École Centrale de Nantes

École Doctorale

Sciences Pour l'Ingénieur Géosciences Architecture (498)

Année 2008 N° B.U. :

Thèse de Doctorat

Spécialité : Mécanique

Présentée et soutenue publiquement par :

Mathieu Chekroun

le 3 décembre 2008
au LCPC - Nantes

Titre

Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface

Jury

Président :	Abdelhafid	KHELIDJ	Professeur de l'Université de Nantes
Rapporteurs :	Christophe	ARISTÉGUI	Maître de conférences, HDR - Université Bordeaux 1
	Jean-Marc	CONOIR	Directeur de recherche CNRS - IJLRDA, Université de Paris 6
Examinateurs :	Odile	ABRAHAM	Ingénieur chercheur, HDR - LCPC, Nantes
	Loïc	LE MARREC	Maître de conférences - Université de Rennes 1
	Michel	CAMPILLO	Professeur de l'Université Joseph Fourier, Grenoble
Membres invités :	Vincent	GARNIER	Maître de conférences - LCND, Université de la Méditerranée
	Bruno	LOMBARD	Chargé de recherche CNRS - LMA, Marseille
	Jean	SALIN	Ingénieur chercheur - EDF, Chatou
	Géraldine	VILLAIN	Ingénieur chercheur - LCPC, Nantes

Directeur de thèse :	Odile ABRAHAM,	LCPC	Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
Co-directeur :	Michel CAMPILLO,	LGIT	Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique
Co-encadrant :	Loïc LE MARREC,	IRMAR	Institut de Recherche Mathématique de Rennes

N° ED 498 - 20

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier sincèrement ma directrice de thèse Odile Abraham pour m'avoir proposé ce sujet de thèse au multiples facettes qui m'a énormément appris. Merci pour sa patience, pour tout le temps consacré au suivi de ces travaux, pour ses conseils sur l'orientation à suivre, et pour les nombreuses discussions enrichissantes que l'on a pu avoir.

Un immense merci à Loïc Le Marrec pour avoir co-encadré cette thèse avec passion. Merci pour sa disponibilité, sa générosité, sa rigueur scientifique et ses nombreux conseils, qui m'ont été très précieux. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je remercie également Alain Le Brun de EDF R&D et Michel Campillo du LGIT pour avoir suivi avec intérêt l'avancement des travaux de cette thèse.

Merci à Christophe Aristégui et Jean-Marc Conoir pour avoir accepté d'être rapporteurs de la thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté au travail réalisé. Leur lecture attentive de ce manuscrit et leurs conseils ont été très constructifs. Merci également a Abdelhafid Khelidj d'avoir présidé mon jury de thèse.

Mes sincères remerciements à tous ceux qui ont été essentiels à l'avancement de mes travaux ; Arnaud Derode et Dominique Clorennec du LOA pour m'avoir fait faire mes premiers pas dans le monde de la diffusion multiple, Bruno Lombard et Joël Piraux du LMA pour leur collaboration sur les simulations numériques, et Géraldine Villain du LCPC pour ses conseils et enseignements sur le matériau béton. Merci également à Olivier Durand pour sa précieuse aide apportée lors des mesures expérimentales, et à Michel Dauvergne, Thierry Sedran, et tout l'équipe TGCE du LCPC pour la réalisation des dalles de béton.

Merci à toute l'équipe de la section RMS-RG du LCPC, et en particulier à Philippe Côte pour m'avoir accueilli dans de si bonnes conditions. Une pensée spéciale aux autres doctorants du labo pour les différentes pauses-café et autres moments de détente.

La liste ne serait pas complète sans citer tous mes amis et ma famille qui ont su me supporter et me soutenir durant ces trois années. C'est aussi grâce à eux que cette thèse a pu être menée à bien !

Enfin, je ne remercierai jamais suffisamment Caro pour tout ce qu'elle m'apporte.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 État de l'art et orientations d'étude **5**
1.1 Caractéristiques des bétons . . . 6
1.1.1 Constituants . . . 6
1.1.2 Formulation . . . 7
1.1.3 Propriétés mécaniques . . . 8
1.2 Évaluation non destructive des bétons . . . 9
1.2.1 Enjeux . . . 9
1.2.2 Principales méthodes . . . 9
1.2.3 Propagation ultrasonore . . . 11
1.2.4 Potentialité des méthodes ultrasonores pour l'évaluation des bétons . . . 16
1.3 Mesures expérimentales : revue . . . 16
1.3.1 Présentation . . . 16
1.3.2 Génération et réception . . . 17
1.3.3 Auscultation sonique . . . 18
1.3.4 Influence de la porosité . . . 18
1.3.5 Influence des inclusions rocheuses . . . 20
1.3.6 Autres types d'études . . . 21
1.4 Orientations de l'étude . . . 21
1.4.1 Position de l'étude . . . 21
1.4.2 Approches pour la modélisation du béton . . . 22
1.4.3 Mesures expérimentales . . . 23

2 Diffusion multiple d'inclusions élastiques dans une matrice élastique **25**
2.1 Inclusion d'un diffuseur élastique dans une matrice élastique . . . 26
2.1.1 Présentation du problème . . . 26
2.1.2 Cas 2D : diffuseur cylindrique . . . 27
2.1.3 Paramètres de diffraction . . . 30
2.1.4 Cas 3D : diffuseur sphérique . . . 35
2.2 Modélisation de la diffusion multiple . . . 40
2.2.1 Développements théoriques . . . 40
2.2.2 Approximations . . . 42
2.2.3 Application aux bétons . . . 45
2.3 Simulations numériques bidimensionnelles . . . 49
2.3.1 Présentation des simulations . . . 49
2.3.2 Acquisition du champ cohérent . . . 54
2.3.3 Mesure de la vitesse de phase et de l'atténuation . . . 55
2.3.4 Analyse des résultats sur les bétons . . . 59
2.4 Conclusions et perspectives . . . 65

3 Ondes de compression dans le béton : aspects expérimentaux 67
3.1 Modèle de viscoélasticité linéaire . . . 68
3.1.1 Relations contrainte-déformation en milieu 1D . . . 68
3.1.2 Modèle à **Q** constant : modèle de Kjartansson . . . 70
3.1.3 Application aux milieux hétérogènes . . . 72
3.2 Étude expérimentale du champ cohérent dans le béton avec des ondes de compression . . . 74
3.2.1 Protocole expérimental . . . 74
3.2.2 Prétraitements et obtention du champ cohérent . . . 76
3.2.3 Comparaison des énergies du champ cohérent et incohérent . . . 80
3.2.4 Paramètres de propagation : étude du champ cohérent . . . 82
3.3 Potentiel de l'étude de l'intensité incohérente dans le béton . . . 85
3.3.1 Présentation . . . 85
3.3.2 L'approximation de diffusion . . . 85
3.3.3 Application aux signaux expérimentaux . . . 90
3.3.4 Estimation de $\boldsymbol{\xi}$ par régression linéaire . . . 93
3.4 Conclusions . . . 96

4 Étude des ondes de Rayleigh cohérentes dans le béton 99
4.1 Ondes de Rayleigh . . . 100
4.1.1 Relation de dispersion en milieu élastique . . . 100
4.1.2 Onde de Rayleigh en milieu viscoélastique . . . 103
4.1.3 Ondes de Rayleigh en milieu hétérogène . . . 104
4.2 Sensibilité des ondes de Rayleigh cohérentes aux propriétés du béton . . . 105
4.2.1 Objectifs . . . 105
4.2.2 Variations des coefficients de qualité Q_p^0 et Q_s^0 du mortier . . . 106
4.2.3 Variations des modules d'Young E^0 ou de cisaillement μ^0 et du coefficients de Poisson ν^0 du mortier . . . 107
4.2.4 Conclusions de l'étude . . . 109
4.3 Mesures expérimentales des ondes de Rayleigh cohérentes sur du béton . . . 110
4.3.1 Protocole expérimental . . . 110
4.3.2 Prétraitements et obtention du champ cohérent . . . 113
4.3.3 Vitesse de groupe . . . 116
4.3.4 Résultats expérimentaux et discussion . . . 122
4.3.5 Nombre de réalisations du désordre . . . 126
4.4 Conclusions . . . 128

5 Synthèse et perspectives 131
5.1 Modélisation . . . 131
5.2 Mesures expérimentales . . . 132
5.3 Perspectives . . . 133
5.3.1 Simulations numériques . . . 133
5.3.2 Mesures expérimentales . . . 134
5.3.3 Modélisation analytique . . . 136

Références bibliographiques 138

Annexes 149

A Diffraction par un cylindre : détermination des coefficients de diffraction dans le domaine fréquentiel **i**
A.1 Formulation matricielle . . . i
A.2 Onde incidente de compression . . . ii
A.3 Onde incidente de cisaillement . . . iii

B Diffraction par une sphère en milieu élastique **v**
B.1 Conditions aux limites . . . v
B.1.1 Expression des déplacements et des contraintes . . . v
B.1.2 Conditions à l'interface . . . v
B.1.3 Condition de Sommerfeld . . . vi
B.1.4 Solutions générales des equations de Helmholtz . . . vi
B.2 Expression des champs . . . vi
B.2.1 Onde incidente de compression . . . vi
B.2.2 Onde incidente de type S . . . vii
B.3 Résolution du problème . . . viii
B.3.1 Incidence P . . . viii
B.3.2 Incidence S . . . ix
B.4 Expression des champs diffractés en champ lointain . . . x
B.4.1 Onde incidente de compression . . . xi
B.4.2 Onde incidente de cisaillement . . . xi
B.5 Sections efficaces . . . xi
B.5.1 Onde incidente de compression . . . xii
B.5.2 Onde incidente de cisaillement . . . xiii

C Effets du filtrage numérique **xv**
C.1 Filtre passe bande de Butterworth . . . xv
C.2 Filtrage dans une bande de fréquences "large" . . . xvi
C.3 Filtrage dans une bande de fréquences "étroite" . . . xvi
C.4 Conclusions . . . xvi

D Modélisation du rayonnement des transducteurs **xix**
D.1 Piston plan en régime harmonique. . . . xix
D.1.1 Champ rayonné par une sphère . . . xix
D.1.2 Rayonnement par un élément de surface . . . xix
D.1.3 Disque . . . xx
D.2 Champ dans l'axe du piston - Distance de Fresnel . . . xx
D.3 Diagramme de rayonnement en champ lointain . . . xxii
D.3.1 Amplitude . . . xxii
D.3.2 Retards temporels . . . xxiii
D.4 Conclusion . . . xxv

E Formulations des bétons pour les mesures en ondes de surface **xxvii**

Introduction générale

Le suivi du vieillissement des ouvrages est une problématique importante pour le génie civil. De nombreux ouvrages en béton (digues, enceintes de confinement de centrales nucléaires, ponts, etc.) ont été réalisés à une période où leur durée de vie prévisionnelle était mal connue, et certains ouvrages ont atteint une cinquantaine d'années. Le problème du vieillissement et de la durabilité du béton se pose alors en termes de coûts de remplacement ou de réhabilitation, mais aussi en terme de sécurité et de risques. Il est nécessaire de pouvoir d'une part détecter des débuts d'endommagement le plus tôt possible afin de limiter le coût de réparation, et d'autre part de pouvoir prédire la durée de vie résiduelle d'une structure encore saine.

L'utilisation de méthodes d'évaluations dites "non destructives" s'avère donc indispensable lorsqu'il s'agit d'ouvrages existants et en fonctionnement et permet de suivre leurs évolutions au cours du temps. Parmi les différentes méthodes d'évaluations non destructives pouvant être utilisées pour caractériser le béton (thermographie, méthodes électrochimiques, gammagraphie, etc.), les méthodes utilisant la propagation d'ondes électromagnétiques (radar, mesures capacitives, etc.) ou mécaniques (impact écho, tomographie, etc.) ont un fort potentiel pour la caractérisation des ouvrages [Breysse and Abraham, 2005]. Ces méthodes visent à déterminer des caractéristiques différentes et complémentaires, indicatrices de "l'état de santé" du béton. Les méthodes basées sur les ondes électromagnétiques seront plus sensibles à la teneur en eau, à la présence d'ions chlorures, et permettent de localiser des éléments métalliques (armatures, gaines de précontrainte) tandis que les méthodes utilisant les ondes mécaniques seront indicatrices de propriétés mécaniques (modules de compression ou de cisaillement en petites déformations, porosité, micro et macro fissurations,...).

Les ouvrages en béton tiennent une grande part de leurs propriétés mécaniques de leurs armatures d'acier. La première nappe de ferraillage se situe à quelques centimètres de profondeur sous la surface (classiquement entre 3 et 5 cm). Cette couche de béton, appelée "béton d'enrobage" ou "béton de peau", est en contact direct avec le milieu extérieur et est particulièrement soumise aux dégradations. Son principal rôle est d'assurer la protection de ces aciers contre les agents agressifs venant du milieu ambiant entourant l'ouvrage (air, eau, ions, ...) [Grattan-Bellew, 1996]. La corrosion des armatures provoque le gonflement des aciers, conduisant à des macro-fissurations de la structure [Raharinaivo et al., 1998]. Il est donc tout particulièrement important de pouvoir déterminer les caractéristiques de cette couche et de pouvoir diagnostiquer d'éventuels endommagements ou des défauts de mise en oeuvre (épaisseur insuffisante, etc.) le plus tôt possible, afin de prévenir les débuts de corrosion des armatures. En particulier, une augmentation de la porosité en surface du béton favorisera la pénétration des ions agressifs pour les aciers [Baroghel-Bouny, 2004].

Les ondes mécaniques sont adaptées pour déceler des changements de porosité ou l'apparition de micro-fissurations dans le béton, qui induisent des changements de célérités et d'atténuation des ondes. Parmi les différents types d'ondes mécaniques, les ondes de Rayleigh possèdent en outre la propriété de se propager le long de la surface libre des matériaux et ont une profondeur de pénétration de l'ordre de la moitié de leur longueur d'onde. Ce type d'onde peut donc être utilisé pour caractériser le béton d'enrobage, en adaptant les longueurs d'onde utilisées aux pro-

fondeurs d'investigations recherchées (allant du millimètre à quelques centimètres). Ces ondes possèdent de plus l'avantage de ne nécessiter l'accès qu'à une seule face du béton, des mesures en transmission étant le plus souvent impossibles à réaliser sur des ouvrages réels, soit que l'accès aux deux faces soit impossible, ou que les épaisseurs de béton soient trop importantes pour pouvoir étudier le béton d'enrobage.

L'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans le béton est complexe car elle met en jeu divers phénomènes couplés ; porosité, saturée ou non, hétérogénéités de différentes natures (ciment, sable, granulats, pores) et dont les dimensions vont du nanomètre au centimètre. Lorsque la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la dimension des hétérogénéités, les ondes vont fortement interagir avec elles et leur énergie va être redistribuée dans tout l'espace. Ces évènements de diffraction étant nombreux, on parle de diffusion multiple. Ils doivent être traités de manière statistique.

Les champs ultrasonores observés pourront être scindés en une partie dite *cohérente* (qui résiste au calcul de moyennes sur plusieurs réalisations indépendantes du désordre, i.e. plusieurs configurations de position/taille d'hétérogénéités), et une partie *incohérente*, également appelée *coda*, constituée d'arrivées tardives des ondes ayant subi plusieurs évènements de diffraction. La partie cohérente des ondes correspond à une onde s'étant propagée dans un milieu homogène effectif. La *coda* s'étend temporellement sur plusieurs dizaines de fois la durée de l'impulsion initiale. Ces deux parties du champ ultrasonore contiennent des informations de nature différentes sur le matériau.

L'étude du champ cohérent permet de remonter à des vitesses de propagation et des atténuations effectives. Cependant ces observables sont modifiées par les évènements de diffusion multiple. En particulier, une partie de l'énergie incidente des ondes étant déviée par les hétérogénéités, l'atténuation mesurée sera plus importante que pour un milieu homogène. La difficulté sera alors de pouvoir dissocier les effets liés à la présence des hétérogénéités, c'est-à-dire à la structure du matériau, des effets liés aux propriétés mécaniques recherchées telles que la porosité. Il faudra pour cela s'appuyer sur les théories de diffusion multiple pour décrire la propagation des ondes de Rayleigh dans le milieu effectif relatif à un matériau viscoélastique contenant des hétérogénéités viscoélastiques de différentes dimensions.

Ce mémoire sera subdivisé en quatre chapitres principaux :

Un premier chapitre présentera un "état de l'art" sur le contrôle non destructif des bétons avec des ondes mécaniques. La composition du béton et ses différentes propriétés seront présentées, ainsi que les différentes approches qui ont été utilisées dans la littérature pour en faire une évaluation non-destructrive. Un ensemble d'hypothèses permettant de décrire la propagation des ondes mécaniques dans le béton aux fréquences considérées sera envisagé, et un modèle de propagation sera choisi.

Dans un second chapitre, nous nous intéresserons aux théories des milieux effectifs de la diffusion multiple dans le cas d'inclusions élastiques dans une matrice élastique. Ces théories permettent de modéliser le comportement du champ cohérent. On s'appuiera pour cela sur une modélisation analytique et des simulations numériques en différences finies à deux dimensions. Ces modélisations se feront dans un premier temps sur les ondes de volume (de compression et de cisaillement). Cela permettra d'appréhender les phénomènes tant qualitativement que quantitativement.

Au troisième chapitre, nous verrons comment prendre en compte l'amortissement des constituants du béton (mortier et granulats) dans les modèles de milieux effectifs à l'aide d'un modèle de viscoélasticité. Une première étude utilisant des ondes de compression en transmission permet expérimentalement de justifier le choix du modèle retenu pour l'amortissement dans le mortier et d'observer les effets de la diffusion multiple dans le béton à la fois sur les parties cohérentes et

incohérentes des ondes. Le traitement de la partie incohérente du champ mesuré est également abordé.

Un dernier chapitre s'intéressera alors à la propagation des ondes de surface cohérentes dans un milieu viscoélastique multiplement diffuseur. Une étude expérimentale est réalisée en se basant sur les hypothèses et les résultats des chapitres précédents. Le protocole expérimental choisi ainsi que les traitements des signaux utilisés sont présentés afin de déterminer les vitesses de phase et de groupe cohérentes ainsi que les facteurs d'amortissement. Les résultats montrent la sensibilité de ces observables aux différentes propriétés du béton. Les avantages et les limites liés au protocole expérimental choisi sont ensuite discutés.

Le document se terminera en dégageant les perspectives ouvertes par les différents aspects de ce travail pour l'étude de la propagation des ondes dans le béton, et dans les matériaux hétérogènes en général.

Chapitre 1

État de l'art et orientations d'étude

Sommaire

1.1 Caractéristiques des bétons 6
1.1.1 Constituants 6
1.1.2 Formulation 7
1.1.3 Propriétés mécaniques 8
1.1.3.a Béton sain 8
1.1.3.b Béton endommagé 8
1.2 Évaluation non destructive des bétons 9
1.2.1 Enjeux 9
1.2.2 Principales méthodes 9
1.2.2.a Méthodes destructives 9
1.2.2.b Mesures semi destructives 9
1.2.2.c Méthodes électrochimiques 10
1.2.2.d Mesures utilisant la propagation d'ondes 10
1.2.3 Propagation ultrasonore 11
1.2.3.a Principes théoriques 11
1.2.3.b Ondes guidées 12
1.2.3.c Amortissement 13
1.2.3.d Milieux hétérogènes 14
1.2.3.e Atténuation due aux hétérogénéités 15
1.2.4 Potentialité des méthodes ultrasonores pour l'évaluation des bétons . . 16
1.3 Mesures expérimentales : revue 16
1.3.1 Présentation 16
1.3.2 Génération et réception 17
1.3.2.a Génération par "choc" 17
1.3.2.b Utilisation de transducteurs 17
1.3.2.c Mesures sans contact 18
1.3.3 Auscultation sonique 18
1.3.4 Influence de la porosité 18
1.3.4.a Porosité artificielle 19
1.3.4.b Rapport E/C 19
1.3.4.c Micro-fissures 19
1.3.4.d Taux de saturation 20
1.3.5 Influence des inclusions rocheuses 20
1.3.5.a Sables 20
1.3.5.b Gros granulats 20
1.3.6 Autres types d'études 21

1.4 Orientations de l'étude 21
1.4.1 Position de l'étude 21
1.4.2 Approches pour la modélisation du béton 22
1.4.3 Mesures expérimentales 23

Introduction

Ce chapitre présente les éléments permettant d'aborder l'étude de la propagation des ondes ultrasonores dans le béton. Les caractéristiques mécaniques générales du béton sont présentées dans un premier temps, ainsi que les bases de la propagation ultrasonore. Une revue des différentes mesures expérimentales réalisées sur différents types de bétons dans la littérature permet ensuite de lister les difficultés inhérentes à la génération, la réception, le traitement, et l'interprétation des mesures sur le béton. L'orientation de l'étude sera ensuite dégagée en fonction des objectifs et de l'étude bibliographique.

1.1 Caractéristiques des bétons

1.1.1 Constituants

Le béton désigne un matériau composé de granulats et de sables liés entre eux par une pâte (liant). On peut distinguer les bétons "hydrauliques" des bétons "bitumineux". Les bétons "bitumineux" sont les bétons dont le liant est à base de bitume, ils servent principalement pour les couches de roulement des chaussées. Ces bétons ne font pas l'objet de la présente étude. Dans les bétons "hydrauliques", le liant est une pâte à base de ciment et d'eau. Le terme *béton* ne désignera par la suite que les bétons "hydrauliques". Certaines additions minérales et adjuvants peuvent être ajoutés en faible quantité afin de donner des propriétés spéciales, comme des fumées de silice ou des super-plastifiants. Lorsque le béton ne contient pas de granulats mais uniquement du sable, du ciment et de l'eau on parle alors de *mortier*. Une vue en coupe d'un bloc de béton est présentée en Fig. 1.1.

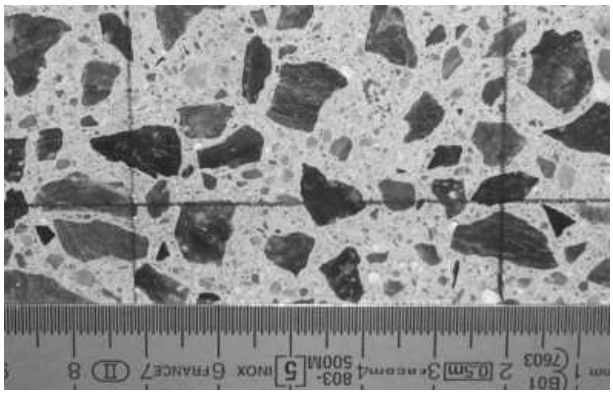


Fig. 1.1 – Vue en coupe d'un bloc de béton hydraulique.

Les granulats sont les plus gros constituants du béton, et peuvent provenir de différentes roches inertes [Dreux and Festa, 1998] (silico-calcaires, basaltes, granites, ...). Ils représentent environ 50% en masse du béton complet. Ils peuvent être "roulés" (granulats issus du lit de rivières) et ont alors une forme arrondie, ou "concassés" (issus de carrières) et peuvent présenter des formes angulaires. Leur dimension est déterminée par criblage sur des tamis à mailles carrées. Classiquement, leur granulométrie peut varier de 5 mm à 20 mm voire plus. On peut noter

également le cas des bétons dits “cyclopéens” utilisés dans le cas d’ouvrages de grandes dimensions comme les barrages, et dont les granulats peuvent mesurer jusqu’à 200 mm. Les bétons sont caractérisés par le paramètre D_{max} qui représente le diamètre des granulats de plus grandes dimensions. Une bonne part de la résistance des bétons est tirée des granulats, et particulièrement des plus gros d’entre eux.

Le sable représente les constituants rocheux dont les dimensions peuvent varier de 100 μm à environ 5 mm. Leur granulométrie est définie de la même manière que pour les plus gros granulats. Des exemples de courbes de granulométrie de granulats sont présentées en figure 1.2.

La dimension des grains de ciment étant de l’ordre de quelques micromètres, le béton présente alors une continuité de dimensions allant du micromètre au centimètre. Cette continuité assure une bonne compacité du matériau en minimisant les espaces entre les constituants, ce qui améliore les propriétés mécaniques de l’ensemble.

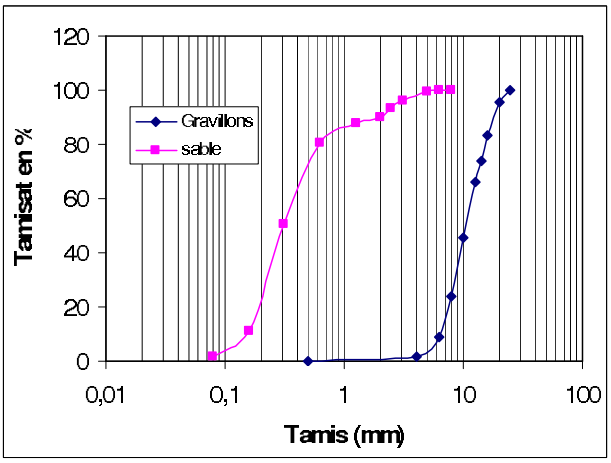


Fig. 1.2 – Exemple de courbes de granulométrie des granulats dans un béton.

1.1.2 Formulation

Les bétons sont conçus suivant une formulation, donnée sous forme de quantité massique de chaque composant afin d’obtenir un volume de 1 m^3 de béton. Il existe différentes méthodes de formulations, qui visent à optimiser l’empilement des différentes particules (grains de ciment, sable, gravillons) afin de minimiser les espaces vides [Dreux and Festa, 1998; de Larrard, 2000]. Le choix de la formulation permet d’obtenir des propriétés mécaniques ou de mise en oeuvre recherchées.

Le mélange des différents constituants du béton lors de sa fabrication s’appelle une “gâchée”. L’eau du mélange hydrate progressivement le ciment. La pâte de ciment hydratée forme alors un matériau poreux qui solidarise le sable et les granulats entre eux et le matériau acquiert ses propriétés mécaniques. On appelle “cure” le moyen utilisé pour protéger le béton des échanges avec l’extérieur (en particulier le séchage) afin d’assurer la prise puis le durcissement de manière optimale, la cure est particulièrement importante pendant le jeune âge du béton. On considère traditionnellement que les propriétés mécaniques finales du béton sont atteintes au bout de 28 jours. Ces propriétés évoluent en fait continûment et ne peuvent être considérées comme réellement stabilisées qu’au bout de 90 jours ou plus.

Le rapport de la quantité massique d’eau sur celle du ciment (appelé rapport E/C) joue un rôle important sur les propriétés mécaniques du béton. Un béton ayant un rapport E/C élevé sera plus aisé à mettre en oeuvre, cependant, l’espacement entre les grains de ciment sera plus grand du fait de la quantité d’eau d’hydratation et la porosité finale de la pâte de ciment sera plus importante. A l’inverse un rapport E/C faible donnera un béton plus compact avec de

meilleures propriétés mécaniques mais une ouvrabilité plus faible. Ce rapport E/C est en général compris entre 0,3 et 0,9 pour les cas les plus extrêmes.

1.1.3 Propriétés mécaniques

1.1.3.a Béton sain

Les propriétés mécaniques du béton sain dépendent de la qualité des constituants, de la formulation et les conditions de cure. Les propriétés de différents bétons seront donc très variables.

Pour les ouvrages, on caractérise généralement les bétons par leur résistance à la compression R_c, généralement déterminée après 28 jours de cure. La résistance à la traction R_t peut également être déterminée, elle traduit alors la résistance à la fissuration du béton. Cette résistance à la traction correspond à environ 10% de la résistance à la compression du béton. On préférera dans cette étude se référer au module d'élasticité E et au coefficient de Poisson ν. Le tableau 1.1 présente les plages de variations des propriétés mécaniques moyennes des bétons courants, ρ représente la masse volumique du béton. Il existe également des bétons dits "hautes performances" ayant des valeurs de R_c bien plus élevées pouvant atteindre 100 MPa ou plus.

R_c (MPa)	R_t (MPa)	E (GPa)	ν	ρ (kg.m^{-3})
12-60	1-5	20-40	0,15 - 0,30	2200-2400

Tab. 1.1 – Plages de variations des propriétés mécaniques moyennes des bétons courants, d'après Dreux and Festa [1998].

Une autre propriété mécanique importante du béton est la porosité. Elle est définie comme le volume total des vides contenus dans le béton pour 1 m^3 de matériau. Cette porosité augmente avec le rapport E/C et est en général comprise entre 11 et 18%. Elle est constituée de pores plus ou moins inter-connectés, ainsi que de micro ou macro-fissurations. Les dimensions caractéristiques des pores vont d'une dizaine de nanomètres au millimètre. Ils peuvent être remplis d'air ou d'eau libre suivant la teneur en eau libre du béton. Cette teneur en eau libre désigne l'eau présente dans les vides du béton et ne participant pas à l'hydratation du ciment. On recherche particulièrement une faible porosité lors de la formulation du béton, qui assure une meilleure résistance mécanique du béton. La porosité du béton dépend du rapport E/C, un rapport E/C élevé induisant une plus forte porosité, mais également des conditions de cure ; l'hygrométrie doit être maintenue élevée pendant la cure afin d'assurer la meilleure hydratation possible du ciment, de même une augmentation de la durée de cure diminue le diamètre moyen des pores [Neville, 2000; Baron and Sauterey, 1982].

1.1.3.b Béton endommagé

Les causes de dégradation des bétons sont nombreuses, et ont pour conséquence d'altérer les propriétés mécaniques du béton. Elles peuvent être principalement d'origines chimiques (réactions alcali-granulats, carbonatation, attaques par des acides, des sulfates, des chlorures, etc.), physiques (fissurations dues au chargement, gel-dégel de l'eau libre, etc.) [Grattan-Bellew, 1996; Breysse and Abraham, 2005], ou thermiques [Handoo et al., 2002]. Dans la majorité des cas, une augmentation du degré de micro-fissurations ou de la porosité apparaît suite à des dégradations[Torrenti et al., 1999], conduisant à une moins bonne perméabilité du béton d'enrobage [Picandet et al., 2001]. Dans le cas de la carbonatation, la porosité peut cependant diminuer [Papadakis et al., 1991; Villain et al., 2007].

1.2 Évaluation non destructive des bétons

1.2.1 Enjeux

Le béton est donc un matériau dont les propriétés dépendent de sa formulation initiale, de ses conditions de mise en oeuvre, et qui évoluent dans le temps en fonction de son environnement et de différents types de dégradations qu'il est susceptible de subir. La connaissance et le suivi de ses différentes propriétés mécaniques sont donc primordiaux pour la maintenance des ouvrages de génie civil.

L'ensemble des ouvrages de génie civil, qui va des petits ouvrages simples aux grands ouvrages d'art comme les ponts, ou aux ouvrages particulièrement sensibles comme les enceintes de confinements des centrales nucléaires, est un patrimoine vieillissant, dont certains atteignent une cinquantaine d'années. Le problème du vieillissement du béton se pose en terme de coût (coût de réhabilitation ou de remplacement) et de risque d'accidents allant jusqu'à des effondrements. Les dégradations et endommagements doivent donc être détectés le plus tôt possible pour éliminer les risques, et limiter les coûts de réparation et de réhabilitation. Certains ouvrages peuvent également parvenir en bon état au terme de la durée de vie pour laquelle ils ont été conçus, et l'évaluation de l'état de santé de ces ouvrages peut permettre de décider ou non de la prolongation de leur exploitation.

L'ensemble des méthodes d'évaluation du béton, qu'elles soient destructives ou non-destructives, peut alors apporter un diagnostic précieux aux exploitants de l'ouvrage. Elles peuvent, suivant leur précision, être utilisées pour simplement détecter une altération des caractéristiques des matériaux, localiser une zone endommagée, l'étendue de l'endommagement, ou même quantifier précisément l'évolution de cet endommagement au cours du temps et prédire les évolutions futures.

1.2.2 Principales méthodes

1.2.2.a Méthodes destructives

La plupart des propriétés des bétons sont en général évaluées par des essais sur des échantillons ayant été confectionnés avec la même gâchée que les ouvrages (éprouvettes normalisées 16/32 par exemple) ou bien ayant été prélevés directement sur les ouvrages à ausculter [Bungey and Millard, 1996]. Ces essais sont destructifs. Les mesures des résistances R_c et R_t sont par exemple réalisées avec des presses (compression, traction par fendage, par flexion, etc.). La porosité peut être déterminée par le volume de mercure ou d'eau qui peut être injecté dans le béton [Baroghel-Bouny et al., 2007], ou encore par gamma-densimétrie [Villain et al., 2007].

L'utilisation de méthodes dites non destructives applicables *in situ* est primordiale dans les cas où il est impossible de prélever un échantillon sur la structure, ou si l'on souhaite suivre l'évolution d'une caractéristique au cours du temps. Les principales techniques d'auscultation du béton couramment utilisées en génie civil sont présentées dans les ouvrages de Malhotra and Carino [1991], Bungey and Millard [1996], ou Breysse and Abraham [2005].

1.2.2.b Mesures semi destructives

Une série de méthodes permet d'évaluer *in situ* la résistance mécanique en surface du béton. Leur utilisation est assez répandue et est normalisée (norme européenne EN 13791).

Des scléromètres permettent de mesurer la dureté de la surface de béton. La hauteur de rebond d'une masse projetée avec une certaine vitesse sur la surface du béton permet de remonter à la résistance en surface du béton. Cet appareil ne donne qu'une information locale sur les propriétés du béton.

D'autres méthodes telles que les essais de résistance à la pénétration (sonde Windsor) ou des essais d'arrachement d'une tige métallique scellée dans le béton (*pull-out*) fournissent également des informations locales sur la résistance à la compression du béton en surface. Ces méthodes sont partiellement destructrices car elles laissent des impacts et des trous dans le parement (que l'on peut reboucher facilement).

Ces méthodes sont couramment utilisées sur les ouvrages et peuvent donner des informations très utiles aux maîtres d'œuvres. Cependant, la précision reste faible et l'information n'est que locale.

1.2.2.c Méthodes électrochimiques

Les méthodes électrochimiques permettent principalement de caractériser l'état de corrosion des armatures métalliques. Elles se basent sur la mesure du passage d'un courant électrique dans le matériau. La mesure du potentiel de corrosion, ou potentiel d'électrode, est par exemple très couramment utilisée ; la mesure du potentiel de la pile électrochimique formée par l'armature d'acier et une électrode de référence placée en surface du béton permet de remonter au degré de corrosion de l'armature. On peut également citer les mesures de résistance électrique du béton, et les mesures de résistance de polarisation (ou vitesse de corrosion).

1.2.2.d Mesures utilisant la propagation d'ondes

Les méthodes utilisant la propagation d'ondes et l'interaction de ces ondes avec le béton sont parmi les méthodes ayant le plus grand potentiel pour l'évaluation non destructive du béton. En effet, les propriétés de la propagation des ondes sont directement liées aux propriétés du matériau dans lequel elles se propagent. Ces ondes peuvent être de type électromagnétiques ou mécaniques et sont sensibles à des propriétés différentes du béton. Elles peuvent être utilisées pour obtenir des informations à différentes échelles (millimétrique, centimétrique, ou de l'ordre de la dizaine de centimètres) en fonction de la longueur d'onde utilisée [Breysse and Abraham, 2005].

Les méthodes utilisant la propagation d'ondes électromagnétiques sont les méthodes capacitives, résistives, ou les méthodes GPR (Ground Penetration Radar). Les ondes électromagnétiques à basse fréquence peuvent être utilisées pour détecter des éléments métalliques, et permettre de localiser les armatures d'acier et d'en estimer le diamètre, ou la profondeur. Les gaines métalliques des câbles de précontraintes peuvent également être localisées, ou encore la présence de vides de grandes dimensions dans le béton (phénomène de "nid de cailloux") [Raharinaivo et al., 1998]. Ces ondes sont sensibles aux constantes diélectriques du milieu, et peuvent être utilisées à plus hautes fréquences pour remonter, après étalonnage, à la teneur en eau [Derobert et al., 2008].

Les méthodes utilisant des ondes mécaniques se basent sur la propagation d'ultrasons dans le béton. Ces ondes sont sensibles aux propriétés mécaniques telles que les modules d'élasticité et le coefficient de Poisson, ou encore le taux de porosité. Les méthodes les plus couramment employées à ce jour sont l'impact écho, l'auscultation sonique ("pulse velocity") et l'émission acoustique. On peut également citer les méthodes basées sur la tomographie sismique ou les ondes de surface mais qui sont moins utilisées. Les ondes acoustiques peuvent être employées pour détecter des fissures, des vides, ou mesurer des épaisseurs. Les caractéristiques mécaniques du béton peuvent également être évaluées après étalonnage.

Ces deux familles de méthodes fournissent des informations complémentaires mais néanmoins corrélées [Villain et al., 2008]. La suite de ce travail porte uniquement sur la propagation des ondes mécaniques dans le béton.

1.2.3 Propagation ultrasonore

1.2.3.a Principes théoriques

Le terme “onde” représente la propagation des perturbations d'un milieu par rapport à sa position d'équilibre. Dans le cas des ondes mécaniques, la perturbation est un déplacement $\mathbf{u}$ d'une particule du milieu. Dans un milieu élastique homogène, en l'absence de forces extérieures, on a la relation fondamentale de la dynamique [Royer and Dieulesaint, 1996, chap. 3] :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \tag{1.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ représente le tenseur des contraintes et ρ la masse volumique[1].

En appliquant la loi de Hooke en milieu isotrope, élastique et homogène, qui donne une relation contrainte-déformation entre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{u}$ en fonction des paramètres de Lamé λ et μ, on obtient l'équation de propagation (Eq. 1.2) :

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla.\mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \tag{1.2}$$

On peut alors décomposer $\mathbf{u}$ en un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vectoriel $\boldsymbol{\Psi}$ suivant la décomposition de Helmholtz [Graff, 1991, chap. 5] :

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \tag{1.3}$$

On a par ailleurs les relations générales 1.4 :

$$\nabla \times \nabla\mathbf{f} = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0 \qquad \forall \mathbf{f}. \tag{1.4}$$

Le potentiel scalaire ϕ décrit la propagation d'une onde de compression (onde P ou Primaire, également appelée onde longitudinale) dont le déplacement se fait parallèlement au sens de la direction de propagation. Le potentiel vectoriel $\boldsymbol{\Psi}$ décrit la propagation d'une onde de cisaillement (onde S ou Secondaire, également appelée onde transverse), dont le déplacement se fait dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Les équations 1.3 et 1.2 conduisent à deux équations propagatives de d'Alembert :

$$\begin{cases} c_p^2\nabla^2\phi - \ddot{\phi} &= 0 \\ c_s^2\nabla^2\boldsymbol{\Psi} - \ddot{\boldsymbol{\Psi}} &= 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} c_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ c_s &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

où c_p et c_s sont des célérités des ondes P et S dans le matériau. En supposant des solutions harmoniques en $\mathrm{e}^{-i\omega t}$, $\omega = 2\pi f$ représentant la pulsation pour la fréquence f, et t le temps, les équations 1.5 conduisent aux équations de Helmholtz (Eq. 1.6) :

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_p^2)\phi &= 0 \\ (\nabla^2 + k_s^2)\boldsymbol{\Psi} &= 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} k_p &= \omega/c_p \\ k_s &= \omega/c_s \end{aligned} \tag{1.6}$$

où k_p et k_s sont les nombres d'onde associés aux ondes P et S.

La propagation des ondes dans un solide élastique homogène isotrope infini peut donc se faire selon deux modes P et S, dont les célérités dépendent des propriétés mécaniques des matériaux

[1] Dans tout le document, on notera les quantités vectorielles ou tensorielles avec des caractères en gras, comme le déplacement particulaire $\mathbf{u}$ ou le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, et les grandeurs scalaires avec des caractères normaux (comme la masse volumique ρ ici). Les notations $\dot{\mathbf{u}}$ et $\ddot{\mathbf{u}}$ désigneront respectivement les dérivées temporelles simples et doubles du vecteur $\mathbf{u}$.

(coefficients de Lamé λ et μ). Les ondes P sont plus rapides que les ondes S. Il est également possible d'exprimer ces coefficients en fonction d'autres constantes élastiques comme le module d'Young E ou le coefficient de Poisson ν. On obtient alors les expressions suivantes (Eq. 1.7) pour les célérités :

$$\begin{cases} c_p &= \sqrt{\dfrac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \\ c_s &= \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}} \end{cases} \tag{1.7}$$

Malgré les fortes hypothèses ayant été faites lors du calcul (élasticité, isotropie, milieu infini et homogène) ces expressions restent plus ou moins valables dans le cas de matériaux réels. Il est donc possible de remonter aux propriétés mécaniques des matériaux, ou du moins de déceler des changements de propriétés consécutives à un endommagement, en mesurant les célérités des ondes.

1.2.3.b Ondes guidées

Les modes de propagation P et S sont appelées ondes de volume. Elles se propagent dans tout le matériau et sont définies pour un milieu infini. En présence de conditions aux limites liées au caractère fini du milieu (présence d'interfaces), d'autres types d'ondes apparaissent.

Onde de Rayleigh. L'onde de Rayleigh est l'onde de surface la plus couramment utilisée. Elle a été décrite pour la première fois par Lord Rayleigh [1885]. Elle apparaît dans un milieu semi-infini au voisinage de la surface libre, résultant d'interférences entre des ondes de volume P et S. Le mouvement particulaire qui lui est associé est donc une combinaison de mouvements de compression et de cisaillement, la composante cisaillante étant la plus importante au voisinage de la surface. Son amplitude décroît avec la profondeur.

L'onde de Rayleigh est plus énergétique que les ondes P et S au voisinage de la surface, ce qui la rend plus aisée à générer, observer et mesurer. Sa profondeur de pénétration est de l'ordre de la demi-longueur d'onde. L'onde de Rayleigh, non dispersive en milieu homogène, devient dispersive dans le cas d'un milieu dont les propriétés varient avec la profondeur. C'est cette propriété qui en fait un outil efficace pour caractériser les matériaux stratifiés ou à gradient continu de propriétés. On peut notamment citer leur utilisation en sismique [Aki and Richards, 1980] ou en exploration géophysique [Sheriff and Geldart, 1995; Lai and Rix, 1998].

Formalisation. La formalisation des ondes de Rayleigh est obtenue en ajoutant des conditions de contraintes nulles en surface et d'atténuation avec la profondeur (les potentiels doivent s'annuler à l'infini) sur le système d'équations 1.6[2]. La célérité c_r des ondes de Rayleigh en milieu semi-infini élastique homogène et isotrope est alors solution de l'équation 1.8, dite équation de Rayleigh :

$$q^3 - 8q^2 + \left(24 - 16\frac{c_s^2}{c_p^2}\right) q + 16\left(\frac{c_s^2}{c_p^2} - 1\right) = 0, \qquad q = \frac{c_r^2}{c_s^2}. \tag{1.8}$$

L'équation 1.8 est d'ordre 3 en q. Elle doit satisfaire la condition suivante afin d'avoir une racine réelle :

$$0 < c_r < c_s < c_p \tag{1.9}$$

Une approximation de la solution pour un milieu réel ($0 < \nu < 0,5$) a été donnée par Viktorov [1967] :

[2] Le développement de cette formalisation sera détaillé au chapitre 4.

$$c_r = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1+\nu} c_s \tag{1.10}$$

Dans le cas du béton où ν peut varier entre des valeurs extrêmes $0,15 < \nu < 0,30$, on a alors l'approximation :

$$0,90\, c_s < c_r < 0,93\, c_s \tag{1.11}$$

La célérité des ondes de Rayleigh en milieu élastique, isotrope et homogène est donc très légèrement inférieure à la célérité des ondes de cisaillement dans le matériau.

Autres types d'ondes. On distingue par ailleurs d'autres types d'ondes en fonction de la nature de l'interface. Lorsque le milieu semi-infini est surmonté d'une couche d'épaisseur finie, on peut alors avoir une onde de Love, dont le déplacement est un cisaillement horizontal [Love, 1911]. Ces ondes sont également étudiées en sismique car elles causent des dégâts importants lors de tremblements de terre.

On peut également citer les ondes de Stoneley qui se propagent le long d'interfaces entre deux milieux semi-infinis. Lorsque il s'agit d'une interface entre un milieu solide et un milieu fluide, on parle d'onde de Scholte, qui est couramment utilisée pour la caractérisation des fonds marins [Rauch, 1980; Puech et al., 2004; Bohlen et al., 2004].

Enfin, les ondes de Lamb font référence aux ondes guidées entre les deux interfaces d'une plaque [Lamb, 1904]. Ces ondes sont également très utilisées en contrôle non destructif sur différents types de structures [Cawley and Alleyne, 1996; Gibson and Popovics, 2005; Prada et al., 2005].

1.2.3.c Amortissement

En milieu élastique, une onde plane se propage jusqu'à l'infini. La notion d'onde plane est une notion mathématique. Dans la réalité, les ondes ne sont pas planes, et les milieux ne sont pas élastiques. L'énergie associée à une onde à un endroit et à un temps donné va diminuer avec le temps et la distance de propagation. On parle alors d'amortissement. De nombreuses causes peuvent être à l'origine de cet amortissement.

Amortissement géométrique. Dans le cas d'une source ponctuelle émettant des ondes de volume en milieu isotrope, les fronts d'ondes sont des sphères concentriques. Le flux d'énergie à travers chacune de ces sphères est conservé en l'absence d'autres phénomènes d'amortissement. Ainsi le flux d'énergie traversant une unité de surface diminue lorsque l'on s'éloigne de la source. On parle alors d'amortissement ou de divergence géométrique, qui est présent même en milieu non atténuant [Sheriff and Geldart, 1995]. L'amplitude A du déplacement à un point d'observation situé à la distance d de la source décroît alors en $1/d$ pour les ondes de volume.

Dans le cas d'une onde de surface se propageant parallèlement à une surface libre, les fronts d'ondes seront cylindriques et non plus sphériques. L'amortissement géométrique sera moins important et se fera en $1/\sqrt{d}$.

Pour une onde plane, la décroissance d'amplitude due à l'amortissement géométrique est nulle.

Absorption. L'absorption désigne l'énergie convertie sous forme de chaleur lors des cycles de "charge-décharge" de la déformation du matériau due au passage de l'onde. L'amplitude du déplacement lié au passage de l'onde va donc diminuer. Si le matériau est purement élastique, ces cycles de charge-décharge ne dissipent pas d'énergie, dans le cas contraire on parle de matériaux viscoélastiques. Sheriff and Geldart [1995, chap. 2] comparent les effets relatifs de l'atténuation

géométrique et de l'absorption dans le cas de la propagation dans les sols. Les effets de l'amortissement géométrique sont prépondérants à faible distance de la source. Les effets de l'absorption augmentent avec la fréquence et deviennent dominants à mesure que l'on s'éloigne de la source.

Les pertes par absorption sont en général traitées dans le cadre de la viscoélasticité linéaire. On introduit une partie imaginaire aux nombres d'onde complexes $k_p = \kappa_p + i\alpha_p$ et $k_s = \kappa_s + i\alpha_s$ des équations 1.6, avec les nombres réels $\kappa_p = \omega/c_p$ et $\kappa_s = \omega/c_s$. Les solutions de ces équations ont alors pour forme :

$$u(x,t) = u_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha(\omega)x} \, \mathrm{e}^{-i(\omega t - \kappa x)}, \tag{1.12}$$

avec $\kappa = \kappa_p$ ou κ_s et $\alpha = \alpha_p$ ou α_s. Les quantités α sont appelés facteurs d'amortissement et dépendent de la fréquence. L'étude de la propagation des ondes en milieu viscoélastique sera abordée plus en détail au chapitre 3.

Les mécanismes d'absorption peuvent également être décrits par un facteur de qualité Q, défini de la manière suivante [Aki and Richards, 1980] :

$$Q = \frac{2\pi}{(\text{fraction d'énergie perdue par cycle})} = \frac{2\pi\mathcal{E}}{\Delta\mathcal{E}}, \tag{1.13}$$

où $\Delta\mathcal{E}$ est l'énergie perdue au cours d'un cycle de "charge-décharge" et $\mathcal{E}$ l'énergie maximale fournie au cours du chargement. Il existe d'autres définitions du facteur de qualité Q [Bourbié et al., 1986] mais qui sont équivalentes. Le lien entre le facteur de qualité Q et le facteur d'amortissement α peut être approché de la manière suivante pour des facteurs de qualité suffisamment grands :

$$Q \simeq \frac{\pi f}{\alpha c}, \qquad Q > 10. \tag{1.14}$$

1.2.3.d Milieux hétérogènes

Diffraction par les hétérogénéités. Dans les milieux hétérogènes, la diffraction de l'onde par les hétérogénéités peut également être la cause de la diminution de l'amplitude du champ de déplacement observé avec la distance de propagation.

Lorsqu'une onde interagit avec une hétérogénéité du matériau, elle subit de la diffraction. Une partie de son énergie est déviée et redistribuée dans tout l'espace (Fig. 1.3). L'onde qui se propage dans la même direction que l'onde incidente après diffraction par l'hétérogénéité a donc une amplitude plus faible. Cet effet de diffraction est plus ou moins marqué suivant la fréquence de l'onde et le contraste entre l'hétérogénéité et le milieu avoisinant. Il est maximal lorsque la longueur d'onde[3] λ devient comparable à la dimension caractéristique de l'hétérogénéité D.

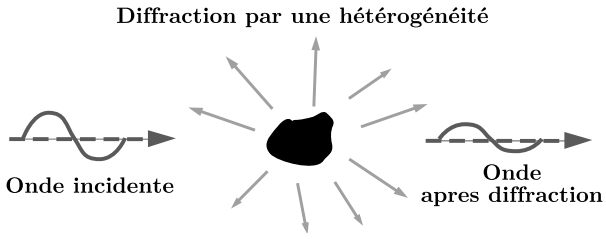


Fig. 1.3 – Diffraction d'une onde par une hétérogénéité.

Dans le cas du béton, les hétérogénéités peuvent être la porosité de la pâte de ciment, ou les inclusions comme le sable et les granulats. Ces hétérogénéités sont très nombreuses, de nature différentes et de dimensions différentes. Elles influent sur la propagation à différentes échelles. On parle alors de diffraction multiple, ou plus communément de diffusion multiple, de la dénomination anglaise *multiple scattering* (Fig. 1.4).

[3]Attention à ne pas confondre la longueur d'onde λ avec le premier paramètre de Lamé, noté λ.

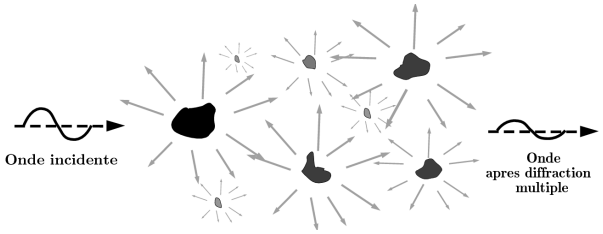


FIG. 1.4 – Diffraction multiple des ondes par les hétérogénéités.

Les ondes diffractées par les hétérogénéités subissent à leur tour d'autres évènements de diffraction et peuvent ainsi parcourir une grande distance à l'intérieur du matériau, le long d'un chemin tortueux, et éventuellement parvenir au point d'observation bien plus tard que l'onde ayant parcouru un trajet direct.

Champ cohérent et incohérent. On distingue dans le champ ayant subi de la diffusion multiple une partie *cohérente*, qui résiste à une moyenne sur plusieurs "réalisations du désordre" (c'est à dire plusieurs configurations de diffuseurs différents statistiquement équivalentes [Foldy, 1945]), et une partie *incohérente*, qui est propre à une réalisation du désordre particulière.

Un champ moyenné sur le désordre est noté entre "crochets" $\langle\ \rangle$. Un champ Φ représentant une réalisation particulière du désordre pourra être décomposé de la manière suivante :

$$\Phi = \langle\Phi\rangle + \Phi_{incoherent}. \tag{1.15}$$

Le champ cohérent $\langle\Phi\rangle$ décrit une onde s'étant propagée dans un milieu homogène équivalent, appelé également milieu *effectif*. La partie incohérente $\Phi_{incoherent}$ est composée de trains d'ondes ayant parcouru un chemin plus ou moins tortueux dans le matériau en fonction des différents évènements de diffusion rencontrés. Sur deux configurations différentes du désordre, ces champs ne sont pas en phase puisqu'ils ont subi des évènements de diffusion différents. La moyenne sur le désordre annule ces signaux déphasés et ne conserve que les signaux en phase de la partie cohérente [Mamou, 2005]. On peut cependant étudier l'intensité moyenne du champ incohérent, définie de la manière suivante :

$$\langle I\rangle = \langle|\Phi|^2\rangle = I_{coherent} + I_{incoherent} \tag{1.16}$$

$$I_{coherent} = |\langle\Phi\rangle|^2 \tag{1.17}$$

$$I_{incoherent} = \langle I\rangle - |\langle\Phi\rangle|^2 \tag{1.18}$$

Au cours de la propagation, les effets de diffraction par les hétérogénéités transfèrent progressivement l'énergie du champ cohérent vers le champ incohérent. L'amplitude du champ cohérent décroît donc au cours de la propagation, entraînant une atténuation apparente supplémentaire.

Les ondes cohérentes sont les plus étudiées dans l'évaluation des matériaux hétérogènes car elles contiennent des informations de vitesse et d'amortissement similaires à celles mesurables sur des milieux homogènes. De nombreuses théories permettent de décrire ces ondes cohérentes, principalement basées sur la définition d'un milieu homogène équivalent [Bourbié et al., 1986; Foldy, 1945; Waterman and Truell, 1961]. Les ondes incohérentes sont généralement traitées comme du bruit. Cependant, l'évolution temporelle de l'intensité incohérente peut être décrite par un processus de diffusion d'énergie (transfert radiatif, approximation de diffusion) [Margerin, 2005], et apporter des informations sur les propriétés du matériau.

1.2.3.e Atténuation due aux hétérogénéités

Les facteurs d'amortissement $\alpha(f)$ du milieu effectif contiennent à la fois les effets de l'atténuation géométrique, les effets de l'absorption et les effets de la diffusion multiple sur les

différents types d'hétérogénéités rencontrés (porosité, sable, granulats).

En fonction du rapport entre la dimension caractéristique des hétérogénéités D et la longueur d'onde λ, on peut définir 3 régimes de diffusion appelés domaines de *Rayleigh*, domaine *stochastique*, et domaine de *diffusion* [Papadakis, 1965]. Dans chacun de ces régimes, l'amortissement par absorption est considéré comme variant linéairement avec la fréquence f. L'amortissement lié à la diffusion varie en fonction du domaine considéré.

$$\begin{cases} \lambda \gg D & \text{, Rayleigh} \quad \alpha(f) = a_1 f + a_2 D^3 f^4 \\ \lambda \sim D & \text{, stochastique} \quad \alpha(f) = b_1 f + b_2 D f^2 \\ \lambda \ll D & \text{, diffusion} \quad \alpha(f) = c_1 f + \dfrac{c_2}{D} \end{cases} \tag{1.19}$$

Dans les équations 1.19, les termes a_1, b_1 et c_1 sont des coefficients liés à l'absorption tandis que les coefficients a_2, b_2 et c_2 sont liés à la diffraction.

Le premier régime (dit de *Rayleigh*) correspond au cas où les longueurs d'onde sont grandes devant les dimensions des hétérogénéités. C'est généralement le cas des hétérogénéités dues à la porosité du matériau aux fréquences usuelles. Bourbié et al. [1986] précisent que dans le cas d'une porosité inférieure à 20%, le comportement du matériau peut être assimilé à un comportement viscoélastique.

1.2.4 Potentialité des méthodes ultrasonores pour l'évaluation des bétons

L'utilisation d'ultrasons est un outil très adapté pour l'évaluation non destructive des bétons. La propagation des ondes dépend directement des propriétés mécaniques et structurelles du béton. La célérité des différents types d'ondes dépend directement de propriétés mécaniques telles que les coefficients de Lamé, le module d'élasticité ou le coefficient de Poisson. L'utilisation des ondes de Rayleigh se propageant le long de la surface permet de donner des informations sur le béton d'enrobage.

L'atténuation des ondes donne également des informations sur les propriétés du béton : caractère viscoélastique, porosité (pores et micro-fissurations), nature et dimensions des inclusions rocheuses (sables et granulats). Cependant tous ces processus atténuants sont combinés et il est difficile de distinguer simplement les contributions de l'un ou l'autre de ces phénomènes.

Le caractère fortement hétérogène et aléatoire du béton pose également le problème de la répétitivité des mesures en différents endroits du béton. Une configuration particulière de disposition/nature/forme des hétérogénéités rencontrées au cours de la propagation donnera des paramètres de propagation spécifiques et non représentatifs du matériau.

1.3 Mesures expérimentales : revue

1.3.1 Présentation

Cette partie recense divers moyens expérimentaux utilisés par différents auteurs pour la caractérisation non destructive des matériaux avec des ondes ultrasonores. Les ondes mécaniques sont couramment employées pour le contrôle non destructif de différents types de matériaux (contrôle de soudures, de matériaux composites, de béton hydrauliques ou bitumineux), ou bien pour la caractérisation des sols (en vue de fondations, de forages, contrôle de l'état des routes,...). Le plus souvent, ces matériaux sont de nature relativement complexes, pouvant être par exemple hétérogènes, anisotropes, thermoélastiques, à gradient de propriétés, ou bien combiner plusieurs de ces caractéristiques. Chaque type de matériau possède ses spécificités pour l'étude de la propagation des ondes mécaniques, la mise en oeuvre des mesures et leur interprétation.

On ne s'intéressera ici qu'au cas de mesures sur du béton. On s'intéressera tout d'abord aux moyens de mesures pouvant être utilisés pour la génération ou la réception. Ensuite, l'interprétation des résultats obtenus par différents auteurs permettra de souligner les difficultés pouvant être rencontrés lors de mesure sur le béton en fonction de différentes caractéristiques comme le taux de porosité, la teneur en eau ou la dimension des granulats.

1.3.2 Génération et réception

1.3.2.a Génération par "choc"

La génération d'ondes mécaniques peut être obtenue en appliquant une déformation locale, en général due à un choc, à un endroit donné du matériau. Les fréquences obtenues par ce type de source "à impact" sont d'autant plus élevées que la surface de contact entre l'impacteur et le matériau est petite. Ainsi, l'utilisation d'un marteau ou d'une masse permet d'obtenir de très basses fréquences (<1,5 kHz) [Larose et al., 2006], et l'impact d'une petite bille d'acier permet d'obtenir des fréquences de l'ordre de 20 kHz [Wu et al., 1995; Lagarde et al., 2006].

Des fréquences pouvant aller jusqu'à 300 kHz peuvent être obtenues en utilisant une mine de crayon [Aggelis and Shiotani, 2007, 2008]. Celle-ci est appuyée contre le béton jusqu'à sa rupture, qui provoque un saut de déplacement en forme de fonction "échelon". Un dispositif similaire utilisant la rupture d'un capillaire en verre permet d'atteindre 1,5 MHz [Landis and Shah, 1995].

L'avantage de ce type de source réside dans le fait qu'elles sont ponctuelles, ce qui permet de bien localiser leur position et de limiter les effets de champ proche. Leur très faible coût et la simplicité de leur utilisation sont également intéressants. Cependant, leur principal défaut est d'être très peu énergétiques, ce qui limite les distances de propagation étudiées. De plus, elles excitent tous les types d'ondes possibles (ondes de compression, de cisaillement, ondes de surface, ondes de Lamb,...) suivant la géométrie du matériau étudié ce qui rend plus difficile l'exploitation des résultats. Elles sont en outre assez peu répétitives.

1.3.2.b Utilisation de transducteurs

L'utilisation de transducteurs permet de contrôler la forme et la durée de l'impulsion afin d'avoir une source répétitive et très énergétique. Les transducteurs sont constitués d'une pastille piézo-électrique, qui peut se déformer sous la sollicitation d'un courant électrique ou bien générer un courant électrique sous l'effet d'une déformation. Ils peuvent donc être utilisés à la fois en émission et en réception et nécessitent d'être en contact avec le matériau à ausculter.

Ces transducteurs peuvent être résonnants à une fréquence donnée, ou large bande autour d'une fréquence centrale, mais la largeur de bande utile n'est jamais très étendue (quelques centaines de kHz). Ils émettent généralement des ondes de compression, mais certains peuvent émettre des ondes de cisaillement [Ould-Naffa et al., 2002]. L'utilisation de sabot fixé au transducteur permet de favoriser la génération d'ondes de Rayleigh à la surface du béton [Piwakowski et al., 2004]. Les transducteurs sont les moyens de génération et de détection les plus couramment utilisés pour le contrôle non destructif des matériaux.

Les inconvénients majeurs des transducteurs sont leurs dimensions parfois importantes, allant jusqu'à plusieurs centimètres de diamètre. On ne peut pas déterminer avec précision un point d'émission équivalent ou un point de réception comme c'est le cas avec une source ou un récepteur ponctuel. Un couplant (gel, eau, miel, colle) doit également être utilisé pour assurer un bon couplage entre le transducteur et le matériau à ausculter, ce qui peut dégrader la répétabilité des mesures, et allonger le temps de mise en place de la mesure.

1.3.2.c Mesures sans contact

Des mesures sans contact ont été envisagées par différents auteurs afin d'éviter les problèmes liés au couplage des transducteurs. Par exemple, Chaix [2003] utilise des hydrophones et immerge ses échantillons dans de l'eau. Un dispositif similaire utilisant des sources à couplage par air évite d'immerger les blocs [Purnell et al., 2004; Zhu and Popovics, 2005]. L'utilisation de ce type de sources pour générer des ondes de surface nécessite un appareillage électronique d'asservissement complexe [Piwakowski et al., 2008].

L'utilisation de lasers permet d'avoir des sources ou des récepteurs sans contact, large bande, ponctuels, précis et rapides. Ils peuvent être utilisés comme source en abrasion ou en dilatation thermique [Jacobs and Whitcomb, 1997]. Ces sources sont cependant peu énergétiques et peu adaptées à un matériau très atténuant comme le béton. L'utilisation en réception est plus couramment utilisée. Grâce au principe de l'interférométrie, il est possible de mesurer de très petits déplacements provoqués par le passage des ondes à la surface des matériaux [Royer and Dieulesaint, 1989]. De telles sondes interférométriques ont été utilisées comme récepteurs sur du béton [Koehler et al., 1996; Owino and Jacobs, 1999].

L'inconvénient des moyens de mesure sans contact réside principalement dans le coût très élevé des appareils comme les interféromètres ou les sources laser, ou encore les dispositifs de pilotage permettant de contrôler leur position. Ce type d'appareillage reste en général limité à l'utilisation en laboratoire et est peu adapté aux mesures sur site pour le moment.

1.3.3 Auscultation sonique

La mesure de la vitesse des ondes dans le béton est classiquement utilisée aussi bien en laboratoire que sur les ouvrages [Malhotra and Carino, 1991, chap. 7]. Cette méthode est également normalisée par les normes Françaises [NF-EN-12504-4, 2005] et américaines [ASTM-C597-02, 2003], et il existe des appareils commerciaux complets permettant de réaliser ce type de mesures (type PUNDIT).

Le principe général est de mesurer la vitesse de l'onde mécanique se propageant dans le béton en transmission, en réflexion, ou à la surface. On utilise pour cela une paire de transducteurs, l'un servant de source et l'autre le récepteur.

Cette méthode permet principalement de détecter entre autres choses une non uniformité des propriétés de la structure, des grosses fissures ou des vides résultants par exemple de "nids de cailloux". Elle peut également être utilisée pour déterminer les modules d'élasticité ou les coefficients de Poisson des structures, à partir des relations 1.7 et 1.10 [Zhou et al., 1995; Qixian and Bungey, 1996; Wu et al., 1995]. Cependant, la vitesse mesurée dépendant également de beaucoup d'autres paramètres du béton comme les hétérogénéités, la teneur en eau, les conditions de cure, la température, la présence de micro-fissures, etc., les valeurs obtenues peuvent être très différentes de celles obtenues par tests quasi-statiques de compression en laboratoire [Popovics, 1996], et l'emploi de cette méthode pour déterminer les valeurs E et ν en grande déformation est déconseillée par la norme ASTM-C597-02 [2003].

1.3.4 Influence de la porosité

L'influence de la porosité du béton sur la propagation ultrasonore a principalement été étudiée expérimentalement sur des échantillons de ciment ou de mortier contenant uniquement du sable, pour s'affranchir des effets causés par la présence d'hétérogénéités de dimensions plus importantes.

1.3.4.a Porosité artificielle

Des adjuvants du béton appelés “entraîneurs d’air” permettent d’augmenter artificiellement la porosité de la pâte de ciment. Ces adjuvants ont été utilisés par Punurai et al. [2006], générant ainsi 10% de pores de 1 mm de diamètres dans des blocs de ciment. Chaix et al. [2006] ont remplacé de tels pores par des billes de polystyrène de 1 à 2 mm de diamètre dans du mortier. Les résultats montrent une très nette augmentation du facteur d’amortissement des ondes de compression en présence de tels pores. Cet effet est d’autant plus important que la fréquence est élevée (au delà de 500 kHz). Par ailleurs, la vitesse des ondes de compression diminue fortement avec la présence des bulles d’air.

Des résultats similaires pour des bulles d’air de mêmes dimensions sont également observés par des simulations analytiques et des mesures sur du mortier frais encore liquide, lors du suivi de l’évolution du matériau au cours de la cure [Aggelis et al., 2005].

1.3.4.b Rapport E/C

La porosité des pâtes de ciment dépend directement du rapport E/C utilisé dans la formulation. La dimension des pores est en général beaucoup plus petite que dans le cas d’une porosité artificielle (10^{-3}-$10^{3}\,\mu$m), et la porosité peut varier de 11% à 18%.

À hautes fréquences (>1,5 MHz), sur des blocs de ciment ou de mortier dont le rapport E/C varie de 0,45 à 0,65, des mesure en ondes de compression montrent que le rapport E/C influe fortement sur le facteur d’amortissement [Vergara et al., 2001]. Par contre, des mesures similaires à plus basses fréquences (inférieures à 800 kHz) montrent que les variations du facteur d’amortissement en fonction du rapport E/C sont plus faibles [Philippidis and Aggelis, 2005]. Quelle que soit la fréquence considérée, les mesures de vitesses des ondes de compression montrent une très forte sensibilité avec le rapport E/C.

Des études similaires ont été réalisées sur du béton contenant cette fois des granulats de taille importante ($D_{max.} = 37,5$ mm) [Philippidis and Aggelis, 2003, 2005] dans la bande de fréquences 20-800 kHz. Les résultats sont globalement comparables à ceux obtenus sur du ciment ou du mortier, mais du fait du plus grand degré d’hétérogénéité, les allures des courbes de vitesse ou d’amortissement avec la fréquence présentent de brusques variations rendant plus difficile la comparaison des résultats que dans le cas du mortier.

Que ce soit sur du ciment, du mortier ou du béton, des variations du rapport E/C influent fortement sur les valeurs de vitesse. Les variations du facteur d’amortissement sont importantes pour les plus hautes fréquences, mais sont relativement faibles en dessous de 1 MHz, la précision de l’estimation de ces facteurs d’amortissement doit donc être très grande, ce qui est rendu d’autant plus difficile par la présence des granulats.

1.3.4.c Micro-fissures

La présence de micro-fissures dans le mortier est étudiée par Aggelis and Shiotani [2007, 2008] en introduisant des petites plaquettes de vinyle de différentes dimensions (de $15 \times 15 \times 0,2$ mm à $30 \times 30 \times 0,5$ mm) et à différentes concentrations (de 1% à 10%). Les plaquettes sont orientées aléatoirement suivant toutes les directions de l’espace. Une augmentation de la concentration d’inclusions augmente considérablement les valeurs de vitesse de phase et d’atténuation pour des fréquences inférieures à 300 kHz. Les mesures de vitesses montrent que les ondes de Rayleigh sont beaucoup plus sensibles que les ondes de compression à ce type d’hétérogénéités ; les auteurs attribuent cet effet au fait que le mouvement particulaire associé à l’onde de Rayleigh étant elliptique, ces ondes sont plus sensibles à des fissures ou plaquettes orientées dans toutes les directions, tandis qu’une onde purement de compression sera moins influencée par une plaquette ou fissure orientée suivant sa direction de propagation.

1.3.4.d Taux de saturation

La teneur en eau du béton représente le taux volumique d'eau libre dans le matériau, elle peut être comprise entre environ 4 et 14%. On peut également l'exprimer en terme de taux de saturation du béton, compris alors entre 0 (matériau complètement "sec") et 100% (complètement saturé), bien que ces valeurs extrêmes ne soient jamais atteintes en pratique. Ce taux de saturation influe sur la vitesse de propagation des ondes mécaniques dans le béton [Ohdaira and Masuyama, 2000] ainsi que dans des roches [Bourbié et al., 1986]. Un grand plan expérimental a été monté dans le cadre du projet ANR-SENSO pour étudier notamment ces effets du taux de saturation sur différents bétons [Villain et al., 2008; Piwakowski et al., 2008]. Ces études montrent que la variation de vitesses de phase avec la teneur en eau est importante et ne varie pas linéairement avec le taux de saturation.

1.3.5 Influence des inclusions rocheuses

1.3.5.a Sables

Owino and Jacobs [1999]; Jacobs and Owino [2000] ont tenté de quantifier les effets de l'absorption et de la diffusion par les sables sur l'amortissement des ondes de Rayleigh (200-1200 kHz) dans du mortier, en utilisant les relations 1.19. Leur conclusion est que dans le mortier, les pertes par diffraction sur les grains de sable ($D = 1 - 3$ mm) sont négligeables par rapport à l'amortissement intrinsèque, l'amortissement mesuré étant principalement linéaire avec la fréquence.

Chaix [2003] étudie dans sa thèse l'influence du taux de sable et des dimensions des grains dans du ciment (D variant de 1 à 8 mm), dans la bande fréquentielle 250-1250 kHz. L'ajout de sable dans le ciment provoque une augmentation des valeurs de vitesse et d'atténuation mesurées pour les ondes P. Entre les mortiers contenant différents taux et différentes dimensions de grains de sable, les différences ne sont visibles sur l'atténuation que pour les fréquences les plus élevées ($> 800 - 1000$ kHz). Les valeurs de vitesses sont très sensibles au taux d'inclusions pour toutes les fréquences, mais assez peu aux dimensions des inclusions.

1.3.5.b Gros granulats

Dans le cas de granulats de dimensions plus importantes, l'évaluation de l'atténuation devient plus délicate dans la même bande fréquentielle. En particulier, Landis and Shah [1995] présentent des courbes d'atténuation des ondes P pour une pâte de ciment ("sans" inclusions), du mortier "fin" ($D_{max} = 1$ mm), du mortier "grossier" ($D_{max} = 5$ mm) et du béton ($D_{max} = 10$ mm). L'allure de la courbe d'atténuation semble relativement uniforme avec la fréquence jusqu'à une fréquence limite qui diminue à mesure que D_{max} augmente (Fig. 1.5). Au delà de cette fréquence limite, l'atténuation présente un saut important et a un comportement fréquentiel erratique : la dimension des hétérogénéités devient comparable à la longueur d'onde et les effets de la diffusion multiple deviennent alors très importants, le comportement des courbes d'amortissement reflète le caractère aléatoire de la configuration d'hétérogénéités rencontrée au cours de la propagation.

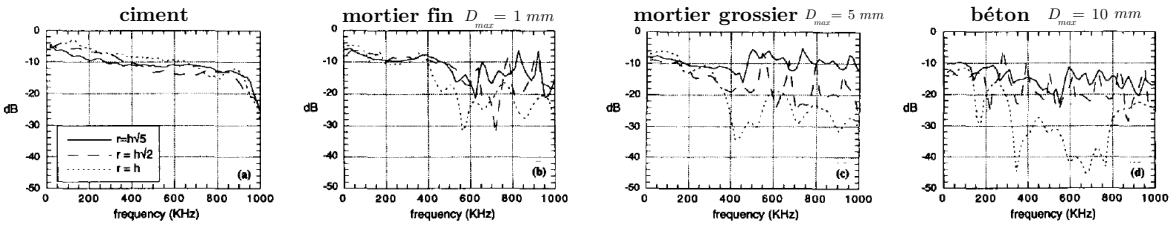


FIG. 1.5 – Variations de l'atténuation des ondes P pour différents D_{max}, prises à différents endroits des spécimens, d'après Landis and Shah [1995].

Dans le cas de bétons ayant des granulats plus gros ($D_{max} = 37,5\,\text{mm}$) la différence d'atténuation des ondes P avec le mortier ($D_{max} = 4,75\,\text{mm}$) est relativement faible pour des fréquences inférieures à 100 kHz et augmente progressivement avec la fréquence [Philippidis and Aggelis, 2005]. Cet écart est d'autant plus important et survient d'autant plus à basse fréquence que le rapport E/C est élevé. Ces effets sont attribués à l'existence d'une zone interfaciale entre les granulats et la pâte de ciment [Otsuki et al., 2000].

La vitesse de phase mesurée sur le béton est plus élevée que celle mesurée sur le mortier quelle que soit la fréquence considérée.

1.3.6 Autres types d'études

En plus des paramètres de propagation tels que les vitesses ou les amortissements des ondes, d'autres types d'études peuvent être menées pour caractériser le béton.

Intensité incohérente. Quelques études portent sur l'intensité incohérente. Elles sont inspirées des études sur la coda sismique utilisant la théorie des transferts radiatifs [Margerin, 1998; Larose, 2005]. La simplification de cette théorie conduit à décrire la décroissance temporelle de l'intensité incohérente par une équation de diffusion. L'application de cette approximation sur des mesures d'intensité incohérente sur du béton permet d'obtenir des observables comme le coefficient de diffusion et un facteur d'amortissement [Anugonda et al., 2001; Becker et al., 2003; Ramamoorthy et al., 2004].

L'intensité incohérente mesurée sur le béton à très basse fréquence peut également être traitée avec des méthodes comme l'analyse du cône de rétro-diffusion ou encore de "l'interférométrie de la coda" [Larose et al., 2006].

Paramètres de non linéarité. La non linéarité de la propagation des ondes donne entre autre une réponse fréquentielle du matériau qui varie avec l'amplitude des sollicitations. Ces effets peuvent également permettre de caractériser le degré d'endommagement du matériau [Bentahar, 2005; Payan, 2007].

Émission acoustique. Les méthodes d'émission acoustiques permettent "d'écouter" les bruits produits lors de la formation de fissures ou micro-fissures dans le béton [Ouyang et al., 1991; Grosse et al., 1997], ou encore produits par le frottement des bords de fissures déjà existantes. Des techniques de traitement du signal des signaux non stationnaires sont nécessaires pour discriminer les différents évènements d'émission acoustique dans des matériaux de type composite [Marec et al., 2008].

1.4 Orientations de l'étude

1.4.1 Position de l'étude

L'objectif de l'étude est la caractérisation par ultrasons du béton d'enrobage, dont l'épaisseur est de quelques centimètres (de 3 à 5 cm). Des ondes de Rayleigh ayant des longueurs d'onde allant du millimètre à quelques centimètres permettront donc d'ausculter spécifiquement cette partie du béton. L'ordre de grandeur de la vitesse des ondes de Rayleigh dans le béton étant de $2200\,\text{m.s}^{-1}$, la bande de fréquences à utiliser ira de quelques dizaines de kHz à quelques centaines de kHz.

