HAL
open science

Reconstruction de données tri-dimensionelles : Utilisation combinée de squellettes et de surfaces implicites

Eric Ferley

To cite this version:

Eric Ferley. Reconstruction de données tri-dimensionelles : Utilisation combinée de squellettes et de surfaces implicites. Graphics [cs.GR]. 1996. inria-00598390

HAL Id: inria-00598390

https://inria.hal.science/inria-00598390

Submitted on 6 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut National Polytechnique de Grenoble
ENSIMAG

Université Joseph Fourier
U.F.R.
Informatique & Mathématiques Appliquées

I . M . A . G .

DEA D'IMAGERIE, VISION ET ROBOTIQUE

Projet présenté par:

Eric FERLEY

Reconstruction de données tridimensionnelles: Utilisation combinée de squelettes et de surfaces implicites

Effectué au laboratoire : iMAGIS-GRAVIR/IMAG
en collaboration avec Infodis-TIMC/IMAG

sous la responsabilité de : Marie-Paule GASCUEL
Dominique ATTALI

Date :	le 17 juin 1996	
Jury :	Dominique ATTALI (Infodis-TIMC/IMAG)	Responsable
	Marie-Paule GASCUEL (iMAGIS-GRAVIR/IMAG)	Responsable
	Annick MONTANVERT	Jury invité
	Radu HORAUD	Jury permanent
	Augustin LUX	Jury permanent
	Claude PUECH	Jury permanent

Sommaire

1 Etude bibliographique **3**
1.1 Les surfaces implicites 3
1.1.1 Les surfaces implicites en synthèse d'image 3
1.1.2 La visualisation 7
1.1.3 La reconstruction avec des surfaces implicites définies par éléments clefs 9
1.2 Le squelette 12
1.2.1 Définitions et propriétés générales 12
1.2.2 Construction 14
1.2.3 Elimination des branches dues au bruit 16
1.2.4 Conclusion 18

2 Branchement de surfaces implicites définies par des éléments clefs filiformes **19**
2.1 Motivation dans le cadre du projet 19
2.2 Définition du problème 20
2.2.1 Union 20
2.2.2 Somme 20
2.2.3 Mélange *Super-elliptique* 21
2.2.4 Mélange procédural 24
2.2.5 Les surfaces de convolution 25
2.2.6 Conclusion 26
2.3 Exploration des méthodes procédurales 27
2.3.1 Primitives à rayon variable 27
2.3.2 Interpolation linéaire entre les rayons d'enrobage . . . 28
2.3.3 Méthode procédurale 2 : Conditions aux limites 31
2.3.4 Méthode procédurale 3 : interpolation entre union et procédural 32
2.3.5 Conclusion 33
2.4 Une solution basée sur les triangles de Bézier 34
2.4.1 Définition générale 34
2.4.2 Raccordement à des courbes : choix des points de contrôle 35
2.4.3 Lien entre la courbure et l'épaisseur d'enrobage 35
2.4.4 Une solution : composition de triangles de Bézier . . . 36

3 Application à la reconstruction **41**
3.1 Réalisation des parties filiformes 41
3.1.1 Sur la décomposition du squelette en branches 42
3.1.2 Réduction du nombre de points sur une branche . . . 42
3.1.3 Décomposition des branches en splines 43
3.2 Réalisation des branchements 44
3.2.1 Positionnement des triangles 44
3.3 Résultats 45

Annexe **49**

A Méthode de visualisation **50**

B Article soumis à Implicit Surfaces'96 **52**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dominique ATTALI et Marie-Paule GASCUEL pour leur soutien constant et leur dynamisme. Elles ont toujours su me guider et me motiver au cours de ce projet.

Je remercie également Nicolas TSINGOS et Mathieu DESBRUN pour leurs conseils et leur patience.

Je remercie aussi tous les membres de l'équipe iMAGIS pour leur accueil chaleureux, leur sympathie et leur humour, sans qui ce projet n'aurait pas été si agréable.

Enfin, je remercie Annick Montanvert d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Résumé

Ce projet concerne la reconstruction automatique d'objets tridimensionnels lisses, de topologie arbitraire à partir de points d'échantillonnage de leur surface. Les données de départ sont sous la forme d'un ensemble non structuré de points. Les surfaces implicites apparues récemment en synthèse d'image sont particulièrement bien adaptées pour modéliser de tels objets. Les surfaces implicites sont des isopotentielles généralement définies à l'aide d'éléments clefs.

Les approches existantes de reconstruction par surfaces implicites passent par des phases d'optimisation très pénalisantes (longues) pour déterminer les positions des éléments clefs, les paramètres des potentiels, et minimiser l'erreur commise.

L'idée à l'origine de ce projet est de calculer le squelette filiforme des données, et de l'utiliser pour engendrer des surfaces implicites. Ce squelette est un ensemble structuré de lignes polygonales centrées dans les données. Le calcul du squelette filiforme a déjà été étudié et implémenté au sein du laboratoire Infodis-TIMC/IMAG.

Le travail réalisé au cours de ce projet a consisté à exploiter ce squelette filiforme dans le but de s'affranchir de toute optimisation. D'abord en le simplifiant de manière adaptive par approximations successives des lignes polygonales par des B-Splines. Puis nous nous sommes trouvés confronté à un problème inhérent aux surfaces implicites : le branchement d'éléments clefs filiformes. Les méthodes existantes s'étant avérées inadaptées (génération de bosses ou de discontinuités de tangente), nous avons développé une solution originale, testée dans le cas d'embranchements triples, qui consiste à épaissir la zone de jonction grâce à une combinaison de triangles de Bézier. Cette méthode automatique réalise un branchement satisfaisant.

