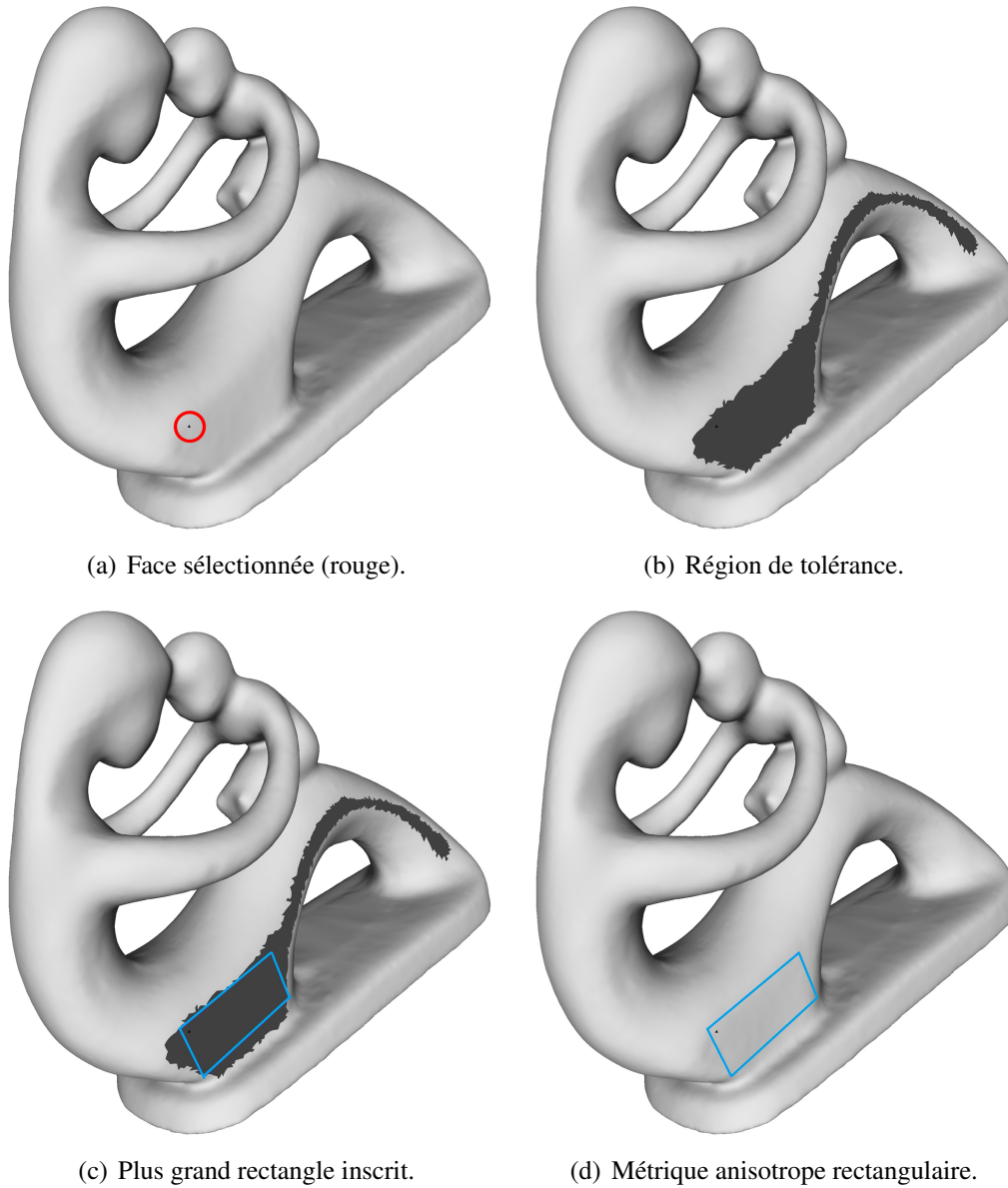


FIGURE 4.6 – Principales étapes de l'algorithme de calcul de la métrique anisotrope rectangulaire d'une face f en rouge (a). La région de tolérance de f (gris foncé) est l'ensemble des faces dont la déviation de la normale par rapport à f est inférieure ou égale à 15 degrés (b). La métrique de f (d) est calculée à partir du plus grand rectangle (bleu) inscrit dans la région de tolérance contenant f (c).

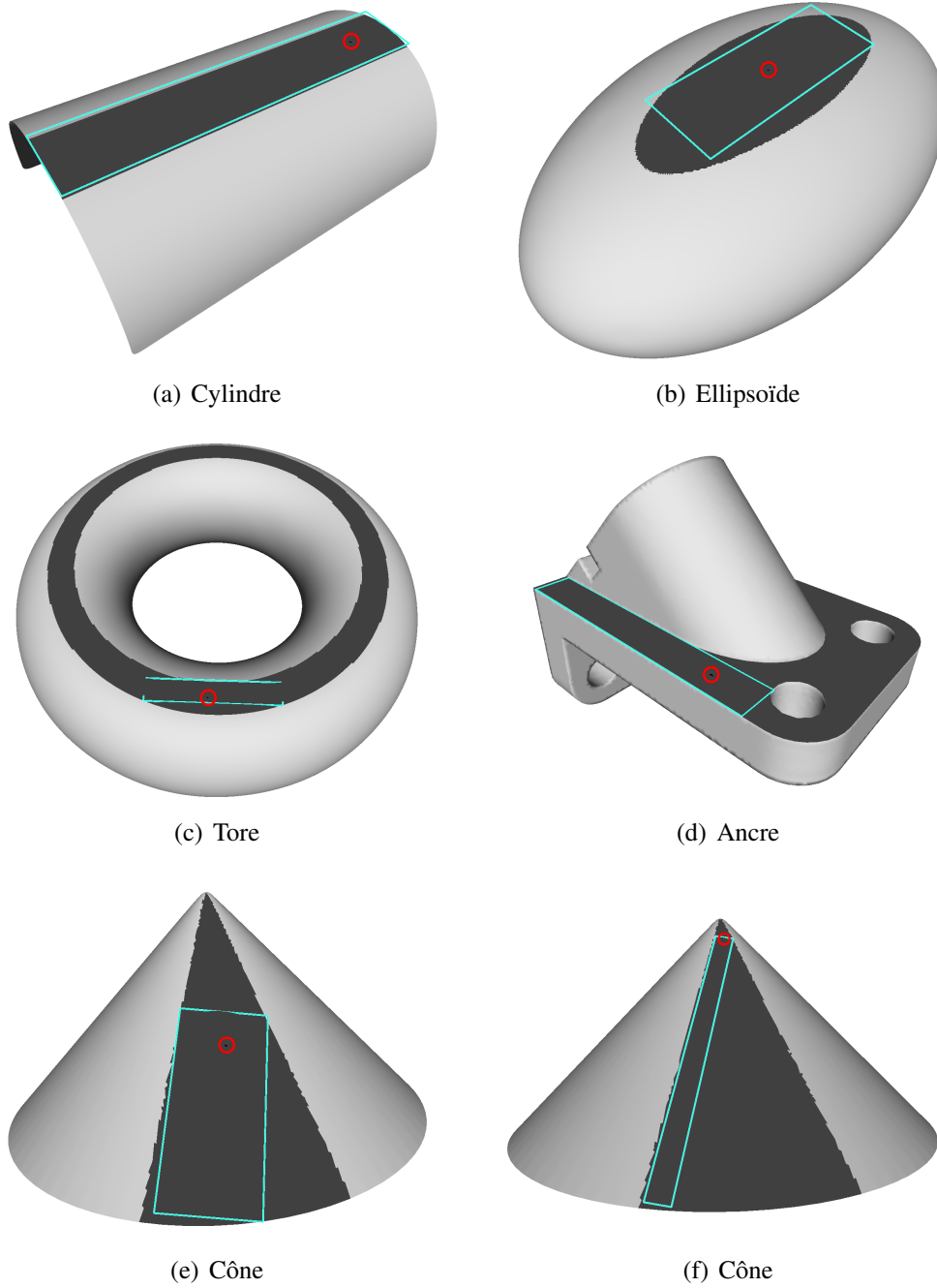


FIGURE 4.7 – Exemples de métriques. Pour une face entourée en rouge, sa région de tolérance est montrée en gris foncé, et sa métrique est représentée par un rectangle bleu.

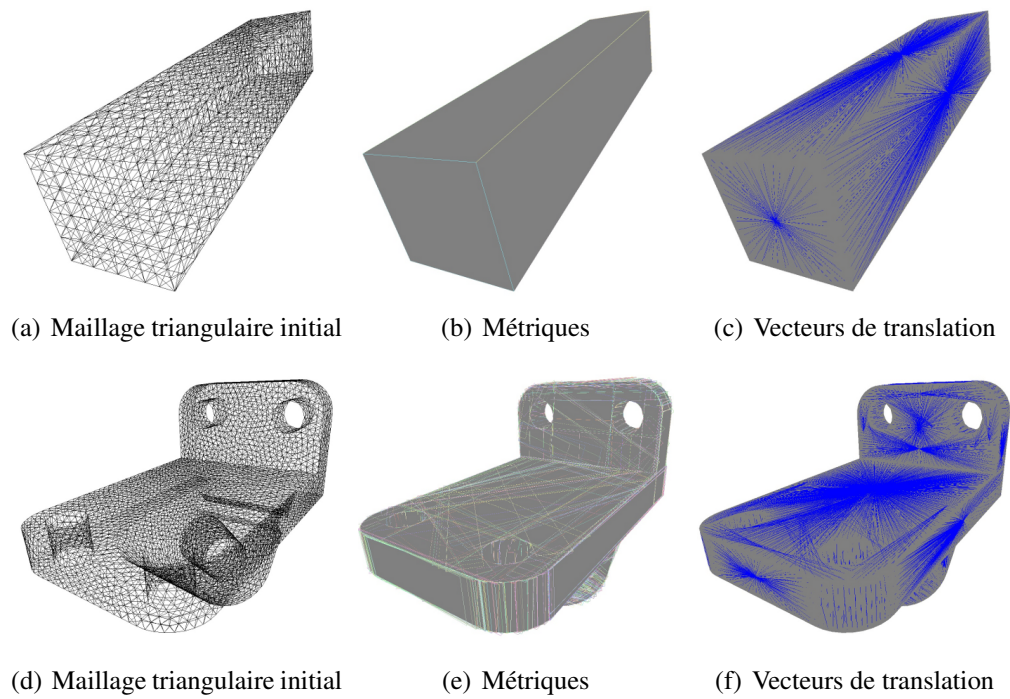
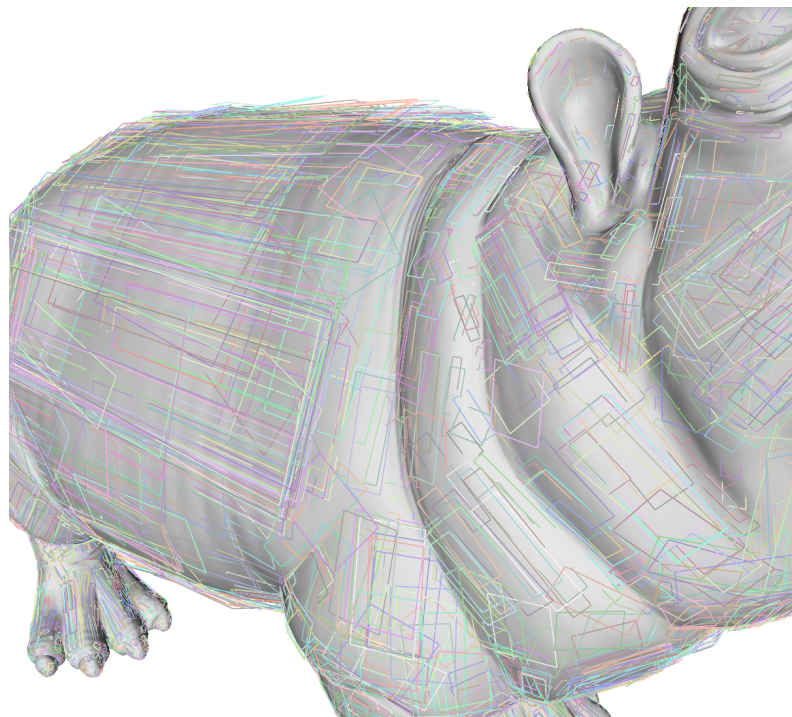


FIGURE 4.8 – Pour chaque maillage en entrée (gauche), nous montrons quelques métriques (milieu) et nous traçons tous les vecteurs de translations entre une face et le centre de sa métrique associée (droite).