Mortier. À ces fréquences d'étude, les résultats des études présentées dans les sections précédentes montrent qu'une variation de la porosité (liée au rapport E/C) influera fortement sur la

vitesse de phase des ondes. Les variations du facteur d'amortissement en fonction de la porosité seront plus faibles pour les fréquences considérées, nécessitant une mesure et une évaluation très précise de ces facteurs d'amortissement. De même l'effet de la diffraction par les plus petites inclusions rocheuses comme les sables sera faible.

Les longueurs d'onde utilisées sont plus grandes que les dimensions des hétérogénéités, et la propagation se fait dans le domaine de Rayleigh. Le mortier aura alors un comportement similaire à un milieu homogène, dont les propriétés dépendent de celles du ciment, du sable, et de la porosité. Les différents effets d'amortissement introduits par la porosité et le sable seront assimilés à un comportement viscoélastique linéaire du matériau s'ajoutant à l'absorption.

Béton. A l'inverse les éléments les plus gros comme les granulats ou certaines fissures importantes ont des dimensions du même ordre de grandeur que les longueurs d'onde. Les effets de diffraction par ces hétérogénéités seront importants. La proportion du champ incohérent sera importante [Anugonda et al., 2001] et perturbera l'évaluation des propriétés de propagation (vitesse et atténuation). Notamment, la mesure de l'atténuation donnera des résultats erratiques dépendant de la configuration du désordre considérée [Landis and Shah, 1995]. L'autre conséquence de la diffusion multiple par les granulats sera l'introduction d'un effet d'amortissement supplémentaire aux effets d'absorption et aux effets dus à la porosité ; l'amortissement observé sur le béton contiendra des contributions de tous ces effets qu'il sera difficile de distinguer l'un de l'autre.

Problématique générale. De part sa structure très complexe, l'étude du béton en utilisant la propagation des ondes mécaniques est très délicate. Un grand nombre de facteurs (hétérogénéités à différentes échelles, teneur en eau, formulation, conditions de cure, température, etc.) peut influer sur la propagation, le plus souvent de manière combinés. Les résultats de mesure sont donc difficiles à interpréter, notamment lorsqu'il s'agit d'isoler l'influence d'un seul de ces effets.

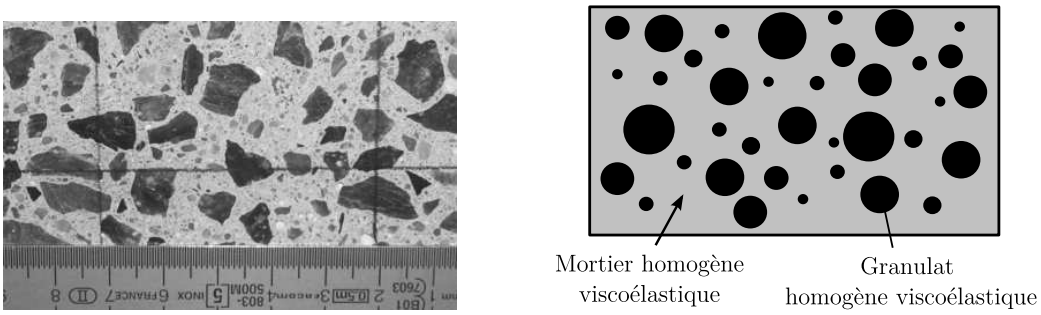
Une bonne interprétation des résultats de mesures sur du béton va donc passer par l'emploi de méthodes de mesures expérimentales et de traitement de données permettant une évaluation des paramètres de propagation (vitesse de phase ou de groupe et amortissement), avec une précision suffisante pour pouvoir déceler de faibles variations de propriétés du béton. D'autre part, l'emploi d'une modélisation analytique peut permettre de réaliser une étude de sensibilité des mesures et d'aider à l'interprétation des résultats.

1.4.2 Approches pour la modélisation du béton

Une modélisation analytique de la propagation des ondes mécaniques dans le béton en tenant compte des différents phénomènes pouvant être observés expérimentalement, notamment les effets de la diffusion multiple par les hétérogénéités, permettra de pouvoir interpréter plus aisément les mesures obtenues. Notamment, l'influence de chaque paramètre (propriétés mécaniques, dimensions d'hétérogénéités,...) sur la propagation pourra être étudiée plus simplement.

La diffusion multiple est principalement causée par les hétérogénéités ayant les dimensions les plus importantes. Ce sont ici les granulats et dans une moindre mesure certaines fissures. On n'étudiera pour le moment que des matériaux non endommagés dont on peut supposer qu'ils ne présentent pas ou peu de fissures importantes. La pâte de mortier, contenant les éléments les plus petits (ciment + sables + pores), sera considérée comme un milieu homogène, où les effets de la diffraction des ondes sur les petites hétérogénéités sont peu importants. On assimilera les manifestations de ces effets de diffraction à un comportement viscoélastique.

Le béton sera alors considéré comme un milieu diphasique composé d'une matrice de ciment homogène et viscoélastique contenant des inclusions rocheuses (Fig. 1.6). Ces inclusions peuvent avoir des dimensions et des formes très différentes en fonction de la granulométrie du matériau et de la nature des granulats (granulats de rivières roulés ou de carrière concassés). On peut



(a) Béton (b) Modèle de béton

FIG. 1.6 – Schéma représentant la modélisation qui est faite du béton pour les simulations analytiques de la propagation d'ondes mécaniques.

approcher, pour simplifier les calculs, les formes des granulats par des sphères (cette approximation se rapprochant alors de granulats de type "roulés" issus de rivières), cependant, il faut tenir compte des différentes dimensions de granulats présentes dans le matériau. Le cas de granulats cylindriques sera également considéré en vue de comparer les résultats analytiques avec ceux de simulations numériques 2D. L'intérêt sera porté dans un premier temps à la propagation d'ondes de volume de compression ou de cisaillement, puis la modélisation sera étendue à l'étude des ondes de Rayleigh.

Ce type de modélisation de propagation d'ondes dans le cas d'inclusions sphériques viscoélastiques dans une matrice viscoélastique sera mené avec pour finalité la caractérisation du béton. Ce type de modèle peut par ailleurs parfaitement être appliqué dans le cas de l'étude d'autres matériaux hétérogènes comportant des inclusions de dimensions comparables aux longueurs d'ondes, comme par exemple les matériaux composites, certains aciers, ou certains sols.

1.4.3 Mesures expérimentales

L'étude bibliographique montre la nécessité d'obtenir des estimations de la vitesse ou de l'amortissement des ondes avec une très grande précision. Pour cela, on s'oriente vers l'emploi d'un dispositif d'acquisition utilisant l'interférométrie laser, qui a l'avantage de permettre des mesures de grandes précisions, ponctuelles, reproductibles, automatisées et sans contact. Les configurations expérimentales étudiées ainsi que les méthodes de traitements des données sont inspirées des mesures géophysiques, qui sont particulièrement efficaces pour l'acquisition et le traitement des ondes de surface. Les variations de teneur en eau influent fortement sur la propagation des ondes. Comme il est très difficile de connaître précisément la teneur en eau d'un béton exposé à l'air ambiant, et que celle-ci peut varier avec les conditions atmosphériques, on choisira d'étudier des bétons totalement saturés afin de garantir une teneur en eau proche de 100%, en conservant les échantillons immergés dans une eau additionnée de chaux.

Du fait du caractère hétérogène du matériau, il sera nécessaire lors des mesures expérimentales de séparer les parties cohérentes et incohérentes du champ en moyennant les mesures sur plusieurs réalisations du désordre. Cette approche a été faite par Chaix et al. [2006] avec des ondes de compression, en répétant les mesures à différents endroits sur les échantillons et en effectuant une moyenne spatiale. Des moyennes spatiales ont été également utilisées par [Aggelis and Shiotani, 2007, 2008] sur des ondes de surface. Le champ cohérent ainsi obtenu permet d'évaluer les vitesses et les atténuations du milieu homogène équivalent en s'affranchissant du caractère aléatoire de la distribution spatiale des hétérogénéités. Le nombre de réalisations du désordre à considérer pour obtenir une bonne évaluation du champ cohérent reste à déterminer.

Une fois le champ cohérent évalué par moyennage spatial, l'intensité incohérente moyenne

peut également être extraite des mesures et fournir des informations supplémentaires sur le matériau.

Chapitre 2

Diffusion multiple d'inclusions élastiques dans une matrice élastique

Sommaire

2.1 Inclusion d'un diffuseur élastique dans une matrice élastique 26
2.1.1 Présentation du problème 26
2.1.1.a Description des diffuseurs 26
2.1.1.b Nature de la matrice 26
2.1.2 Cas 2D : diffuseur cylindrique 27
2.1.2.a Notations 27
2.1.2.b Conditions aux limites 28
2.1.2.c Expression des champs pour l'onde incidente de type P 29
2.1.2.d Expression des champs pour une onde incidente de type S (SV) 30
2.1.2.e Détermination des coefficients de diffraction 30
2.1.3 Paramètres de diffraction 30
2.1.3.a Amplitude de diffraction (*scattering function*) 30
2.1.3.b Sections efficaces 32
2.1.4 Cas 3D : diffuseur sphérique 35
2.1.4.a Présentation 35
2.1.4.b Paramètres de diffraction en champ lointain 36
2.2 Modélisation de la diffusion multiple 40
2.2.1 Développements théoriques 40
2.2.1.a Différentes approches 40
2.2.1.b Formalisme de Green 40
2.2.1.c Champ cohérent, équation de Dyson 42
2.2.2 Approximations 42
2.2.2.a Milieu effectif 42
2.2.2.b Independent Scattering Approximation 43
2.2.2.c Expressions de l'ISA en milieu élastique 43
2.2.2.d Autres modèles pour l'homogénéisation 44
2.2.3 Application aux bétons 45
2.2.3.a Validité des modèles d'homogénéisation 45
2.2.3.b Exemples de résultats numériques 46
2.2.3.c Prise en compte de la granulométrie 47
2.3 Simulations numériques bidimensionnelles 49
2.3.1 Présentation des simulations 49
2.3.1.a Contexte et objectifs 49

2.3.1.b Modèles de bétons étudiés 49
2.3.1.c Méthodes numériques 49
2.3.1.d Signal source 50
2.3.1.e Fréquences d'étude 50
2.3.1.f Dimensionnement du modèle 51
2.3.1.g Erreurs numériques 52
2.3.2 Acquisition du champ cohérent 54
2.3.2.a Points d'acquisition 54
2.3.2.b Obtention du champ cohérent 55
2.3.3 Mesure de la vitesse de phase et de l'atténuation 55
2.3.3.a La "sommation oblique" 56
2.3.3.b Transformée $\boldsymbol{p-\omega}$. 56
2.3.3.c Limites, erreurs, et résolution 57
2.3.3.d Mesure de l'atténuation 58
2.3.3.e Précision des traitements 58
2.3.4 Analyse des résultats sur les bétons 59
2.3.4.a Étude de l'amortissement 59
2.3.4.b Étude de la vitesse de phase 62
2.3.4.c Nombre de réalisations du désordre 63
2.4 Conclusions et perspectives 65

Introduction

Le premier chapitre a montré la nécessité de tenir compte de la diffusion multiple causée par l'interaction des ondes avec les hétérogénéités du béton ayant les dimensions les plus importantes : les granulats. Une modélisation analytique du phénomène de la diffusion multiple va permettre de décrire quantitativement l'influence de la présence de ces granulats sur la propagation. La description du comportement d'une onde en présence d'un ensemble aléatoire de diffuseurs peut être aidée par l'analyse élémentaire de la réponse à une onde plane d'un unique diffuseur en milieu infini.

2.1 Inclusion d'un diffuseur élastique dans une matrice élastique

2.1.1 Présentation du problème

2.1.1.a Description des diffuseurs

La forme des granulats dans le béton peut être relativement complexe et varie d'un granulat à l'autre. L'onde se propageant aura à rencontrer un grand nombre de diffuseurs dont les formes et les orientations varient. On va donc se restreindre à l'étude de diffuseurs identiques et ayant une symétrie de révolution. Les granulats seront modélisés par des inclusions circulaires (cylindres infiniment longs) dans le cas 2D, et par des sphères dans le cas 3D. L'avantage de ces géométries est qu'elles autorisent une résolution analytique par décomposition modale (harmoniques cylindriques ou sphériques), ce qui simplifie grandement les calculs.

2.1.1.b Nature de la matrice

Le calcul de la diffraction d'une onde plane par des diffuseurs circulaires ou sphériques dans un milieu élastique, homogène et infini a été présenté un grand nombre de fois dans la littérature. Le cas le plus couramment étudié est celui d'une inclusion élastique dans une matrice acoustique

(dans laquelle seules les ondes de compression peuvent se propager), notamment présenté par Faran [1951] pour le cas du cylindre et de la sphère. Doolittle and Uberall [1966] ont reformulé le calcul sous forme matricielle dans le cas du cylindre.

Le calcul tenant compte d'une inclusion élastique dans une matrice élastique est présenté par Mow and Pao [1971] dans le cas de d'inclusions cylindriques et sphériques, le cas du cylindre a été étudié numériquement par Liu et al. [2000]. Le fait de considérer une matrice élastique nous oblige à tenir compte des potentiels de compression et de cisaillement, ainsi que des éventuelles conversions de modes qui peuvent se produire lors de la diffraction par l'obstacle.

L'étude de la propagation des ondes de Rayleigh étant l'objectif à terme, il convient d'étudier à la fois la réponse d'un diffuseur dans le cas d'une onde incidente de type P ou S.

Les propriétés des deux phases (mortier et granulats) utilisées dans ce chapitre pour les simulations analytiques et numériques sont tirées de Schubert and Koelher [2004] et sont présentées au tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Propriétés du mortier et des granulats utilisées dans les simulations analytiques et numériques, d'après Schubert and Koelher [2004].

Matériau	c_p (m.s^{-1})	c_s (m.s^{-1})	ρ (kg.m^{-3})
Mortier	3950	2250	2050
Granulats	4300	2475	2610

2.1.2 Cas 2D : diffuseur cylindrique

2.1.2.a Notations

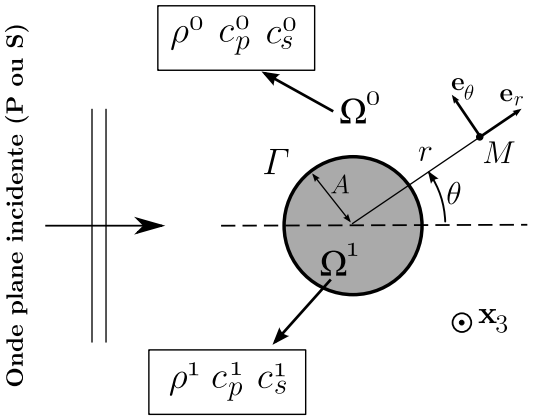


FIG. 2.1 – Position du problème : inclusion circulaire élastique Ω^1 de rayon A dans une matrice homogène élastique infinie Ω^0. Les données relatives à l'inclusion sont indicées par 1 et celles relatives à la matrice par 0.

La position du problème 2D est présentée en figure 2.1. Une inclusion circulaire de rayon A, élastique, homogène et isotrope Ω^1 est immergée dans une matrice homogène isotrope élastique et infinie Ω^0. La génératrice du cylindre est orientée parallèlement à l'axe $\mathbf{x_3}$. Les données relatives à l'inclusion sont indicées par 1 et celles relatives à la matrice par 0. On note respectivement ρ^0 et ρ^1 les masses volumiques des deux milieux, c_p^0 et c_p^1 les vitesses des ondes de compression, c_s^0 et c_s^1 les vitesses des ondes de cisaillement. Γ désigne la frontière entre les milieux Ω^0 et Ω^1. On définit également les coefficients de Lamé λ^j et μ^j pour chaque milieu (j=0 ou 1), avec $\Pi^j = \lambda^j + 2\mu^j$ le module de compression. Le problème est exprimé en coordonnées (r, θ, z) dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{x_3})$ et le milieu est infini dans la direction $\mathbf{x_3}$. L'inclusion est sondée par une onde

incidente plane harmonique de type P ou S d'amplitude unitaire, se propageant dans la direction $\theta = 0$. La dépendance temporelle des champs en $e^{-i\omega t}$ sera implicite dans tout le chapitre.

On a vu à la section 1.2.3.a que le champ de déplacement $\mathbf{u}^j$ dans chaque milieu Ω^j se décomposait en un potentiel scalaire ϕ^j lié à la compression et un potentiel vectoriel $\mathbf{\Psi}^j$ lié au cisaillement (Eq. 1.3). Le problème étant invariant suivant $\mathbf{x_3}$, les problèmes P-SV (dans le plan $(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta)$) et le problème SH (suivant $\mathbf{x_3}$), seront découplés. Dans le but à terme d'étudier les ondes de Rayleigh, on ne s'intéressera qu'au cas des ondes P et SV. Le potentiel de cisaillement pour les ondes SV s'écrit $\mathbf{\Psi}^j = \psi^j \mathbf{x_3}$. L'équation 1.3 devient alors, exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{u}^j = \nabla\phi^j + \nabla \times (\psi^j \mathbf{x_3}) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} u_r^j &= \dfrac{\partial \phi^j}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi^j}{\partial \theta} & j = 0,1 \\ u_\theta^j &= \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi^j}{\partial \theta} - \dfrac{\partial \psi^j}{\partial r} & j = 0,1 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Les potentiels ϕ^j et ψ^j sont chacun solution d'une équation de Helmholtz :

$$\nabla^2\phi^j + (k_p^j)^2\phi^j = 0 \qquad j = 0,1 \tag{2.2}$$

$$\nabla^2\psi^j + (k_s^j)^2\psi^j = 0 \qquad j = 0,1 \tag{2.3}$$

avec $k_p^j = \omega/c_p^j$ et $k_s^j = \omega/c_s^j$.

Par ailleurs, on décrit le champ $\mathbf{u}^0$ à l'extérieur de l'inclusion comme la somme de l'onde incidente $\mathbf{u}^0_{inc.}$ et du champ diffracté par l'inclusion $\mathbf{u}^0_d$. Ces champs pouvant par ailleurs avoir une composante de compression $\mathbf{u}^0_p$ et une composante de cisaillement $\mathbf{u}^0_s$:

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0_{inc.} + \mathbf{u}^0_d = (\mathbf{u}^0_{p,inc.} + \mathbf{u}^0_{s,inc.}) + (\mathbf{u}^0_{p,d} + \mathbf{u}^0_{s,d}) \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} \phi^0 &= \phi^0_{inc.} + \phi^0_d \\ \psi^0 &= \psi^0_{inc.} + \psi^0_d \end{array} \right. \tag{2.4}$$

2.1.2.b Conditions aux limites

A l'interface Γ entre les milieux Ω_0 et Ω_1, on écrit les conditions aux limites correspondant à un contact parfait ; continuité des déplacements, et continuité des contraintes normales.

$$\text{en } (r = A) \left\{ \begin{array}{lll} u_r^1 &= u_r^0 & (i) \\ u_\theta^1 &= u_\theta^0 & (ii) \\ \sigma_{rr}^1 &= \sigma_{rr}^0 & (iii) \\ \sigma_{\theta r}^1 &= \sigma_{\theta r}^0 & (iv) \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Les contraintes s'expriment à partir de la loi de Hooke pour un milieu homogène isotrope [Liu et al., 2000] :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^j &= \Pi^j \left(\frac{\partial^2\phi^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi^j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi^j}{\partial\theta^2} \right) - 2\mu^j \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi^j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi^j}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi^j}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi^j}{\partial r\partial\theta} \right) \\ \sigma_{r\theta}^j &= \mu^j \left(-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi^j}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2\phi^j}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi^j}{\partial\theta^2} - \frac{\partial\psi^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi^j}{\partial r} \right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Les potentiels diffractés à l'extérieur de l'inclusion doivent également s'annuler à l'infini suivant la condition de Sommerfeld :

$$\phi_d^0 \sim \frac{1}{k_p^0\sqrt{r}} e^{ik_p^0 r} \quad ; \quad \psi_d^0 \sim \frac{1}{k_s^0\sqrt{r}} e^{ik_s^0 r} \quad ; \quad r \to \infty \tag{2.7}$$

Ces potentiels ϕ_d^0 et ψ_d^0, solutions des équations 2.2 et 2.3, peuvent être écrits suivant une décomposition modale à l'aide des fonctions de Hankel de premier type d'ordre entier n à argument réel x : $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$, où $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ sont respectivement les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce [Abramowitz and Stegun, 1964]. À l'intérieur de l'inclusion, la solution des équations 2.2 et et 2.3 devant être régulière en $r = 0$, les potentiels ϕ^1 et ψ^1 se décomposent à l'aide des fonctions de Bessel de première espèce J_n.

Le problème se résout de manière indépendante en considérant une onde incidente purement longitudinale (de type P) ou purement transversale (de type S).

2.1.2.c Expression des champs pour l'onde incidente de type P

Champ incident. Pour une onde plane incidente de type P dans le milieu Ω_0 possédant une amplitude de déplacement unitaire :

$$u_{inc.,p}^0 = \mathrm{e}^{ik_p^0 r\cos\theta}, \tag{2.8}$$

le potentiel de l'onde plane incidente se décompose en [Mow and Pao, 1971] :

$$\mathbf{u}_{inc.,p}^0 = \nabla\phi_{inc.}^0 \quad \rightarrow \quad \phi_{inc.}^0 = \frac{1}{ik_p^0} e^{ik_p^0 r\cos\theta} = \frac{1}{ik_p^0}\sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n i^n J_n(k_p^0 r)\cos(n\theta), \tag{2.9}$$

où ϵ_n est le symbole de Neumann tel que :

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \geq 1 \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{2.10}$$

Dans la matrice. Les ondes diffractées par l'inclusion ϕ_p^0 et ψ_p^0 peuvent être de type P ou S (il peut y avoir des conversions de modes). Elles représentent des ondes divergeant de l'origine (centre de l'inclusion) avec la condition de Sommerfeld 2.7, et peuvent alors se décomposer de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned} \phi_p^0 = \phi_{d,p}^0 + \phi_{inc}^0 \quad &= \frac{1}{ik_p^0}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n a_n^{(p,0)} H_n^{(1)}(k_p^0 r)\,\cos(n\theta) \;+\; \phi_{inc}^0 \\ \psi_p^0 = \psi_{d,p}^0 \quad &= \frac{1}{ik_s^0}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n b_n^{(p,0)} H_n^{(1)}(k_s^0 r)\,\sin(n\theta) \end{aligned}\right\} \text{ dans } \Omega^0 \tag{2.11}$$

Les termes $a_n^{(p,0)}$ et $b_n^{(p,0)}$ sont des coefficients d'expansion à déterminer à partir des conditions aux limites 2.5.

Dans l'inclusion. Pour l'expression des champs dans l'inclusion, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned} \phi_p^1 &= \frac{1}{ik_p^1}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n a_n^{(p,1)} J_n(k_p^1 r)\,\cos(n\theta) \\ \psi_p^1 &= \frac{1}{ik_s^1}\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n b_n^{(p,1)} J_n(k_s^1 r)\,\sin(n\theta) \end{aligned}\right\} \text{ dans } \Omega^1 \tag{2.12}$$

De la même manière que précédemment, $a_n^{(p,1)}$ et $b_n^{(p,1)}$ sont à déterminer à partir des conditions aux limites 2.5.

2.1.2.d Expression des champs pour une onde incidente de type S (SV)

Champ incident. De la même manière, pour une onde plane incidente de type S et d'amplitude unitaire, on a :

$$u^0_{inc.,s} = \mathrm{e}^{ik^0_s r\cos\theta}. \tag{2.13}$$

On écrit la décomposition modale du champ incident de type S de la même manière que pour l'onde de compression.

$$\mathbf{u}^0_{inc.,s} = \nabla\times(\psi^0_{inc.}\mathbf{x_3}) \quad\rightarrow\quad \psi^0_{inc.} = \frac{i}{k^0_s}e^{ik^0_s r\cos\theta} = \frac{i}{k^0_s}\sum_{n=0}^{+\infty}\epsilon_n i^n J_n(k^0_s r)\cos(n\theta). \tag{2.14}$$

Dans la matrice. A l'extérieur de l'inclusion le champ total peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}\phi^0_s = \phi^0_{d,s} &= \frac{1}{ik^0_p}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n i^n a^{(s,0)}_n H^{(1)}_n(k^0_p r)\,\sin(n\theta)\\ \psi^0_s = \psi^0_{d,s} + \psi^0_{inc.} &= \frac{i}{k^0_s}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n i^n b^{(s,0)}_n H^{(1)}_n(k^0_s r)\,\cos(n\theta) \;+\; \psi^0_{inc.}\end{aligned}\right\}\ \text{dans } \Omega^0 \tag{2.15}$$

Dans l'inclusion.

$$\left.\begin{aligned}\phi^1_s &= \frac{1}{ik^1_p}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n i^n a^{(s,1)}_n J_n(k^1_p r)\,\sin(n\theta)\\ \psi^1_s &= \frac{i}{k^1_s}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n i^n b^{(s,1)}_n J_n(k^1_s r)\,\cos(n\theta)\end{aligned}\right\}\ \text{dans } \Omega^1 \tag{2.16}$$

2.1.2.e Détermination des coefficients de diffraction

Le problème est traité séparément pour chaque type d'ondes incidentes P ou S. Il s'agit de retrouver les coefficients de diffraction $a_n^{(type,j)}$ et $b_n^{(type,j)}$ pour chaque mode n, chaque type d'onde incidente ($type = p, s$) et dans chaque milieu ($j = 0, 1$). Pour cela, on écrit les conditions aux limites à l'interface sur les déplacements et les contraintes (Eqs. 2.5) et on résout le système linéaire ainsi obtenu. La résolution est détaillée en annexe A.

Une difficulté pour le calcul des solutions provient de la série infinie de modes n qui doit être tronquée numériquement. Nous utiliserons les résultats de calculs intensifs effectués dans le cas de problèmes similaires pour les ondes électromagnétique [Wiscombe, 1980; Barber and Hill, 1990], afin de déterminer l'ordre de convergence N :

$$N = Max\left(Ent\left(4.05(k^0_s A)^{1/3} + k^0_s A\right), Ent\left(k^1_s A\right)\right) + \hat{N}, \tag{2.17}$$

où $Ent()$ est la fonction partie entière et $\hat{N}$ un coefficient de sécurité, choisi par l'utilisateur (typiquement $\hat{N} = 10$). On vérifie numériquement que la valeur de N donnée en 2.17 permet bien d'obtenir la convergence des séries modales dans les cas considérés. En pratique, N est de l'ordre de 12 ou 20 itérations, mais augmente avec la fréquence pour atteindre 80 pour les plus hautes fréquences étudiées suivant les dimensions du cylindre.

2.1.3 Paramètres de diffraction

2.1.3.a Amplitude de diffraction (*scattering function*)

Définition. On considère une onde plane incidente de type P ou S, d'amplitude unitaire, et on s'intéresse à l'amplitude de l'onde diffractée u^0_d. En approximation de champ lointain cette

onde est de type cylindrique, pondérée par un facteur d'anisotropie [Lin and Ishimaru, 1974] [1] :

$$u_d^0(r,\theta) = f(\mathbf{k_0},\mathbf{k}')\frac{\mathrm{e}^{ik_0 r}}{\sqrt{r}}. \tag{2.18}$$

Le facteur $f(\mathbf{k_0},\mathbf{k}')$ est appelé *amplitude de diffraction en champ lointain*[2] dans la direction $\mathbf{k}'$ pour une onde incidente de vecteur d'onde $\mathbf{k_0}$. En deux dimensions, cette fonction ne dépend que de l'angle θ entre ces deux vecteurs et de la fréquence ω. Elle est alors notée $f(\omega,\theta)$ ou encore simplement $f(\theta)$, la dépendance fréquentielle étant implicite pour la plupart des auteurs.

Suivant le type d'onde incidente et diffractée, on peut définir 4 amplitudes de diffraction différentes : $f_{pp}(\theta)$, $f_{ps}(\theta)$, $f_{sp}(\theta)$ et $f_{ss}(\theta)$. La première lettre de l'indice indique le type d'onde incidente, et la seconde le type d'onde diffractée.

Approximation de champ lointain. Les potentiels et déplacements du champ diffracté s'expriment à l'aide de fonctions de Hankel $H_n^{(1)}(x)$, qui prend la forme asymptotique suivante pour des arguments x élevés :

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &\approx \tfrac{1-i}{i^n\sqrt{\pi x}}e^{ix} \end{aligned} \qquad x\to\infty \tag{2.19}$$

Onde incidente de compression. Pour une onde incidente de compression P, les potentiels du champ diffracté (Eqn. 2.11) prennent alors la forme asymptotique suivante pour $k_p^0 r \gg 1$ et $k_s^0 r \gg 1$:

$$\begin{aligned} \phi_{d,p}^0(\theta,\omega) &= \frac{-(1+i)}{k_p^0\sqrt{\pi k_p^0}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n a_n^{(p,0)}\cos(n\theta)\right)\frac{\mathrm{e}^{ik_p^0 r}}{\sqrt{r}} \\ \psi_{d,p}^0(\theta,\omega) &= \frac{-(1+i)}{k_s^0\sqrt{\pi k_s^0}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n b_n^{(p,0)}\sin(n\theta)\right)\frac{\mathrm{e}^{ik_s^0 r}}{\sqrt{r}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Les déplacements particulaires du champ diffracté correspondant à ces potentiels sont déterminés à partir de la relation 2.1 et développés à l'ordre 1 en r :

$$\begin{aligned} u_{d,p,r}^0(\theta,\omega) &= f_{pp}(\theta,\omega)\frac{\mathrm{e}^{ik_p^0 r}}{\sqrt{r}} \quad ; \quad f_{pp}(\theta,\omega) = \frac{1-i}{\sqrt{\pi k_p^0}}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n a_n^{(p,0)}\cos(n\theta) \\ u_{d,p,\theta}^0(\theta,\omega) &= f_{ps}(\theta,\omega)\frac{\mathrm{e}^{ik_s^0 r}}{\sqrt{r}} \quad ; \quad f_{ps}(\theta,\omega) = -\frac{1-i}{\sqrt{\pi k_s^0}}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n b_n^{(p,0)}\sin(n\theta) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Onde incidente de cisaillement. Pour une onde incidente de cisaillement, les expressions des potentiels du champ diffracté en champ lointain s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi_{d,s}^0(\theta,\omega) &= \frac{-(1+i)}{k_p^0\sqrt{\pi k_p^0}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n a_n^{(s,0)}\sin(n\theta)\right)\frac{\mathrm{e}^{ik_p^0 r}}{\sqrt{r}} \\ \psi_{d,s}^0(\theta,\omega) &= \frac{1+i}{k_s^0\sqrt{\pi k_s^0}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n b_n^{(s,0)}\cos(n\theta)\right)\frac{\mathrm{e}^{ik_s^0 r}}{\sqrt{r}} \end{aligned} \tag{2.22}$$

[1] On peut trouver des définitions sensiblement différentes mais équivalentes, par exemple pour Linton and Martin [2005] :

$$u_d^0(r,\theta) = \sqrt{2/(\pi k_0 r)}f(\mathbf{k_0},\mathbf{k}')\mathrm{e}^{ik_0 r - i\pi/4}.$$

[2] on trouve généralement les termes anglais *scattering function* ou encore *far field pattern*.

Ce qui conduit aux expressions suivantes pour les déplacements et pour les fonctions d'amplitudes de diffraction, à l'ordre 1 en r :

$$\begin{aligned} u^0_{d,s,r}(\theta,\omega) &= f_{sp}(\theta,\omega)\frac{\mathrm{e}^{ik_p^0 r}}{\sqrt{r}} \quad ; \quad f_{sp}(\theta,\omega) = \frac{1-i}{\sqrt{\pi k_p^0}}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n a_n^{(p,0)}\sin(n\theta) \\ u^0_{d,s,\theta}(\theta,\omega) &= f_{ss}(\theta,\omega)\frac{\mathrm{e}^{ik_s^0 r}}{\sqrt{r}} \quad ; \quad f_{ss}(\theta,\omega) = \frac{1-i}{\sqrt{\pi k_s^0}}\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n b_n^{(p,0)}\cos(n\theta) \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.1.3.b Sections efficaces

Flux énergétique. On définit le flux d'énergie dJ à travers un élément de surface infinitésimal dS orienté suivant $\mathbf{n}$ [3].

$$dJ = \Re\mathrm{e}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{n}dS = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\overline{\mathbf{u}}}+\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n}dS = \frac{i\omega}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\overline{\mathbf{u}}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n}dS \tag{2.24}$$

Dans le cas d'un cylindre infini, on considérera des flux d'énergie à travers un élément linéique dL orienté suivant $\mathbf{n}$ par unité de longueur du cylindre afin de rester dans un cas à deux dimensions.

Pour une onde plane incidente P ou S se propageant suivant $\mathbf{x_1}$, on peut écrire les flux d'énergie incidente J_p^i et J_s^i par unité de longueur $dL = 1$ orientée suivant $\mathbf{x_1}$, suivant le type d'onde incidente P ou S :

$$J_p^i = -\frac{\rho^0\omega^3}{k_p^0} \qquad \text{et} \qquad J_s^i = -\frac{\rho^0\omega^3}{k_s^0}. \tag{2.25}$$

Pour les ondes diffractées, on utilise les approximations en champ lointain pour les expressions des déplacements et les contraintes. En considérant un élément linéique élémentaire $dL = rd\theta$ orienté suivant $\mathbf{e}_r$ à la distance r du centre de l'inclusion, on obtient le flux d'énergie diffractée à travers dL pour une onde incidente P :

$$dJ_p^d(r,\theta) = -\rho^0\omega^3\left(\frac{|f_{pp}(\theta)|^2}{k_p^0}+\frac{|f_{ps}(\theta)|^2}{k_s^0}\right)\frac{1}{r}dL, \tag{2.26}$$

de même dans le cas d'une onde incidente S :

$$dJ_s^d(r,\theta) = -\rho^0\omega^3\left(\frac{|f_{sp}(\theta)|^2}{k_p^0}+\frac{|f_{ss}(\theta)|^2}{k_s^0}\right)\frac{1}{r}dL. \tag{2.27}$$

Afin d'étudier l'énergie totale $\mathbb{J}_p^d$ ou $\mathbb{J}_s^d$ diffractée par l'obstacle, on intègre ce flux énergétique sur un cercle de rayon b arbitraire concentrique avec l'inclusion. En approximation de champ lointain, cette énergie totale diffractée ne dépend plus de b. On obtient alors :

$$\mathbb{J}^d_{type} = \int_0^{2\pi} dJ^d_{type}(b,\theta) = \int_0^{2\pi}\frac{dJ^d_{type}(b,\theta)}{dL}bd\theta \qquad \text{avec } \; type = p,s \tag{2.28}$$

Ce qui donne, après simplifications :

$$\mathbb{J}^d_{type} = -2\epsilon_n^2\rho^0\omega^3\left(\frac{|a_n^{(type,0)}|^2}{(k_p^0)^2}+\frac{|b_n^{(type,0)}|^2}{(k_s^0)^2}\right) \qquad \text{avec } \; type = p,s \tag{2.29}$$

[3] La notation $\overline{z}$ représente le conjugué du nombre complexe z

Sections efficaces différentielles. En deux dimensions, les sections efficaces différentielles dans la direction θ représentent le rapport du flux d'énergie diffractée par l'inclusion dans l'angle élémentaire $d\theta$, sur le flux incident par unité de surface :

$$\sigma_{d,type}(\theta,\omega) = \frac{1}{J^i_{type}} \frac{dJ^d_{type}}{d\theta}, \qquad \text{avec} \quad type = p,s \tag{2.30}$$

On peut séparer, pour une onde incidente donnée, le flux diffracté relatif aux ondes de compression et celui relatif aux ondes de cisaillement, pour visualiser les conversions de mode. Dans le cas de la diffraction d'une onde incidente P par un cylindre, on peut montrer que :

$$\sigma_{d,p\to p}(\theta,\omega) = |f_{pp}(\theta,\omega)|^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{d,p\to s}(\theta,\omega) = \frac{k^0_p}{k^0_s}|f_{ps}(\theta,\omega)|^2, \tag{2.31}$$

ainsi que dans le cas d'une onde incidente S :

$$\sigma_{d,s\to s}(\theta,\omega) = |f_{ss}(\theta,\omega)|^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{d,s\to p}(\theta,\omega) = \frac{k^0_s}{k^0_p}|f_{sp}(\theta,\omega)|^2. \tag{2.32}$$

La section efficace différentielle illustre la direction angulaire et l'amplitude du flux rayonné. On peut donc l'interpréter comme un diagramme de rayonnement de l'inclusion à une fréquence donnée.

Dans le cas correspondant à une inclusion de granulat de 12 mm de diamètre (cylindre infiniment long) dans du mortier, les sections efficaces différentielles sont tracées en figures 2.2 pour une excitation en onde P ou S. Les sections efficaces sont représentées normalisées par rapport à leur maximum. Les fréquences considérées (50 kHz, 250 kHz, et 500 kHz) sont dans la bande de fréquences utilisée lors de mesures sur du béton. Avec un granulat de 12 mm de diamètre, les kA dans le mortier correspondant sont résumés dans le tableau 2.2.

Tab. 2.2 – kA correspondant aux fréquences étudiées pour l'étude des sections efficaces différentielles.

	50 kHz	250 kHz	500 kHz
$k^0_p A$	0,5	2,4	4,8
$k^0_s A$	0,8	4,2	8,4

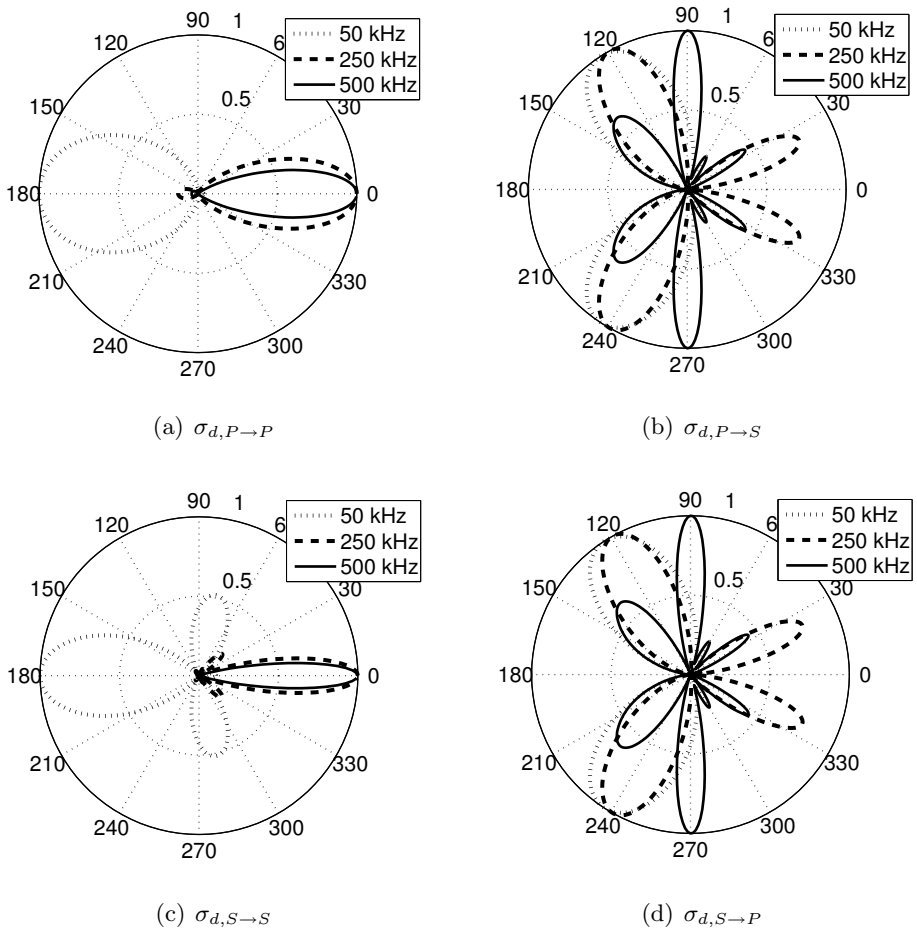
Dans le cas de la diffusion "vers l'avant" (*forward scattering*) à $\theta = 0°$, ou de diffusion "vers l'arrière" (*backward scattering*) à $\theta = 180°$, les termes $\sigma_{d,P\to S}$ et $\sigma_{d,S\to P}$ sont nuls, il n'y a pas de conversion de mode. Les conversions de mode se font en dehors de la direction de l'onde incidente. De plus l'allure du diagramme de rayonnement est équivalente quel que soit le type de conversion de mode ($P \to S$ ou $S \to P$), cependant l'intensité diffère. Le nombre de lobes secondaires pour les diagrammes de rayonnement augmente avec la fréquence.

Si l'on observe la diffraction sans conversion de mode ($P \to P$ ou $S \to S$), l'intensité rayonnée prédomine en rétro-diffusion ($\theta = 180°$) pour les basses fréquences et en transmission ($\theta = 0°$) pour les fréquences plus élevées.

Section efficace totale. La section efficace totale est définie par le rapport du flux total d'énergie diffractée par l'inclusion dans tout l'espace sur le flux d'énergie incidente par unité de surface :

$$\sigma_{t,type}(\omega) = \int_0^{2\pi} \sigma_{d,type}(\theta,\omega)dL = \frac{\mathbb{J}^d_{type}}{J^i_{type}}, \qquad \text{avec} \quad type = p,s \tag{2.33}$$

Les sections efficaces totales représentent en quelque sorte le pouvoir diffractant de l'inclusion pour une fréquence donnée. En 2 dimensions, elles sont homogènes à des longueurs. On définit



(a) $\sigma_{d,P\to P}$ (b) $\sigma_{d,P\to S}$

(c) $\sigma_{d,S\to S}$ (d) $\sigma_{d,S\to P}$

Fig. 2.2 – Sections efficaces différentielles normalisées pour les fréquences 50 kHz, 250 kHz, et 500 kHz, correspondant à un granulat de 12 mm de diamètre dans du mortier (en 2D).

alors les sections efficaces totales normalisées par le diamètre $2A$ du diffuseur, afin de comparer la section efficace du diffuseur à sa section réelle. Le diffuseur aura un effet important sur la propagation si sa section efficace normalisée est grande devant 1.

On peut également distinguer les contributions de chaque type d'onde diffractée pour visualiser les conversions de modes. Ainsi dans le cas d'une onde P incidente on obtient :

$$\sigma_{t,p\to p}(\theta,\omega)=\sum_n \frac{\epsilon_n^2|a_n^{(p,0)}|^2}{Ak_p^0} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{t,p\to s}(\theta,\omega)=\sum_n \frac{k_p^0}{(k_s^0)^2}\frac{\epsilon_n^2|b_n^{(p,0)}|^2}{A}, \tag{2.34}$$

ainsi que dans le cas d'une onde incidente S :

$$\sigma_{t,s\to s}(\theta,\omega)=\sum_n \frac{\epsilon_n^2|b_n^{(s,0)}|^2}{Ak_s^0} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{t,s\to p}(\theta,\omega)=\sum_n \frac{k_s^0}{(k_p^0)^2}\frac{\epsilon_n^2|a_n^{(s,0)}|^2}{A} \tag{2.35}$$

La figure 2.3 représente les différentes sections efficaces totales normalisées dans la bande de fréquences 20-600 kHz (correspondant à $k_p^0 A \simeq 0{,}2\to 6$ et $k_s^0 A \simeq 0{,}3\to 10$). On observe que ces sections sont beaucoup plus importantes quand les modes sont conservés que pour les conversions de modes. En d'autres termes, l'énergie sera essentiellement redistribuée sans conversions de modes. Le champs de cisaillement possède la plus importante section efficace, ce mode sera plus facilement redistribué dans les autres directions de l'espace.

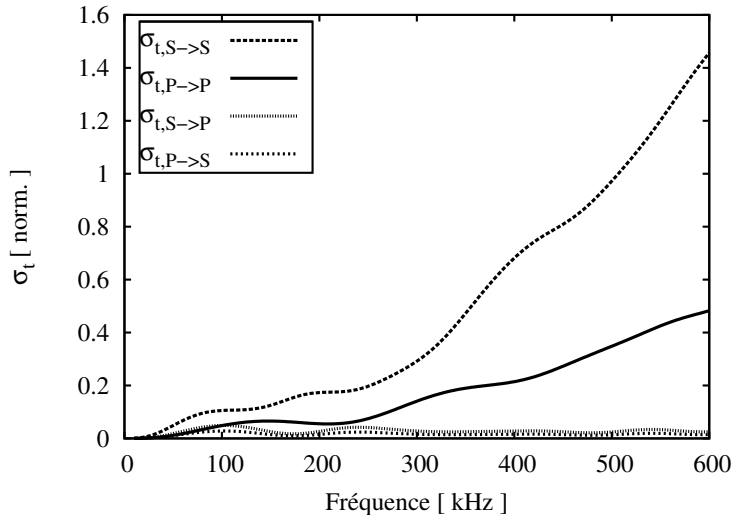


FIG. 2.3 – Sections efficaces totales normalisées pour chaque mode dans le cas d'un granulat cylindrique de diamètre 12 mm dans du mortier.

De même que pour les sections différentielles, les sections efficaces totales pour les conversions de modes PS et SP possèdent le même comportement fréquentiel mais une amplitude sensiblement différente.

2.1.4 Cas 3D : diffuseur sphérique

2.1.4.a Présentation

Notations. Dans le cas d'une inclusion sphérique, le déroulement du calcul est similaire à celui de l'inclusion cylindrique. Il a été présenté par de nombreux auteurs dans le cas d'une matrice élastique mais souvent seul le cas d'une onde incidente P était considéré [Johnson and Truell, 1965; Mow and Pao, 1971; Brill and Gaunaurd, 1987; Korneev and Johnson, 1993]. On se place en coordonnées sphériques (r,θ,φ) dont l'origine est prise au centre du diffuseur, la convention d'orientation utilisée pour les coordonnées sphériques étant la convention internationale (Fig. 2.4). On considère une sphère de rayon A, éclairée par une onde incidente de direction de propagation $\mathbf{e_z}$.

Potentiels. Dans le cas bidimensionnel, l'onde de cisaillement était polarisée suivant une droite orthogonale à la direction de propagation et dans l'axe du cylindre (pour l'onde SH) ou orthogonale à la direction de propagation et à l'axe du cylindre (pour l'onde SV), et les deux problèmes étaient découplés. Ici, l'onde incidente de cisaillement est polarisée indifféremment dans un plan orthogonal à la direction de propagation.

Les potentiels sont alors définis de la manière suivante [Brill and Gaunaurd, 1987] :

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^j = \nabla\phi^j + \nabla\times\mathbf{\Psi}^j \\ \text{avec}\quad &\mathbf{\Psi}^j = \nabla\times(\psi^j r\mathbf{e_r}) + \nabla\times\Big(\nabla\times(\chi^j r\mathbf{e_r})\Big) \qquad j=0,1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

où ϕ^j est le potentiel scalaire associé à l'onde de compression et les potentiels ψ^j et χ^j sont les potentiels scalaires de Debye associés à l'onde de cisaillement. Ces potentiels scalaires sont

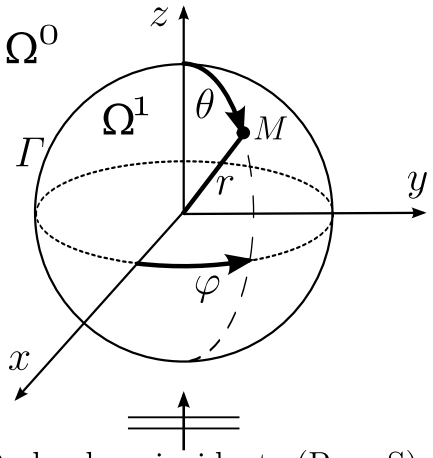


Fig. 2.4 – Inclusion sphérique élastique Ω^1 de rayon A dans une matrice homogène élastique infinie Ω^0. Les conventions choisies pour les coordonnées sphériques du point $M(r, \theta, \varphi)$ correspondent aux conventions internationales.

solutions des équations de Helmholtz suivantes :

$$\nabla^2\phi^j + (k_p^j)^2\phi^j = 0 \qquad j = 0, 1 \tag{2.37}$$
$$\nabla^2\psi^j + (k_s^j)^2\psi^j = 0 \qquad j = 0, 1 \tag{2.38}$$
$$\nabla^2\chi^j + (k_s^j)^2\chi^j = 0 \qquad j = 0, 1 \tag{2.39}$$

Champs incidents. Le problème sera traité séparément pour une onde plane incidente de type P ou S. Dans les deux cas, l'onde plane incidente se propage suivant l'axe $\mathbf{e_z}$.

Pour une onde incidente de compression d'amplitude unitaire dont le déplacement particulaire se met sous la forme, $\mathbf{u}^0_{inc} = \mathrm{e}^{ik_p^0 z}\mathbf{e_z}$ le problème présente une symétrie de révolution autour de l'axe z et est indépendant de l'angle φ.

Dans le cas d'une onde incidente de cisaillement, polarisée dans la direction $\mathbf{e_x}$, sous la forme $\mathbf{u}^0_{inc} = \mathrm{e}^{ik_s^0 z}\mathbf{e_x}$ la symétrie du problème est brisée, et les expressions des potentiels et déplacements présenteront une dépendance à la fois en θ et en φ.

Comme dans le cas 2D, les champs à l'extérieur de l'inclusion s'écrivent comme la somme du champ incident et du champ diffracté :

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0_{inc} + \mathbf{u}^0_d. \tag{2.40}$$

Le calcul du déplacement associé à l'onde diffractée $\mathbf{u}^0_d$ est réalisé en appliquant les conditions aux limites de contact parfait à l'interface Γ (continuité des déplacements et des contraintes normales). Ce calcul est détaillé en annexe B dans le cas d'une onde incidente de compression et de cisaillement.

2.1.4.b Paramètres de diffraction en champ lointain

Amplitudes de diffraction. Les amplitudes de diffraction sont définies de la même manière que dans le cas 2D (Eq. 2.18). Dans le problème tridimensionnel, le champ diffracté pour le déplacement est décrit comme une onde sphérique pondérée par un facteur d'anisotropie f, sous la forme générale suivante :

$$u^0_d(r, \theta, \varphi) = f(\mathbf{k_0}, \mathbf{k}')\frac{\mathrm{e}^{ik_0 r}}{r}. \tag{2.41}$$

f dépend donc de θ et de φ.

Les déplacements en champ lointain obtenus en annexe B (Eqs. B.25 et B.30) pour une onde incidente de compression dans la direction $\mathbf{e_z}$ sont :

$$u^0_{r,d} = f_{pp}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{r} \quad ; \quad f_{pp}(\theta,\varphi) = \frac{1}{ik_{p0}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n P_n(\cos\theta) \tag{2.42}$$

$$u^0_{\theta,d} = f_{ps}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} \quad ; \quad f_{ps}(\theta,\varphi) = \frac{1}{ik_{s0}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)b_n\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \tag{2.43}$$

où a_n et b_n sont des coefficients déterminés en appliquant les conditions limites en Γ et P_n les polynômes de Legendre. Du fait de la symétrie de révolution autour de l'axe z dans le cas de l'onde P incidente, le déplacement de l'onde de cisaillement diffractée par conversion de mode sera toujours polarisé suivant $\mathbf{u_{s,d}}^0 = u^0_{\theta,d}\mathbf{e}_\theta$.

Pour une onde incidente de cisaillement dans la direction $\mathbf{e_z}$ et polarisée suivant $\mathbf{e_x}$, les amplitudes des déplacements en champ lointain s'écrivent :

$$\begin{aligned}
u^0_{r,d} &= f_{sp}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{r} = -\frac{i}{k_p^0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(2n+1)}{(n^2+n)}P_n^1(\cos(\theta))\cos(\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{r}\\
u^0_{\theta,d} &= f_{ss\theta}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} = \frac{i}{k_s^0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n\,(n+1)}\left(b_n\frac{\partial P_n^1(\cos(\theta))}{\partial\theta}+c_n\frac{P_n^1(\cos(\theta))}{\sin\theta}\right)\cos(\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r}\\
u^0_{\varphi,d} &= f_{ss\varphi}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} = -\frac{i}{k_s^0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n\,(n+1)}\left(b_n\frac{P_n^1(\cos(\theta))}{\sin\theta}+c_n\frac{\partial P_n^1(\cos(\theta))}{\partial\theta}\right)\sin(\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

où a_n, b_n et c_n sont des coefficients déterminés en appliquant les conditions limites en Γ et P_n^1 les premières fonctions associées de Legendre. Dans ce cas, l'onde de cisaillement diffractée $\mathbf{u_{s,d}}^0$ sera polarisée avec une composante $u^0_{\theta,d}$ et une composante $u^0_{\varphi,d}$:

$$\mathbf{u_{s,d}}^0 \;=\; u^0_{\theta,d}\,\mathbf{e}_\theta \;+\; u^0_{\varphi,d}\,\mathbf{e}_\varphi. \tag{2.45}$$

Le terme f_{ss} associé à l'amplitude complexe de l'onde de cisaillement sera donc déterminé à partir de l'amplitude complexe de $\mathbf{u_{s,d}}^0$.

$$f_{ss}(\theta,\varphi) \;=\; \sqrt{f_{ss\theta}(\theta,\varphi)^2 + f_{ss\varphi}(\theta,\varphi)^2}. \tag{2.46}$$

Limites en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
Les polynômes de Legendre possèdent les propriétés suivantes :

$$\lim_{\theta\to 0} P_n(\cos\theta) = 1 \quad ; \quad \lim_{\theta\to\pi} P_n(\cos\theta) = (-1)^n, \tag{2.47}$$

ainsi que

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \;=\; \lim_{\theta\to\pi}\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \;=\; 0. \tag{2.48}$$

On a alors les expressions particulières en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$:

$$\begin{cases} f_{pp}(0) \;=\; \dfrac{1}{ik_p^0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n & \text{et} \quad f_{pp}(\pi) \;=\; \dfrac{1}{ik_p^0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n a_n \\ f_{ps}(0) \;=\; 0 & \text{et} \quad f_{ps}(\pi) \;=\; 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

De la même manière les premières fonctions associées de Legendre ont pour propriétés :

$$\lim_{\theta\to 0} P_n^1(\cos\theta) = 0 \quad ; \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} = -\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n(n+1)}{2} \tag{2.50}$$

et

$$\lim_{\theta\to\pi} P_n^1(\cos\theta) = 0 \quad ; \quad \lim_{\theta\to\pi} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \lim_{\theta\to\pi} \frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta} = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.51}$$

Et on a alors dans le cas d'une onde incidente de cisaillement :

$$\begin{cases} f_{ss}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \frac{b_n + c_n}{ik_s^0} & \text{et} \quad f_{ss}(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2} \frac{b_n - c_n}{ik_s^0} \\ f_{sp}(0) = 0 & \text{et} \quad f_{sp}(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.52}$$

on remarque que les fonctions f_{ss} et f_{sp} en $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ ne dépendent plus de l'angle φ.

De même que pour le cas du cylindre, les amplitudes f_{ps} et f_{sp} associées à des conversions de mode pour la diffusion "vers l'avant" ($\theta = 0$) et pour la rétro-diffusion ($\theta = \pi$) sont nulles.

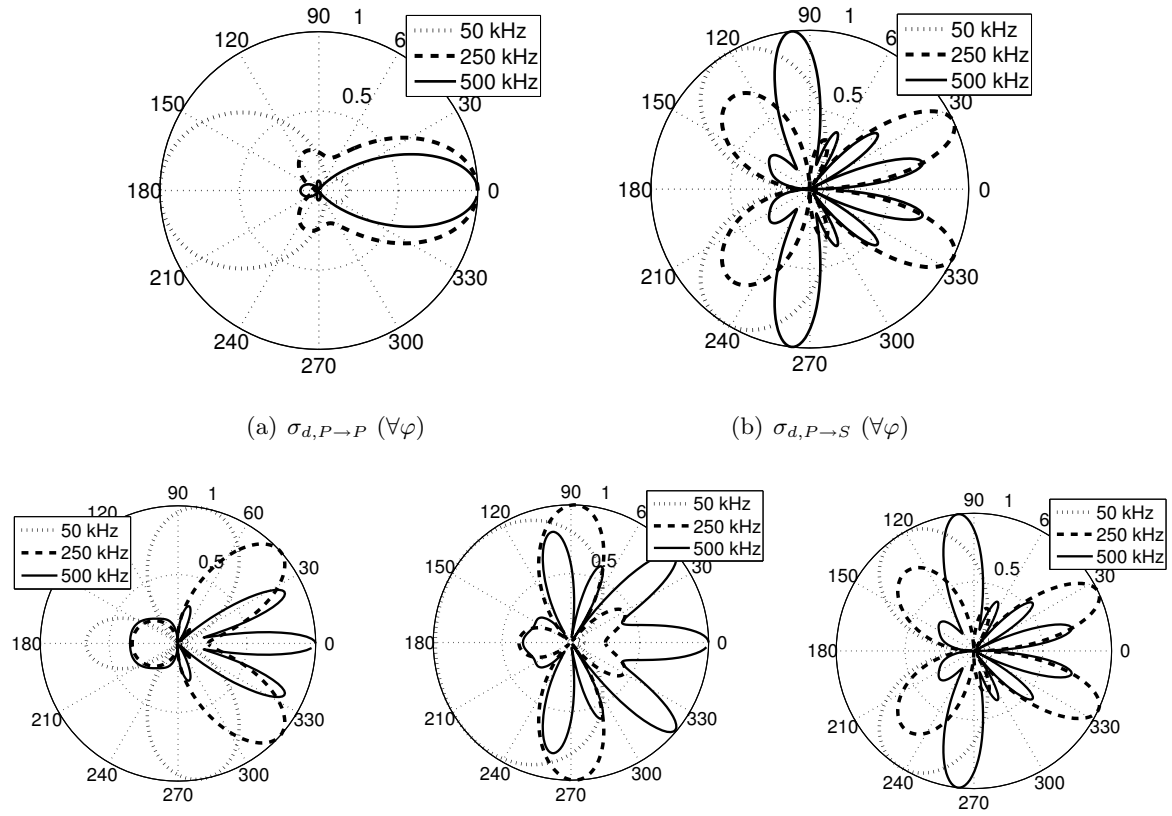
Sections efficaces différentielles. Les sections efficaces différentielles σ_d sont définies à partir des amplitudes de diffraction de la même manière que dans le cas du cylindre (Eq. 2.30). Le calcul de ces sections efficaces dans le cas d'un diffuseur sphérique est détaillé en annexe B.5. Elles sont représentées en figure 2.5 dans le cas d'une sphère de 12 mm de diamètre avec les propriétés du tableau 2.1. Le problème étant tridimensionnel, et les sections efficaces différentielles ayant des formes relativement compliquées du fait de la combinaison de polynômes et de fonctions de Legendre, on choisit de ne représenter que des coupes suivant certains plans.

Sur ces courbes, la direction de l'angle incident correspond à $\theta = 0$ quelle que soit le type de l'onde incidente. Tout comme dans le cas de l'inclusion cylindrique, les champs diffractés sans conversion de mode ont une amplitude non nulle en diffusion "vers l'avant" ($\theta = 0$) et en rétro-diffusion ($\theta = \pi$). Cette diffraction sans conversion de mode est de plus en plus pointée vers l'avant lorsque la fréquence augmente.

Dans le cas de conversions de mode ($P \to S$ ou $S \to P$), les champs diffractés ont une amplitude nulle en rétro-diffusion et diffusion "vers l'avant". Le nombre de lobes secondaires en dehors de la direction de propagation augmente avec la fréquence. On peut remarquer cette fois encore les similitudes entre les allures des section efficace $\sigma_{d,P\to S}$, $\forall\varphi$ et $\sigma_{d,S\to S}(\varphi = 0)$, bien que les intensités diffèrent. Cependant $\sigma_{d,S\to S}(\varphi = \pi/2)$ est nulle quel que soit l'angle θ.

Sections efficaces totales. Les sections efficaces totales sont définies de la même manières que pour la cas du cylindre (Eq. 2.33), en intégrant les sections efficaces différentielles sur tout l'angle solide. Le détail du calcul est présenté en annexe B.5. Elles sont représentées sur la figure 2.6 dans le cas d'un granulat sphérique dans du mortier. Les sections efficaces totales étant homogènes à une surface en 3D, elles sont représentées ici normalisées par rapport à la section des sphères πA^2.

Comme pour le cas du cylindre, les sections efficaces totales correspondant à des conversions de modes sont très faibles. Ici, la section efficace $\sigma_{d,S\to S}$ est prépondérante. Elle présente un pic vers 180 kHz, correspondant à $k_s^0 A \simeq \pi$: la longueur d'onde est alors similaire au diamètre de l'inclusion ($\lambda \simeq 2A$). L'influence des diffuseurs sphériques sur la propagation des ondes S autour de cette fréquence sera donc très importante. En dessous de 50 kHz, les longueurs d'ondes sont grandes devant les dimensions des inclusions ($k_p^0 A = 0,5$ et $k_s^0 A = 0,8$) et l'influence de la diffraction sera très faible.



(a) $\sigma_{d,P\to P}$ $(\forall\varphi)$ (b) $\sigma_{d,P\to S}$ $(\forall\varphi)$

(c) $\sigma_{d,S\to S}$; le plan XZ($\varphi = 0$) (d) $\sigma_{d,S\to S}$; plan ZY($\varphi = \pi/2$) (e) $\sigma_{d,S\to P}$; plan XZ($\varphi = 0$)

FIG. 2.5 – Sections efficaces différentielles normalisées pour les fréquences 50 kHz, 250 kHz, et 500 kHz, correspondant à un granulat sphérique de 12 mm de diamètre dans du mortier (en 3D). Les fonctions sont représentées en fonction de la variable θ, l'angle φ étant fixé. L'onde incidente se propage suivant la direction $\theta = 0$.

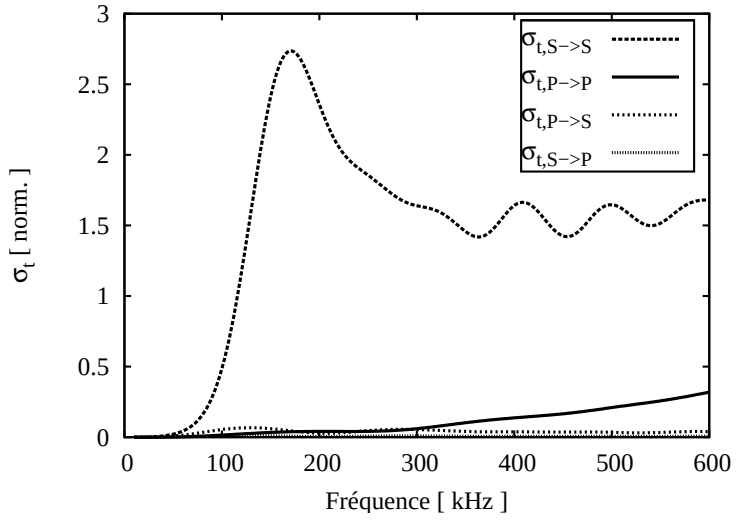


FIG. 2.6 – Sections efficaces totales normalisées pour chaque mode dans le cas d'un granulat sphérique de diamètre 12 mm dans du mortier.

2.2 Modélisation de la diffusion multiple

2.2.1 Développements théoriques

2.2.1.a Différentes approches

Les développements théoriques traitant de la diffusion multiple des ondes par des diffuseurs aléatoirement répartis dans une matrice ont été largement traités dans la littérature. Diverses approches sont possibles afin de prendre en compte les différentes interactions entre les diffuseurs ; le formalisme des "t-matrices" [Foldy, 1945; Twersky, 1962; Waterman and Truell, 1961] et les formalismes utilisant des fonctions de Green et des approches diagrammatiques des interactions entre les diffuseurs [Sornette, 1989; Sheng, 1995; Tourin et al., 2000]. Ces deux approches présentent toutes deux dans un premier temps la description exacte du phénomène de diffusion multiple dans un cas général, puis étudient la moyenne sur les différentes configurations du désordre. Enfin, différentes hypothèses et approximations sont appliquées pour obtenir l'expression d'un nombre d'onde effectif, correspondant au milieu homogène équivalent.

2.2.1.b Formalisme de Green

Fonctions de Green en milieu homogène. La fonction de Green G_0 dans milieu homogène est solution de l'équation de Helmholtz suivante :

$$(\triangle + k_0^2(\omega))G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.53}$$

$G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ correspond au champ généré au point $\mathbf{r}$ par une source ponctuelle de pulsation ω placée en $\mathbf{r}'$ dans le milieu homogène de nombre d'onde $k_0 = \omega/c_0$. Le milieu homogène étant invariant par translation, cette fonction ne dépend en fait que de la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et s'écrit donc $G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Ces fonctions de Green prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) && \text{en 2D} \\ G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} && \text{en 3D} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Fonction de Green en milieu hétérogène. Dans un milieu hétérogène où les propriétés dépendent de la variable d'espace $\mathbf{r}$, la fonction de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est solution d'une équation de Helmholtz sous la forme suivante [Tourin et al., 2000] :

$$\triangle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(\nabla \log \rho(\mathbf{r}).\nabla)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.55}$$

avec $k(\mathbf{r}) = \omega/c(\mathbf{r})$ le nombre d'onde du milieu hétérogène au point $\mathbf{r}$. Le milieu n'étant pas invariant par translation du fait des hétérogénéités, la fonction de Green dépend des deux variables $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ [Sheng, 1995].

En considérant un milieu homogène de référence, de nombre d'onde k_0, on peut exprimer les variations de propriétés du milieu hétérogène sous la forme d'un opérateur $V(\mathbf{r}) = k_0^2 - k^2(\mathbf{r}) - (\nabla \log \rho(\mathbf{r}).\nabla)$ appelé *potentiel de diffusion*. L'équation 2.55 devient alors :

$$\triangle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.56}$$

Si l'on choisit comme milieu de référence de nombre d'onde k_0 la matrice entourant les diffuseurs, l'équation 2.56 peut être vue comme la propagation d'une onde dans le milieu homogène qu'est la matrice, avec un terme de sources supplémentaire lié à la présence des diffuseurs.

Les solutions de l'équation différentielle 2.56 peuvent être exprimées en fonction des solutions $G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ de l'équation 2.53.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r_1}) V(\mathbf{r_1}) G(\mathbf{r_1}, \mathbf{r}') d\mathbf{r_1} \tag{2.57}$$

Développement de Born. La solution 2.57 est du type "fermée" car elle comporte le terme G à la fois dans le terme de gauche et sous l'intégrale. On peut alors écrire cette équation suivant un développement de Born à l'infini en remplaçant $G(\mathbf{r_1}, \mathbf{r}')$ sous l'intégrale par le membre de droite de l'équation 2.57 correspondant :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad = \quad & G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r_1}) V(\mathbf{r_1}) G_0(\mathbf{r_1} - \mathbf{r}') d\mathbf{r_1} \\ & + \int \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r_1}) V(\mathbf{r_1}) G_0(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) V(\mathbf{r_2}) G_0(\mathbf{r_2} - \mathbf{r}') d\mathbf{r_1} d\mathbf{r_2} \\ & + \cdots . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Cette équation détermine le champ généré en un point $\mathbf{r}$ de l'espace hétérogène par une source ponctuelle placée en $\mathbf{r}'$. Ce champ est la somme de différentes contributions correspondant aux différents ordres de diffusion ;

- Le premier terme $G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ correspond à l'onde s'étant propagée de $\mathbf{r}'$ jusqu'à $\mathbf{r}$ dans la matrice homogène sans rencontrer de diffuseurs.
- Le second terme regroupe l'ensemble des évènements de diffusion d'ordre 1 ou diffusion simple. L'onde s'est propagée dans la matrice de $\mathbf{r}'$ à $\mathbf{r_1}$ où elle a subi un évènement de diffusion, puis s'est propagée de nouveau dans la matrice de $\mathbf{r_1}$ à $\mathbf{r}$.
- Le troisième terme correspond à de la diffusion d'ordre 2. L'onde a subi deux évènements de diffusion en $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ lors de son trajet. On peut remarquer que les positions $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ peuvent être égales, elles peuvent également appartenir au même diffuseur si ce dernier est non ponctuel, ou bien appartenir à deux diffuseurs distincts.
- Et ainsi de suite pour tous les ordres de diffusions.

La somme est infinie, d'où l'impossibilité de déterminer une solution exacte au problème. On remarquera que dans cette représentation, l'onde se propage toujours dans le milieu de référence (ici la matrice), même si physiquement elle se propage également à l'intérieur des hétérogénéités. Cette expression est exacte et est valable quel que soit le type de diffuseurs.

Des auteurs ont développé une approche diagrammatique qui illustre l'équation 2.58, notamment explicitée par Mamou [2005]. L'avantage de l'approche diagrammatique est qu'elle permet de classifier les évènements de diffusion en ensembles regroupant des évènements de diffusion d'ordre de plus en plus élevés ; ensembles d'évènements de diffusion relatifs à un diffuseur donné, ensembles relatifs à la diffusion dans plusieurs diffuseurs consécutifs sans "repasser" plusieurs fois par le même diffuseur (diffuseurs décorrelés), ensembles comportant une corrélation entre deux diffuseurs, deux corrélations, etc.

Diffusion simple : approximation de Born. L'approximation la plus simple consiste à ne considérer que les deux premiers termes de l'équation 2.58 (première approximation de Born). On se trouve alors dans le cas de la diffusion simple : le champ observé en un point de l'espace a subi au plus un évènement de diffusion. Autrement dit pour chaque évènement de diffusion le champ incident n'a pas rencontré d'autres évènements de diffusion auparavant, ne serait-ce qu'à l'intérieur du même diffuseur. Cette approximation n'est valable que lorsqu'il y a un très petit nombre de diffuseurs.

2.2.1.c Champ cohérent, équation de Dyson

L'expression 2.57 implique que l'on connaisse exactement la position de chaque diffuseur dans le milieu. En effectuant une moyenne sur toutes les configurations possibles des diffuseurs, on peut mettre les expressions du champ moyen suivant une équation de Dyson :

$$\langle G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rangle = G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \int\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r_1})\Sigma(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})\langle G(\mathbf{r_2},\mathbf{r}')\rangle d\mathbf{r_1}d\mathbf{r_2}, \tag{2.59}$$

où $\Sigma(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})$ est appelé "opérateur de masse"[4]. Ce terme prend en compte l'ensemble des évènements de diffusion contribuant au champ moyen.

Le champ moyen étant invariant par translation, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ ne dépend plus que de la différence $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ et l'équation de Dyson s'écrit :

$$\langle G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rangle = G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \int\int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r_1})\Sigma(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})\langle G(\mathbf{r_2}-\mathbf{r}')\rangle d\mathbf{r_1}d\mathbf{r_2}. \tag{2.60}$$

Il est utile d'exprimer l'équation de Dyson 2.60 dans l'espace des nombres d'onde par transformée de Fourier spatiale[5]. En remarquant que le terme contenant la double intégrale dans l'équation 2.60 est un double produit de convolution, on a :

$$\langle \hat{G}(\mathbf{k})\rangle = \hat{G}_0(\mathbf{k}) + \hat{G}_0(\mathbf{k})\hat{\Sigma}(\mathbf{k})\langle \hat{G}(\mathbf{k})\rangle. \tag{2.63}$$

D'autre part G_0 était une solution de l'équation 2.53, dont la transformée de Fourier spatiale s'écrit :

$$(\triangle + k_0^2(\omega))G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \xrightarrow{TF} \quad (-k^2+k_0^2)\hat{G}_0(\mathbf{k}) = 1. \tag{2.64}$$

La moyenne sur les configurations du désordre de la fonction de Green prend donc la forme simple suivante :

$$\langle \hat{G}(\omega,\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{k_0^2(\omega)-\Sigma(\omega,\mathbf{k})-k^2}. \tag{2.65}$$

La transformée de Fourier inverse de l'équation 2.65 est difficile à réaliser du fait de la dépendance de l'opérateur de masse Σ avec le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Il est cependant plus simple d'effectuer des approximations sur ce terme plutôt que de les effectuer directement sur le champ $\hat{G}$. On peut notamment représenter Σ sous une forme diagrammatique, de la même manière que l'équation 2.58, afin cette fois encore de classifier les évènements de diffusion.

2.2.2 Approximations

2.2.2.a Milieu effectif

En faisant quelques hypothèses, on peut considérer que Σ ne dépend que de la fréquence et est indépendant de $\mathbf{k}$. En pratique, on peut considérer que Σ est indépendant de $\mathbf{k}$ lorsque les diffuseurs sont décorelés et que $kA \to 0$, donc quand la longueur d'onde λ devient grande devant

[4] Le terme anglais associé est *self energy*.

[5] On rappelle ici l'expression de la transformée de Fourier spatiale $\hat{g}(\mathbf{k})$ d'une fonction $g(\mathbf{r})$:

$$g(\mathbf{r}) \quad \xrightarrow{TF} \quad \hat{g}(\mathbf{k}) = \int g(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d\mathbf{r}, \tag{2.61}$$

ainsi que quelques unes de ses propriétés :

$$\begin{aligned} (g*f)(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad &\xrightarrow{TF} \quad \hat{g}(\mathbf{k})\hat{f}(\mathbf{k}) \\ \delta(\mathbf{r}) \quad &\xrightarrow{TF} \quad 1 \\ \triangle f(\mathbf{r}) \quad &\xrightarrow{TF} \quad -k^2\hat{f}(\mathbf{k}) \end{aligned} \tag{2.62}$$

la dimension caractéristique A des inclusions [Sheng, 1995]. Les diffuseurs sont assimilés à des diffuseurs ponctuels rayonnant en champ lointain les uns par rapport aux autres ; on parle alors de milieu dilué [Tourin et al., 1999].

On peut dans ce cas obtenir simplement l'expression du champ cohérent $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rangle$ par transformée de Fourier inverse de la relation 2.65, sous la forme :

$$(\triangle + k_e^2(\omega))\langle G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.66}$$

en posant :

$$k_e^2(\omega) = k_0^2(\omega) - \Sigma(\omega). \tag{2.67}$$

Sous cette approximation, le champ cohérent obéit à une équation de Helmholtz dans un milieu homogène effectif, caractérisé par le nombre d'onde effectif k_e. On parle souvent d'homogénéisation du milieu. Σ étant en général une valeur complexe, le milieu effectif aura un nombre d'onde dont la partie imaginaire sera non nulle. Le milieu effectif sera donc un milieu atténuant.

2.2.2.b Independent Scattering Approximation

L'*Independent Scattering Approximation* (ISA) revient à ne considérer dans le développement diagrammatique de Σ que le premier terme. On tient compte de la diffusion multiple jusqu'à un ordre infini en excluant tous les ensembles d'évènements de diffusion comportant une corrélation entre les diffuseurs (chaque diffuseur ne peut être atteint qu'une fois lors d'une chaîne de diffusion) [Mamou, 2005]. Du fait de la non prise en compte des corrélations entre les diffuseurs, on peut également interpréter l'ISA comme le fait que le champ qui éclaire un diffuseur en un point reste le même, que ce diffuseur soit présent ou non, mais dépend de tous les autres diffuseurs du milieu.