L'utilisation conjointe de ces étapes conduit à une représentation sous forme extrêmement compacte d'objets lisses de topologie arbitraire, dont on peut régler le niveau de détail. Elle est de plus fortement structurée par le squelette qui fournit un moyen intuitif pour éventuellement les déformer ou les animer.

Introduction

Position du problème

Avec le développement des capteurs 3D permettant d'acquérir la position de points sur la surface d'un objet, on peut échantillonner de plus en plus finement cette surface : la quantité de points obtenus, si elle améliore la connaissance de l'objet, rend plus difficile sa manipulation.

Ainsi, il est crucial pour pouvoir *utiliser* ces données afin d'en extraire une représentation plus *synthétique* et *intuitive* qu'un nuage de points.

Une première représentation possible consiste en une triangulation passant par les points d'échantillonnage. Cela permet de deviner plus aisément l'aspect de l'objet, mais ce dernier demeure difficilement *manipulable* ou *modifiable* car on est obligé pour ces opérations de revenir au nuage initial pour changer la triangulation. Ceci limite l'intérêt de cette représentation.

On peut également essayer d'obtenir une représentation paramétrique décrivant cette *enveloppe*, mais cela nécessite de connaître sa topologie pour déterminer l'espace des paramètres et aucune méthode générale n'existe.

Une autre approche consiste à extraire de l'échantillon de points une représentation *implicite*. Cette dernière est particulièrement adaptée à la description d'objets dont on ne connaît pas à priori la topologie. Différents travaux ont déjà été menés pour reconstruire des objets à l'aide de surfaces implicites. Toutefois, ces méthodes, comme on le verra dans ce rapport, sont coûteuses en temps de calcul et ne fournissent pas une représentation de *haut-niveau* de l'objet.

Le *squelette*, utilisé en description des formes, permet d'obtenir une description à la fois synthétique et structurée d'un objet. Il a été étudié et son calcul implémenté, notament pour des objets 3D, au sein du laboratoire Infodis-TIMC/IMAG.

L'objectif de ce projet de DEA est d'exploiter les informations sur l'objet fournies par son squelette pour en extraire une représentation implicite.

Plus précisément, nous avons exploré la possibilité de se passer des phases d'optimisations successives inhérentes aux autres méthodes de reconstruction à l'aide de surfaces implicites. La clef de notre nouvelle approche imposait de trouver une solution au problème de la construction d'embran-

chements lisses à l'aide de surfaces implicites engendrées par des éléments clefs.

La première partie de ce rapport consacrée à l'étude bibliographique, dresse tout d'abord un inventaire des techniques consacrées tant à la modélisation qu'à la reconstruction par surfaces implicites. Nous rappelons ensuite quelques définitions et propriétés générales concernant les squelettes avant de définir plus précisément le type de squelettes utilisés durant ce projet. Dans une deuxième partie nous analysons les différentes solutions proposées au problème de branchement de surfaces implicites. Puis nous détaillons la méthode originale à laquelle nous avons aboutit. Enfin, nous décrivons comment nous avons appliqué ces idées à la reconstruction.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Ce chapitre présente les surfaces implicites telles qu'elles sont utilisées en modélisation pour la synthèse d'images.

1.1 Les surfaces implicites

Les surfaces implicites ne sont utilisées en synthèse d'images que depuis une dizaine d'années, avec un intérêt croissant du fait de leur aptitude à définir facilement et de manière compacte des objets de forme libre.

1.1.1 Les surfaces implicites en synthèse d'image

Cadre général

De manière formelle, une surface implicite est l'ensemble des points P de l'espace satisfaisant une relation du type :

$$f(P) = c$$

où $f(.)$ est une fonction, appelée *potentiel*, et c une valeur réelle appelée *isovaleur*. La surface ainsi définie est une *isopotentielle* ou *isosurface*. Elle est la frontière entre deux ensembles : l'ensemble des points où $f(P) > c$ et celui où $f(P) < c$. L'un étant l'extérieur, et l'autre l'intérieur de l'objet (généralement celui d'extension limitée).

Il est ainsi possible de définir une surface quelconque, pour peu que l'on connaisse son équation : potentiellement, on dispose d'une infinité de formes.

Les plus employées sont :

– les super-ellipsoïdes (voir figure 1.1)

$$f(x, y, z) = \frac{x^k}{a^k} + \frac{y^k}{b^k} + \frac{z^k}{c^k}$$

– les super-quadriques

$$f(x,y,z) = \left[x^{\frac{2}{m}} + y^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{m}{n}} + z^{\frac{2}{n}}$$

FIG. 1.1 - *Exemples de super-ellipsoïdes obtenus pour k=2 et k=6 (tracées par Maple).*

On peut également appliquer des transformations (rotations, translations) à la surface en composant ces dernières avec f. La facilité d'accès aux notions d'intérieur et d'extérieur rend aussi possible les opérations classiques de *Géométrie Constructive* (CSG, emploi d'opérations booléennes).

Toutefois, il n'est pas aisé de trouver l'équation correspondant à *la* surface que l'on désire modéliser : le lien entre l'équation et la forme de la surface générée est loin d'être intuitif dans la plupart des cas. Ceci explique que ce type de surfaces implicites ne soit que très peu employé en pratique. Une définition plus intuitive fait appel à des éléments clefs pour procurer un meilleur contrôle.