(a) Hippo



(b) Zoom

FIGURE 4.9 – Métrique montrée pour 3% des faces pour plus de visibilité.

4.3 Conclusion

Nous avons calculé une métrique anisotrope rectangulaire "au dessus de" chaque face de S qui dépend d'un paramètre ε fixé par l'utilisateur, lié à une erreur maximale de tolérance sur les normales de S . Cette métrique est rectangulaire, autorise des rapports d'aspect arbitraires, n'est pas centrée sur chaque face. Elle est calculée, en chaque face f , à partir d'un plus grand rectangle inscrit dans une région autour de f qui de ε . Cette métrique est un outil qui permet, lors d'un remaillage de S , de favoriser des polygones rectangulaires et de préserver les arêtes vives.

Dans un travail futur, nous souhaitons analyser le champ de vecteurs de translation de la métrique pour en produire une version consolidée. Nous souhaitons aussi généraliser notre approche en remplaçant les rectangles par des triangles et des ellipses. Nous souhaitons également trouver un moyen de modifier la métrique, par exemple par quantification. Nous détaillerons dans la conclusion générale nos motivations relatives à ces extensions.

Maillages anisotropes de surfaces

Nous proposons une nouvelle méthode de remaillage polygonal anisotrope de surface. Les données de notre algorithme sont : i) une surface triangulée ; ii) une erreur de tolérance ε ; iii) une métrique anisotrope rectangulaire en chaque face, calculée en fonction de la tolérance ε (voir chapitre 4). Notre algorithme utilise une procédure d'optimisation gloutonne qui ajoute, supprime et relocalise des générateurs afin de satisfaire deux critères reliés à la partition et à la conformité. Un générateur est une face qui induit un sous-domaine à travers sa métrique anisotrope rectangulaire associée (voir figure 5.1).

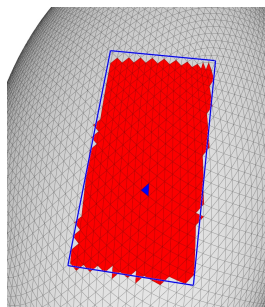


FIGURE 5.1 – Générateur : face (noir) qui induit, avec sa métrique anisotrope rectangulaire associée (bleu), un sous-domaine de la décomposition (rouge).

Sommaire

5.1	Introduction	80
5.1.1	Etat de l'art	81
5.1.2	Positionnement et contribution	83
5.2	Algorithme	84
5.3	Décomposition	86
5.4	Maillage	91
5.5	Résultats	95
5.6	Conclusion	102

5.1 Introduction

Les maillages polygonaux de surface sont préférés aux maillages triangulaires dans un grand nombre d'applications reliées à la modélisation géométrique et à la rétro-ingénierie. Parmi ceux-là, les maillages anisotropes sont préférés aux maillages isotropes lorsque nous recherchons une bonne approximation de la surface avec un petit nombre d'éléments. Inspirée par les maillages avec jonctions en T [54], la motivation initiale de notre travail est une extension de la méthode d'approximation variationnelle de Cohen-Steiner *et al.* [23] pour générer des polygones rectangulaires.

Notre but est de générer des maillages avec un bon compromis complexité-distorsion. Lorsque la distorsion est mesurée à l'aide de l'interpolation de fonctions sur les éléments, l'élément optimal est le plus grand (au sens de l'aire) pour une tolérance fixée [26, 66]. À erreur d'interpolation fixée, pour maximiser l'aire, les côtés des quadrangles sont soit alignés soit pivotés selon le cas parabolique ou hyperbolique [26].

La complexité d'un maillage est décrite par sa longueur de description minimale [38].

Problème. Soit une surface initiale S donnée par un maillage triangulaire de surface qui approche une surface lisse par morceaux, avec ou sans bord(s). Notre but est de générer un maillage polygonal où les éléments i) sont rectangulaires, ii) sont de taille et d'orientation en concordance à une erreur de tolérance spécifiée par l'utilisateur et exprimée en une déviation locale maximale des normales à S , et iii) partitionnent S en favorisant les configurations conformes où c'est possible, c'est-à-dire idéalement sans jonction en T. De plus, nous souhaitons minimiser le nombre de polygones pour une tolérance donnée. Ce but est équivalent à maximiser l'aire des polygones.

Alors que la stricte concordance locale à la fois au champ de taille et au champ de courbure est déjà notoirement reconnu comme délicat dans le cas isotrope, chercher à générer des polygones anisotropes rectangulaires avec des rapports d'aspect arbitraires ajoutent d'autres défis afin de garantir une partition sans chevauchement ni orphelin et de favoriser la conformité pour éviter les jonctions en T [54].

Une formulation commune du problème de remaillage de surface est de vouloir décomposer la surface initiale avec des éléments qui i) partitionnent la surface (sans chevauchement ni orphelin), ii) se rencontrent aux arêtes, iii) sont bien formés et iv) approchent bien la surface. Pour des applications spécifiques, des critères supplémentaires doivent aussi être pris en compte : la régularité, la simplicité de la structure du domaine [9, 68] et plus récemment la préservation du

style de remaillage [71].

Critères. Alors que les critères listés ci-dessus sont maintenant relativement bien compris pour mailler des surfaces lisses avec des maillages de surfaces triangulaires isotropes, le remaillage des surfaces lisses par morceaux avec des polygones anisotropes s'avère nettement plus compliqué en raison des critères plus complexes qui peuvent interagir et entrer en conflit.

Nous passons maintenant en revue chacun de ces critères :

- Partition : décomposer le domaine en sous-domaines sans chevauchement ni orphelin. Dans notre contexte, chaque triangle de $\mathcal{S}$ doit être couvert une seule fois.
- Conformité (rencontre aux arêtes) : ce critère traduit la volonté d'éviter les jonctions en T où c'est possible. Ce critère entre en conflit avec une métrique qui évolue (voir figure 1.3).
- Bien formés : dans notre contexte, nous souhaitons générer une majorité de polygones rectangulaires. Notons que des critères de forme plus simples incluent la topologie du disque (ce dernier n'étant d'ailleurs pas garanti pour des partitions anisotropes [48, 7, 18]) et la convexité.
- Approche bien : dans notre contexte, nous souhaitons bien approcher les normales à la surface initiale $\mathcal{S}$. Ceci se traduit par le contrôle sur l'orientation et sur la taille. Puisque nous souhaitons aussi approcher des surfaces lisses par morceaux, ceci nécessite le contrôle sur l'alignement, qui n'est pas invariant par translation contrairement à l'orientation [49]. En effet, l'alignement n'a de sens que proche des arêtes vives alors que l'orientation peut être définie partout. Le critère d'approximation, conjugué au critère d'éléments bien formés (rectangulaires), conduit à générer des sous-domaines en concordance avec une métrique anisotrope rectangulaire locale.

5.1.1 Etat de l'art

Nous présentons maintenant un état de l'art sur les maillages anisotropes de surfaces, complémentaire à celui de la section 1.3.

Citons d'abord une méthode de conditionnement rectangle qui permet de générer des maillages anisotropes de domaines de $\mathbb{R}^2$. La méthodologie proposée par Viswanath *et al.* [75] permet d'obtenir des éléments rectangulaires en accord avec un champ de croix, un champ de taille et un champ d'anisotropie donnés (voir figure 5.2).

Remaillage. Pour le remaillage quadrangle, beaucoup d'efforts ont été réalisés pour contrôler l'alignement et l'orientation des arêtes aux directions saillantes (sou-

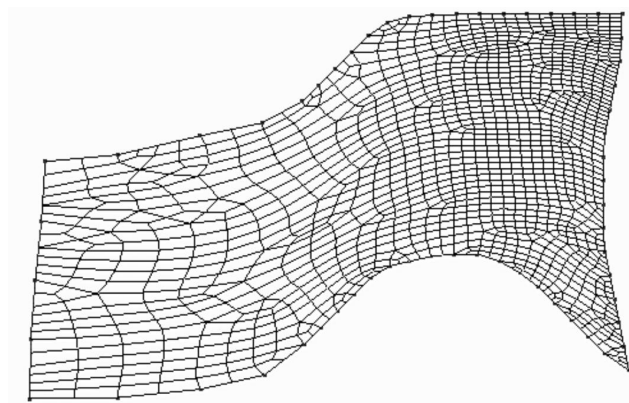


FIGURE 5.2 – Viswanath *et al.* [75]. Les éléments générés sont rectangulaires, et en accord avec un champ de croix, un champ de taille et un champ d'anisotropie donnés. Image extraite de Viswanath *et al.* [75].

vent dérivées d'estimateurs de courbure) et les aligner sur les arêtes vives ou sur les bords [40, 11]. Ces approches construisent des maillages qui sont pour la plupart réguliers, par construction conformes et qui partitionnent, mais la taille locale est difficile à contrôler, et l'anisotropie n'est souvent pas atteinte. De récents progrès ont été réalisés avec les méthodes de décimation [41, 67], mais les maillages générés sont encore le plus souvent isotropes.

Un autre moyen de garantir la partition par construction consiste à construire un diagramme de Voronoï via une relaxation avec des métriques anisotropes L_2 [30] ou L_∞ [50]. La conformité n'est cependant pas optimisée en utilisant l'itération de Lloyd puisque l'énergie optimisée n'est pas reliée à la conformité. De plus, l'anisotropie est en général limitée à des petits rapports d'aspect ou à des métriques qui varient de manière lisse afin d'éviter les défauts de partition [18]. Un autre inconvénient de ces méthodes de relaxation est que le contrôle de la taille est seulement relatif, si bien que la taille des cellules optimisée n'est pas en stricte concordance avec la métrique initiale mais seulement proportionnelle. Ceci nécessite une attention particulière pour le processus de relaxation en choisissant le bon nombre de générateurs. La figure 5.3 illustre un cas problématique pour lequel les métriques en conflit ne sont pas respectées en absolu. Une autre méthode de relaxation est la méthode d'approximation variationnelle de Cohen-Steiner *et al.* [23]. En étant seulement guidée erreur, cette dernière méthode n'est pas conçue pour générer des polygones rectangulaires et n'optimise pas la conformité.

Une méthode de relaxation conforme a été proposée au chapitre 3 afin d'améliorer la conformité, mais elle souffre aussi de défauts de partitionnement quand les métriques sont fortement anisotropes. La figure 5.3 décrit un défaut commun qui se produit lorsqu'un générateur avec une grande métrique entre en conflit avec

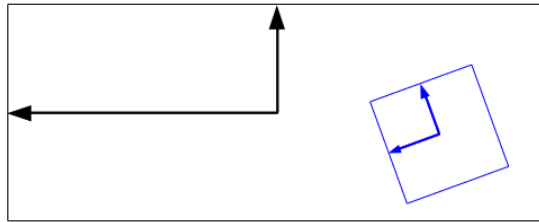


FIGURE 5.3 – Conflit entre métriques. Le diagramme de Voronoï de ces deux sites avec leurs métriques associées ne garantit pas une concordance stricte avec la métrique.

un générateur proche ayant une petite métrique. Alors que la méthode garantit une partition par construction, les métriques locales qui diffèrent grandement peuvent altérer le processus de partitionnement et conduire à une faible concordance avec la métrique. Un meilleur algorithme de placement des générateurs ne génère pas de tels défauts de partition, mais le principal problème des méthodes de relaxation est qu'elles s'appuient sur des partitions défaillantes pour relocaliser. Ceci suggère que garantir à tout prix une partition n'est pas la meilleure option lorsque nous cherchons à générer des maillages avec des métriques anisotropes.