Cette approximation a été explicitée par de nombreux auteurs, notamment dans le cas de la diffusion d'ondes électromagnétiques [Lagendijk and van Tiggelen, 1996]. L'expression de Σ dans le cadre de l'ISA est en général écrite de la manière suivante :

$$\Sigma = n\langle \mathbf{k_0}|t|\mathbf{k_0}\rangle, \tag{2.68}$$

où n est la densité de diffuseurs dans le milieu et le terme écrit sous la forme $\langle \mathbf{k}'|t|\mathbf{k}''\rangle$ est un opérateur de transition qui décrit le comportement d'une onde de vecteur d'onde $\mathbf{k}'$ qui arrive sur un diffuseur et est diffractée dans la direction $\mathbf{k}''$. Ce terme $\langle \mathbf{k}'|t|\mathbf{k}''\rangle$ est lié aux fonctions d'amplitude de diffraction en champ lointain du diffuseur, ainsi qu'aux fonctions de Green de la matrice homogène en champ lointain, et sera explicité dans le paragraphe suivant. Dans le cadre de l'ISA, les vecteurs d'onde $\mathbf{k_0}$ de l'onde incidente et diffractée sont les mêmes, on ne considère que la diffusion "vers l'avant", de plus l'approximation de milieu dilué justifie de se placer en champ lointain par rapport aux diffuseurs.

Le nombre d'onde du milieu effectif est donc simplement exprimé en fonction du nombre d'onde dans la matrice, de la densité de diffuseurs et de l'opérateur de transition correspondant au comportement en diffusion "vers l'avant" d'un diffuseur en champ lointain.

$$k_e^2(\omega) = k_0^2(\omega) - n\langle \mathbf{k_0}|t|\mathbf{k_0}\rangle. \tag{2.69}$$

L'avantage de ce type de notation est qu'elle est valable aussi bien dans le cas 2D que dans le cas 3D.

2.2.2.c Expressions de l'ISA en milieu élastique

L'ISA appliquée aux ondes mécaniques a été développée et étudiée dans des milieux dont la matrice est acoustique, où seules les ondes de compression se propagent (par exemple pour

l'inclusion de tiges d'acier dans de l'eau [Tourin et al., 1999; Mamou, 2005]). Dans le cas de matériaux à matrice élastique, il faut distinguer le cas de la propagation des ondes de compression et des ondes cisaillement, ainsi que des conversions de mode qui peuvent survenir lors de l'interaction avec les diffuseurs. On doit alors définir deux nombres d'onde effectifs $k_{p,e}$ et $k_{s,e}$ correspondant aux ondes P et S pour caractériser le milieu effectif. Ces nombres d'onde en milieu élastique s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k_{p,e}^2(\omega) &= k_{p,0}^2(\omega) - n\langle \mathbf{k_{p,0}}|t|\mathbf{k_{p,0}}\rangle \\ k_{s,e}^2(\omega) &= k_{s,0}^2(\omega) - n\langle \mathbf{k_{s,0}}|t|\mathbf{k_{s,0}}\rangle \end{aligned} \tag{2.70}$$

On peut exprimer les opérateurs de transition en fonction des amplitudes de diffraction en champ lointain f_{pp} et f_{ss} calculées pour un diffuseur cylindrique ou sphérique en section 2.1. On obtient alors dans le cas de cylindres :

$$\text{en 2D} \quad \begin{cases} k_{p,e}^2 &= k_{p,0}^2 + n\dfrac{4\sqrt{\pi k_{p,0}}}{1+i} f_{pp}(\theta=0) \\ k_{s,e}^2 &= k_{s,0}^2 + n\dfrac{4\sqrt{\pi k_{s,0}}}{1+i} f_{ss}(\theta=0) \end{cases}, \tag{2.71}$$

et dans le cas de sphères :

$$\text{en 3D} \quad \begin{cases} k_{p,e}^2 &= k_{p,0}^2 + 4\pi n f_{pp}(\theta=0,\varphi=0) \\ k_{s,e}^2 &= k_{s,0}^2 + 4\pi n f_{ss}(\theta=0,\varphi=0) \end{cases}. \tag{2.72}$$

Les nombres d'onde effectifs obtenus sont complexes. On peut alors définir pour le milieu effectif une vitesse de phase effective $c_e(\omega)$ et une atténuation effective $\alpha_e(\omega)$, pour les ondes P et S, définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k_{p,e}(\omega) &= \frac{\omega}{c_{p,e}} + i\alpha_{p,e} \\ k_{s,e}(\omega) &= \frac{\omega}{c_{s,e}} + i\alpha_{s,e} \end{aligned} \tag{2.73}$$

L'ISA ne tenant compte que de la diffusion "vers l'avant" sur les diffuseurs, les amplitudes de diffraction en champ lointain sont prises pour des angles $\theta = 0$ et $\varphi = 0$. Or pour ces angles les termes correspondant à des conversions de modes sont nuls, on a :

$$\begin{aligned} &f_{ps}(\theta=0) = f_{sp}(\theta=0) = 0 && \text{en 2D} \\ &f_{ps}(\theta=0,\varphi=0) = f_{sp}(\theta=0,\varphi=0) = 0 && \text{en 3D} \end{aligned} \tag{2.74}$$

L'ISA prend donc bien en compte les conversions de modes qui surviennent à chaque interaction avec les hétérogénéités.

2.2.2.d Autres modèles pour l'homogénéisation

La modélisation du nombre d'onde effectif k_e a donné lieu à d'autres théories d'homogénéisation. En utilisant un autre formalisme et en considérant que les diffuseurs sont ponctuels et rayonnent de manière isotrope (les fonctions de champ lointain ne dépendent pas de l'angle de diffraction), Foldy [1945] avait obtenu une formule similaire à celle de l'ISA.

Parmi les généralisations de l'approche de Foldy, on peut entre autres citer la théorie de Waterman and Truell [1961], similaire à ISA mais tenant compte également d'un terme d'ordre deux faisant intervenir de la rétro-diffusion :

$$k_e^2 = k_0^2 - n\langle \mathbf{k}_0|t|\mathbf{k}_0\rangle + \left(\frac{n}{2k_0^2}\right)^2 \left(\langle \mathbf{k}_0|t|\mathbf{k}_0\rangle^2 - \langle \mathbf{k}_0|t|-\mathbf{k}_0\rangle^2\right). \tag{2.75}$$

Cette théorie de Waterman-Truell est la plus couramment utilisée dans les problèmes de diffusion multiple, par exemple pour l'étude de la porosité dans les roches [Bourbié et al., 1986], dans du béton [Chaix, 2003], ou dans du ciment encore liquide [Aggelis et al., 2005].

La théorie de Waterman-Truell a été remise en cause par Lloyd and Berry [1967], dont les travaux ont été explicités par Linton and Martin [2005], basés sur l'Approximation Quasi Cristalline (QCA) développée par Lax [1952] et en prenant en compte différemment les corrélations entre les diffuseurs. Linton et Martin aboutissent à la relation 2.76 dans une matrice acoustique et en deux dimensions :

$$k_e^2 = k_0^2 - 4in f^*(0) + \frac{8n^2}{\pi k_0^2} \int_0^\pi \cot(\theta/2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left[f^*(\theta)\right]^2 \mathrm{d}\theta \tag{2.76}$$

où $f^*(\theta)$ est l'amplitude de diffraction en champ lointain, mais avec une définition légèrement différente de celle explicitée en Eq. 2.18, dont le lien avec la définition de f utilisée dans ce document est :

$$f^*(\theta) = \sqrt{\frac{\pi k_0}{2}} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} f(\theta). \tag{2.77}$$

Cependant, l'étude des amplitudes de diffraction en champ lointain f dans le cas d'une matrice élastique a montré que pour des angles différents de $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, les termes correspondant à des conversions de modes f_{ps} et f_{sp} étaient non nuls. La relation 2.76 faisant intervenir la diffraction par les inclusions pour tous les angles θ de l'espace, elle ne pourra pas prendre en compte correctement les conversions de modes.

On choisit donc de n'étudier que les modèles de l'ISA et de Waterman-Truell pour l'étude en milieu élastique, ces relations ne faisant intervenir que la diffusion "vers l'avant" ou la rétrodiffusion.

2.2.3 Application aux bétons

2.2.3.a Validité des modèles d'homogénéisation

Les différents modèles d'homogénéisation partent pour la plupart de l'hypothèse du milieu dilué pour définir le milieu effectif. Ils sont en théorie valables pour des diffuseurs de dimensions petites devant la longueur d'onde et interagissant en champ lointain. L'hypothèse de diffraction des diffuseurs en champ lointain implique des distances entre les diffuseurs d'autant plus grandes que le contraste entre les diffuseurs et la matrice est élevé, rendant l'influence de ces diffuseurs sur la propagation importante. Cependant, les limites de validité de ces modèles ne sont pas clairement établies.

Expérimentalement, ces modèles ont été étudiés en 2D dans le cas de tiges d'acier de 0.8 mm de diamètre immergées dans de l'eau [Derode et al., 2006], montrant que ces modèles donnent des résultats satisfaisants pour de faibles concentrations de tiges (moins de 10% en surface). Cependant dans ce cas, le contraste entre les diffuseurs en acier et la matrice fluide est très important.

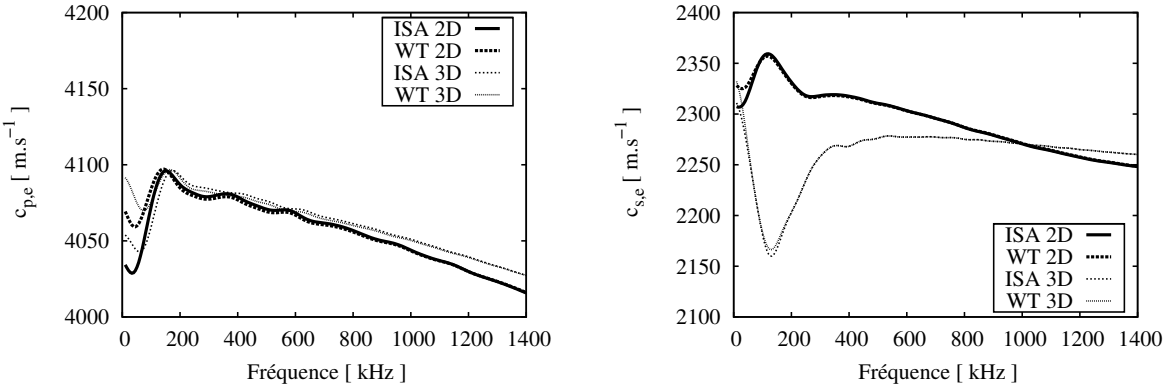
Le béton ne peut pas être considéré comme un milieu dilué, les granulats représentant environ 50% du volume total. L'hypothèse de diffuseurs très petits devant la longueur d'onde n'est également pas vérifiée pour les plus gros de ces granulats. Enfin, les distances entre les granulats étant très faibles du fait de leur quantité élevée, l'hypothèse d'interaction en champ lointain ne semble pas non plus vérifiée, et des corrélations entre des granulats proches ne pourront peut être pas être négligées. A première vue, le béton ne semble donc pas vérifier les hypothèses des modèles d'homogénéisation.

Cependant, bien que la fraction volumique de granulats soit importante, la densité n de granulats par unité de volume ne sera pas si élevée, du fait de leurs grandes dimensions. Le contraste entre le mortier et les granulats est également beaucoup plus faible que entre de

l'acier et de l'eau. L'influence des granulats sur la propagation sera relativement faible, et on peut supposer dans ces conditions que des modèles de type ISA peuvent donner des résultats satisfaisants.

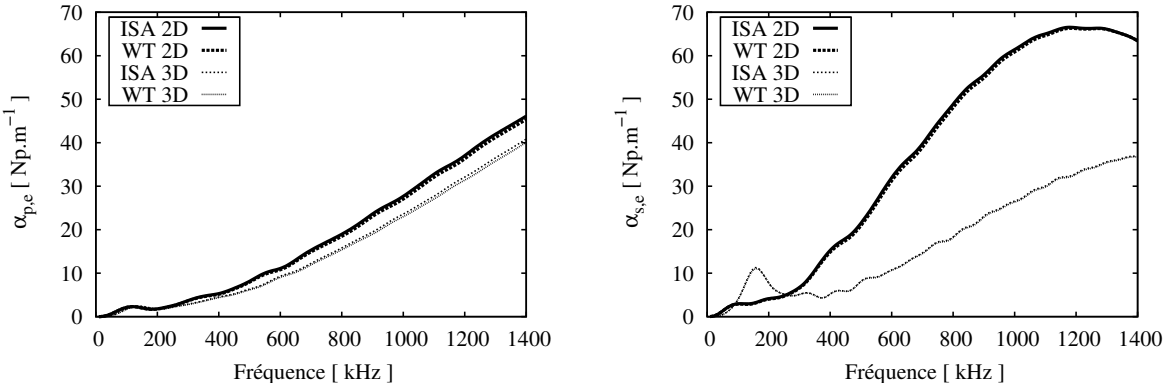
2.2.3.b Exemples de résultats numériques

L'allure des courbes de dispersion et d'amortissement du milieu effectif déterminées par les méthodes ISA et Waterman-Truell sont présentées en figures 2.7 et 2.8 pour les cas 2D et 3D. Les paramètres relatifs au mortier et aux granulats sont ceux du tableau 2.1. Le rayon/diamètre des granulats est de 12 mm et la concentration surfacique/volumique est de 40%. On étudie pour le moment une très large gamme de fréquences, de 10 kHz à 1.4 MHz.



(a) $c_{p,e}$ (b) $c_{s,e}$

Fig. 2.7 – Courbes de dispersion en vitesse de phase effective obtenues pour les modèles d'homogénéisation ISA ou Waterman-Truell (WT) en 2D ou 3D.



(a) $\alpha_{p,e}$ (b) $\alpha_{s,e}$

Fig. 2.8 – Courbes d'amortissement effectif pour les modèles d'homogénéisation ISA ou Waterman-Truell (WT) en 2D ou 3D.

Que ce soit dans le cas 2D ou 3D, les modèles ISA et Waterman-Truell conduisent à des résultats très semblables. La seule différence notable est visible sur la vitesse de phase des ondes P pour les plus basses fréquences ($< 50\,$kHz), ce qui correspond aux plus grandes longueurs d'ondes. Les termes d'ordre supérieurs pris en compte par le modèle de Waterman-Truell restent donc négligeables dans notre cas, en particulier la rétrodiffusion n'est importante qu'à

basses fréquences (voir les Fig.2.5). Par la suite, on ne considérera que le modèle ISA pour nos simulations.

La différence entre les résultats donnés par le calcul 2D et 3D est très faible dans le cas des ondes de compression. En 3D, la dispersion effective des ondes P est légèrement plus faible et l'amortissement légèrement moins important que pour le cas 2D. Ces écarts augmentent avec la fréquence mais sont négligeables. Dans le cas des ondes de cisaillement, les résultats sont très différents. Quel que soit le cas 2D ou 3D, les courbes de vitesse et d'amortissement pour le milieu effectif présentent une forte variation aux alentours de 150 kHz (correspondant à un $k_s A \approx 2,5$), lorsque les longueurs d'onde sont comparables avec les dimensions caractéristiques des granulats. Ce pic est beaucoup plus important pour un diffuseur sphérique, mais provoque une chute de la vitesse effective vers 150 kHz alors que le diffuseur 2D provoque une augmentation. L'amortissement effectif des ondes S est plus important en 3D que en 2D à basse fréquence, mais au delà de 300 kHz, l'amortissement est près de deux fois plus faible en 3D que en 2D.

2.2.3.c Prise en compte de la granulométrie

Les modèles d'homogénéisation de type ISA supposent une taille unique de granulats. On peut néanmoins étendre le résultat à une distribution de granulats par linéarité [Waterman and Truell, 1961]. Pour chaque taille de granulats, on note n_i la densité de granulats et $\langle \mathbf{k}_0 | t | \mathbf{k}_0 \rangle_i$ l'opérateur de transition relatif à la taille i. On écrit alors :

$$k_e^2 = k_0^2 - \sum_i n_i \langle \mathbf{k}_0 | t | \mathbf{k}_0 \rangle_i. \tag{2.78}$$

Suivant la formulation utilisée lors de la fabrication du béton, les courbes de granulométries auront des allures sensiblement différentes (voir par exemple la figure 1.2). On considérera que la distribution de granulats est similaire à une loi normale centrée autour d'un diamètre moyen d_{moy} avec un écart-type σ_g. La courbe de granulométrie suit alors la fonction de répartition de cette loi normale qui s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{d - d_{moy}}{\sigma_g \sqrt{2}}\right) + 1\right), \tag{2.79}$$

dont l'allure est présentée sur la figure 2.9 pour $d_{moy} = 10\,\text{mm}$ et $\sigma_g = 3\,\text{mm}$.

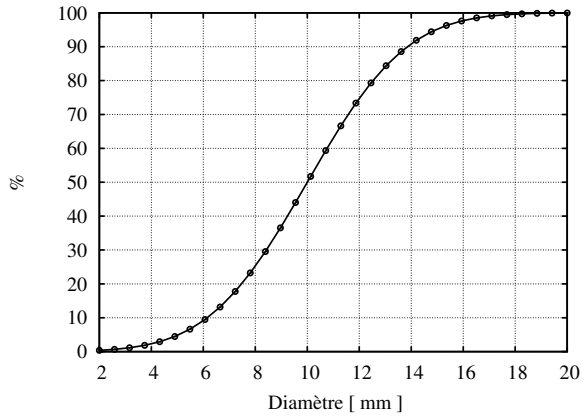
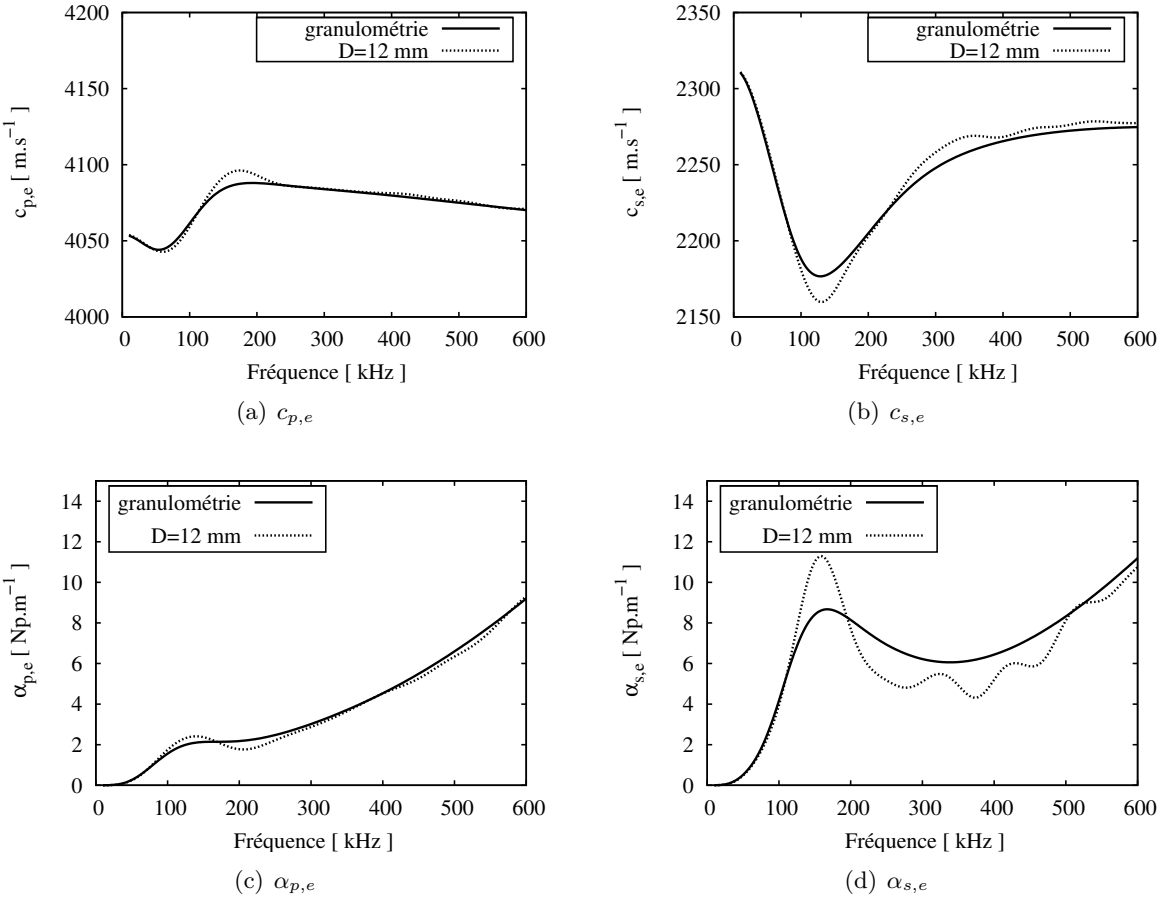


FIG. 2.9 – Courbe de granulométrie modélisée par une fonction de répartition de la loi normale (diamètre moyen de $d_{moy} = 10\,\text{mm}$ et écart-type de $\sigma_g = 3\,\text{mm}$).

Les effets de la prise en compte de la granulométrie sont présentés en figure 2.10 pour le cas 3D. On compare les courbes de dispersion et d'atténuation obtenues avec une courbe

granulométrique du type de celle de la figure 2.9 avec les courbes obtenues en considérant une dimension fixe de granulat $d = 12\,\text{mm}$. Dans les deux cas on prend un taux volumique de granulats de 40%.



(a) $c_{p,e}$ (b) $c_{s,e}$

(c) $\alpha_{p,e}$ (d) $\alpha_{s,e}$

Fig. 2.10 – Influence de la granulométrie sur les paramètres effectifs de propagation calculés avec ISA dans le cas de diffuseurs sphériques.

L'effet principal qui résulte de la prise en compte d'une distribution de dimensions de granulats est un lissage des pics observés vers 150 kHz dans le cas d'une dimension unique de diffuseurs. Dans le cas d'une distribution continue de taille de diffuseurs, les variations sont "gommées" par un effet de moyenne ; toutes les longueurs d'onde peuvent correspondre à une dimension de diffuseur. L'allure des courbes obtenues tant en vitesse de phase qu'en atténuation est donc plus régulière. L'effet est principalement visible sur l'atténuation de des ondes de cisaillement.

2.3 Simulations numériques bidimensionnelles

2.3.1 Présentation des simulations

2.3.1.a Contexte et objectifs

On utilise des simulations numériques afin de vérifier la validité des résultats analytiques donnés par ISA dans le cas du béton. Ce travail est réalisé en collaboration avec Bruno Lombard et Joël Piraux du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (LMA). Ils ont développé un outil de simulations numériques par différences finies en milieu élastique capable de prendre en compte le grand nombre d'interfaces existant entre le mortier et les granulats du béton. Pour des raisons de temps de calcul les simulations se font en deux dimensions.

Un important travail préliminaire a été réalisé afin de dimensionner et d'adapter le modèle numérique en fonction du phénomène étudié, des contraintes du calcul numérique lui-même, et des impératifs liés aux méthodes de traitement du signal que l'on propose d'utiliser pour traiter les signaux simulés.

Ce type de simulations est ensuite préalablement utilisé pour reproduire les résultats expérimentaux publiés par Derode et al. [2006] dans le cas de tiges d'acier dans de l'eau. Les résultats numériques ont montré que ce type de simulations, couplées aux méthodes de traitement du signal choisies, étaient capable de modéliser avec précision la propagation d'ondes dans un milieu hétérogène et permettaient l'étude de la diffusion multiple [Chekroun et al., 2007]. On va donc par la suite les utiliser dans le cas du béton.

2.3.1.b Modèles de bétons étudiés

Matériaux. Le matériau étudié est un béton constitué de granulats homogènes élastiques circulaires de 12 mm de diamètre (en 2D), dans une matrice homogène élastique. Les propriétés des matériaux sont celles du tableau 2.1. Ces granulats sont aléatoirement répartis dans le matériau, cependant une courte distance d'exclusion est choisie pour éviter que les granulats ne s'interpénètrent. Cela rompt légèrement l'hypothèse de position de diffuseurs décorrelés de l'ISA. Par ailleurs on suppose que le contact entre le mortier et les granulats est parfait (continuité des déplacements et des contraintes normales aux interfaces) comme cela avait été fait lors du calcul des amplitudes de diffraction en champ lointain.

Bétons. On considère 3 bétons ayant des concentrations surfaciques de granulats de 6%, 12% et 18%, nommés respectivement C6, C12, et C18. Les propriétés mécaniques du mortier et des granulats sont identiques pour chaque béton et seule la concentration varie. Pour chaque béton étudié, on considère la propagation d'une onde plane incidente de type P ou S. Cela fait donc 6 séries de simulations à réaliser.

Les concentrations de granulats choisies restent très faibles par rapport aux concentrations que l'on trouve dans le cas de bétons réels, plutôt proches de 40-50%. On se contentera cependant de ces concentrations pour pouvoir s'assurer de la pertinence des modèles d'homogénéisation à faible concentration dans le cas de matériaux de type béton et de valider tous les éléments permettant de mettre en place un outil de simulations.

2.3.1.c Méthodes numériques

Les simulations numériques sont des simulations par différences finies en deux dimensions. La grille considérée est une grille cartésienne uniforme. Les interfaces entre le mortier et les granulats sont traitées à l'aide de la "méthode d'interface" [Lombard and Piraux, 2004][6]. Cette méthode permet de discrétiser exactement la géométrie des interfaces afin d'éviter la discrétisation en

[6] Voir également http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/.

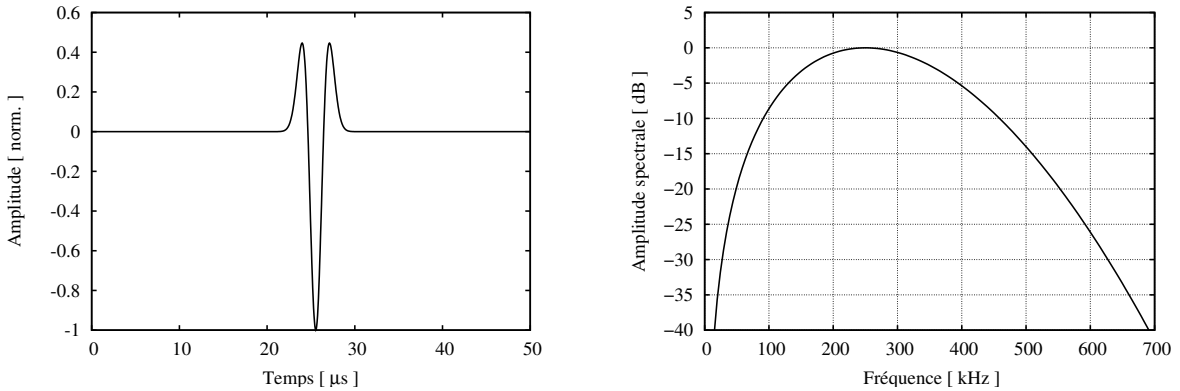
"marches d'escalier" due au maillage, ce qui ajoute de la diffraction supplémentaire. La méthode d'interface permet également de mieux considérer les conditions de saut entre les deux milieux.

Le schéma utilisé est un schéma de type ADER (*Arbitrary DERivatives*) d'ordre 4 en temps et en espace [Schwartzkopff et al., 2004]. Ce schéma introduit moins d'erreurs numériques que les schémas d'ordre 2 de type Lax-Wendroff couramment utilisés en différences finies.

2.3.1.d Signal source

La source choisie est une onde plane de type impulsionnelle et peut être de type P ou S. On choisit comme signal une ondelette de Ricker (dérivée seconde d'une gaussienne), de fréquence centrale $f_c = 250\,\text{kHz}$ centrée au temps t_c. Le signal temporel est décrit par l'équation 2.80 et les allures temporelles et fréquentielles sont présentées en figure 2.11 :

$$S_{ricker}(t) = \left(2\pi^2 f_c^2 (t - t_c)^2 - 1\right) \mathrm{e}^{-\pi^2 f_c^2 (t-t_c)^2}. \tag{2.80}$$



(a) Signal temporel (b) Amplitude spectrale

Fig. 2.11 – Allures temporelle et fréquentielle d'une ondelette de Ricker de fréquence centrale $f_c = 250\,\text{kHz}$ avec $t_c = 25\,\mu\text{s}$.

2.3.1.e Fréquences d'étude

Le niveau de bruit des signaux enregistrés lors des simulations numériques sera extrêmement faible, et aura uniquement pour origine le bruit numérique. On pourra donc étudier les signaux dans une bande fréquentielle très large. La figure 2.12 montre l'amplitude spectrale d'un signal enregistré sur des simulations numériques dans du mortier homogène. Le niveau de bruit numérique est atteint pour environ -90 dB. Les signaux seront exploitables jusqu'à 700 kHz. Les fréquences les plus basses, inférieures à 50 kHz, ne seront pas étudiées car elles correspondent à des longueurs d'onde trop longues, nécessitant des dimensions de modèle trop importantes. La bande de fréquences d'étude sera donc comprise entre $f_{min} = 50\,\text{kHz}$ et $f_{max} = 700\,\text{kHz}$.

La bande de fréquences d'étude étant très large, la gamme de variations des longueurs d'onde étudiées sera très importante. Le tableau 2.3 résume les longueurs d'onde correspondant aux fréquences extrêmes f_{min} et f_{max} pour les ondes P et S dans chaque phase du matériau, ainsi que les longueurs d'ondes correspondant à la fréquence centrale f_c de l'ondelette de Ricker.

La plus petite longueur d'onde étudiée sera donc obtenue pour des ondes S dans du mortier à 700 kHz avec $\lambda_{min} = \lambda_s^0(f_{max}) = 3,2\,\text{mm}$, tandis que la plus grande longueur d'onde sera obtenue pour la propagation d'ondes P dans les granulats à 50 kHz, $\lambda_{max} = \lambda_p^1(f_{min}) = 86\,\text{mm}$.

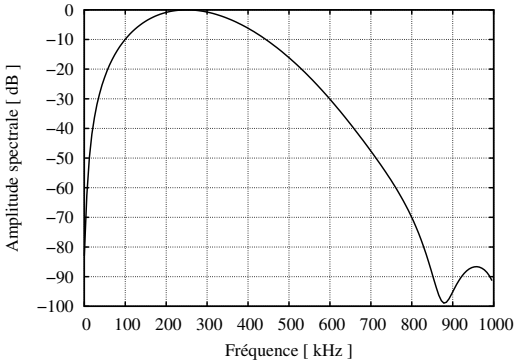


FIG. 2.12 – Amplitude spectrale d'un signal issu de simulations numériques dans du mortier homogène (en 1D).

TAB. 2.3 – Longueurs d'onde (en mm) associées à la propagation des ondes P et S dans les différentes phases du béton dont les propriétés sont données au tableau 2.1.

	$f_{min} = 50\,\text{kHz}$		$f_c = 250\,\text{kHz}$		$f_{max} = 700\,\text{kHz}$	
	λ_p	λ_s	$\lambda_{c,p}$	$\lambda_{c,s}$	λ_p	λ_s
Mortier	79	45	15,8	9	5,6	3,2
Granulats	86	49,5	17,2	9,9	6,1	3,5

Ces valeurs de longueurs d'onde sont des valeurs extrêmes, et celles relatives au milieu effectif seront comprises entre λ_{min} et λ_{max}.

2.3.1.f Dimensionnement du modèle

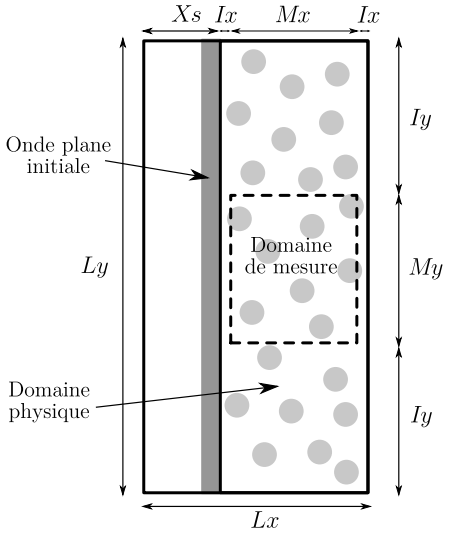


FIG. 2.13 – Description des domaines numériques, physiques et de mesure.

Le modèle numérique et ses différents domaines sont présentés en figure 2.13. Les calculs se font dans tout le domaine numérique, de dimensions $Lx \times Ly$, qui englobe différents sous-domaines. Le domaine physique, qui contient les hétérogénéités placées aléatoirement, a pour dimensions $Mx + 2Ix \times Ly$. La source est initialisée dans un milieu homogène (le mortier) sur la partie gauche du modèle physique et se propagera vers la droite. Afin d'éviter des réflections sur le bord gauche du domaine physique, on prolonge le milieu d'initialisation de la source vers

la gauche d'une distance Xs. Les simulations s'arrêtent lorsque le front d'onde atteint le bord droit du domaine numérique.

On applique comme conditions en haut et en bas du domaine au cours de la propagation la solution analytique de la propagation d'une onde plane dans le mortier élastique. Pour éviter des réflections parasites sur les bords supérieurs et inférieurs du domaine physique, on définit un domaine de mesure $Mx \times Mx$ en laissant un espace Iy entre le domaine de mesure et ces bords. De même, un petit espace Ix est laissé entre le domaine de mesure et les bords gauche et droit du domaine physique.

On choisit les dimensions du domaine de mesure de façon à avoir une propagation des ondes P et S sur suffisamment de longueurs d'onde, afin de pouvoir observer la décroissance du champ cohérent. La gamme de longueurs d'onde étant très large, on choisit comme compromis de dimensionner le modèle par rapport aux longueurs d'onde $\lambda^j_{c,p}$ et $\lambda^j_{c,s}$ ($j = 0$ ou 1) obtenues pour la fréquence centrale $f_c = 250\,\text{kHz}$ (voir tableau 2.3). On choisit alors les dimensions du domaine par rapport à la plus grande longueur d'onde à la fréquence considérée :

$$Mx = 220\,\text{mm} \quad \text{soit} \quad 12,7\,\lambda^1_{c,p}.$$

La hauteur My du domaine de mesure est choisie de façon à pouvoir observer plusieurs configurations différentes de granulats rencontrés par l'onde plane et ainsi obtenir le champ cohérent. On choisit :

$$My = 250\,\text{mm}.$$

Les autres dimensions du domaine numérique sont données au tableau 2.4 en mm ainsi que l'équivalent en $\lambda^1_{c,p}$.

Tab. 2.4 – Dimensions (en mm) des domaines numériques et physiques pour les simulations numériques.

	Lx	Ly	Xs	Mx	My	Ix	Iy
en mm	375	750	126	220	250	14	250
en $\lambda^1_{c,p}$	21,8	43,6	7,3	12,7	14,5	0,8	14,5

2.3.1.g Erreurs numériques

Discrétisation spatiale et temporelle. Afin d'obtenir des simulations les plus précises possibles, la discrétisation spatiale $\Delta x = \Delta y$ de la grille cartésienne uniforme est prise de façon à avoir le maximum possible de points de maillage par longueur d'onde. L'élément dimensionnant est ici la longueur d'onde la plus faible $\lambda^0_{c,s}$. On fera attention cependant à ne pas avoir de temps de calcul trop longs et à rester dans les limites imposées par la mémoire de l'ordinateur. On choisit comme pas spatial $\Delta x = 0,1\,\text{mm}$ ce qui correspond à 90 pts/$\lambda^0_{c,s}$. Cette valeur est relativement élevée comparativement aux nombre de points par longueur d'onde utilisé classiquement en différences finies. Cependant on souhaite obtenir des résultats de simulations les plus précis possibles dans un but de métrologie, et on minimise donc les erreurs au maximum. Compte tenu des dimensions du domaine numérique, le nombre de points de la grille est donc de $Nx \times Ny = 3750 \times 7500 = 28125000$.

La discrétisation temporelle est imposée par la condition de stabilité CFL [Courant et al., 1967]. Cette condition impose que le pas de temps Δt soit plus petit que le temps mis par l'onde pour aller d'un point à l'autre de la grille $\Delta x/c$ multiplié par une constante C inférieure à 1 qui dépend du schéma d'intégration choisi. La vitesse la plus rapide étudiée est celle des ondes P dans les granulats avec $c^1_p = 4300\ \text{m.s}^{-1}$. Pour le schéma d'intégration ADER4 on a $C = 0,9$. On pose donc le nombre CFL, noté β, qui satisfait la condition suivante :

$$\beta = \frac{c^1_p \Delta t}{\Delta x} \leqslant 0,9. \tag{2.81}$$

En prenant $C = 0,85$ pour avoir une marge, on obtient $\Delta t \simeq 1,9710^{-8}$ s.

On simule la propagation de l'onde à travers le matériau hétérogène jusqu'à ce que l'onde balistique ait atteint le bord droit du domaine. Les simulations se font donc sur 3250 pas de temps dans le cas d'une onde P incidente, et 5500 pas de temps dans le cas d'une onde incidente S. Chaque simulation prend donc environ 50 heures sur un ordinateur de bureau classique. Ce temps de calcul très élevé limite le nombre de cas de bétons étudiés (concentrations, dimensions de granulats, etc.).

Quantification des erreurs. En milieu homogène 1D, il est possible de déterminer les erreurs numériques causées par le schéma d'intégration utilisé et la discrétisation du milieu [Strikwerda, 1989]. Dans un maillage cartésien en 2D, on peut montrer que les erreurs sont maximales dans les directions principales du maillage et minimales suivant les bissectrices (phénomène d'anisotropie numérique). Les erreurs générées par un tel maillage peuvent donc être majorées par le calcul de ces erreurs sur un milieu homogène 1D dont le maillage est réduit à une ligne de points espacés de Δx. On définit la grandeur $G = \Delta x/\lambda$ égale à l'inverse du nombre de points par longueur d'onde.

Avec le schéma ADER 4, la dispersion numérique dans un milieu homogène est égale à :

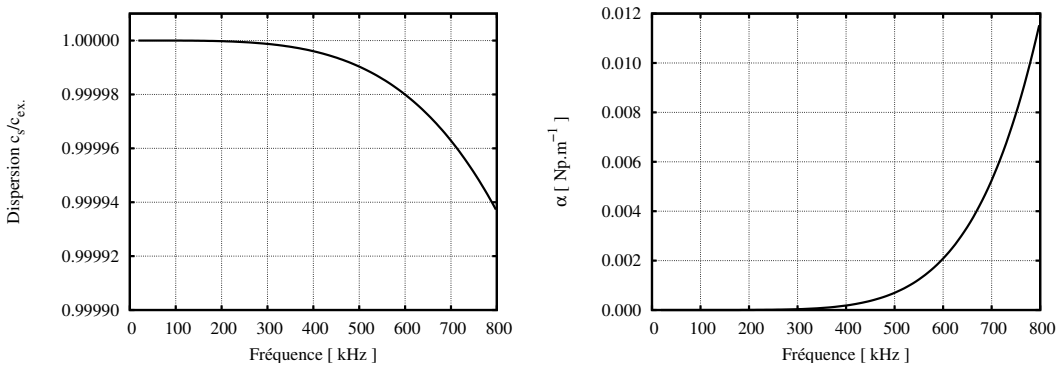
$$\frac{c}{c_{ex.}}(\beta,\, G) = 1 - \frac{2\,\pi^4}{15}\,(\beta^2 - 1)\,(\beta^2 - 4)\,G^4 + \mathcal{O}(G^6), \tag{2.82}$$

ou c est la vitesse de phase discrète et $c_{ex.}$ la vitesse de phase exacte attendue.

De même on peut déterminer l'atténuation numérique :

$$\alpha(\beta,\, G,\, \Delta\, x) = \frac{4\,\pi^6\,\beta}{9\,\Delta\, x}(\beta^2 - 1)\,(\beta^2 - 4)\,G^6 + \mathcal{O}(G^8). \tag{2.83}$$

La figure 2.14 présente les erreurs numériques obtenues dans le cas le plus défavorable (correspondant à la vitesse la plus faible c_s^0), où $\beta = 0,44$. Ces erreurs seront donc négligeables comparativement à la dispersion et à l'atténuation attendue pour le milieu effectif correspondant au béton (par exemple en figure 2.7 et 2.8). L'ordre de grandeur du facteur de qualité Q correspondant ici est de 10^5.



(a) Dispersion numérique (b) Atténuation numérique

FIG. 2.14 – Dispersion et atténuation numérique pour la simulation de propagation d'ondes S dans du mortier (homogène et élastique) avec le schéma ADER 4.

Le milieu que l'on étudie est hétérogène et il n'est pas possible de déterminer la dispersion et l'atténuation numérique de la même manière que pour les milieux homogènes. Cependant, la méthode d'interface est dimensionnée pour générer des erreurs numériques du même ordre de grandeur que le schéma numérique étudié. Elle n'introduit *a priori* pas d'artefact supplémentaire.

2.3.2 Acquisition du champ cohérent

2.3.2.a Points d'acquisition

Afin d'exploiter les résultats, on place des points d'acquisition sur certains points du maillage dans le domaine de mesure, qui enregistrent les vitesses particulaires à tous les pas de temps dans les deux directions du maillage. L'onde incidente se propage toujours dans la direction des x croissants, ainsi que l'onde cohérente recherchée. Dans le cas des ondes P on enregistre la vitesse particulaire v_x dans la direction de propagation, et dans le cas des ondes S, la vitesse particulaire enregistrée est v_y, perpendiculaire à la direction de propagation.

Pour suivre le front d'onde au cours de la propagation, on dispose une ligne de $N_{r,x} = 221$ points d'acquisition le long de l'axe x, espacés de $\Delta x_r = 1\,\text{mm}$. Chaque point est donc situé à la distance de propagation $d_n = Ix + (n-1)\Delta x_r$, avec $n = 1, \cdots, N_{r,x}$. Un tel choix de discrétisation des points de réception sera justifié par la méthode de traitement utilisée pour évaluer la vitesse de phase, que l'on présentera en 2.3.3.b.

L'évaluation du champ cohérent nécessite de moyenner les signaux sur un grand nombre (en théorie infini) de configurations du désordre. Pour cela on place plusieurs lignes parallèles de récepteurs du même type que celle décrite ci-dessus. Chaque ligne est espacée de $\Delta y_r = 6.25$ mm ce qui fait 41 lignes parallèles pour un domaine de mesure. Afin d'avoir un nombre important de réalisations du désordre pour une série de béton considérée, chaque simulation est faite 3 fois, en changeant la configuration aléatoire des granulats mais en conservant la concentration surfacique. Ainsi on obtient un total de $N_{r,y} = 3\times 41 = 123$ lignes de récepteurs parallèles, faisant 123 réalisations du désordre. L'écartement Δy_r entre deux lignes d'acquisition consécutives est pris le plus grand possible de façon à pouvoir considérer les réalisations du désordre observées comme étant indépendantes. Δy_r est choisi ici comme étant supérieur au rayon des inclusions. Cependant, pour les longueurs d'onde les plus grandes, cette approximation de réalisations indépendantes ne sera pas valable pour deux lignes consécutives.

La position des récepteurs pour une simulation est visible sur la figure 2.15(a).

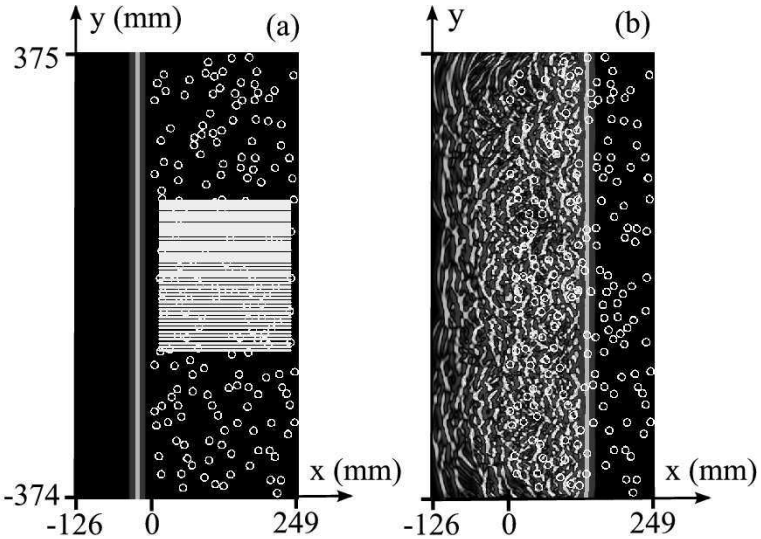
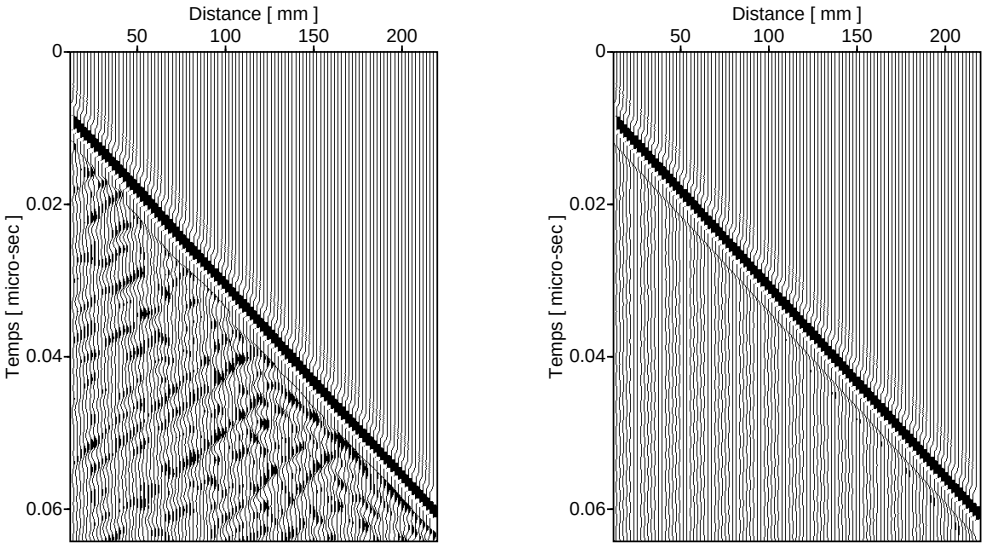


Fig. 2.15 – Cartes de la vitesse particulaire horizontale v_x à l'instant initial (a), et après $0.04\,\mu$s de propagation (b) soit 2000 pas de temps, pour la propagation d'une onde P dans un béton avec une concentration surfacique de granulats de 12% (béton C12). La position des récepteurs dans le domaine de mesure est visible en (a)

2.3.2.b Obtention du champ cohérent

La figure 2.15 présente des cartes de la vitesse particulaire horizontale v_x dans le cas de la propagation d'une onde P dans le béton C12. On y voit l'instant initial (a) ainsi que la carte après 2000 pas de temps, soit 0,04 μs de propagation (b).



(a) Une configuration particulière du désordre (b) Champ cohérent

FIG. 2.16 – Sismogrammes de la vitesse particulaire horizontale v_x pour la propagation d'une onde P dans un béton avec 12% de granulats en surface (béton C12).

On peut alors observer les signaux enregistrés par une ligne de récepteurs le long de la direction de propagation sous la forme d'un sismogramme (Fig. 2.16-(a)). Ce sismogramme présente un train d'onde principal clairement visible, suivi de fluctuations s'étendant sur une durée relativement longue après le passage de l'onde principale. Ces fluctuations forment la partie incohérente du champ.

Le champ cohérent est obtenu en moyennant les $N_{r,y} = 123$ différentes lignes de récepteurs de la manière suivante :

$$\langle u(d_n, t)\rangle = \frac{1}{N_{r,y}} \sum_{y_r} u(d_n, y_r, t), \quad \text{avec} \quad d_n = Ix + (n-1)\Delta x_r. \tag{2.84}$$

On obtient alors le champ cohérent en vitesse particulaire à différentes distances d_n de propagation. La figure 2.16-(b) présente un exemple de champ cohérent obtenu pour une onde incidente P sur le béton C12. Le sismogramme du champ cohérent présente toujours un train d'onde principal, mais les fluctuations incohérentes ont quasiment disparu. Ce champ cohérent peut donc être assimilé à une onde se propageant dans un milieu homogène effectif.

2.3.3 Mesure de la vitesse de phase et de l'atténuation

Une fois ce champ cohérent évalué à différentes distances de propagation, les courbes de dispersion en vitesse de phase effective et en atténuation effective vont pouvoir être estimées. Pour cela, on va s'appuyer sur des méthodes de traitement du signal communément utilisées en géophysique appliquée à la caractérisation des sols.

2.3.3.a La "sommation oblique"

Le principe de calcul de la vitesse de phase est basé sur la "sommation oblique", schématisée en figure 2.17. Les signaux enregistrés à différentes distances de propagation d_n (différents *offsets*) sont décalés temporellement d'une quantité $t_n = (d_n - d_1)p$ où $(d_n - d_1)$ représente la distance entre le signal enregistré à l'offset n et le premier signal enregistré, et p est une grandeur homogène à une lenteur ($p = 1/c$). On effectue alors la somme de ces signaux décalés suivant $\tau = t - t_n$. Cette opération est réalisée pour différentes valeurs de p, et l'on obtient un maximum lorsque $p = \tilde{p} = 1/\tilde{c}$, conduisant à la vitesse de phase recherchée $\tilde{c}$. Cette transformation du champ d'ondes mesuré est également appelée transformation $(\tau - p)$ en géophysique [Sheriff and Geldart, 1995; Foti, 2000].

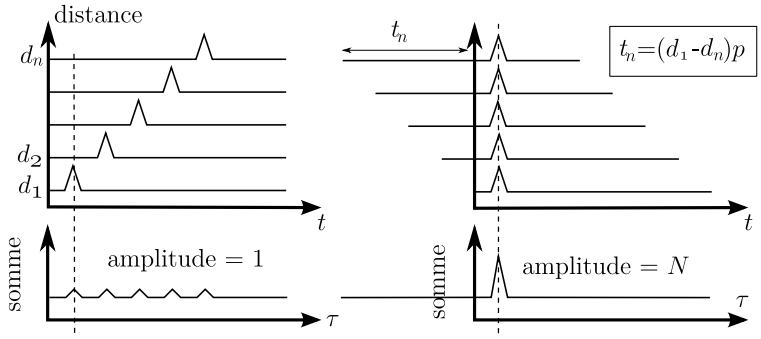


Fig. 2.17 – Schéma de principe de la sommation oblique pour la mesure de la vitesse de phase.

2.3.3.b Transformée $p - \omega$.

En appliquant une transformée de Fourier 1D sur τ de la transformée $(\tau - p)$, on obtient une représentation du champ d'onde dans le plan $(p - \omega)$ dans lequel on peut pointer la courbe de dispersion en lenteur $\tilde{p}(\omega) = 1/\tilde{c}(\omega)$ [McMechan and Yedlin, 1981].

Mokhtar et al. [1988] a proposé une formulation de la transformée $(p-\omega)$ directement dans le domaine fréquentiel, puis l'algorithme, ainsi que le calcul de l'erreur, a été proposé par Herrmann [2002]. Cet algorithme est équivalent à la transformée $(\tau - p)$ suivie d'une transformée de Fourier, mais a l'avantage d'être plus rapide.

Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Fourier de chaque signal $s(t, d_n)$ enregistré à la distance d_n peut s'écrire sous la forme :

$$s(t, d_n) \quad \xrightarrow{TF} \quad \hat{s}(\omega, d_n) = A(\omega, d_n) \mathrm{e}^{i\phi(\omega)_n}, \tag{2.85}$$

que l'on normalise par son module $A(\omega, d_n)$. On considère ici qu'un seul mode de propagation est présent. La phase de ces signaux $\phi(\omega)_n$ s'écrit alors :

$$\phi(\omega)_n = -\frac{\omega}{\tilde{c}(\omega)} d_n = -\omega \tilde{p}(\omega) d_n. \tag{2.86}$$

La sommation $F(p, \omega)$ peut s'écrire, pour N_r récepteurs aux distances d_n, en multipliant chaque signal par $\mathrm{e}^{i\omega p d_n}$, et en faisant la somme de la manière suivante :

$$F(p, \omega) = \sum_{n=1}^{N_r} \frac{\mathrm{e}^{i\phi(\omega)_n}}{\mathrm{e}^{i\phi(\omega)_1}} . \mathrm{e}^{i\omega p d_n} = \sum_{n=1}^{N_r} \frac{\mathrm{e}^{i\omega(p - \tilde{p}(\omega))d_n}}{\mathrm{e}^{-i\omega\tilde{p}(\omega)d_1}}. \tag{2.87}$$

La normalisation par la première trace $\mathrm{e}^{i\phi(\omega)_1}$ permet d'éliminer les effets dus au spectre de la source dans le calcul.

Le calcul de la valeur de $F(p,\omega)$ est effectué pour différentes valeurs de p. Le maximum de la fonction $|F(p,\omega)|$ est atteint pour $p=\tilde{p}(\omega)$. En utilisant $c(\omega)=1/p(\omega)$, on peut alors tracer des cartes $|F(c,\omega)|$ pour pouvoir visualiser les courbes de dispersion, comme par exemple en figure 2.18(a). Sur cette courbe, on voit un lobe principal vers $4000\,\mathrm{m.s^{-1}}$ qui correspond à la vitesse de phase recherchée, puis des lobes secondaires de faible amplitude, correspondant à des battements se produisant lors du produit $\mathrm{e}^{-i\omega\tilde{p}d_n}.\mathrm{e}^{i\omega p d_n}$.

2.3.3.c Limites, erreurs, et résolution

Erreurs. Le calcul de la fonction $F(p,\omega)$ permet de déterminer une erreur sur la vitesse de phase pour chaque fréquence. Le calcul de cette erreur est décrit par Herrmann [2002].

Si on a une collection de N_r récepteurs, la valeur du maximum du module de la fonction F devrait être égal à N_r. Herrmann fait l'hypothèse d'une distribution normale (de moyenne nulle et de variance σ^2) de l'erreur $\Delta p = p-\tilde{p}$ au voisinage du maximum. La valeur du maximum de $|F(p,\omega)|$ étant connue, l'écart-type σ est déterminé par la méthode de Newton-Raphson. Cet écart-type est alors transcrit en terme d'erreur sur la vitesse de phase ($p=1/c$) en utilisant la relation $\Delta c = \sigma c^2$. L'erreur est directement liée à la largeur du lobe principal de la transformée $p-\omega$.

Longueur du dispositif. Les limites et la résolution de cette méthode ont été étudiées en détail par Forbriger [2003] et Bodet [2005]. La résolution en lenteur est définie par :

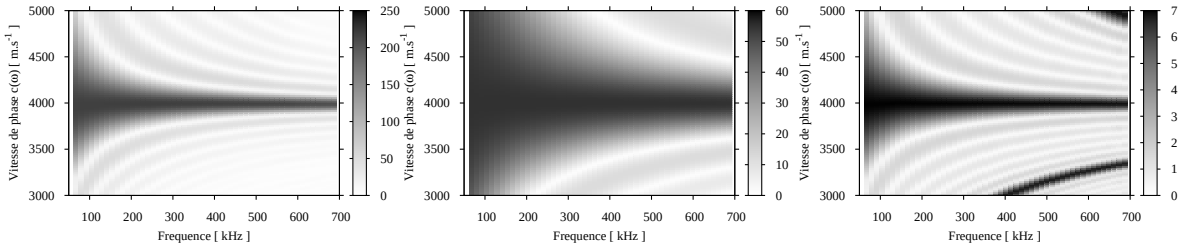
$$\Delta p = \frac{1}{f\,\Delta x_r\,(N_r-1)} \tag{2.88}$$

La limite la plus importante est la longueur du dispositif de mesure (distance entre les récepteurs les plus éloignés $L_r = \Delta x_r.(N_r-1)$). La résolution sera plus faible aux basses fréquences. Un dispositif trop court dégrade la résolution dans le calcul de la transformée $p-\omega$ (Fig 2.18(b)). De manière générale les plus grandes longueurs d'onde accessibles sont de l'ordre de 40-50% de la longueur du dispositif. Dans notre cas $L_r = 0,220\,m$, ce qui donne une fréquence minimale de environ 40 kHz, ce qui est suffisant pour la gamme de fréquence que l'on souhaite étudier (50 - 700 kHz). On voit cependant que même sur la figure 2.18(a) où le dispositif est suffisamment long, la résolution à basse fréquence est moins bonne qu'à haute fréquence, le lobe étant plus large.

Distance inter-recepteurs. La distance inter-récepteur Δx_r n'influe pas directement sur la résolution si le dispositif est suffisamment long (Eq. 2.88). Par contre, augmenter cette distance crée un effet de "repliement" à cause de la faible discrétisation spatiale. On peut voir une ligne de repliement apparaître à hautes fréquences sur la figure 2.18(c), pour laquelle la distance inter-récepteur a été prise à $\Delta x_r = 30\,\mathrm{mm}$. Le pointé du maximum sur une telle carte devra être fait avec soin de manière à éviter de confondre un effet de repliement avec le lobe principal correspondant à la courbe de dispersion.

Effets d'offsets proches. Si les premiers récepteurs sont placés trop près de la source, cela créera un effet de champ proche. En pratique, les géophysiciens considèrent que l'approximation de champ lointain (lorsque le front d'onde est assimilable à une onde plane) est valide pour une distance source-premier récepteur équivalente à la moitié de la longueur d'onde maximale recherchée. Ces effets de champ proche se traduisent par une sous évaluation de la vitesse aux basses fréquences.

Bien entendu dans le cas des simulations numériques en 1D ou 2D, la forme d'onde initiale est déjà une onde plane, et il n'y aura donc pas d'effets de champ proche.



(a) $\Delta x_r = 1\text{mm}$, $L_r = 220\text{mm}$ (b) $\Delta x_r = 1\text{mm}$, $L_r = 54\text{mm}$ (c) $\Delta x_r = 30\text{mm}$, $L_r = 220\text{mm}$

Fig. 2.18 – Exemple de cartes de transformées $p-\omega$ dans le cas du champ cohérent pour une onde incidente P dans le béton C12. (a) en utilisant tous les récepteurs, (b) en n'utilisant qu'un quart du dispositif, (c) en ne prenant qu'un récepteur sur 30.

Milieux multimodaux. La technique de sommation $p-\omega$ est bien adaptée aux milieux où il n'existe qu'un seul mode de propagation, mais peut également permettre d'étudier des milieux multimodaux. Dans ces milieux (notamment pour la propagation d'ondes de surface sur des milieux stratifiés), la vitesse de phase mesurée correspond au maximum absolu de la fonction $|F(p,\omega)|$. Les autres modes de propagation correspondent à des maxima relatifs et doivent être relevés manuellement sur la carte $p-\omega$.

Dans le cas des simulations numériques étudié, un seul mode de propagation est présent et le problème ne se pose pas.

2.3.3.d Mesure de l'atténuation

On suppose que l'amplitude spectrale $A(\omega, d_n)$ du signal $\hat{s}(\omega, d_n)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$A(\omega, d_n) = A_0(\omega)\mathrm{e}^{-\alpha(\omega)d_n} \tag{2.89}$$

où $\alpha(\omega)$ est le facteur d'atténuation et $A_0(\omega)$ l'amplitude spectrale du signal émis à la source en en $d_n = 0$; pour une fréquence donnée l'amplitude décroît de manière exponentielle.

En suivant cette amplitude à chaque point de réception, l'allure de la décroissance est en $\mathrm{e}^{-\alpha(\omega)d_n}$. Pour chaque fréquence, la valeur de l'atténuation peut donc être déterminée en ajustant une droite sur le logarithme népérien de cette amplitude (au sens des moindres carrés). La valeur de la pente sera égale à $\alpha(\omega)$.

$$\ln(|A(\omega, d_n)|) = \ln(A_0(\omega)) - \alpha(\omega)d_n \tag{2.90}$$

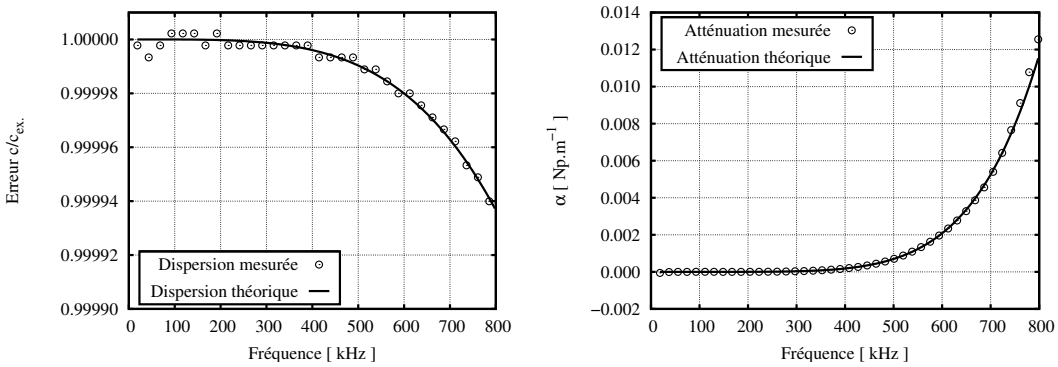
Dans le cas des simulations, le problème concerne une propagation d'une onde plane et il n'y aura donc aucun amortissement géométrique à corriger.

Cette méthode de mesure de l'atténuation n'impose pas de contraintes sur le nombre et l'espacement des points de réceptions. Deux points suffisent en théorie pour évaluer α.

2.3.3.e Précision des traitements

On étudie la précision de l'estimation de la vitesse de phase et de l'amortissement sur un milieu dont la courbe de dispersion et la courbe d'amortissement est connue. On choisit de considérer la propagation d'ondes S dans un milieu homogène 1D constitué de mortier, simulé numériquement avec les mêmes paramètres de discrétisation spatiale et temporelle que le milieu hétérogène étudié : $\Delta x = 1\,\text{mm}$ et $\Delta t = 1,9710^{-8}\,\text{s}$. La dispersion et l'atténuation numérique d'un tel milieu est donnée par les relations 2.82 et 2.83.

Les paramètres d'acquisition (Δx_r, $N_{r,x}$) sont les mêmes que ceux utilisés lors des simulations en milieu hétérogène (donnés en 2.3.2.a). Les courbes de dispersion en vitesse de phase et les courbes d'amortissement estimées par traitement du signal sont comparées aux courbes analytiques en figure 2.19. Les méthodes de traitement choisies permettent donc de retrouver avec précision les courbes analytiques de dispersion et d'atténuation avec des erreurs négligeables.



(a) Dispersion (b) Atténuation

FIG. 2.19 – Dispersion et atténuation numérique des ondes S sur un milieu 1D homogène (mortier). (—) valeurs analytiques, (○) valeurs évaluées par traitement du signal.

L'application de ces méthodes de traitement du signal pour étudier la propagation des ondes dans les matériaux hétérogènes simulés numériquement n'introduira pas d'artefacts supplémentaires aux erreurs purement numériques.

2.3.4 Analyse des résultats sur les bétons

La combinaison des simulations numériques choisies, avec un schéma d'intégration précis et la méthode d'interface, combinée avec les méthodes de traitement du signal, fournissent donc un outil intéressant pour étudier la propagation des ondes cohérentes dans le béton. Ces résultats seront en partie publiés dans [Chekroun et al., 2008b].

2.3.4.a Étude de l'amortissement

Représentation espace-fréquence. On a vu (Sec. 2.3.3.d) que l'évaluation de l'amortissement n'imposait pas de restrictions sur le nombre et l'espacement des points d'acquisition. En évaluant l'amortissement à partir d'un nombre réduit n_w de points d'acquisition à différentes distances de propagation d_n (Fig. 2.20), on peut alors obtenir une représentation espace-fréquence de $\alpha(\omega, d_n)$.

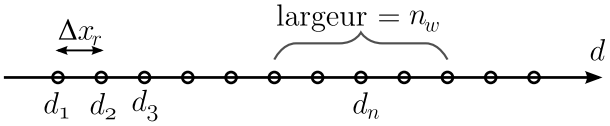


FIG. 2.20 – Récepteurs considérés lors de l'évaluation de α sur un nombre réduit de points de réception avec une fenêtre glissante de largeur n_w.

Un exemple de ce type de représentation espace-fréquence est présenté en figure 2.21 dans le cas de la propagation d'ondes S dans le béton C6. On a utilisé des dispositifs de $n_w = 11$ récepteurs. On constate que l'amortissement effectif dépend non seulement de la fréquence, mais également de la distance de propagation. On distingue notamment pour une fréquence donnée

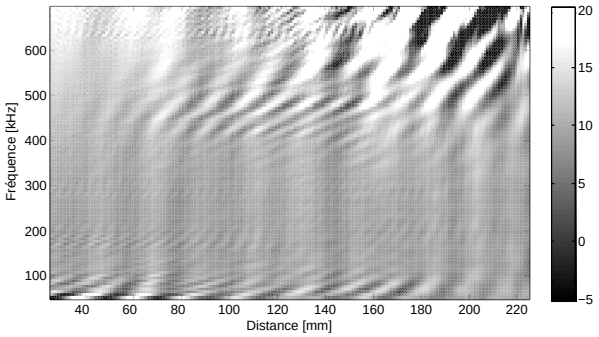


Fig. 2.21 – Représentation espace-fréquence du facteur d'amortissement effectif α, évalué avec une fenêtre glissante de largeur $n_w = 11$ points, dans le cas de la propagation d'ondes S dans le béton C6.

des oscillations dont la période varie avec la fréquence. Ces résultats sont difficiles à interpréter car ils dépendent également de la largeur n_w de la fenêtre utilisée. L'idéal serait d'adapter la largeur de cette fenêtre à la longueur d'onde étudiée.

Zones de propagation. On choisit d'utiliser une autre approche afin d'étudier la dépendance de α effectif avec la distance de propagation. Partant du premier point de réception en $d_1 = 14$ mm, on augmente la taille n_r de la fenêtre progressivement jusqu'à considérer tous les points de réception (Fig. 2.22). Ainsi, cela permet de s'affranchir des variations rapides observées précédemment mais on conserve une information sur la dépendance spatiale.

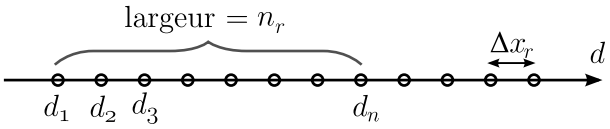
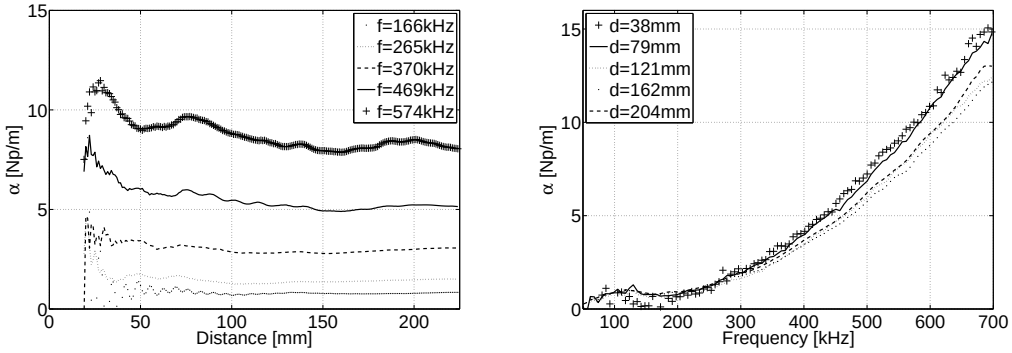


Fig. 2.22 – Récepteurs considérés lors de l'évaluation de α sur un nombre réduit de points de réception, avec une fenêtre de largeur n_r dont le premier point est fixé en d_1.



(a) À fréquence fixée (b) À distance fixée

Fig. 2.23 – Estimation du coefficient d'atténuation effectif pour une onde incidente S dans le béton C12.

Les résultats obtenus dans le cas d'une onde incidente S dans du béton C12 sont présentés en figure 2.23. Pour des fréquences fixées (a), quelle que soit la fréquence considérée, les courbes

$\alpha(d_n)$ présentent de fortes variations dans les premiers centimètres de propagation, jusqu'à environ 90 mm. Au delà, le facteur d'atténuation se stabilise. On voit pour des largeurs de fenêtre fixées (Fig. 2.23(b)) que les courbes $\alpha(f)$ se séparent en deux groupes distincts suivant que la distance considérée est courte ou longue.

On peut donc à première vue distinguer deux zones de propagation. Une première zone, de largeur $L_T \simeq 90$ mm, correspond aux distances de propagation courtes dans laquelle on observe des variations importantes du facteur d'atténuation, et une seconde zone dans laquelle la valeur du facteur d'atténuation est stabilisée. Le même type d'observations peut être fait dans le cas d'une onde incidente de type P sur le même béton C6, la zone de transition observée a sensiblement la même longueur $L_T \simeq 90$ mm quelle que soit la fréquence, le phénomène est cependant moins marqué. La même étude sur les autres bétons étudiés (C12 et C18) donne le même type de résultats, mais la valeur de L_T est d'autant plus courte que la concentration augmente. Les valeurs de L_T observées pour chaque béton sont présentées en première colonne du tableau 2.5.

Tab. 2.5 – Longueur L_T de la zone de transition dans différents bétons, comparée à la distance moyenne entre deux diffuseurs.

	L_T (mm)	l_C (mm)
C6	90	43
C12	70	32
C18	50	25

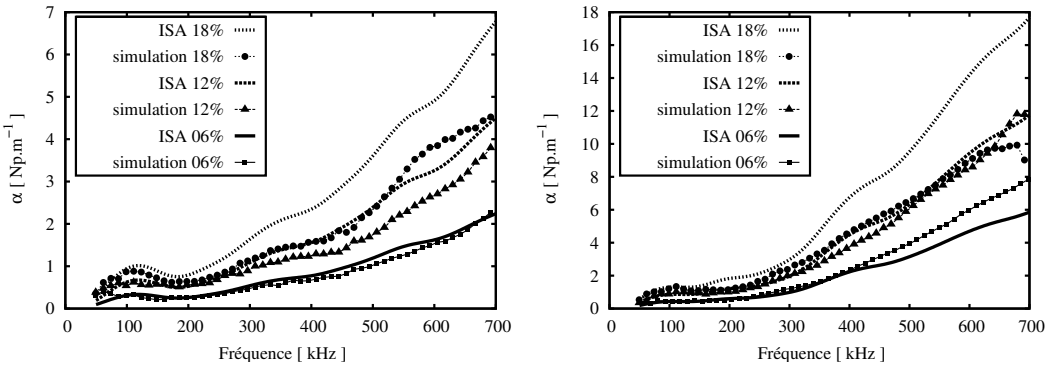
La première zone peut être interprétée comme une zone de transition, dans laquelle le phénomène de diffusion multiple se met en place ; l'onde incidente rencontre un premier diffuseur, puis un second, etc., puis au bout d'une certaine distance L_T, le régime de diffusion multiple semble se stabiliser.

On peut comparer cette distance observée L_T avec la distance moyenne l_C entre deux diffuseurs pour chaque concentration. Pour des diffuseurs circulaires de rayon $A = 6$ mm et à la concentration surfacique C, on peut évaluer la distance moyenne entre deux diffuseurs $l_C = A\sqrt{\pi/C}$. Les valeurs de l_C ainsi obtenues sont données en deuxième colonne du tableau 2.5. La valeur de L_T semble donc être proche de $2l_C$, quelle que soit la fréquence, le type d'onde, et la concentration. Ces résultats sont encore approximatifs mais peuvent être rapprochés de résultats similaires dans les cristaux phoniques [Groby et al., 2008].

Il serait intéressant de faire une étude plus systématique de l'influence de la valeur de L_T pour d'autres concentrations et d'autres dimensions de diffuseurs. Cependant, dans le cas de bétons réels, où la concentration de granulats est beaucoup plus élevée et où la distribution de taille de granulats est continue sur une grande plage de variations, ce phénomène de zone de transition sera très peu marqué, et sur des distances très courtes. Par ailleurs, les configurations expérimentales feront intervenir uniquement des distances de propagation relativement importantes. On choisit donc de ne considérer les résultats des simulations numériques que dans la zone stabilisée.

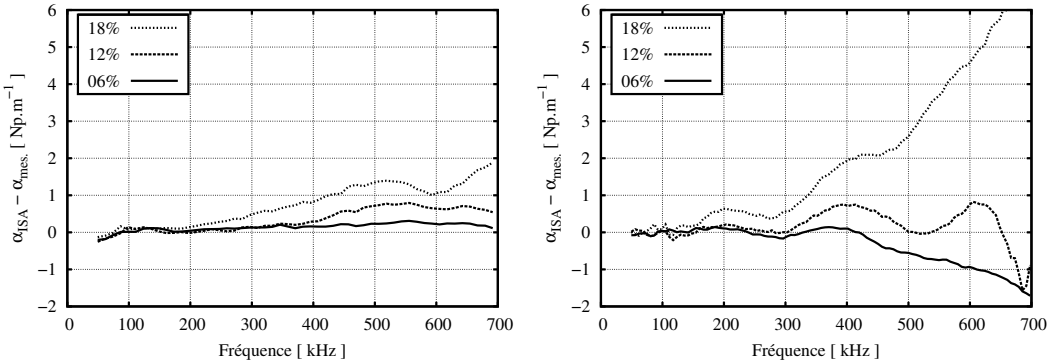
Comparaison avec ISA. Les courbes des facteurs d'amortissement du milieu effectif dans la zone stabilisée sont présentées en figure 2.24, pour les ondes P (a) et S (b), et pour les 3 bétons C6, C12, et C18. Les résultats sont comparés aux résultats analytiques donnés par l'ISA.

L'écart $(\alpha_{ISA} - \alpha_{mes})$ entre les résultats issus des simulations numériques α_{mes} et les résultats analytiques donnés par l'ISA α_{ISA} est présenté en figure 2.25. De manière générale, les écarts entre ISA et les simulations augmentent avec la fréquence et avec la concentration de granulats. Ces écarts sont très faibles (≤ 1 Np.m^{-1}) en dessous de 300-400 kHz, puis augmentent pour des fréquences supérieures. Les écarts deviennent très importants dans le cas des ondes S effectives.



(a) Ondes P (b) Ondes S

Fig. 2.24 – Courbes d'amortissement effectif dans le béton pour différentes concentrations de granulats. Comparaison avec les résultats donnés par l'ISA.