Les surfaces implicites définies par des éléments clefs

L'utilisation de points comme éléments clefs pour définir des surfaces implicites a été introduite dans [**?**]. Par analogie avec les champs de densité électronique, chaque point propage un potentiel autour de sa position. Les potentiels s'additionnant, on obtient un effet de mélange lorsque deux points générant deux surfaces distinctes se rapprochent : la somme de leurs potentiels dépasse l'isovaleur, et les surfaces se *connectent* (voir figure 1.2, 1.3 et 1.4).

Des variations sur ce thème consistent à changer le potentiel utilisé. J. Blinn utilisait des fonctions exponentielles de la distance au point clef. D'autres ont proposé de remplacer les exponentielles par des fonctions polynômiales, moins coûteuses à calculer, et permettant de limiter le *rayon d'influence* de chaque point clef. Par exemple, le potentiel utilisé dans [**?**] est (voir 1.5 à gauche) :

$$f(d) = \begin{cases} 1 - \frac{22}{9}d^2 + \frac{17}{9}d^4 - \frac{4}{9}d^6 & \text{si } d^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

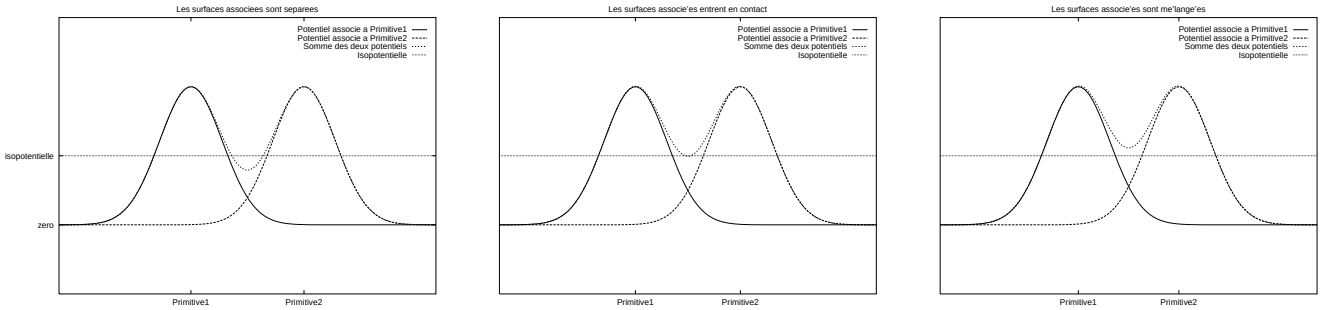


FIG. 1.2 - *Illustration en dimension 1 du changement de topologie, par déplacement de point-clef. On a représenté les deux potentiels générés séparément par chaque point, le potentiel résultant (la somme) et l'isovaleur. De gauche à droite, on rapproche les deux points-clefs (primitives). L'objet implicite est formé de 4 points dans l'image de gauche, de 3 points dans l'image centrale, et de 2 points dans l'image de droite.*

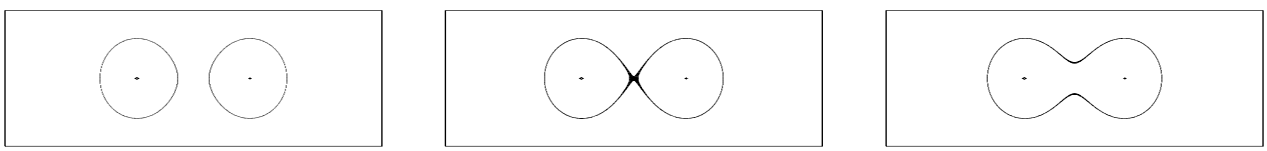


FIG. 1.3 - *Illustration en dimension 2 du changement de topologie. Les points-clefs, qui sont cette fois des points du plan, se rapprochent de la figure gauche à la figure droite. On a conservé le même potentiel (exponentielle décroissante du carré de la distance au point-clef) que dans la figure précédente. Seules les isopotentielles sont représentées.*

Celui utilisé dans [**?**] est (voir 1.5 à droite) :

$$f(d) = \begin{cases} 1 + k(e-d) & \text{si } |d| < e \\ \frac{(d-R)^2}{(e-R)^2} & \text{si } e < |d| < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une extension du principe de *point-clef*, résumée dans [**?**] consiste à utiliser des *éléments clefs* courbes, surfaces ou volumes, appelées alors les *squelettes* de la surface implicite modélisée. L'idée est d'associer à chacun de ces éléments un potentiel, généralement fonction décroissante de la distance à l'élément générateur.

En fait n'importe quelle forme peut être utilisée comme primitive pour peu que l'on sache calculer la distance d'un point de l'espace à cette forme.

Intuitivement, la surface implicite générée par un élément clef correspond à un *enrobage* de cet élément. L'épaisseur de cet enrobage dépend à la fois de l'isovaleur choisie et des variations de la fonction *potentiel* associée.