En résumé, le remaillage anisotrope de surfaces fait face au dilemme entre conformité et anisotropie. À plus forte raison, pour des métriques qui varient rapidement où l'anisotropie et la conformité entrent en conflit. Quelques algorithmes garantissent la partition et la conformité mais au prix d'altérer la métrique, soit en rapport d'aspect, soit en taille. Au lieu d'altérer la métrique, nous nous démarquons des travaux antérieurs en optimisant à la fois la partition et la conformité pendant le placement des générateurs en minimisant une fonction objectif liée à ces critères. Le tableau 5.1 illustre en quoi notre positionnement est en rupture avec l'état de l'art.

5.1.2 Positionnement et contribution

Notre approche comble l'écart entre les méthodes guidées erreur et celles guidées métrique afin de générer des polygones anisotropes rectangulaires.

Notre contribution est la suivante : pour placer les générateurs, nous proposons une procédure d'optimisation gloutonne qui ajoute, supprime et relocalise les générateurs – en concordance avec la métrique guidée erreur décrite au chapitre 4 – tout en optimisant les critères de partition et de conformité.

Etat de l'art	Notre méthodologie
Guidé métrique ou guidé erreur	Guidé métrique métrique guidée erreur
Partition	Décomposition
Concordance proportionnelle avec la métrique	Concordance stricte avec la métrique

TABLE 5.1 – Rupture méthodologique par rapport à l'état de l'art. Nous assouplissons la contrainte de partitionnement en la listant comme un critère à optimiser dans la décomposition. Notre but est d'obtenir une concordance stricte avec la métrique pendant la phase de décomposition.

5.2 Algorithme

L'algorithme comprend trois étapes. Nous calculons d'abord une métrique rectangulaire anisotrope en chaque face du maillage surfacique initial $S = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des sommets du maillage, $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes et $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces (2-simplexes). Puis, nous générons une décomposition de S en accord avec la métrique à travers une procédure d'optimisation gloutonne qui optimise à la fois les critères de partition et de conformité. Le maillage final est obtenu par une étape de partitionnement basée sur un algorithme de relaxation (similaire à la section 2.4), suivie d'une série d'opérateurs de fusions d'arêtes. Les deux premières étapes de l'algorithme agissent sur une surface triangulée initiale discrète. Le paramètre principal est une erreur de tolérance maximale ε exprimée en une déviation locale des normales de S . La figure 5.4 décrit les étapes de notre algorithme, résumé comme suit :

Algorithme 4 : Algorithme de remaillage polygonal anisotrope de surface

Données : Surface triangulée S .

début

1. Métrique (voir section 4.2)
2. Décomposition (voir section 5.3)
3. Maillage (voir section 5.4)

Résultat : Maillage polygonal de surface.

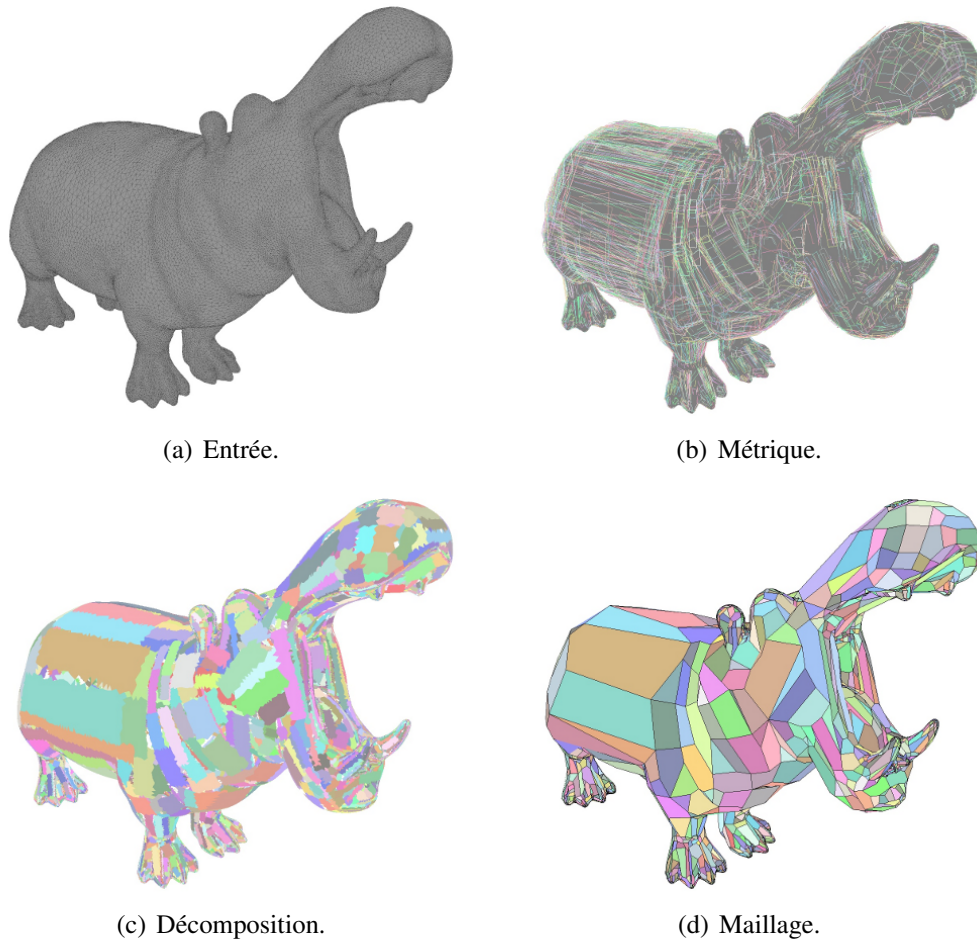


FIGURE 5.4 – Algorithme. Maillage triangulaire de surface initial (a). Métrique anisotrope rectangulaire montrée pour seulement 20% des faces du maillage pour plus de clarté (b). Décomposition induite par les générateurs après la procédure d’optimisation gloutonne qui favorise les critères de partition et de conformité (c). Maillage polygonal final (d).

5.3 Décomposition

Nous voulons générer une décomposition en concordance avec la métrique anisotrope rectangulaire pré-calculée, tout en satisfaisant les critères listés en section 5.1. La décomposition est obtenue en plaçant les générateurs avec une procédure d'optimisation gloutonne qui optimise la partition et la conformité.

À chaque face du maillage initial $\mathcal{S}$ est associé un générateur avec sa métrique anisotrope rectangulaire. Les métriques locales peuvent se chevaucher et entrer en conflit. Notre but possède quelques similarités avec le problème du set-cover puisque nous cherchons le plus petit ensemble $\mathcal{G}$ de générateurs tel que la décomposition satisfasse au mieux les critères. Rappelons que le problème général du set-cover, qui est NP -complet, consiste à trouver le nombre minimum de sous-ensembles d'un ensemble qui couvre un domaine initial [46]. Au lieu de garantir le critère de partition par construction en utilisant, par exemple, des diagrammes de Voronoï L_∞ comme en Lévy et Liu [50] ou comme en section 3, nous favorisons, durant l'optimisation, la concordance (stricte et non proportionnelle) à la métrique en autorisant des chevauchements et des orphelins dans la décomposition. En d'autres termes, le critère de partition devient une fonction à optimiser à travers la notion de *couverture*.

Couverture. Nous définissons une énergie de couverture qui mesure comment les générateurs placés engendrent une décomposition telle que chaque face de $\mathcal{S}$ soit couverte exactement une fois. Nous définissons d'abord l'ensemble de couverture $C_{\mathcal{M}_{g,\varepsilon}}$ d'un générateur g comme la composante connexe des faces de $\mathcal{S}$ contenant g , à l'intérieur de l' ε -région de tolérance de g et dont la distance L_∞ dans la métrique $\mathcal{M}_{g,\varepsilon}$ à g est inférieure ou égale à 1 :

$$C_{\mathcal{M}_{g,\varepsilon}} = B_{2,1}(g, \varepsilon) \cap \left\{ f \in \mathcal{F} : d_\infty^{\mathcal{M}_{g,\varepsilon}}(c(f), \Gamma(g)) \leq 1 \right\}.$$

La figure 5.5 illustre l'ensemble $C_{\mathcal{M}_{g,\varepsilon}}$ (rouge) pour l'exemple de l'ellipsoïde.

De plus, nous définissons pour chaque face f de $\mathcal{S}$ son indice de couverture $v(f)$ comme le nombre de générateurs qui couvrent f :

$$v(f) = \{g \in \mathcal{G} : f \in C_{\mathcal{M}_{g,\varepsilon}}\}.$$

La figure 5.6 représente l'indice de couverture pour quelques triangles lorsque deux générateurs ont été placés. L'énergie totale de couverture est définie par :

$$E_v = \sum_{f \in \mathcal{F}} (v(f) - 1)^2.$$

Conformité. Un coin de sous-domaine est un sommet de $\mathcal{S}$ adjacent à trois sous-domaines ou plus à l'intérieur, ou deux sous-domaines ou plus sur le bord de $\mathcal{S}$. Une décomposition est dite conforme quand elle ne contient aucune jonction

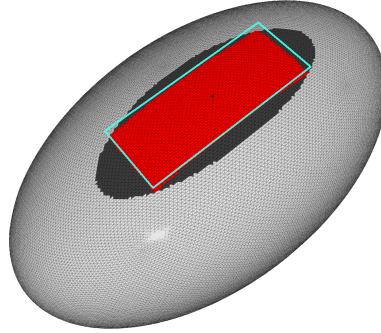


FIGURE 5.5 – Ensemble de couverture d’une face sur l’ellipsoïde. Étant donnée une face de l’ellipsoïde, sa région de tolérance (gris) et sa métrique anisotrope rectangulaire (rectangle bleu), les faces appartenant à l’ensemble de couverture de la face f (rouge) sont les faces incluses dans la région de tolérance de f , dont la distance à f dans la métrique de f est inférieure ou égale à 1.

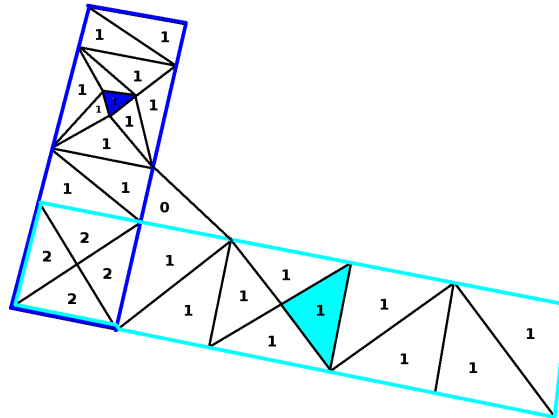


FIGURE 5.6 – Indice de couverture. Deux générateurs (bleu et bleu clair) induisent une décomposition en deux sous-ensembles. Un triangle n’appartient à aucun sous-ensemble (noté 0), et les autres triangles appartiennent à soit 1 sous-ensemble (noté 1), soit à deux sous-ensembles (noté 2).

en T . Dans notre contexte, une version relâchée de cette notion signifie que tous les coins de sous-domaine coïncident à peu près avec les coins dans la métrique (cette notion est définie ci-dessous). Nous définissons une énergie de conformité qui favorise des coins dans la métrique, proches pour tous les sous-domaines générés. Cette énergie est calculée en chaque sommet de $\mathcal{S}$ et dépend des générateurs placés dans son voisinage. Il est nécessaire de définir la couverture d'un sommet comme l'ensemble des générateurs qui le couvrent en concordance avec une distance L_∞ étendue à 2. Nous notons cette couverture $\mathcal{N}_v$. L'énergie de conformité d'un sommet est définie par la fonction :

$$E_f(v) = \frac{1}{\binom{|\mathcal{N}_v|}{2}} \sum_{\substack{g_1, g_2 \in \mathcal{N}_v \\ g_1 \neq g_2}} \|\chi_{v,g_1} - \chi_{v,g_2}\|_2 \left(\frac{\Phi_{g_1}(\chi_{v,g_1}, v)}{\bar{g}_1} + \frac{\Phi_{g_2}(\chi_{v,g_2}, v)}{\bar{g}_2} \right),$$

où ;

- $\chi_{v,g}$ est le plus proche coin pour g de v (dans la métrique de g) ;
- $\bar{g}$ désigne la norme moyenne des deux vecteurs de la métrique de g (telle que la distance entre deux coins qui interagissent soit normalisée par rapport aux métriques locales) ;
- $\binom{|\mathcal{N}_v|}{2}$ est le nombre de paires orientées (g_1, g_2) ;
-

$$\Phi_g(p, q) = 4. \mathbb{1}_{\{(p,q): d_\infty^{\mathcal{M}_{g,\mathcal{E}}}(p,q) \leq \frac{1}{2}\}} \left(\frac{1}{2} - \frac{|\vec{pq} \cdot \vec{u}_g|}{\|\vec{u}_g\|^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{|\vec{pq} \cdot \vec{v}_g|}{\|\vec{v}_g\|^2} \right),$$

où :

- $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice ;
- $\vec{u}_g$ et $\vec{v}_g$ sont les vecteurs de la métrique de g .