(a) Ondes P (b) Ondes S

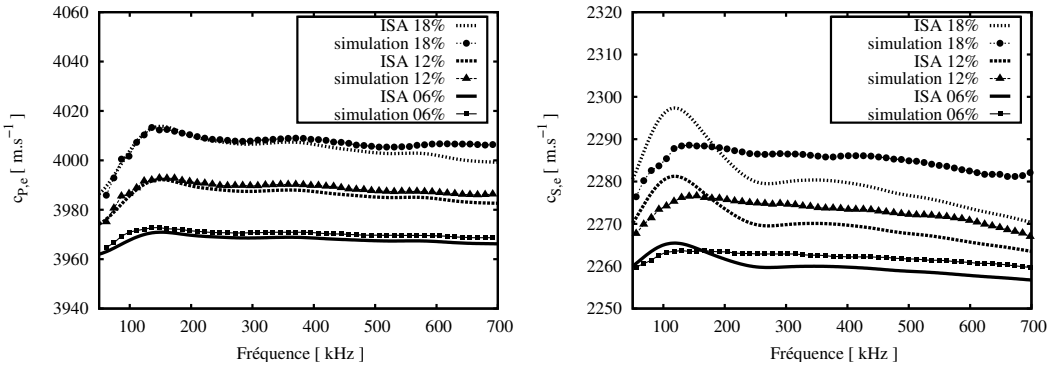
Fig. 2.25 – Écarts entre les résultats des simulations numériques, et les résultats analytiques donnés par l'ISA. Coefficient d'amortissement effectif.

Il est à noter que les ondes S ont des longueurs d'onde bien plus courtes que les ondes P, et l'ISA étant en théorie valable sous l'hypothèse de longueurs d'onde grandes devant la dimension des diffuseurs, il est normal que les écarts soient plus importants dans le cas des grandes longueurs d'onde. A 400 kHz, la longueur d'onde associée aux ondes S est voisine de $\lambda_s(400\,\text{kHz}) \simeq A$ où $A = 6\,\text{mm}$ est le rayon des granulats. La longueur d'onde correspondante pour les onde P correspond à une fréquence aux alentours de 650 kHz.

2.3.4.b Étude de la vitesse de phase

Du fait des restrictions sur la configuration des points d'acquisition imposées par la transformée $p - \omega$, on ne peut pas réaliser le même type d'étude que celle faite avec la mesure de l'atténuation en fonction de la distance de propagation. Les courbes de dispersion en vitesse de phase du milieu effectif sont donc évaluées à partir de l'ensemble des signaux enregistrés. Elles sont présentées en figure 2.26.

Dans le cas des ondes P dans le milieu effectif, les écarts entre les courbes de dispersion mesurées sur les simulations numériques ou calculées analytiquement avec l'ISA sont négligeables ; l'écart est de l'ordre de $1\,\text{m.s}^{-1}$. Cet écart augmente très légèrement pour les fréquences les plus élevées ($\geq 600\,\text{kHz}$), pour lesquelles la longueur d'onde devient inférieure au diamètre des granulats. L'écart est également légèrement plus important dans le cas de la concentration en



(a) Ondes P (b) Ondes S

FIG. 2.26 – Courbes de dispersion du milieu effectif pour différentes concentrations de granulats. Comparaison avec les résultats donnés par l'ISA.

granulats la plus élevée, tout en restants négligeables. Le comportement des courbes de dispersion des ondes P dans cette bande de fréquence et pour ces faibles concentrations de granulats est donc parfaitement décrit par l'ISA.

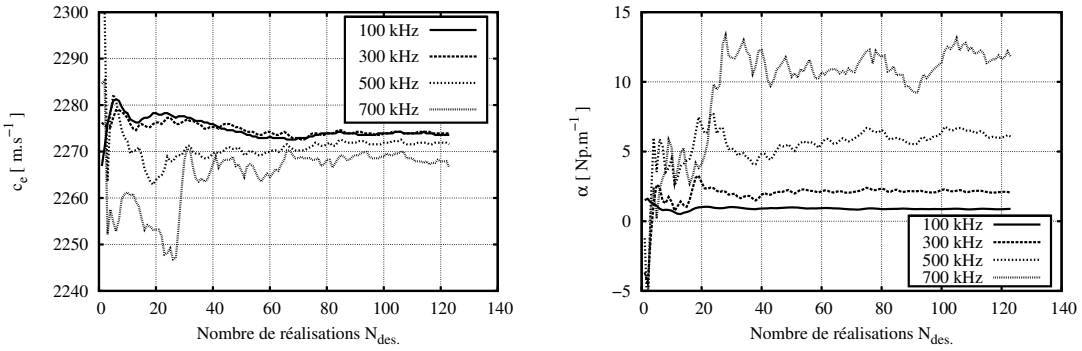
Pour les ondes S effectives, l'écart entre les simulations numériques et analytiques est de l'ordre de 5 m.s^{-1}, ce qui reste très faible. De même que précédemment cet écart augmente avec la fréquence et avec la concentration de granulats. Par contre les simulations analytiques prédisent un léger pic de vitesse aux alentours de 100 kHz (Sec. 2.1.2) qui n'est pas observé sur les simulations numériques. La légère décroissance des courbes de dispersion avec la fréquence au delà de 200 kHz est bien présente tant sur les simulations numériques que analytiques.

2.3.4.c Nombre de réalisations du désordre

Les paramètres de propagation liés au milieu effectif (vitesse de phase et atténuation effective) sont évalués à partir du champ cohérent, obtenu théoriquement par un moyennage des signaux sur une infinité de réalisations indépendantes du désordre. Dans le cas des simulations numériques, le champ cohérent a été obtenu à partir de 123 réalisations du désordre. On va étudier ici l'influence du nombre de réalisations du désordre à considérer pour avoir une bonne estimation des paramètres de propagation du milieu effectif.

Pour cela, on évalue le champ cohérent avec un nombre $N_{des.}$ croissant de réalisations du désordre de $N_{des.} = 1$ à 123. Pour $N_{des.} = 1$, on étudie en fait une configuration particulière du désordre, prise au hasard parmi les 123 mesurées. On détermine ensuite les valeurs des vitesses de phase et d'atténuation avec les mêmes méthodes de traitement que précédemment, en considérant les récepteurs situés dans la zone stabilisée. La figure 2.27 présente les valeurs de vitesse de phase et d'atténuation effectives pour la propagation d'ondes S dans le béton C12, en fonction du nombre de réalisations du désordre considéré. Les valeurs sont présentées pour quatre fréquences représentatives 100 kHz, 300 kHz, 500 kHz et 700 kHz.

Pour $N_{des.}$ très faible (typiquement $N_{des.} < 10$), l'influence de configurations particulières des positions de granulats est encore très marquée, et le champ moyen obtenu ne reflète pas le milieu homogène effectif recherché. La quantité de champ incohérent encore présent est importante et les valeurs de la vitesse de phase et de l'atténuation obtenues sont très variables. On peut notamment observer un facteur d'amortissement qui peut être négatif pour un nombre de réalisations du désordre inférieur à 5. Ce phénomène est d'autant plus important que la fréquence est élevée. Cela montre que lors de mesures sur un matériau hétérogène comme le béton, une seule mesure ne suffit pas à caractériser le matériau dans son ensemble mais reflète essentiellement une configuration particulière des hétérogénéités. Cette mesure donnera donc



(a) Vitesse de phase effective

(b) Atténuation effective

Fig. 2.27 – Influence du nombre de réalisations du désordre sur la mesure de la vitesse de phase et de l'atténuation du milieu effectif. Cas de la propagation d'ondes S dans le béton C12.

des résultats différents en différents endroits du même matériau.

A mesure que l'on augmente la valeur de $N_{des.}$, l'allure des courbes $c(N_{des.})$ et $\alpha(N_{des.})$ se stabilise peu à peu. Les paramètres parviennent à une valeur presque constante. En considérant que les propriétés du milieu effectif recherchées sont obtenues lorsque la vitesse de phase devient stable à $\pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$ près, et l'atténuation à $\pm 0,5\,\mathrm{Np.m^{-1}}$ près, on peut alors déterminer le nombre optimal de réalisations du désordre à considérer. Ces critères sont volontairement très restrictifs, cette étude étant menée afin d'étudier la propagation du champ cohérent avec la plus grande précision possible, pour valider les résultats des modèles d'homogénéisation comme l'ISA.

Cette stabilisation survient relativement rapidement pour les plus basses fréquences. À 100 kHz, on peut considérer que les paramètres du milieu effectif sont connues avec une précision raisonnable à partir de $N_{des.} = 10$. On voit que, dans le cas de la vitesse de phase effective, la valeur continue de varier très légèrement jusqu'à environ $N_{des.} = 60$ mais cette variation est négligeable. Pour des fréquences supérieures, l'allure des courbes est de plus en plus chaotique, avec des variations importantes de c ou α. On ne parvient à une stabilisation qu'au bout d'un nombre important de réalisations du désordre. La vitesse de phase est bien moins affectée et se stabilise plus rapidement que l'atténuation. À 500 kHz par exemple, la vitesse de phase est stable à $\pm 5\,\mathrm{m.s^{-1}}$ près pour $N_{des.} = 25$ alors que à la même fréquence, la valeur du coefficient d'atténuation effectif n'est pas stabilisée à $\pm 0,5\,\mathrm{Np.m^{-1}}$ près avant $N_{des.} \simeq 60$.

Pour la fréquence la plus haute étudiée, 700 kHz, la vitesse de phase est stabilisée à partir de $N_{des.} \simeq 70$ à la précision voulue, mais continue d'avoir quelques variations. Pour le coefficient d'atténuation, les variations de $\alpha(N_{des.})$ sont encore très importantes jusqu'à $N_{des.} = 123$. On ne peut pas être certains que la valeur est bien stabilisée, et que 123 réalisations du désordre sont suffisantes pour évaluer les propriétés du milieu homogène effectif à ces fréquences.

Tab. 2.6 – Estimations du nombre de réalisations du désordre $N_{des.}$ optimal à considérer pour obtenir une évaluation stable des paramètres effectifs à la fréquence $f = 500\,\mathrm{kHz}$ pour différentes concentrations.

		C6	C12	C18
Vitesse c_e	onde P	5	15	20
	onde S	10	25	70
Amortissement α	onde P	20	30	50
	onde S	50	60	100

On effectue le même type d'études pour toutes les concentrations considérées et les deux

types d'ondes P et S. Le tableau 2.6 présente les estimations du nombre $N_{des.}$ à considérer pour obtenir les vitesses de phase et les atténuations effectives de façon stable avec la même précision que précédemment. On se contente ici de considérer la fréquence $f = 500\,\text{kHz}$, qui donne un bon aperçu du comportement général.

On constate que dans tous les cas, la vitesse de phase se stabilise plus rapidement que l'amortissement effectif. De la même manière, les paramètres effectifs relatifs aux ondes P nécessitent moins de réalisations du désordre que ceux relatifs aux ondes S, ces dernières étant plus sensibles au phénomène de diffusion multiple du fait de leurs plus courtes longueurs d'onde. Enfin, plus la concentration en diffuseurs est élevée, plus le nombre de réalisations du désordre à considérer pour obtenir des paramètres stables est élevé.

2.4 Conclusions et perspectives

Propagation en milieu hétérogène. Ce chapitre présente la propagation en milieu hétérogène du point de vue théorique. L'étude de la propagation dans de tels milieux passe par l'évaluation d'un champ moyen appelé champ cohérent, obtenu après moyenne sur un très grand nombre de réalisations du désordre. Ce champ cohérent décrit, sous certaines conditions, la propagation dans un milieu homogène effectif. Ce milieu homogène effectif possède un nombre d'onde complexe dépendant de la fréquence ; il est dispersif et atténuant.

Des modèles analytiques ont été développés pour modéliser ce nombre d'onde effectif et ainsi évaluer la dispersion et l'atténuation du milieu effectif. Le plus souvent ces modèles ont été développés pour des milieux acoustiques comportant peu de diffuseurs. Parmi ces modèles, l'*Independent Scattering Approximation* (ISA) reste l'un des plus simples. L'ISA est théoriquement valable dans un milieu où la concentration de diffuseurs est faible (milieu dilué), et où le contraste entre les diffuseurs et la matrice est faible, mais ces limites ne sont pas clairement établies. Il fait intervenir uniquement la réponse à une onde plane d'un diffuseur unique dans la direction de l'onde incidente (diffusion "vers l'avant"), ainsi que la densité de diffuseurs. Ce modèle possède l'avantage d'être applicable aux milieux composés d'une matrice élastique, où des ondes de compression et de cisaillement se propagent, avec éventuellement des conversions de modes. Il est également possible d'étendre l'ISA aux cas d'une distribution continue de dimensions de granulats, comme on en trouve dans le béton.

Simulations numériques. Des simulations numériques en 2D sont utilisées pour évaluer la validité du modèle ISA dans le cas d'un milieu élastique contenant des inclusions circulaires. Ces simulations montrent l'existence d'une zone de transition lors de la propagation, de l'ordre de deux fois la distance moyenne inter-diffuseurs, au cours de laquelle le processus de diffusion multiple se met en place. Au delà de cette zone de transition, le processus semble stabilisé. Les simulations numériques montrent que l'ISA donne de bons résultats pour les plus basses fréquences pour les ondes P et S, lorsque la longueur d'onde est comparable ou supérieure au diamètre des granulats. La vitesse de phase est mieux décrite par l'ISA que l'atténuation, dont le comportement observé sur les simulations ne varie pas linéairement avec la concentration. Les écarts entre les facteurs d'amortissements obtenus par simulation numérique et par l'ISA augmentent avec la fréquence et sont déjà très importants pour seulement 18% d'inclusions à haute fréquences.

L'ISA est donc un modèle de diffusion multiple simple, qui peut donner des ordres de grandeurs réalistes de la vitesse de phase et l'amortissement effectif dans le béton, pour des fréquences inférieures à 300-400 kHz et à des concentrations en granulats faibles. Le comportement des ondes de cisaillement, peu étudiées en diffusion multiple, est également bien décrit pour les longueurs d'ondes les plus grandes.

L'étude du nombre de réalisations du désordre à considérer afin d'obtenir la meilleure estimation possible du champ cohérent, et d'évaluer avec précision les propriétés du milieu effectif, montre que le fait de se contenter d'une unique réalisation du désordre, c'est à dire une mesure en un point donné du matériau, donne des résultats ne reflétant pas les propriétés moyennes du béton. Il est nécessaire de moyenner sur un nombre important de réalisations du désordre, qui croît avec la fréquence et la concentration en granulats ; une dizaine de réalisations est suffisante pour les fréquences les plus basses (voisines de 100 kHz) mais au delà de 500 kHz, une cinquantaine, voire une centaine de réalisations du désordre est à prendre en compte.

Le nombre optimal de réalisations de désordre est ici évalué en considérant des critères volontairement très restrictifs sur la stabilité des paramètres c (à $5\,\mathrm{m.s^{-1}}$ près) et α (à $0{,}5\,\mathrm{Np.m^{-1}}$ près), le but étant de déterminer les paramètres du milieu effectif obtenus par simulations numérique avec la plus grande précision possible. Dans le cas de mesures expérimentales visant à déterminer les propriétés du matériau, la précision recherchée est plus faible, et le nombre de réalisations du désordre à considérer sera alors *a priori* moins important. Il faudra cependant tenir compte du bruit de mesure, plus important que dans le cas de simulations numériques. D'autre part, cette étude est également à réaliser expérimentalement sur un matériau réel, qui contient de nombreuses hétérogénéités de formes, dimensions et natures différentes, et qui est très différent des bétons numériques étudiés.

Perspectives. Ce travail, réalisé en collaboration continue avec le LMA, combine des méthodes de simulations numériques 2D par différences finies et des méthodes de traitement du signal adaptées. L'outil numérique ainsi formé est ici utilisé sur des modèles de bétons simplifiés. Ces bétons ont des diffuseurs circulaires et identiques, et une concentration faible en granulats (6, 12 et 18%). Ils sont donc relativement éloignés du matériau réel, beaucoup plus complexe. Cependant l'objectif était tout d'abord de confronter les résultats des simulations avec ceux donnés par l'ISA dans des cas se rapprochant des hypothèses de base de l'ISA, notamment avec des diffuseurs de taille unique et à faible concentration. La précision des résultats est étudiée en détail en fonction des méthodes numériques, des méthodes de traitement, des distances de propagation et du nombre de réalisations du désordre considéré. Le temps de calcul des simulations est cependant très long, ce qui nous a limité dans le nombre de cas de bétons étudiés, et ne nous a pas permis de réaliser une étude systématique sur la concentration, la dimension des granulats, ou la nature des matériaux.

On dispose à présent de tous les éléments permettant de mettre en place un outil très robuste de simulations. Cet outil pourra par la suite être utilisé pour étudier plus en détail les problèmes de diffusion multiple dans de nombreux matériaux, fournissant des observations du phénomène sur des "matériaux" numériques parfaitement contrôlés et moins coûteuses à obtenir que expérimentalement, ces observations pouvant ensuite être confrontées aux différents modèles d'homogénéisation, afin d'évaluer leur pertinence et leurs limites. Le cas de milieux avec des concentrations en diffuseurs plus élevées doit notamment être étudié, ainsi que le cas de matériaux ayant une distribution continue de taille d'hétérogénéités, afin de se rapprocher le plus possible de matériaux réels comme par exemple le béton, les matériaux composites, certains alliages, des soudures ou encore pour certaines applications médicales utilisant des ultrasons.

La viscoélasticité et la porosité des matériaux doivent également être prises en compte afin de construire un modèle numérique permettant de décrire avec précision tous les phénomènes qui influent sur la propagation des ondes dans ces milieux hétérogènes complexes. L'importance d'un phénomène par rapport aux autres pourra alors être étudiée en détail.

Le chapitre suivant s'intéresse au problème de la viscoélasticité des matériaux, en s'appuyant cette fois sur une mesure expérimentale sur des dalles de béton ou de mortier, avec des ondes de compression. L'étude des informations contenues dans la partie incohérente des champs sera également abordée.

Chapitre 3

Ondes de compression dans le béton : aspects expérimentaux

Sommaire

3.1 Modèle de viscoélasticité linéaire 68
3.1.1 Relations contrainte-déformation en milieu 1D 68
3.1.1.a Fonctions de fluage et de relaxation 68
3.1.1.b Élasticité linéaire 69
3.1.1.c Modules complexes 69
3.1.2 Modèle à **Q** constant : modèle de Kjartansson 70
3.1.2.a Expression du module complexe 70
3.1.2.b Vitesse de phase et atténuation 71
3.1.2.c Expression en 2D/3D 71
3.1.3 Application aux milieux hétérogènes 72
3.1.3.a Résultats analytiques 72
3.1.3.b Conclusions pour l'étude du béton 73
3.2 Étude expérimentale du champ cohérent dans le béton avec des ondes de compression 74
3.2.1 Protocole expérimental 74
3.2.1.a Les dalles de béton 74
3.2.1.b Source : les transducteurs 74
3.2.1.c Réception : sonde interférométrique 75
3.2.1.d Mesures 76
3.2.2 Prétraitements et obtention du champ cohérent 76
3.2.2.a Modélisation du rayonnement des transducteurs 77
3.2.2.b Corrections apportées aux signaux 77
3.2.2.c Évaluation du champ cohérent 79
3.2.3 Comparaison des énergies du champ cohérent et incohérent 80
3.2.3.a Choix des bandes de fréquences 80
3.2.3.b Intensité des champs cohérent et incohérents 80
3.2.3.c Cas du mortier 81
3.2.3.d Cas du béton 81
3.2.4 Paramètres de propagation : étude du champ cohérent 82
3.2.4.a Vitesse effective des ondes de compression 82
3.2.4.b Amortissement 83
3.3 Potentiel de l'étude de l'intensité incohérente dans le béton 85
3.3.1 Présentation 85

3.3.2 L'approximation de diffusion . . . 85
3.3.2.a L'équation de diffusion . . . 85
3.3.2.b Bibliographie . . . 86
3.3.2.c Solution en 3D pour un milieu infini . . . 87
3.3.2.d Influence relative des termes de l'équation 3.39 . . . 87
3.3.2.e Solution en milieu borné . . . 89
3.3.3 Application aux signaux expérimentaux . . . 90
3.3.3.a Allure des courbes expérimentales . . . 90
3.3.3.b Fonction coût . . . 91
3.3.3.c Estimation de D et ξ expérimentale : problème inverse . . . 92
3.3.4 Estimation de $\boldsymbol{\xi}$ par régression linéaire . . . 93
3.3.4.a Intérêt . . . 93
3.3.4.b Étude de sensibilité à partir d'une solution simulée . . . 94
3.3.4.c Essai sur des signaux expérimentaux . . . 95
3.3.4.d Remarques . . . 96
3.4 Conclusions . . . 96

Introduction

Les études analytique et numérique de la diffusion multiple en milieu élastique ont permis de définir un milieu homogène équivalent. La présence des hétérogénéités de dimensions importantes (granulats) rend le milieu effectif dispersif et atténuant. Les hétérogénéités de plus petites dimensions (sables, porosité, micro-fissures), doivent également être prises en compte. L'effet de ces plus petites hétérogénéités, ainsi que l'absorption des matériaux, peuvent être assimilés à un comportement viscoélastique [Bourbié et al., 1986]. L'étude d'un modèle viscoélastique linéaire permet de simuler analytiquement la propagation des ondes dans un milieu hétérogène et viscoélastique, et de déterminer l'influence relative des effets de la diffusion multiple ou de la viscoélasticité sur la propagation des ondes. Une étude expérimentale avec des ondes de compression sur du mortier et du béton permettra ensuite de mettre en évidence les effets de la diffusion multiple sur un cas réel.

3.1 Modèle de viscoélasticité linéaire

3.1.1 Relations contrainte-déformation en milieu 1D

L'étude des relations contrainte-déformation en milieu 1D permet d'étudier séparément et de manière simplifiée les effets uniaxiaux de compression ou de cisaillement [Bourbié et al., 1986; Carcione, 2001].

3.1.1.a Fonctions de fluage et de relaxation

On définit la fonction de fluage f des matériaux comme la variation au cours du temps t de la déformation $\varepsilon(t)$ due à une contrainte constante σ_0 appliquée en $t = t_0$:

$$\varepsilon(t) \;=\; \sigma_0\, f(t - t_0, \sigma_0) \tag{3.1}$$

On peut définir de la même manière la fonction de relaxation r, correspondant à l'évolution temporelle de la contrainte $\sigma(t)$ nécessaire pour produire une déformation constante ε_0 appliquée en $t = t_0$:

$$\sigma(t) \;=\; \varepsilon_0\, r(t - t_0, \sigma_0) \tag{3.2}$$

3.1.1.b Élasticité linéaire

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, on suppose que les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent plus de la valeur initiale de la contrainte σ_0 ou de la déformation ε_0. On a alors les relations :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\, f(t-t_0) \tag{3.3}$$
$$\sigma(t) = \varepsilon_0\, r(t-t_0) \tag{3.4}$$

Ces relations 3.3 et 3.4 permettent ainsi de remonter à l'histoire des déformations ou des contraintes du matériau jusqu'au temps t, en additionnant par linéarité les effets dus à une variation de contrainte $\partial\sigma$ (ou de déformation $\partial\varepsilon$) appliquées au temps τ pendant la durée $d\tau$.

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}d\tau \tag{3.5}$$
$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} r(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}d\tau \tag{3.6}$$

Par relations de causalité, la connaissance de l'état du matériau au temps t n'est pas influencée par les évolutions aux temps ultérieurs. On peut donc écrire :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}d\tau \tag{3.7}$$
$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}d\tau \tag{3.8}$$

De même, par relation de causalité, les valeurs des fonctions de fluage et de relaxation sont nulles pour des temps négatifs :

$$\begin{cases} f(\tau) = 0 \\ r(\tau) = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \tau < 0. \tag{3.9}$$

En considérant que $\varepsilon(-\infty) = 0$, on peut alors réaliser l'intégration par parties des équations 3.7 et 3.8 et obtenir les relations suivantes liant les contraintes et les déformations au cours du temps, dans lesquelles on reconnaît des produits de convolution liant $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau = s(t) * \sigma(t) \tag{3.10}$$
$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau = m(t) * \varepsilon(t) \tag{3.11}$$

avec

$$s(t) = \frac{\partial f}{\partial\tau} \quad \text{et} \quad m(t) = \frac{\partial r}{\partial\tau} \tag{3.12}$$

Les combinaisons des relations 3.10 et 3.11 impliquent par ailleurs que l'on ait :

$$\delta(t) = m(t) * s(t) \tag{3.13}$$

3.1.1.c Modules complexes

La transformée de Fourier des relations 3.10, 3.11 et 3.13 conduit aux relations suivantes entre les contraintes et les déformations dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \hat{s}(\omega)\,\hat{\sigma}(\omega) \tag{3.14}$$
$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{m}(\omega)\,\hat{\varepsilon}(\omega) \tag{3.15}$$
$$1 = \hat{m}(\omega)\,\hat{s}(\omega) \tag{3.16}$$

Dans ce cas, on observe que la relation liant contraintes et déformations en 1D fait intervenir un module complexe et dépendant de la fréquence $\hat{m}(\omega)$. Ce module complexe peut être un module de compression, de cisaillement, de torsion, etc., suivant le cas de contrainte uniaxiale étudié. En réintroduisant la relation constitutive 3.15 dans les équations d'équilibre du matériau (du type de l'équation 1.1) en 1D, on peut décrire la propagation par une équation de Helmholtz avec un nombre d'onde complexe k et une célérité complexe $\mathcal{C}$:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{\mathcal{C}(\omega)} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{C}(\omega) = \sqrt{\frac{\hat{m}(\omega)}{\rho}}. \tag{3.17}$$

Le nombre d'onde k étant complexe, il peut s'écrire sous la forme $k = \kappa + i\alpha$. Dont la partie réelle $\kappa = \omega/c(\omega)$ correspond au terme propagatif avec la vitesse de phase $c(\omega)$ et la partie imaginaire $\alpha(\omega)$ est liée à l'atténuation.

Pour un matériau élastique, le module complexe $\hat{m}(\omega)$ devient une constante réelle M_0 et l'équation 3.15 devient la loi de Hooke pour un cas uniaxial, où M_0 peut être le module d'élasticité $(\lambda + 2\mu)$ dans le cas d'une contrainte de compression, μ dans le cas d'une contrainte de cisaillement, etc.

$$\sigma = M_0 \varepsilon. \tag{3.18}$$

3.1.2 Modèle à Q constant : modèle de Kjartansson

3.1.2.a Expression du module complexe

Parmi les différents modèles permettant de décrire le comportement viscoélastique des matériaux, l'un des plus courants consiste à considérer que l'amortissement est linéaire avec la fréquence, ce qui revient à considérer un facteur de qualité Q constant. Une des définitions du facteur de qualité a été donnée à l'équation 1.2.3.c. Ce modèle, décrit par Kjartansson [1979], se base sur une fonction de fluage de la forme :

$$f(t) = \frac{1}{M_0 \Gamma(1+2\gamma)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2\gamma} \mathcal{H}(t) \tag{3.19}$$

où M_0 est le module élastique (de compression ou de cisaillement), $t_0 = 2\pi/\omega_0$ correspond à une période pour une pulsation de référence ω_0 et $\mathcal{H}(t)$ est la fonction échelon de Heaviside. Cette fonction de fluage fait également intervenir la fonction $\Gamma(x)$ [Abramowitz and Stegun, 1964, chap. 6].

Enfin, on définit :

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{Q}\right) \tag{3.20}$$

Cette fonction de fluage permet de remonter aux modules complexes à partir des relations 3.12, 3.14 et 3.16 [1] :

$$\hat{m}(\omega) = M_0 \left(\frac{-i\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} = M_0 \left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|^{2\gamma} \exp\left(-i\pi\gamma\,\mathrm{sgn}(\omega)\right) \tag{3.22}$$

la fonction $\mathrm{sgn}(\omega)$ représentant le signe de ω.

[1] La convention temporelle étant choisie en $e^{-i\omega t}$, on utilise la définition suivante pour la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \tag{3.21}$$

d'où les expressions de M différentes de celles trouvées dans [Kjartansson, 1979; Bourbié et al., 1986; Carcione, 2001]

3.1.2.b Vitesse de phase et atténuation

Le module complexe $\hat{m}(\omega)$ donne une vitesse de phase de l'onde de la forme :

$$c(\omega) = c_0 \left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|^{\gamma} \qquad \text{avec} \qquad c_0 = \sqrt{\frac{M_0}{\rho}} \frac{1}{\cos(\frac{\pi\gamma}{2})} \tag{3.23}$$

L'équation 3.23 montre que le fait d'introduire de la viscoélasticité dans le matériau rend la vitesse de phase c dépendante de la fréquence. De plus, la valeur obtenue en $\omega = \omega_0$ est légèrement différente de la vitesse relaxée $c_{rel.} = \sqrt{M_0/\rho}$ que l'on aurait obtenue en considérant le matériau élastique. Pour des valeurs de Q suffisamment élevées ($Q > 10$), on peut considérer que $\cos(\frac{\pi\gamma}{2}) \approx 1$ et que $c_{rel.} \approx c_0$.

Le coefficient d'atténuation, correspondant à la partie imaginaire du nombre d'onde complexe, est de la forme :

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} \tan(\frac{\pi\gamma}{2}) \operatorname{sgn}(\omega) \tag{3.24}$$

ce qui, en considérant un facteur de qualité Q suffisamment grand dans la relation 3.20 ($Q > 10$ d'après [Bourbié et al., 1986]), et des fréquences positives, peut être approché à l'ordre 1 par :

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{\omega}{c(\omega)} \frac{1}{2Q} = \frac{\pi f}{Q c(\omega)}, \qquad 1/Q \ll 1. \tag{3.25}$$

On retrouve la valeur approchée de l'équation 1.14. La vitesse de phase $c(\omega)$ n'étant pas constante avec la fréquence, le modèle à Q constant n'implique pas rigoureusement que l'amortissement est linéaire avec la fréquence. Cependant, pour des facteurs de qualité suffisamment grands, le comportement de α est très proche d'un comportement linéaire avec f.

L'intérêt du modèle à Q constant de Kjartansson est que le comportement viscoélastique du matériau peut être décrit pour toutes les fréquences par seulement deux paramètres : la vitesse relaxée $c_{rel.}$ et le facteur de qualité Q. La fréquence de référence ω_0 doit également être indiquée, elle peut être prise arbitrairement à l'une des extrémités ou au milieu de la bande de fréquence étudiée. Les auteurs ne donnent pas plus de précisions sur cette valeur de ω_0. On fixe alors cette valeur de façon à s'approcher le plus possible de la réalité physique.

Ce modèle a été vérifié expérimentalement sur des roches homogènes pour des très basses fréquences (20-500 Hz) [Carcione, 2001; Bourbié et al., 1986], et est largement utilisé en sismique.

3.1.2.c Expression en 2D/3D

Le modèle de Kjartansson est un modèle développé pour les cas 1D, à partir du comportement du matériau (fluage, relaxation) en compression ou cisaillement uniaxial. Dans le cas d'un milieu multidimensionnel et isotrope, la relation contrainte déformation équivalente à la relation 3.11 peut être généralisée de la manière suivante à partir de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lambda(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) + 2\mu(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\tau}\right] d\tau, \tag{3.26}$$

où les coefficients λ et μ permettraient de définir des coefficients de Lamé complexes [Bourbié et al., 1986].

Dans un milieu bidimensionnel ou tridimensionnel, on peut alors déterminer les nombres d'onde complexes k_p et k_s relatifs aux ondes de compression et de cisaillement à partir de relations similaires à 3.17 et 3.22.

$$k_p(\omega) = \frac{\omega}{c_{p,r}} \left(\frac{-i\omega}{\omega_0}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_p}\right)} \tag{3.27}$$

$$k_s(\omega) = \frac{\omega}{c_{s,r}} \left(\frac{-i\omega}{\omega_0}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_s}\right)} \tag{3.28}$$

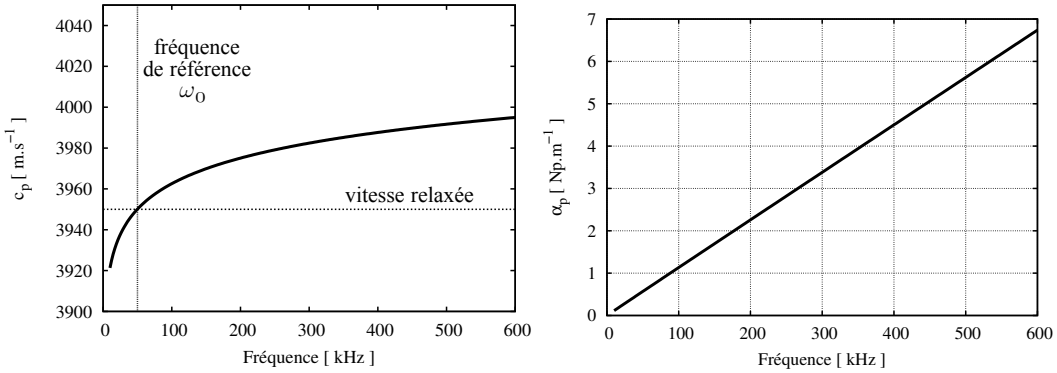
Dans ces relations, les 4 paramètres permettant de décrire la viscoélasticité du matériau sont les vitesses relaxées $c_{p,r}$ et $c_{s,r}$ des ondes P et S, ainsi que les facteurs de qualité Q_p et Q_s.

Les valeurs relaxées $c_{p,r}$ et $c_{s,r}$ utilisées pour les simulations analytiques sont les mêmes que celles utilisées dans le cas élastique (Tab. 2.1). Les valeurs des facteurs de qualité sont choisis de manière à être représentatifs des propriétés moyennes du mortier ou des granulats. Ils sont données au tableau suivant :

Tab. 3.1 – Facteurs de qualité utilisés pour les simulations viscoélastiques sur le béton.

Matériau	Q_p	Q_s
Mortier	70	30
Granulats	100	50

La figure 3.1 présente des exemples de courbe de dispersion en vitesse de phase et de courbe d'amortissement obtenues pour le cas de la propagation des ondes P dans du mortier avec le modèle de Kjartansson. Ce modèle induit donc bien une dispersion de la vitesse de phase de l'ordre de environ $30\,\mathrm{m.s^{-1}}$, et l'atténuation est bien linéaire avec la fréquence.



(a) Vitesse de phase $c_p(\omega)$. (b) Amortissement $\alpha_p(\omega)$.

Fig. 3.1 – Exemples de courbes de vitesse de phase et d'amortissement pour des ondes de compression dans du mortier, en utilisant le modèle de Kjartansson.

3.1.3 Application aux milieux hétérogènes

3.1.3.a Résultats analytiques

La prise en compte de la viscoélasticité des matériaux de cette manière introduit une dispersion de la vitesse de phase ; cette viscoélasticité ne peut pas être ajoutée *a posteriori* sur les modèles d'homogénéisation de type ISA lors de l'étude des milieux hétérogènes. La viscoélasticité des différentes phases (mortier et granulats) doit donc être prise en compte dès le début du calcul. Pour cela, le calcul des fonctions de champ lointain f_{pp} et f_{ps} doit être réalisé de la même manière qu'au chapitre 2, mais cette fois en considérant des nombres d'onde complexes k_p^j et k_s^j ($j = 0, 1$), pour chaque type d'onde P ou S et dans chaque phase du matériau, calculés à partir des relations 3.27 et 3.28. De même la formulation de l'ISA (Eqs. 2.71 et 2.72) fait intervenir le nombre d'onde complexe de la matrice dans le cas viscoélastique.

La comparaison des propriétés du milieu effectif dans le cas d'un matériau viscoélastique ou purement élastique est présentée en figure 3.2. Les propriétés du milieu effectif sont calculées avec l'ISA, dans un milieu 3D avec une granulométrie similaire à celle de la figure 2.9. L'influence de la viscoélasticité sur la vitesse de phase est relativement peu importante, tant pour les ondes P

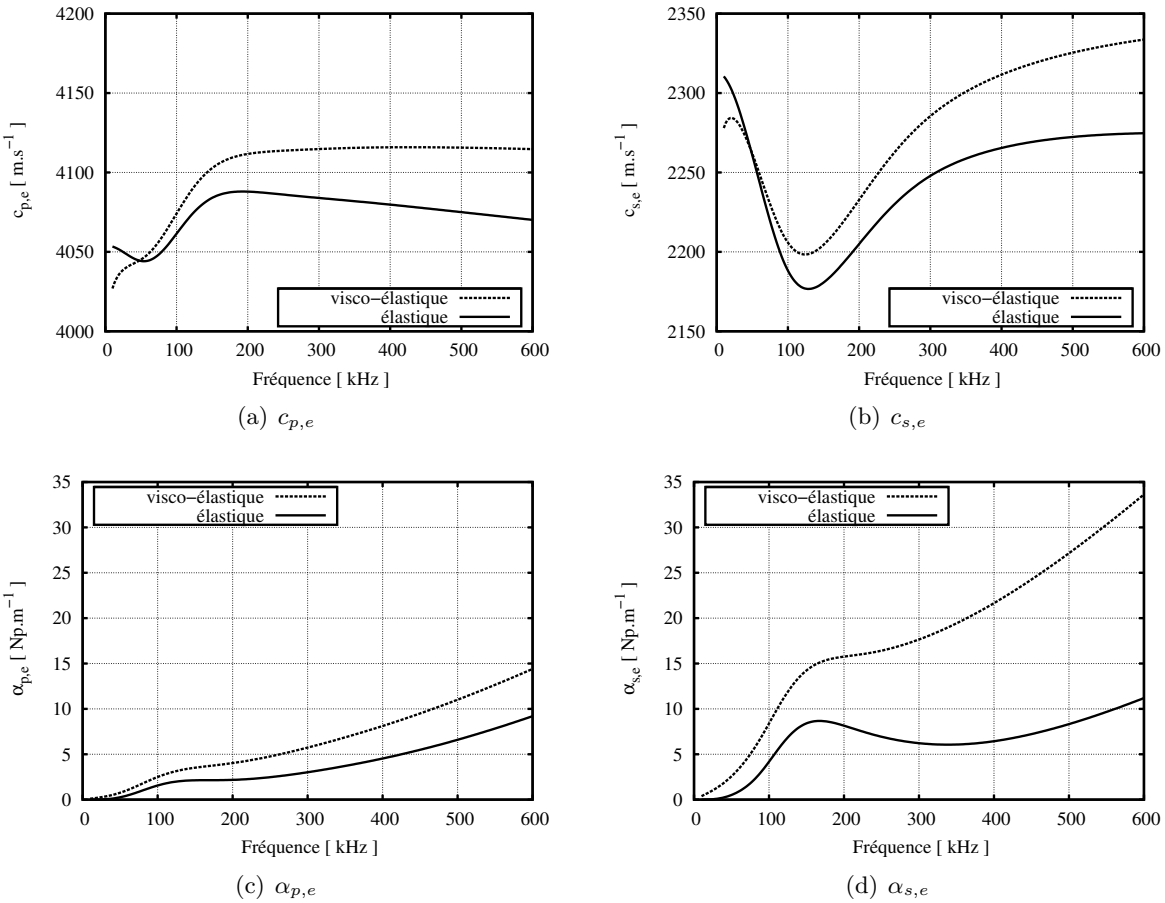


FIG. 3.2 – Courbes de dispersion en vitesse de phase effective et courbes d'amortissement effectif obtenues analytiquement en considérant des milieux élastiques ou viscoélastiques, et avec la méthode d'homogénéisation ISA. Le béton est simulé analytiquement en 3D avec les propriétés des tableaux 2.1 et 3.1, avec une granulométrie décrite par la figure 2.9 et un pourcentage volumique de 40% de granulats.

que pour les ondes S. La valeur de vitesse de phase varie au plus de $50\,\mathrm{m.s^{-1}}$ pour les fréquences les plus élevées.

L'étude des courbes d'atténuation 3.2(c-d) permet de qualifier l'importance relative de l'atténuation due à la diffusion par les granulats et de l'atténuation due aux autres effets à petite échelle (absorption, porosité, très petites hétérogénéités). Dans le cas des ondes P, l'amortissement dû aux hétérogénéités représente environ 70% de l'amortissement total. Dans le cas des ondes S, cette proportion est proche de 30%. Cette étude ne peut être que qualitative, les hypothèses de milieu dilué introduites dans le modèle par l'utilisation du modèle d'homogénéisation ISA n'étant pas vérifiée dans le cas du béton.

3.1.3.b Conclusions pour l'étude du béton

Dans le cas de mesures expérimentales sur du béton, on a vu que les coefficients d'atténuation mesurés tiennent compte de tous les phénomènes amortissants présents dans le matériau, et qu'il est très difficile de dissocier l'effet d'un phénomène par rapport à un autre. Lors de l'évaluation non destructive du béton en vue d'un diagnostic ou d'un suivi des ouvrages, le principal effet que l'on cherche à observer est une variation des propriétés mécaniques indiquant une pathologie comme par exemple une variation de porosité. La présence des hétérogénéités comme les granu-

lats modifie considérablement la propagation des ondes et ajoute notamment un amortissement supplémentaire des ondes qui n'est pas lié à des variations de propriétés du matériau.

La modélisation analytique de la propagation en milieu hétérogène et viscoélastique, bien qu'utilisant des modèles très simplifiés, permet de qualifier l'influence relative des différents phénomènes et de faciliter l'interprétation des résultats expérimentaux ou *in situ*. On a notamment vu que l'étude des propriétés du milieu effectif passait par l'évaluation du champ cohérent en moyennant les signaux enregistrés sur un grand nombre réalisations indépendantes du désordre, d'autant plus élevé que la fréquence est élevée. L'étude de l'atténuation du milieu effectif est difficile du fait de l'atténuation due à la diffusion multiple par les hétérogénéités, qui peut représenter entre 30 et 70% de l'atténuation totale.

3.2 Étude expérimentale du champ cohérent dans le béton avec des ondes de compression

La propagation des ondes de volume dans le béton a été étudiée de manière analytique en tenant compte de la diffusion multiple par les granulats et du caractère viscoélastique du matériau. Une étude expérimentale préliminaire en transmission avec des ondes de compression va maintenant être réalisée, afin d'observer les effets de la diffusion multiple sur des dalles de béton et de mortier. Cette étude est réalisée avec Arnaud Derode et Dominique Clorennec au Laboratoire Ondes et Acoustique à Paris (LOA). Elle a donné lieu à deux communications à la conférence NDT-CE[2] 2006 à St.Louis (MO), USA [Le Marrec et al., 2006; Chekroun et al., 2006].

3.2.1 Protocole expérimental

3.2.1.a Les dalles de béton

Les dalles étudiées lors des mesures sont des dalles de béton et de mortier de type autoplaçant avec un rapport E/C est de 0,68. Pour le béton, les granulats sont de type concassés (Gneiss), et le diamètre maximal des granulats est $D_{max} = 15\,\text{mm}$. Les dalles de mortier sont réalisées avec la même formulation que celles de béton, mais sans les granulats. Le diamètre maximal des grains de sable est de 1 mm.

Pour chaque type de matériau (béton ou mortier), on dispose de deux dalles d'épaisseurs différentes (6 et 12 cm) réalisées à partir de la même gâchée. La première dalle a des dimensions de 20×20 cm et une épaisseur de 6 cm. La seconde dalle a des dimensions de 60×60 cm et une épaisseur de 12 cm. Les deux surfaces des dalles sont polies pour faciliter les mesures.

Les mesures sont réalisées en transmission à travers les dalles avec des ondes de compression. Le schéma représentant le protocole expérimental est présenté en figure 3.3.

3.2.1.b Source : les transducteurs

Les sources utilisées sont des transducteurs de type piézoélectrique large bande émettant des ondes de compression. On utilise deux transducteurs de fréquences centrales différentes afin de couvrir une grande bande fréquentielle.

- Le premier transducteur a une fréquence centrale de 250 kHz (Panametrics videoscan 1,5in).
- Le second transducteur a une fréquence centrale de 500 kHz (Panametrics videoscan 1,125in).

Les transducteurs sont collées sur l'une des faces de la dalle avec du phénylsalicilate (Fig. 3.4(a)). Cess cristaux dont la température de fusion est de 40°C, servent de colle pour les transducteurs.

[2]Non Destructive Testing for Civil Engineering.

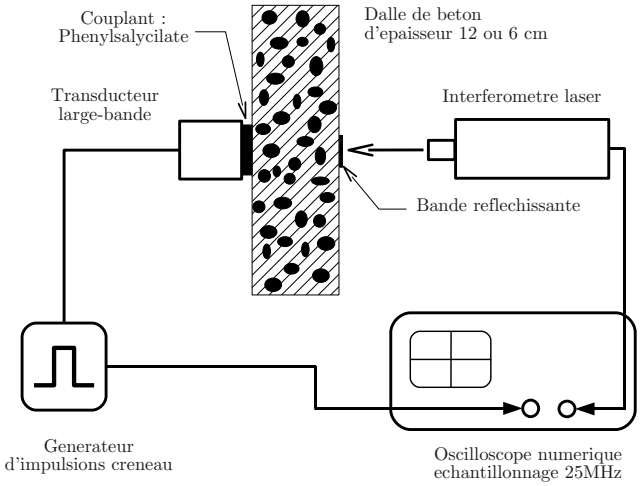
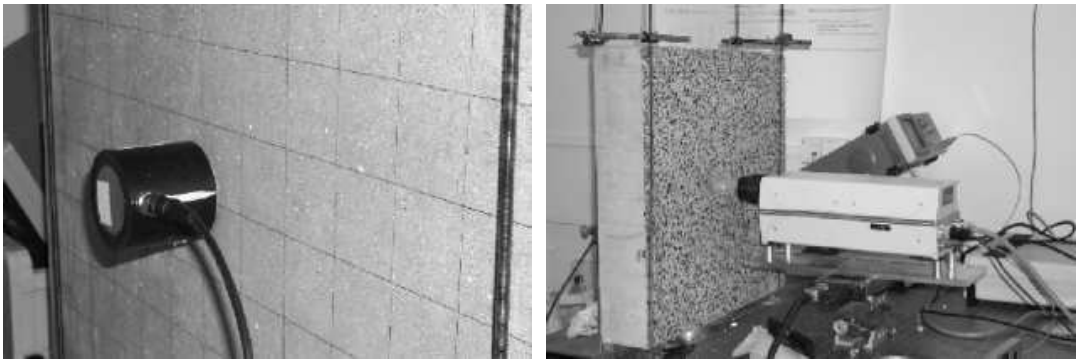


FIG. 3.3 – Schéma du protocole expérimental pour les mesures en transmission.

Ces transducteurs source sont alimentés par une excitation de type créneau monopolaire. L'amplificateur utilisé est de marque SOFRANEL Squarewave pulser Receiver 5077pr. Il émet des créneaux de tension 100 V, à la fréquence de tir de 100 Hz. La demi-largeur $1/2\,T_{creneau}$ de ces créneaux détermine la largeur du lobe principal du spectre d'excitation.



(a) (b)

FIG. 3.4 – (a) Collage du transducteur sur la face arrière de la dalle. (b) Réception avec une sonde interférométrique sur la face avant de la dalle.

3.2.1.c Réception : sonde interférométrique

La réception des ondes de compression transmises se fait sur l'autre face de la dalle, comme indiqué sur le schéma 3.3. On utilise pour cela une sonde interférométrique SH140 [Royer and Dieulesaint, 1989; Royer et al., 1994] visible sur la figure 3.4 (b). Cette sonde fournit une mesure du déplacement, qui peut être absolue, avec une sensibilité de environ 10 mV/Å. Elle permet des mesures très ponctuelles sur la dalle de béton ; la dimension de la tache focale du laser étant de environ 30 μm. La réflection du faisceau laser sur la dalle est facilitée grâce à une bande adhésive réfléchissante.

L'avantage de la sonde interférométrique utilisée en réception est qu'elle permet de s'affranchir des effets de couplage entre la source et le récepteur ; la réception se faisant ici sans contact.

De plus, les mesures ponctuelles n'entraînent pas un effet de moyennage spatial sur la surface de la pastille du transducteur.

La sonde peut être déplacée horizontalement avec un moteur, pour pouvoir effectuer des balayages (*scans*) et ainsi prendre de nombreux points d'acquisition sur la dalle sans avoir de problèmes de couplants (décoller-recoller un transducteur de réception par exemple). La position des points de réception est également connue. En pratique on effectue des balayages suivant des lignes dans "l'ombre" des transducteurs-source (projection de la pastille du transducteur sur la face de la dalle où s'effectue la réception) sur une distance de environ 48 mm avec un pas de 1 mm pour le transducteur de fréquence centrale 250 kHz et sur une distance de 40 mm pour le transducteur de fréquence centrale 500 kHz qui est de dimensions plus petites. La position de ces lignes de réception par rapport à l'ombre des transducteurs sur la face de réception est schématisée en figure 3.5.

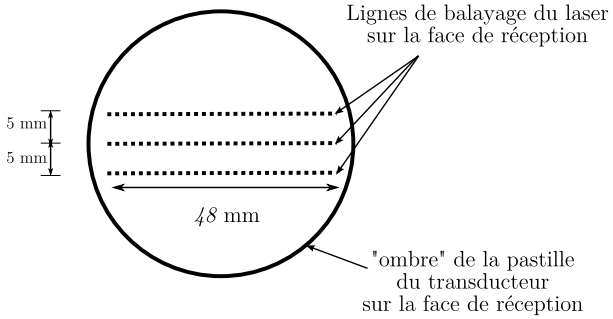


Fig. 3.5 – Positions des points de réception de la sonde interférométrique dans l'ombre du transducteur pour les mesures en transmission.

3.2.1.d Mesures

Les mesures en transmission présentées ci-dessus (transducteur collé et réception par balayage du laser) sont répétées en différents endroits des dalles, en veillant à rester à une distance suffisante des bords. Trois positions de transducteur sont considérées pour chaque dalle, ce qui donne un total de environ 400 points de réceptions, prenant en compte différentes configurations indépendantes du désordre.

L'acquisition s'effectue à l'aide d'un oscilloscope numérique échantillonnant les signaux à 25 MHz. Une routine de décimation ramène par la suite cette fréquence d'échantillonnage à 12,5 MHz, les fréquences étudiées étant inférieures au MHz. Afin de pouvoir étudier à la fois la partie cohérente et incohérente du champ, on enregistre les signaux transmis sur une durée importante de 600 μs.

Les signaux sont ensuite filtrés entre 100 et 600 kHz avec un filtre IIR de Butterworth d'ordre 3, dont les propriétés sont présentées en annexe C. Ainsi, on élimine d'une part le bruit de mesure à haute fréquence, et d'autre part les fréquences inférieures à 100 kHz, pour lesquelles les longueurs d'ondes peuvent devenir comparable à un multiple de l'épaisseur e de la dalle et exciter des modes de Lamb [Viktorov, 1967; Clorennec et al., 2007]. (Pour une vitesse moyenne des ondes P de 4400 m.s^{-1} dans le béton, la fréquence critique du premier mode de Lamb (S1) sur une dalle d'épaisseur $e = 12$ cm d'épaisseur vaut $f_1 = c_p/2e \simeq 18$ kHz).

3.2.2 Prétraitements et obtention du champ cohérent

L'interféromètre laser permet d'acquérir de manière automatique un grand nombre de signaux en différents endroits de la dalle. Avant de moyenner ces signaux pour obtenir une évaluation du champ cohérent, on s'assure que l'ensemble des signaux enregistrés correspond bien

à des réalisations “équivalentes” du désordre. Notamment, la distance source-récepteur doit être la même pour chaque point d'acquisition. Les dalles ayant été polies sur leurs faces principales, leur épaisseur (12 ou 6 cm) est à peu près constantes à $\pm 0,5$ mm près. Il convient par contre de s'assurer que l'onde émise par le transducteur est bien une onde plane, et que la réception se fait bien en champ lointain vis-à-vis des transducteurs.

3.2.2.a Modélisation du rayonnement des transducteurs

Pour cela, le comportement des transducteurs est étudié par un calcul analytique rapide. Le calcul exact des modes de vibration d'une pastille piézoélectrique prenant en compte les conditions de bord (support dans lequel la pastille est enchâssée, et “backing” à l'arrière), et le couplage avec le milieu ambiant (béton) demande des moyens de simulations très poussés. On se contentera ici d'une approximation de type piston en milieu semi-infini, élastique, isotrope, et homogène.

Le transducteur est assimilé à un piston circulaire plan dont tous les points vibrent en phase. Le calcul est tiré de Royer and Dieulesaint [1996] et est détaillé en annexe D.

Champ proche. Les effets de champ proche des transducteurs se manifestent pour des distances de propagation inférieures à la distance de Fresnel z_m, définie par la relation suivante :

$$z_m = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} \simeq \frac{a^2}{\lambda} \qquad \text{pour} \qquad a \gg \lambda, \tag{3.29}$$

où a est le rayon de la pastille piézoélectrique du transducteur et λ la longueur d'onde émise. La longueur d'onde la plus courte étudiée donnera la limite du champ proche correspondant aux transducteurs dans le conditions de l'étude. Pour les deux transducteurs utilisés, la fréquence la plus élevée que l'on va étudier est 700 kHz, ce qui correspond grossièrement à une longueur d'onde $\lambda_m = 5$ mm. La distance de Fresnel correspondante est alors de environ $z_m = 40$ mm. Les mesures à travers les dalles de 6 cm et 12 cm se situeront donc bien toutes en champ lointain par rapport à la source.

Diagramme de rayonnement. Les calculs des diagrammes de rayonnement des transducteurs détaillés en annexe D montrent que l'onde émise par ces transducteurs n'est pas assimilable à une onde plane. En particulier, l'amplitude à une distance donnée de la source (correspondant à l'épaisseur des dalles) n'est pas uniforme, et les signaux enregistrés auront des petits décalages temporels.

3.2.2.b Corrections apportées aux signaux

Amplitudes spectrales. On corrige les variations d'amplitude du spectre FFT de chaque signal fréquence par fréquence à partir de la réponse en amplitude théorique des transducteurs en champ lointain pour chaque fréquence étudiée. Les signaux enregistrés les plus aux bords de l'ombre des transducteurs (en extrémité des lignes de balayage du laser) ont les écarts les plus importants par rapport aux signaux enregistrés au centre. On élimine de l'étude les signaux nécessitant une correction d'un facteur supérieur à 2.

On voit en figure 3.6 un exemple du résultat de la correction d'amplitude sur le maximum de l'amplitude des signaux enregistrés le long d'une ligne de balayage pour la dalle de 6 cm d'épaisseur. On voit que les points les plus extrêmes ont une correction trop importante, le calcul du facteur de correction étant trop simplifié. On élimine donc ces points pour ne garder que ceux situés entre 5 et 35 mm sur cette figure.

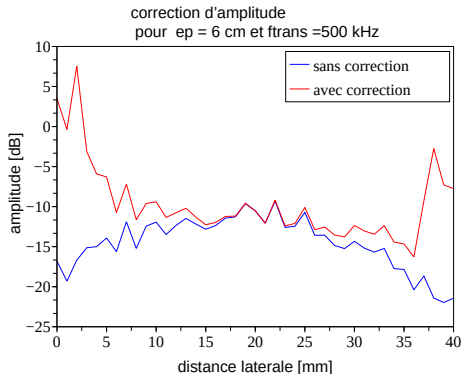
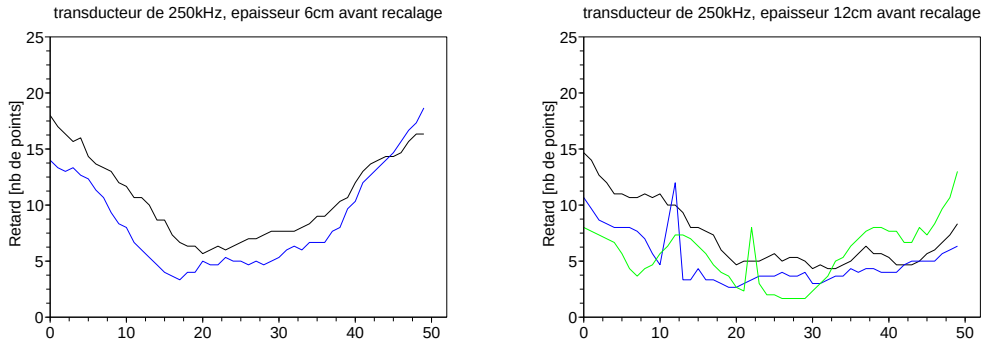


Fig. 3.6 – Exemple du résultat de la correction d'amplitude pour la dalle de 6 cm d'épaisseur et le transducteur de 500 kHz. On représente l'amplitude maximale du signal avant et après correction (la correction a cependant été réalisée fréquence par fréquence).

Décalages temporels. Les signaux enregistrés présentent un décalage temporel du fait de la directivité des transducteurs. On peut évaluer ces décalages entre les signaux par intercorrélation. Des exemples sont donnés en figure 3.7.



(a) dalle de 6 cm (b) dalle de 12 cm

Fig. 3.7 – Décalages des signaux en nombre d'échantillons par rapport au signal le plus rapide dans du béton. Les décalages sont évalués par intercorrélation. Chaque courbe correspond différentes positions du transducteur sur la dalle.

Les décalages présentés en figure 3.7 sont présentés en nombre d'échantillons. La fréquence d'échantillonnage étant de 12,5 MHz, la période d'échantillonnage est de 8.10^{-8} s. Ici, 25 échantillons correspondent alors à 2 μs. On constate que les ordres de grandeur de ces décalages correspondent bien à ceux calculés théoriquement en annexe D (figures D.7(a-b)).

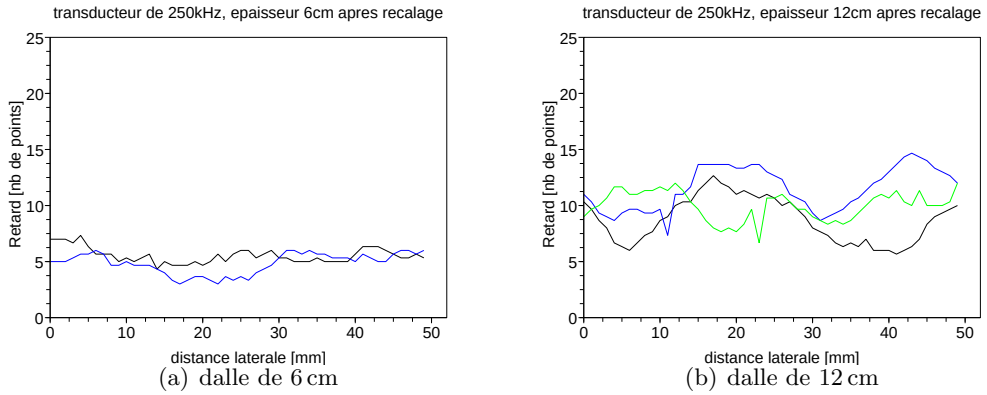
Dans le cas de la dalle de 12 cm, l'arrivée du premier front a une forme moins marquée que dans le cas de la dalle de 6 cm. Les effets de diffusion multiple sont plus importants et perturbent le front d'onde principal, les fronts sont très fluctuants d'une position de transducteur à l'autre.

Recalages temporels. Afin d'effectuer des moyennes des signaux et dissocier le champ cohérent du champ incohérent, il faut corriger les décalages entre les traces. Les origines de ces décalages sont de différents types ; des retards dûs au protocole expérimental (défauts de planéité et de parallélisme de la dalle, défauts de collage des transducteurs), les décalages dûs à la directivité des transducteurs, qui sont les plus importants ici, et des retards inhérents au phénomène de diffusion qui modifie légèrement la vitesse de propagation des ondes.

On souhaite corriger les décalages dûs aux défauts de la dalle et des collages, mais conserver

les décalages dûs aux effets de diffusion. Or les effets de diffusion sont importants à hautes fréquences, et très faibles aux fréquences plus faibles (les longueur d'onde sont supérieures aux dimensions des hétérogénéités). On va donc corriger uniquement les décalages présents aux basses fréquences, qui ne sont théoriquement pas dûs à la diffusion.

Le béton étudié possède des granulats allant jusqu'à 1 - 1,5 cm de diamètre. On choisit de filtrer les signaux entre 50 et 150 kHz, ce qui correspond à des longueurs d'onde supérieures à 2,5 cm pour les ondes de compression. Dans cette plage de fréquences on suppose que les décalages observés sont dûs aux transducteurs et aux défauts de la dalle. On recale ensuite les traces non filtrées à partir des décalages calculés dans la bande de fréquences 50-150 kHz. Les



(a) dalle de 6 cm (b) dalle de 12 cm

FIG. 3.8 – Effets du recalage pour le transducteur de 250 kHz. On évalue les décalages résiduels entre les signaux par intercorrélation.

décalages résiduels (Fig. 3.8) sont uniquement dûs aux effets de la diffusion multiple. Ils sont négligeables pour la dalle de 6 cm ; ils sont au plus de 3 échantillons, soit 0,24 μs. Pour la dalle de 12 cm, ces décalages sont un peu plus importants (jusqu'à 6 échantillons temporels, ce qui correspond à 0,5 μs), et il y a plus de variations entre les signaux. Tous ces décalages dûs à la diffusion multiple restent très peu importants.

3.2.2.c Évaluation du champ cohérent

Une fois tous les prétraitements et les corrections appliquées aux signaux enregistrés, on peut évaluer le champ cohérent en moyennant ces signaux. On dispose d'environ 400 signaux par dalles. Ces 400 signaux ne correspondent pas à proprement parler à 400 réalisations indépendantes du désordre, car le pas d'acquisition des signaux est de 1 mm seulement. On considère que les réalisations du désordre sont indépendantes lorsque deux signaux sont acquis avec un espacement d'au moins une demi longueur d'onde incidente. Cependant, ces 400 signaux par dalle forment un ensemble suffisant pour évaluer le champ cohérent avec précision.

La figure 3.9 présente un signal individuel en (a) et le champ cohérent obtenu après moyennage spatial en (b), pour des mesures à travers la dalle de béton de 12 cm d'épaisseur. On voit que la proportion de champ incohérent dans le signal (a) est très importante. Sur le champ cohérent (b), les contributions incohérentes ont disparu, le signal comporte un écho principal vers 30 μs correspondant à l'onde balistique, puis des échos secondaires. L'écho secondaire le plus important (vers 100 μs) correspond à un aller-retour de l'onde qui se réfléchit sur les deux faces de la dalle. Un autre écho situé vers 50 μs correspond à une vibration du transducteur qui émet des impulsions secondaires après avoir émis l'impulsion principale.

Des exemples de signaux mesurés sur une dalle de mortier sont présentés en figure 3.10. On y voit en (a) un signal individuel, et en (b) le champ cohérent. On constate que dans le mortier le champ incohérent est très faible et qu'il y a peu de différences entre un signal individuel et

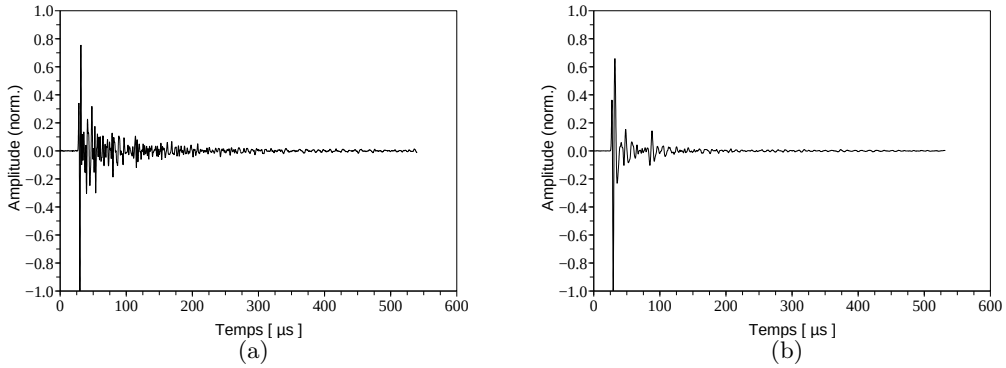


Fig. 3.9 – Dalle de béton de 12 cm d'épaisseur et transducteur de fréquence centrale 500 kHz : signal temporel filtré entre 100 et 600 kHz. L'amplitude des signaux est normalisée. (a) un signal particulier pris au hasard, (b) champ cohérent, moyenné sur 400 signaux.

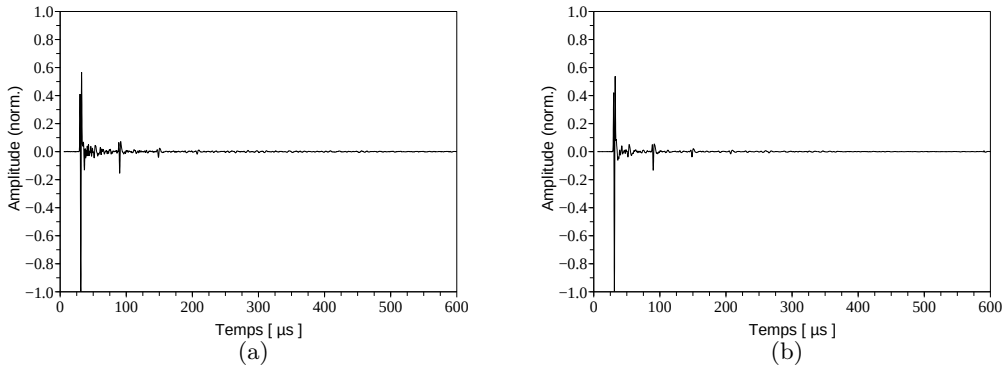


Fig. 3.10 – Dalle de mortier de 12 cm d'épaisseur et transducteur de fréquence centrale 500 kHz : signal temporel filtré entre 100 et 600 kHz. (a) un signal particulier pris au hasard, (b) champ cohérent, moyenné sur 400 signaux.

le champ cohérent. Tout comme dans le béton, on distingue l'onde balistique, des impulsions secondaires émises par le transducteur, et enfin plusieurs échos correspondant à des aller-retour de l'onde entre les faces de la dalle.

3.2.3 Comparaison des énergies du champ cohérent et incohérent

3.2.3.a Choix des bandes de fréquences

Des bandes de fréquences sont choisies pour l'étude des paramètres du champ cohérent en fonction de la fréquence. On considère des bandes de fréquences du type $[f_c - df/2,\ f_c + df/2]$, où f_c est la fréquence centrale de la bande et où la largeur de bande df représente 25% de la fréquence centrale. Les différentes bandes se recouvrent partiellement. Dans la suite, ces bandes sont repérées par leur fréquence centrale.

3.2.3.b Intensité des champs cohérent et incohérents

Les signaux sont filtrés dans chaque bande de fréquences considérée avec des filtres de Butterworth d'ordre 3, dont les caractéristiques sont présentées dans l'annexe C. Plus la bande passante de ces filtres est étroite, plus la réponse impulsionnelle présente des oscillations et est étalée dans

le temps, la phase du filtre n'étant pas linéaire dans toute la gamme de fréquences. Cela va poser des problèmes pour visualiser les allures temporelles des signaux une fois filtrés, mais l'intensité des signaux dans la bande passante du filtre est conservée. Les études de l'atténuation des signaux vont porter sur l'intensité de ceux-ci et non leur allure temporelle.

Le champ cohérent $s_{coh}(t)$ dans chaque bande de fréquences est déterminé en calculant la moyenne de tous les signaux filtrés $s_n(t)$. On peut déduire la partie incohérente $s_{n,inc}(t)$ de chaque trace en soustrayant la partie cohérente.

$$s_{coh}(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} s_n(t) \tag{3.30}$$

$$s_{n,inc}(t) = s_n(t) - s_{coh}(t) \tag{3.31}$$

On détermine alors dans chaque bande de fréquences l'intensité du champ cohérent I_{coh}, l'intensité moyenne du champ incohérent I_{inc}, ainsi que l'intensité totale moyenne I_{tot} des signaux :

$$I_{coh} = \sum_{t} s_{coh}^2(t) \tag{3.32}$$

$$I_{inc} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{t} s_{n,inc}^2(t)\right) \tag{3.33}$$

$$I_{tot} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{t} s_{n}^2(t)\right) \tag{3.34}$$

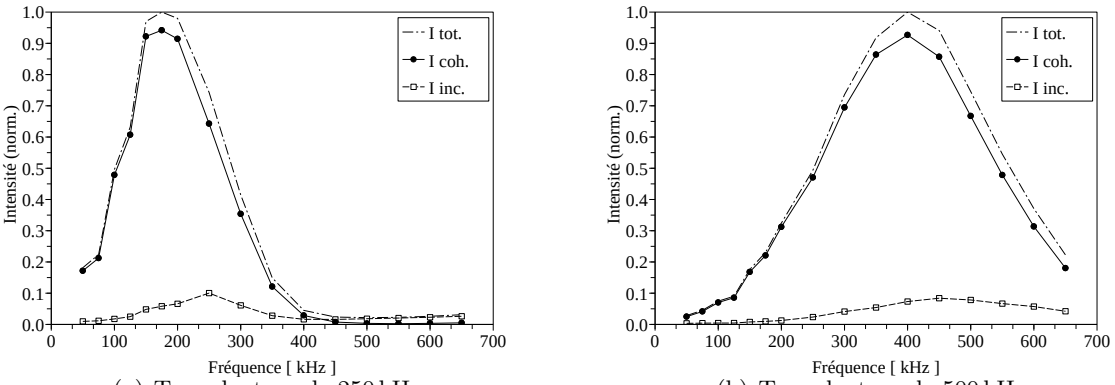
On suppose ici que l'intensité incohérente I_{inc} définie ci-dessus est égale à l'intensité du champ incohérent réellement présent dans le matériau. En pratique, l'interféromètre laser utilisé ne mesure que le déplacement normal à la surface de la dalle. Le champ incohérent présent dans la dalle est composé d'une multitude de trains d'ondes se propageant dans toutes les directions, pouvant avoir subi un très grand nombre d'interactions avec les hétérogénéités, et éventuellement des conversions de modes entre les ondes de compression et de cisaillement. Le déplacement particulaire associé au passage de l'onde incohérente peut donc se faire suivant toutes les directions. Les déplacements particulaires tangentiels à la surface de la dalle n'étant pas détectés par l'interféromètre laser, l'intensité I_{inc} mesurée ne correspond pas exactement à l'intensité incohérente en un point du matériau. Dans la suite on fera tout de même l'approximation que l'intensité incohérente mesurée correspond à l'intensité incohérente réelle au point de mesure.

3.2.3.c Cas du mortier

Les intensités cohérentes, incohérentes et totales mesurées à travers la dalle de mortier de 12 cm d'épaisseur sont présentées en figure 3.11 pour chaque transducteur utilisé. La proportion d'intensité incohérente est négligeable quelle que soit la fréquence dans le cas du mortier. Le matériau peut donc être considéré comme étant homogène pour les fréquences étudiées, le champ mesuré en un point particulier est assimilable au champ cohérent.

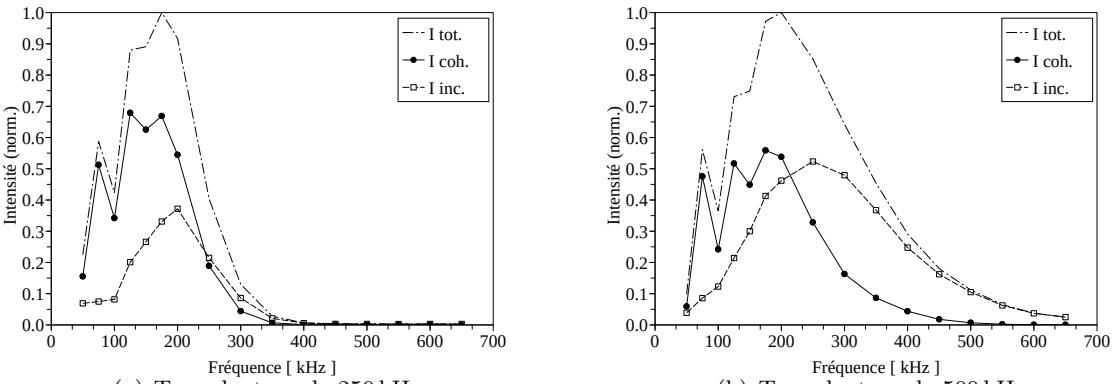
3.2.3.d Cas du béton

L'étude dans le cas du béton est présentée en figure 3.12. Quel que soit le transducteur étudié, le champ cohérent domine pour les fréquences inférieures à 250 kHz et est largement prépondérant pour les fréquences inférieures à 100 kHz. Entre 100 et 250 kHz, il représente environ les 2/3 de l'intensité totale, cette proportion diminuant avec la fréquence. Enfin, au delà de 250 kHz, la proportion de champ incohérent devient supérieure à celle du champ cohérent. Dans le cas du transducteur de fréquence centrale 500 kHz, qui envoie de l'énergie jusqu'à 700 kHz, le champ cohérent devient négligeable pour les fréquences supérieures à 450-500 kHz, les effets



(a) Transducteur de 250 kHz (b) Transducteur de 500 kHz

Fig. 3.11 – Intensités des champs cohérents, incohérents et du champ total dans chaque bande de fréquences, pour la dalle de mortier de 12 cm d'épaisseur.



(a) Transducteur de 250 kHz (b) Transducteur de 500 kHz

Fig. 3.12 – Intensités des champs cohérents, incohérents et du champ total dans chaque bande de fréquences, pour la dalle de béton de 12 cm d'épaisseur.

de la diffusion multiple deviennent très importants et le champ total n'est plus composé que de champ incohérent.

On voit donc expérimentalement que plus la fréquence augmente, plus les longueurs d'onde vont être petites par rapport à la taille des hétérogénéités, et plus elles seront soumises à la multidiffusion. Le champ incohérent est quasiment inexistant dans le mortier ($D_{max} = 1\,\text{mm}$) tandis qu'il devient progressivement prépondérant lorsque la longueur d'onde diminue et devient comparable à la dimension des hétérogénéités. L'étude des rapports entre les intensités cohérentes, incohérentes et totales fournit un bon indicateur du degré d'hétérogénéité du matériau et de la présence du phénomène de diffusion multiple.

3.2.4 Paramètres de propagation : étude du champ cohérent

3.2.4.a Vitesse effective des ondes de compression

L'épaisseur exacte des dalles de béton a été mesurée à $\pm 0,5\,\text{mm}$ près au pied à coulisse en plusieurs endroits. On peut alors déterminer la vitesse des ondes de compression en pointant le temps d'arrivée de l'onde balistique et en estimant le temps de propagation à travers la dalle.

Le temps d'arrivée du signal est choisi comme l'instant où l'amplitude du signal dépasse le

niveau de bruit d'un facteur 4, ce qui permet de détecter le signal même si le bruit est très important et avec une forte variance. Ces pointés de temps de trajet peuvent être réalisés sur chaque signal enregistré (après recalages et corrections), ce qui permet d'obtenir une moyenne de vitesse $\overline{v_p}$ et un écart-type σ_p à partir des résultats de tous les signaux sur une dalle donnée et avec un transducteur donné. On peut également estimer la vitesse effective $v_{p,e}$ en pointant directement le temps d'arrivée de l'onde cohérente obtenue en 3.2.2.c, la vitesse effective évaluée ne permet pas d'obtenir un écart-type. Les résultats obtenus sur la dalle de 12 cm sont résumés dans le tableau 3.2.

TAB. 3.2 – Estimation des vitesses des ondes de compression en $m.s^{-1}$ dans le béton ou le mortier sur les dalle de 12 cm d'épaisseur.