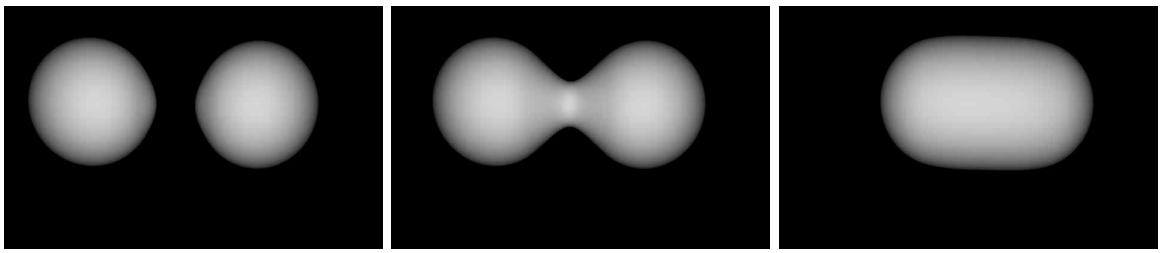


FIG. 1.4 - *Illustration en dimension 3 du changement de topologie.*

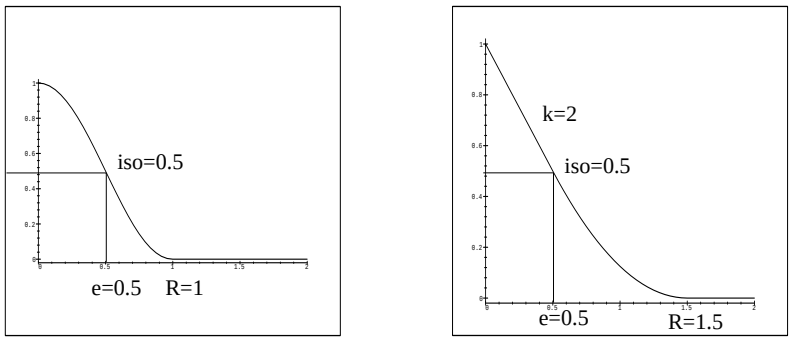


FIG. 1.5 - *Exemples de fonctions potentielles locales. e désigne l'épaisseur d'enrobage obtenue et R le rayon d'influence.*

Les combinaisons simples de surfaces implicites

L'une des motivations pour l'utilisation de surfaces implicites en modélisation est leur capacité à se *mélanger*. Ainsi au cours de l'évolution d'un objet (animation), il est aisé de modéliser la séparation ou la fusion de certaines de ses parties.
Lorsqu'on considère un objet constitué de plusieures *primitives*, c'est-à-dire d'un ensemble d'éléments-clefs $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, différentes manières d'associer leurs potentiels ont étés explorées.

Somme : Dans la continuité de l'analogie électromagnétique, le potentiel en un point P de l'espace créé par S peut être défini comme la somme des potentiels induits par les éléments de S en P :

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f_i(P)$$

Cette méthode permet de mélanger plusieures formes, mais peut générer des *bosses* (voir figure 1.7), qui ne sont pas forcément souhaitées. La taille de ces bosses dépend des variations du potentiel associé aux éléments S_i, et il est impossible de les éviter : on peut seulement diminuer leur effet.

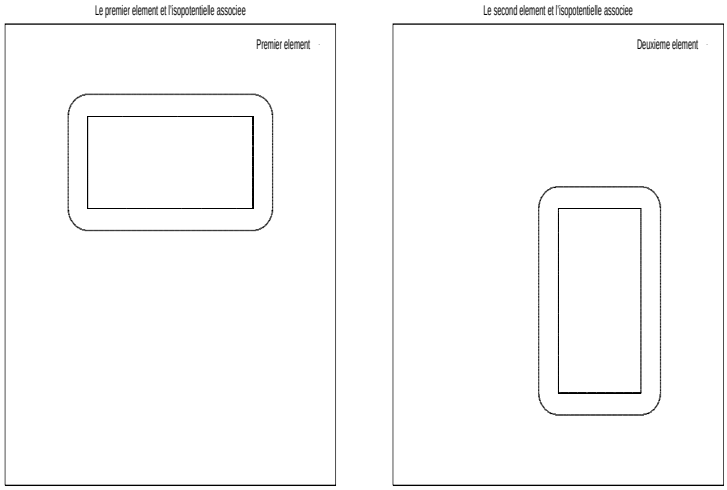


FIG. 1.6 - *Isopotentielles associées à des éléments-clefs rectangulaires*

Union : Ici, l'idée consiste à définir le potentiel en un point P de l'espace, comme le maximum des potentiels $f_i(P)$ induits par chaque élément S_i de S.

$$f(P) = max f_i(S_i)$$

L'isopotentielle obtenue pour l'ensemble des S_i correspond à l'union des isopotentielles de chaque S_i considéré isolément. Cette méthode de mélange des potentiels génère des *plis* (discontinuités de tangente) dans les zones concaves (voir figure 1.7).

D'autres méthodes existent pour combiner les potentiels. Elles seront exposées au chapitre 2.

Certaines figures comme 1.2, 1.3, 1.6 ou 1.7 on été générées par un algorithme naïf de parcours de l'espace l'où on calcule en chaque point d'une grille la valeur du potentiel et on n'affiche que ceux où ce potentiel est proche de l'isovaleur grâce à *gnuplot*. Mais la visualisation de surfaces implicites en dimensions 3, ou le rendu de qualité de ces surfaces font appel à des techniques spécifiques.

1.1.2 La visualisation

Plusieures techniques de visualisation de surfaces implicites ont étés développées. On peut en trouver un inventaire dans [**?**] ou [**?**].

Coupes 2-D

On coupe la surface par un plan. On peut représenter ensuite la valeur du potentiel en chaque point du plan par une teinte ou tracer seulement le contour correspondant à l'isopotentielle.