$\Phi_g(p, q)$ est une fonction d'importance qui vaut 1 à chaque coin de sous-domaine et décroît vers 0 avec une interpolation bilinéaire à la distance L_∞ de 0.5 (voir figure 5.7 : du blanc au noir par ordre croissant d'importance).

Cette fonction pénalise les coins trop distants entre des paires orientées de sous-domaines voisins, pour tous les sommets de $\mathcal{S}$, et avec un coefficient plus important pour les sommets proches des coins. Choisir des paires orientées plutôt que non orientées nous permet de mesurer la distance entre les coins dans la métrique de g_1 , puis dans celle de g_2 .

Comme décrit précédemment, l'énergie de conformité globale est non-nulle si au moins deux sous-domaines interagissent, c'est-à-dire s'il y a chevauchement de leurs boules de rayon 2 dans leurs métriques L_∞ respectives.

Comme nous souhaitons pénaliser la génération de sous-domaines isolés, nous ajoutons le cas particulier où un sous-domaine n'interagit avec aucun autre. Dans ce cas, nous fixons $E_f(v) = 1$.

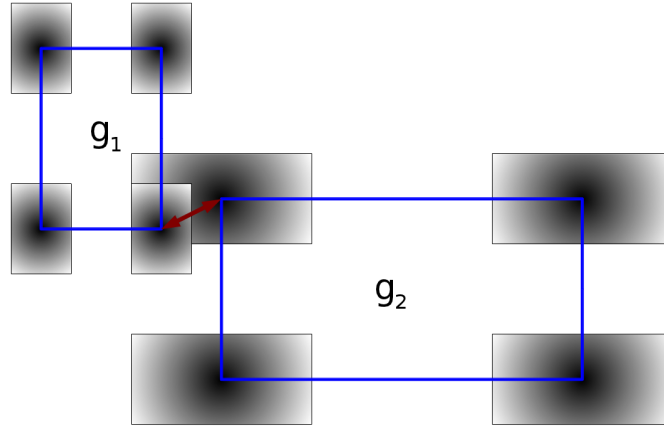


FIGURE 5.7 – Interaction entre coins. La fonction de conformité d’un sommet est non nulle si et seulement s’il se situe dans la zone d’interaction (rectangle dégradé du noir au blanc) d’au moins 2 coins. Le but de définir une fonction d’importance en chaque coin est de quantifier la proximité entre coins qui interagissent pour n’importe quel sommet.

Durant la première phase de la procédure d’optimisation – qui consiste principalement à ajouter des générateurs – la méthode consiste plus à une avancée de front qu’à un placement aléatoire des générateurs, cette dernière pénalisant la conformité. En effet, si un sous-domaine est déjà placé, le terme de conformité va favoriser le placement du sous-domaine suivant de telle sorte que les sous-domaines aient deux de leurs coins qui coïncident. L’énergie totale de conformité est définie par :

$$E_f = \sum_{v \in V} E_f(v).$$

Énergie globale. L’énergie globale optimisée possède deux termes : un premier sur les faces de $\mathcal{S}$, et un second sur les sommets de $\mathcal{S}$: $E = E_v + \alpha E_f$, où α est utilisé pour doser le compromis entre conformité et partition (dans les exemples montrés. $\alpha = 0.5$).

Minimisation de l’énergie. L’énergie globale est minimisée grâce à une procédure d’optimisation gloutonne qui ajoute, supprime et relocalise les générateurs, de telle sorte que la décomposition correspondante soit optimisée pour les critères de partition et de conformité. Plus spécifiquement, nous utilisons une queue de priorité modifiable avec des opérateurs (ajout, suppression, relocalisation), triés par ordre décroissant de différence d’énergie, relatif à un opérateur de coût. Alors que les opérateurs d’ajout et de suppression sont définis par générateur, l’opérateur de re-

localisation est défini pour des paires (de complexité quadratique en le nombre de faces) de générateurs. Pour éviter d'avoir à traiter un nombre trop grand de paires, nous restreignons la relocalisation d'un générateur g à un sous-ensemble aléatoire des faces couvertes par g (environ 20% de la totalité des faces dans les exemples montrés). Pendant l'optimisation, pour actualiser efficacement la queue de priorité, nous maintenons dynamiquement pour chaque générateur, la liste des générateurs couverts, ainsi que la liste des générateurs qui le couvrent. Nous gardons le même type d'information pour les sommets, avec la notion de couverture étendue jusqu'à une distance 2 pour la métrique L_∞ relative au générateur.

Initialement, il n'y a aucun générateur, et la queue de priorité est initialisée seulement avec les opérateurs d'ajout correspondant à toutes les faces de S . À chaque étape de l'algorithme, un opérateur est extrait de la queue qui est actualisée en supprimant les opérateurs qui ne sont plus valables, en actualisant les coûts des opérateurs modifiés et en ajoutant de nouveaux opérateurs. L'algorithme s'arrête lorsque l'énergie ne décroît plus. L'algorithme 5 résume le processus d'optimisation gloutonne.

Algorithme 5 : Optimisation gloutonne

Données : Surface triangulée S munie d'une métrique anisotrope rectangulaire

Résultat : Ensemble de générateurs $\mathcal{G}$ sur S .

début

```

 $\mathcal{G} = \emptyset$ ;
Enumérer  $C$  opérateurs (ajout, suppression, relocalisation);
Remplir la queue de priorité avec  $C$ ;
tant que opérateur suivant décroît l'énergie faire
    Extraire l'opérateur de la queue;
    Appliquer l'opérateur;
    Actualiser  $\mathcal{G}$ ;
    Actualiser la queue;

```

Comme attendu, l'algorithme glouton débute par une grande majorité d'ajouts (avec les plus grands sous-domaines en premier pour améliorer la couverture), avant de passer automatiquement à une phase de relaxation où des relocalisations sont opérées. La figure 5.8 décrit comment l'énergie décroît pendant l'optimisation. Les courbes montrent que le terme de couverture dans l'énergie décroît plus vite que celui de conformité. Beaucoup de relocalisations sont appliquées dans la phase médiane de l'algorithme. Seulement quelques suppressions sont appliquées, surtout dans les zones isotropes où la métrique varie rapidement en direction mais ne varie pas en taille.

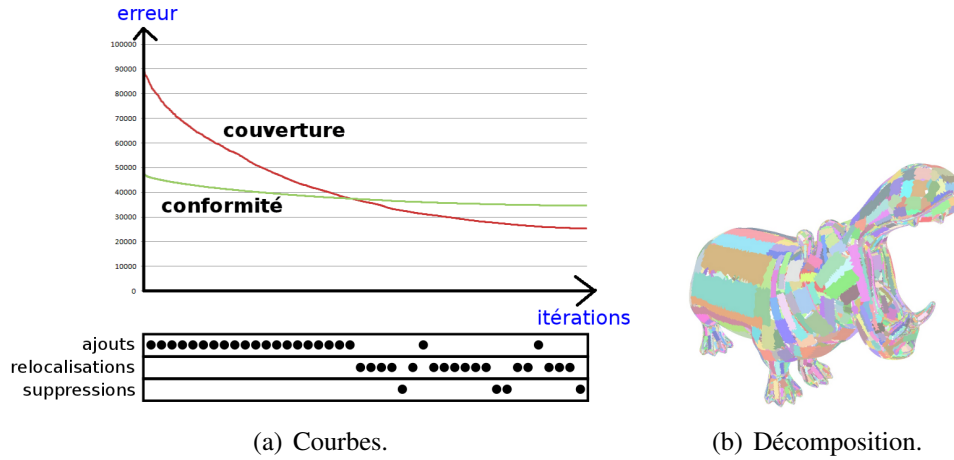


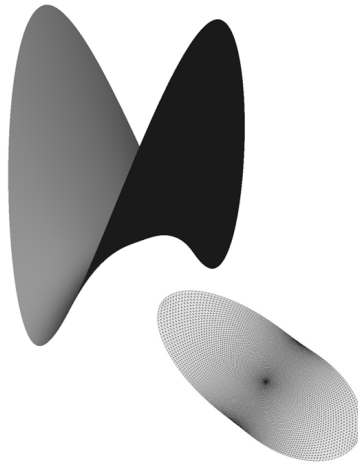
FIGURE 5.8 – Courbes d’évolution des énergies. Les courbes montrent les termes de couverture et de conformité dans l’énergie. Les itérations sur l’axe des abscisses correspondent au nombre d’opérateurs extraits de la queue de priorité.

La figure 5.9 illustre le rôle du terme de conformité dans l’énergie. Les sous-domaines ne sont pas parfaitement conformes mais la conformité est largement améliorée lorsque la métrique offre suffisamment de degrés de liberté parmi les générateurs.

La figure 5.10 illustre comment le terme de conformité dans l’énergie permet de gérer des cas de figure où l’orientation varie beaucoup. Sur cet exemple isotrope (la sphère), toutes les métriques ont une taille équivalente mais aucune direction n’est favorisée, rendant la métrique très incompatible en orientation. La procédure d’optimisation gloutonne sans le terme de conformité dans l’énergie ne favorise que la couverture et les opérateurs sont extraits de la queue principalement (car il y a aussi l’orientation des chevauchements) dans l’ordre décroissant des aires, sans choisir des orientations locales compatibles. Au contraire, si le terme de conformité est pris en compte dans l’énergie, alors les opérateurs sont extraits de la queue dans un ordre tel qu’il y a un compromis entre couverture et conformité. Ainsi, la décomposition est localement plus compatible en orientation.

5.4 Maillage

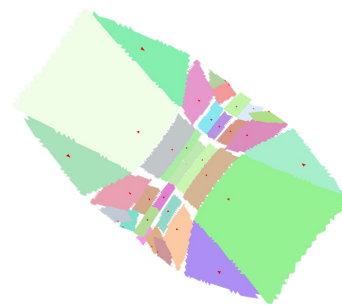
À partir de la décomposition, nous voulons maintenant générer un maillage polygonal de surface. Notons que si la procédure d’optimisation gloutonne optimise le critère de partition, elle ne garantit pas une réelle partition : en général, $E_v \neq 0$. Nous générons d’abord une partition de S en appliquant un diagramme de Voronoï anisotrope discret, comme en section 2.4, où les sites sont des triangles



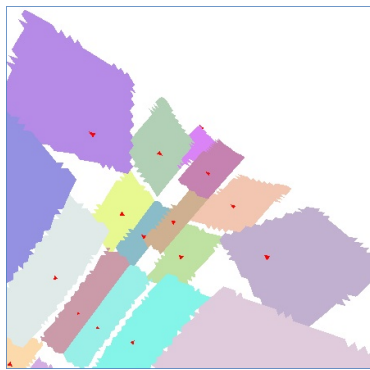
(a) Modèle : selle anisotrope.