	Mortier		**Béton**	
	moyenne des vitesses individuelles [$m.s^{-1}$]	vitesse effective [$m.s^{-1}$]	moyenne des vitesses individuelles [$m.s^{-1}$]	vitesse effective [$m.s^{-1}$]
Transducteur 250 kHz	$\overline{v_p} = 4060$ $\sigma_p = 15$	$v_{p,e} = 4060$	$\overline{v_p} = 4460$ $\sigma_p = 60$	$v_{p,e} = 4590$
Transducteur 500 kHz	$\overline{v_p} = 4080$ $\sigma_p = 10$	$v_{p,e} = 4075$	$\overline{v_p} = 4500$ $\sigma_p = 70$	$v_{p,e} = 4650$

Pour le mortier, les valeurs $\overline{v_p}$ obtenues en faisant la moyenne des vitesses de chaque signal enregistré sont très proches de la valeur $v_{p,e}$ estimée à partir du champ cohérent, le champ incohérent étant très faible dans le mortier. On obtient donc une valeur de vitesse des ondes P dans le mortier de environ 4060 $m.s^{-1}$ avec une très bonne précision.

Les valeurs de vitesse mesurées sur le béton sont plus élevées que dans le mortier de environ 400 $m.s^{-1}$. La proportion de champ incohérent étant importante dans le béton, la vitesse moyenne $\overline{v_p}$ estimée à partir de chaque signal possède un écart-type σ_p assez important de l'ordre de 60-70 $m.s^{-1}$. De plus, la valeur de vitesse estimée à partir du champ cohérent est très supérieure de plus de 100 $m.s^{-1}$ à la vitesse moyenne mesurée, ce qui montre l'importance de l'évaluation du champ cohérent qui apporte des informations différentes de celles apportées par l'étude de signaux individuels correspondant à des configurations particulières du désordre.

Dans tous les cas, les valeurs de vitesses évaluées avec le transducteur centré en 250 kHz sont plus faibles que celles évaluées avec le transducteur de 500 kHz. Cela peut s'expliquer par une dispersion des ondes, les fréquences les plus élevées se propageant légèrement plus rapidement que les fréquences basses. Cela est en concordance avec les résultats des simulations analytiques précédentes (par exemple en figure 3.2). Cependant, les deux transducteurs utilisés sont large bande et leurs bandes passantes se recouvrent en grande partie. De plus, les écarts ne sont pas très significatifs compte tenu des écarts-types associés aux valeurs.

3.2.4.b Amortissement

Libre parcours moyen. Dans le cas de mesures en transmission à travers deux dalles d'épaisseur différentes (6 cm et 12 cm), on détermine souvent l'amortissement des ondes cohérentes en évaluant leur libre parcours moyen d'extinction dans le matériau. Ce paramètre décrit la longueur caractéristique que l'onde peut parcourir dans le matériau avant d'être amortie. On considère qu'au bout de quelques parcours moyens (typiquement 4 ou 5) l'onde cohérente est totalement amortie.

Le libre parcours moyen d'extinction $l_{ext.}$ est défini par la distance que doit parcourir l'onde pour que son intensité soit divisée par e. Pour la propagation d'une onde plane entre les abscisses

z_1 et z_2, on peut écrire :

$$I_{coh}(z_2, f) \;=\; I_{coh.}(z_1, f) \exp\left(-\frac{z_2 - z_1}{l_{ext.}(f)}\right), \tag{3.35}$$

où $I_{coh}(z, f)$ représente l'intensité spectrale de l'onde cohérente, correspondant au carré de l'amplitude spectrale du champ cohérent à l'abscisse z et à la fréquence f. On peut alors déterminer une valeur de $l_{ext.}$ en fonction de la fréquence f en utilisant les amplitudes spectrales obtenues par un algorithme FFT des signaux enregistrés sur les dalles d'épaisseurs différentes.

Ce libre parcours moyen d'extinction peut être lié au facteur d'atténuation α par la relation :

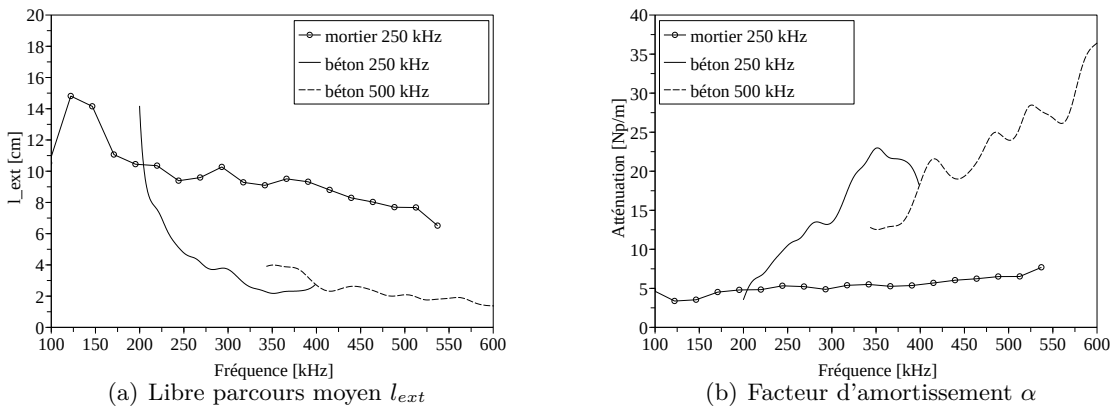
$$\alpha(f) = \frac{1}{2l_{ext.}} \tag{3.36}$$

Amortissement géométrique. La définition de $l_{ext.}$ ci-dessus est valable pour une onde plane d'extension infinie. Dans le cas des mesures expérimentales, il convient de corriger l'amortissement géométrique. Les calculs théoriques du rayonnement des transducteurs effectués en annexe D peuvent permettre de déterminer le rapport des amplitudes rayonnées théoriquement dans l'axe du transducteur pour les distances 6 cm et 12 cm et pour différentes fréquences.

Dans la bande de fréquences d'étude, ce rapport théorique vaut en moyenne 1,94 (avec une écart-type de 0,03). Cela est donc très proche d'une décroissance en $1/z$ valable pour l'approximation de champ lointain (cette décroissance en $1/z$ donnerait un facteur 2 entre 6 et 12 cm).

Estimations de l'amortissement. On peut donc estimer les libres parcours moyens d'extinction et les coefficients d'amortissement en fonction de la fréquence pour les dalles de béton et de mortier en comparant les rapports des intensités spectrales des signaux enregistrés à travers les dalles d'épaisseurs différentes. L'utilisation des deux transducteurs de fréquences centrales 250 kHz et 500 kHz permet de couvrir une large bande de fréquences allant de 100 à 600 kHz.

Cependant un problème est survenu lors de la mesure sur la dalle de mortier de 6 cm d'épaisseur avec le transducteur de 500 kHz. Ce problème, très vraisemblablement dû au collage du transducteur source sur la dalle, a pour conséquence que les signaux enregistrés ont une amplitude très faible, qui ne leur permet pas d'être comparés aux signaux obtenus à travers la dalle de 12 cm. Dans le cas du mortier, on se contente donc des résultats obtenus avec le transducteur de 250 kHz, fournissant des informations jusqu'à environ 500 kHz.



(a) Libre parcours moyen l_{ext} (b) Facteur d'amortissement α

Fig. 3.13 – Évaluation de l'amortissement effectif des ondes de compression sur les dalles de béton de mortier en fonction de la fréquence.

Les résultats en libres parcours moyens d'extinction ainsi qu'en coefficients d'amortissement obtenus sont présentés en figure 3.13. L'amortissement dans le béton est environ 4 fois plus important que dans le mortier. Les formulations du mortier et du béton ne différent que par la présence des granulats.

L'amortissement dans le mortier est très faible. Il a pour origine la porosité du béton, la diffusion par les grains de sable ($D_{max} = 1\,\text{mm}$), ainsi que l'absorption du matériau. Le comportement du facteur d'amortissement est linéaire avec la fréquence. Dans la bande de fréquences considérée, le comportement du mortier est celui d'un matériau homogène viscoélastique à Q constant.

La présence des granulats ($D_{max} = 15\,\text{mm}$) introduit une atténuation supplémentaire du champ cohérent, due au phénomène de diffusion multiple. La valeur du libre parcours moyen est de l'ordre de 2-3 cm au delà de 300 kHz. L'onde ayant traversé la dalle de 12 cm d'épaisseur aura donc parcouru environ 4 à 6 libres parcours moyen. Les valeurs du coefficient d'atténuation ont un comportement globalement linéaire avec la fréquence en dessous de 300 kHz, puis présentent des fluctuations, causées à la fois par les imprécisions de mesure et par la diffusion multiple.

3.3 Potentiel de l'étude de l'intensité incohérente dans le béton

3.3.1 Présentation

La diffusion multiple des ondes sur les granulats génère un champ incohérent important dans le béton. Ce champ incohérent est en général considéré comme du bruit et éliminé pour pouvoir étudier le champ cohérent et le milieu effectif. Il contient néanmoins des informations sur le matériau, étant composé de trains d'onde multiplement diffusés par les hétérogénéités et s'étant propagés sur de grandes distances dans le matériau. L'étude de l'intensité incohérente ou *coda* va être traitée dans cette partie en utilisant l'approximation de diffusion, décrivant la décroissance temporelle de l'intensité incohérente moyenne.

On rappelle ici que l'intensité incohérente I_{inc} est mesurée à partir des signaux expérimentaux ne tenant compte que des déplacements normaux à la surface de la dalle, l'interféromètre laser ne pouvant pas mesurer les déplacements tangentiels. Le modèle de l'approximation de diffusion présenté dans cette partie porte sur l'intensité du champ incohérent en un point du matériau (composantes normale et tangentielle), que l'on assimile à l'intensité incohérente mesurée.

3.3.2 L'approximation de diffusion

3.3.2.a L'équation de diffusion

L'intensité incohérente en milieu hétérogène évolue suivant un processus de diffusion, au cours duquel on fait l'hypothèse que l'énergie diffuse dans tout l'espace de manière isotrope. Ce phénomène de diffusion est analogue aux lois de Fourier (pour la diffusion de la chaleur) ou de Fick (pour la diffusion des particules). L'équation de diffusion dérive de l'équation des transferts radiatifs [Lagendijk and van Tiggelen, 1996; Margerin, 1998; Larose, 2005].

En milieu purement élastique, l'équation de diffusion s'écrit [Barton, 1989] :

$$D\Delta I(r,t) - \frac{\partial}{\partial t} I(r,t) = I_0 \delta(r)\delta(t), \tag{3.37}$$

Pour les milieux atténuants, on ajoute en général un terme dissipatif ξ à l'équation 3.37, qui prend alors la forme suivante [Tourin et al., 2000] :

$$D\Delta I(r,t) - \frac{\partial}{\partial t} I(r,t) - \xi I(r,t) = I_0 \delta(r)\delta(t), \tag{3.38}$$

où $I(r,t)$ représente l'intensité du signal à la position r et à l'instant t. Cette équation possède 3 paramètres libres, dépendant de la fréquence. Ce sont :

- le coefficient de diffusion D en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$,
- un coefficient d'amortissement ξ, en s^{-1}. Ce paramètre d'amortissement ne tient pas compte de l'amortissement dû à la diffusion multiple mais uniquement des autres effets dissipatifs. Il a donc un potentiel intéressant pour étudier les dégradations du mortier.
- et I_0 qui représente l'intensité en $r = 0$ et $t = 0$. Ce terme est indépendant des propriétés du matériau.

Ce régime de diffusion se met en place au bout d'un certain temps de propagation (donc à une certaine distance de la source). Les ondes multiplement diffractées ont alors perdu leurs directions initiales de propagation, et l'énergie est supposée diffuser de manière isotrope dans toutes les directions de l'espace. L'équation décrit la progression d'un *halo* d'énergie diffuse dans le matériau. Le paramètre D, homogène à une surface parcourue par unité de temps, représente la vitesse de progression de ce *halo* diffusif, et ξ représente l'amortissement du *halo*.

3.3.2.b Bibliographie

Des auteurs ont estimé les valeurs des paramètres D et ξ pour du béton à partir de résultats numériques ou expérimentaux en ajustant des solutions de cette équation aux mesures. Anugonda et al. [2001] utilisent une solution 1D en milieu infini. Ramamoorthy et al. [2004] utilisent eux une solution 2D avec des conditions de Neumann au bord (Contraintes normales nulles). Becker et al. [2003] utilisent une solution 2D en milieu infini, sur un matériau cimentaire (billes de verre dans du mortier). Enfin, Schubert and Koelher [2004] appliquent une solution 1D sur des résultats de simulations numériques. Tous ces auteurs utilisent donc des solutions différentes de l'équation 3.38 (1D, 2D, milieu infini ou borné, etc.), dans des contextes différents (différentes distances source-récepteur, différents matériaux, etc.). Le tableau 3.3.2.b donne des ordres de grandeur obtenus par ces différents auteurs à la fréquence 500 kHz. Les valeurs de D données par ces auteurs, sont assez disparates. De plus, Anugonda et al. [2001] mentionnent l'importance de la fenêtre temporelle utilisée pour extrapoler les paramètres à partir des courbes expérimentales.

Tab. 3.3 – Ordres de grandeur des valeurs des paramètres D et ξ de l'équation de diffusion donnés par les auteurs de la littérature, pour une fréquence de 500 kHz.

Auteur	**matériau**	**solution**	**distance [cm]**	**D $[\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}]$**	**ξ $[\mathrm{s}^{-1}]$**
Anugonda et al. [2001]	béton	1D ∞	40	10	20000
Ramamoorthy et al. [2004]	béton	2D avec bords	6	12	15000
Becker et al. [2003]	mortier + billes de verre	2D ∞	30	5	25000
Schubert and Koelher [2004]	simulations	1D ∞	45	60	15000

3.3.2.c Solution en 3D pour un milieu infini

La solution de l'équation 3.38 en 3 dimensions et en milieu infini s'exprime sous la forme suivante [Barton, 1989] :

$$I(r,t) = \frac{I_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(\frac{-r^2}{4Dt}\right) \exp(-\xi t). \tag{3.39}$$

Cette solution est valable pour des distances de propagation suffisamment grandes (supérieures à quelques libres parcours moyens), ou pour des temps de progression suffisamment longs.

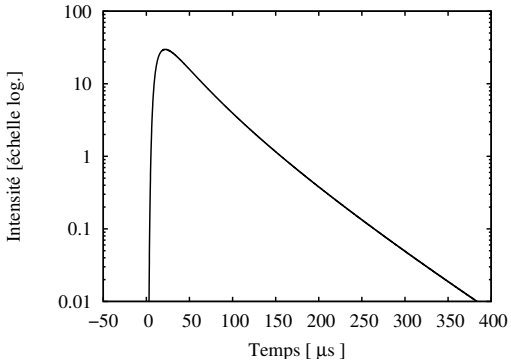


FIG. 3.14 – Exemple de l'allure de l'évolution temporelle de l'énergie suivant la solution 3D en milieu infini de l'équation de diffusion.

La courbe présentée en figure 3.14 montre un exemple d'évolution de l'énergie suivant la solution de l'équation de diffusion (Eq. 3.39). Cette courbe a été tracée avec les valeurs données au tableau 3.4.

TAB. 3.4 – Paramètres utilisés pour l'étude de l'équation (3.39).

D [m^2.s^{-1}]	100
ξ [s^{-1}]	15000
I_0	1
$r[cm]$	12

3.3.2.d Influence relative des termes de l'équation 3.39

La solution 3D de l'équation de diffusion (Eq. 3.39) est composée du produit de 3 termes :

$$\text{terme 1} \longrightarrow \frac{I_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \tag{3.40}$$

$$\text{terme 2} \longrightarrow \exp(\frac{-r^2}{4Dt}) \tag{3.41}$$

$$\text{terme 3} \longrightarrow \exp(-\xi t) \tag{3.42}$$

La figure 3.15 présente l'allure de chacun de ces termes en fonction du temps.

La constante de diffusion D n'apparaît que dans les 2 premiers termes. Ces termes 1 et 2 sont surtout importants au début du signal. Ils guident le temps d'arrivée du maximum de l'énergie. Ce temps d'arrivée est parfois assimilé au temps de *Thouless* qui correspond grossièrement au temps d'établissement du régime de diffusion [Larose, 2005]. Le terme 2, en $e^{-1/t}$ tend rapidement

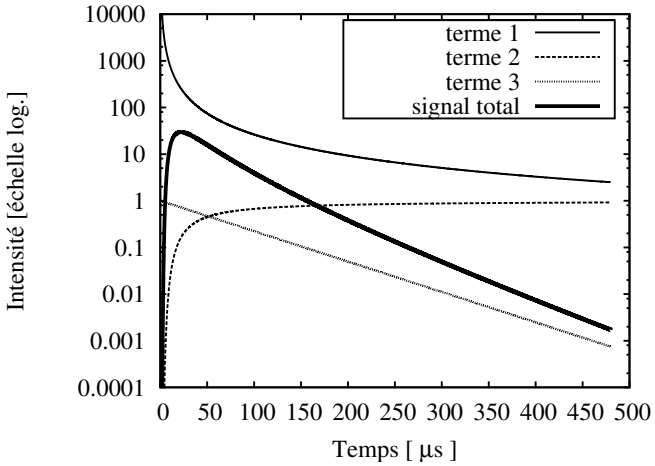
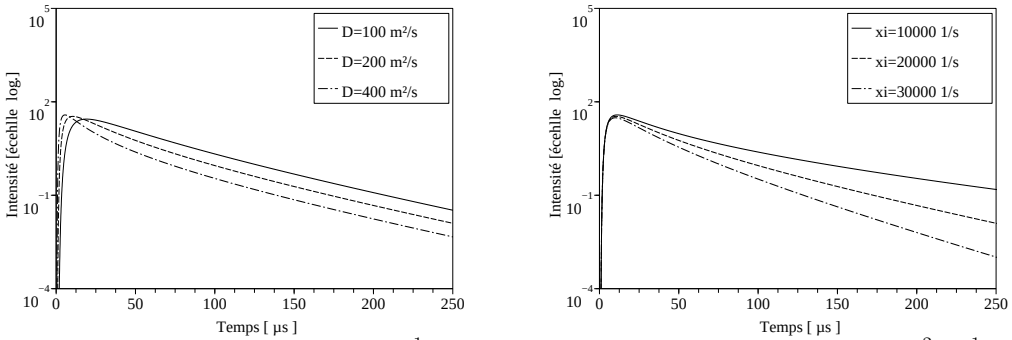


Fig. 3.15 – Allure des 3 termes de l'équation 3.39. La courbe en gras représente le produit des trois, correspondant à la solutions complète.

vers 1, tandis que le terme 1, en $t^{-3/2}$, tend lentement vers 0 avec une pente très faible pour les temps t longs. La constante D sera donc surtout prépondérante au début du signal.

À l'inverse, la constante d'atténuation ξ n'apparaît qu'au terme 3. Ce terme est proche de 1 au début du signal et influe peu, puis il guide la pente (en échelle logarithmique) de la fin du signal. Le paramètre ξ joue donc un rôle important surtout sur la fin du signal.

La solution de l'équation de diffusion décrit donc le comportement de l'intensité incohérente comme la progression d'un *halo* d'énergie, diffusant de manière isotrope dans tout l'espace. En milieu infini, l'amortissement de ce *halo* d'énergie est dû d'une part à l'amortissement géométrique en $t^{-3/2}$, l'énergie se répartissant dans tout l'espace, et d'autre part au phénomène d'absorption, caractérisé par la constante ξ.



(a) Influence de D ($\xi = 20000\text{s}^{-1}$) (b) Influence de ξ ($D = 200\ \text{m}^2/\text{s}^{-1}$)

Fig. 3.16 – Influence des paramètres D et ξ sur l'allure des courbes de décroissance de l'intensité incohérente. On a pris dans chaque cas $I_0 = 1$.

On peut voir l'influence des paramètres D et ξ sur l'allure générale des courbes de décroissance de l'intensité incohérente sur la figure 3.16. Les plages de variations de D et ξ considérées sont choisies volontairement larges afin d'observer la sensibilité de l'allure de ces courbes aux paramètres D et ξ. La sensibilité au paramètre D est relativement peu importante : de très fortes variations de D (de 100 à $400\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) ne produisent qu'une très faible modification de l'allure de la courbe. À l'inverse, la décroissance temporelle de l'intensité est sensible aux variations de

ξ. Ces deux courbes confirment que le paramètre de diffusion D joue plutôt un rôle au début du signal (montée et position du maximum de l'intensité) et que le paramètre d'atténuation ξ joue un rôle sur la fin du signal (pente de la courbe en échelle logarithmique).

3.3.2.e Solution en milieu borné

Les signaux expérimentaux à étudier sont tirés de mesures sur des dalles de béton parallélépipédiques. L'intensité incohérente est décrite comme un *halo* diffusif d'énergie qui progresse dans tout le matériau. On peut donc penser que la présence des bords des dalles va jouer un rôle non négligeable sur l'expansion de ce halo diffusif. Ramamoorthy et al. [2004] ont utilisé une solution de l'équation 3.38 en 2D en prenant en compte les bords (plaque) avec des conditions de Neumann (contraintes normales nulles aux bords de la dalle).

On va tenter ici d'utiliser la solution la plus proche de notre problème : une solution en 3D qui tient compte des bords des dalles. Pour une dalle parallélépipédique de dimensions L, l, et h, la solution de l'équation de diffusion est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} I(x,y,z,t) = I_0 \quad & \times \quad \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp(-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t)\right) \\ & \times \quad \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi y_0}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \exp(-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t)\right) \\ & \times \quad \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z_0}{h}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \exp(-D\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 t)\right) \\ & \times \quad \mathrm{e}^{-\xi t} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dans cette équation, les termes x_0, y_0 et z_0 représentent la position de la source sur la dalle, et x, y et z représentent la position du récepteur. Les dalles utilisées lors des mesures ont des dimensions de L=60 cm, l=60 cm, et h=12 cm. On considère dans cette étude que la source et le récepteur sont situés au centre de chacune des deux plus grandes faces des dalles, soit $\{x_0 = 0,3\,\mathrm{m}, y_0 = 0,3\,\mathrm{m}, z_0 = 0\,\mathrm{m}\}$, et $\{x = 0,3\,\mathrm{m}, y = 0,3\,\mathrm{m}, z = 0.12\,\mathrm{m}\}$.

Dans le cas de la solution de l'équation de diffusion sur un milieu borné, le terme d'amortissement géométrique en $t^{-3/2}$ n'est plus présent, contrairement à la solution en milieu infini 3.39. La solution 3.43 décrit la progression du *halo* d'énergie incohérente qui remplit progressivement tout le volume de la dalle disponible et reste confiné dans ce volume. La décroissance de l'intensité incohérente est due aux phénomènes d'absorption caractérisés par ξ. En l'absence de phénomènes d'absorption ($\xi = 0\,\mathrm{s}^{-1}$), l'intensité incohérente tendrait vers une constante.

Un point important pour le calcul de cette solution est le nombre de termes à considérer dans les séries qui contiennent en théorie une infinité de termes. Une étude de convergence est réalisée, pour différentes valeurs des paramètres D, ξ, et I_0, ainsi que pour différentes positions des sources et récepteurs, correspondants aux cas étudiés expérimentalement. Le nombre de termes à considérer dans les sommes dépend des dimensions de la dalle et des paramètres D et ξ. En moyenne les courbes ne changent plus à partir de 500 termes dans chaque série.

Deux exemples de résultats pour les configurations de mesures utilisées sur des dalles sont tracés en figure 3.17. La courbe correspondant à la solution en milieu infini est également représentée. On peut noter de fortes différences entre les solutions bornées et la solution non bornée. Plus les dimensions de la dalle sont petites, plus l'allure des courbes s'éloigne de l'allure en milieu infini. Tenter d'estimer les paramètres de diffusion et d'atténuation avec une solution correspondant à un milieu infini sur les résultats expérimentaux entraînera donc des biais sur ces valeurs. La prise en compte de la solution bornée est donc nécessaire.

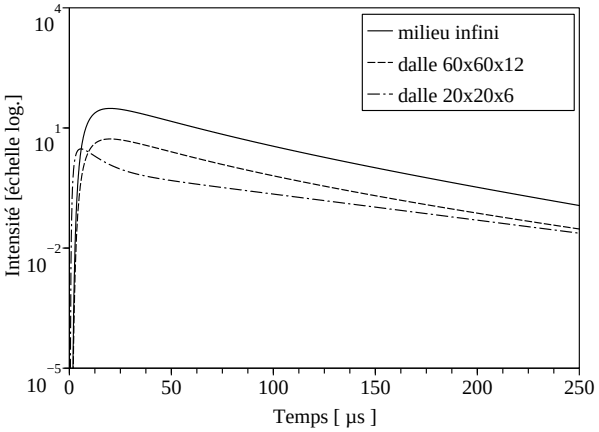


Fig. 3.17 – Comparaison des courbes de décroissance de l'énergie incohérente dans le cas infini, et pour deux configurations de mesures sur dalles. Les paramètres utilisés pour tracer ces courbes sont I_0=1, $D = 100\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ et $\xi = 15000\,\mathrm{s}^{-1}$.

3.3.3 Application aux signaux expérimentaux

3.3.3.a Allure des courbes expérimentales

On peut maintenant tenter d'estimer les valeurs des paramètres D et ξ à partir des résultats expérimentaux. La figure 3.18 présente l'allure des courbes de décroissance de l'intensité incohérente des signaux dans différentes bandes de fréquences. La dalle considérée est la dalle de béton de 12 cm d'épaisseur avec le transducteur de fréquence centrale 500 kHz.

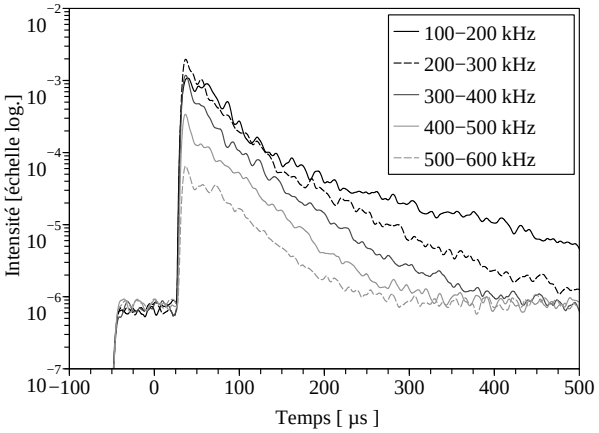


Fig. 3.18 – Allure des enveloppes de l'intensité incohérente issues des signaux expérimentaux sur la dalle de 12 cm d'épaisseur avec le transducteur de 500 kHz, dans différentes bandes de fréquences.

Ces courbes ont des allures différentes suivant la bande de fréquence considérée. En particulier, la partie utile du signal émergeant du niveau de bruit est plus courte lorsque la fréquence augmente, l'atténuation du matériau étant plus importante à hautes fréquences.

3.3.3.b Fonction coût

Choix de la fonction coût. Les paramètres D et ξ sont évalués en minimisant l'erreur entre l'estimateur (solution de l'équation 3.43 $I_{estim.}(t)$) et les courbes expérimentales $I_{exp.}(t)$. La fonction coût ϵ est choisie au sens des moindres carrés. Cependant, les variations des courbes $I_{estim.}(t)$ et $I_{exp.}(t)$ étant importantes, on pondère cette fonction coût par une moyenne glissante sur les données expérimentales avec une fenêtre de largeur $2\tau = 16\,\mu$s. Cette normalisation permet de ne pas sous-évaluer la fin du signal par rapport au début, les ordres de grandeur de l'écart entre le maximum et le minimum de la courbe étant de l'ordre de 10^3.

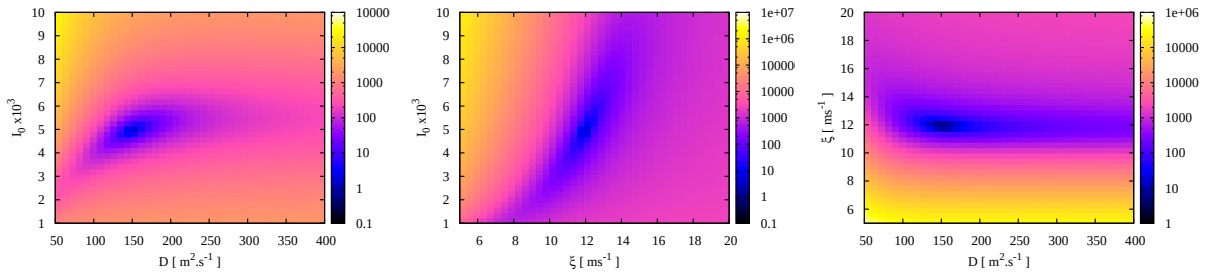
La fonction coût utilisé aura donc la forme suivante :

$$\epsilon = \sum_t \left(\frac{|I_{estim.}(t) - I_{exp.}(t)|}{\text{moyenne}(I_{exp.}(t-\tau < t < t+\tau))} \right)^2 \tag{3.44}$$

Le paramètre I_0 étant également un paramètre de l'équation 3.43, il doit également être estimé à partir des courbes expérimentales, bien qu'il soit indépendant des propriétés du matériau.

Étude de la fonction coût. Avant d'effectuer la minimisation de cette fonction coût sur les données expérimentales, les propriétés de cette fonction coût sont étudiées en considérant une solution analytique de l'équation 3.43 à la place de la mesure $I_{exp.}(t)$. Cette solution $I_{exp.}(t)$ est déterminée avec les paramètres $\tilde{I}_0$, $\tilde{D}$ et $\tilde{\xi}$. On calcule alors différentes valeurs de la fonction coût ϵ en faisant varier I_0, D et ξ pour le calcul de $I_{estim.}(t)$. On aura alors $\epsilon = 0$ lorsque le triplet $\{I_0, D, \xi\}$ sera égal à $\{\tilde{I}_0, \tilde{D}, \tilde{\xi}\}$. Une telle démarche est parfois appelée "crime inverse". Elle permet d'étudier les propriétés de la fonction coût choisie, notamment l'unicité de la solution du problème inverse, en s'affranchissant des erreurs et des incertitudes liées à la mesure. Cette étude n'a d'intérêt uniquement si les mesures obéissent au phénomène décrit par le modèle direct.

Les valeurs choisies pour simuler les données expérimentales $I_{exp.}(t)$, sont $\tilde{I}_0 = 5,10^{-3}$, $\tilde{D} = 150\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, et $\tilde{\xi} = 12000\,\text{s}^{-1}$. Ces valeurs ont été choisies à partir d'une étude préliminaire de façon à ce que leurs ordres de grandeur correspondent aux données expérimentales. L'allure de la fonction coût présentée en figure 3.19 suivant différentes coupes. Pour chaque coupe l'un des paramètres est fixé à sa valeur exacte et les deux autres sont laissés libres.



(a) pour $\tilde{\xi} = 12000\,\text{s}^{-1}$ fixé (b) pour $\tilde{D} = 150\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ fixé (c) pour $\tilde{I}_0 = 0,005$ fixé

FIG. 3.19 – Allure de la fonction coût autour de son minimum.

La fonction coût choisie possède un minimum unique. Ce minimum est plus ou moins bien marqué, par exemple si $\tilde{I}_0$ est connu et fixé, la valeur de $\tilde{\xi}$ correspondant au minimum pourra être retrouvée avec une assez bonne précision, mais l'incertitude restera grande sur la valeur de $\tilde{D}$, la "vallée" correspondant au minimum étant très allongée.

3.3.3.c Estimation de D et ξ expérimentale : problème inverse

Les courbes expérimentales présentées en figure 3.18 doivent être fenêtrées pour ne sélectionner que la partie du signal qui est supérieure au niveau de bruit. On a vu en section 3.3.2.d que le paramètre D contrôlait plutôt le début de la courbe et ξ la fin de la courbe, on choisit donc de sélectionner la partie de la courbe supérieure à 1,5 fois le niveau de bruit, pour avoir la plus grande longueur de signal utile. Ce choix du critère relatif au niveau de bruit pour le fenêtrage du signal est déterminant car le fait de considérer un signal trop court fait considérablement varier les valeurs des estimations de D et ξ.

La minimisation de la fonction coût ϵ est réalisée par un algorithme de type "quasi-Newton"[3]. Le principe de l'algorithme est le suivant : à partir d'un modèle *a priori*, c'est-à-dire un triplet $\{I_0, D, \xi\}$ de départ, l'algorithme détermine localement le gradient de la fonction ϵ et détermine un nouveau triplet $\{I_0, D, \xi\}$. Cette opération est répétée jusqu'à ce que la valeur du gradient soit suffisamment faible. Des bornes d'études peuvent être indiquées à l'algorithme pour limiter la recherche des paramètres dans une gamme de valeurs réaliste. Cet algorithme détermine donc un minimum local de la fonction coût. Les courbes 3.19 montrent que ce minimum est unique pour des données analytiques (crime inverse). Néanmoins dans le cas de signaux expérimentaux, l'opération de minimisation de ϵ est refaite à partir de plusieurs triplets *a priori* différents (une dizaine), afin de s'assurer que l'algorithme parvient toujours au même minimum.

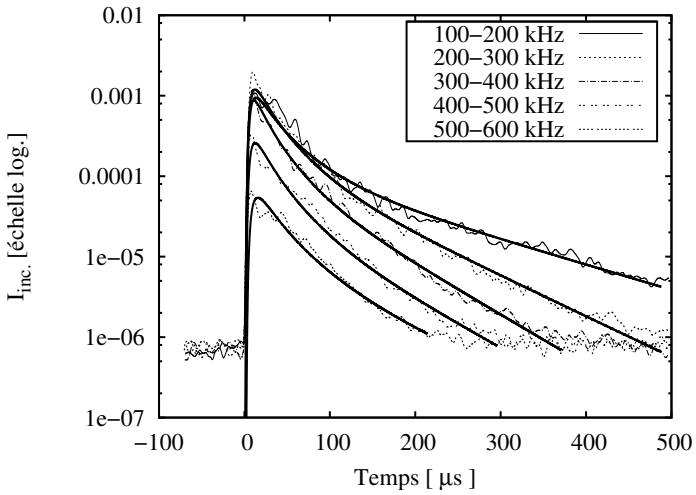


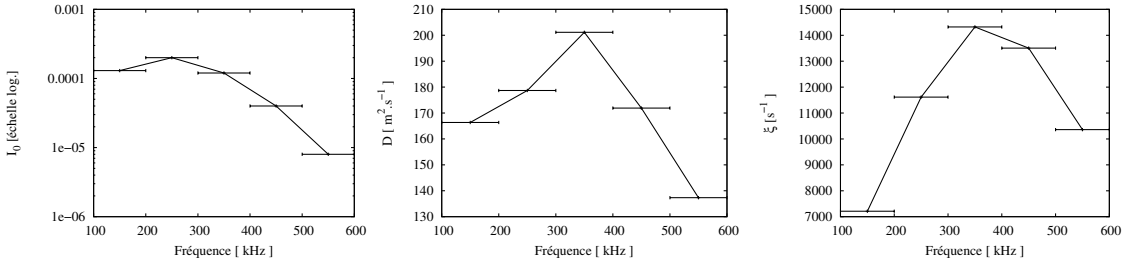
Fig. 3.20 – Résultats de l'inversion des courbes d'intensité incohérente à partir de l'équation 3.43 dans les différentes bandes de fréquences.

On représente les résultats de l'inversion dans différentes bandes de fréquences sur la figure 3.20. La solution de l'équation de diffusion en milieu borné tridimensionnel décrit convenablement l'évolution de l'intensité incohérente du signal et l'allure générale du signal est bien reconstruite.

Les valeurs des paramètres D et ξ estimées à partir des signaux expérimentaux sont présentées sur les figures 3.21. Le paramètre I_0 est également estimé par la méthode de minimisation bien qu'il soit indépendant des propriétés du matériau, les valeurs obtenues sont également représentées en figure 3.21. Les valeurs estimées pour I_0 présentent les mêmes variations avec la fréquence que la valeur du maximum des courbes $I_{inc.}(t)$ mais à un ordre de grandeur plus faible d'un facteur environ 10.

La valeur du coefficient de diffusion D est comprise entre 150 et 200 $m^2.s^{-1}$, et celle du coefficient d'amortissement ξ entre 7000 et 14000 s^{-1}. Cependant, différents auteurs [Anugonda

[3] subroutine E04JAF de la bibliothèque NAG Fortran Library.



(a) Intensité I_0 en $r = 0$ et $t = 0$ (b) Coefficient de diffusion D (c) Coefficient d'amortissement ξ

FIG. 3.21 – Estimations des paramètres de diffusion I_0, D et ξ à partir des mesures expérimentales dans différentes bandes de fréquences.

et al., 2001; Becker et al., 2003] ont montré que les courbes du coefficient de diffusion étaient décroissantes avec la fréquence, tandis que le coefficient ξ était linéairement croissant avec la fréquence. Ces deux comportements ne sont pas observés sur les figure 3.21.

On a vu que le paramètre D influait principalement sur l'allure du maximum de la courbe $I_{inc.}(t)$. De plus, la courbe 3.16 montre que de grandes variations de la valeur de D n'induisent qu'une faible modification de l'allure du maximum de la courbe. Ce paramètre est donc assez peu sensible et plus difficile à estimer dans le cas de signaux expérimentaux présentant des petites fluctuations. D'autre part, la sensibilité de l'allure de la courbe $I_{inc.}(t)$ au paramètre ξ est importante pour les temps les plus longs. Si le signal considéré est trop court, la précision de l'estimation de ξ sera plus faible. À cela s'ajoute le fait que l'approximation de diffusion est une approximation très forte, dérivant d'une simplification de la théorie des transferts radiatifs, qui est une théorie beaucoup plus complexe [Margerin, 1998]. Le cas étudié ne satisfait alors peut être pas entièrement les hypothèses de l'approximation de diffusion. La mesure de l'intensité incohérente étudiée ici ne tient par ailleurs pas compte des déplacements particulaires tangentiels à la surface, et ne correspond donc pas exactement à l'intensité incohérente réelle modélisée par l'approximation de diffusion ou le transfert radiatif.

3.3.4 Estimation de ξ par régression linéaire

3.3.4.a Intérêt

L'estimation des paramètres D et ξ à partir des données expérimentales reste délicate à réaliser en se basant sur la solution de l'équation de diffusion. Le coefficient de diffusion D notamment, qui influe relativement peu sur l'allure générale de la courbe, et du fait que le phénomène n'obéit pas exactement à une approximation de diffusion, est estimé avec une grande incertitude.

L'étude de la figure 3.16 montre que le paramètre ξ contrôle principalement la pente de la fin du signal. En effet la solution de l'équation de diffusion en milieu borné (Eq. 3.43) est principalement en $e^{-\xi t}$ pour les temps les plus longs. On peut alors effectuer une estimation du paramètre ξ seul en faisant une régression linéaire sur la fin du logarithme népérien des signaux $I_{inc}(t)$.

On s'affranchit alors des imprécisions obtenues lors de l'estimation simultanée de I_0, D, et ξ par minimisation de la fonction coût. L'estimation de ξ par régression linéaire est de plus plus facile à implémenter que la minimisation de la fonction ϵ. La valeur ainsi obtenues pourra par ailleurs être utilisée comme information supplémentaire pour contraindre la minimisation de ϵ.

3.3.4.b Étude de sensibilité à partir d'une solution simulée

On peut évaluer les erreurs relatives faites lors de l'estimation de ξ par régression linéaire de la fin du signal, en faisant une étude préliminaire basée sur des solutions analytiques de l'équation 3.43. Plusieurs difficultés sont à prendre en compte :

- la portion du signal sur laquelle effectuer la régression linéaire,
- la longueur totale du signal disponible émergeant du niveau de bruit,
- et enfin l'influence de la valeur du paramètre D.

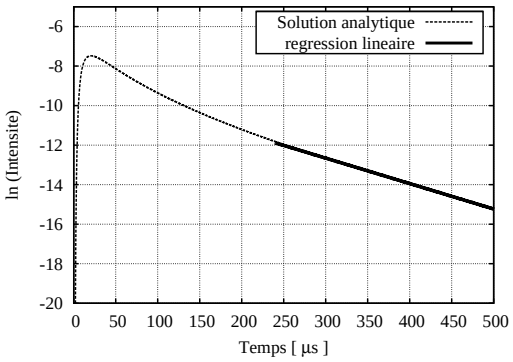
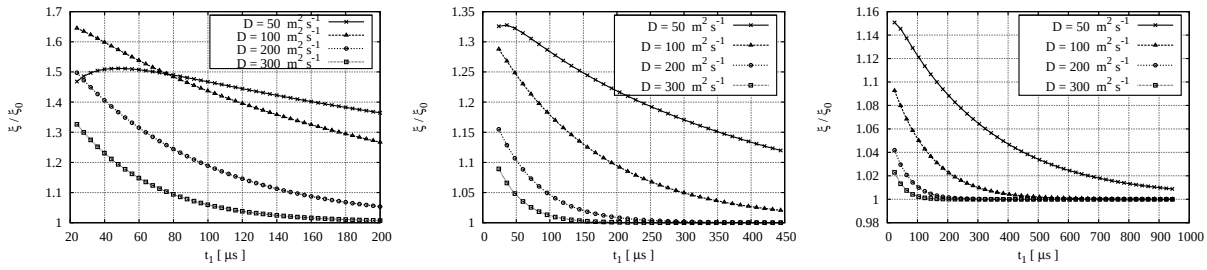


Fig. 3.22 – Exemple de régression linéaire entre les temps $t_1 = 240\,\mu$s et $t_2 = 500\,\mu$s sur l'intensité incohérente moyenne calculée analytiquement.

On a vu que l'allure de la courbe $I_{inc}(t)$ était en $e^{-\xi t}$ pour les temps t longs. La régression linéaire va être effectuée entre deux temps t_1 et t_2 (voir la Fig. 3.22). On choisira t_2 comme étant le temps le plus long disponible, c'est-à-dire la fin du signal utile. La positon du point de départ t_1 reste à évaluer pour obtenir la meilleure estimation de ξ.



(a) $t_2 = 250\,\mu$s (b) $t_2 = 500\,\mu$s (c) $t_2 = 1\,$ms

Fig. 3.23 – Estimations de ξ/ξ_0 par une régression linéaire sur la fin du signal analytique, pour différentes valeurs de D (50, 100, 200 et $300\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$). La valeur en abscisse représente le point de départ t_1 de la portion de signal considérée. On a pris $\xi_0 = 12000\,\mathrm{s}^{-1}$.

On représente en figure 3.23 les résultats de l'estimation de ξ par régression linéaire sur la fin du signal. On considère alors trois cas où la valeur du point final du signal utile est choisie à $t_2 = 250\,\mu$s, $500\,\mu$s, et 1 ms. On garde toujours un intervalle de temps $t_2 - t_1$ supérieur à $50\,\mu$s pour effectuer la régression linéaire. Dans chaque cas, on effectue une estimation de ξ par régression linéaire en faisant varier la valeur de t_1. L'influence de D est également considérée. On constate que l'estimation de ξ par régression linéaire est d'autant plus précise que le signal utile est long ; le terme en $e^{-\xi t}$ devient prépondérant dans l'équation 3.43. Dans tous les cas considérés, l'estimation de ξ est surévaluée. Si la longueur du signal utile est plus courte ($< 500\,\mu$s), les erreurs faites lors de l'estimation sont alors plus importantes lorsque la valeur de D est faible.

Pour $D = 50\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ et un signal utile de $250\,\mu$s cette erreur peut être de l'ordre de 50%.

Cette étude nous permet de prédire les erreurs qui seront commises lors de l'évaluation de ξ. Dans le cas des signaux expérimentaux (Fig. 3.18), la longueur de signal utile est comprise entre $250\,\mu$s et $500\,\mu$s. Le coefficient de diffusion a précedemment été estimé entre 150 et $200\,\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$. D'après les figures 3.23(a-b), l'estimation de ξ pourra donc être réalisée de manière assez précise (à moins de 5% près) sur les plus longs de ces signaux (dans les bandes de fréquences 100-200 kHz et 200-300 kHz). Par contre l'erreur sera importante (environ 20-30%) pour les plus hautes fréquences. L'étude précédente sur les courbes analytiques montre que l'estimation de ξ par régression linéaire surévalue la valeur recherchée. Les valeurs obtenues avec cette méthode fournissent donc un majorant pour le coefficient d'amortissement ξ.

3.3.4.c Essai sur des signaux expérimentaux

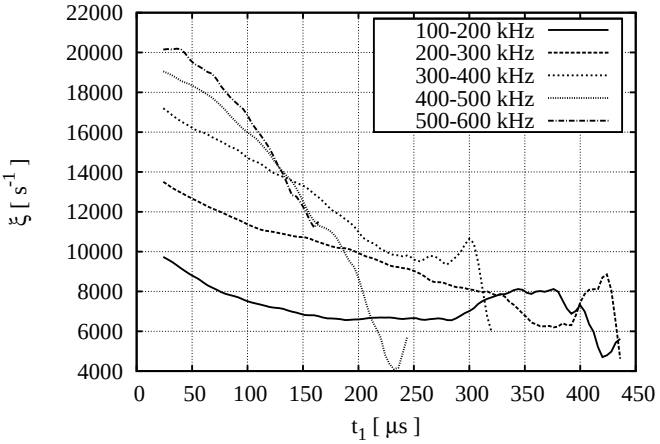


FIG. 3.24 – Estimation du paramètre ξ par une régression linéaire des signaux expérimentaux.

Les estimations de ξ par régression linéaire sur les signaux expérimentaux sont présentées sur la figure 3.24. Dans chaque bande de fréquences, le point t_2 considéré correspond au temps où le signal atteint le niveau de bruit. On fait varier à chaque fois le temps t_1 et on estime la valeur de $\xi(t_1)$ de la même manière que pour les figures 3.23. La meilleure estimation de ξ est alors atteinte lorsque la courbe $\xi(t_1)$ se stabilise.

Pour le signal filtré dans la bande de fréquence 100-200 kHz, la courbe parvient à une stabilisation pour t_1 compris entre 150 et $300\,\mu$s. On a alors $\xi \simeq 6600\,s^{-1}$. Cette valeur est très légèrement inférieure à celle donnée par la minimisation de la fonction ϵ (on avait environ $7100\,s^{-1}$), mais est du même ordre de grandeur. Pour les temps $t_1 > 300\,\mu$s, la courbe $\xi(t_1)$ présente des fortes variations ; la portion de signal sur laquelle on effectue la régression linéaire est trop courte et est fortement influencée par les fluctuations du signal expérimental.

Entre 200 et 300 kHz, la courbe ne parvient pas à une stabilisation aussi nette que dans le cas précédent. On peut dire que la valeur de ξ dans cette bande de fréquence est inférieure à $8000\,\mathrm{s}^{-1}$, avec une précision de l'ordre de 10%. Cette valeur estimée par régression linéaire est cette fois très inférieure à la valeur estimée par minimisation (qui était de $12000\,\mathrm{s}^{-1}$).

Pour les fréquences supérieures, la durée du signal utile est trop faible pour pouvoir estimer ξ par régression linéaire. La courbe $\xi(t_1)$ ne parvient pas à une stabilisation. Les valeurs obtenues pour t_1 compris entre 50 et $100\,\mu$s peuvent cependant être considérées comme des majorants pour la valeur réelle de ξ, avec une erreur de l'ordre de 50%.

3.3.4.d Remarques

L'estimation des paramètres de l'équation de diffusion D et ξ est très difficile à réaliser avec précision sur des signaux expérimentaux dans les conditions expérimentales considérées.

Les valeurs de ces paramètres doivent être estimées simultanément en ajustant une solution de l'équation de diffusion sur les courbes expérimentales. Le paramètre I_0 est également une inconnue à reconstruire, bien qu'il ne dépende pas des propriétés du matériau. La précision obtenue sur ces valeurs est alors assez faible.

On peut également tenter d'estimer le paramètre ξ isolément par régression linéaire de la courbe d'intensité incohérente pour les temps les plus longs. Cette méthode est applicable si l'on dispose de signaux suffisamment longs, et est limitée par le niveau de bruit. Dans les cas où l'on dispose de signaux suffisamment longs, c'est à dire si l'amplitude de l'onde émise par la source est suffisamment importante et l'amortissement suffisamment faible, on peut alors estimer ξ avec une bonne précision et de manière plus simple qu'en résolvant le problème inverse à l'approximation de diffusion (minimisation de la fonction coût). Si le signal disponible n'est pas suffisamment long (amplitude trop faible et/ou amortissement trop important) la méthode ne donne qu'une valeur majorante pour ξ. Cette évaluation de ξ par régression linéaire peut alors servir pour contraindre la minimisation de la fonction coût, et permettre d'affiner l'estimation de D.

3.4 Conclusions

Viscoélasticité. Les phénomènes d'absorption et de diffusion par les petites hétérogénéités (sables et porosité) peuvent être décrits par un modèle viscoélastique à Q constant. La prise en compte de ce modèle viscoélastique passe par la définition de nombres d'onde complexes dans le milieu, dont la partie réelle est liée à la vitesse de phase et la partie imaginaire à l'amortissement. Ces modèles de viscoélasticité introduisent une dépendance fréquentielle (dispersion) de la vitesse de phase, dont il faut tenir compte dès le début lors du calcul des nombres d'onde du milieu effectif.

Les calculs des nombres d'onde effectifs modélisés par les méthodes d'homogénéisation de type ISA, et par extension celui des sections efficaces de diffusion résultant de l'interaction d'une onde avec un granulat, doivent donc être réalisés en utilisant les nombres d'onde complexes obtenus en appliquant le modèle de viscoélasticité linéaire pour chaque phase du matériau.

La comparaison des études analytiques des milieux hétérogènes comme le béton en considérant des matériaux (mortier et granulats) purement élastiques ou viscoélastiques permet d'étudier les proportions relatives de l'amortissement dû à la diffusion multiple par les granulats, et de l'amortissement dû aux autres phénomènes (porosité, diffusion par les très petites hétérogénéités et absorption). Ainsi, dans le cas de mesures de coefficients d'atténuation sur du béton, l'amortissement dû à la diffusion multiple représente une part très importante de l'amortissement total mesuré, de l'ordre de 30 à 70% suivant le type d'onde étudié et la nature des matériaux. On voit donc ici l'intérêt de la prise en compte de la diffusion multiple en vue de l'étude expérimentale de l'amortissement des ondes dans le béton ; si l'on cherche à observer une variation de propriétés mécaniques du matériau à travers l'amortissement des ondes, il faudra au préalable pouvoir quantifier l'amortissement dû à la diffusion multiple.

Étude expérimentale des ondes P cohérentes. Une première étude expérimentale est réalisée de manière à mettre en évidence les effets de la diffusion multiple dans le béton. Ces mesures concernent la transmission d'ondes de compression à travers des dalles de béton ou d'un mortier ayant la même formulation que celui utilisé lors de la confection de la dalle de béton, mais sans granulat. Le champ cohérent est évalué par moyennage spatial sur plusieurs mesures

équivalentes, prenant en compte différentes réalisations équivalentes du désordre.

On observe que dans le mortier, dont les constituants ont des dimensions très petites devant la longueur d'onde, la proportion de champ incohérent est négligeable, et que le mortier se comporte comme un milieu homogène vis à vis des longueur d'onde considérées. À l'inverse, les signaux mesurés sur le béton contiennent une proportion de champ incohérent pouvant être prépondérante. L'estimation du champ cohérent par moyennage spatial est donc indispensable afin d'évaluer expérimentalement les propriétés du milieu effectif.

Une fois le champ cohérent évalué, on peut estimer les propriétés du milieu effectif, comme la vitesse de propagation des ondes par pointé du temps de parcours des ondes à travers la dalle, ou les facteurs d'amortissement des ondes en comparant les amplitudes des ondes transmises à travers des dalles d'épaisseur différentes. L'amortissement mesuré sur le mortier possède un comportement linéaire avec la fréquence, ce qui justifie l'utilisation d'un modèle de viscoélasticité à Q constant pour modéliser l'amortissement dû à la porosité, à l'absorption, et à la diffusion par les grains de sable dans le mortier. L'amortissement du béton contenant les granulats est beaucoup plus important que celui du mortier, montrant que l'amortissement dû à la diffusion multiple des ondes de compression sur les granulats est important ; on confirme donc expérimentalement les observations faites par l'étude du modèle analytique.

Intensité incohérente. Dans les milieux hétérogènes, après un certain nombre d'interactions avec les hétérogénéités, le champ incohérent devient important. L'évolution de l'intensité incohérente en fonction du temps peut être assimilée à un processus de diffusion de l'intensité, en faisant l'hypothèse que cette intensité diffuse de manière isotrope dans tout l'espace.

L'étude des solutions de l'équation de diffusion montre que ce phénomène est régi par deux paramètres principaux ; un coefficient de diffusion D, décrivant la vitesse de progression du *halo* d'intensité incohérente, et un coefficient d'atténuation ξ décrivant les phénomènes d'absorption. Le coefficient D contrôle la première partie du signal $I_{inc.}(t)$ correspondant à l'allure du maximum de la courbe, tandis que le paramètre ξ contrôle la pente de la décroissance de l'intensité en échelle logarithmique. D'autre part, on montre que la prise en compte d'une solution en considérant les conditions aux limites sur les bords de la dalle modifie substantiellement l'allure de la solution de l'équation de diffusion, et est donc nécessaire.

La mise en oeuvre du problème inverse afin de déterminer les valeurs des paramètres D et ξ à partir des signaux expérimentaux est difficile à réaliser et donne des résultats avec une précision assez faible ; l'allure des courbes est assez peu sensible à la valeur au paramètre D, et le paramètre ξ ne devient un paramètre prépondérant qu'au bout d'un temps relativement long, que le niveau de bruit nous empêche d'atteindre. Que ce soit en estimant simultanément les paramètres D et ξ par minimisation de la fonction coût ϵ ou en estimant ξ par régression linéaire de la décroissance de la courbe d'intensité incohérente, les résultats de cette étude montrent que l'on doit disposer d'un signal utile (supérieur au niveau de bruit) le plus long possible ; cela peut être obtenu en utilisant une source très énergétique et en ayant un niveau de bruit très faible lors de la mesure, par exemple l'utilisation de transducteurs "à pointe" en réception permet d'acquérir des signaux avec un niveau de bruit très faible, l'automatisation des mesures dans ce cas est cependant plus difficile qu'avec l'interféromètre laser.

L'approximation de diffusion est par ailleurs une approximation prenant en compte une hypothèse très forte : l'énergie est supposée diffuser de manière isotrope dans toutes les directions de l'espace, la direction initiale de propagation de l'onde est perdue du fait des évènements de diffraction par les hétérogénéités. Des théories plus complexes comme la théorie du transfert radiatif sont peut être plus adaptées pour une étude plus précise du comportement de l'intensité incohérente. D'autre part, la mesure de l'intensité incohérente réalisée ici ne tient compte que des déplacements particulaires normaux à la surface de la dalle, une mesure du champ incohérent correspondant aux déplacements dans les deux directions (composantes normale et tangentielle)

serait intéressante à étudier, permettant d'avoir une mesure de l'intensité incohérente plus proche de la réalité. Ce type de mesure des composantes normale et tangentielle peut par exemple être réalisé avec la technologie de l'interférométrie laser, qui est encore au stade de développement [Blum et al., 2007].

On a donc pu dans ce chapitre mettre en évidence analytiquement et expérimentalement l'intérêt de prendre en compte la diffusion multiple des ondes dans le béton, et notamment l'importance de l'évaluation du champ cohérent pour déterminer les propriétés du milieu effectif. La prise en compte de la viscoélasticité est également indispensable pour pouvoir comparer des observations expérimentales à des observations obtenues analytiquement.

L'étude portait jusqu'à présent sur la propagation des ondes de volume (ondes de compression et de cisaillement) en milieu hétérogène et viscoélastique. L'objectif de la thèse étant la caractérisation du béton d'enrobage, le cas de la propagation des ondes de surface dans le béton va être abordé dans le chapitre suivant, tout en tenant compte de la viscoélasticité des matériaux ainsi que de la diffusion multiple des ondes par les granulats.

Chapitre 4

Étude des ondes de Rayleigh cohérentes dans le béton

Sommaire

4.1 Ondes de Rayleigh 100
4.1.1 Relation de dispersion en milieu élastique 100
4.1.1.a Position du problème 100
4.1.1.b Conditions aux limites 101
4.1.1.c Expression des potentiels 101
4.1.1.d Résolution du problème aux limites 102
4.1.1.e Propriétés de l'onde de Rayleigh 102
4.1.2 Onde de Rayleigh en milieu viscoélastique 103
4.1.2.a Relation de dispersion 103
4.1.2.b Modes quasi-élastique et viscoélastique 104
4.1.3 Ondes de Rayleigh en milieu hétérogène 104
4.2 Sensibilité des ondes de Rayleigh cohérentes aux propriétés du béton 105
4.2.1 Objectifs 105
4.2.1.a Utilisation des simulations analytiques 105
4.2.1.b Méthodologie 106
4.2.2 Variations des coefficients de qualité Q_p^0 et Q_s^0 du mortier 106
4.2.3 Variations des modules d'Young E^0 ou de cisaillement μ^0 et du coefficients de Poisson ν^0 du mortier 107
4.2.4 Conclusions de l'étude 109
4.3 Mesures expérimentales des ondes de Rayleigh cohérentes sur du béton 110
4.3.1 Protocole expérimental 110
4.3.1.a Dalles de bétons et de mortiers 110
4.3.1.b Mesure élémentaire 111
4.3.1.c Réalisations du désordre 112
4.3.2 Prétraitements et obtention du champ cohérent 113
4.3.2.a Description des prétraitements 113
4.3.2.b Obtention du champ cohérent 114
4.3.2.c Amplitudes spectrales 115
4.3.2.d Évaluation de la vitesse de phase et amortissement 116
4.3.3 Vitesse de groupe 116
4.3.3.a Intérêt 116
4.3.3.b Filtrage multiple (MFA) 117
4.3.3.c Réallocation de spectrogramme 119

4.3.3.d Application aux signaux mesurés . . . 121
4.3.4 Résultats expérimentaux et discussion . . . 122
4.3.4.a Vitesse de phase effective . . . 122
4.3.4.b Vitesse de groupe effective . . . 123
4.3.4.c Amortissement effectif . . . 124
4.3.5 Nombre de réalisations du désordre . . . 126
4.3.5.a Objectif . . . 126
4.3.5.b Vitesse de phase . . . 126
4.3.5.c Amortissement . . . 127
4.3.5.d Comparaisons . . . 127
4.4 Conclusions . . . 128

Introduction

Dans les chapitres précédents, la propagation des ondes de volume de compression et de cisaillement dans le béton, décrit comme un milieu hétérogène viscoélastique a été étudiée analytiquement et numériquement, puis l'aspect expérimental a été abordé avec des ondes de compression. Les ondes de Rayleigh, qui se propagent le long des surfaces libres des matériaux élastiques, sont plus adaptées que les ondes de volumes pour des mesures *in situ* sur des ouvrages de génie civil car elles ne nécessitent l'accès qu'à une face, et permettent de caractériser spécifiquement le béton d'enrobage. Ce chapitre décrit dans un premier temps les propriétés des ondes de Rayleigh en milieu homogène élastique ou viscoélastique, puis en milieu hétérogène à partir des propriétés du milieu effectif. L'étude de la sensibilité de la vitesse de phase ou de l'amortissement des ondes de Rayleigh à des variations de propriétés du mortier est ensuite menée à partir de la modélisation analytique. Enfin, une étude expérimentale de propagation d'ondes de Rayleigh cohérentes sur le béton est réalisée permettant d'observer expérimentalement les différents effets de la diffusion multiple ou de la porosité sur les courbes de dispersion en vitesse de phase, de groupe et sur les courbes d'amortissement du béton.

4.1 Ondes de Rayleigh

4.1.1 Relation de dispersion en milieu élastique

4.1.1.a Position du problème

On considère un milieu semi-infini homogène élastique et isotrope, comportant une surface libre dans le plan $z = 0$ (Fig. 4.1). Ce milieu est caractérisé par une masse volumique ρ et des nombres d'onde réels k_p et k_s relatifs aux ondes de volume de compression et de cisaillement.

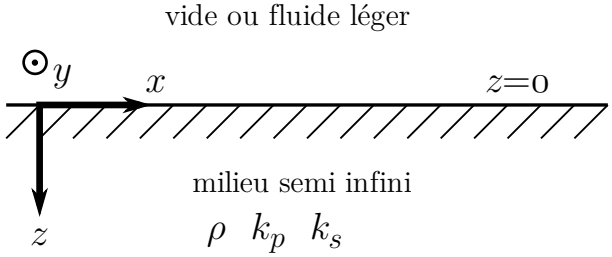


Fig. 4.1 – Notations utilisées pour le calcul de la relation de dispersion des ondes de Rayleigh.

Le milieu est infini dans les direction x et y. Le matériau étant supposé isotrope, on choisit d'étudier la propagation en se limitant au plan (x, z) en considérant une invariance par translation suivant y. Le problème P-SV est alors découplé du problème SH, on s'intéresse dans le cas des ondes de Rayleigh uniquement au problème P-SV. Comme dans les chapitres précédents, la convention temporelle est choisie en $\mathrm{e}^{-i\omega t}$.

Le vecteur de déplacement particulaire $\mathbf{u}$ d'une onde se propageant dans ce milieu est décomposé suivant un champ rotationnel et irrotationnel de la même manière que dans les chapitres précédents :

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times (\psi \mathbf{e_y}), \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{rl} u_x = & \dfrac{\partial \phi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z} \\ u_z = & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. , \tag{4.1}$$

où les potentiels ϕ et ψ sont solutions des équations de Helmholtz suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (\nabla^2 + k_p^2)\phi & = 0, & k_p = \omega/c_p \\ (\nabla^2 + k_s^2)\psi & = 0, & k_s = \omega/c_s \end{array} \right. \tag{4.2}$$

4.1.1.b Conditions aux limites

À la surface libre du matériau, en $z = 0$, les champs doivent satisfaire une condition de contraintes (normale et de cisaillement) nulles. Dans le cas d'un matériau homogène, isotrope et élastique, les expressions des contraintes découlent de la loi de Hooke. On donne ici les expressions des contraintes en fonction des potentiels en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_{zz} & = & (\lambda + 2\mu)\left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\right) + \lambda \left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\right) \\ \sigma_{zx} & = & \mu \left(2\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) \end{array} \right. \tag{4.3}$$

où comme dans les chapitres précédents λ et μ sont les coefficients de Lamé. On rappelle les relations suivantes, en notant ρ la masse volumique du matériau :

$$\lambda = \rho(c_p^2 - 2c_s^2) \tag{4.4}$$

$$\mu = \rho c_s^2 \tag{4.5}$$

Par ailleurs, les potentiels doivent d'annuler en profondeur, i.e. quand $z \to \infty$.

4.1.1.c Expression des potentiels

On recherche une solution harmonique propagative suivant x avec un nombre d'onde $k_r = \omega/c_r$ et décroissante suivant z. On recherche alors les potentiels ϕ et ψ sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(t, x, z) & = & F(z)\mathrm{e}^{-i(\omega t - k_r x)} \\ \psi(t, x, z) & = & G(z)\mathrm{e}^{-i(\omega t - k_r x)} \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Ces potentiels étant solutions des équations de Helmholtz 4.2, on peut alors déterminer les fonctions F et G à partir du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F''(z) - F(z)(k_r^2 - k_p^2) & = 0 \\ G''(z) - G(z)(k_r^2 - k_s^2) & = 0 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Les potentiels s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} \phi(t,x,z) &= A\mathrm{e}^{-K_p z}\mathrm{e}^{-i(\omega t - k_r x)}, & \text{avec} \quad K_p^2 &= k_r^2 - k_p^2 \\ \psi(t,x,z) &= B\mathrm{e}^{-K_s z}\mathrm{e}^{-i(\omega t - k_r x)}, & \text{avec} \quad K_s^2 &= k_r^2 - k_s^2 \end{cases} \tag{4.8}$$

Les potentiels s'atténuent avec z si les termes K_p et K_s sont positifs, donc si les relations suivantes sont vérifiées :

$$k_r > k_p \qquad \longrightarrow \qquad c_r < c_p \tag{4.9}$$

$$k_r > k_s \qquad \longrightarrow \qquad c_r < c_s \tag{4.10}$$

4.1.1.d Résolution du problème aux limites

En exprimant les conditions aux limites en $z = 0$ d'après les relations 4.3 et 4.8, et en éliminant les constantes A et B, on aboutit à la relation suivante, dite équation de Rayleigh :

$$q^3 - 8q^2 + q\left(24 - 16\frac{c_s^2}{c_p^2}\right) + 16\left(\frac{c_s^2}{c_p^2} - 1\right) = 0, \qquad q = \frac{c_r^2}{c_s^2}. \tag{4.11}$$

La relation 4.11 est d'ordre 3 en q^2. Les célérités doivent satisfaire la relation suivante afin d'avoir une racine réelle :

$$0 < c_r < c_s < c_p \tag{4.12}$$

En milieu homogène élastique il n'existe qu'une racine de l'équation 4.11 satisfaisant ces conditions. Ces racines ont été étudiées en détail par de nombreux auteurs, notamment par Viktorov [1967]. La célérité de ces ondes est très légèrement inférieure à celle des ondes de cisaillement.

4.1.1.e Propriétés de l'onde de Rayleigh

Le calcul précédent met en évidence l'existence d'une onde se propageant le long de la surface libre (propagative suivant x) à la vitesse c_r et s'atténuant avec la profondeur. On peut observer cette atténuation avec la profondeur en étudiant les amplitudes des composantes horizontale et verticale du champ de déplacement $\mathbf{u}(z)$. Ces amplitudes sont présentées en figure 4.2 en fonction de la profondeur exprimée en longueurs d'onde λ. Les valeurs considérées ici sont celles correspondant au mortier dont les propriétés sont données au tableau 2.1 ; $c_p = 3950\,\mathrm{m.s^{-1}}$et $c_s = 2250\,\mathrm{m.s^{-1}}$, à la fréquence 100 kHz. La vitesse des ondes de Rayleigh correspondante est alors de $c_r = 2072\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Le mouvement particulaire associé au passage de l'onde de Rayleigh est elliptique, majoritairement orienté suivant z et est donc principalement un mouvement de cisaillement. L'amplitude du déplacement décroît rapidement avec la profondeur. La profondeur de pénétration de l'onde de Rayleigh en milieu homogène est de l'ordre de sa longueur d'onde λ, l'amplitude du déplacement s'annule vers une profondeur de 2λ.

On remarque également d'après l'équation 4.11 que dans un milieu homogène, l'onde de Rayleigh est non dispersive ; ses propriétés sont indépendantes de la fréquence. Dans le cas d'un milieu dont les propriétés varient avec la profondeur (milieu stratifié, ou milieu à gradient continu de propriétés), la profondeur de pénétration étant de l'ordre de la longueur d'onde λ, chaque composante fréquentielle de l'onde traversera alors le matériau sur des profondeurs différentes, et l'onde sera dispersive. Cette propriété est très utilisée en géophysique pour caractériser les sols composés de couches de roches ou sédiments (on peut citer entre autres Aki and Richards [1980]; Lai and Rix [1998]; Bodet [2005]).

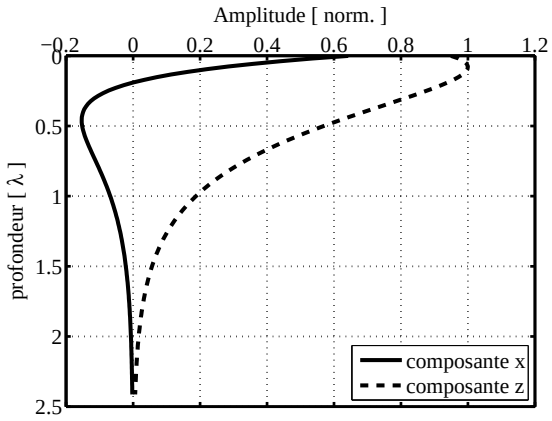


FIG. 4.2 – Composantes horizontale et verticale du déplacement particulaire de l'onde de Rayleigh en fonction de la profondeur exprimée en longueurs d'onde de l'onde de Rayleigh. Le milieu considéré est homogène, élastique et isotrope, avec $c_p = 3950\,\mathrm{m.s^{-1}}$et $c_s = 2250\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

4.1.2 Onde de Rayleigh en milieu viscoélastique

4.1.2.a Relation de dispersion

On a vu au chapitre 3.1 que les matériaux homogènes viscoélastiques pouvaient être décrits par des modules complexes, conduisant à des célérités $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_s$ complexes et des nombres d'onde complexes $\mathcal{K}_p$ et $\mathcal{K}_s$, dont la partie réelle est liée à la vitesse de phase et la partie imaginaire à l'amortissement.

La résolution du problème aux limites pour un milieu semi-infini viscoélastique avec des conditions de contraintes nulles en surface et d'atténuation en profondeur se fait donc de la même manière que dans le cas élastique présenté aux paragraphes précédents, mais en considérant des célérités complexes.

L'expression des potentiels, solutions des équations de Helmholtz est donc de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \phi(t,x,z) & = & A\mathrm{e}^{-\mathrm{K}_p z}\mathrm{e}^{-i(\omega t-\mathcal{K}_r x)}, & \text{avec} \quad \mathrm{K}_p^2 = \mathcal{K}_r^2 - \mathcal{K}_p^2 \\ \psi(t,x,z) & = & B\mathrm{e}^{-\mathrm{K}_s z}\mathrm{e}^{-i(\omega t-\mathcal{K}_r x)}, & \text{avec} \quad \mathrm{K}_s^2 = \mathcal{K}_r^2 - \mathcal{K}_s^2 \end{array}\right. \tag{4.13}$$

On aboutit alors à la même équation que l'équation 4.11, mais faisant intervenir des grandeurs complexes [Carcione, 2001] :

$$\mathcal{Q}^3 - 8\mathcal{Q}^2 + \mathcal{Q}\left(24 - 16\frac{\mathcal{C}_s^2}{\mathcal{C}_p^2}\right) + 16\left(\frac{\mathcal{C}_s^2}{\mathcal{C}_p^2} - 1\right) = 0, \qquad \mathcal{Q} = \frac{\mathcal{C}_r^2}{\mathcal{C}_s^2}. \tag{4.14}$$

$\mathcal{C}_r$ représente ici la célérité complexe des ondes de Rayleigh en milieu viscoélastique, caractérisée par une vitesse de phase c_r et un coefficient d'atténuation α_r tous deux réels. On y associe également un nombre d'onde complexe $\mathcal{K}_r$. Ces paramètres sont définis de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_r = \frac{\omega}{\mathcal{K}_r}, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{K}_r = \frac{\omega}{c_r} + i\alpha_r. \tag{4.15}$$

Cette équation possède 6 racines complexes, dont trois d'entre elles sont les conjuguées des trois autres. On recherche comme solution des ondes se propageant suivant les x croissants et s'atténuant au cours de la propagation. Les racines physiquement acceptables doivent donc satisfaire les conditions suivantes :

$$c_r > 0 \quad \longrightarrow \quad \Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_r}\right) > 0, \tag{4.16}$$

$$\alpha_r > 0 \quad \longrightarrow \quad \Im\mathrm{m}\left(\mathcal{K}_r\right) > 0 \tag{4.17}$$

Par ailleurs, pour avoir une solution dont les potentiels s'atténuent avec la profondeur z, l'équation 4.14 impose que les parties réelles de K_p et de K_s soient positives :

$$\omega \Re\mathrm{e}\left(\sqrt{\frac{1}{\mathcal{C}_r}-\frac{1}{\mathcal{C}_m}}\right)>0, \qquad m=p,s. \tag{4.18}$$

4.1.2.b Modes quasi-élastique et viscoélastique

Carcione [1992, 2001] mentionne deux solutions physiquement acceptables à l'équation 4.14. L'un de ces modes, appelé mode quasi-élastique (q.e.) est présent quelles que soient les propriétés mécaniques (paramètres de Lamé) du matériau viscoélastique. Ce mode q.e. possède des propriétés analogues à celles des ondes de Rayleigh présentes en milieu élastique. Ses paramètres de propagation (vitesse de phase et amortissement) sont assez proches de ceux de l'onde de cisaillement, le mouvement particulaire associé est très similaire è celui associé à l'onde de Rayleigh en milieu élastique et homogène, et sa profondeur de pénétration est également de l'ordre de la longueur d'onde λ.

Un autre mode est appelé mode viscoélastique (v.e.) et n'est possible que pour certaines fréquences et certaines propriétés du matériau. Ce mode v.e. est caractérisé par un déplacement majoritairement polarisé horizontalement (suivant x), une vitesse de phase très proche de la vitesse des ondes de compression, et un coefficient d'atténuation très élevé. Ce mode v.e. n'a pas été observé expérimentalement à ma connaissance.

On ne s'intéresse dans cette étude qu'au mode quasi-élastique.

4.1.3 Ondes de Rayleigh en milieu hétérogène

L'étude théorique de la propagation des ondes de Rayleigh dans un milieu contenant un grand nombre d'hétérogénéités n'a pas été étudiée dans la littérature. Les méthodes d'homogénéisation décrivant les propriétés du milieu effectif vues au chapitre 2.2 (ISA, Waterman-Truell, ...) ne permettent que de déterminer les propriétés des ondes de volume effectives dans un milieu infini ou semi-infini. Le milieu effectif ainsi défini est homogène et est caractérisé par des nombres d'onde effectifs complexes pour les ondes de compression et de cisaillement. On fait alors l'hypothèse que les propriétés des ondes de Rayleigh effectives peuvent être déterminées à partir de la relation de dispersion 4.14 et des célérités complexes $\mathcal{C}_{p,e}$ et $\mathcal{C}_{s,e}$ du milieu effectif.

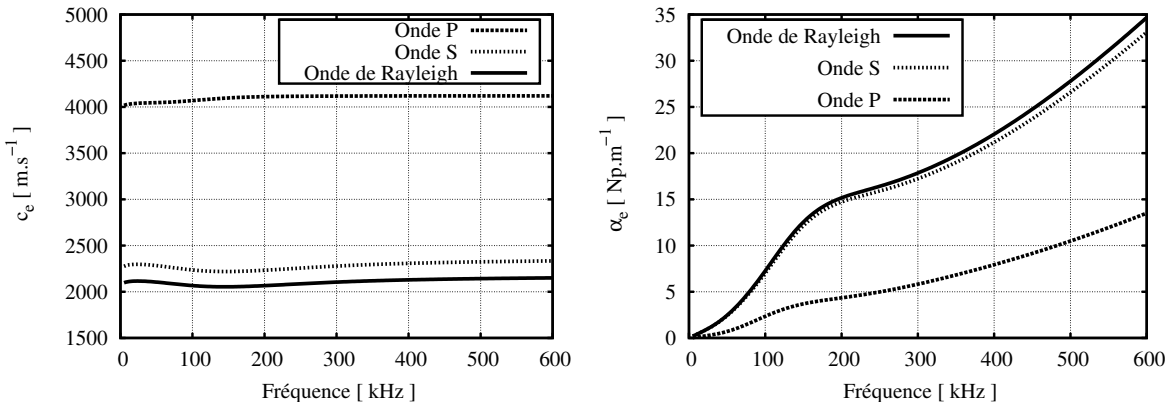
Afin de faire des simulations analytiques des paramètres de propagation des ondes de Rayleigh effectives, on utilise les propriétés du mortier et des granulats utilisées dans les chapitres précédents (Tab. 2.1 et 3.1), et qui sont résumées ici dans le tableau 4.1.