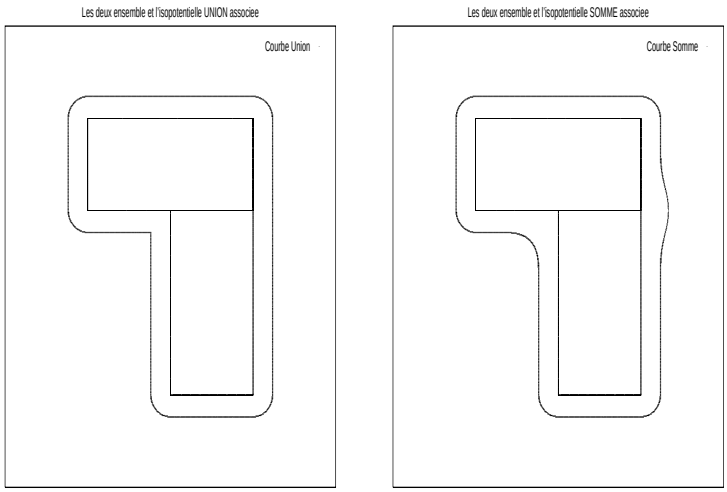


FIG. 1.7 - *Comparaison des isopotentielles obtenues par Union et Somme*

Cette représentation incomplète peut être utile pour vérifier la continuité de la surface mais ne permet pas en général d'en saisir la forme.

Lancer de rayons

C'est une des premières méthodes employées pour visualiser des surfaces implicites ([**?**]). Son coût élevé interdit toute interactivité, mais elle fournit des images de qualité.

Une amélioration de la méthode est proposée dans [**?**]. Elle consiste à subdiviser l'espace efficacement en garantissant de ne pas *rater* d'intersections avec la surface implicite considérée. Les auteurs utilisent pour cela un majorant calculé des variations du potentiel dans l'espace (dérivée première, de borne L) et le long d'un rayon (dérivée seconde, de borne G) : les surfaces pour lesquelles ces majorants existent et sont calculables sont appelées *LG-surfaces*.

Inspirée de cette méthode, une implémentation a été réalisée dans *Fabule*, le logiciel d'animation de l'équipe iMAGIS, pour générer des images de qualité (exposée dans [**?**]).

Polygonalisation

Pour aller vers une visualisation intéractive, on peut construire une représentation polygonale de la surface implicite pour profiter des capacités des stations graphiques spécialisées.

La technique du *marching cube* consiste à suivre la surface : à partir d'un cube initial qui l'intersecte, on examine ses voisins pour trouver ceux qui la coupent également. Ce procédé est étendu en utilisant un octree pour dis-

crétiser plus finement l'espace lorsque la courbure de la surface augmente, et obtenir une meilleure approximation qu'avec un découpage régulier.

Ces techniques ne sont toutefois pas assez rapides lorsque la surface se déforme et que la polygonalisation doit être recalculée.

Diffusion de points (*scattering*)

Cette dernière technique consiste à positionner des points (*graines*) près de la surface supposée de l'objet implicite, puis de les faire *migrer* jusqu'à la surface.
Cette méthode évite le calcul coûteux d'une polygonalisation en ne tenant pas compte des relations de voisinnage entre les graines et permet un affichage rapide de la forme.

Une technique analogue, présentée dans [**?**] à été utilisée au sein de Fabule, le logiciel d'animation de l'équipe iMAGIS, pour la visualisation / manipulation interactive. L'idée est d'utiliser les boîtes englobantes des éléments clefs pour fixer les directions et relations de voisinnage entre les graines. Par analogie avec les techniques de diffusion, ces graines sont ensuites déplacées dans leur direction jusqu'à atteindre la position correspondant à l'isovaleur, ou jusqu'à être invalidées par un autre élément clef. On obtient ainsi une polygonalisation approchée de la surface implicite à partir de ces graines.

1.1.3 La reconstruction avec des surfaces implicites définies par éléments clefs

Les techniques de contrôle des surfaces implicites sont utiles en modélisation pour *construire* des formes. Toutefois, lorsque cela est possible, il est plus aisé d'importer des formes numérisées pour les modifier ou les animer. La reconstruction avec des surfaces implicites contrôlées par des éléments clefs a déjà été abordée par plusieurs auteurs. Cette section présente leurs travaux.

Première approche totalement automatique

Une première approche reconstruit par points clefs un nuage de points echantillonnés. S. Muraki fait dépendre chaque *primitive* P_i de cinq paramètres : trois pour la position du point clef (x_i, y_i, z_i), et deux pour le potentiel associé (a_i, b_i). Le potentiel généré par la primitive i en un point P s'exprime alors par :

$$f_i(P) = b_i e^{\left(-a_i \|P - P_i\|^2\right)}$$

Au lieu d'essayer de trouver les $5N$ paramètres permettant aux N primitives de reconstruire au mieux une donnée, S. Muraki propose un algorithme incrémental de placement de primitives.