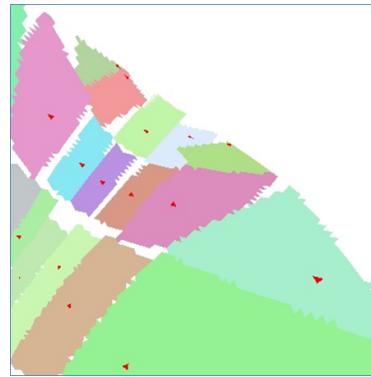
(b) Sans conformité.



(c) Avec conformité.



(d) Sans conformité : zoom.



(e) Avec conformité : zoom.

FIGURE 5.9 – Optimisation de la conformité. Sur la selle anisotrope (a), nous comparons le placement des générateurs sans (b, d) et avec (c, e) le terme de conformité dans l'énergie. La selle est montrée avec une vue de dessus.

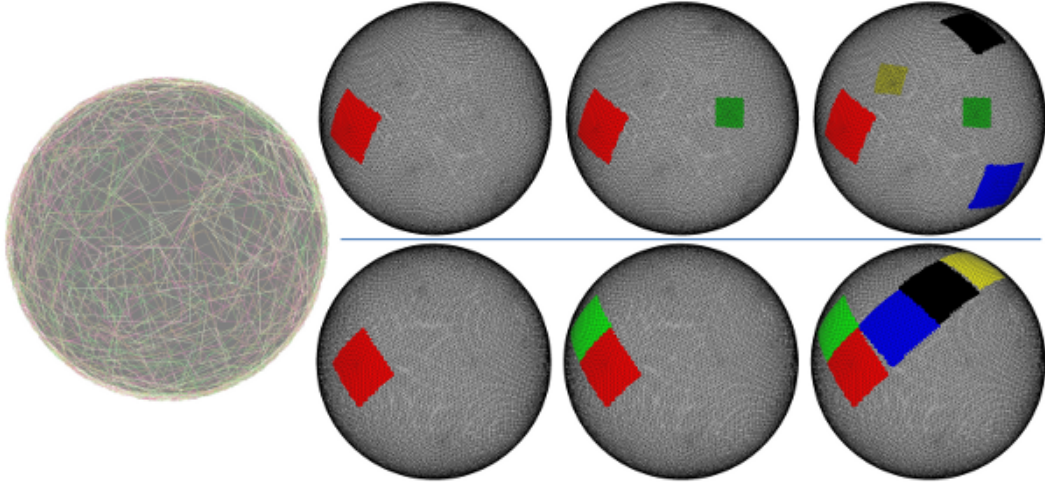


FIGURE 5.10 – Placement sur la sphère. Gauche : la métrique est uniforme en taille mais non compatible en orientation. Haut : décomposition sans le terme de conformité dans l'énergie. Bas : décomposition avec le terme de conformité dans l'énergie.

(les générateurs), et où la métrique anisotrope diffère selon les sites. Nous générons ensuite un maillage polygonal de surface, noté $\mathcal{M}$, induit par la partition. Comme post-traitement, nous appliquons une série d'opérateurs de fusion d'arête sur $\mathcal{M}$ afin d'éliminer quelques jonctions en T . La figure 5.11 illustre la procédure permettant de générer le maillage final à partir des générateurs..

Maillage. Le maillage de surface $\mathcal{M}$ est induit par la partition sur la surface triangulée, comme décrit en section 5.4.

Opérateurs locaux. Notons que la procédure d'optimisation gloutonne optimise le critère de conformité mais ne le garantit pas. Quelques parties de $\mathcal{M}$ comportent ainsi des jonctions en T composées de courtes arêtes qui peuvent être facilement supprimées par des opérateurs de fusion d'arêtes. En utilisant une queue de priorité, nous fusionnons récursivement les arêtes courtes par ordre croissant de longueur, où la longueur est exprimée comme une fraction de la métrique anisotrope locale. La longueur des courtes arêtes est limitée à une fraction de l'unité de longueur locale (dans les exemples montrés, cette fraction est égale à 0.25).

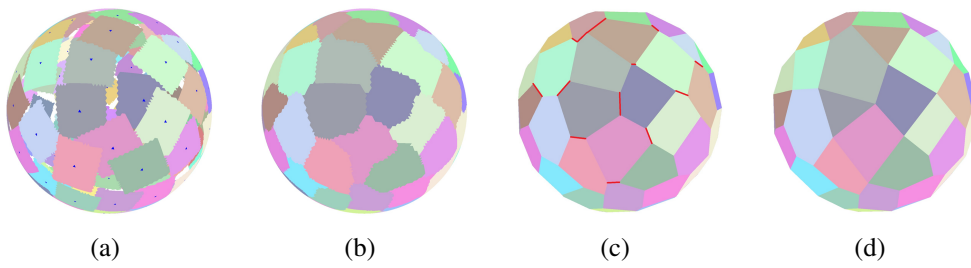


FIGURE 5.11 – Maillage. Générateurs et décomposition induite avec chevauchements et orphelins (a). Partition après diagramme de Voronoï anisotrope discret (b). Maillage polygonal induit avec les courtes arêtes en rouge (c). Maillage polygonal final après fusion des courtes arêtes (d).

5.5 Résultats

Les paramètres de notre algorithme sont les suivants :

- ε : erreur de tolérance
- α : compromis entre couverture et conformité (voir section 5.3)
- β : longueur maximum des arêtes fusionnées (voir section 5.4)

Notre algorithme est implanté en C++ et utilise la bibliothèque CGAL [69]. Tous les exemples sont calculés avec un PC comprenant 4 cœurs cadencés à 2.40GHz. Les temps de calculs sont de l'ordre de 30mn pour pré-calculer la métrique anisotrope et de 40mn pour placer les générateurs pour un maillage initial de $200k$ triangles (respectivement 5mn et 2.5mn pour un maillage de $20k$ triangles). Pendant le calcul de la métrique, 95% du temps est employé à trouver le plus grand rectangle inscrit dans la région de tolérance. Durant le placement des générateurs, 90% du temps est employé à mesurer l'énergie de conformité.

La figure 5.12 illustre quelques résultats sur des formes canoniques. Sur le cylindre, les polygones ont des rapports d'aspect proche de 10. Des rapports d'aspect de 100 sont obtenus en utilisant une petite erreur de tolérance sur les normales, combinée à un maillage initial très fin. Notons que notre algorithme ne nécessite pas de borner le rapport d'aspect des éléments. Sur le tore, les métriques varient en taille et le maillage final se conforme seulement là où c'est possible. Sur la capsule, la partie sphérique se conforme avec la partie parabolique seulement là où c'est possible.

La figure 5.16 illustre le comportement de notre algorithme lorsque nous faisons varier, sur l'exemple de l'ellipsoïde, l'erreur de tolérance sur les normales. Nous observons que plus la tolérance est petite, plus les éléments du maillage sont petits, ce qui est conforme avec l'intuition qui consiste à vouloir plus d'éléments pour être plus précis.

Les figures 5.13 et 5.14 comparent notre approche avec la méthode d'approximation variationnelle (VSA) de Cohen-Steiner *et al.* [23]. Notre méthode produit des éléments rectangulaires sur les zones quasi planaires ainsi que sur les zones paraboliques telles que les bras. La méthode VSA génère, durant la phase d'optimisation, une partition qui peut posséder plusieurs éléments sur les zones quasi planaires, et qui est composée de régions incurvées sur les bras qui sont loin d'être convexes et rectangulaires.

La figure 5.17 illustre notre approche sur le modèle éléphant. La distribution de la déviation des angles décrite sur la figure 5.17 montre que notre approche génère

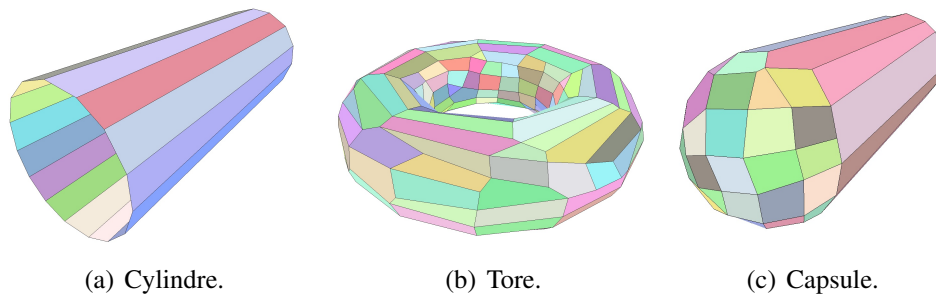


FIGURE 5.12 – Remaillage de formes canoniques.

un maillage respectant majoritairement l'erreur de tolérance sur les normales spécifiée par l'utilisateur.

Limitations. Une limitation de notre approche est le temps de calcul de la métrique de l'ordre de plusieurs minutes pour 30000 sommets, où la majorité du temps est employé à calculer le plus grand rectangle inscrit. Calculer le terme de conformité dans l'énergie pendant l'optimisation est aussi très coûteux, en grande partie à cause de la mémorisation des sous-domaines voisins à chaque sommet.

Une autre limitation de notre approche est la présence d'orphelins dans la décomposition du maillage initial (les faces non couvertes par un générateur dans la décomposition). La partition induite par le diagramme de Voronoï discret engendre ensuite des polygones concaves.

Enfin, l'optimisation gloutonne n'applique qu'un seul opérateur à la fois, et ne permet de trouver que des minima locaux pour l'énergie.

La figure 5.15 illustre le comportement de notre algorithme sur le modèle fan-disk sur lequel il y a des conflits entre les métriques rectangulaires sur les parties concaves. Même si les métriques sont conflictuelles en direction (entre deux points proches, la métrique peut varier fortement), notre algorithme permet de sélectionner celles qui produisent un maillage qui respecte le plus les critères de partition et de conformité.