Tab. 4.1 – Récapitulatif des propriétés du mortier et des granulats utilisées pour les simulations analytiques, issues des tableaux 2.1 pour les vitesses relaxées et 3.1 pour les facteurs de qualité.

Matériau	c_p^j (m.s^{-1})	Q_p^j	c_s^j (m.s^{-1})	Q_s^j	ρ^j (kg.m^{-3})
Mortier ($j=0$)	3950	70	2250	30	2050
Granulats ($j=1$)	4300	100	2475	50	2610

La concentration volumique en granulats est de 40%, et les dimensions des granulats sont réparties suivant la courbe granulométrique présentée en figure 2.9, avec un diamètre moyen de $d_{moy}=10\,\mathrm{mm}$ et écart-type de $\sigma_g=3$ mm. Le calcul des propriétés effectives du béton pour les ondes de compression et de cisaillement est effectué avec l'ISA, dans un milieu 3D.

Les résultats obtenus par ces simulations sont présentés en figure 4.3. La vitesse de phase des ondes de Rayleigh est légèrement inférieure à celle des ondes de cisaillement de près de 10%, et l'amortissement des ondes de Rayleigh est sensiblement identique à celui des ondes de cisaillement.



(a) Vitesse de phase effective

(b) Amortissement effectif

FIG. 4.3 – Propriétés du milieu effectif pour les ondes de compression, de cisaillement, et de Rayleigh. Le milieu hétérogène considéré possède les propriétés présentées au tableau 4.1.

4.2 Sensibilité des ondes de Rayleigh cohérentes aux propriétés du béton

4.2.1 Objectifs

4.2.1.a Utilisation des simulations analytiques

On dispose maintenant d'une modélisation analytique permettant de décrire les propriétés de la vitesse de phase et de l'amortissement des ondes de Rayleigh cohérentes dans le béton. Le béton ainsi modélisé est un matériau diphasique composé d'une matrice viscoélastique (le mortier) contenant des diffuseurs sphériques viscoélastiques (les granulats) dont les dimensions sont réparties suivant une courbe granulométrique. Les propriétés des ondes de volume dans le milieu effectif sont déterminées avec le modèle d'homogénéisation ISA.

Le chapitre 2 montre que le modèle ISA n'est valable que pour de faibles concentrations d'hétérogénéités. En particulier, les simulations numériques 2D par différences finies montrent que les courbes de vitesse de phase effective et d'amortissement effectif prédites par ISA ont des écarts avec les résultats numériques qui deviennent importants dès une concentration de 18% de granulats en volume. Le béton contenant en général une concentration de granulats beaucoup plus importante (de l'ordre de 40-50%), la modélisation choisie ne permet pas de prédire quantitativement avec précision les vitesses et amortissements des ondes cohérentes dans le béton. De plus l'hypothèse faite de déterminer les propriétés des ondes de Rayleigh effectives à partir des propriétés des ondes de volume du milieu effectif n'est pas rigoureusement justifiée théoriquement. La modélisation analytique développée peut cependant s'avérer suffisante pour étudier des ordres de grandeur, et notamment la sensibilité des ondes à des variations de propriétés mécaniques du mortier ou des granulats.

Au cours du vieillissement du béton, ou suite à un endommagement, on peut supposer que les modifications des propriétés du béton vont porter essentiellement sur le mortier, et que les propriétés des granulats (quantité, géométrie, propriétés mécaniques, ...) vont rester inchangées. On peut alors utiliser les simulations analytiques pour évaluer la sensibilité des ondes de Rayleigh cohérentes à l'endommagement du mortier. L'objectif de cette étude est de déterminer si de faibles variations des propriétés mécaniques du mortier induisent des variations significatives sur la vitesse de phase ou l'atténuation des ondes de Rayleigh sur le milieu effectif.

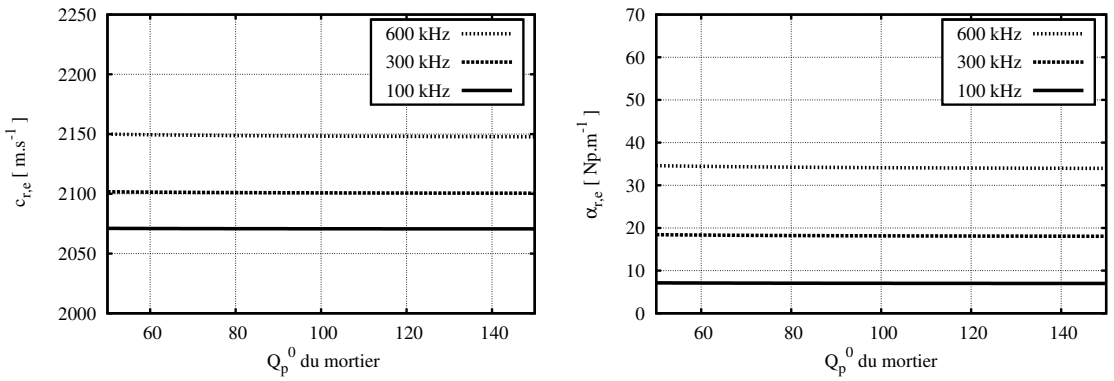
4.2.1.b Méthodologie

Dans cette étude, on considère que le béton de référence est celui dont les courbes de dispersion et d'amortissement sont présentées en figure 4.3. Les propriétés de ses constituants sont celles résumées au tableau 4.1, avec des granulats sphériques dont la concentration volumique est de 40% et dont la distribution de taille varie de 4 mm à 20 mm en suivant une loi normale avec un diamètre moyen $d_{moy} = 10\,\text{mm}$ et écart-type $\sigma_g = 3\,\text{mm}$.

On évalue alors la vitesse de phase effective $c_{r,e}$ et le facteur d'amortissement effectif $\alpha_{r,e}$ de l'onde de Rayleigh cohérente en faisant varier différentes propriétés mécaniques du mortier une à une, et en conservant tous les autres paramètres égaux par ailleurs. L'étude est réalisée pour 3 fréquences différentes : 100 kHz, 300 kHz, et 600 kHz.

4.2.2 Variations des coefficients de qualité Q_p^0 et Q_s^0 du mortier

On fait varier le facteur de qualité Q_p^0 des ondes de compression dans le mortier entre 50 et 150. Les résultats sont tracés en figure 4.4. On constate que l'influence du facteur de qualité Q_p^0 est négligeable sur les propriétés de l'onde de Rayleigh cohérente, les variations de vitesse de phase et d'amortissement étant inférieures à 1%. Cela est en accord avec les remarques du paragraphe précédent, montrant que les propriétés de l'onde de Rayleigh sont très proches de celles de l'onde de cisaillement, et sont peu influencées par les propriétés de l'onde de compression.

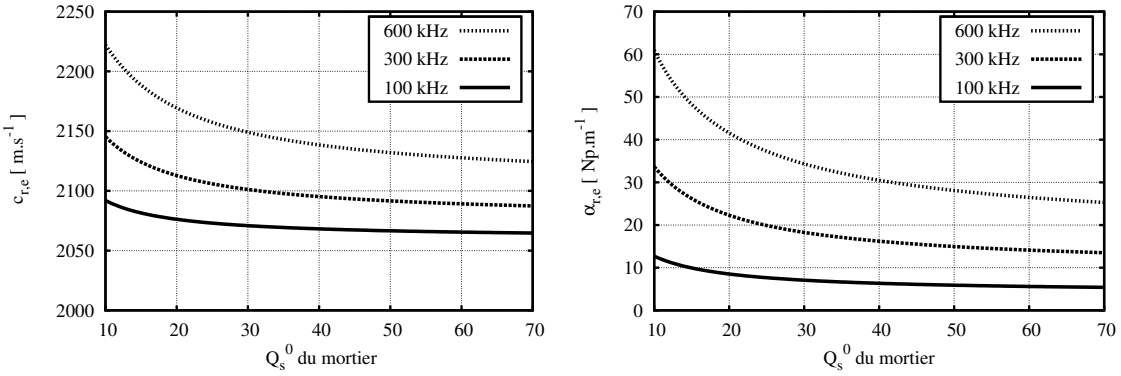


(a) Vitesse de phase effective

(b) Amortissement effectif

Fig. 4.4 – Influence du facteur de qualité des ondes de compression du mortier Q_p^0 sur la vitesse de phase effective et l'amortissement effectif des ondes de Rayleigh.

Dans le cas de la variation du facteur de qualité Q_s^0 lié aux ondes de cisaillement dans le mortier, les résultats sont présentés en figure 4.5, Q_s^0 variant ici de 10 à 70. L'influence de Q_s^0 sur la vitesse de phase des ondes de Rayleigh cohérentes est relativement faible ; une variation de Q_s^0 de 10 fait varier la vitesse $c_{r,e}$ de environ 10-15 m.s^{-1} environ. L'influence de ce paramètre sur le facteur d'amortissement effectif $\alpha_{r,e}$ est par contre plus importante. Une variation du facteur de qualité de 10 peut provoquer une variation de $\alpha_{r,e}$ de environ 20%, ce qui correspond à un ordre de grandeur de environ $2\,\text{Np.m}^{-1}$ à 100 kHz et de $5\,\text{Np.m}^{-1}$ à hautes fréquences. Ces ordres de variations de $\alpha_{r,e}$ sont faibles mais détectables expérimentalement. Cet effet est plus fortement marqué pour les hautes fréquences, et pour les faibles facteurs de qualité Q_s^0.



(a) Vitesse de phase effective

(b) Amortissement effectif

FIG. 4.5 – Influence du facteur de qualité des ondes de cisaillement du mortier Q_s^0 sur la vitesse de phase effective et l'amortissement effectif des ondes de Rayleigh.

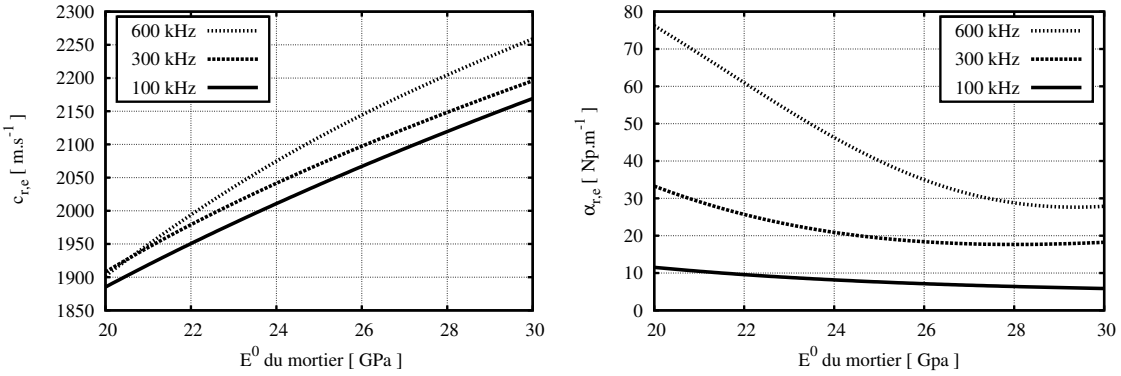
4.2.3 Variations des modules d'Young E^0 ou de cisaillement μ^0 et du coefficients de Poisson ν^0 du mortier

Les propriétés élastiques du mortier sont décrites par les vitesses relaxées de ondes de compression et de cisaillement c_p^0 et c_s^0. Plutôt que d'étudier la sensibilité des ondes de Rayleigh à des variations de ces vitesses relaxées, on préfère étudier les variations de propriétés mécaniques comme par exemple les modules d'Young E^0 et les coefficients de Poisson ν^0 du mortier, ces paramètres étant plus utilisés pour la caractérisation mécanique des matériaux comme le béton. On peut lier les vitesses relaxées du matériau au module d'Young et au coefficient de Poisson à partir des relations 1.7 données au chapitre 1. Le module de cisaillement μ^0 est moins couramment utilisé pour la caractérisation du béton, mais ce paramètre influe considérablement sur les propriétés des ondes de Rayleigh [Aki and Richards, 1980], et est donc également intéressant à étudier. Le module de cisaillement est lié au module d'Young et au coefficient de Poisson par la relation :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.19}$$

Pour le béton de référence, les vitesses relaxées c_p^0 et c_s^0 données au tableau 4.1 correspondent à un module d'Young et un coefficient de Poisson égaux à $E^0 = 26,12\,\text{GPa}$ et $\nu^0 = 0,26$. Le module de cisaillement correspondant vaut $\mu^0 = 10,3\,\text{GPa}$. On fait cette fois encore varier ces valeurs sur une large gamme, afin d'avoir un aperçu général de l'influence de ces paramètres sur les ondes de Rayleigh cohérentes. Les plages de variations choisies correspondent à des variations extrêmes que l'on peut espérer rencontrer sur des mortiers très différents.

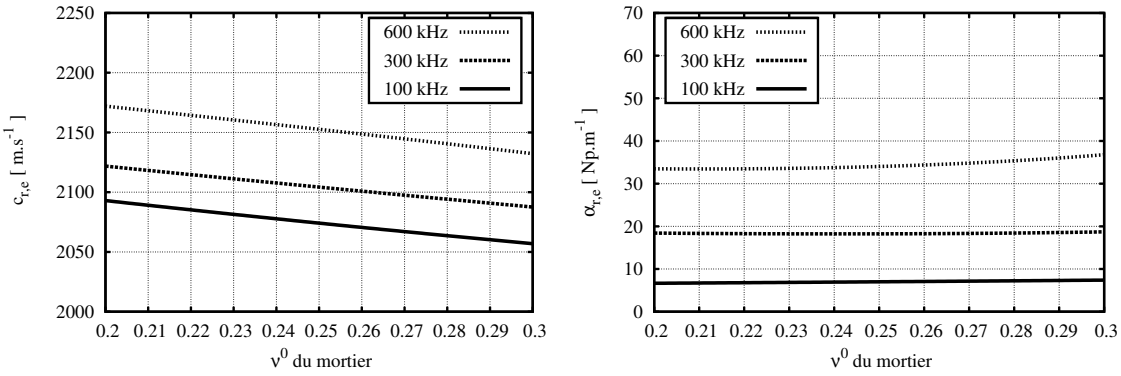
Module d'Young. Les résultats obtenus en faisant varier le module d'Young du mortier de 20 à 30 GPa et en conservant les autres grandeurs inchangées sont présentés en figure 4.6. Le module d'Young du mortier a une forte influence sur la vitesse de phase effective des ondes de Rayleigh dans le béton. Une variation de E^0 de 2 GPa fait varier $c_{r,e}$ de environ $50\,\text{m.s}^{-1}$, ce qui est facilement détectable expérimentalement. On ne constate pas de différences importantes entre les différentes fréquences étudiées. L'influence de E^0 sur le facteur d'amortissement effectif est lui aussi notable. L'effet est plus marqué à hautes fréquences qu'à basses fréquences. Une variation de 2 GPa induit une variation de l'ordre de 10-15 Np.m^{-1} à 600 kHz, et de seulement 1 à 2 Np.m^{-1} à 100 kHz. Cependant une faible variation de 2 Np.m^{-1} du facteur d'amortissement effectif des ondes de Rayleigh peut être expérimentalement détectable avec un protocole de mesure adapté.



(a) Vitesse de phase effective (b) Amortissement effectif

Fig. 4.6 – Influence du module de Young E^0 du mortier sur les propriétés de l'onde de Rayleigh cohérente dans le béton.

Coefficient de Poisson. L'étude de l'influence du coefficient de Poisson du mortier ν^0 est présentée en figure 4.7. La gamme de variation considérée (de 0,2 à 0,3) est très large et les variations de ν^0 sur un matériau sont en général plus faible. Même sur une large gamme de variations l'influence de ν^0 sur les propriétés des ondes de Rayleigh cohérentes est relativement faible.

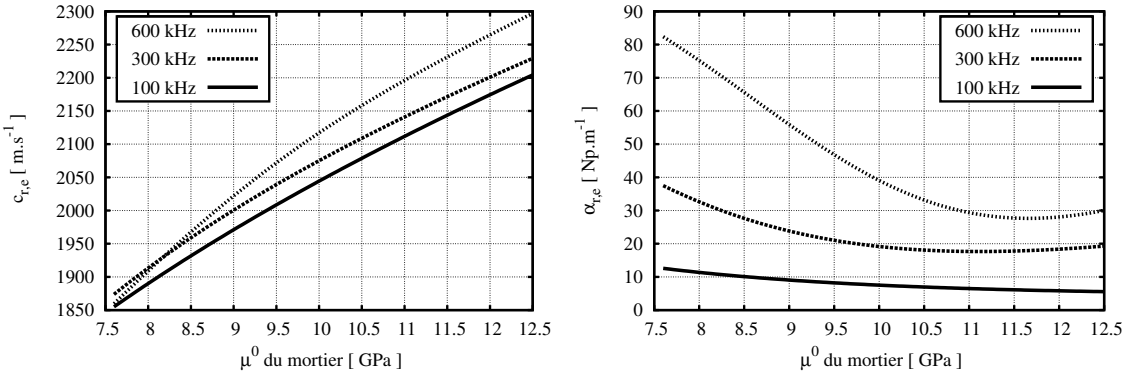


(a) Vitesse de phase effective (b) Amortissement effectif

Fig. 4.7 – Influence du coefficient de Poisson ν^0 du mortier sur les propriétés de l'onde de Rayleigh cohérente dans le béton.

Module de cisaillement. Dans la gamme de variations étudiée pour E^0 et ν^0, E^0 variant de 20 à 30 GPa et ν^0 de 0,2 à 0,3, le module de cisaillement μ^0 varie de 7,6 à 12,5 GPa. La plage de variation du module de cisaillement est donc plus étroite que celle du module d'Young pour des propriétés du matériau égales. L'influence des variations de μ^0 sur les propriétés de l'onde de Rayleigh effective est présentée en figure 4.8 en gardant un coefficient de poisson constant. Les ordres de grandeurs des variations de vitesse et d'amortissement sont comparables aux ordres de grandeurs obtenus pour des variations de module d'Young (Fig 4.6). Une variation du module de cisaillement de 0,5 GPa fait varier la vitesse de 50 $m.s^{-1}$ et le coefficient d'amortissement de 1 à 2 $Np.m^{-1}$à 100 kHz. Ces mêmes ordres de grandeurs de variations de vitesse et d'amortissement étaient obtenus pour une variation de 2 GPa du module d'Young. Les ondes de Rayleigh effectives

dans le béton seront plus sensibles à de faibles variations du module de cisaillement du mortier.



(a) Vitesse de phase effective

(b) Amortissement effectif

FIG. 4.8 – Influence du module de cisaillement μ^0 du mortier sur les propriétés de l'onde de Rayleigh cohérente dans le béton.

4.2.4 Conclusions de l'étude

On fait l'approximation que les propriétés des granulats restent inchangées lorsque le béton est soumis au vieillissement ou à des dégradations et que seules les propriétés du mortier varient. En faisant varier les propriétés mécaniques du mortier dans le modèle analytique, on peut alors évaluer la sensibilité des ondes de Rayleigh cohérentes aux dégradations en étudiant les variations de la vitesse de phase effective et de l'amortissement effectif.

La vitesse de phase effective des ondes de Rayleigh $c_{r,e}$ est principalement sensible aux variations du module d'Young E^0 et du module de cisaillement μ^0 du mortier. Les variations du facteur de qualité Q_s^0 et du coefficient de Poisson ν^0 du mortier influent également sur $c_{r,e}$ mais les variations sont faibles. Le facteur d'amortissement effectif des ondes de Rayleigh $\alpha_{r,e}$ dans le béton est principalement sensible au facteur de qualité des ondes de cisaillement dans le mortier Q_s^0, mais également au module d'Young ou de cisaillement du mortier. L'effet est beaucoup plus marqué à hautes fréquences qu'à basses fréquences. Par contre des variations de Q_p^0 ou de ν^0 ont une influence très faible sur $\alpha_{r,e}$.

Les ondes de Rayleigh cohérentes peuvent donc permettre de déceler des variations de propriétés mécaniques du béton dues à des endommagements. La sensibilité des ondes de Rayleigh est plus importante à hautes fréquences, cependant leur utilisation présente deux incovénients. D'une part l'amortissement est très élevé, ce qui nécessite d'utiliser des sources de forte amplitude et de n'étudier la propagation des ondes que sur une courte distance. D'autre part, la profondeur de pénétration étant de l'ordre de la longueur d'onde, cette profondeur est insuffisante à 600 kHz ($\lambda \simeq 3$ mm) pour l'étude du béton d'enrobage dont l'épaisseur est de 3 à 5 cm. Toute la gamme de fréquences entre 50 kHz et 600 kHz doit donc être théoriquement étudiée pour avoir des informations sur le matériau à des profondeurs variant de quelques millimètres à environ 5 centimètres.

À basses fréquences, les ordres de grandeurs des variations des propriétés des ondes de Rayleigh sont assez faibles (de l'ordre de 30-50 m.s^{-1} pour la vitesse de phase effective, et de 0.5-2 Np.m^{-1} pour l'amortissement effectif). Les propriétés des ondes de Rayleigh cohérentes doivent donc être évaluées avec une grande précision pour pouvoir déceler de faibles variations des propriétés du matériau. La précision de l'évaluation des paramètres des ondes de Rayleigh est liée au protocole expérimental choisi (moyens et méthodes de mesure), à l'évaluation du champ cohérent, et aux méthodes de traitements des signaux enregistrés.

4.3 Mesures expérimentales des ondes de Rayleigh cohérentes sur du béton

Cette partie présente une campagne de mesures expérimentales effectuée avec des ondes de Rayleigh sur des dalles de béton. On va présenter les échantillons de béton étudiés, le protocole expérimental utilisé, et les méthodes de traitement des signaux appliquées, permettant d'évaluer les propriétés des ondes de Rayleigh cohérentes sur du béton ou du mortier en terme de vitesses effectives de phase et de groupe, ainsi que du facteur d'amortissement effectif. Ces résultats ont fait l'objet d'un article en cours de soumission [Chekroun et al., 2008a].

4.3.1 Protocole expérimental

4.3.1.a Dalles de bétons et de mortiers

Les bétons et mortiers étudiés ont été réalisés (conception des formulation et coulage) par Thierry Sedran et Michel Dauvergne de la division TGCE[1] du LCPC. Les échantillons se présentent sous forme de dalles de 600 mm × 600 mm × 120 mm. L'épaisseur de la dalle a été choisie suffisamment grande (120 mm) pour éviter la formation d'ondes de Lamb. Lorsque l'épaisseur de la dalle correspond à un multiple de la demi-longueur d'onde associée aux ondes de compression ou de cisaillement, la fréquence correspondant à cette longueur d'onde est appelée fréquence "critique" associée à un mode de Lamb [Viktorov, 1967]. En pratique, l'épaisseur doit être plus grande que 4 fois la plus grande longueur d'onde étudiée afin d'éviter la formation des premiers modes de Lamb qui sont les plus énergétiques. Pour un béton classique, la vitesse des ondes de surface est d'environ 2200 m.s^{-1}. À 50 kHz, la longueur d'onde vaut donc environ 44 mm. L'épaisseur des dalles sera donc un peu juste pour les fréquences les plus faibles mais suffisante pour les autres.

On étudie 2 séries de bétons, notées B1 et B2. Ces deux séries possèdent les mêmes caractéristiques de granulats (même nature, même quantité, même courbes granulométriques) et ne diffèrent que par leur rapport E/C (défini en 1.1.2). À ces séries de béton s'ajoutent deux séries de mortier, notées M1 et M2, ayant les mêmes propriétés que les bétons B1 et B2 respectivement, mais sans granulats. Les propriétés générales des 4 séries ainsi formées sont résumées dans le tableau 4.2, et les formulations complètes sont détaillées en annexe E. Chaque série de mortiers ou de bétons est composée de 5 dalles issues de la même gâchée.

	E/C = 0,35	E/C = 0,65
Béton : $D_{max} = 20$ mm	B1	B2
Mortier : $D_{max} = 4$ mm	M1	M2

Tab. 4.2 – Propriétés des séries de bétons.

Afin de garantir une teneur en eau de près de 100% dans les dalles (seule teneur en eau dont on puisse être certains), les dalles sont gardées immergées dans une piscine, et ne sont sorties de l'eau que pour la durée de la mesure, qui s'effectue à l'air libre. On vérifie par des pesées et des mesures capacitives (réalisées par Géraldine Villain) que l'effet du séchage des dalles en surface pendant la durée de la mesure (environ 6 heures) est négligeable. On peut alors considérer que les dalles de béton et de mortier ont toujours une teneur en eau proche de la saturation (100%).

Au moment où les mesures sont réalisées, les dalles de bétons et de mortier sont agées de 6 à 10 mois. On considère que les propriétés mécaniques des matériaux sont alors stabilisées dans le temps.

[1] Technologies du Génie Civil et Environnement

4.3.1.b Mesure élémentaire

Principe de la mesure. Le dispositif expérimental est similaire à une acquisition multi-stations communément utilisée en géophysique : une source fixe génère une onde, et une série de récepteurs placés en ligne enregistre les déplacements produits par le passage de l'onde à différentes distances de propagation. Dans le cas présent, on dispose d'une source répétitive, et un récepteur unique est déplacé afin d'enregistrer les signaux aux différents points d'acquisition. Le schéma de ce dispositif est dessiné en figure 4.9. Ce dispositif permet d'acquérir ce que l'on appellera par la suite un profil élémentaire.

Source. L'onde de surface est générée par un transducteur piézoélectrique de fréquence centrale 120 kHz (de marque Imasonic). La bande de fréquence utile de ce transducteur va de 50 kHz à environ 200 kHz. Le transducteur émet des ondes de compression et est équipé d'un "sabot" permettant une incidence de ces ondes avec la dalle à un angle favorisant la conversion en ondes de surface [Piwakowski et al., 2004]. Le sabot utilisé est en polyuréthane, et l'angle, dimensionné pour une vitesse moyenne d'ondes de Rayleigh de 2200 $\mathrm{m.s^{-1}}$, vaut approximativement 39°. La valeur de l'angle n'est donc pas optimale pour tous les types de bétons, et l'on s'assure que ce transducteur émet bien principalement des ondes de surface dans les bétons et mortiers étudiés. Le couplage du sabot du transducteur sur les dalles de béton se fait avec un gel (type Gel D Sofranel) sur une bande adhésive ; la bande adhésive, collée à la surface de la dalle, évite la pénétration du gel dans la dalle au cours de la mesure, et permet un positionnement plus aisé de la source. La partie du sabot en contact avec le matériau est une ellipse de dimensions importantes (les axes de l'ellipse mesurent 55 mm et 35 mm), on choisira par la suite de définir la position de la source au centre de l'ellipse comme référence pour déterminer la distance des points de réception à la source.

La source est excitée avec une ondelette de Ricker de fréquence centrale $f_c = 120\,\mathrm{kHz}$, amplifiée par un amplificateur à porte (Ritek Gated RF amplifier) à une tension de 200 V. Les propriétés de l'ondelette de Ricker ont été définies au chapitre 2 (Eq. 2.80). Pour une fréquence centrale d'excitation de 120 kHz, la bande passante à -20 dB de l'onde émise va de 50 kHz à 200 kHz.

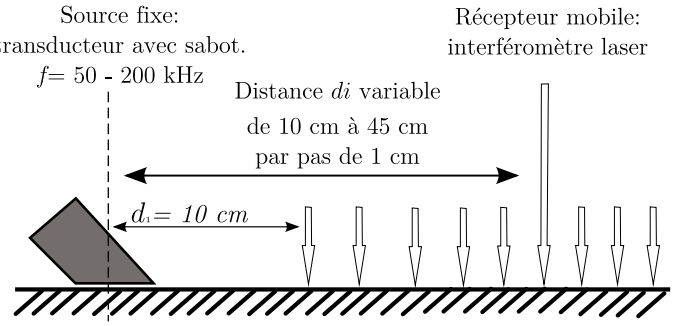


FIG. 4.9 – Dispositif expérimental pour la mesure d'un profil élémentaire.

Récepteur. La réception est faite au moyen d'un interféromètre laser (sonde TEMPO de BossaNova Tech.). Celui-ci permet des mesures très ponctuelles (sa tache focale est de quelques dizaines de microns) du déplacement particulaire normal à la surface du matériau. Le laser utilisé donne également une valeur de calibration permettant à partir du signal électrique enregistré (en V) d'obtenir la valeur absolue du déplacement particulaire en Å pour tous les points de mesure. Une bande adhésive réfléchissante à la surface de la dalle permet d'améliorer la qualité des signaux et le rapport signal sur bruit.

La position du laser est pilotée par un banc automatique à 10 μm près. On enregistre le signal pour différentes distances de propagation d_i le long d'un profil droit. Le premier point du profil est situé à $d_1 = 10\,\text{cm}$ afin de s'affranchir des effets de champ proche de la source. Ensuite on enregistre les signaux entre $d_1 = 10\,\text{cm}$ et $d_{36} = 45\,\text{cm}$ avec un pas $\Delta d = 1\,\text{cm}$. On obtient alors un profil de 36 signaux qui forment ce que l'on va appeler un profil élémentaire. Le schéma du dispositif est présenté en figure 4.9

Chaque signal est acquis sur 13000 points à la fréquence d'échantillonnage $f_s = 10\,\text{MHz}$, pour réduire le niveau de bruit on effectue pour chaque signal une moyenne temporelle sur 256 acquisitions. Le dispositif d'acquisition utilisée est une carte PCI avec une résolution verticale de 16 bits (GAGE CompuScope 1610). Elle permet l'acquisition simultanée du signal détecté par l'interféromètre en V et de la valeur de calibration permettant la conversion des V en Å pour chaque point d'acquisition.

4.3.1.c Réalisations du désordre

Pour obtenir les nombreuses réalisations indépendantes du désordre nécessaires à l'évaluation du champ cohérent, on enregistre plusieurs profils élémentaires parallèles sur chaque face des dalles de béton. Pour chaque profil on garde une distance source-récepteurs identique ainsi qu'un nombre de points de réception identique pour que les profils soient équivalents. Chaque profil est séparé des autres d'une distance de $L = 40\,\text{mm}$, qui est supérieure à la plus grande demi-longueur d'onde utilisée, afin que les réalisations du désordre puissent être considérées comme étant indépendantes. La photo en figure 4.10 illustre quelques profils réalisés.

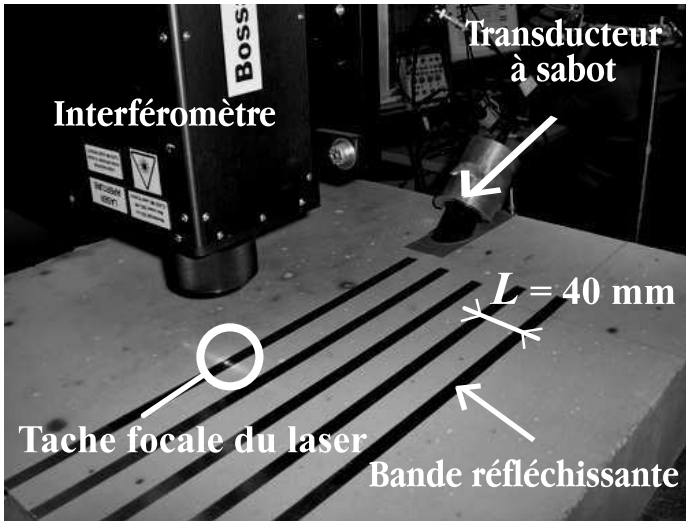


Fig. 4.10 – Photographie du dispositif expérimental. Acquisition des profils parallèles pour obtenir les réalisations du désordre.

On réalise 9 profils sur chaque face des dalles. Chaque série étant composée de 5 dalles, on mesure ainsi 90 profils élémentaires par série de béton. On a vu au chapitre 3 que du fait des dimensions petites de ses hétérogénéités, le mortier pouvait être considéré comme un matériau peu hétérogène pour les fréquences considérées, on se contente pour des raisons de temps de mesure de n'acquérir que 36 profils élémentaires par série de mortier.

4.3.2 Prétraitements et obtention du champ cohérent

4.3.2.a Description des prétraitements

Composante continue. Les signaux présentent tous une très légère composante continue. Cette composante continue est relativement faible, mais on peut tout de même la retirer sans difficultés de chaque signal.

Amortissement géométrique. En milieu élastique, l'amplitude des ondes de surface décroît avec la distance de propagation d en $1/\sqrt{d}$ à cause de l'amortissement géométrique, dans le cas d'une source ponctuelle ou dans l'axe perpendiculaire à une ligne source. Cette approximation reste valable dans l'axe des transducteurs à sabot utilisés. Il convient de compenser cet artefact de mesure en multipliant tous les signaux enregistrés à la distance d_i par $\sqrt{d_i}$. L'atténuation mesurée contiendra alors uniquement des informations sur l'amortissement intrinsèque des matériaux ainsi que l'amortissement lié au phénomène de diffusion multiple.

Normalisation des profils. Pour chaque profil élémentaire mesuré, le transducteur source est placé manuellement, et la focale du laser est ajustée afin d'avoir la meilleure réception possible. Les 36 signaux composant le profil sont enregistrés avec les mêmes réglages afin de pouvoir être comparés les uns aux autres. Cependant les réglages varient d'un profil à l'autre, et les amplitudes ne sont pas directement comparables. La figure 4.11 présente l'amplitude maximale du déplacement (en Å) observée sur chaque profil mesuré sur la série M2.

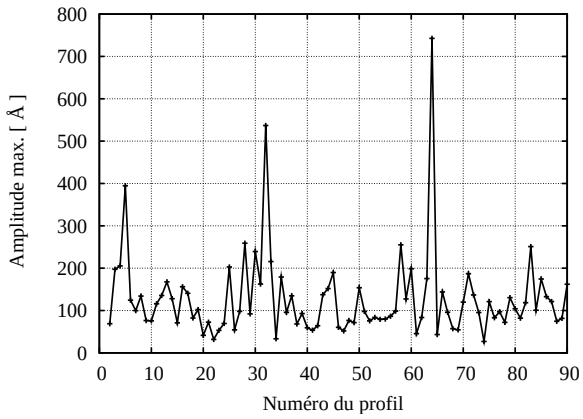


FIG. 4.11 – Amplitude maximale du déplacement en Å pour chaque profil.

Cette amplitude maximale varie généralement entre 30 et 200 Å mais peut atteindre exceptionnellement plus de 700 Å sur certains profils. Ces différences proviennent principalement de différences de couplage entre le transducteur et le béton, le positionnement se faisant manuellement. Le positionnement du transducteur n'est pas reproductible et si la surface du sabot du transducteur n'est pas totalement en contact avec le matériau (bulle d'air dans le gel, transducteur légèrement en "porte-à-faux" du fait de son propre poids mal équilibré, ...) l'amplitude de l'onde transmise peut varier énormément.

Ces variations s'avèreront gênantes lorsque l'on effectuera la moyenne spatiale des signaux en vue d'obtenir le champ cohérent. La valeur absolue de l'amplitude du déplacement n'étant pas utile pour évaluer les vitesses de phase, de groupe et les facteurs d'amortissement avec les méthodes de traitement du signal utilisées, on normalise alors les signaux pour chaque profil par rapport à l'amplitude maximale du déplacement parmi les 36 signaux du profil.

Recalage des signaux. Les moyennes spatiales à effectuer pour obtenir le champ cohérent supposent des réalisations équivalentes du désordre. En particulier, la distance source - premier récepteur doit être la même pour chaque profil. Le transducteur étant positionné à la main, cette distance ne peut pas être rigoureusement la même d'un profil à l'autre. Il en résulte des petits décalages temporels entre les signaux censés être pris à la même distance de la source.

On évalue ces décalages par intercorrélation entre les signaux des premiers points de réception pour chaque profil. Ces décalages sont alors compensés pour tous les signaux du profil. Tous les traitements ultérieurs (calcul des courbes de dispersion et d'atténuation) se font en comparant les propriétés des traces entre elles (amplitudes spectrales, phases), et ne nécessitent pas de connaître exactement l'origine des temps et des espaces.

4.3.2.b Obtention du champ cohérent

Sismogrammes individuels. Chaque profil élémentaire est composé de 36 signaux enregistrés à différentes distances d_i $(i = 1, \ldots, 36)$ de propagation. On peut représenter les signaux de chaque profil sous la forme d'un sismogramme. La figure 4.12 présente deux sismogrammes correspondant à deux profils enregistrés sur des dalles de la série de bétons B2. On peut distinguer notamment sur les deux sismogrammes présentés un train d'onde principal, suivi d'une partie incohérente qui varie d'un sismogramme à l'autre.

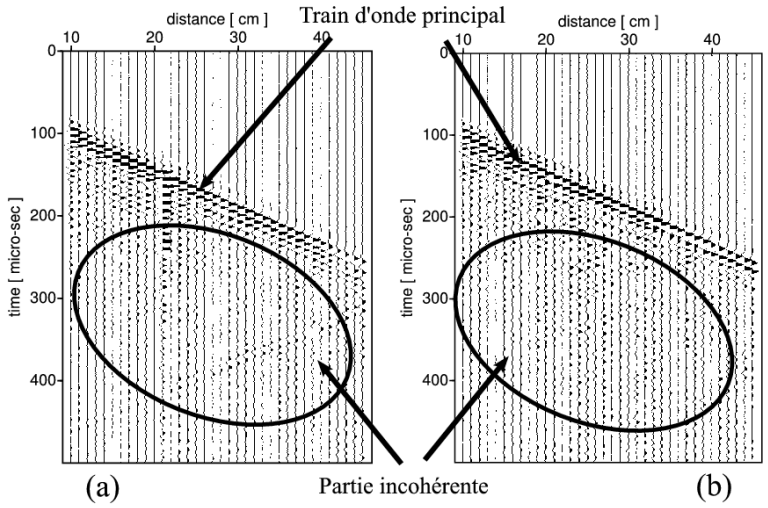
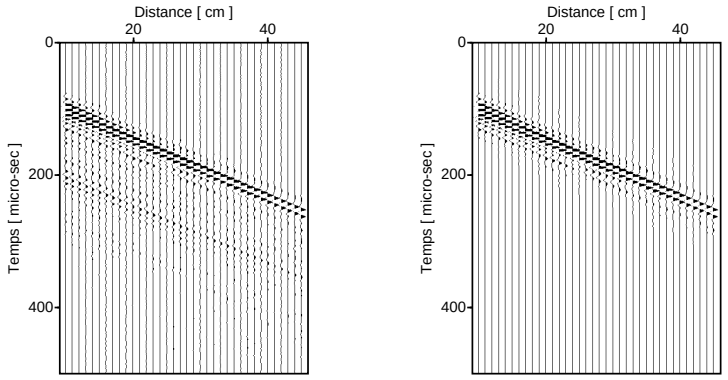


Fig. 4.12 – Visualisation de deux sismogrammes individuels mesurés sur le béton B2.

Champ cohérent. Après moyennage des sismogrammes sur les 90 réalisations du désordre considérées, on obtient le sismogramme cohérent présenté en figure 4.13(a). Sur ce sismogramme cohérent, on voit toujours le train d'onde principal, et la partie incohérente des signaux a été considérablement diminuée. On voit alors apparaître un second train d'onde qui n'était pas visible sur les sismogrammes individuels présentés en figure 4.12. Ce second train d'onde est parallèle au train d'onde principal, et correspond à une onde se propageant dans la même direction et à une vitesse très proche de celle du train d'onde principal. Des vérifications sur le transducteur ont permis de montrer que ce second train d'onde correspond à une réflection de l'onde émise par le transducteur à l'intérieur du sabot. Afin de l'éliminer, on fenêtre le champ cohérent autour du train d'onde principal avec une fenêtre de Hann "flat-top". Le champ cohérent ainsi fenêtré est présenté en figure 4.13.



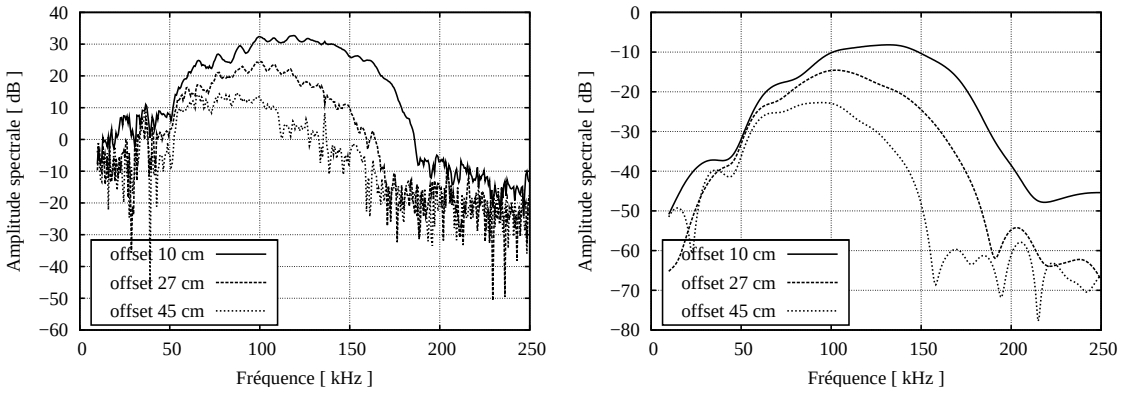
(a) champ cohérent (b) champ cohérent fenêtré

FIG. 4.13 – Allure du sismogramme cohérent pour la série de béton B2. (a) Sismogramme non fenêtré, (b) Sismogramme fenêtré autour du train d'onde principal.

4.3.2.c Amplitudes spectrales

Les méthodes de traitement qui vont être utilisées pour évaluer les courbes de dispersion en vitesse de phase, de groupe et les courbes d'amortissement, utilisent toutes les transformées de Fourier des signaux.

Par exemple, les spectres pour la série B2 sont présentés en figure 4.14. On y retrouve l'allure des spectres bruts (a) et on peut les comparer à l'allure des spectres avec les prétraitements (b). Les spectres sont présentés pour 3 distances de propagation ; le premier et le dernier point de réception, ainsi qu'un point situé au milieu du profil.



(a) Spectres bruts (b) Avec les prétraitements

FIG. 4.14 – Allure du module du spectre à différentes distances de propagation avec ou sans prétraitements.

Après prétraitements (présentés en 4.3.2.a), les spectres sont globalement beaucoup plus lisses. Les spectres du signal brut comportent des "pics" (notamment vers 136 kHz) dus au bruit de mesure de l'interféromètre. Ces pics disparaissent après les prétraitements et de manière générale tous les artefacts liés au bruit de mesure disparaissent également.

Ces spectres donnent des informations importantes sur la gamme de fréquences dans laquelle les traitements proprement dits pourront être réalisés. La limite basse fréquence sera d'après ces figures autour de 50-60 kHz. En dessous de cette fréquence, les spectres rejoignent le niveau de

bruit.

L'amortissement est plus important à hautes fréquences ; les spectres des signaux acquis le plus loin de la source rejoignent plus rapidement le niveau de bruit que ceux acquis proche de la source. L'amplitude du signal mesuré à l'offset $d_1 = 10\,\text{cm}$ (le premier) rejoint son niveau de bruit à hautes fréquences vers 200-210 kHz. Par contre le signal situé à l'offset $d_{36} = 45\,\text{cm}$ rejoint le niveau de bruit vers seulement 150 kHz. Par conséquent, les plus hautes fréquences (150-200 kHz) n'auront pas assez d'énergie pour atteindre les derniers récepteurs donc il sera inutile d'essayer d'extraire des informations dans cette bande de fréquence avec les derniers récepteurs.

En fonction de la série de béton ou mortier considérée, l'amortissement est plus ou moins important. La distance à la source à partir de laquelle l'amplitude d'une composante fréquentielle du champ cohérent rejoint le niveau de bruit va donc varier en fonction du matériau considéré. L'étude des amplitudes spectrales du champ cohérent sera donc menée attentivement pour chaque série étudiée afin de déterminer quels points de réception doivent être considérés pour l'étude d'une composante fréquentielle donnée. Pour les plus basses fréquences, les signaux de tous les points de réception pourront être utilisés, puis pour les fréquences les plus élevées, on éliminera les points de réception pour lesquels les amplitudes spectrales sont trop proches du niveau de bruit pour contenir une information exploitable.

4.3.2.d Évaluation de la vitesse de phase et amortissement

Les courbes de dispersion en vitesse de phase et les courbes d'amortissement sont déterminées en utilisant les méthodes présentées au chapitres 2.3.3.b et 2.3.3.d pour traiter les résultats des simulations numériques.

La méthode utilisée pour la détermination de la vitesse de phase c_r (transformée $p-\omega$) impose des restrictions concernant le nombre et la position des points de réception à considérer (voir paragraphe 2.3.3.c). Notamment, la longueur totale du dispositif entre le premier et le dernier point d'acquisition considéré doit être au moins supérieure à 2 à 3 fois la longueur d'onde. La longueur totale du dispositif utilisé ici (35 cm) est largement suffisante même en considérant un matériau pour lequel la vitesse des ondes de Rayleigh est très rapide. Pour les fréquences les plus basses, les signaux des points de réception les plus lointains contiennent suffisamment d'énergie pour que tous les points de réception soient utilisés. Pour les plus hautes fréquences, les points de réception les plus lointains ont un rapport signal sur bruit trop faible pour être exploités, mais les longueurs d'onde étant plus courtes, on peut se contenter d'un nombre de points de réception réduit en ne considérant que les signaux acquis le plus proche de la source.

L'évaluation des courbes d'amortissement effectif α se fait en faisant une régression linéaire du logarithme népérien de l'amplitude spectrale en fonction de la distance de propagation à une fréquence donnée. Cette fois aussi on élimine les récepteurs situés loin de la source pour lesquels le rapport signal sur bruit est trop faible. La figure 4.15 présente un exemple de variations du logarithme de l'amplitude spectrale avec la distance de propagation pour différentes fréquences, les courbes sont tracées jusqu'à ce que le niveau de bruit soit atteint. On ne constate pas d'effets de champ proche sur les signaux acquis avec les récepteurs le plus proche de la source : la distance choisie pour positionner le premier récepteur à 10 cm de la source est donc suffisante.

4.3.3 Vitesse de groupe

4.3.3.a Intérêt

Les courbes de dispersion en vitesse de groupe c_g peuvent être théoriquement déduites des courbes de dispersion en vitesse de phase par la relation [Carcione, 2001] :

$$c_r = \frac{\omega}{k_r} \qquad \text{et} \qquad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_r}, \tag{4.20}$$

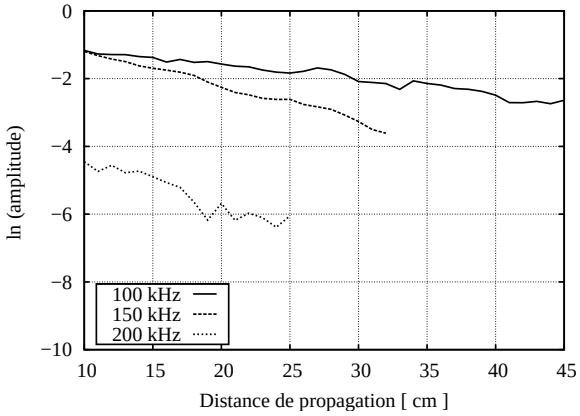


FIG. 4.15 – Variations du module du logarithme népérien du module de l'amplitude spectrale avec la distance de propagation pour le champ cohérent de la série de béton B2.

où l'on note c_r la vitesse de phase, ω la pulsation, k_r la partie réelle du nombre d'onde, et c_g la vitesse de groupe.

Cependant, dans le cas de mesures expérimentales, la dérivation numérique de la courbe $c_r(\omega)$ est imprécise et n'apporte pas d'informations supplémentaires sur la propagation. L'utilisation d'une méthode permettant d'évaluer directement les courbes de dispersion en vitesse de groupe à partir des signaux mesurés est intéressante car elle procure une information complémentaire sur la propagation des ondes qui est indépendante de la méthode utilisée pour l'évaluation de la vitesse de phase.

4.3.3.b Filtrage multiple (MFA)

La méthode du filtrage multiple (ou en anglais *Multiple Filter Analysis* MFA) est classiquement utilisée en géophysique pour déterminer des retards de groupe, et donc des courbes de dispersion en vitesse de groupe [Dziewonsky et al., 1969].

Principe. Le signal étudié est filtré par une série de i filtres passe-bande gaussiens centrés autour des fréquences f_i. On obtient une série de paquets d'ondes dans le domaine temporel. En pointant le temps de trajet Δt_i du maximum de l'enveloppe de chaque paquet d'onde sur une distance Δd, on peut en déduire une vitesse que l'on assimile à la vitesse de groupe $c_g(f_i)$.

Mise en oeuvre. Considérons un signal $s(t)$ enregistré en un point d'acquisition situé à une distance d de la source. On effectue tout d'abord la transformée de Fourier de ce signal.

$$s(t) \xrightarrow{TF} S(f) \tag{4.21}$$

Après le choix des fréquences minimales et maximales f_{min} et f_{max} entre lesquelles on va déterminer la courbe de dispersion, on détermine les N fréquences centrales f_i des N filtres qui seront utilisés. La largeur de chaque filtre pourra être fixe ou variable. On choisit d'utiliser des filtres de largeur variable. Cette largeur est déterminée par un paramètre noté η, de telle sorte que la largeur caractéristique du filtre i à la fréquence f_i soit ηf_i.

Les filtres utilisés sont des filtres passe-bande gaussiens centrés à la fréquence f_i et de largeur caractéristique ηf_i. Ils sont définis de la manière suivante ;

$$G_i(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{f - f_i}{\eta f_i}\right)^2\right) \tag{4.22}$$

Le filtrage proprement dit est effectué par une multiplication du signal $S(f)$ par chaque filtre $G_i(f)$ dans le domaine fréquentiel (soit une convolution dans le domaine temporel). Les signaux ainsi filtrés $SG_i(f)$ sont ensuite ré-exprimés dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse.

$$SG_i(f) \;=\; S(f)G_i(f) \;\overset{TF^{-1}}{\longrightarrow}\; sg_i(t) \;=\; s(t) * g(t) \tag{4.23}$$

Les signaux $sg_i(t)$ obtenus sont des paquets d'onde centrés autour de la fréquence f_i. En notant $sg(t, f_i) = |sg_i(t)|^2$, on peut alors tracer une carte de couleurs semblable à un spectrogramme pour tous les temps et toutes les fréquences centrales des filtres étudiés. La discrétisation en temps dépendra de la fréquence d'échantillonnage f_s du signal initial, tandis que la discrétisation en fréquence dépendra du nombre de filtres utilisés ainsi que de la plage fréquentielle d'étude (en respectant le critère de Shannon $f_{max} < {}^{f_s}/_2$).

On détermine alors le temps d'arrivée du paquet d'onde centré autour de la fréquence f_i en pointant le maximum du spectrogramme pour chaque fréquence :

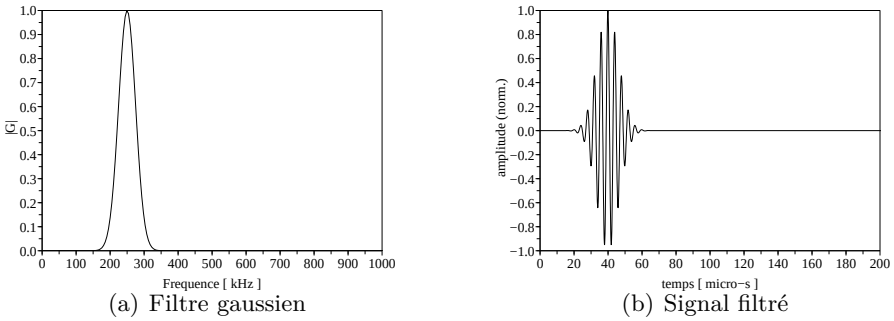
$$t(f_i) \;=\; \max\left(sg(t, f_i)\right) \tag{4.24}$$

On peut alors évaluer le retard de groupe $\Delta t(f_i)$ à la fréquence f_i en comparant les maxima des spectrogrammes obtenus pour des signaux enregistrés en deux points séparés d'une distance Δd. La vitesse de groupe sera alors évaluée par la relation $c_g(f_i) = {}^{\Delta d}/_{\Delta t_i}$.

Largeur des filtres. La largeur du filtre est à définir par l'utilisateur. Cette largeur peut être fixe pour toutes les fréquences ou bien variable, exprimée comme un pourcentage η de la fréquence étudiée. Un filtre trop large prend en compte le comportement des fréquences voisines à la fréquence étudiée et peut engendrer des imprécisions notamment en cas de signal fortement dispersif où la vitesse de groupe varie fortement à l'intérieur de la bande passante du filtre. À l'inverse un filtre trop étroit donnera des paquets d'ondes peu énergétiques et donnera des résultats imprécis. On choisit d'utiliser des filtres de largeur égale à 7% de la fréquence considérée ($\eta = 0.07$).

Application avec une impulsion Dirac. On présente l'application de la méthode ci-dessus sur un cas très simple. On considère un Dirac d'amplitude 1 émis en $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ qui se propage à la vitesse $c = 5000\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Il se propage sur une distance $d = 0.2\,\mathrm{m}$ et est donc mesuré à l'instant à $t_d = 40\,\mu\mathrm{s}$.

Un exemple de filtre gaussien est présenté en figure 4.16 avec $f_i = 250\,\mathrm{kHz}$ et $\eta = 0.07$.

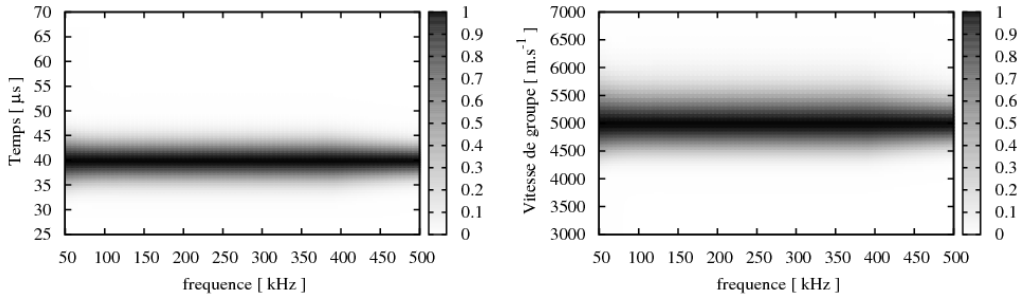


(a) Filtre gaussien (b) Signal filtré

Fig. 4.16 – Exemple du filtrage d'un Dirac par un filtre gaussien centré en $f_i = 250\,\mathrm{kHz}$ de largeur $0.07 f_i$ (a) le signal filtré est présenté en (b)

Pour chaque fréquence f_i on obtient alors le retard de groupe t_i qui peut être converti en vitesse de groupe $c_{g,i}$ à partir du temps auquel le Dirac a été émis (ici $t_0 = 0\,\mathrm{s}$) et de la distance

parcourue. On obtient alors une carte de couleur en traçant l'amplitude de l'énergie des signaux filtrés $xg_i(t)$ pour chaque fréquence f_i (Fig. 4.17).



(a) Retard de groupe (b) Vitesse de groupe

FIG. 4.17 – Exemple d'application de la méthode MFA pour l'évaluation de la vitesse de groupe sur un Dirac.

La carte résultant de la MFA restitue donc bien la vitesse de groupe (égale dans ce cas à la vitesse de phase) dans le cas simple d'un Dirac. On constate cependant que la localisation du maximum du lobe pour chaque fréquence est imprécise. C'est l'une des limitations majeures de cette technique ; le fait de filtrer étale l'énergie dans le temps. Cela est plus clairement visible en figure 4.16-(b) ou l'impulsion Dirac initiale est étalée par le filtrage. La largeur de cet étalement est liée à la largeur η des filtres utilisés.

4.3.3.c Réallocation de spectrogramme

La réallocation[2] est une méthode de traitement du signal permettant d'améliorer la résolution et la précision des spectrogrammes. Le principe de la réallocation a été énoncé par Kodera et al. [1976]. Cette méthode a par la suite été bien détaillée par Auger and Flandrin [1995] et Flandrin [1993], et a été plus spécifiquement utilisée à partir de la MFA pour obtenir des courbes de dispersion par MFA-reallouée par Pedersen et al. [2003].

Principe. La réallocation est basée initialement sur les propriétés de la distribution de Wigner-Ville, mais est applicable à beaucoup d'autres représentations de type "temps-fréquence" (spectrogrammes, transformées de Fourier à court terme, etc...).

Le principe de la réallocation se base sur le fait que les erreurs sont des effets prédictibles si l'on connaît les caractéristiques des filtres. Les méthodes classiques attribuent l'énergie du signal à un point dans le plan temps-fréquence correspondant au centre en fréquence et en temps du filtre utilisé. Du fait de la largeur des filtres il se peut qu'en un point où il n'y a théoriquement pas d'énergie l'énergie attribuée soit non nulle. Plutôt que d'attribuer l'énergie du signal à ce point, l'énergie est attribuée à un point correspondant au centre de gravité de l'énergie.

Le calcul consiste donc à évaluer pour chaque point de calcul (t, f), outre la valeur du signal filtré $|sg(t, f)|^2$ (MFA), les centres de gravité locaux en temps et en fréquence $\hat{t}(t, f)$ et $\hat{f}(t, f)$. La valeur obtenue par la MFA sera alors attribuée à cette paire de points modifiée :

$$|xg(t, f)|^2 \quad \longrightarrow \quad S\left(\hat{t}(t, f)\,,\, \hat{f}(t, f)\right) \tag{4.25}$$

[2] ou *Reassignment* en anglais.

Mise en oeuvre du calcul pour le Filtrage Multiple Réalloué. Cette procédure correspond en fait à l'application à chaque fréquence de 3 filtres au lieu d'un seul (pour les démonstrations complètes, se référer à [Auger and Flandrin, 1995], [Flandrin, 1993] ou [Pedersen et al., 2003]), qui sont :

- $g_i(t)$, le filtre gaussien de la MFA à la fréquence f_i,
- $Tg_i(t) = t.g_i(t)$, sa multiplication avec t en temps,
- $Dg_i(t) = \frac{\partial g_i}{\partial t}(t)$, sa dérivée temporelle.

Les 3 filtrages sont réalisés par convolution des trois filtres avec le signal $s(t)$ dans le domaine temporel, soit une multiplication dans le domaine fréquentiel. Les trois résultats du filtrage sont notés de la manière suivante après avoir été ré-exprimés dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse :

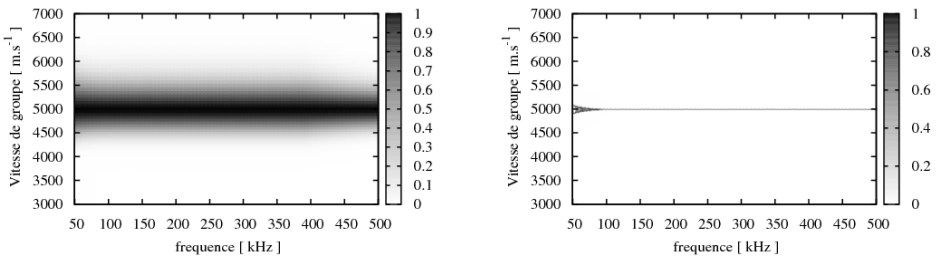
$$sg(t, f_i) = s(t) * g_i(t) \tag{4.26}$$
$$Tsg(t, f_i) = s(t) * Tg_i(t) \tag{4.27}$$
$$Dsg(t, f_i) = s(t) * Dg_i(t) \tag{4.28}$$

On définit alors les lieux du centre de gravité de l'énergie de la manière suivante :

$$\hat{t}(t, f_i) = t - \Re\mathrm{e}\left(\frac{Tsg(t, f_i)}{sg(t, f_i)}\right) \tag{4.29}$$
$$\hat{f}(t, f_i) = f_i + \frac{1}{2\pi}\Im\mathrm{m}\left(\frac{Dsg(t, f_i)}{sg(t, f_i)}\right) \tag{4.30}$$

Enfin l'énergie $|sg(t, f)|^2$ calculée au point (t, f) est attribuée au point modifié $(\hat{t}(t, f), \hat{f}(t, f))$ suivant la relation 4.25. La contribution de l'énergie calculée en différents points (t, f) peut être réallouée en un même point $(\hat{t}, \hat{f})$. L'énergie est donc en quelque sorte retirée des zones où elle n'est pas réellement présente pour renforcer les contributions dans les zones où elle est effectivement présente. La lisibilité des cartes de couleur est améliorée par rapport à la MFA classique.

Exemple d'application sur un Dirac. On applique la méthode de réallocation de la MFA aux même signal étudié en figure 4.17 ; un Dirac de vitesse $c = 5000\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Les résultats pour la MFA classique et la MFA réallouée sont présentés en figure 4.18.



(a) MFA classique (b) MFA réallouée

Fig. 4.18 – Comparaison des cartes obtenues avec le filtrage multiple classique (a) et après réallocation (b), dans le cas d'un Dirac de vitesse $c = 5000\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

On constate que la vitesse de groupe, correspondant au maximums des cartes de la figure 4.18 est bien mieux localisée avec la réallocation, la largeur du lobe étant très fine. Un artefact apparaît à basse fréquence sur la carte réallouée, et le lobe principal semble se diviser en deux.

Pour les fréquences les plus basses, les filtres utilisés sont plus larges, et le signal filtré peut alors présenter des oscillations qui dépassent la longueur totale du signal disponible, ce qui provoque ces erreurs lors de la réallocation. En considérant des signaux suffisamment longs temporellement, cet effet disparaît.

4.3.3.d Application aux signaux mesurés

Cas idéal. La méthode de filtrage multiple réalloué présentée ci-dessus est particulièrement adaptée si l'on dispose d'une source ponctuelle dont on connaît parfaitement la position, et émettant un signal à phase nulle (dont toutes les composantes fréquentielles sont émises au même instant) à un temps t_0 connu. Un unique point de mesure à une distance d de la source est alors suffisant pour déterminer le spectrogramme et la courbe de dispersion en vitesse de groupe. Ces conditions présentent en plus l'avantage de pouvoir distinguer simultanément différents modes de propagation dans le cas d'un milieu multimodal.

Cas réel. Toutes ces conditions ne sont pas réunies pour ces mesures. Notamment, la position de la source n'est pas connue précisément du fait des dimension importantes du transducteur. L'ondelette de Ricker utilisée pour exciter le transducteur est bien un signal à phase nulle, mais la réponse du transducteur couplé au matériau et de la chaîne d'amplification de la source déforme l'ondelette initiale, de telle sorte que l'on ne peut savoir précisément ni la position ni l'allure du signal émis par la source.

En supposant qu'un seul mode de propagation est présent, chaque signal filtré par un filtre gaussien ne donnera qu'un seul paquet d'ondes à la fréquence donnée. On peut alors comparer les retards de groupe entre deux signaux pris à des distances de propagation différentes.

On effectue l'opération de filtrage multiple réalloué sur un premier signal $s_1(t)$ et on obtient les temps d'arrivée $t_1(f_i)$ des paquets d'ondes aux fréquences f_i étudiées. On effectue ensuite le filtrage multiple pour un autre signal $s_2(t)$ en un point situé à la distance Δd du premier point considéré. On évalue l'écart temporel $\Delta t(f_i) = t_2(f_i) - t_1(f_i)$ entre les arrivées des paquets d'ondes pour chaque fréquence étudiée, donnant ainsi le temps mis par l'onde pour se propager sur la distance Δd. En rapportant ces écarts temporels à la distance entre les deux traces, on obtient une évaluation de la vitesse de groupe $c_g(f_i)$.

Mise en pratique. Deux points d'acquisition seulement sont alors nécessaires pour évaluer la vitesse de groupe. Comme le dispositif expérimental nous fournit 36 signaux pour le champ cohérent, on peut évaluer cette vitesse de groupe en utilisant plusieurs paires de récepteurs disponibles (il y a 630 combinaisons). En pratique, on a vu que les signaux enregistrés le plus loin de la source étaient assez peu énergétiques à hautes fréquences, ils ne seront pas utilisés. Le point d'acquisition fournissant le signal le plus énergétique est le point situé le plus proche de la source, il sera choisi comme signal de référence. On s'assure avec ce signal de référence qu'il n'y a qu'un seul mode de propagation des ondes de surface présent.

Le fait d'utiliser deux récepteurs trop proches l'un de l'autre provoque de grandes fluctuations dans les résultats du fait des valeurs de Δd et Δt trop faibles. On calcule alors les spectrogrammes réalloués sur les signaux acquis à partir du récepteurs numéro 10 (avec $d_{10} - d_1 = 9\,\text{cm}$) et jusqu'au récepteur numéro 30. Le schéma 4.19 présente les points de réception utilisés. Pour chaque point de réception, on calcule le spectrogramme par filtrage multiple réalloué, puis on le convertit en carte de vitesses de groupe en comparant au signal de référence. On fait ensuite la moyenne des cartes de couleur obtenues et on pointe le maximum de la carte moyennée pour évaluer la vitesse de groupe.

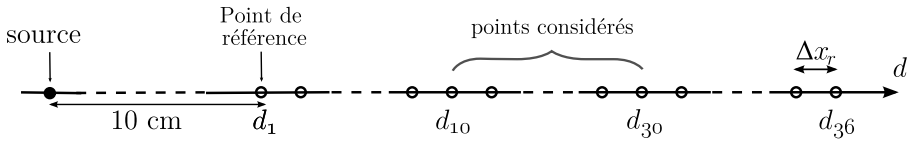


Fig. 4.19 – Schéma des récepteurs utilisés pour l'évaluation de la vitesse de groupe par filtrage multiple réalloué.

4.3.4 Résultats expérimentaux et discussion

On présente dans cette partie les résultats expérimentaux de l'analyse des ondes de Rayleigh cohérentes sur les séries de bétons et mortiers étudiées. Les conventions suivantes seront utilisées pour le tracé et la comparaison des courbes. Les deux séries de bétons seront représentées par des cercles ou des triangles vides (○ ou △) , tandis que les séries de mortier seront représentées par des cercles ou des triangles pleins (● ou ▲). Les caractéristiques principales des séries de bétons et de mortiers étudiés sont rappelés en figure 4.3.

	E/C = 0.35	E/C = 0.65
Béton : $D_{max} = 20\,\text{mm}$	B1 (○)	B2 (△)
Mortier : $D_{max} = 4\,\text{mm}$	M1 (●)	M2 (▲)

Tab. 4.3 – Rappel des propriétés des séries de bétons et mortiers étudiés.

Pour chaque série, on applique les prétraitements sur tous les signaux enregistrés, et on évalue le champ cohérent en moyennant spatialement les signaux. Les propriétés du milieu effectif (vitesse de phase, de groupe, et atténuation) sont évaluées à partir des sismogrammes cohérents obtenus.

4.3.4.a Vitesse de phase effective

Les courbes de dispersion en vitesse de phase des ondes de Rayleigh cohérentes pour chaque série sont présentées en figure 4.20. La méthode utilisée pour évaluer ces courbes de dispersion (transformée $p - \omega$) sur le champ cohérent donne des résultats avec des barres d'erreur très faibles (voir le paragraphe 2.3.3.c) ; elles sont représentées sur la figure mais ne sont quasiment pas visibles, excepté pour les fréquences les plus basses.

On peut clairement distinguer les courbes de dispersions des différentes séries les unes des autres, les différences de vitesse étant importantes. Pour un rapport E/C donné, la comparaison entre la courbe obtenue sur le mortier seul et celle obtenue sur le béton montre que la présence des granulats fait augmenter la valeur de la vitesse de phase effective de environ 10%. Les courbes obtenues avec un rapport E/C élevé (séries B2 et M2) ont des vitesses plus faibles que celles obtenues avec un faible rapport E/C. Cet effet a également été observé par plusieurs auteurs [Philippidis and Aggelis, 2005]. En effet, un béton ou mortier ayant un rapport E/C élevé possède une porosité plus importante, et des propriétés mécaniques (module d'Young) plus faibles. Ces effets se traduisent par des vitesses de propagation des ondes dans le matériau plus faibles. On peut voir par exemple les résultats des essais de mesure du module d'Young sur des éprouvettes correspondant aux bétons étudiés en annexe E. Le coefficient de Poisson de ces éprouvettes n'est cependant pas connu et on ne peut donc pas estimer des vitesses de propagation théoriques à partir de ces modules pour les comparer à nos résultats expérimentaux.

Pour les séries B1 et M1, correspondant à un rapport E/C très faible, l'allure des courbes de dispersion en vitesse de phase est à peu près constante avec la fréquence, dans la bande de fréquence étudiée. A l'inverse, on observe une légère diminution de la vitesse de phase à mesure que la fréquence augmente sur les séries à fort rapport E/C. Pour les ondes de Rayleigh, cet effet

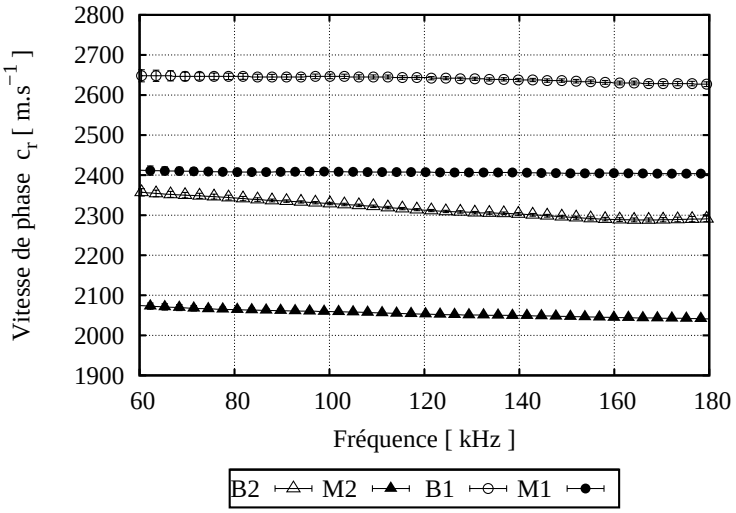


FIG. 4.20 – Courbes de dispersion en vitesse de phase effective des ondes de Rayleigh pour chaque série étudiée.

est en général dû à des variations de propriétés du matériau avec la profondeur (milieu stratifié horizontalement ou gradient continu avec la profondeur).

Dans le béton, la distribution et l'empilement des granulats dans le volume formé par les moules des dalles provoque un effet appelé "effet de paroi". Les plus gros granulats ne peuvent avoir leur centre situé à une distance des parois du moule inférieure à leur rayon, en conséquence, on peut observer une variation de distribution de granulats en surface sur une profondeur de l'ordre de $D_{max.}/2$ [Zheng et al., 2003]. Cet effet de paroi n'est pas la cause ici de la dispersion de la vitesse de phase des ondes de Rayleigh ; la dispersion se produit aussi bien sur le béton B2 que sur le mortier M2, qui ne possède pas de gros granulats. De plus, la vitesse de phase effective du béton B1, qui possède les mêmes caractéristiques de granulats que B2, ne présente pas cet effet de dispersion, qui n'est donc pas due aux granulats.

La majeure différence entre les séries B1 et M1 d'une part, et les séries B2 et M2 d'autre part est le rapport E/C, directement lié à la porosité du matériau. La dispersion des ondes de Rayleigh se produit ici lorsque le rapport E/C est élevé. Lorsque le rapport E/C est élevé, le béton ou le mortier contient beaucoup d'eau et est très fluide lors du coulage des dalles. Il se peut alors que ce béton présente une variation de porosité avec la profondeur due à la fluidité du béton lors du coulage des dalles.

4.3.4.b Vitesse de groupe effective

Les courbes de dispersion en vitesse de groupe du milieu effectif sont présentées en figure 4.21. Étant évaluées avec une méthode différente de celle utilisée pour les courbes de vitesse de phase, ces courbes fournissent une information complémentaire sur la propagation des ondes dans le béton.

Tout comme pour les courbes de dispersion en vitesse de phase, les 4 séries étudiées donnent des valeurs de vitesse de groupe très différentes, et la vitesse de groupe moyenne est en général sensiblement égale à la vitesse de phase moyenne. Le comportement fréquentiel des courbes de vitesse de groupe est par contre différent de celui des courbes de vitesse de phase.

Pour les mortiers M1 et M2, la vitesse de groupe effective est à peu près constante avec la fréquence. Dans le cas des deux séries de bétons B1 et B2, les courbes varient avec la fréquence de manière similaire. Aux alentours de 80-100 kHz, la vitesse de groupe décroît de environ 100 m.s^{-1} jusqu'à 120-130 kHz, puis croît de nouveau avec la fréquence à partir de 150 kHz. Ces variations

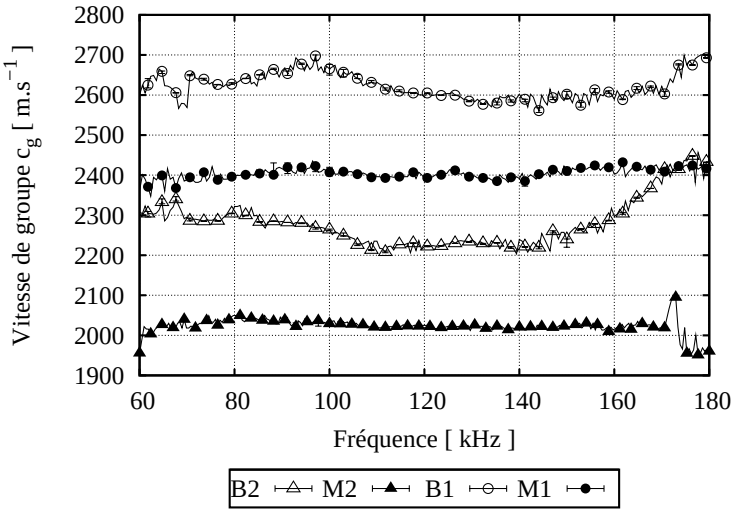


Fig. 4.21 – Courbes de dispersion en vitesse de groupe des ondes de Rayleigh effective pour chaque série étudiée.

fréquentielles sont significatives et ne sont pas présentes sur les courbes mesurées sur le mortier. La présence des granulats dans le béton modifie donc l'allure des courbes de dispersion en vitesse de groupe.

Dans cette bande de fréquence, l'étude des courbes de dispersion en vitesse de phase et en vitesse de groupe fournissent des informations complémentaires sur le matériau. Les courbes de vitesse de groupe sont sensibles à la présence des granulats ; la présence des granulats provoque des fluctuations significatives de la vitesse de groupe avec la fréquence. À l'inverse ce phénomène n'est pas décelable sur les courbes de dispersion en vitesse de phase. Le comportement fréquentiel des courbes de vitesse de phase est plutôt sensible au rapport E/C du matériau ; la dispersion de la vitesse de phase est plus importante dans le cas d'un rapport E/C élevé, que ce soit sur du mortier ou du béton.