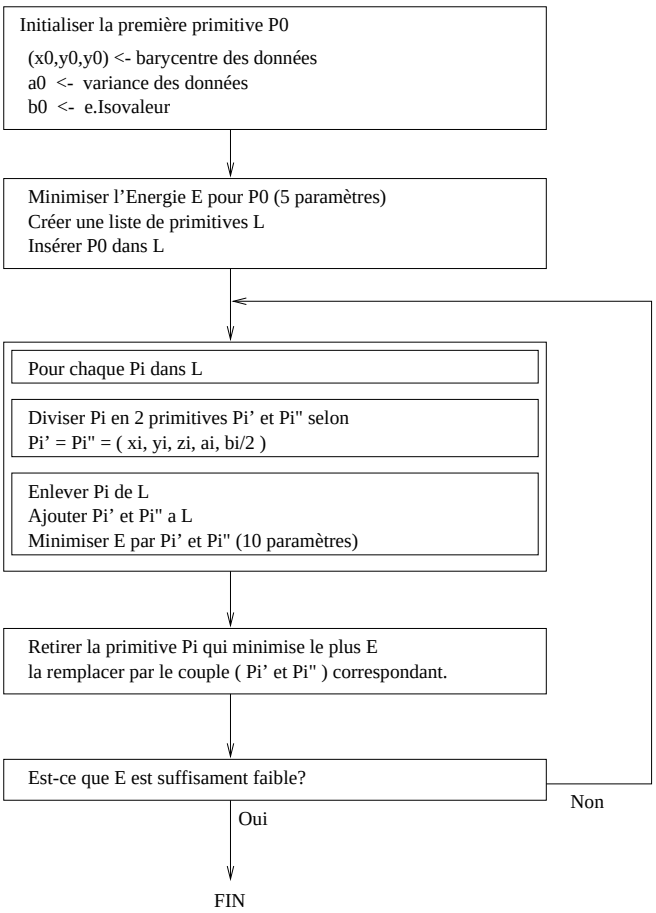


FIG. 1.8 - *Schéma de l'algorithme de reconstruction de S. Muraki*

Le schéma de l'algorithme est reporté figure 1.8

Il minimise une fonction *énergie* qui traduit l'adéquation de la surface reconstruite avec les points de données et des contraintes plus ou moins intuitives visant à limiter le nombre et la *taille* des primitives retenues.
De manière générale, l'expression d'une énergie à minimiser pour que les données soient le plus proche de la surface reconstruite est assez aisée à obtenir, de par la définition implicite de la surface.
L'expression utilisée ici est :

$$E = \sum_{p \in \text{échantillons}} (f(p) - iso)^2$$

Autrement dit, en chaque point p de l'ensemble échantillon, on calcule la différence de potentiel par rapport à l'iso-valeur.

Approche semi-automatique

N. Tsingos dans [**?**] améliore cette méthode pour la rendre plus efficace sur plusieurs points. Il utilise des potentiels polynômiaux, et locaux (i.e. à *zone d'influence* limitée). Ceci permet d'économiser les calculs d'exponentielle, et surtout de ne pas modifier toute la surface reconstruite en ajoutant une primitive, mais seulement la partie de la surface qui intersecte sa zone d'influence.
Cela lui permet également de définir un *critère* local estimant la qualité de reconstruction d'une primitive donnée, procurant une heuristique pour choisir la prochaine à diviser, au lieu de les considérer toutes à chaque itération.
Le processus utilisé est *semi-automatique* : l'utilisateur peut placer les primitives initiales. En effet, Muraki place la première primitive au barycentre de l'objet. Ceci semble adapté pour reconstruire des objets sans trous, mais pour des objets comme un tore le résultat est incertain.
L'utilisateur peut aussi définir des *fenêtres de reconstruction*, permettant de réduire la quantité de données à reconstruire dans chaque fenêtre.

Utilisation d'éléments structurants

E. Bittar effectue dans [**?**] un prétraitement pour structurer les données. Cela permet également de rendre le processus de reconstruction totalement automatique.
Cette première étape consiste à extraire les caractéristiques topologiques du nuage de points. Dans la démarche choisie, E. Bittar utilise des notions de géométrie discrète : il découpe l'espace en *voxels* et ré-échantillonne dans ce nouvel *espace discret* les points du nuage. Ensuite, il peut parcourir cet espace pour rechercher les composantes connexes présentes et extraire leur axe médian[1].

A partir de là, il reprend le procédé incrémental de minimisation avec potentiels locaux exposé ci-avant, mais au lieu de diviser successivement les primitives, il les sélectionne parmis les points de l'axe médian. La sélection de la prochaine primitive à ajouter utilise un critère local estimant la qualité de reconstruction dans la zone d'influence du point de l'axe médian examiné. Le point retenu est celui pour lequel cette qualité est la plus mauvaise, et ses paramètres sont optimisés pour améliorer cette *qualité*, avant de passer à une phase d'optimisation globale précédant l'insertion d'un nouveau point clef.
Le problème majeur de cette méthode est la phase de discrétisation de l'espace en voxels nécessaires au calcul de l'axe médian. En effet, lors de ce découpage, il se peut que la taille des voxels devienne plus petite que l'espace entre deux points du nuage de données. Dès lors, la connexité de l'objet initial est perdue.

1. L'axe médian est le centre des boules maximales (définies selon une distance discrète) de l'ensemble de *voxels* identifiés comme *intérieur* de l'objet.

La méthode fonctionne en s'affinant au fur et à mesure que la précision de l'axe médian augmente (i.e. la taille des voxels diminue), puis *s'effondre* brusquement lorsque la taille des voxels passe sous la résolution de l'échantillonnage initial.

Conclusion

Le dernier algorithme exploite les caractéristiques de la forme pour réduire le nombre de paramètres de la phase d'optimisation.
On souhaiterait dans ce projet aller au-delà en éliminant toute phase d'optimisation. Cela est possible en exploitant encore plus d'informations sur la forme, ce que permet le *squelette*.

1.2 Le squelette

Intuitivement, le squelette d'un objet est une forme *mince* incluse et centrée dans cet objet et qui caractérise sa géométrie.

1.2.1 Définitions et propriétés générales

Définitions

La première définition de squelette d'une forme est due à H. Blum, et consiste à simuler la propagation d'une onde.
Le contour de la forme sert à initialiser une onde, qui va se propager à l'intérieur de cette forme. Les lieux où les fronts de l'onde se rencontrent définissent la trace du squelette. On peut noter les *instants* d'apparition des points du squelette, et ainsi reconstruire la forme initiale par propagation inverse (voir figure 1.9).