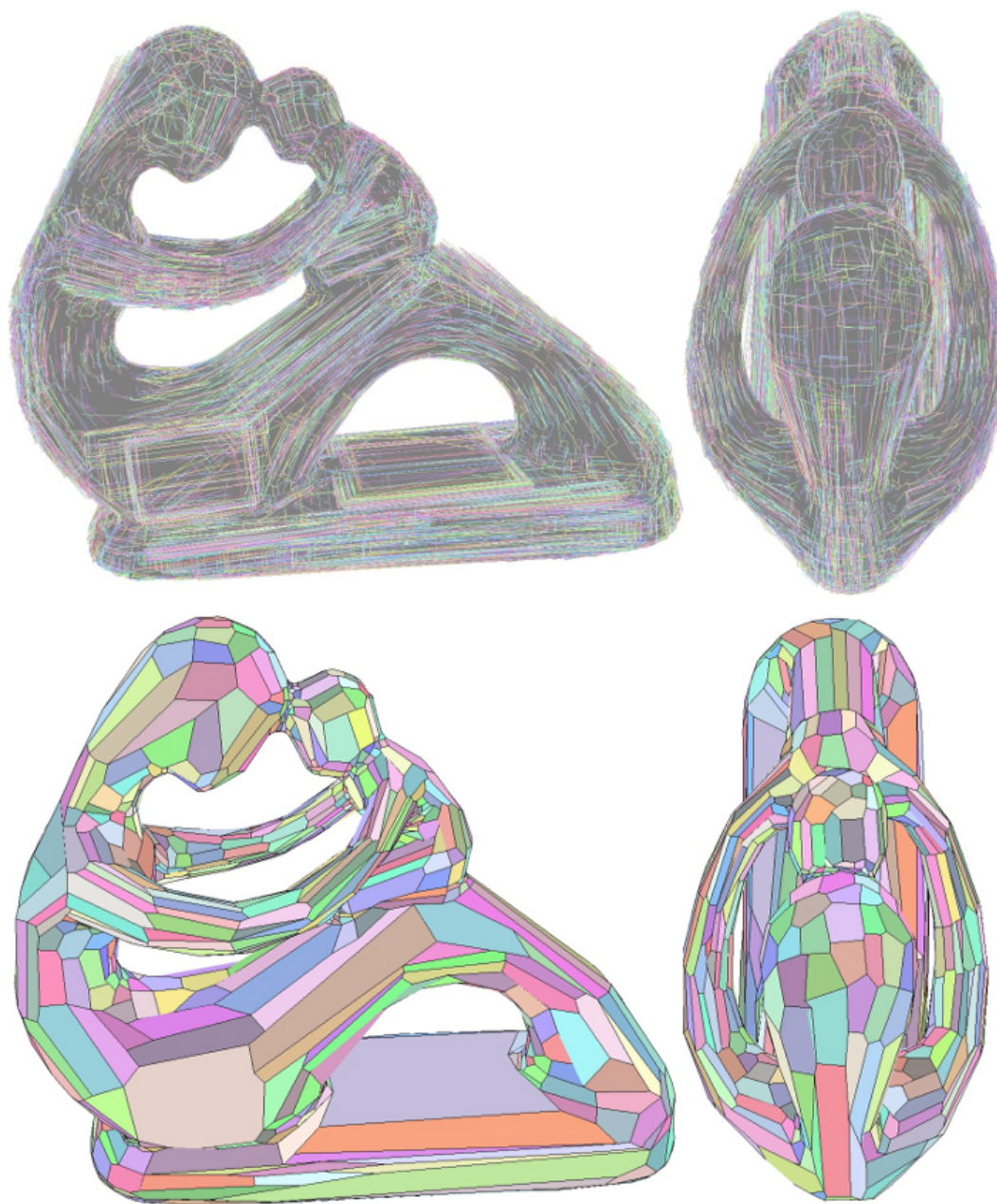


FIGURE 5.13 – Modèle fertility.

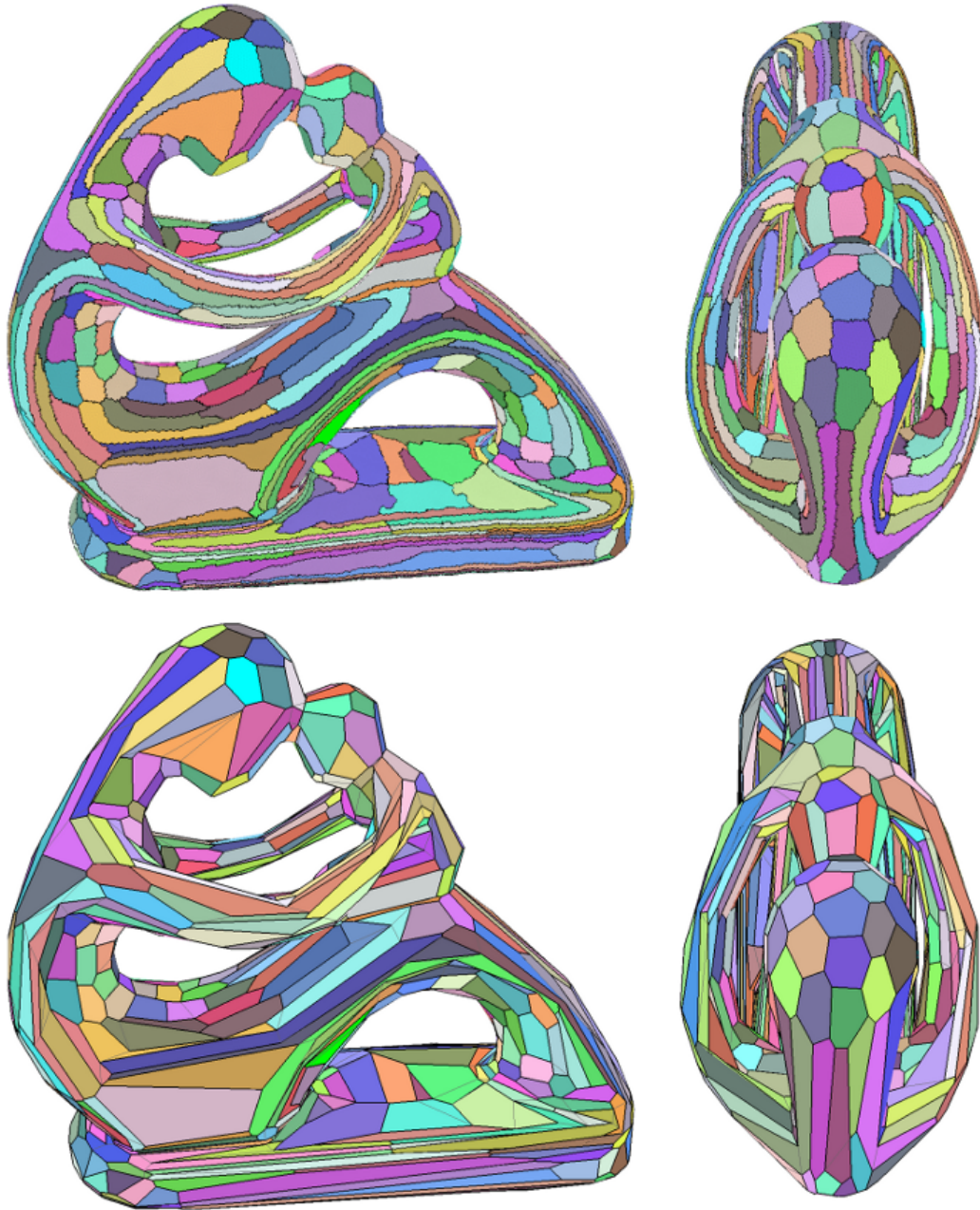
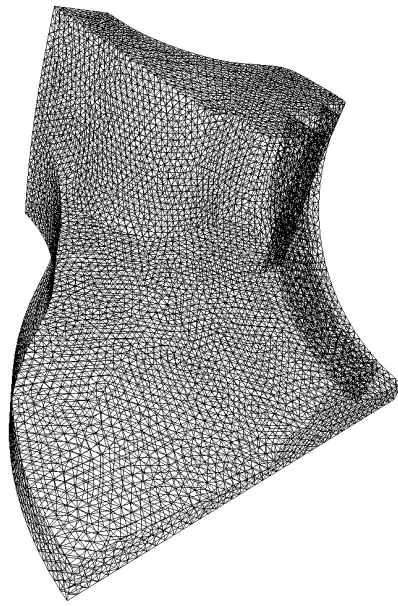
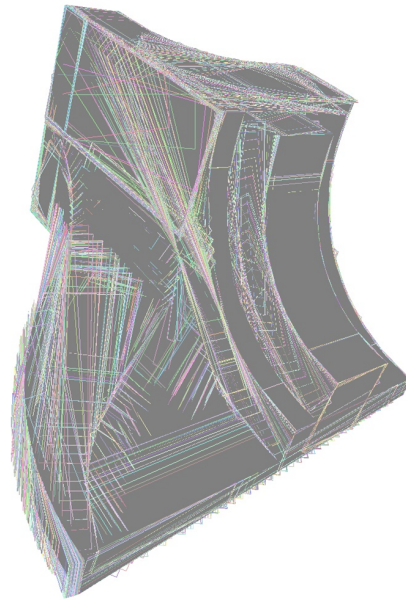


FIGURE 5.14 – Modèle fertility montré dans l'article de Cohen-Steiner *et al.* [23].
En haut : partition [23]. En bas : maillage [23].



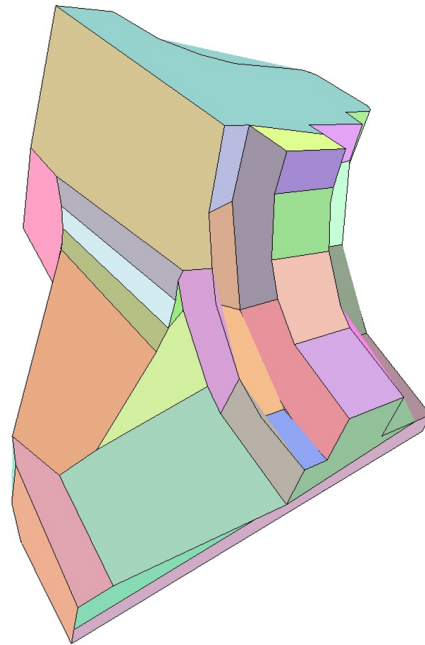
(a) Maillage initial.



(b) Métrique.

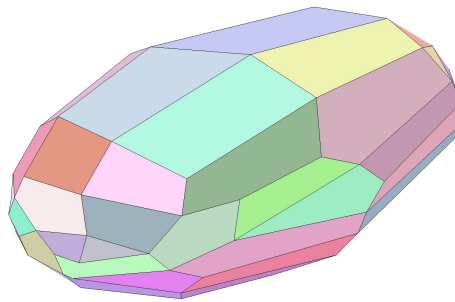


(c) Décomposition.

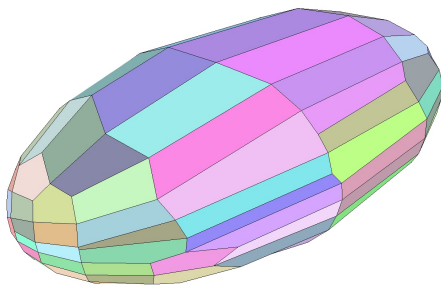


(d) Maillage polygonal final.

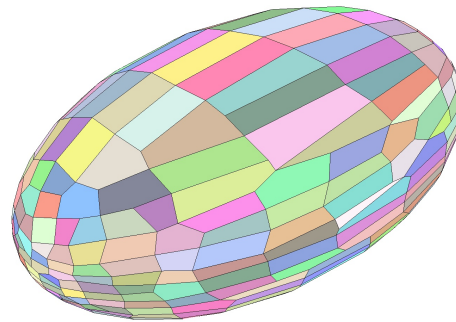
FIGURE 5.15 – Fandisk. Maillage initial (a), métrique (b), décomposition (c) et maillage polygonal final (d).



(a) $\varepsilon = 15$ degrés.

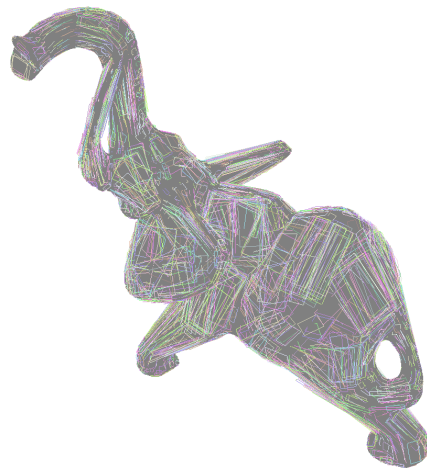


(b) $\varepsilon = 10$ degrés.



(c) $\varepsilon = 6$ degrés.

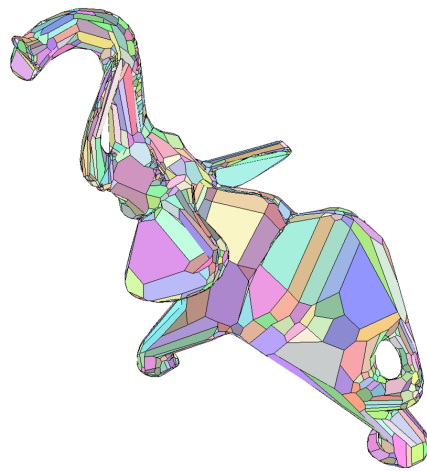
FIGURE 5.16 – Ellipsoïde. Remaillage pour des erreurs de tolérance sur les normales de 15 degrés (a), 10 degrés (b) et 6 degrés (c).