4.3.4.c Amortissement effectif

Les chapitres précédents ont montré l'intérêt de l'étude de l'amortissement pour l'évaluation du béton. L'amortissement peut fournir des informations sur la présence de grosses hétérogénéités (granulats), les propriétés microstructurelles du béton (porosité, sables), ainsi que sur les propriétés viscoélastiques du matériau. Cette multiplicité de facteurs en fait également un paramètre difficile à interpréter, notamment pour tenter de distinguer les contributions de chaque effet amortissant. On peut cependant comparer, tout comme au chapitre 3, les courbes d'amortissement effectif obtenues sur des mortiers différents, puis sur des bétons. On peut ainsi observer expérimentalement les phénomènes qu'il est possible de détecter et de quantifier par l'étude des courbes d'amortissement des ondes de Rayleigh avec les méthodes de traitement choisies. Les courbes expérimentales obtenues sont présentées en figure 4.22.

Les courbes correspondant aux mortiers M1 et M2 ont un comportement à peu près linéaire avec la fréquence. L'amortissement est plus élevé dans le cas du mortier M2 ayant le rapport E/C le plus élevé. L'écart entre les deux courbes est de l'ordre de 1 à 2 $Np.m^{-1}$ seulement suivant les fréquences, bien que les rapports E/C des deux séries de mortiers soient très différents. Le dispositif expérimental choisi, associé aux méthodes de traitement utilisées, permet d'obtenir une précision très inférieure à 0.5 $Np.m^{-1}$, et permet donc d'étudier de très faibles variations de propriétés du mortier.

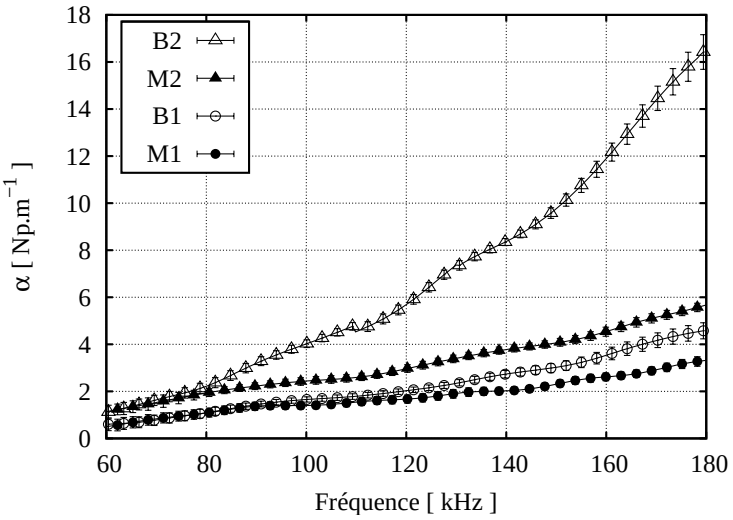


FIG. 4.22 – Courbes d'amortissement effectif des ondes de Rayleigh pour chaque série étudiée.

Dans le cas des courbes mesurées sur les séries de bétons, les effets dus à la diffusion multiple par les granulats sont cumulés aux autres effets amortissants présents sur le mortier. On peut alors observer la contribution de la diffusion multiple sur l'amortissement en comparant les courbes mesurées sur les bétons et les mortiers correspondants (couples B1-M1 ou B2-M2). A basse fréquence, les courbes d'amortissement des bétons et des mortiers pour un rapport E/C donné sont parfaitement confondues. L'effet de la diffusion multiple par les granulats sur l'amortissement est négligeable. Cet effet commence à être visible vers 80 kHz pour le couple B1-M1 et vers 120 kHz pour le couple B2-M2, où l'amortissement mesuré sur le béton commence à être supérieur à celui mesuré sur le mortier correspondant. Plus la fréquence augmente, plus l'écart entre les courbes s'accroît.

Les effets dus à la présence des granulats sont très différents suivant le rapport E/C du béton, bien que les propriétés des granulats (quantité, dimensions, natures) soient identiques pour les deux bétons B1 et B2 considérés. Pour E/C=0.35 (couple B1-M1), la présence des granulats provoque une faible augmentation du facteur d'amortissement, de l'ordre de 1 Np.m^{-1}. Pour E/C=0.65 (couple B2-M2), cette augmentation du facteur d'amortissement est beaucoup plus importante, jusqu'à 10 Np.m^{-1} à 180 kHz. Ainsi, les courbes d'amortissement obtenues sur les séries B1, M1 et M2, sont assez proches les unes des autres, et nécessitent une évaluation très précise de α, tandis que la courbe obtenue sur la série B2 se distingue clairement des autres.

L'étude de sensibilité des ondes de Rayleigh effectuée en section 4.2 donne des ordres de grandeurs des coefficients d'atténuation sur une large gamme de propriétés des matériaux. En particulier, dans la bande de fréquences considérée, le coefficient d'atténuation est généralement inférieur à 10 Np.m^{-1}, ce qui est le cas expérimentalement pour les mortiers et le béton B1. Les résultats expérimentaux sur la série B2 donnent un facteur d'amortissement beaucoup plus important que les ordres de grandeur donnés par la modélisation.

Auréole de transition mortier-granulat. On voit donc que l'influence de la diffusion multiple par les granulats sur les courbes d'amortissement ne dépend pas uniquement des propriétés des granulats, mais également du rapport E/C du mortier ; l'amortissement du à la présence des granulats est plus important dans le cas d'un rapport E/C élevé. Cet effet peut s'expliquer par l'existence d'une auréole de transition entre les granulats et le mortier épaisse de quelques μm (également appelée ITZ, *Interfacial Transition Zone*). L'existence de cette auréole de transition

résulte d'un "effet de paroi" sur la distribution des grains de ciments autour des granulats, entraînant la présence de grains de ciment plus fins dans la région entourant les granulats et une porosité localement plus importante [Otsuki et al., 2000; Neville, 2000; Scrivener et al., 2004]. L'effet est également lié à des réactions chimiques lors de l'hydratation des grains de ciment (formation des C-S-H et des hydroxydes de calcium), et dépend de la nature du ciment utilisé et de la nature des granulats.

La présence de cette auréole de transition modifie fortement le contraste entre la pâte et les granulats. Notamment, l'hypothèse de contact parfait (continuité des déplacements et des contraintes normales à l'interface) faite au chapitre 2 pour le calcul des sections efficaces n'est plus valable. La diffraction dans toutes les directions de l'espace des ondes sur les granulats et l'auréole de transition qui les entoure sera plus importante que sur les granulats seuls. Une plus grande partie de l'énergie incidente sera alors diffractée sous forme de champ incohérent, et le champ cohérent sera plus atténué. Le coefficient d'amortissement du milieu effectif est alors plus élevé. L'étude des courbes de la figure 4.22 montre que l'influence de ce phénomène est très important sur le coefficient d'atténuation du milieu effectif dans le cas d'un mortier très poreux.

4.3.5 Nombre de réalisations du désordre

4.3.5.a Objectif

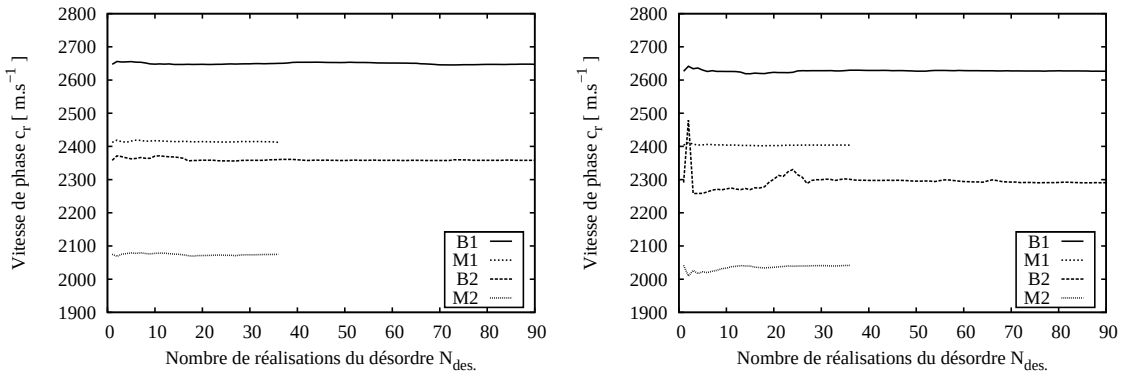
On a vu dans la partie précédente l'importance d'avoir une évaluation des paramètres de propagation (vitesse de phase, de groupe et amortissement) la plus précise possible, afin de bien pouvoir distinguer les résultats liés aux différents matériaux. La précision des résultats présentés en figures 4.20, 4.21 et 4.22 est due d'une part au dispositif expérimental utilisé (interféromètre laser), aux méthodes de traitements du signal, mais surtout à l'évaluation du champ cohérent sur différentes réalisations du désordre, comme il a déjà été vu aux chapitres précédents. Le nombre de réalisations du désordre utilisé pour évaluer le champ cohérent a été volontairement choisi très élevé (90 pour les bétons et 36 pour les mortiers), et plusieurs semaines de mesures ont été nécessaires pour acquérir le jeu de données présenté dans les paragraphes précédents. Bien entendu, ce nombre élevé de mesures à réaliser n'est en pratique pas applicable pour des mesures *in situ* ou pour une étude en laboratoire sur un nombre important d'échantillons de nature différente. Il est alors important de s'interroger sur la pertinence de la précision recherchée lors de telles mesures en fonction des variations que l'on souhaite observer. Le nombre de réalisations du désordre à considérer pourra être alors plus faible en fonction de la précision des résultats recherchée.

De la même manière que pour l'étude des simulations numériques du chapitre 2.3, on va étudier ici l'influence du nombre de réalisations du désordre à considérer pour l'évaluation du champ cohérent sur la précision des estimations de c_r et α.

4.3.5.b Vitesse de phase

On étudie l'évolution de la valeur de la vitesse de phase effective des ondes de Rayleigh en fonction du nombre de réalisations du désordre $N_{des.}$ considéré pour les deux fréquences extrêmes étudiées ; 60 kHz et 180 kHz. Les résultats sont présentés en figure 4.24. On utilise les mêmes échelles verticales que pour les figures 4.20 et 4.21 afin de pouvoir faire une comparaison.

De la même manière que dans le cas des simulations numériques du chapitre 2, les valeurs de la vitesse de phase présentent des fluctuations pour un faible nombre de réalisations du désordre considéré, puis parviennent à une stabilisation lorsque $N_{des.}$ est suffisamment élevé. Les fréquences d'étude étant plus faibles dans le cas expérimental que dans le cas des simulations numériques, la stabilisation des valeurs de vitesse de phase est obtenue plus rapidement. Les fluctuations observées sur la vitesse de phase sont relativement peu importantes. À 60 kHz, elles sont négligeables, et à 180 Hz, elles sont de l'ordre de 20-30 $\mathrm{m.s^{-1}}$, excepté pour la série de béton



(a) À 60 kHz (b) À 180 kHz

FIG. 4.23 – Influence du nombre de réalisations du désordre sur l'évaluation de la vitesse de phase effective.

B2, qui présente de fortes variations pour un nombre de réalisations du désordre inférieur à 10 et ne se stabilise réellement que pour $N_{des.} = 30$.

L'estimation de la vitesse de phase des ondes de Rayleigh sur le béton est donc assez précise, même en ne considérant qu'un nombre faible de réalisations du désordre.

4.3.5.c Amortissement

La même étude est menée pour l'estimation du facteur d'amortissement des ondes de Rayleigh cohérentes. À 60 kHz, les variations du facteur d'amortissement sont très faibles, on a vu que les effets de la diffusion multiple par les granulats étaient négligeables pour ces fréquences. À 180 kHz, les fluctuations des valeurs du coefficient d'amortissement sont très importantes, de l'ordre de plusieurs Np.m^{-1}, or les courbes de la figure 4.22 montrent qu'il est nécessaire d'avoir une précision inférieure à 0,5 Np.m^{-1}pour évaluer correctement les coefficients d'amortissement et distinguer des bétons ayant des propriétés différentes.

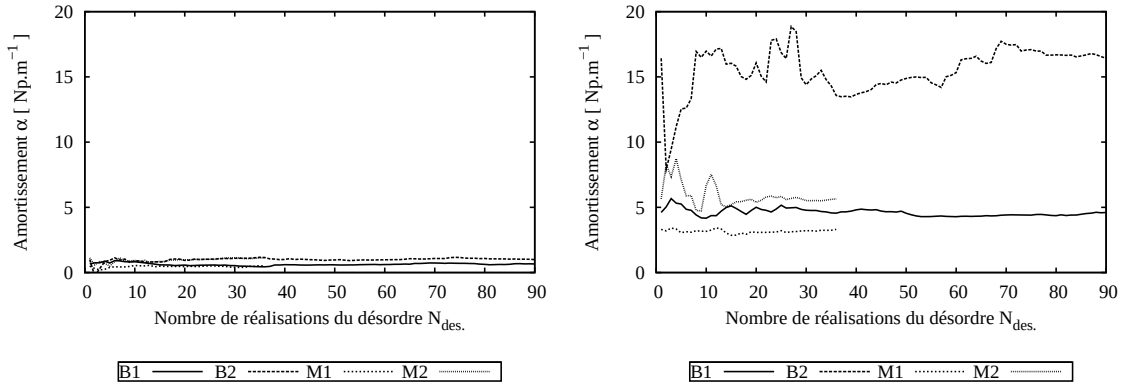
Même dans le cas des mortiers, où les hétérogénéités sont relativement petites devant les longueurs d'onde, le fait de ne considérer qu'un nombre très faible de réalisations du désordre (par exemple inférieur à 5) entraîne des erreurs importantes sur l'évaluation de α, en particulier sur le mortier M2, de rapport E/C=0,65. La porosité étant élevée sur ce mortier, ces variations peuvent s'expliquer par la présence de pores de dimensions plus importantes qui provoquent de la diffusion multiple dans le mortier.

4.3.5.d Comparaisons

Le tableau 4.4 synthétise les nombre optimums $N_{opt.}$ de réalisations du désordre à considérer pour obtenir des valeurs de la vitesse de phase stables à $\pm 10\,\text{m.s}^{-1}$ près et des valeurs du coefficient d'amortissement stables à $\pm 0,5\,\text{Np.m}^{-1}$ près, à la fréquence $f = 180\,\text{kHz}$, où les effets de la diffusion multiple par les granulats sont les plus importants.

	B1	M1	B2	M2
$N_{opt.}$ pour c	20	1	30	10
$N_{opt.}$ pour α	50	5	70	15

TAB. 4.4 – Nombre optimal de réalisations du désordre à considérer pour obtenir une évaluation stable de la vitesse de phase et de l'amortissement à $f = 180$ kHz.



(a) À 60 kHz (b) À 180 kHz

Fig. 4.24 – Influence du nombre de réalisations du désordre sur l'évaluation du facteur d'amortissement effectif.

On constate que l'évaluation du facteur d'amortissement nécessite de moyenner les signaux sur un plus grand nombre de réalisations du désordre que pour l'évaluation de la vitesse de phase. Les études analytiques des chapitres précédents ont en effet montré que les effets de la diffusion multiple étaient principalement visibles sur l'amortissement des ondes. Logiquement, les séries de bétons nécessitent un plus grand nombre de réalisations du désordre que les séries de mortier, les dimensions des hétérogénéités des mortiers étant petites devant les longueurs d'onde utilisées.

Le cas le plus défavorable correspond à la série de bétons B2, contenant un rapport E/C élevé. Cette série comporte le plus grand degré d'hétérogénéités ; aux granulats, s'ajoutent une porosité importante. La zone de contact entre les granulats et le mortier peut présenter une porosité localement plus importante. La présence de cette auréole de transition augmente le contraste entre les hétérogénéités et la matrice, l'influence de la diffusion multiple par ces hétérogénéités est alors plus importante.

4.4 Conclusions

Ce chapitre aborde l'étude de la propagation des ondes de Rayleigh dans un milieu hétérogène. Les propriétés des ondes de Rayleigh en milieu élastique ou viscoélastique homogène sont déterminées à partir des propriétés des ondes de volume de compression et de cisaillement dans le matériau. En appliquant des modèles d'homogénéisation du type ISA aux matériaux hétérogènes, on détermine alors les propriétés de ces ondes de volume dans un milieu homogène équivalent, caractérisées par des grandeurs complexes. On fait l'hypothèse que les propriétés des ondes de Rayleigh en surface de ce milieu homogène équivalent peuvent alors être déterminées à partir des propriétés des ondes de volume du milieu effectif.

Modèle analytique et sensibilité. On dispose alors d'une modélisation analytique de la vitesse de phase et de l'amortissement en fonction de la fréquence des ondes de Rayleigh dans les milieux hétérogènes, à partir des propriétés des hétérogénéités et de la matrice. Cette modélisation possède de nombreuses limitations, liées aux différentes hypothèses faites lors de l'utilisation des différents modèles (modèle d'homogénéisation, modèle de viscoélasticité, ...), elle peut cependant être utilisée pour étudier des ordres de grandeurs et particulièrement la sensibilité des ondes de Rayleigh aux variations de l'une ou l'autre propriété du matériau. Dans le cas du béton, on peut alors étudier l'influence des variations de propriétés mécaniques (facteurs de qualités,

module d'Young, de cisaillement, coefficient de Poisson) du mortier, pouvant être consécutives à un endommagement. L'étude montre que les ondes de Rayleigh sont principalement sensibles à des variations du module d'Young et de cisaillement ou du facteur de qualité des ondes de cisaillement, pouvant être relié à la porosité du mortier. Cependant, les ordres de grandeur des variations de vitesse de phase effective ou d'amortissement effectif sont relativement faibles. Cette étude souligne donc particulièrement l'importance d'avoir des évaluations très précises des valeurs des vitesses de phase et d'amortissement pour la caractérisation du béton avec des ondes de surface.

La modélisation présentée dans ce chapitre peut par ailleurs être utilisée pour étudier la sensibilité des ondes de Rayleigh à d'autres paramètres que ceux étudiés ici (Q_p^0, Q_s^0,E^0, μ^0 et ν^0) ; les variations de propriétés mécaniques des granulats peuvent également être considérées, permettant d'étudier le comportement des ondes de Rayleigh en fonction de la nature de granulats présents dans le béton. La modélisation peut également servir pour étudier l'influence de la granulométrie ou de la concentration volumique en granulats.

Enfin, cette étude peut être étendue à l'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans d'autres matériaux hétérogènes que le béton (domaine médical, géophysique, matériaux composites, ...).

Étude expérimentale. Une étude expérimentale de propagation d'ondes de Rayleigh cohérentes sur du béton est menée. La précision de l'évaluation des paramètres de propagation des ondes de Rayleigh (vitesses et amortissement) est obtenue d'une part en utilisant un interféromètre laser dans le dispositif expérimental, d'autre part en évaluant le champ cohérent par moyennage des mesures en différents endroits d'un même béton afin de prendre en compte différentes configurations du désordre, et enfin en utilisant des méthodes de traitement du signal adaptées issues de la géophysique. L'utilisation de l'interféromètre permet des mesures avec un niveau de bruit très faible, répétitives, sans contact, automatisées, et fournissant une valeur absolue du déplacement particulaire normal à la surface en Å. La position des points de réception est également connue avec une très grande précision, ce qui permet d'utiliser les méthodes de traitements choisies de manière optimale. On obtient alors pour des séries de bétons et de mortiers différents, les courbes de dispersion en vitesse de phase, les courbes d'amortissement, ainsi que des courbes de dispersion en vitesse de groupe.

L'étude de la vitesse de groupe fournit une autre approche indépendante pour étudier les propriétés de la propagation des ondes dans le béton. Les courbes de dispersion en vitesse de groupe obtenues sont à peu près constantes avec la fréquence dans le cas des mortiers, ou les hétérogénéités sont petites. Dans le cas de bétons contentant des hétérogénéités de dimensions plus importantes, ces courbes présentent des variations caractéristiques quel que soit le rapport E/C du matériau. On peut alors attribuer ces variations à la présence des granulats. Cet effet n'est pas visible sur les courbes de dispersion en vitesse de phase, ce qui justifie l'étude conjointe des vitesses de phase et de groupe.

L'étude des courbes de dispersion en vitesse de phase montre que pour un béton ou un mortier ayant un rapport E/C élevé, les propriétés du milieu effectif varient avec la profondeur, se traduisant par une diminution de la vitesse de phase lorsque la fréquence augmente. Cet effet n'est pas observé sur les bétons ou mortiers ayant un rapport E/C faible, et donc une porosité moins importante. On peut donc attribuer les variations de propriétés du matériau avec la profondeur observée sur les matériaux à fort E/C à des variations de porosité, la porosité étant localement plus importante en surface.

L'étude des courbes d'amortissement expérimentales confirment que pour un rapport E/C donné, la présence de granulats ne modifie pas l'amortissement à très basse fréquence, les effets de la diffusion multiple étant négligeables lorsque la longueur d'onde est grande devant les dimensions des hétérogénéités. Lorsque la fréquence augmente, la présence des granulats dans

le béton ajoute un effet d'amortissement supplémentaire à l'amortissement dû aux propriétés viscoélastiques et à la porosité du béton. Dans le cas d'une porosité importante (fort E/C), on observe que l'influence des granulats sur l'amortissement est bien plus marquée que pour une porosité faible avec le même type de granulats. L'interface entre le mortier et les granulats présente une porosité localement plus importante, entraînant un contraste entre les hétérogénéités et la matrice plus marqué, et donc des effets de la diffusion multiple plus importants. L'hypothèse faite aux chapitres précédents d'un contact parfait entre les granulats et le mortier, n'est donc pas vérifiée dans le cas de béton ayant une porosité importante.

Le présent jeu de données expérimentales permet également de quantifier l'importance du nombre de réalisations du désordre à considérer lors de l'évaluation du champ cohérent. Une évaluation précise du champ cohérent est primordiale pour l'étude des propriétés du milieu effectif, et particulièrement pour l'atténuation effective. Le fait de considérer une unique mesure en un point donné du matériau reflétera une configuration particulière de positions, natures, et dimensions des hétérogénéités présentes, qui ne reflétera pas les propriétés globales du matériau. Ainsi des mesures à différents endroits d'un même matériau conduiront à des résultats très différents qu'il sera difficile d'interpréter. Le nombre de mesures à réaliser pour obtenir le champ cohérent, et ainsi évaluer les propriétés du milieu effectif avec la précision souhaitée, dépend du degré d'hétérogénéité du matériau. Dans le cas d'un mortier, considéré comme peu hétérogène aux fréquences étudiées, ce nombre sera relativement faible, et les propriétés du milieu effectif seront connues avec précision pour environ 10 mesures. Dans le cas du béton, une cinquantaine de mesures est nécessaire pour pouvoir obtenir une précision sur les vitesses de phase et les facteurs de qualité permettant de comparer finement différents bétons entre eux.

Chapitre 5

Synthèse et perspectives

Cette thèse aborde l'étude de la propagation des ondes ultrasonores de longueurs d'onde centimétriques dans le béton en vue de sa caractérisation mécanique. Les ondes de volume et les ondes de Rayleigh sont étudiées. La difficulté vient du fait qu'il faut tenir compte de phénomènes couplés : porosité, saturation ou non, viscoélasticité, hétérogénéités de différentes natures et de différentes dimensions et formes. L'étude théorique de la propagation d'ondes dans un tel milieu va alors devoir tenir compte de tous ces phénomènes en essayant pour chacun d'entre eux de choisir modèle le plus simple possible afin d'obtenir une modélisation représentative et robuste du phénomène réel dans son ensemble. Ainsi, l'utilisation future de ce type de modélisation comme problème direct dans le cadre d'un problème inverse permettra de n'avoir qu'un nombre limité d'inconnues à déterminer.

5.1 Modélisation

Modèle proposé. On propose une modélisation analytique de la propagation des ondes de Rayleigh cohérentes dans un matériau diphasique composé d'une matrice homogène viscoélastique dans laquelle se trouvent des diffuseurs cylindriques (cas 2D) ou sphériques (cas 3D) répartis de manière aléatoire à une concentration donnée et suivant une courbe granulométrique continue. La viscoélasticité de la matrice et des diffuseurs est traitée avec un modèle à facteur de qualité Q constant.

Les propriétés du milieu effectif sont ensuite déterminées à la fois pour les ondes de compression et de cisaillement, avec le modèle d'homogénéisation ISA. On fait alors l'hypothèse que les propriétés de l'onde de Rayleigh du milieu effectif peuvent être déterminées à partir des propriétés des ondes de volume du milieu effectif, par analogie avec les ondes de Rayleigh d'un milieu homogène viscoélastique.

Le modèle de viscoélasticité choisi pour chaque phase du matériau introduit une dépendance fréquentielle de la vitesse de phase et doit dont être considéré en premier lieu lors de la modélisation. L'interaction d'une onde plane avec un unique diffuseur est ensuite déterminée dans le cas d'un cylindre ou d'une sphère viscoélastique dans une matrice viscoélastique, sous l'hypothèse d'un contact parfait entre la matrice et le diffuseur.

Différents modèles, dits "d'homogénéisation", permettant de décrire le milieu effectif sont ensuite étudiés, parmi lesquels est retenu l'*Independent Scattering Approximation* (ISA). Ce modèle, décrivant initialement le cas d'une matrice acoustique contenant des diffuseurs identiques, possède l'avantage de pouvoir être étendu au cas d'une matrice élastique, avec une distribution de taille d'hétérogénéités. Il est cependant uniquement valable sur un milieu dilué en diffuseurs. Les différences entre le modèle ISA et le modèle de Waterman-Truell sont négligeables dans le

cas d'un matériau ayant les propriétés du béton pour les fréquences considérées.

En collaboration avec Bruno Lombard et Joël Piraux du LMA (Marseille), des simulations numériques par différences finies 2D sont utilisées pour vérifier la validité de l'ISA dans le cadre d'un matériau hétérogène possédant les propriétés du béton. Ces simulations numériques sont combinées avec des méthodes de traitement du signal, et l'ensemble permet d'obtenir des évaluations de la vitesse de phase et de l'amortissement du milieu effectif. Les résultats de ces simulations confirment que dans un milieu élastique et pour de faibles concentrations d'inclusions de mêmes dimensions, l'ISA décrit assez fidèlement les propriétés du milieu effectif pour les ondes de compression, mais également pour les ondes de cisaillement, ce qui nous conforte dans l'utilisation de ce modèle. Les écarts entre le modèle ISA et les résultats des simulations sont cependant déjà importants lorsque l'on atteint une concentration de 18%.

Application au béton. L'application de cette modélisation analytique au cas du béton repose sur un certain nombre d'hypothèses fortes, que l'on rappelle ici.

- Le matériau est diphasique, en considérant d'une part les granulats dont les dimensions sont supérieures à une certaine limite, fixée ici à 4 mm, et d'autre part le mortier,
- Les deux phases, granulats comme mortier, sont considérées comme homogènes et leurs propriétés sont décrites par un modèle viscoélastique, qui prend en compte la diffusion par les très petites hétérogénéités et l'absorption des matériaux,
- Les granulats sont considérés comme étant parfaitement sphériques,
- Le contact entre les granulats et le mortier est un contact parfait (continuité des déplacements et des contraintes normales à l'interface),
- Les propriétés du milieu effectif pour les ondes de compression et de cisaillement sont déterminées avec l'approximation ISA, dont la validité est limitée aux milieux dilués,
- Le champ diffracté par les granulats est considéré avec une approximation de champ lointain, on suppose donc que les granulats sont suffisamment éloignés les uns des autres ou que le contraste entre les granulats et la mortier est suffisamment faible pour que cette approximation de champ lointain soit vérifiée,
- Enfin, les propriétés de l'onde de Rayleigh effective sont déterminées à partir des propriétés des ondes de volume dans le milieu effectif.

Cette modélisation, sous réserve que les hypothèses listées précédemment sont vérifiées, peut permettre d'étudier la sensibilité des ondes de Rayleigh à des variations de propriétés du mortier, tout en tenant compte de la présence des granulats. La vitesse de phase et l'atténuation des ondes de Rayleigh cohérentes sont bien sensibles à des variations de propriétés mécaniques du mortier, et principalement aux variations de module d'Young, de cisaillement, ou encore au facteur de qualité des ondes de cisaillement. Cependant, les variations observées pour les valeurs de vitesse de phase ou d'amortissement sont relativement faibles et montrent la nécessité d'une évaluation très précise de ces paramètres lors de la mesure sur le matériau réel en laboratoire ou *in situ*.

5.2 Mesures expérimentales

Champ cohérent. Deux campagnes de mesures expérimentales ont été menées pour étudier les effets de la diffusion multiple dans du béton ou du mortier et valider expérimentalement certaines des hypothèses faites lors de la modélisation. Les mesures concernent d'une part des ondes de compression (entre 100 et 600 kHz) et d'autre part des ondes de Rayleigh (entre 50 et 200 kHz). La campagne de mesures en ondes de compression a été menée en collaboration avec Dominique Clorennec et Arnaud Derode du LOA (Paris).

Le dispositif expérimental utilisé met en jeu un interféromètre laser et des méthodes de traitements des signaux issues de la géophysique.

L'accent est mis sur l'évaluation du champ cohérent, représentatif du milieu effectif, obtenu en moyennant spatialement les mesures sur plusieurs configurations du désordre équivalentes. L'étude montre que suivant le degré d'hétérogénéités du matériau, le nombre de configurations du désordre à considérer pour obtenir une bonne évaluation des propriétés du milieu effectif varie. Ce nombre est très faible (inférieur à 10) pour un mortier, il peut atteindre une cinquantaine de mesures pour un béton.

Les mesures sur le mortier montrent que le facteur d'amortissement a un comportement linéaire avec la fréquence, ce qui valide l'utilisation d'un modèle de viscoélasticité à Q constant pour décrire ses propriétés. Au delà de 100 kHz, l'amortissement effectif mesuré sur le béton est plus important que celui mesuré sur le mortier du fait de la diffusion multiple. Cet effet est bien reproduit par le modèle proposé.

La vitesse de groupe effective des ondes de Rayleigh possède des courbes de dispersion présentant des variations significatives qui ne sont pas présentes dans le cas des mortiers, quel que soit le rapport E/C considéré. À l'inverse, les vitesses de phase effectives ne présentent pas de variations caractéristiques importantes dues à la présence de granulats.

Dans le cas d'un fort E/C où la porosité du mortier est élevée, l'influence de la diffusion multiple par les granulats sur les courbes d'amortissement devient plus important que pour une faible porosité. On peut attribuer cet effet à l'existence d'auréoles de transition à l'interface entre le mortier et les granulats, caractérisée par une porosité localement plus importante. Le contraste entre le mortier et les granulats est alors plus important, ce qui augmente les effets de la diffusion multiple.

Champ incohérent. L'étude du champ incohérent est également menée dans le cas de mesures en transmission à travers une dalle de béton. L'étude porte alors sur l'allure temporelle de l'évolution de l'intensité incohérente moyenne. Dans le cadre d'une approximation de diffusion, celle-ci est caractérisée par deux paramètres qui sont le coefficient de diffusion D et un coefficient d'amortissement ξ lié à l'amortissement intrinsèque du matériau, et ne tenant pas compte de l'amortissement dû à la diffusion multiple. L'évaluation de ces paramètres nécessite d'avoir des signaux temporels très longs. Le niveau de bruit limite la longueur exploitable de ces signaux, et rend l'estimation des paramètres D et ξ très difficile.

5.3 Perspectives

Cette thèse aborde l'étude de la diffusion multiple en milieu élastique ou viscoélastique suivant trois aspects ; analytique, numérique et expérimental. Les résultats obtenus permettent de mieux cerner les mécanismes de la propagation d'ondes dans ce type de milieu, et ouvrent de nombreuses perspectives d'études.

5.3.1 Simulations numériques

Les simulations numériques 2D, combinées avec des méthodes de traitement efficaces, fournissent un outil performant pour l'étude de la diffusion multiple des ondes dans un matériau fluide ou élastique contenant des diffuseurs. En particulier, l'étude de la diffusion multiple pour une onde incidente de cisaillement a été très peu abordée dans la littérature. L'outil peut permettre d'étudier le cas de matériaux contenant différentes concentrations, différentes dimensions, nature, et forme de diffuseurs. L'étude de l'influence d'inclusions de forme quelconque peut permettre de valider ou non l'approximation de diffuseurs cylindriques ou sphériques. Cet outil peut donc trouver des applications dans de nombreux domaines où la diffusion multiple des ondes par des hétérogénéités doit être prise en compte ; médical, géophysique, évaluation non destructive sur des bétons, des matériaux composites, des métaux, etc.

Une étude plus systématique du nombre de réalisations du désordre à considérer pour obtenir une évaluation du champ cohérent avec une précision donnée, en fonction de la nature, de la concentration, de la dimension des inclusions, ou encore de la fréquence, doit également être menée en détail.

Les limites de validité des différents modèles théoriques permettant de décrire les propriétés du milieu effectif (ISA, Waterman-Truell, Linton and Martin, CPA, ...) peuvent également être étudiés plus en détail, et des pistes peuvent être ouvertes pour les améliorer ou en développer de nouveaux.

Ce type de simulations numériques pourrait être étendu pour se rapprocher un peu plus de la réalité physique des matériaux hétérogènes, en prenant en compte par exemple des contacts imparfaits entre les inclusions et la matrice dans les simulations [Lombard and Piraux, 2006]. De même, on pourrait envisager également de simuler numériquement la poroélasticité de la matrice [Zheng and Liu, 2001; Zheng et al., 2001], ou bien introduire de la viscoélasticité.

Le temps de calcul important reste cependant un facteur limitant pour l'emploi systématique de ce type d'outil. La parallélisation en cours du code de simulations va permettre de pouvoir exploiter l'outil de manière optimale.

5.3.2 Mesures expérimentales

Mesures sur ouvrage réel. Les mesures expérimentales présentées dans cette thèse ont été réalisées dans des conditions optimales de laboratoire, et les dispositifs présentés ne sont pas directement utilisables pour des mesures sur ouvrage réel. L'interféromètre laser utilisé ici ainsi que le banc de pilotage sont des appareils coûteux et fragiles. Le laser est de plus très sensible à des variations de températures, et nécessite que le matériau ausculté présente un bon état de surface. Cependant d'autres modèles d'interféromètres laser plus robustes mais moins précis peuvent être utilisés pour des mesures en extérieur. Par exemple, des mini-robots sont actuellement développés au LCPC dans le cadre des projets nationaux ANR-SENSO et ANR-ACTENA, utilisant un interféromètre Polytec OFV-505.

Les parements d'ouvrages en béton ne présentent pas une surface parfaitement plane. L'état de surface des matériaux est un point important à considérer pour deux raisons. D'une part lors de l'utilisation des interféromètres laser, la distance focale du laser doit être re-réglée à chaque point de mesure si la surface n'est pas parfaitement plane, et d'autre part les irrégularités de surface introduisent un effet de diffusion multiple supplémentaire des ondes de surface [Scales and Malcom, 2003; van Wijk, 2003] dont il faudra tenir compte.

Le nombre de mesures nécessaires pour évaluer le champ cohérent de manière optimale est élevé. Dans le dispositif expérimental présenté, il est nécessaire de déplacer le transducteur source et de le repositionner de nombreuses fois. Les mesures prennent donc énormément de temps. Il est nécessaire de raccourcir la durée des mesures pour pouvoir envisager l'inspection d'ouvrages de grandes dimensions, ou mener une campagne d'étude expérimentale sur un grand nombre de bétons différents. Des dispositifs expérimentaux différents peuvent alors être envisagés, par exemple en considérant une source fixe émettant de manière isotrope, et en effectuant les mesures sur des cercles concentriques à la source, on peut alors étudier la propagation des ondes de manière radiale à la source et obtenir les réalisations du désordre nécessaires avec une source unique. Ce dispositif à source fixe aurait également l'avantage de fournir des mesures plus répétitives qu'en repositionnant la source à chaque fois. À l'avenir, l'utilisation de sources sans contact (à couplage par air, laser) pourrait par ailleurs apporter un réel avantage pour obtenir des mesures à grands rendements, mais ce type de source reste pour le moment trop peu énergétique.

Inversion des ondes de Rayleigh. L'utilisation de la dispersion des ondes de Rayleigh permet classiquement en géophysique de remonter à des propriétés du sol en fonction de la pro-

fondeur, généralement pour des milieux verticalement stratifiés [Bodet, 2005], mais également pour des milieux présentant un gradient de propriétés avec la profondeur. Les mesures expérimentales montrent que la vitesse de phase des ondes de Rayleigh cohérentes décroît avec la fréquence. On peut alors tenter de remonter à des propriétés du milieu effectif en fonction de la profondeur pour caractériser par exemple une profondeur d'endommagement du béton d'enrobage, comme par exemple une profondeur de carbonatation [Villain et al., 2007]. Cependant ce type d'approche nécessite un grand nombre de connaissances *a priori* du matériau ausculté pour pouvoir mener à bien l'inversion. Elle doit notamment passer par l'étude de la propagation dans les matériaux dits FGM (Fonctionnally Graded Materials) utilisés par exemple dans l'industrie aéronautique [Lefebvre et al., 2001; Baron, 2005; Chen et al., 2007] ou en géophysique [Saito, 1988].

Intensité incohérente. L'étude de l'évolution temporelle de l'intensité incohérente doit également être traitée plus en détail. Cette étude doit être menée avec des signaux plus énergétiques, et un dispositif de mesure permettant de diminuer au maximum le niveau de bruit, afin d'avoir des courbes sur une durée suffisamment longue pour pouvoir être exploités avec l'approximation de diffusion. L'utilisation de la théorie des transferts radiatifs [Margerin, 2005] permet l'étude de la coda pour des temps plus courts, et pourrait donc être plus adaptée pour l'étude de l'intensité incohérente, les temps de calculs inhérents à cette théorie sont cependant beaucoup plus longs (utilisation par exemple d'un algorithme de type Monte-Carlo). L'analyse du cône de rétrodiffusion ou de l'interférométrie de la coda est également une piste intéressante à développer [Larose et al., 2006].

Le principal avantage de l'intensité incohérente est que sa décroissance temporelle permet de remonter à un coefficient d'amortissement (ξ) qui tient uniquement compte de l'absorption du matériau et non de la diffusion multiple et il est alors possible de séparer les deux types d'effets amortissants [Lacombe et al., 2003].

Le champ incohérent étant composé de trains d'ondes ayant parcouru un long parcours tortueux dans le matériau, les informations données dans son étude ne seront pas spécifique à la proche surface, comme c'est le cas pour les ondes de surface cohérentes. La zone investiguée par ces ondes incohérentes doit être déterminée.

Le champ incohérent est composé de multiples trains d'ondes se propageant dans toutes les directions, et pouvant avoir subi des conversions de modes. Le déplacement particulaire qui lui est associé s'apparente à un mouvement désordonné, se faisant dans toutes les directions de l'espace. Il serait également intéressant d'étudier l'intensité incohérente en mesurant les 3 composantes du déplacement (déplacements normal et tangentiel) afin d'observer un phénomène équivalent à l'équipartition des ondes sismiques [Hennino et al., 2001].

Étude des granulats. L'obtention des propriétés mécaniques des granulats comme les modules élastiques, le coefficient de Poisson, ou encore les vitesses de propagation des ondes de compression et de cisaillement ainsi que les facteurs de qualité, est indispensable pour pouvoir caler les modèles analytiques ou numériques de bétons. Cette mesure peut se réaliser sur un gros bloc de roche dont sont extraits les granulats (par concassage, ou par érosion dans le cas de granulats roulés). Les mesures des vitesses pour les ondes de compression et de cisaillement pourront être obtenues par exemple en utilisant la vitesse de groupe nulle des modes de Lamb [Clorennec et al., 2007] sur des plaques. La mesure des facteurs de qualité sera par contre plus difficile à réaliser ; les vitesses des ondes étant très rapides, des dispositifs équivalents à ceux employés pour mesurer l'atténuation sur des bétons nécessiteront des blocs de dimensions très importantes.

Cependant les résultats des mesures sur un bloc massif ne seront pas complètement représentatifs du granulat lui même. Le bloc rocheux n'est pas rigoureusement homogène, et peut présenter notamment des failles et des fissures, qui seront donc prises en compte lors de la me-

sure des vitesses et des atténuations. Lors du concassage, les cassures se feront principalement le long des points de faiblesse et les granulats ne présenteront donc pas autant de failles et de fissures que le bloc.

5.3.3 Modélisation analytique

La modélisation analytique proposée dans cette thèse permet déjà d'étudier l'influence de la présence d'une distribution de diffuseurs dans une matrice viscoélastique sur la propagation des ondes cohérentes de compression, de cisaillement, et de Rayleigh. Elle est limitée par un certain nombre d'hypothèses listées précédemment.

Les mesures expérimentales suggèrent que la présence des auréoles de transition au niveau de l'interface entre les granulats et le mortier est un élément important à prendre en compte, par exemple en changeant les conditions aux limites à l'interface diffuseur-matrice lors du calcul de la diffraction d'une onde plane par une sphère, afin de modéliser un contact non-parfait. On pourrait aussi considérer les résultats donnés par une extension du modèle ISA dans le cas d'inclusions élastiques dans un milieu poreux [Tournat et al., 2004].

L'utilisation de modèles d'homogénéisation valables pour de fortes concentrations de diffuseurs en milieu élastique doivent être également envisagée, afin de pouvoir modéliser plus correctement des matériaux contenant un très grand nombre d'hétérogénéités.

La porosité du mortier est prise en compte à l'aide d'un modèle viscoélastique à Q constant. Les mesures expérimentales sur du mortier montrent que l'on obtient effectivement un amortissement linéaire avec la fréquence, ce qui peut justifier ce modèle. Afin d'aller plus loin dans la modélisation, l'approche consistant à considérer la porosité comme des hétérogénéités causant également de la diffusion multiple peut être faite, en considérant ces hétérogénéités comme des inclusions sphériques vides dans une matrice élastique, et en déterminant le milieu effectif obtenu à l'aide d'un modèle de type ISA ou celui de Waterman-Truell. Cette approche pour traiter la porosité a déjà été envisagée par [Bourbié et al., 1986; Berryman, 1992; Chaix, 2003].

L'emploi d'un modèle de porosité de type Biot pourrait également être intéressant. Ce type de modèle nécessite néanmoins un très grand nombre de paramètres (paramètres mécaniques, porosité, résistivité, tortuosité,...) difficiles à définir dans le cas d'un matériau de type béton. Les bétons étant très différents les uns des autres, la prise en compte d'un modèle trop complexe perdrait en généralité, et rendrait impossible la mise en oeuvre d'un problème inverse.

Problème inverse. La mise en oeuvre du problème inverse pourra ensuite être envisagée à partir de la mesure des courbes de dispersion et d'amortissement des ondes cohérentes sur un matériau et en prenant ce modèle analytique comme problème direct. Le nombre de paramètres à reconstruire est élevé ; propriétés mécaniques de la matrice ou des inclusions, concentration d'inclusions et granulométrie. Le problème est alors sous-déterminé et nécessite donc une connaissance de certains de ces paramètres *a priori*.

Dans le cas du béton par exemple, connaissant les propriétés des granulats (courbe granulométrique, nature) fournies par la formulation initiale du béton, la mesure des courbes de dispersion en vitesse de phase, en vitesse de groupe et des courbes d'amortissement des ondes de Rayleigh cohérentes peut permettre de remonter aux propriétés mécaniques du mortier. Les mesures des courbes de dispersion et d'amortissement des ondes de compression ou de cisaillement peuvent fournir des observables pour contraindre le problème.

Il est également possible de tenir compte lors de l'inversion des informations contenues dans le champ incohérent, obtenues par l'approximation de diffusion, les transferts radiatifs, ou un autre modèle. L'idéal serait alors de déterminer un protocole de mesure suffisamment précis et rapide qui permettrait d'exploiter à la fois le champ cohérent et incohérent des ondes, fournissant ainsi un maximum d'observables à partir d'une unique série de mesures identiques.

Par ailleurs ce type de modélisation de la diffusion multiple des ondes de Rayleigh ou de volume en milieu viscoélastique contenant une distribution aléatoire d'inclusions viscoélastiques n'est pas limité à l'étude du béton, mais peut être utilisée pour l'étude de nombreux matériaux à des échelles différentes (longueurs d'ondes et dimensions d'hétérogénéités) dans des domaines très variés ; dans le domaine médical (tissus biologiques, os), en géophysique (sols, éboulements), ou en contrôle de matériaux comme les composites ou encore certains aciers "à grains" et certains polycristaux.

Bibliographie

Remarque : les références sont classées par ordre alphabétique du nom du premier auteur. Les nombres qui suivent l'année de publication renvoient aux pages contenant les citations.

M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Department of Commerce, 1964. 29, 70, vi, viii

D.G. Aggelis and T. Shiotani. Experimental study of surface wave propagation in strongly heterogeneous media. *J. Acoust. Soc. Am EL*, 122(5) :EL151–El157, 2007. 17, 19, 23

D.G. Aggelis and T. Shiotani. Surface wave dispersion in cement-based media : Inclusion size effect. *NDT&E Int.*, 41 :319–325, 2008. 17, 19, 23

D.G. Aggelis, Polyzos, and T.P Philippidis. Wave dispersion and attenuation in fresh mortar : theoretical predictions vs. experimental results. *J. Mech. Phys. Solids*, 53 :857–883, 2005. 19, 45

K. Aki and P.G Richards. *Quantitative Seismology : theory and methods*. Freeman and co., S. Francisco, 1980. 12, 14, 102, 107

P. Anugonda, J.S. Wiehn J.S., and J.A. Turner. Diffusion of ultrasound in concrete. *Ultrasonics*, 39, 2001. 21, 22, 86, 92

ASTM-C597-02. Standard test method for pulse velocity through concrete. *Normalisation de l'American Society of Testing Materials*, 04.02, feb. 2003. 18

F. Auger and P. Flandrin. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 43(5) :1068–1089, 1995. 119, 120

P.W. Barber and S.C. Hill. *Light Scattering by Particles : Computational Methods*, chapter 2, pages 30, eq 2.18. Advanced Series in Applied Physics 2. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1990. 30

V. Baroghel-Bouny. *Conception des bétons pour une durée de vie donnée des ouvrages. Documents scientifiques et techniques*, Association Française du Génie Civil, 2004. 1

V. Baroghel-Bouny, T. Chaussadent, G. Croquette, L. Divet, J. Gawsewitch, J. Godin, D. Henry, G. Platret, and G. Villain. *Caractéristiques microstructurales et propriétés relatives à la durabilité des bétons - Méthodes de mesures et d'éssais de laboratoire. Méthodes d'essais 58*. Techniques et Méthodes des Laboratoires des Ponts et Chaussées. LCPC Paris, 2007. 9

C. Baron. *Le développement en série de Peano du matricant pour l'étude de la propagation des ondes élastiques en milieux à propriétés continuements variables*. PhD thesis, Univ. Bordeauxé 1, 2005. 135

J. Baron and R. Sauterey. *Le béton hydraulique - Connaissance et pratique*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1982. 8

G. Barton. *Elements of Green's functions and propagation : potentials, diffusion and waves*. Oxford University Press, 1989. 85, 87

J. Becker, L.J. Jacobs, and J. Qu. Characterisation of cement-based materials using diffuse ultrasound. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003. 21, 86, 93

M. Bentahar. *Acoustique non-linéaire : Application à la caractérisation ultrasonore de l'endommagement des matériaux hétérogènes et à la prédiction de la durée de vie*. PhD thesis, INSA de Lyon, France, 2005. 21

J.G. Berryman. Single scattering approximation of coefficients of Biot's equation of poroelasticity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91 :551–571, 1992. 136

T.E. Blum, K van Wijk, and B.F. Pouet. Towards a noncontacting multi-component laser-ultrasonic system for geophysical applications. In *Extended abstract for the Environemental Sensing Symposium*, Boise, Idaho, Oct. 2007. Boise state university. 98

L. Bodet. *Limites théoriques et expérimentales de l'interprétation de la dispersion des ondes de Rayleigh : Apport de la modélisation numérique et physique*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes - Université de Nantes, 2005. 57, 102, 135

T. Bohlen, S. Kugler, G. Klein, and F. Theilen. 1.5D inversion of lateral variation of Scholte-wave dispersion. *Geophysics*, 69(2) :330–344, 2004. 13

T. Bourbié, O. Coussy, and B. Zinszner. *Acoustique des milieux poreux*. Ed. Technip, 1986. 14, 15, 16, 20, 45, 68, 70, 71, 136

D. Breysse and O. Abraham. *Méthodologie d'évaluation non destructive de l'état d'altération des ouvrages en bétons*. Presse de l'Ecole Pationale des Ponts et Chaussées, 2005. 1, 8, 9, 10

D. Brill and G. Gaunaurd. Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81(1), 1987. 35, vii

J.H. Bungey and S.G. Millard. *Testing of concrete in structures*. Blackie Academic & professional, Glasgow, 1996. 9

J.M. Carcione. Rayleigh waves in isotropic viscoelastic media. *Geophys. J. Int.*, 108 :453–464, 1992. 104

J.M. Carcione. *Wave fields in real media : Wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media*. Pergamon, 2001. 68, 70, 71, 103, 104, 116

P. Cawley and D. Alleyne. The use of lamb waves for the long range inspection of large structures. *Ultrasonics*, 34 :287–290, 1996. 13

J.F. Chaix. *Caractérisation non destructive de l'endommagement des bétons : Apport de la diffusion ultrasonore*. PhD thesis, LCND, Université de la méditerranée, France, 2003. 18, 20, 45, 136

J.F. Chaix, V. Garnier, and G. Corneloup. Ultrasonic wave propagation in heterogeneous solid media : Theoretical analysis and experimental validation. *Ultrasonics*, 44(200-210), 2006. 19, 23

M. Chekroun, L. Le Marrec, O. Abraham, A. Derode, D. Clorennec, A. Le Brun, and M. Campillo. Multiple scattering of ultrasonic propagation for non destructive testing of concrete : first experiment. In *Proceedings of NDTCE 2006 conference*, pages 365–370, St. Louis (MO), USA, Aug. 2006. 74

M. Chekroun, L. Le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, and O. Abraham. Numerical methods for multiple scattering of ultrasound in random media. In *Proc. of Waves 2007 Conference*, pages 492–494, Reading, UK, Jul. 2007. 49

M. Chekroun, L. Le Marrec, O. Abraham, O. Durand, and G. Villain. Analysis of coherent wave dispersion and damping for non-destructive testing of concrete. *submitted to Ultrasonics*, 2008a. 110

M. Chekroun, L. Le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, and O. Abraham. Comparison between a multiple scattering method and direct numerical simulation for elastic wave propagation in concrete. In A. Leger and M. Deschamps, editors, *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*, volume 128 of *Springer Proceedings in Physics*, pages 317–327, 2008b. 59

W.Q. Chen, H.M. Wang, and R.H. Bao. On calculating dispersion curves of waves in funtionally graded elastic plate. *Composite structure*, 81, 2007. 135

D. Clorennec, C. Prada, and D. Royer. Local and noncontact measurements of bulk acoustic wave velocities in thin isotropic plates and shelles using zero group velocity Lamb modes. *J. Appl. Phys.*, 101, 2007. 76, 135

R. Courant, F. Friedrich, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal*, pages 215–234, mar. 1967. English translation of the original paper in 1928 (German). 52

F. de Larrard. *Concrete mixture proportioning, a scientific approach.* E&FN SPON Editors, 2000. 7

X. Derobert, J. Iaquinta, G. Klysz, and J.P. Balayssac. Use of capacitive and GPR techniques for non-destructive evaluation of cover concrete. *NDT&E Int.*, 41 :44–52, 2008. 10

A. Derode, V. Mamou, and A. Tourin. Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in random medium. *Phys. Rev. E*, 74, 2006. 45, 49

R.D. Doolittle and H. Uberall. Sound scattering by elastic cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 39(2) :272–275, 1966. 27, i

G. Dreux and J. Festa. *Nouveau guide du béton et de ses constituants.* Eyrolles, 1998. 6, 7, 8

A. Dziewonsky, S. Bloch, and N. Landisman. A technique for the analysis of transient seismic waves. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 59 :427–444, 1969. 117

J.J. Faran. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 23(4) :405–418, 1951. 27

P. Flandrin. *Temps-fréquence.* Traité des Nouvelles technologies, série Traitement du signal. Hermes, 1993. 119, 120

L.L. Foldy. The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.*, 67(3-4) :107–119, 1945. 15, 40, 44

T. Forbriger. Inversion of shallow-seismic wavefield : I. Wavefield transformation. *Geoph. J. Int.*, 153 :719–734, 2003. 57

S. Foti. *Multistation methods for geotechnical characterization using surface waves*. PhD thesis, Politectino di Torino, 2000. 56

A. Gibson and J.S. Popovics. Lamb waves basis for impact echo method analysis. *J. Engrg. Mech.*, 131(4) :438–443, 2005. 13

F.F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Courier Dover Publication, 1991. 11

P.E. Grattan-Bellew. Microstructural investigation of deteriorated Portland cement concretes. *Construct. Build. Mat.*, 10(1) :3–16, 1996. 1, 8

J-P. Groby, A. Wirgin, and E. Ogam. Acoustic response of a periodic distribution of macroscopic inclusions within a frame porous plate. *Waves in Random and Complex Media*, 2008. A paraître. 61

C. Grosse, H. Reinhardt, and T. Dahm. Localisation and classification of fracture types in concrete with quantitative acoustic emission measurements techniques. *NDT&E Int.*, 30(4) : 223–230, 1997. 21

S.K. Handoo, s. Agarwal, and S.K. Agarwal. Physicochemical, mineralogical, and morphological characteristics of concrete exposed to elevated temperatures. *Cem. Concr. Res.*, 32 :1009–1018, 2002. 8

R. Hennino, N. Trégourès, N. M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B. A. van Tiggelen, and R. L. Weaver. Observation of equipartition of seismic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 86(15), 2001. 135

R.B. Herrmann. *Computer Programs in Seismology*. Department of Earth and atmospheric sciences, Saint Louis University, 2002. 56, 57

L.J. Jacobs and J.O. Owino. Effect of aggregate size on attenuation of rayleigh surface waves in cement-based materials. *J. Eng. Mech. - ASCE*, 126(11) :1124–1130, 2000. 20

L.J. Jacobs and R.W. Whitcomb. Laser generation and detection of ultrasound in concrete. *J. Nondestructive Evaluation*, 16 :57–65, 1997. 18

G. Johnson and R. Truell. Numerical computations of elastic scattering cross sections. *J. Appl. Phys.*, 36(11), 1965. 35

E. Kjartansson. Constant Q-wave propagation and attenuation. *J. Geophys. Res.*, 84(B9), 1979. 70

K. Kodera, C. De Velledary, and R. Gendrin. A new method for the numerical analysis of nonstationnary signals. *Phys. Earth. Planet. Internat.*, 12 :142–150, 1976. 119

B. Koehler, G. Hentges, and W. Mueller. Improvement of ultrasonic testing of concrete by combining signal conditioning methods, scanning laser vibrometer and space averaging techniques. *NDT&E International*, 31(4) :281–287, 1996. 18

V.A. Korneev and L.R. Johnson. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion-I. Theory and numerical results. *Geophys. J. Int*, 115 :230–250, 1993. 35

C. Lacombe, M. Campillo, A. Paux, and L. Margerin. Separation of intrinsic absorption and scattering attenuation from Lg coda decay in central France using acoustic radiative transfer theory. *Geophys. J. Int.*, 154 :417–425, 2003. 135

J. Lagarde, O. Abraham, L. Laguerre, P. Côte, J.P. Piguet, C. Balland, and G. Armand. Use of surface waves and seismic refraction for the inspection of circular concrete structures. *Cem. Concr. Compos.*, 28 :337–348, 2006. 17

A. Lagendijk and B.A. van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Physics Report*, 270 : 143–125, 1996. 43, 85

C.G. Lai and G.J. Rix. Simultaneous inversion of Rayleigh phase velocity and attenuation for near-surface site characterization. Technical report, Georgia Institute of Technology, School of Civil and Environmental Engineering, 1998. 12, 102

H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 203 :1–42, 1904. 13

E.N. Landis and S.P. Shah. Frequency-dependent stress wave attenuation in cement-based materials. *J. Eng. Mech. - ASCE*, 121(6) :737–743, 1995. 17, 20, 22

E. Larose. *Diffusion multiple des ondes sismiques et expériences analogiques en ultrasons.* PhD thesis, Univ. Joseph Fourier - Grenoble I, 2005. 21, 85, 87

E. Larose, J. De Rosny, L. Margerin, D. Anache, P. Gouedard, M. Campillo, and B. van Tiggelen. Observation of multiple scattering of kHz vibration in a concrete structure and application to monitoring weak changes. *Phys. Rev. E*, 73, 2006. 17, 21, 135

M. Lax. Multiple scattering of waves II. The effective field in dense systems. *Phys. Rev.*, 85(4) : 621, 1952. 45

J.E. Lefebvre, V. Zhang, J. Gazalet, T. Gryba, and V. Saudane. Acoustic wave propagation in continuous functionnally graded pales : an extension of the Legendre polynomials. *IEEE Tran. Ultrasonics Ferroelectric Frequency Control*, 48, 2001. 135

L. Le Marrec, O. Abraham, M. Chekroun, D. Leparoux, L. Laguerre, A. Derode, and M. Campillo. Towards multidiffusive ultrasonic propagation for non destructive evaluation of concrete : theoretical overview. In *Proceedings of NDTCE 2006 conference*, pages 357–364, St. Louis (MO), USA, Aug. 2006. 74

D. Lin and A. Ishimaru. Multiple scattering of waves by a uniform random distribution of discrete isotropic scatterers. *J. Acoust. Soc. Am*, 56(6), 1974. 31

C.M. Linton and P.A. Martin. Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : Second-order corrections for the effective wavenumber. *J. Acoust. Soc. Am*, 117(6) :3413–3423, 2005. 31, 45

Y. Liu, R.S. Wu, and C. F. Ying. Scattering of elastic waves by an elastic or viscoelastic cylinder. *Geophys. J. Int.*, 142, 2000. 27, 28

P. Lloyd and M.V. Berry. Wave propagation through an assembly of spheres IV. relations between different multiple scattering théories. *Proc. Phys. Soc. London*, 91 :678–688, 1967. 45

B. Lombard and J. Piraux. Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves. *J. Comput. Phys.*, 195(1) :90–116, 2004. 49

B. Lombard and J. Piraux. Numerical modeling of elastic waves across imperfect contact. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 28(1), 2006. 134

A. E. H. Love. *Some Problems of Geodynamics* . Cambridge University Press, Cambridge, 1911, 1911. 13

V.M. Malhotra and N.J. Carino, editors. *Handbook on nondestructive testing of concrete*. CRC Press LLC, 1991. 9, 18

V. Mamou. *Caractérisation Ultrasonore d'échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs*. PhD thesis, Université de Paris 7, 2005. 15, 41, 43, 44

A. Marec, J.-H. Thomas, and E. El Guerjouma. Contrôle de santé et caractérisation de l'endommagement de matériaux composites base polymère par analyse multivariable temporelle et temps-échelle de signaux d'émission acoustique. In *Actes des journées COFREND*, Toulouse, France, May 2008. 21

L. Margerin. *Introduction to radiative transfer of seismic waves*, volume 157 of *AGU Monograph series*. American Geophysical Union, 2005. 15, 135

L. Margerin. *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*. PhD thesis, Univ. Joseph Fourier - Grenoble I, 1998. 21, 85, 93

G.A. McMechan and M.J. Yedlin. Analysis of dispersive waves by wave field transformation. *Geophysics*, 46(6) :869–874, 1981. 56

T. A. Mokhtar, R. B. Herrmann, and D. R. Russel. Seismic velocity and Q model for the shallow structure of the Arabian shield from short-period Rayleigh waves. *Geophysics*, 53(11), 1988. 56

C.C. Mow and Y.H. Pao. *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentration*. United States Air Force Projet Rand, Santa Monica, CA, Apr. 1971. 27, 29, 35

A.M Neville, editor. *Propriétés des bétons*. Eyrolles, 2000. Traduction de l'édition Anglaise *Properties of concrete (Longman)*. 8, 126, xxvii

NF-EN-12504-4. Essais pour les bétons dans les structures - partie 4 : détermination de la vitesse de propagation du son. *Normes Française, AFNOR*, 2005. 18

E. Ohdaira and N. Masuyama. Water content and its effects on ultrasound propagation in concrete. *Ultrasonics*, 38 :546–552, 2000. 20

N. Otsuki, M. Iwanami, S. Miyamoto, and N. Hara. Influence of aggregates on ultrasonic elastic waves propagation in concrete. In Elsevier, editor, *Non Destructive Testing in Civil Engineering*, pages 313–322, Tokyo, Japan, Apr. 2000. 21, 126

S. Ould-Naffa, M. Goueygou, B. Piwakowski, and F. Buyle-Bodin. Detection of chemical damage in concrete using ultrasound. *Ultrasonics*, 40 :247–251, 2002. 17

C. Ouyang, E. Landis, and S.P. Shah. Damage assessment in concrete using quantitative acoustic emission. *J. Eng. Mech.*, 117(11) :2681, 1991. 21

J.O. Owino and L.J. Jacobs. Attenuation measurements in cement-based materials using laser ultrasonics. *J. Eng. Mech. - ASCE*, 125(6) :637–647, 1999. 18, 20

E.P. Papadakis. Revised grain-scattering formulas and tables. *J. Acous. Soc. Am.*, 37(4) : 703–710, 1965. 16

V.G. Papadakis, C.G. Vayenas, and M.N. Fardis. Physical and chemical characteristics affecting the durability of concrete. *ACI Materials*, 8(2) :186–196, 1991. 8

C. Payan. *Caractérisation non destructive du béton. Etude du potentiel de l'acoustique non linéaire.* PhD thesis, Univ. de la Méditerranée, 2007. 21

H.A. Pedersen, J.I. Mars, and P. Amblard. Improving surface-wave group velocity measurements by energy reassignment. *Geophysics*, 68(2) :677–684, 2003. 119, 120

T.P. Philippidis and D.G. Aggelis. An acousto-ultrasonic approach for the determination of water-to-cement ratio in concrete. *Cem. Concr. Res.*, 33 :525–538, 2003. 19

T.P. Philippidis and D.G. Aggelis. Experimental study of waves dispersion and attenuation in concrete. *Ultrasonics*, 43 :584–595, 2005. 19, 21, 122

V. Picandet, A. Khelidj, and G. Bastian. Effect of axial compressive damage on gas permeability of ordinary and high-performance concrete. *Cem. Concr. Res.*, 31(11) :1525–1532, 2001. 8

B. Piwakowski, A. Fnine, M. Goueygou, and F. Buyle-Bodin. Generation of Rayleigh waves into mortar and concrete samples. *Ultrasonics*, 42 :395–402, 2004. 17, 111

B. Piwakowski, P. Safinowski, and A. Kosecki. Contrôle non destructif du béton par ultrasons à l'aide d'un dispositif automatisé. In *Actes des journées COFREND*, Toulouse, France, May 2008. 18, 20

J.S. Popovics. Comment on "Determination of elastic constants of a concrete specimen using transient elastic waves" [J. Acoust. Soc. Am. 98, 2142-2148 (1995)]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100 (5) :3451–3453, 1996. 18

C. Prada, O. Balogun, and W. Murray. Laser-based ultrasonic generation and detection of zero-group velocity Lamb waves in thin plates. *Appl. Phys. Lett.*, 87, 2005. 13

A. Puech, X. Rivoallan, and L. Cherel. The use of surface waves in the characterisation of seabed sediments : development of a MASW system for offshore applications. In *Colloque "Caractérisation in situ des fonds marins"*, Seatech week, Brest, France, Oct. 2004. 13

W. Punurai, J. Jarzynski, J. Qu, K.E. Kurtis, and L.J. Jacobs. Characterisation of entrained air voids in cement paste with scattered ultrasound. *NDT&E Int.*, 39 :514–524, 2006. 19

P. Purnell, T.H. Gan, D.A. Hutchins, and J. Berriman. Noncontact ultrasonic diagnostics in concrete : A preliminary investigation. *Cem. Concr. Res.*, 34 :1185–1188, 2004. 18

L. Qixian and J.H. Bungey. Using compression wave ultrasonic transducers to measure the velocity of surface waves and hence determine dynamic modulus of elasticity for concrete. *Constr. Build. Mater.*, 10(4) :237–242, 1996. 18

A. Raharinaivo, G. Arliguie, T. Chaussadent, G. Grimaldi, V. Pollet, and G. Taché. *La corrosion et la protection des aciers dans le béton.* Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998. 1, 10

S.K. Ramamoorthy, Y. Kane, and J.A. Turner. Ultrasound diffusion for crack depth determination in concrete. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2), 2004. 21, 86, 89

D. Rauch. *Seismic interface waves in coastal waters : A review.* SACLANT ASW, 1980. 13

J.W.S. Rayleigh, Lord. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proc. London Math. Soc.*, 17(1) :4–11, 1885. 12

D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides, tome 1 : Propagation libre et guidée.* Masson, Paris, 1996. 11, 77, xx

D. Royer and E. Dieulesaint. Mesures optiques de déplacements d'amplitude de 10^{-4} à 10^{2} angströms. application aux ondes élastiques. *Revue Phys. Appl*, 24 :833–846, 1989. 18, 75

D. Royer, M.-H. Noroy, and M. Fink. Optical generation and detection of elastic waves in solids. In *Journal de physique IV*, volume 4, pages C7–673,684, 1994. Colloque C7 - supplément au Journal de Physique III. 75

M. Saito. *Disper 80 : a subroutine package for the calculation of seismic normal mode solutions*, chapter Seismological Algorithm : computational methods and computer programs, pages 293–319. Academic Press, New York, 1988. 135

J.A. Scales and A.E. Malcom. Laser characterization of ultrasonic wave propagation in random media. *Phys. Rev. E*, 67, 2003. 134

F. Schubert and B. Koelher. Numerical time-domain simulation of diffusive ultrasound in concrete. *Ultrasonics*, 42, 2004. 27, 86

T. Schwartzkopff, M. Dumbser, and C.D. Munz. Fast high order ADER schemes for linear hyperbolic equations. *J. Comput. Phys.*, 197(2) :532–539, 2004. 50

K.L. Scrivener, A.K. Crumbie, and P. Laugesen. The interfacial zone (ITZ between cement paste and aggregate in concrete. *Interface Science*, 12 :411–421, 2004. 126

P. Sheng. *Introduction to wave scattering, localization, and mesoscopic phenomena*. Academic Press Inc., 1995. 40, 43

R.E. Sheriff and L.P. Geldart. *Exploration Seismology*. Cambridge University Press, 1995. 12, 13, 56

D. Sornette. Acoustic waves in random merida I. Weak disorder regime. *Acustica*, 67 :199–264, 1989. 40

J.S. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth-Brooks, New-York, 1989. 53

J.-M. Torrenti, O. Didry, J.-P. Ollivier, and F. Plas. *La dégradation des bétons*. Hermès, Paris, 1999. 8

A. Tourin, A. Derode, A. Peyre, and M. Fink. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(2) :503–512, 1999. 43, 44

A. Tourin, M. Fink, and A. Derode. Multiple scattering of sound. Topical review. *Waves Random Media*, 10 :R31–R60, 2000. 40, 85

V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, and L. Jaouen. Multiple scattering of acoustic waves in porous absorbous media. *Phys. Rev. E*, 70, 2004. 136

V. Twersky. On scattering of waves by random distributions. I. free space scatterer formalism. *J. Math. Phys.*, 3 :700–715, 1962. 40

K. van Wijk. *Multiple scattering of surface waves*. PhD thesis, Colorado School of Mines, 2003. 134

L. Vergara, R. Miralles, J. Gosálbez, F.J. Juanes, L.G. Ullate, J.J. Anaya, M.G. Hernández, and M.A.G. Izquierdo. NDE ultrasonic method to characterise the porosity of mortar. *NDT&E International*, 34 :557–562, 2001. 19

I.A. Viktorov. *Rayleigh and Lamb waves : Physical theory and applications*. Plenum Press, New York, 1967. 12, 76, 102, 110

G. Villain, M. Thiery, and G. Platret. Measurement methods of carbonation profiles in concrete : Thermogravimetry, chemical analysis and gammadensimetry. *Cem. Concr. Res.*, 37 :1182–1192, 2007. 8, 9, 135

G. Villain, X. Dérobert, O. Abraham, M. Chekroun, O. Coffec, and O. Durand. Complémentarités de techniques non destructives pour déterminer les propriétés de différents bétons hydrauliques. In *Actes des journées COFREND*, Toulouse, France, May 2008. 10, 20

P.C. Waterman and R. Truell. Multiple scattering of waves. *J. Math. Phys.*, 2(4), 1961. 15, 40, 44, 47

W.J. Wiscombe. Improved Mie scattering algorithms. *Applied Optics*, 19(9) :1505, 1980. 30

T.T. Wu, J.S. Fang, G.Y. Liu, and M.K. Kuo. Determination of elastic constants of a concrete specimen using transient elastic waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 98(4) :2142, 1995. 17, 18

J.J. Zheng, C.Q. Li, and M.R. Jones. Aggregates distribution in concrete with wall effect. *Mag. Concr. Res.*, 55(3) :257–265, 2003. 123

Y.Q. Zheng and Q.H. Liu. A staggered-grid finite difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(6), 2001. 134

Y.Q. Zheng, J.Q. He, and Q.H. Liu. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 66(4), 2001. 134

F.P. Zhou, F.D. Lydon, and B.I.G. Barr. Effect of coarse aggregate on elastic modulus and compressive strength of high performance concrete. *Cem. Concr. Res.*, 25(1) :177–186, 1995. 18

J. Zhu and J.S. Popovics. Non-contact imaging for surface-opening cracks in concrete with air-coupled sensors. *Mater. Struct.*, 38 :801–806, 2005. 18

Annexes

Annexe A

Diffraction par un cylindre : détermination des coefficients de diffraction dans le domaine fréquentiel

Cette annexe présente la résolution du problème aux conditions limites décrivant la diffraction d'une onde plane incidente de type P ou S sur un obstacle cylindrique (Sec. 2.1.2).

Les potentiels des champs à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion sont exprimés sous forme de séries modales, dépendant des coefficients de diffraction $a_n^{(type,0)}$, $b_n^{(type,0)}$, $a_n^{(type,1)}$ et $b_n^{(type,1)}$, où $type = p, s$. Ces coefficients sont déterminés en appliquant les relations de continuité des déplacements et contraintes en $r = A$ (Eqs. 2.5). On exprime indépendamment les égalités pour chaque mode n en projetant sur une base en $cos(m\theta)$. Les modes étant orthogonaux, on obtient une égalité relative à chaque mode n quand $n = m$ pour chaque condition aux limites.

Afin d'alléger le calcul, on définit par ailleurs les arguments $\alpha_p^j = k_p^j A$, $\alpha_s^j = k_s^j A$, $j = 0, 1$, où A est le rayon de l'inclusion.

A.1 Formulation matricielle

A.1.0.a Écriture

Pour chaque type d'onde incidente de compression ou de cisaillement, pour chaque fréquence ω étudiée et pour chaque mode n, on obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues $(a_n^0, b_n^0, a_n^1, b_n^1)$ en appliquant les conditions aux limites 2.5.

Pour chaque type d'onde incidente, on met ces n systèmes linéaires sous la forme matricielle suivante selon les notations de Doolittle and Uberall [1966] :

$$\begin{bmatrix} (U_r^0)_n \\ (U_\theta^0)_n \\ (\Sigma_{rr}^0)_n \\ (\Sigma_{r\theta}^0)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n^{11} & D_n^{12} & D_n^{13} & D_n^{14} \\ D_n^{21} & D_n^{22} & D_n^{23} & D_n^{24} \\ D_n^{31} & D_n^{32} & D_n^{33} & D_n^{34} \\ D_n^{41} & D_n^{42} & D_n^{43} & D_n^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^0 \\ b_n^0 \\ a_n^1 \\ b_n^1 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

où les termes sources $(\Sigma_{rr}^0)_n$, $(\Sigma_{r\theta}^0)_n$, $(U_\theta^0)_n$, et $(U_r^0)_n$ représentent les contributions respectives des contraintes normales et déplacements liées au champ incident.

A.1.0.b Résolution

Les systèmes matriciels (Eq. A.1) sont résolus en utilisant la méthode de Cramer. Pour le système à résoudre :

$$S = D.X\,, \tag{A.2}$$

on définit $D^{(i)}$ la matrice où l'on remplace la $i$ème colonne de D par le vecteur S. On a alors x_i, la $i^{\text{ème}}$ composante de X, qui peut s'écrire :

$$x_i = \frac{det(D^{(i)})}{det(D)} \tag{A.3}$$

en notant $det(D)$ le déterminant de la matrice D.

En pratique, seul le champ diffracté à l'extérieur de l'objet nous intéressera et on se contentera de déterminer les coefficients a_n^0 et b_n^0 pour chaque type d'onde incidente.