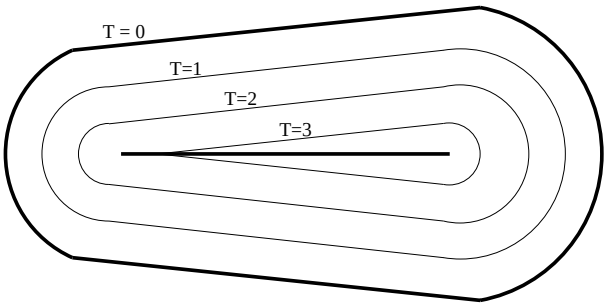


FIG. 1.9 - *Squelette obtenu par propagation d'une onde.*

Une autre définition, plus utilisée (notamment en morphologie mathématique, [**?**]), définit le squelette en termes de *boules maximales*.
Une boule B incluse dans un objet X est dite maximale s'il n'existe pas d'autre boule B' incluse dans X et la contenant strictement, c'est-à-dire :

$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B = B'$$

Le squelette de X, noté $Sk(X)$, est alors défini comme l'ensemble des centres de ses boules maximales.
La *squelettisation* est la transformation qui associe à un objet X son squelette $Sk(X)$. En tout point de p du squelette $Sk(X)$, la *fonction d'étanchéité* $\rho(p)$ associe à p le rayon de la boule maximale incluse dans X dont il est le centre.

Propriétés

• Le squelette est invariant par translation et rotation.

• Connaissant les points du squelette, et les rayons des boules maximales dont ils sont le centre (*fonction d'étanchéité*), on peut reconstruire la forme. La squelettisation est une transformation **réversible**.

La reconstruction obtenue est un recouvrement par boules maximales, qui constitue un codage non optimal : aucune boule incluse dans X n'est strictement incluse dans une autre, mais elle peut être incluse dans l'union d'autres boules maximales (voir figure 1.10).

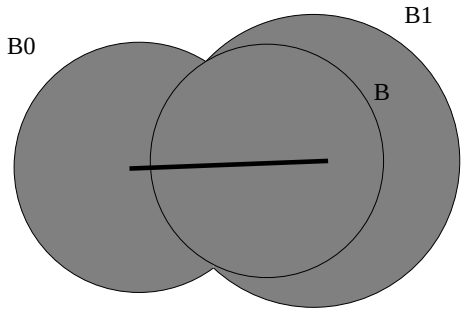


FIG. 1.10 - *Exemple montrant la non-optimalité du codage par boules maximales : B n'est incluse ni dans B_0, ni dans B_1, mais $B_0 \cup B_1$ la recouvre.*

• Le squelette est *mince* (caractérisé mathématiquement par le fait que son intérieur est vide [**?**]).

• Dans le plan, le squelette et l'objet ont le même nombre de composantes connexes, et pour chaque composante connexe, le même nombre de trous. On dit que le squelette a même type d'homotopie que la forme.

• La squelettisation est une transformation semi-continue. C'est là l'origine de sa faiblesse : une extrême sensibilité au bruit (voir figures 1.11 et 1.12).

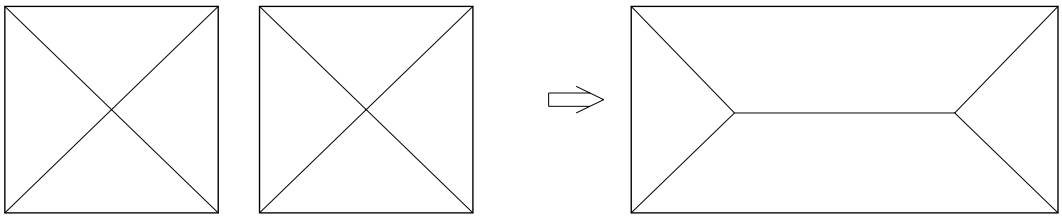


FIG. 1.11 - *Illustration de la semi-continuité de la squelettisation : le squelette de deux carrés qui tendent l'un vers l'autre n'est pas comparable au squelette du rectangle limite*

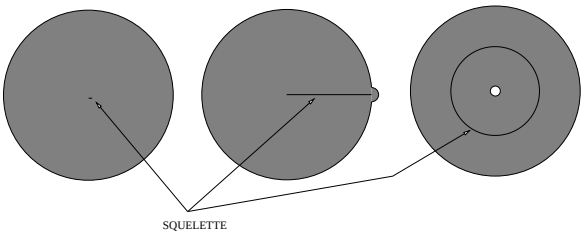


FIG. 1.12 - *Illustration de la sensibilité du squelette au bruit sur la forme.*

1.2.2 Construction

Différentes approches

Plusieurs techniques ont été élaborées pour approcher le squelette d'une forme X, reprises dans [**?**] et [**?**].

- Le premier type d'approche étudie la forme dans un espace **discret**. L'approximation consiste en un *axe médian* de la forme obtenue soit par *simulation de la propagation d'une onde*, soit par *amincissement homotopique*, soit par extraction à partir de *cartes de distances*.
  Cette dernière méthode est généralisée dans [**?**] pour des distances discrètes quelconques (distances de chanfrein). Toutefois, l'axe médian qui est la version discrète du squelette[2] ne possède pas les propriétés du squelette continu. En particulier, il ne respecte pas l'homotopie de la forme : l'axe médian peut être *épais*, présenter des *trous*, et sa connexité n'est pas assurée. Une solution consiste à propager cet *axe médian* pour le connecter : c'est la construction de la *ligne médiane*. Cette dernière fournit un *graphe de la ligne médiane* bien adapté à la description des formes 2D, voir [**?**] que nous reprendrons plus loin dans l'exposé.