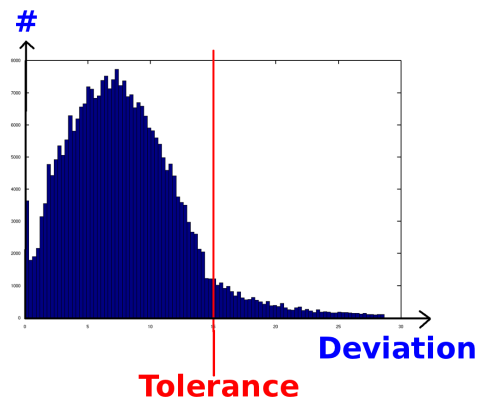
(a) Métrique.



(b) Décomposition.



(c) Maillage polygonal final.



(d) Distribution de la déviation angulaire.

FIGURE 5.17 – Éléphant. Métrique (a), décomposition (b), maillage polygonal final (c) et distribution de la déviation angulaire entre le maillage final et le maillage initial (d).

5.6 Conclusion

Nous avons proposé une procédure d'optimisation gloutonne simple pour placer des générateurs, qui se démarque des travaux précédents par l'utilisation d'une décomposition au lieu d'une partition (en autorisant les chevauchements et les orphelins), et aussi par l'optimisation simultanée des critères de partition et de conformité.

La valeur ajoutée de notre approche est sa capacité à générer des maillages polygonaux où les polygones sont rectangulaires avec un rapport d'aspect arbitraire. Notre algorithme de décomposition du domaine procède en concordance stricte (et non proportionnelle) avec la métrique, et passe automatiquement d'une phase d'ajout de générateurs à une phase de relocalisation de générateurs.

Comme travail futur, nous souhaitons analyser les vecteurs de translation de la métrique afin d'améliorer la stratégie de placement des générateurs. Comme mentionné en section 4.3, nous souhaitons aussi ne plus seulement utiliser les plus grands rectangles mais aussi les plus grands triangles et les plus grandes ellipses afin d'ajuster le degré des polygones à la géométrie locale de la surface. Nous voulons également trouver un moyen de modifier la métrique, par exemple par quantification, afin d'améliorer la conformité dans le cas où une stricte concordance à la métrique n'est pas une priorité. Enfin, nous voulons étudier une approche de programmation dynamique pour placer plus d'un générateur à la fois pendant l'optimisation afin d'atteindre un meilleur minimum de l'énergie.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons proposé des nouvelles méthodes pour la génération automatique de maillages quadrangulaires. Nous allons résumer nos contributions et donner des pistes pour des travaux de recherche futurs.

Dans le chapitre 3, nous avons proposé une approche pour générer automatiquement des maillages quadrangulaires pour des domaines $2D$ arbitraires. La méthodologie consiste à appliquer une succession d'étapes afin d'améliorer la partition pour les critères de taille, puis de forme, d'orientation, du degré des éléments, et de régularité. L'ordre des étapes est choisi de telle sorte que la suivante ne pénalise pas ce que la précédente a satisfait. Nos expérimentations confirment que les maillages quadrangulaires construits respectent à la fois le champ de taille et le champ de croix donnés, même sur des domaines complexes avec des champs variant rapidement. Notre approche est principalement basée sur de la relaxation et des paramétrisations locales. Puisque les principales étapes de notre algorithme consistent seulement à trouver une partition d'un maillage triangulaire support, notre implantation est simple, fiable, et robuste.

Dans le chapitre 4, nous avons introduit une nouvelle métrique anisotrope rectangulaire qui respecte les arêtes vives, basée sur le calcul du plus grand rectangle inscrit dans une région de tolérance relative à une erreur de déviation sur les normales. La métrique est définie, en chaque face d'une surface triangulée initiale, par un rectangle et un vecteur de translation qui permet de préserver les arêtes et de favoriser la formation de grands polygones dans l'algorithme de remaillage anisotrope du chapitre 5. La valeur ajoutée de notre approche est qu'elle ne dépend que d'un unique paramètre intuitif (relatif à la déviation maximale des normales) et qu'elle préserve les bords et les arêtes vives.

Dans le chapitre 5, nous avons proposé une procédure d'optimisation gloutonne simple pour placer des générateurs. Cette procédure se démarque des travaux précédents par l'utilisation d'une décomposition au lieu d'une partition (en autorisant les chevauchements et les orphelins), et aussi par l'optimisation simultanée des critères de partition et de conformité. La valeur ajoutée de notre approche est sa capacité à générer des maillages polygonaux où les polygones sont rectangulaires avec un rapport d'aspect arbitraire. Notre algorithme de

décomposition du domaine procède en concordance stricte avec la métrique, et passe automatiquement d'une phase composée majoritairement d'ajouts des générateurs à une phase composée majoritairement de relocalisations des générateurs.

Le dénominateur commun aux algorithmes proposés dans les chapitres 3 et 5 est un ensemble d'étapes qui permettent de satisfaire un à un les critères de qualité pour les maillages : partition, approximation, nombre minimal d'éléments, topologie, convexité, forme, orientation, taille, alignement, degré, régularité et conformité. Dans l'algorithme présenté dans le chapitre 3, l'étape d'initialisation permet de satisfaire au critère de taille, l'étape de relaxation permet de satisfaire aux critères de forme et d'orientation, et l'étape de relaxation conforme permet de satisfaire aux critères de conformité, et de degré. Dans l'algorithme présenté dans le chapitre 5, les trois critères de taille, de forme et d'orientation sont regroupés sous la forme d'une métrique. La concordance stricte à cette métrique, ainsi que le critère de conformité, sont optimisés durant l'étape principale : l'étape de décomposition.

Nous présentons maintenant les travaux que nous souhaitons poursuivre. Dans le cadre de la génération de maillages isotropes de domaines 2D, nous souhaitons améliorer l'étape de relaxation conforme en adoptant une stratégie quand l'actuelle échoue, c'est-à-dire lorsqu'il y a encore des configurations non-conformes.

Dans le cadre de la génération de maillages anisotropes de surfaces, nous souhaitons analyser le champ de vecteurs de translation de la métrique à la fois pour produire une version consolidée de cette métrique, et pour améliorer la stratégie de placement des générateurs pendant l'étape de décomposition. Nous souhaitons aussi ne plus seulement utiliser les plus grands rectangles mais aussi les plus grands triangles et les plus grandes ellipses, afin d'ajuster le degré des polygones à la géométrie locale de la surface. Nous souhaitons également trouver un moyen de modifier la métrique, par exemple par quantification, afin d'améliorer la conformité dans le cas où une stricte concordance à la métrique n'est pas une priorité. Enfin, nous voulons étudier une approche à base de programmation dynamique pour placer plus d'un générateur à la fois pendant l'optimisation afin d'atteindre un meilleur minimum de l'énergie.

Il y a d'autres pistes de recherche que nous pouvons évoquer sans rentrer dans les détails. La méthode de relaxation du type itération de Lloyd (voir section 2.4) consiste en une alternance d'optimisations : pour un ensemble de générateurs donnés la meilleure partition est calculée, puis pour la nouvelle partition les meilleurs générateurs sont trouvés. En observant que c'est la *métrique* qui guide le placement des générateurs, nous pouvons imaginer un second étage d'optimisation qui alterne

des étapes de relaxation avec la recherche d'une meilleure métrique. Plus précisément, à partir d'une métrique donnée, la partition générée par relaxation peut être analysée en terme de géométrie et de structure pour en déduire une nouvelle métrique. En observant de plus que c'est l'erreur de tolérance qui détermine la métrique initiale, nous pouvons également imaginer un troisième étage d'optimisation qui ajusterait la tolérance pour obtenir par exemple une meilleure stabilité de la métrique.

Nos deux méthodologies de génération de maillages quadrangulaires (pour des domaines $2D$ et des surfaces) ont été mises au point pour que les maillages générés satisfassent à une série de critères. Nos algorithmes sont par exemple capables de contrôler à la fois la taille et l'orientation sur les maillages générés. Nous pourrions envisager d'inclure des critères additionnels comme des coûts de fabrication. Pour la construction de bâtiments dits en forme libre en géométrie architecturale, il est courant d'associer un coût de fabrication à chaque type d'élément (panneau planaire, elliptique, parabolique, hyperbolique) et de vouloir générer un maillage qui minimise le coût total de fabrication.

Enfin, toutes les étapes de notre algorithme de génération de maillages isotropes de domaines $2D$ (voir chapitre 3) se généralisent au cas des maillages hexaédriques, sauf l'étape de subdivision barycentrique. C'est pour nous encore une question ouverte de savoir si les principes proposés, à la fois en terme de métrique et de relaxation, peuvent s'étendre pour la génération de maillages hexaédriques.

Bibliographie

- [1] M. Alexa and M. Wardetzky. Discrete laplacians on general polygonal meshes. *ACM Transactions on Graphics*, 30(4) :102, 2011. (Cité en page 11.)
- [2] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy, and M. Desbrun. Anisotropic polygonal remeshing. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3) :485–493, 2003. (Cité en pages 7, 8, 15, 37, 65 et 67.)
- [3] L. Antani, C. Delage, and P. Alliez. Mesh sizing with additively weighted Voronoi diagrams. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 335–346, 2007. (Cité en pages 39 et 57.)
- [4] T. C. Baudouin, J.-F. Remacle, E. Marchandise, and J. Lambrechts. Lp Lloyd’s energy minimization for quadrilateral surface mesh generation. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 473–487, 2011. (Cité en page 9.)
- [5] M. W. Bern and D. Eppstein. Quadrilateral meshing by circle packing. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 10(4) :347–360, 2000. (Cité en page 36.)
- [6] I. M. Boier-Martin, H. E. Rushmeier, and J. Jin. Parameterization of triangle meshes over quadrilateral domains. In *Symposium on Geometry Processing*, pages 197–208, 2004. (Cité en page 37.)
- [7] J.-D. Boissonnat, C. Wormser, and M. Yvinec. Locally uniform anisotropic meshing. In *Proceedings of Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 270–277, 2008. (Cité en pages 30 et 81.)
- [8] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Géométrie algorithmique*. Ediscience international Paris, 1995. (Cité en page 24.)
- [9] D. Bommes, T. Lempfer, and L. Kobbelt. Global structure optimization of quadrilateral meshes. *Computuer Graphics Forum*, 30(2) :375–384, 2011. (Cité en pages 11, 12, 14, 37 et 80.)
- [10] D. Bommes, B. Lévy, N. Pietroni, E. Puppo, C. Silva, M. Tarini, and D. Zorin. State of the art in quad meshing. In *Eurographics STARS*, 2012. (Cité en pages 6 et 10.)
- [11] D. Bommes, H. Zimmer, and L. Kobbelt. Mixed-integer quadrangulation. *ACM Transactions on Graphics*, 28(3), 2009. (Cité en pages 9, 10, 14, 37, 39, 57, 62 et 82.)
- [12] H. Borouchaki and P. J. Frey. Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 41 :915–934, 1996. (Cité en pages 36 et 37.)