A.2 Onde incidente de compression

Après l'application des conditions aux limites 2.5 et la projection des modes sur la base de $\cos(n\theta)$, les coefficients de la matrice de diffraction s'écrivent après simplifications, dans le cas d'une onde incidente de compression :

$$\begin{aligned}
D_n^{11} &= H_n^{(1)'}(\alpha_p^0)\\
D_n^{12} &= \tfrac{nH_n^{(1)}(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0}\\
D_n^{13} &= -J_n'(\alpha_p^1)\\
D_n^{14} &= -\tfrac{nJ_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1}\\
D_n^{21} &= -\tfrac{nH_n^{(1)}(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0}\\
D_n^{22} &= -H_n^{(1)'}(\alpha_s^0)\\
D_n^{23} &= \tfrac{nJ_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1}\\
D_n^{24} &= J_n'(\alpha_s^1)\\
D_n^{31} &= \tfrac{1}{\alpha_p^0}\left((\lambda^0+2\mu^0)(\alpha_p^0)^2H_n^{(1)''}(\alpha_p^0)+\lambda^0\alpha_p^0H_n^{(1)'}(\alpha_p^0)-\lambda^0n^2H_n^{(1)}(\alpha_p^0)\right)\\
D_n^{32} &= \tfrac{1}{\alpha_s^0}2\mu^0n\left(\alpha_s^0H_n^{(1)'}(\alpha_s^0)-H_n^{(1)}(\alpha_s^0)\right)\\
D_n^{33} &= -\tfrac{1}{\alpha_p^1}\left((\lambda^1+2\mu^1)(\alpha_p^1)^2J_n''(\alpha_p^1)+\lambda^1\alpha_p^1J_n'(\alpha_p^1)-\lambda^1n^2J_n(\alpha_p^1)\right)\\
D_n^{34} &= -\tfrac{1}{\alpha_s^1}2\mu^1n\left(\alpha_s^1J_n'(\alpha_s^1)-J_n(\alpha_s^1)\right)\\
D_n^{41} &= -\tfrac{1}{\alpha_p^0}2\mu^0n\left(\alpha_p^0H_n^{(1)'}(\alpha_p^0)-H_n^{(1)}(\alpha_p^0)\right)\\
D_n^{42} &= -\tfrac{1}{\alpha_s^0}\mu^0\left((\alpha_s^0)^2H_n^{(1)''}(\alpha_s^0)-\alpha_s^0H_n^{(1)'}(\alpha_s^0)+n^2H_n^{(1)}(\alpha_s^0)\right)\\
D_n^{43} &= \tfrac{1}{\alpha_p^1}2\mu^1n\left(\alpha_p^1J_n'(\alpha_p^1)-J_n(\alpha_p^1)\right)\\
D_n^{44} &= \tfrac{1}{\alpha_s^1}\mu^1\left((\alpha_s^1)^2J_n''(\alpha_s^1)-\alpha_s^1J_n'(\alpha_s^1)+n^2J_n(\alpha_s^1)\right)
\end{aligned}$$

Les termes relatifs à l'onde incidente sont les suivant :

$$
\begin{aligned}
(U_r^0)_n &= -J_n'(\alpha_p^0) \\
(U_\theta^0)_n &= \frac{nJ_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} \\
(\Sigma_{rr}^0)_n &= -\frac{1}{\alpha_p^0}\left((\lambda^0+2\mu^0)(\alpha_p^0)^2 J_n''(\alpha_p^0)+\lambda^0(\alpha_p^0 J_n'(\alpha_p^0)-n^2 J_n(\alpha_p^0))\right) \\
(\Sigma_{r\theta}^0)_n &= \frac{1}{\alpha_p^0} 2\mu^0 n\left(\alpha_p^0 J_n'(\alpha_p^0)-J_n(\alpha_p^0)\right)
\end{aligned}
$$

A.3 Onde incidente de cisaillement

Dans le cas d'une onde incidente de cisaillement, les coefficients de la matrice de diffraction s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
D_n^{11} &= H_n^{(1)'}(\alpha_p^0) \\
D_n^{12} &= \frac{nH_n^{(1)}(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} \\
D_n^{13} &= -J_n'(\alpha_p^1) \\
D_n^{14} &= -\frac{nJ_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1} \\
D_n^{21} &= \frac{nH_n^{(1)}(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} \\
D_n^{22} &= H_n^{(1)'}(\alpha_s^0) \\
D_n^{23} &= -\frac{nJ_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} \\
D_n^{24} &= -J_n'(\alpha_s^1) \\
D_n^{31} &= \frac{(\lambda^0+2\mu^0)(\alpha_p^0)^2 H_n^{(1)''}(\alpha_p^0)+\lambda^0 H_n^{(1)'}(\alpha_p^0)\alpha_p^0-\lambda^0 n^2 H_n^{(1)}(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} \\
D_n^{32} &= \frac{2\mu^0 n\left(\alpha_s^0 H_n^{(1)'}(\alpha_s^0)-H_n^{(1)}(\alpha_s^0)\right)}{\alpha_s^0} \\
D_n^{33} &= -\frac{(\lambda^1+2\mu^1)(\alpha_p^1)^2 J_n''(\alpha_p^1)+\lambda^1\alpha_p^1 J_n'(\alpha_p^1)-\lambda^1 n^2 J_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} \\
D_n^{34} &= -\frac{2\mu^1 n\left(\alpha_s^1 J_n'(\alpha_s^1)-J_n(\alpha_s^1)\right)}{\alpha_s^1} \\
D_n^{41} &= \frac{2\mu^0 n\left(\alpha_p^0 H_n^{(1)'}(\alpha_p^0)-H_n^{(1)}(\alpha_p^0)\right)}{\alpha_p^0} \\
D_n^{42} &= \frac{\mu^0\left((\alpha_s^0)^2 H_n^{(1)''}(\alpha_s^0)-\alpha_s^0 H_n^{(1)'}(\alpha_s^0)+n^2 H_n^{(1)}(\alpha_s^0)\right)}{\alpha_s^0} \\
D_n^{43} &= -\frac{2\mu^1 n\left(\alpha_p^1 J_n'(\alpha_p^1)-J_n(\alpha_p^1)\right)}{\alpha_p^1} \\
D_n^{44} &= -\frac{\mu^1\left((\alpha_s^1)^2 J_n''(\alpha_s^1)-\alpha_s^1 J_n'(\alpha_s^1)+n^2 J_n(\alpha_s^1)\right)}{\alpha_s^1}
\end{aligned}
$$

Et les termes relatifs aux déplacements et contraintes de l'onde incidente s'écrivent :

$$\begin{aligned}
(U_r^0)_n &= -\frac{nJ_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} \\
(U_\theta^0)_n &= -J_n'(\alpha_s^0) \\
(\Sigma_{rr}^0)_n &= -\frac{2\mu^0 n\left(\alpha_s^0 J_n'(\alpha_s^0) - J_n(\alpha_s^0)\right)}{\alpha_s^0} \\
(\Sigma_{r\theta}^0)_n &= -\frac{\mu^0\left((\alpha_s^0)^2 J_n''(\alpha_s^0) - \alpha_s^0 J_n'(\alpha_s^0) + n^2 J_n(\alpha_s^0)\right)}{\alpha_s^0}
\end{aligned}$$

Annexe B

Diffraction par une sphère en milieu élastique

Cette annexe détaille le calcul des coefficients de diffraction dans le domaine fréquentiel dans le cas d'une inclusion sphérique élastique immergée dans une matrice élastique et éclairée par une onde plane de direction de propagation $\mathbf{e}_z$. Les principales notations et la présentation du problème sont décrites à la section 2.1.4. Comme pour le cas du calcul 2D, les problèmes d'une onde incidente P ou S sont résolus séparément.

B.1 Conditions aux limites

B.1.1 Expression des déplacements et des contraintes

En coordonnées sphériques, le déplacement $\mathbf{u}$ et les composantes normales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ s'expriment en fonction des potentiels des champs de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\phi + \frac{\partial}{\partial r} r\psi\right) + k_s^2 r\psi \\
u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + \frac{k_s^2}{\sin\theta}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \\
u_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) - k_s^2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \\
\sigma_{rr} &= -\lambda k_p^2 \phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_s^2 \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) \\
\sigma_{r\theta} &= \mu\left(2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_s^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \chi}{\partial \varphi}\right)\right) \\
\sigma_{r\varphi} &= \mu\left(\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\phi + \frac{\partial}{\partial r}(r\psi)\right) + k_s^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

B.1.2 Conditions à l'interface

À l'interface Γ entre la sphère et la matrice, on exprime le contact parfait par la continuité des déplacements et des contraintes normales :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^1 = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \vec{e}_r - \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \vec{e}_r = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \text{en } r = A \left\{ \begin{array}{ll} u_r^1 - u_r^0 = 0 & \sigma_{rr}^1 - \sigma_{rr}^0 = 0 \\ u_\theta^1 - u_\theta^0 = 0 & \sigma_{r\theta}^1 - \sigma_{r\theta}^0 = 0 \\ u_\varphi^1 - u_\varphi^0 = 0 & \sigma_{r\varphi}^1 - \sigma_{r\varphi}^0 = 0 \end{array} \right. \tag{B.2}$$

B.1.3 Condition de Sommerfeld

On décompose comme dans le cas 2D (Eq. 2.4) le champ à l'extérieur de l'inclusion comme la somme du champ incident et du champ diffracté :

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0_{inc.} + \mathbf{u}^0_d \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \phi^0 &= \phi^0_{inc.} + \phi^0_d \\ \psi^0 &= \psi^0_{inc.} + \psi^0_d \\ \chi^0 &= \chi^0_{inc.} + \chi^0_d \end{cases} \tag{B.3}$$

Le champ diffracté par l'inclusion dans Ω^0 doit satisfaire la condition de Sommerfeld à l'infini :

$$\phi^0_d \sim \frac{1}{k^0_p r} e^{ik^0_p r} \quad ; \quad \psi^0_d \sim \frac{1}{k^0_s r} e^{ik^0_s r} \quad ; \quad \chi^0_d \sim \frac{1}{k^0_s r} e^{ik^0_s r} \quad ; \quad r \to \infty \tag{B.4}$$

B.1.4 Solutions générales des equations de Helmholtz

En trois dimensions, les solutions des équations de Helmholtz 2.37, 2.38, et 2.39 peuvent se décomposer sous la forme de séries hamoniques sphériques ayant la forme suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n f_n(kr) P_n^m(\cos\theta), \tag{B.5}$$

dans laquelle K_n est un coefficient constant et f_n une combinaison linéaire de fonctions de Bessel sphériques de première espèce j_n et de fonctions de Hankel sphériques de premier type $h_n^{(1)}$, que l'on notera par la suite h_n afin d'alléger l'écriture.

Ces fonctions de Bessel et de Hankel sphériques sont définies à partir des fonctions de Bessel et de Hankel de la manière suivante [Abramowitz and Stegun, 1964] :

$$f_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} F_{n+1/2}(z) \qquad f_n \equiv j_n, h_n \qquad F_n \equiv J_n, H_n^{(1)} \tag{B.6}$$

D'après les conditions de Sommerfeld B.4, seules des fonctions de Hankel sphériques seront présentes dans f_n pour le champ diffracté à l'extérieur de l'inclusion. A l'inverse, à l'intérieur de l'inclusion, les fonctions de Hankel sphériques étant singulières en $r = 0$, seules des fonctions de Bessel sphériques seront présentes.

Les fonctions P_n^m sont les $m$ièmes fonctions associées de legendre de degré n. solutions de l'équation différentielle de Legendre suivante :

$$(1-z^2)f''(z) - 2zf'(z) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right) f(z) = 0 \quad ; \quad f \equiv P_n^m. \tag{B.7}$$

on a par ailleurs $P_n^0 = P_n$ qui sont les polynômes de Legendre de degré n.

B.2 Expression des champs

B.2.1 Onde incidente de compression

B.2.1.a Champ incident

On considère une onde plane incidente de compression se propageant suivant l'axe $\mathbf{e_z}$ de la forme $\mathbf{u}^0_{inc} = \mathrm{e}^{ik^0_p z}\mathbf{e_z} = \nabla\phi^0_{inc}$. Le problème présente une symétrie de révolution autour de l'axe

z et est donc indépendant de l'angle φ. Le potentiel du champ incident peut se mettre sous la forme suivante [Brill and Gaunaurd, 1987] :

$$\phi^0_{inc} = \frac{1}{ik^0_p}\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)j_n(k^0_p r)P_n(\cos\theta), \tag{B.8}$$

où les fonctions P_n sont les polynômes de Legendre et j_n les fonctions de Bessel sphériques de première espèce.

Champs diffractés et transmis Le champ à l'extérieur de l'inclusion peut s'écrire comme la somme d'un champ diffracté et du champ incident :

$$\text{dans } \Omega^0 \quad \begin{cases} \phi^0_p = \phi^0_{inc} + \phi^0_{d,p} = \dfrac{1}{ik^0_p}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)a_n h_n(k^0_p r)P_n(\cos\theta) \ + \ \phi^0_{inc} \\ \psi^0_p = \psi^0_{d,p} \qquad\quad = \dfrac{1}{ik^0_s}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)b_n h_n(k^0_s r)P_n(\cos\theta) \end{cases} \tag{B.9}$$

Tandis qu'à l'intérieur de l'inclusion, on a le champ transmis, dont les potentiels s'écrivent :

$$\text{dans } \Omega^1 \quad \begin{cases} \phi^1_p = \dfrac{1}{ik^1_p}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)c_n j_n(k^1_p r)P_n(\cos\theta) \\ \psi^1_p = \dfrac{1}{ik^1_s}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)d_n j_n(k^1_s r)P_n(\cos\theta) \end{cases} \tag{B.10}$$

Les coefficients a_n, b_n, c_n, d_n sont des inconnues à déterminer à partir des conditions aux limites. En pratique on ne s'intéresse qu'au champ diffracté par l'inclusion et on ne cherchera à déterminer que les coefficients a_n et b_n.

B.2.2 Onde incidente de type S

Champ incident Cette fois, on considère une onde incidente de cisaillement se propageant suivant la direction $\mathbf{e_z}$, dont le déplacement particulaire (polarisation) se fait suivant $\mathbf{e_x}$, de la forme $\mathbf{u}^0_{inc.} = \mathrm{e}^{ik^0_s z}\mathbf{e_x} = \nabla \times \mathbf{\Psi}^0_{inc}$. Le problème n'est plus symétrique et les expressions des champs auront une dépendance en θ et φ.

Les potentiels scalaires du champ incident peuvent alors se mettre sous la forme [Brill and Gaunaurd, 1987] :

$$\begin{cases} \psi^0_{inc.} = \dfrac{i}{k^0_s}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k^0_s r)P^1_n(\cos\theta)\cos\varphi \\ \chi^0_{inc.} = \left(\dfrac{i}{k^0_s}\right)^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k^0_s r)P^1_n(\cos\theta)\sin\varphi \end{cases} \tag{B.11}$$

où les fonctions P^1_n sont les premières fonctions associées de Legendre.

Champs diffractés et transmis A l'extérieur de l'inclusion les potentiels des champs se mettent sous la forme :

$$\text{dans } \Omega^0 \quad \begin{cases} \phi^0_s = \phi^0_{d,s} \qquad\quad = \dfrac{1}{ik^0_p}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n h_n(k^0_p r)P^1_n(\cos\theta)\cos\varphi \\ \psi^0_s = \psi^0_{inc.} + \psi^0_{d,s} = \dfrac{i}{k^0_s}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n h_n(k^0_s r)P^1_n(\cos\theta)\cos\varphi \ + \ \psi^0_{inc.} \\ \chi^0_s = \chi^0_{inc.} + \chi^0_{d,s} = \left(\dfrac{i}{k^0_s}\right)^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} c_n h_n(k^0_s r)P^1_n(\cos\theta)\sin\varphi \ + \ \chi^0_{inc.} \end{cases} \tag{B.12}$$

Et à l'intérieur de l'inclusion :

$$\text{dans } \Omega^1 \quad \begin{cases} \phi_s^1 = & \dfrac{1}{ik_p^1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} d_n j_n(k_p^1 r) P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi \\ \psi_s^1 = & \dfrac{i}{k_s^1}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} e_n j_n(k_s^1 r) P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi \\ \chi_s^1 = & \left(\dfrac{i}{k_s^1}\right)^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} f_n j_n(k_s^1 r) P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi \end{cases} \tag{B.13}$$

Cette fois, a_n, b_n, c_n, d_n, e_n et f_n sont les inconnues à déterminer. Seules a_n, b_n et c_n sont relatives au champ diffracté par l'inclusion.

B.3 Résolution du problème

Le problème est résolu en appliquant les conditions aux limites à l'interface en $r = A$. Les problèmes pour une onde incidente P ou S sont résolus séparément. Comme dans le cas du cylindre (annexe A), on met le problème sous forme matricielle que l'on résout par la méthode de Cramer. On pose pour alléger l'écriture les quantités $\alpha_p^j = k_p^j.A$ et $\alpha_s^j = k_s^j.A$ avec $j = 0, 1$.

B.3.1 Incidence P

Les champs diffractés et transmis dans le cas d'une onde incidente de type P dépende des polynômes de Legendre. En utilisant des propriétés de récurrence des polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) &= \frac{1}{n+2}\left((2n+3)xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x)\right) \\ P_n'(x) &= (n+1)\frac{(xP_n(x) - P_{n+1}(x))}{1-x^2} \end{aligned} \tag{B.14}$$

on obtient les relations d'orthogonalité suivantes [Abramowitz and Stegun, 1964].

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)sin\theta d\theta &= \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx &= \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \\ \int_0^\pi P_n'(\cos\theta)P_n'(\cos\theta)\frac{1}{sin\theta}d\theta &= \int_{-1}^1 P_n'(x)P_n'(x)dx &= n(n+1) \\ \int_0^\pi P_n'(\cos\theta)P_n(\cos\theta)d\theta &= \int_{-1}^1 P_n'(x)P_n(x)dx &= 0 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Les relations obtenues en appliquant les conditions aux limites à l'interface de l'inclusion sont projetées sur une base de polynômes de Legendre afin d'obtenir le système linéaire suivant :

$$\mathbf{P}_m\mathbf{q}_m = \mathbf{r}_m \quad \text{avec } \mathbf{q}_m = [a_n, b_n, c_n, d_n] \tag{B.16}$$

On considère par ailleurs les propriétés liant les fonctions de Bessel et Hankel sphériques à leurs dérivées. Ces fonctions sont par définition les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$z^2 f_n''(z) + \Big(z^2 - n(n+1)\Big) f_n(z) + 2z f_n'(z) = 0 \qquad ; \qquad f_n \equiv h_n, j_n \tag{B.17}$$

et l'on a également :

$$f_n'(z) = -\frac{1}{2z}f_n(z) + \frac{f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z)}{2} \quad f_n \equiv j_n, y_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)} \tag{B.18}$$

Les coefficients des matrices $\mathbf{P}_m$ et $\mathbf{r}_m$ s'écrivent donc, après simplification :

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= h'_n(\alpha_p^0) & p_{12} &= n(n+1)\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0}\\
p_{13} &= -j'_n(\alpha_p^1) & p_{14} &= -n(n+1)\tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1}\\
p_{21} &= \tfrac{h_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} & p_{22} &= \left(\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} + h'_n(\alpha_s^0)\right)\\
p_{23} &= -\tfrac{j_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} & p_{24} &= -\left(\tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1} + j'_n(\alpha_s^1)\right)\\
p_{31} &= -\left(((\alpha_s^0)^2 - 2n(n+1))\tfrac{h_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} + 4h'_n(\alpha_p^0)\right) & p_{32} &= -2n(n+1)\left(\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} - h'_n(\alpha_s^0)\right)\\
p_{33} &= \tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}\left(((\alpha_s^1)^2 - 2n(n+1))\tfrac{j_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} + 4j'_n(\alpha_p^1)\right) & p_{34} &= 2n(n+1)\left(\tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1} - j'_n(\alpha_s^1)\right)\tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}\\
p_{41} &= 2\left(\tfrac{h_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} - h'_n(\alpha_p^0)\right) & p_{42} &= \left(((\alpha_s^0)^2 - 2(n^2+n-1))\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} + 2h'_n(\alpha_s^0)\right)\\
p_{43} &= -2\tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}\left(\tfrac{j_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} - j'_n(\alpha_p^1)\right) & p_{44} &= -\tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}\left(((\alpha_s^1)^2 - 2(n^2+n-1))\,\tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1} + 2j'_n(\alpha_s^1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -j'_n(\alpha_p^0)\\
r_2 &= -\tfrac{j_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0}\\
r_3 &= ((\alpha_s^0)^2 - 2n(n+1))\,\tfrac{j_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} + 4j'_n(\alpha_p^0)\\
r_4 &= 2\left(j'_n(\alpha_p^0) - \tfrac{j_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0}\right)
\end{aligned}
$$

On en déduit les amplitudes de diffraction a_n et b_n liées au champ diffracté. Les séries modales sont tronquées numériquement à l'ordre N défini par la relation 2.17, comme pour le cas du cylindre.

B.3.2 Incidence S

Dans le cas de l'onde incidente S, le principe du calcul est le même mais cette fois on utilise les propriétés des premières fonctions associées de Legendre P_n^1, dont les relations de récurrence sont :

$$
\begin{aligned}
P_{n+2}^m(x) &= \frac{1}{n-m+2}\left((2n+3)xP_{n+1}^m(x) - (n+m+1)P_n^m(x)\right)\\
P_{n+2}^1(x) &= \frac{1}{n+1}\left((2n+3)xP_{n+1}^1(x) - (n+2)P_n^1(x)\right)\\
\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta} &= -\frac{(n+1)\cos(\theta)P_n^1(\cos\theta) - nP_{n+1}^1(\cos\theta)}{\sin\theta}
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

conduisant aux relations d'orthogonalité :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi P_n^1(\cos\theta)P_m^1(\cos\theta)sin\theta d\theta = \frac{2n(n+1)}{2n+1}\delta_{mn}\\
&\int_0^\pi P_n^1(\cos\theta)P_n^1(\cos\theta)\frac{1}{sin\theta}d\theta = n(n+1)\\
&\int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}sin\theta d\theta = \frac{n(1+n)(2n^2-1)}{1+2n}\\
&\int_0^\pi \frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}P_n^1(\cos\theta)sin\theta d\theta = 0
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

En projetant les relations obtenues avec les conditions limites en $r = A$ on peut découpler le problème en deux systèmes linéaires indépendants :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_n\mathbf{r}_n = \mathbf{u}_n \quad \text{pour } n > 0 \quad \text{avec } \mathbf{r}_n = [a_n, b_n, d_n, e_n]\\
&\mathbf{Q}_n\mathbf{s}_n = \mathbf{v}_n \quad \text{pour } n > 0 \quad \text{avec } \mathbf{s}_n = [c_n, f_n]
\end{aligned}
\tag{B.21}
$$

Après simplification, les coefficients des matrices $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{Q}_n$ et $\mathbf{v}_n$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
p_{11} &= h_n'(\alpha_p^0) \\
p_{12} &= -n(n+1)\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} \\
p_{13} &= -j_n'(\alpha_p^1) \\
p_{14} &= n(n+1)\tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{21} &= \tfrac{h_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} \\
p_{22} &= -\left(\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} + h_n'(\alpha_s^0)\right) \\
p_{23} &= -\tfrac{j_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} \\
p_{24} &= \tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1} + j_n'(\alpha_s^1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{31} &= \left((\alpha_s^0)^2 - 2n(n+1)\right)\tfrac{h_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0} + 4h_n'(\alpha_p^0) \\
p_{32} &= 2n(n+1)\left(h_n'(\alpha_s^0) - \tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0}\right) \\
p_{33} &= -\tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}\left(\left((\alpha_s^1)^2 - 2n(n+1)\right)\tfrac{j_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1} + 4j_n'(\alpha_p^1)\right) \\
p_{34} &= -\tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}2n(n+1)\left(j_n'(\alpha_s^1) - \tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{41} &= -2\left(h_n'(\alpha_p^0) - \tfrac{h_n(\alpha_p^0)}{\alpha_p^0}\right) \\
p_{42} &= -\left(\left((\alpha_s^0)^2 - 2\left(n^2+n-1\right)\right)\tfrac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} + 2h_n'(\alpha_s^0)\right) \\
p_{43} &= \tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}2\left(j_n'(\alpha_p^1) - \tfrac{j_n(\alpha_p^1)}{\alpha_p^1}\right) \\
p_{44} &= \tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)^2}{(\alpha_s^1)^2}\left(\left((\alpha_s^1)^2 - 2\left(n^2+n-1\right)\right)\tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1} + 2j_n'(\alpha_s^1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= n(n+1)\tfrac{j_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} \\
u_2 &= \tfrac{j_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} + j_n'(\alpha_s^0) \\
u_3 &= 2n(n+1)\left(\tfrac{j_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} - j_n'(\alpha_s^0)\right) \\
u_4 &= \left((\alpha_s^0)^2 - 2\left(n^2+n-1\right)\right)\tfrac{j_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} + 2j_n'(\alpha_s^0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{11} &= h_n(\alpha_s^0) & q_{12} &= -j_n(\alpha_s^1) \\
q_{21} &= \frac{h_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} - h_n'(\alpha_s^0) & q_{22} &= \tfrac{\rho_1}{\rho_0}\tfrac{(\alpha_s^0)}{(\alpha_s^1)}\left(j_n'(\alpha_s^1) - \tfrac{j_n(\alpha_s^1)}{\alpha_s^1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= -j_n(\alpha_s^0) \\
v_2 &= \tfrac{j_n(\alpha_s^0)}{\alpha_s^0} - j_n'(\alpha_s^0)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir les coefficients a_n, b_n et c_n liés au champ diffracté par l'inclusion dans le cas de l'incidence en onde de cisaillement.

B.4 Expression des champs diffractés en champ lointain

Les potentiels des champs diffractés par l'inclusion s'expriment en fonction des fonctions de Hankel sphériques de premier type h_n (Eqs. B.9 et B.12), qui prend la forme asymptotique suivante pour de forts arguments :

$$h_n(z) \approx \frac{1}{z}(-i)^{n+1}e^{iz} \qquad ; \qquad z \to \infty \tag{B.22}$$

B.4.1 Onde incidente de compression

Les champs diffractés liés à l'onde incidente de compression prennent donc la forme suivante en champ lointain :

$$\phi_d^0 = F_\phi(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{k_p^0 r} \quad ; \quad F_\phi(\theta,\varphi) = -\frac{1}{k_p^0}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n P_n(\cos\theta) \tag{B.23}$$

$$\psi_d^0 = F_\psi(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{k_s^0 r} \quad ; \quad F_\psi(\theta,\varphi) = -\frac{1}{k_s^0}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)b_n P_n(\cos\theta) \tag{B.24}$$

Ce qui permet de déterminer les déplacements particulaires (d'après les relations B.1) :

$$u_{r,d}^0 = f_{pp}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{r} \quad ; \quad f_{pp}(\theta,\varphi) = \frac{1}{ik_{p0}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n P_n(\cos\theta) \tag{B.25}$$

$$u_{\theta,d}^0 = f_{ps}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} \quad ; \quad f_{ps}(\theta,\varphi) = \frac{1}{ik_{s0}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)b_n\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \tag{B.26}$$

B.4.2 Onde incidente de cisaillement

Dans le cas d'une onde incidente de cisaillement, l'expression asymptotique des potentiels des champs est :

$$\phi_d^0 = \frac{e^{ik_p^0 r}}{k_p^0 r}F_\phi(\theta,\varphi) \quad ; \quad F_\phi(\theta,\varphi) = -\frac{1}{k_p^0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{2n+1}{n(n+1)}\cos(\varphi)P_n^1(\cos(\theta)) \tag{B.27}$$

$$\psi_d^0 = \frac{e^{ik_s^0 r}}{k_s^0 r}F_\psi(\theta,\varphi) \quad ; \quad F_\psi(\theta,\varphi) = \frac{1}{k_s^0}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{2n+1}{n(n+1)}\cos(\varphi)P_n^1(\cos(\theta)) \tag{B.28}$$

$$\chi_d^0 = \frac{e^{ik_s^0 r}}{k_s^0 r}F_\chi(\theta,\varphi) \quad ; \quad F_\chi(\theta,\varphi) = \frac{i}{(k_s^0)^2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n^1(\cos(\theta))\sin(\varphi) \tag{B.29}$$

conduisant aux expressions des déplacements suivantes :

$$\begin{aligned}
u_{r,d}^0 &= f_{sp}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{r} = -\frac{i}{k_p^0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(2n+1)}{(n^2+n)}P_n^1(\cos(\theta))\cos(\varphi)\frac{e^{ik_p^0 r}}{r} \\
u_{\theta,d}^0 &= f_{ss\theta}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} = \frac{i}{k_s^0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n\,(n+1)}\left(b_n\frac{\partial P_n^1(\cos(\theta))}{\partial\theta}+c_n\frac{P_n^1(\cos(\theta))}{\sin\theta}\right)\cos(\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} \\
u_{\varphi,d}^0 &= f_{ss\varphi}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r} = -\frac{i}{k_s^0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n\,(n+1)}\left(b_n\frac{P_n^1(\cos(\theta))}{\sin\theta}+c_n\frac{\partial P_n^1(\cos(\theta))}{\partial\theta}\right)\sin(\varphi)\frac{e^{ik_s^0 r}}{r}
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Dans ce cas, l'onde de cisaillement diffractée $\mathbf{u_{s,d}}^0$ sera polarisée avec une composante $u_{\theta,d}^0$ et une composante $u_{\varphi,d}^0$:

$$\mathbf{u_{s,d}}^0 \;=\; u_{\theta,d}^0\,\mathbf{e}_\theta \;+\; u_{\varphi,d}^0\,\mathbf{e}_\varphi \tag{B.31}$$

Le terme f_{ss} sera donc déterminé à partir de l'amplitude complexe de $\mathbf{u_{s,d}}^0$.

$$f_{ss}(\theta,\varphi) \;=\; \sqrt{f_{ss\theta}(\theta,\varphi)^2 + f_{ss\varphi}(\theta,\varphi)^2} \tag{B.32}$$

B.5 Sections efficaces

Le flux d'énergie à travers un élément infinitésimal de surface dS orienté selon $\mathbf{n}$ est défini de la manière suivante :

$$dJ = \Re\mathrm{e}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)\cdot\mathbf{n}dS = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\bar{\dot{\mathbf{u}}}+\bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)\cdot\mathbf{n}dS = \frac{i\omega}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\bar{\mathbf{u}}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n}dS \tag{B.33}$$

B.5.1 Onde incidente de compression

B.5.1.a Expressions énergétiques

Flux incident. Pour un champ incident de compression $\mathrm{e}^{ik_p^0 z}\mathbf{e_z}$, on considère un élément de surface unitaire suivant la direction de propagation $\mathbf{e_z}$. On considère ici le cas de milieux purement élastiques, et les nombres d'ondes k_p^0 et k_s^0 sont des grandeurs réelles. Le flux incident d'énergie J_p^i par unité de surface s'écrit alors :

$$J_p^i = -\frac{\rho_0 \omega^3}{k_p^0}. \tag{B.34}$$

Flux diffracté. On utilise les expressions en champ lointain pour le champ diffracté. Le flux d'énergie $J_p^d(r)$ diffracté à travers dS par l'inclusion à la distance r dans la direction $\mathbf{e_r}$ est :

$$dJ_p^d(r) = -\rho_0\omega^3 \left(\frac{\|f_{pp}(\theta,\varphi)\|^2}{k_p^0} + \frac{\|f_{ps}(\theta,\varphi)\|^2}{k_s^0} \right) \frac{1}{r^2} dS \qquad \text{avec} \qquad dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{B.35}$$

Le flux d'énergie totale $\mathbb{J}_p^d$ diffractée par l'inclusion sphérique est obtenu en intégrant le flux énergétique sur une sphère de rayon b (arbitraire) concentrique à l'inclusion. En champ lointain, cette énergie totale ne varie pas avec b.

$$\mathbb{J}_p^d = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} dJ_p^d(b) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{dJ_p^d(b)}{dS} b^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{B.36}$$

En utilisant les relations d'orthogonalité des polynomes de Legendre, $\mathbb{J}_p^d$ se simplifie en :

$$\mathbb{J}_p^d = -4\pi\rho_0\omega^3 \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \left(\frac{1}{(k_p^0)^3} |a_n|^2 + n(n+1)\frac{1}{(k_s^0)^3} |b_n|^2 \right). \tag{B.37}$$

B.5.1.b Sections efficaces

Sections efficaces différentielles. En 3 dimensions, la section efficace différentielle $\sigma_d(\theta,\varphi)$ est définie comme le rapport de l'énergie diffractée dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$ sur le flux incident par unité de surface.

$$\sigma_d = \frac{1}{J^i}\frac{dJ_p^d}{d\Omega}. \tag{B.38}$$

Par ailleurs, l'angle solide élémentaire $d\Omega$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{B.39}$$

La section efficace différentielle est une grandeur homogène à une surface.

La section efficace différentielle dans le cas d'une onde incidente de compression $\sigma_{d,p}$ de diffusion s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{d,p} = \frac{1}{J_p^i}\frac{dJ_p^d}{d\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n)^2 \left(\frac{1}{(k_p^0)^2} |a_n|^2 \left(P_n(\cos\theta)\right)^2 + \frac{k_p^0}{(k_s^0)^3} |b_n|^2 \left(\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \right)^2 \right). \tag{B.40}$$

Sections efficaces totales. La section efficace totale $\sigma_{t,p}$ est obtenue en intégrant la section différentielle sur tout l'angle solide, on alors pour expression, en utilisant les relations d'orthogonalité des polynomes de Legendre (Eqs. B.15) :

$$\sigma_{t,p} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma_{d,p} d\Omega = \frac{\mathbb{J}_p^d}{J_p^i} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\left(\frac{|a_n|^2}{(k_p^0)^2} + \frac{k_p^0}{(k_s^0)^3} n(n+1)\,|b_n|^2\right). \tag{B.41}$$

Elle peut être décomposée en :

$$\sigma_{t,p} = \sigma_{t,pp} + \sigma_{t,ps} \tag{B.42}$$

$$\sigma_{t,pp} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\frac{|a_n|^2}{(k_p^0)^2} \quad ; \quad \sigma_{t,ps} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\frac{k_p^0}{(k_s^0)^3} n(n+1)\,|b_n|^2 . \tag{B.43}$$

La section efficace totale est homogène à une surface. On normalise généralement la section efficace par la section πA^2 de l'inclusion illuminée par l'onde incidente, A étant le rayon de l'inclusion. La section efficace totale nomalisée s'écrit donc de la manière suivante pour une onde incidente de compression :

$$\overline{\sigma_{t,p}} = \frac{\sigma_{t,p}}{\pi A^2} = \frac{4}{A^2} \sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\left(\frac{|a_n|^2}{(k_p^0)^2} + \frac{k_p^0}{(k_s^0)^3} n(n+1)\,|b_n|^2\right). \tag{B.44}$$

B.5.2 Onde incidente de cisaillement

B.5.2.a Expressions énergétiques

Flux incident. Pour une onde incidente de cisaillement $\mathbf{u}_{inc.}^0 = e^{ik_s^0 z}\mathbf{e_x}$ en milieu élastique, l'expression du flux d'énergie incidente par unité de surface dans la direction $\mathbf{e_z}$ est :

$$J_s^i = -\frac{\rho_0 \omega^3}{k_s^0}. \tag{B.45}$$

Flux diffracté. On utilise les expressions du déplacement du champ diffracté par l'inclusion en champ lointain (Eqs. B.30) pour calculer le flux d'énergie $dJ_s^d(r)$ diffracté à la distance r dans la direction $\mathbf{e_r}$. Le flux total $\mathbb{J}_s^d$ est ensuite déterminé en intégrant le flux $dJ_s^d(r)$ sur une sphère de rayon arbitraire b de la même manière que pour la relation B.36. Pour un milieu purement élastique où k_p^0 et k_s^0 sont réels, on obtient :

$$\mathbb{J}_s^d = -2\pi\rho_0\omega^3 \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}|a_n|^2\right)\frac{1}{(k_p^0)^3} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(|b_n|^2+|c_n|^2\right)\right)\frac{1}{(k_s^0)^3}\right]. \tag{B.46}$$

B.5.2.b Sections efficaces

Sections efficaces différentielles. La section efficace différentielle $\sigma_{d,s}$ de diffusion se calcule de la même manière que pour l'onde incidente P (Eq. B.38) dans le cas d'une onde incidente S, et elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\sigma_{d,s} = \frac{1}{J_s^i}\frac{dJ_s^d}{d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)^2 \Bigg[& \frac{k_s^0}{(k_p^0)^3}(P_n^1(\cos\theta))^2|a_n|^2\cos^2\varphi \\ & + \frac{1}{(k_s^0)^2}\left(\left(\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2\cos^2\varphi + \frac{(P_n^1(\cos\theta))^2}{\sin^2\theta}\sin^2\varphi\right)|b_n|^2 \\ & + 2\frac{1}{(k_s^0)^2}\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\Re\mathrm{e}\left(c_n\overline{b_n}\right) \\ & + \frac{1}{(k_s^0)^2}\left(\frac{(P_n^1(\cos\theta))^2}{\sin^2\theta}\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)^2\sin^2\varphi\right)|c_n|^2\Bigg].\end{aligned} \tag{B.47}$$

Sections efficaces totales. La section efficace totale dans le cas d'une onde incidente de cisaillement s'écrit alors, en utilisant les relations d'orthogonalité B.20 :

$$\sigma_{t,s} = \frac{\mathbb{J}_s^d}{J_s^i} = 2\pi \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} |a_n|^2 \right) \frac{k_s^0}{(k_p^0)^3} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(|b_n|^2 + |c_n|^2 \right) \right) \frac{1}{(k_s^0)^2} \right]. \quad \text{(B.48)}$$

On normalise comme précedemment la section efficace totale par la section de la sphère πA^2.

$$\overline{\sigma_{s,t}} = \frac{\sigma_{s,t}}{\pi A^2} = \frac{2}{A^2} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} |a_n|^2 \right) \frac{k_s^0}{(k_p^0)^3} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(|b_n|^2 + |c_n|^2 \right) \right) \frac{1}{(k_s^0)^2} \right]. \quad \text{(B.49)}$$

Annexe C

Effets du filtrage numérique

L'objectif de cette annexe est de présenter les caractéristiques du filtre utilisé pour traiter les signaux, en terme de réponse fréquentielle (notamment les éventuels déphasages qu'il peut induire), et de réponse impulsionnelle (les déformations des signaux produits par le terme de déphasage).

C.1 Filtre passe bande de Butterworth

Le filtre est un filtre passe bande classique de type Butterworth d'ordre 3. Ses caractéristiques sont les suivantes :

– Réponse plate dans sa bande passante,

– Atténuation en dehors de la bande passante à $-20n$ dB/décade, où n est l'ordre du filtre.

Ces types de filtres IIR (Infinite Impulse Response) présentent l'avantage d'une relative simplicité de mise en oeuvre (peu de coefficients de filtres à calculer) et une grande rapidité de calcul. Leur inconvénient est de n'avoir pas une phase linéaire pour toutes les fréquences, et par conséquent de déformer les signaux temporels filtrés.

La figure C.1 présente le signal dirac utilisé pour le calcul des réponses impulsionnelles du filtre. Le signal est échantillonné à 10 MHz, comme lors des mesures expérimentales.

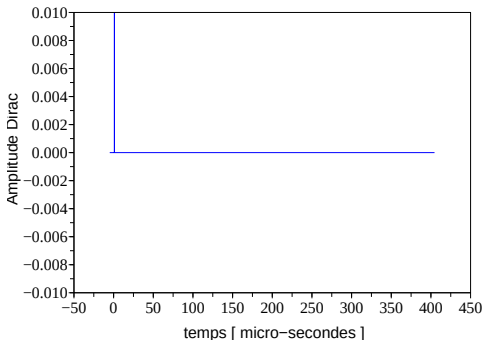
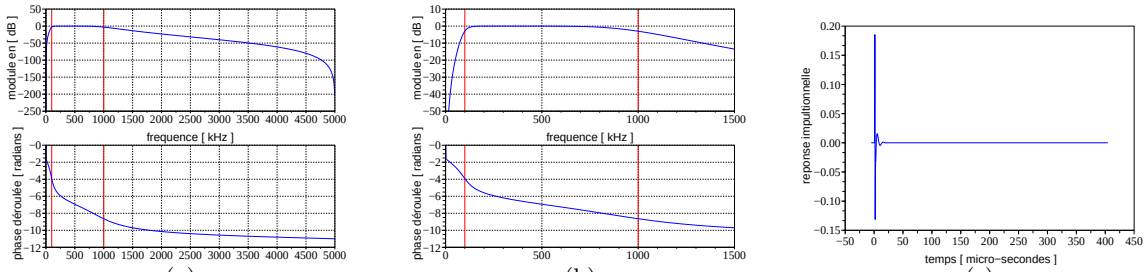


FIG. C.1 – Signal dirac utilisé pour le calcul des réponses impulsionnelles.

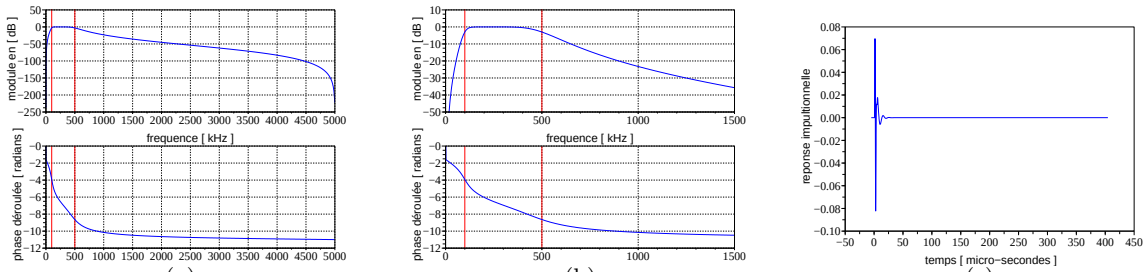
On va présenter dans les figures suivantes les réponses impulsionnelles du filtre pour différentes bandes passantes, qui représentent l'effet du filtre sur un dirac (déformations, oscillations secondaires, échos secondaires). L'effet de ces filtres sur le signal temporel du dirac donne une information importante sur l'effet qui serait produit sur n'importe quel signal, puisque le signal filtré se calcule par produit de convolution entre le signal à filtrer et la réponse impulsionnelle du filtre.

C.2 Filtrage dans une bande de fréquences “large”



(a) (b) (c)

Fig. C.2 – (a) et (b) : Réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d’ordre 3 entre 100 kHz et 1000 kHz, pour une fréquence d’échantillonnage de 10 MHz. La phase est linéaire dans la bande passante. (c) Réponse impulsionnelle du filtre.



(a) (b) (c)

Fig. C.3 – (a) et (b) : Réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d’ordre 3 entre 100 kHz et 500 kHz, pour une fréquence d’échantillonnage de 10 MHz. La phase est linéaire dans la bande passante. (c) Réponse impulsionnelle du filtre.

Les figures C.2 et C.3 présentent les caractéristiques du filtre lorque la bande passante choisie est relativement ”large” comparativement à la fréquence d’échantillonnage. Ici la fréquence d’échantillonnage est de 10 MHz et les filtres présentés ont une largeur de bande passante de 900 kHz et 400 kHz.

On constate que la réponse impulsionnelle présente assez peu d’oscillations induites par les rotations de phase ; les signaux filtrés seront peu déformés.

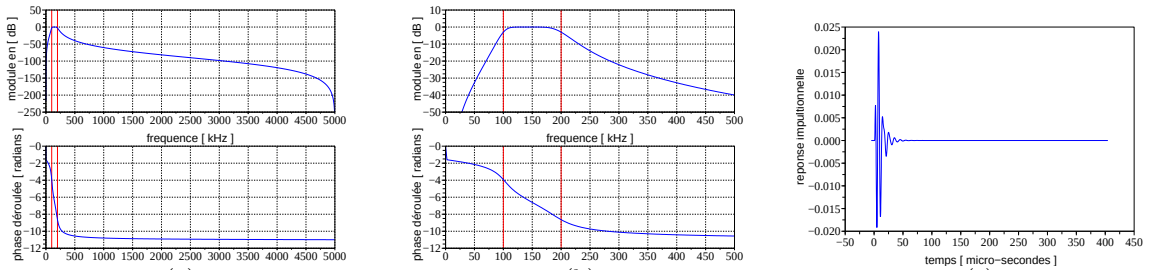
C.3 Filtrage dans une bande de fréquences “étroite”

Les figures C.4 et C.5 présentent les caractéristiques du filtre lorque la bande passante choisie est relativement “étroite” comparativement à la fréquence d’échantillonnage. Ici, les filtres présentés ont une largeur de bande passante de 100 kHz et 25 kHz.

On constate que la réponse impulsionnelle présente cette fois de fortes oscillations, ainsi qu’un écho secondaire pour le filtre le plus étroit (Fig. C.5(c)).

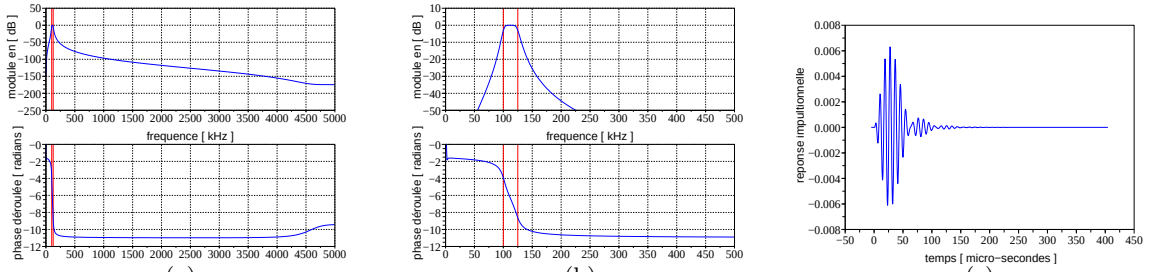
C.4 Conclusions

Pour toutes les bandes passantes de filtres considérés, l’amplitude de la réponse fréquentielle est très plate dans la bande passante. L’atténuation des composantes fréquentielles en dehors de



(a) (b) (c)

FIG. C.4 – (a) et (b) ; Réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d'ordre 3 entre 100 kHz et 200 kHz, pour une fréquence d'échantillonnage de 1 MHz. La phase est linéaire dans la bande passante. (c) Réponse impulsionnelle du filtre.



(a) (b) (c)

FIG. C.5 – (a) et (b) ; Réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d'ordre 3 entre 100 kHz et 125 kHz, pour une fréquence d'échantillonnage de 10 MHz. La phase est linéaire dans la bande passante. (c) Réponse impulsionnelle du filtre.

la bande passante est suffisante pour notre étude, même s'il s'agit de l'un des filtres les moins sélectifs.

La phase est quasiment linéaire dans la bande passante. Les rotations de phases en dehors de la bande passante sont d'autant plus importantes que la bande passante du filtre est étroite. Cet effet se fait ressentir dans la "déformation" des signaux filtrés.

Plus la bande passante du filtre est étroite comparativement à la fréquence d'échantillonnage, plus les déformations des signaux filtrés seront importantes, introduisant de nombreuses oscillations et échos parasites. L'étude des signaux temporels filtrés avec une bande trop fine sera donc délicate.

Le contenu fréquentiel des signaux est par contre exploitable à l'intérieur de la bande passante du filtre. L'étude de l'énergie des signaux dans différentes bandes de fréquences, qui nous intéresse particulièrement pour l'étude des rapports entre l'énergie cohérente et l'énergie incohérente est donc possible.

Ces filtres sont de type IIR (Infinite Impulse Response) et ont donc une réponse impulsionnelle de durée temporelle infinie. On peut cependant n'en considérer qu'une partie, l'amplitude de la réponse étant rapidement négligeable.

Annexe D

Modélisation du rayonnement des transducteurs

Cette annexe présente le calcul simplifié du diagramme de rayonnement des transducteurs utilisés pour les mesures expérimentales en transmission d'ondes de compression dans du béton ou du mortier. Le transducteur est assimilé à un piston circulaire dont tous les points vibrent en phase dans un milieu semi-infini, homogène, élastique et isotrope. La vitesse des ondes de compression dans un tel milieu est prise à $c = 4000\,\mathrm{m.s^{-1}}$, qui est proche de la vitesse effective attendue dans les dalles de béton.

D.1 Piston plan en régime harmonique.

D.1.1 Champ rayonné par une sphère

On considère une sphère de rayon a qui rayonne dans l'espace à la pulsation ω. Le potentiel créé à une distance r du centre de la sphère ($r > a$) s'écrit de la manière suivante :

$$\Phi(\vec{r}, t) = a^2 \frac{V_n}{r} \cos(\omega t - kr). \tag{D.1}$$

Le rayonnement de la sphère décroît en $1/r$ avec la distance, et est proportionnel au volume de fluide déplacé par unité de temps $4\pi a^2 V_n$. La vitesse V_n est l'amplitude de vibration de la vitesse normale à la surface de la sphère.

D.1.2 Rayonnement par un élément de surface

On considère un élément de surface quelconque ds, de dimensions petites par rapport à la longueur d'onde. La vitesse normale à l'élément de surface ds est notée V_n, et le volume de fluide déplacé par unité de temps est le produit $V_n \mathrm{d}s$.

On considère alors que cet élément rayonne comme une demi-sphère de rayon a dans un demi-espace. En un point M de l'espace c'est comme si les ondes émises par l'autre moitié de la sphère n'atteignaient pas ce point. L'élément de surface ds s'écrit alors :

$$\mathrm{d}s = 2\pi a^2 \tag{D.2}$$

L'amplitude du potentiel ($a^2 V_n$) de l'équation D.1 devient :

$$a^2 V_n = \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} V_n \tag{D.3}$$

Et le potentiel total rayonné au point M par chaque élément de surface ds situé en un point P s'écrit de la manière suivante :

$$\Phi(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \int_S \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{2\pi R} V_n(P)\mathrm{d}s \tag{D.4}$$

ce potentiel total s'appelle *l'intégrale de Rayleigh*. R représente la distance entre P et M (voir la figure D.1).

D.1.3 Disque

On considère cette fois un piston, représenté par un disque plan de rayon a dont tous les points vibrent en phase à la pulsation ω et à la vitesse normale uniforme d'amplitude V_n.

On définit la position d'un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, φ), dont l'origine est prise au centre du disque (voir la figure D.1).

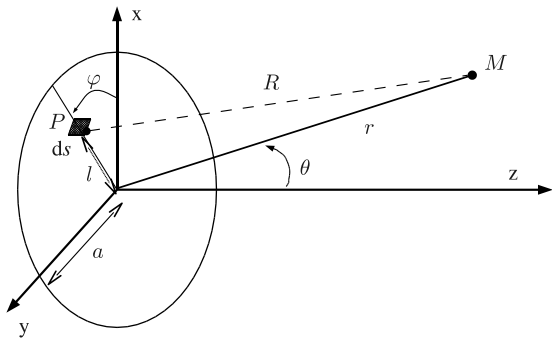


Fig. D.1 – Repère des coordonnées du disque-piston, les points du disque vibrent en phase (d'après Royer and Dieulesaint [1996]).

Un élément de surface ds est lui repéré dans ses coordonnées polaires (σ, φ) dont l'origine est également prise au centre du disque. On a alors $\mathrm{d}s = l\mathrm{d}l\mathrm{d}\varphi$.

La distance entre l'élément source élémentaire ds et le point M s'écrit alors :

$$R = (r^2 + l^2 - 2rl\sin\theta\cos\varphi)^{1/2}. \tag{D.5}$$

L'intégrale de Rayleigh correspondant au champ rayonné par le disque en M s'écrit alors :

$$\Phi(r,t) = V_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \int_0^a \frac{l}{R} \exp(-\mathrm{i}kR)\mathrm{d}l. \tag{D.6}$$

D.2 Champ dans l'axe du piston - Distance de Fresnel

Afin de simplifier les calculs dans un premier temps, nous nous plaçons le long de l'axe du disque pour calculer le champ rayonné. On a alors $\theta = 0$ et de plus l'expression de R ne dépend plus de l'angle φ. On a alors :

$$R = (r^2 + l^2)^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad l\mathrm{d}l = R\mathrm{d}R \tag{D.7}$$

L'expression du champ rayonné par le disque (Eq. D.6) devient alors, après changement de variables ($l \to R$) :

$$\Phi(z,t) = V_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \int_z^{\sqrt{z^2+a^2}} \exp(-\mathrm{i}kR)\mathrm{d}R \tag{D.8}$$

Cette équation à pour solution :

$$\Phi(z,t) = \mathrm{i}\frac{V_n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}[\exp(-\mathrm{i}k\sqrt{z^2+a^2}) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}] \tag{D.9}$$

On peut alors exprimer la surpression acoustique sur l'axe du transducteur grâce à la relation :

$$\delta p = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{D.10}$$

où ρ est la densité du milieu.

Cette surpression s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\delta p(z,t) = \rho c V_n(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\beta})\exp(\mathrm{i}\omega t - kz) \qquad \text{avec} \qquad \beta = \sqrt{z^2+a^2} - z. \tag{D.11}$$

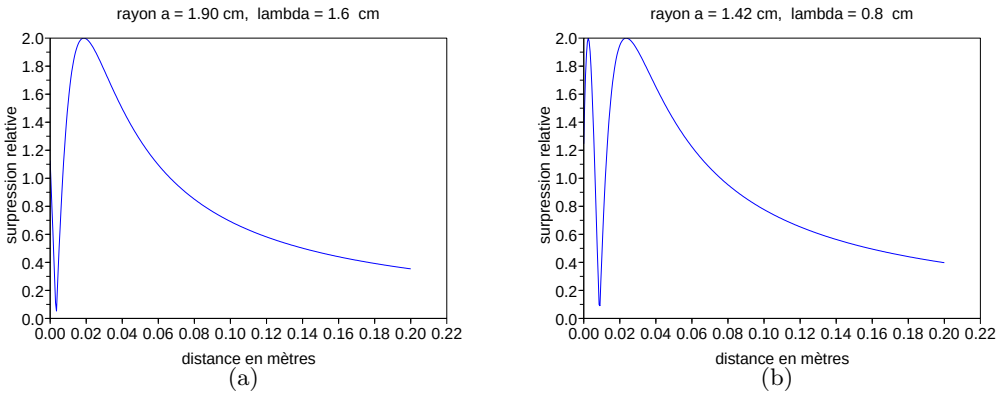
L'amplitude de cette surpression s'écrit de la manière suivante :

$$|\delta p| = \rho c V_n \left|1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\beta}\right| = \rho c V_n \sqrt{2-2\cos k\beta}, \tag{D.12}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$|\delta p| = 2\delta p_0 \left|\sin\frac{k\beta}{2}\right| = 2\delta p_0 \left|\sin\frac{\pi\beta}{\lambda}\right| \qquad \text{avec} \qquad \delta p_0 = \rho c V_n. \tag{D.13}$$

Les figures D.2(a) et D.2(b) représentent l'allure de la surpression relative $|\delta p/\delta p_0|$ générée dans l'axe du piston (Eq. D.13), pour les transducteurs utilisés lors des mesures. Les longueurs d'ondes considérées correspondent aux fréquences centrales des transducteurs.



(a) (b)

FIG. D.2 – Surpression relative $|\delta p/\delta p_0|$ générée dans l'axe du piston, pour les transducteurs utilisés à leur fréquence centrale, (a) transducteur de 250 kHz, (b) transducteur de 500 kHz.

En certains points de l'axe situés proches du piston, la surpression s'annule. Ce sont des effets de "champ proche". Ces points correspondent aux valeurs de z telles que $\beta = n\lambda$ ($n \in \mathbb{N}$), pour des longueurs d'ondes inférieures au rayon du transducteur ($\lambda < a$).

Le dernier maximum de surpression correspond à la valeur $\beta = \lambda/2$. On détermine alors la *distance de Fresnel* z_m :

$$z_m = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} \simeq \frac{a^2}{\lambda} \qquad \text{pour} \qquad a \gg \lambda\,. \tag{D.14}$$

Au delà de cette distance, on parle de champ lointain. La surpression acoustique le long de l'axe décroît alors en $1/z$. La relation D.13 devient alors :

$$\delta p \simeq 2\,\delta p_0\,\pi\,\frac{\beta}{\lambda} = \delta p_0\frac{ka^2}{2z} \qquad \text{pour} \qquad z \gg \frac{a^2}{\lambda}\,. \tag{D.15}$$

Transducteur (fréquence centrale) [kHz]	**250**	**500**
Diamètre [in]	1,5	1,125
Rayon [cm]	1,90	1,43
Vitesse des ondes P [$m.s^{-1}$]	4000	4000
Longueur d'onde associée [cm]	1,6	0,8
Distance de Fresnel [cm]	1,86	2,35

Pour être en champ proche à $z = 6\,cm$		
λ minimal [cm]	0,6	0,3
Fréquence max. [kHz]	670	1200

Tab. D.1 – Tableau récapitulatif des distances de Fresnel pour les deux transducteurs utilisés en transmission, excités à leur fréquence centrale.

Le tableau D.1 récapitule les paramètres relatifs aux transducteurs utilisés lors des mesures, et donne les distances de Fresnel correspondant à leurs fréquences centrales. Ces distances sont de l'ordre de 2 cm dans les deux cas. La seconde partie du tableau détermine la fréquence maximale permettant de rester en configuration de champ proche pour une épaisseur de 6 cm, qui correspond à la dalle la plus fine étudiée lors des mesures. Les épaisseurs de dalles de béton utilisées lors des mesures étant respectivement de 6 et 12 cm, on peut donc considérer que les mesures ont été faites en configuration de champ lointain, avec comme limites haute fréquence les valeurs données dans le tableau D.1.

D.3 Diagramme de rayonnement en champ lointain

D.3.1 Amplitude

A grande distance du piston (pour $r >> {}^{a^2}/_{\lambda}$) l'intégrale de Rayleigh (Eq. D.6) se simplifie et possède une solution analytique simple. Le potentiel en tout point de l'espace pour $r >> {}^{a^2}/_{\lambda}$ est de la forme :

$$\Phi(r,\theta,t) = \frac{a^2 V_n}{2r}\left(\frac{2J_1(ka\sin(\theta))}{ka\sin(\theta)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kr)}, \tag{D.16}$$

où J_1 représente la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 1. Ce potentiel engendre une surpression relative dans le demi espace de la forme suivante (toujours en champ lointain) :

$$\left|\frac{\delta p}{\delta p_0}\right| = \left|\frac{a}{r}\frac{J_1(ka\sin(\theta))}{\sin(\theta)}\right|. \tag{D.17}$$

Cette surpression s'annule une première fois pour un angle θ_1 tel que :

$$\sin\theta_1 = \frac{3,83}{ka} = 0,61\frac{\lambda}{a}.$$

L'angle de divergence du faisceau principal du transducteur est alors défini de la manière suivante, entre les angles $-\theta_1$ et θ_1 :

$$\alpha = 2\theta_1 = 1,22\frac{\lambda}{a} \qquad \text{pour} \qquad a >> \lambda. \tag{D.18}$$

Le faisceau acoustique est d'autant plus directif que les rayon du disque est grand par rapport à la longueur d'onde.

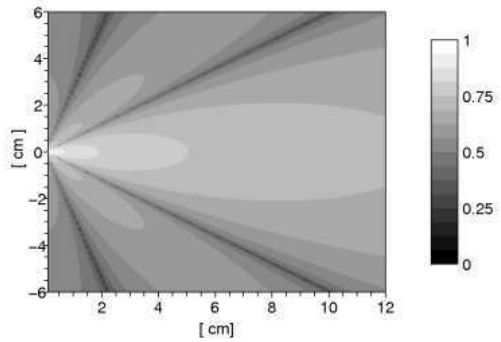


FIG. D.3 – Intensité acoustique relative, pour le transducteur de 250 kHz excité à sa fréquence centrale, dans une configuration de champ lointain (valable théoriquement pour des distances supérieures à environ 2 cm du transducteur).

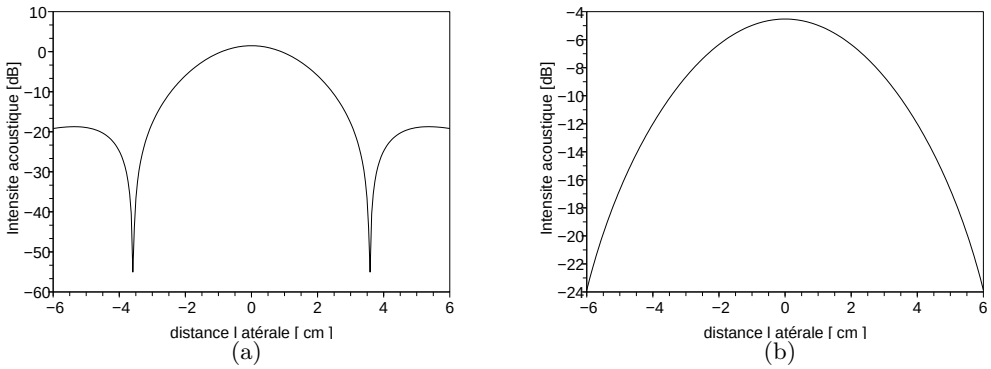


FIG. D.4 – Intensité acoustique relative, pour le transducteur de 250 kHz excité à sa fréquence centrale, pour des épaisseurs traversées de 6 cm (a) et 12 cm (b).

Les figures D.3, D.4, D.5, et D.6, présentent les résultats du calcul de l'intensité acoustique relative rayonnée dans l'espace avec l'approximation de champ lointain, et les paramètres du tableau D.1.

La figure D.3 présente le résultat pour le transducteur de 250 kHz excité à sa fréquence centrale. Les courbes des figures D.4 (a) et (b) montrent l'intensité relative en dB pour des épaisseurs de 6 cm et 12 cm qui correspondent aux dalles utilisées lors des mesures. Les figures D.5 et D.6, correspondent au transducteur de 500 kHz.

La longueur des "scans" effectués avec le laser est de environ 5cm, et les "scans" sont centrés sur l'axe du transducteur. Pour la dalle de 12 cm, la variation d'intensité le long du "scan" est de l'ordre de quelques décibels (entre 3 et 5 dB) suivant les fréquences.

Pour la dalle de 6 cm, les écarts sont plus importants (de l'ordre de 10 dB voire plus) et il peut y avoir des minimums locaux de l'intensité pour les fréquences plus élevées (l'angle d'ouverture étant proportionnel à λ).

D.3.2 Retards temporels

L'approximation de rayonnement en champ lointain (Eq. D.16) assimile le transducteur à une source ponctuelle rayonnant avec une variation angulaire d'amplitude.

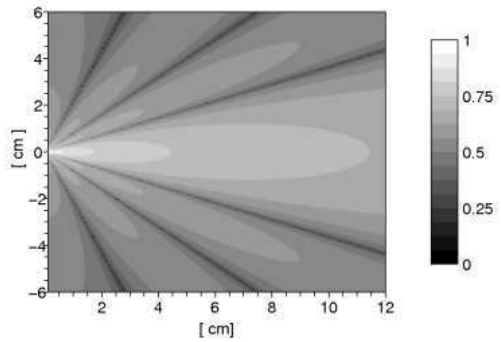


Fig. D.5 – Intensité acoustique relative, pour le transducteur de 500 kHz excité à sa fréquence centrale, dans une configuration de champ lointain (valable théoriquement pour des distances supérieures à environ 2 cm du transducteur).

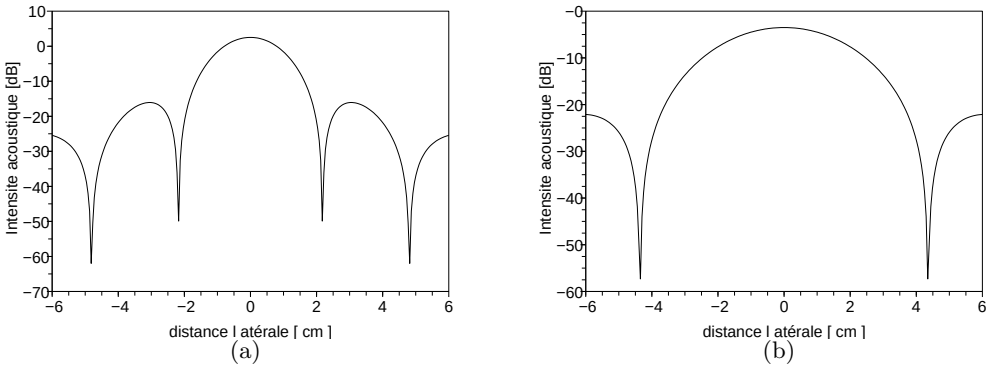


Fig. D.6 – Intensité acoustique relative, pour le transducteur de 500 kHz excité à sa fréquence centrale, pour des épaisseurs traversées de 6 cm (a) et 12 cm (b).

On peut également à partir de cette expression déterminer les retards temporels qu'auront les signaux enregistrés par le laser sur la face de réception, en calculant les retards de phase.

Pour une dalle d'épaisseur e_p, la phase ϕ du signal enregistré dans l'axe du transducteur est

$$\phi(e_p) = i(\omega t_0 - k e_p), \tag{D.19}$$

où t_0 représente le temps d'arrivée de l'impulsion et $k = \omega/c$. En se décalant par rapport à l'axe du transducteur d'une distance $y = e_p \tan\theta$ sur la face de réception, la phase du signal devient :

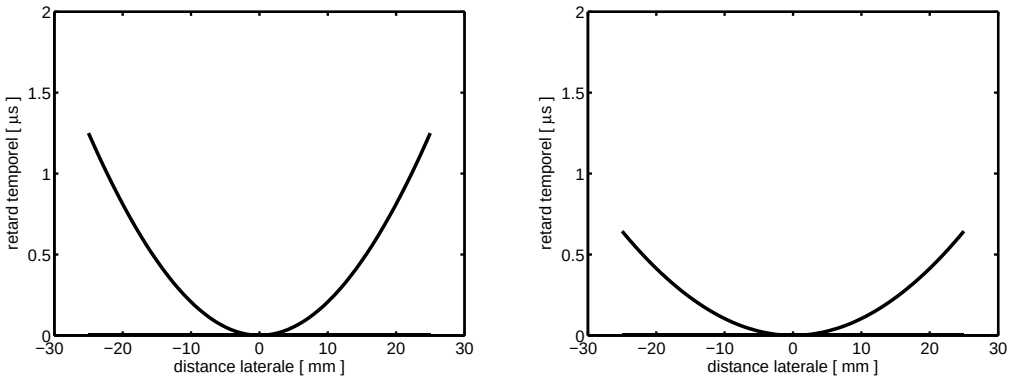
$$\phi(y) = i\left(\omega t_0 - k\frac{e_p}{\cos\theta}\right) = i\left(\omega\left(t_0 - \frac{e_p}{c}(1 - \frac{1}{\cos\theta})\right) - k e_p\right). \tag{D.20}$$

On peut alors estimer le décalage temporel dt des signaux reçus par rapport à celui enregistré dans l'axe du transducteur :

$$dt = \frac{e_p}{c}(1 - \frac{1}{\cos\theta}). \tag{D.21}$$

Ces retards temporels sont présentés en figure D.7 pour les deux épaisseurs de dalle étudiées, avec une vitesse de propagation des ondes de compression prise à $c = 4000\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

Avec la modélisation choisie, ces retards ne dépendent ni de la fréquence, ni de la taille du transducteur. Ils peuvent atteindre 1 μs sur la dalle la moins épaisse et devront être compensés avant d'évaluer le champ cohérent.



(a) dalle de 6 cm (b) dalle de 12 cm

FIG. D.7 – Retards temporels des signaux sur la face de réception par rapport au signal reçu dans l'axe du transducteur.

D.4 Conclusion

A toutes ces variations d'amplitude et de temps d'arrivées, s'ajoutent les effets liés au matériau réel ; le milieu n'est pas fluide et des ondes S peuvent exister, le matériau est absorbant, la diffusion est importante, le transducteur ne vibre pas en mode piston, etc. Tous ces effets font que des précautions seront à prendre si l'on souhaite normaliser les signaux mesurés le long des "scans", les amplitudes variant d'une trace à l'autre.

D'une manière générale, les points situés aux extrémités des "scans" seront à utiliser avec précaution, à compenser voire à écarter, pour le calcul du champ moyen.

De plus, ce calcul est effectué pour un transducteur émettant une onde monochromatique, ce qui n'est pas le cas ici, les transducteurs étant très large-bande. Le calcul devra être fait pour chaque fréquence ou dans chaque bande de fréquences considérée.

Annexe E

Formulations des bétons pour les mesures en ondes de surface

Constituants. Le tableau E.1 présente les formulations des dalles de béton et de mortier utilisées pour les mesures expérimentales du chapitre 4. Le ciment utilisé est de type CEM I 52.5 N CE CP2 NF de St. Pierre Lacour (Lafarge). Les granulats utilisés sont des granulats concassés de la carrière de Pontreaux(44), le type de roche est du Gneiss. Les sables sont de nature silico-calcaire et issus de la carrière Pilier(44).

Tab. E.1 – Formulation des bétons et mortiers utilisés pour les mesures en ondes de surface.

Nom	**B1**	**M1**	**B2**	**M2**
Date de coulée	26/06/2007	02/05/2007	24/04/2007	30/03/2007
Rapport E/C	**0,35**	**0,35**	**0,65**	**0,65**
Constituant	formule sèche au m^3 (en kg)	formule sèche au m^3 (en kg)	formule sèche au m^3 (en kg)	formule sèche au m^3 (en kg)
Eau d'ajout	189,84	261,79	235,63	331,90
Pontreaux 10/20	472,42	0,00	473,53	0,00
Pontreaux 6/10	315,20	0,00	316,94	0,00
Sable Pilier 0/4	422,33	596,69	452,61	648,68
Sable Pontreaux 0/2	419,74	600,99	452,16	651,78
Ciment 52,5 SPLC	530,36	757,15	344,22	492,10
SP Glénium 27	13,35	19,05	0,00	0,00
Total (kg)	2363,00	2235,67	2275,09	2124,46

Granulométrie. Les granulats et les sables sont répartis suivant les courbes granulométriques tracées en figure E.1. Les deux séries de bétons possèdent la même courbe granulométrique avec un $D_{max.} = 20\,\text{mm}$, ainsi que les deux séries de mortiers, avec un $D_{max.} = 4\,\text{mm}$.

Essais. Le tableau E.2 résume quelques résultats des essais réalisés sur les différents bétons et mortiers utilisés.

Des essais ont été effectués sur le béton frais lors du coulage des dalles. Les résultats des essais d'affaissement au cône d'Abrams [Neville, 2000] sont présentés en première ligne du tableau et refètent la maniabilité du béton et ses variations d'homogénéité. Lorsque le béton est très fluide, on préfère à cet essai un essai d'étalement, utilisé ici sur le mortier M2.

La teneur en air occlus du béton ou mortier frais est mesurée avec un aéromètre, et représente l'air entrainé lors du malaxage. Les résultats sont en deuxième ligne du tableau E.2. Dans le

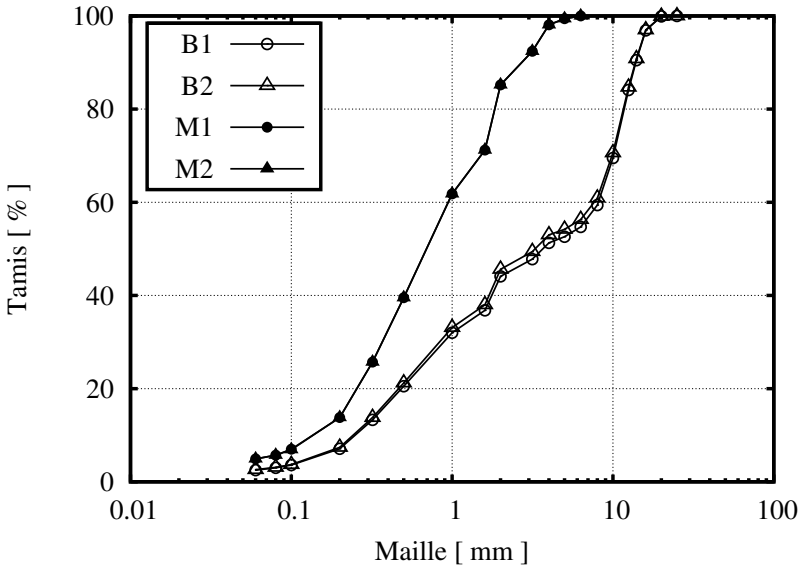


Fig. E.1 – Courbes granulométriques des bétons B1, B2, et des mortiers M1,M2.

cas des bétons et mortiers à fort rapport E/C, les bétons n'ont pas été vibrés pour éviter le phénomène de ségrégation des granulats, les moules ont cependant été frappés au maillet pour éliminer les bulles d'air principales.

Parallèlement aux dalles utilisées pour les mesures expérimentales de cette thèse, des éprouvettes de type 16/32 sont coulées, pour permettre d'efffectuer des essais destructifs afin de déterminer la résistance à la compression et le module d'Young. La résistance à la compression R_c28 et le module d'Young obtenus à 28 jours et à 6 mois sont présentés au tableau E.2. Chaque valeur représente la moyenne des résultats de 3 essais sur des eprouvettes 16/32.

Tab. E.2 – Résultats des essais effectués sur le béton frais lors du coulage des dalles (affaissement, air occlus) et des essais effectués sur des éprouvettes 16/32 à 28 jours et 6 mois (résistance à la compression R_c et module d'Young E).

Nom	**B1**	**M1**	**B2**	**M2**
Affaissement [cm]	8,5 cm	22 cm	12,5 cm	étalement 62 cm
Air occlus [%]	2,2%	2,7%	3,0%	2,7%
Masse vol. [kg.m^{-3}]	2363	2236	2275	2124
R_c28 [MPa]	70,8	66,6	37,6	34,0
$E28$ [GPa]	38,2	29,8	32,0	22,8
R_c 6mois [MPa]	78,1	79,5	44,2	38,4
E 6mois [GPa]	42,1	33,5	34,8	25,1

Resumé :

Le béton d'enrobage, dont le rôle essentiel est de protéger les armatures d'acier, est la partie du béton épaisse de quelques centimètres en contact direct avec le milieu extérieur et donc soumise aux attaques d'agents agressifs (eau, chlorures, ...). Des ondes de surface de longueurs d'onde millimétriques à centimétriques sont utilisées pour le caractériser. L'estimation des paramètres de propagation de ces ondes (vitesses de phase, de groupe, facteur d'amortissement) peut nous permettre d'évaluer des propriétés mécaniques et de déceler d'éventuels endommagements. Cependant ces ondes interagissent fortement avec les nombreuses hétérogénéités du béton (sable, granulats, ...) dont les dimensions sont comparables aux longueurs d'ondes. La propagation se fait alors en régime de diffusion multiple. Ces effets doivent être quantifiés afin de pouvoir être dissociés des effets liés aux propriétés mécaniques recherchées.

Une étude analytique puis numérique présente les théories des milieux effectifs décrivant la propagation d'ondes de volume cohérentes dans le cas d'inclusions élastiques dans une matrice élastique. Ces modèles sont ensuite étendus pour prendre en compte la viscoélasticité et la distribution de taille de granulats. L'importance des effets de la diffusion multiple sur la propagation des ondes de surface est ainsi quantifiée.

Parallèlement, un protocole expérimental associé à des méthodes de traitement du signal adaptées est mis en place pour évaluer de manière précise les vitesses de phase, de groupe, et l'atténuation des ondes de surface cohérentes sur des dalles de béton ou de mortier. Les résultats obtenus montrent que les variations de ces trois observables donnent des informations complémentaires sur différentes propriétés du béton (rapport eau sur ciment, distribution de granulats,...) mais aussi sur la présence de variations de propriétés avec la profondeur. Les effets de la diffusion multiple prédits par le modèle sont observés expérimentalement ce qui ouvre une perspective intéressante en vue de poser le problème inverse.

Mots clés : Béton, propagation, ondes de surface, diffusion multiple, viscoélasticité, modélisation analytique et numérique, expérimentations, interféromètre laser, traitement du signal

Title : Mechanical characterisation of the first centimeters of concrete with surface waves

Abstract :

Cover concrete is the part of concrete structures directly in contact with the outside. Its thickness is a few centimetres and its main role is to protect reinforcement bars. Surface waves with wavelength varying from a few millimetres to a few centimetres are used to characterise this cover concrete. An estimation of the properties of the propagation of waves (phase and group velocities, damping factor) may allow us to evaluate mechanical properties and to detect possible damages. However, these waves will interact strongly with the numerous heterogeneities of the concrete (sand, aggregates, ...) which dimensions are close to the wavelength. Waves will propagate in a multiple scattering regime. These effects have to be quantified in order to separate them from other effects linked to mechanical properties.

And analytical and numerical study present theories of effective mediums to describe coherent wave propagation in an elastic matrix with random elastic inclusions. These models are then extended to take into account the viscoelasticity of the materials and the granulometry. We quantify with such model the importance of multiple scattering on surface wave propagation in concrete.

Experimental measurements are carried on, using a specific protocol and efficient signal processing methods, allowing precise evaluation of phase and group velocity and of the damping factor of coherent surface waves on concrete or mortar slabs. The results show that these three parameters can provide complementary information on concrete properties (water to cement ratio, aggregate distribution, ...), but also on other phenomenon like varying effective properties with depth. Effects of multiple scattering predicted by the model are experimentally observed, which opens interesting perspectives for the inverse problem.

Keywords : Concrete, propagation, surface waves, multiple scattering, viscoelasticity, analytical and numerical modelling, experiment, laser interferometer, signal processing

Discipline : Mécanique