- [13] F. Bossen and P. S. Heckbert. A pliant method for anisotropic mesh generation. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 63–74, 1996. (Cité en page 67.)
- [14] M. Botsch and L. Kobbelt. A robust procedure to eliminate degenerate faces from triangle meshes. In *VMV*, pages 283–290, 2001. (Cité en page 65.)
- [15] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, and B. Lévy. *Polygon Mesh Processing*. AK Peters, 2010. (Cité en pages 6 et 56.)
- [16] D. Bremner, F. Hurtado, S. Ramaswami, and V. Sacristan. Small strictly convex quadrilateral meshes of point sets. *Algorithmica*, 38(2) :317–339, 2003. (Cité en page 36.)
- [17] M. Campen, D. Bommers, and L. Kobbelt. Dual loops meshing : quality quad layouts on manifolds. *ACM Transactions on Graphics*, 31(4) :110, 2012. (Cité en page 14.)
- [18] G. D. Canas and S. J. Gortler. Orphan-free anisotropic Voronoi diagrams. *Discrete Computational Geometry*, 46 :526–541, 2011. (Cité en pages 81 et 82.)
- [19] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-aided Design*, 10 :350–355, 1978. (Cité en pages 5 et 6.)
- [20] F. Cazals and M. Pouget. Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets. *Computer Aided Geometric Design*, 22 :121–146, 2005. (Cité en page 9.)
- [21] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, 2010. <http://www.cgal.org>. (Cité en page 57.)
- [22] Principal component analysis in CGAL, 2010. <http://www.cgal.org>. (Cité en page 52.)
- [23] D. Cohen-Steiner, P. Alliez, and M. Desbrun. Variational shape approximation. *ACM Transactions on Graphics*, 23 :905–914, 2004. (Cité en pages 15, 30, 65, 80, 82, 95 et 98.)
- [24] D. Cohen-Steiner and J.-M. Morvan. Restricted Delaunay triangulations and normal cycle. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 312–321, 2003. (Cité en page 9.)
- [25] K. Crane, M. Desbrun, and P. Schröder. Trivial connections on discrete surfaces. *Computer Graphics Forum*, 29(5) :1525–1533, 2010. (Cité en page 39.)
- [26] E. F. D’Azevedo. Are bilinear quadrilaterals better than linear triangles ? *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1) :198–217, 2000. (Cité en pages 1 et 80.)

- [27] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. H. Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *SIGGRAPH*, pages 317–324, 1999. (Cité en page 11.)
- [28] S. Dong, P.-T. Bremer, M. Garland, V. Pascucci, and J. C. Hart. Spectral surface quadrangulation. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3) :1057–1066, 2006. (Cité en pages 9, 11, 15 et 36.)
- [29] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger. Centroidal Voronoi tessellations : applications and algorithms. *Journal SIAM Review*, 41(4) :637–676, 1999. (Cité en pages 9 et 32.)
- [30] Q. Du and D. Wang. Anisotropic centroidal Voronoi tessellations and their applications. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3) :737–761, 2005. (Cité en page 82.)
- [31] Q. D. Du, M. Emelianenko, and L. Ju. Convergence of the Lloyd algorithm for computing centroidal Voronoi tessellations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44 :102–119, 2006. (Cité en page 32.)
- [32] M. Emelianenko, L. Ju, and A. Rand. Nondegeneracy and weak global convergence of the Lloyd algorithm in R^d . *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(3) :1423–1441, 2008. (Cité en page 32.)
- [33] M. S. Floater. Mean value coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 20 :19–27, 2003. (Cité en page 54.)
- [34] M. Garland and P. S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *SIGGRAPH*, pages 209–216, 1997. (Cité en page 65.)
- [35] M. Garland and P. S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. In *IEEE Visualization*, pages 263–269, 1998. (Cité en page 65.)
- [36] M. Garland, A. J. Willmott, and P. S. Heckbert. Hierarchical face clustering on polygonal surfaces. In *SI3D*, pages 49–58, 2001. (Cité en page 43.)
- [37] A. Gramain. *Intégration*. Hermann Paris, 1988. (Cité en page 20.)
- [38] P. Grünwald. *The minimum description length principle*. MIT Press, 2007. (Cité en page 80.)
- [39] T. Gurung, D. E. Laney, P. Lindstrom, and J. Rossignac. Squad : compact representation for triangle meshes. *Computer Graphics Forum*, 30(2) :355–364, 2011. (Cité en page 7.)
- [40] J. Huang, M. Zhang, J. Ma, X. Liu, L. Kobbelt, and H. Bao. Spectral quadrangulation with orientation and alignment control. In *ACM SIGGRAPH Asia 2008 papers*, SIGGRAPH Asia '08, pages 147 :1–147 :9, 2008. (Cité en pages 36 et 82.)

- [41] J. Daniels II, C. T. Silva, and E. Cohen. Localized quadrilateral coarsening. *Computer Graphics Forum*, 28(5) :1437–1444, 2009. (Cité en pages 11, 12, 36, 37 et 82.)
- [42] J. Daniels II, C. T. Silva, and E. Cohen. Semi-regular quadrilateral-only remeshing from simplified base domains. *Computer Graphics Forum*, 28(5) :1427–1435, 2009. (Cité en pages 11 et 12.)
- [43] J. Daniels II, C. T. Silva, J. Shepherd, and E. Cohen. Quadrilateral mesh simplification. *ACM Transactions on Graphics*, 27(5) :148, 2008. (Cité en page 11.)
- [44] T. R. Jones, F. Durand, and M. Desbrun. Non-iterative, feature-preserving mesh smoothing. *ACM Transactions on Graphics*, 22(3) :943–949, 2003. (Cité en page 67.)
- [45] F. Kälberer, M. Nieser, and K. Polthier. Quadcover - surface parameterization using branched coverings. *Computer Graphics Forum*, 26(3) :375–384, 2007. (Cité en pages 9 et 10.)
- [46] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, 1972. (Cité en page 86.)
- [47] D. Kovacs, A. Myles, and D. Zorin. Anisotropic quadrangulation. In *Symposium on Solid and Physical Modeling*, pages 137–146, 2010. (Cité en pages 65 et 68.)
- [48] F. Labelle and J. R. Shewchuk. Anisotropic Voronoi diagrams and guaranteed-quality anisotropic mesh generation. In *Proceedings of Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 191–200, 2003. (Cité en pages 30 et 81.)
- [49] Y.-K. Lai, L. Kobbelt, and S.-M. Hu. An incremental approach to feature aligned quad dominant remeshing. In *Proceedings of the ACM symposium on Solid and physical modeling*, pages 137–145, 2008. (Cité en pages 6, 7, 37 et 81.)
- [50] B. Lévy and Y. Liu. L^p centroidal Voronoi tessellation and its applications. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4), 2010. (Cité en pages 9, 10, 32, 37, 44, 65, 67, 68, 69, 82 et 86.)
- [51] S. P. Lloyd. Least squares quantization in pcm. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2) :129–136, 1982. (Cité en page 9.)
- [52] M. Marinov and L. Kobbelt. Direct anisotropic quad-dominant remeshing. In *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, pages 207–216, 2004. (Cité en pages 7, 8 et 37.)
- [53] J.-M. Mirebau. *Approximation adaptative et anisotrope par éléments finis : théorie et algorithmes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie à Paris 6, 2010. (Cité en page 66.)

- [54] A. Myles, N. Pietroni, D. Kovacs, and D. Zorin. Feature-aligned t-meshes. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4), 2010. (Cité en pages 15, 68, 69 et 80.)
- [55] S. J. Owen, M. L. Staten, S. A. Canann, and S. Saigal. Q-morph : an indirect approach to advancing front quad meshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(9) :1317–1340, 1999. (Cité en page 36.)
- [56] C.-H. Peng, E. Zhang, Y. Kobayashi, and P. Wonka. Connectivity editing for quadrilateral meshes. *ACM Transactions on Graphics*, 30(6) :141, 2011. (Cité en page 14.)
- [57] N. Pietroni, M. Tarini, and P. Cignoni. Almost isometric mesh parameterization through abstract domains. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 16(4) :621–635, 2010. (Cité en pages 11, 37 et 52.)
- [58] W. R. Quadros, K. Ramaswami, F. B. Prinz, and B. Gurumoorthy. Laytracks : a new approach to automated quadrilateral mesh generation using medial axis transform. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 239–250, 2000. (Cité en page 37.)
- [59] N. Ray, W. C. Li, B. Lévy, A. Sheffer, and P. Alliez. Periodic global parameterization. *ACM Transactions on Graphics*, 25(4) :1460–1485, 2006. (Cité en pages 9, 10, 15, 37 et 67.)
- [60] N. Ray, B. Vallet, L. Alonso, and B. Lévy. Geometry aware direction field processing. *ACM Transactions on Graphics*, 29(1), 2009. (Cité en page 9.)
- [61] N. Ray, B. Vallet, W.-C. Li, and B. Lévy. N-symmetry direction field design. *ACM Transactions on Graphics*, 27(2), 2008. (Cité en page 9.)
- [62] L. Rineau and M. Yvinec. A generic software design for Delaunay refinement meshing. *Computational Geometry*, 38(1-2) :100–110, 2007. (Cité en page 39.)
- [63] J. F. Shepherd, M. W. Dewey, A. C. Woodbury, S. E. Benzley, M. L. Staten, and S. J. Owen. Adaptive mesh coarsening for quadrilateral and hexahedral meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(1-2) :17–32, 2010. (Cité en page 11.)
- [64] J. R. Shewchuk. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, 22(1-3) :21–74, 2002. (Cité en page 39.)
- [65] K. Shimada, J.-H. Liao, and T. Itoh. Quadrilateral meshing with directionality control through the packing of square cells. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 61–75, 1998. (Cité en pages 36, 37, 38, 44 et 63.)
- [66] R. B. Simpson. Anisotropic mesh transformations and optimal error control. *Applied Numerical Mathematics*, 14 :183–198, 1992. (Cité en page 80.)

- [67] M. Tarini, N. Pietroni, P. Cignoni, D. Panozzo, and E. Puppo. Practical quad mesh simplification. *Computer Graphics Forum*, 29(2) :407–418, 2010. (Cité en pages 7, 11, 13 et 82.)
- [68] M. Tarini, E. Puppo, D. Panozzo, N. Pietroni, and P. Cignoni. Simple quad domains for field aligned mesh parametrization. *ACM Transactions on Graphics*, 30(6), 2011. (Cité en pages 14 et 80.)
- [69] The CGAL Project. *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.0 edition, 2012. (Non cité.) :eb-12 :eb-12 :eb-12 :eb-12
- [70] J. Tierny, J. D. II, L. G. Nonato, V. Pascucci, and C. T. Silva. Interactive quadrangulation with reeb atlases and connectivity textures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 18(10) :1650–1663, 2012. (Cité en page 8.)
- [71] J. Tierny, J. Daniels II, L. Gustavo Nonato, V. Pascucci, and C. T. Silva. Inspired quadrangulation. *Computer-Aided Design*, 43(11) :1516–1526, 2011. (Cité en page 81.)
- [72] Y. Tong, P. Alliez, D. Cohen-Steiner, and M. Desbrun. Designing quadrangulations with discrete harmonic forms. In *Symposium on Geometry Processing*, pages 201–210, 2006. (Cité en pages 8, 9 et 37.)
- [73] S. Valette and J.-M. Chassery. Approximated centroidal Voronoi diagrams for uniform polygonal mesh coarsening. *Computer Graphics Forum*, 23(3) :381–390, 2004. (Cité en page 58.)
- [74] S. Valette, J.-M. Chassery, and R. Prost. Generic remeshing of 3d triangular meshes with metric-dependent discrete Voronoi diagrams. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(2) :369–381, 2008. (Cité en page 44.)
- [75] N. Viswanath, K. Shimada, and T. Itoh. Quadrilateral meshing with anisotropy and directionality control via close packing of rectangular cells. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 227–238, 2000. (Cité en pages 81 et 82.)
- [76] P. Wolfenbarger, J. Jung, C. R. Dohrmann, W. R. Witkowski, M. J. Panthaki, and W. H. Gerstle. A global minimization-based, automatic quadrilateral meshing algorithm. In *Proceedings of the International Meshing Roundtable*, pages 87–103, 1998. (Cité en page 37.)
- [77] M. Zhang, J. Huang, X. Liu, and H. Bao. A wave-based anisotropic quadrangulation method. *ACM Transactions on Graphics*, 29(4) :118 :1–118 :8, 2010. (Cité en pages 9, 15 et 36.)