- Le second type d'approche étudie la forme dans un espace **continu** et utilise le graphe de Voronoï ponctuel d'un ensemble de points échantillonnant la frontière de la forme.

2. c'est-à-dire l'ensemble des centres des boules discrètes maximales de l'objet

Ces méthodes dites *approchées* convergent vers le squelette exact quand le nombre de points échantillons augmente (voir [**?**] et [**?**]). Enfin, des extensions au cas 3D ont déjà été réalisées (voir [**?**]).

Dans le cadre du projet, on utilisera une méthode *approchée*, basée sur l'approximation du squelette exact $Sk(X)$ d'une forme X par le graphe de Voronoï ponctuel des points de la frontière ∂X. Cette méthode converge vers le squelette exact de la forme considérée lorsque la densité d'échantillonnage augmente : elle est égalemnent appelée *méthode continue*.

Graphe de Voronoï : rappels

Soit p un point de E, ensemble fini de points de $I\!R^n$.
La *région de Voronoï* associée à p dans E, notée $V(p, E)$, est l'ensemble des points de $I\!R^n$ plus proches de p que de tout autre point de E.

$$V(p, E) = \{m \in I\!R^n, \forall q \in E - \{p\}, d(m, p) < d(m, q)\}$$

Les régions de Voronoï sont polyédrales et convexes : on parle de *polyèdres de Voronoï* .

Le *graphe de Voronoï* de E, noté $Vor(E)$ est formé de la frontière des régions de Voronoï de E :

$$Vor(E) = \bigcup_{p \in E} \partial V(p, E)$$

Sous l'hypothèse que E ne comporte pas $n + 2$ points cosphériques, les sommets du graphe admettent $n + 1$ sommets voisins.

Graphe de Delaunay : rappels

Le graphe de Delaunay est le dual du graphe de Voronoï : il traduit les relation d'adjacence entre régions de Voronoï .

On considère toujours E, un ensemble fini de points de $I\!R^n$ tels que $n+2$ points ne soient pas cosphériques.
Le *graphe de Delaunay* , noté $Del(E)$, a pour sommets les points de E, et pour arêtes les segments joignant les points p et q de E tels que

$$\partial V(p, E) \cap \partial V(q, E) \neq \emptyset$$

Par définition, un *simplexe* de Delaunay est un simplexe dont la boule circonscrite est vide de points de E. Avec l'hypothèse faite sur les points de E, les simplexes de Delaunay sont des *triangles* en dimension 2, et des *tétraèdres* en dimension 3.

Le graphe de Delaunay réalise une partition de l'espace (triangulation dans le plan, et tétraédrisation dans l'espace tridimensionnel).

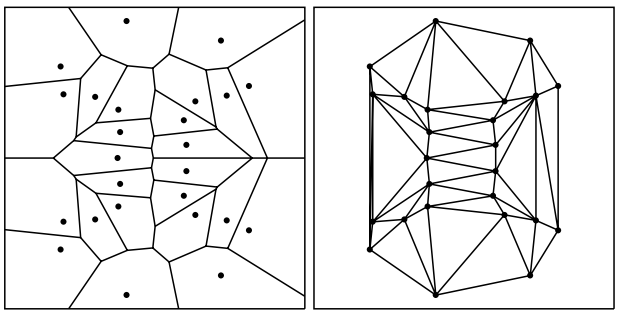


FIG. 1.13 - *Graphe de Voronoï et graphe de Delaunay d'un ensemble de points E.*

Lien avec le squelette

L'idée exposée dans [**?**] et [**?**] provient du lien entre l'approximation de la frontière de l'objet et sa triangulation de Delaunay .
On note X l'objet, $X^\star$ une approximation polygonale de X, dont la *densité d'échantillonnage* est ω. Cette densité ω détermine la qualité de l'approximation[3]. Si elle est *assez élevée*, on peut calculer la triangulation de Delaunay de $\partial X^\star$.
J.-D. Boissonnat a alors remarqué qu'il existait deux types de triangles de Delaunay : les triangles *intérieurs* à $X^\star$ (partitionnant $X^\star$) et les triangles *extérieurs*.
Ainsi, le dual de cette partition (inclus dans le graphe de Voronoï), semble être un bon candidat pour approcher le squelette de la forme. Bien que le graphe de Voronoï , constitué de segments de droite, n'ait pas de relation avec le squelette de l'approximation polygonale $X^\star$, il a été prouvé [**?**] [**?**] que les sommet de Voronoï tendent vers le squelette et l'exo-squelette de la forme X.
La condition pour que la triangulation de Delaunay contienne la frontière de $X^\star$, appelée *condition d'insertion du contour* [**?**], fait intervenir la notion de *régularité* de la forme X de départ et sa densité d'échantillonnage.

1.2.3 Elimination des branches dues au bruit

Si le squelette présente d'excellentes capacités à décrire les formes, il souffre en revanche de grande *instabilité* : en effet, une petite perturbation sur sa frontière ∂X peut modifier complètement le squelette $Sk(X)$ (voir figure 1.12).

Ainsi, il s'avère nécessaire de simplifier le squelette obtenu dans le cas où l'approximation polygonale est légèrement bruitée. L'intérêt de la méthode de simplification présentée dans [**?**] réside dans son indépendance par rapport à l'échelle.

3. Par définition, il existe alors pour tout point x situé sur la frontière ∂X de X, un sommet s de l'approximation polygonale $X^\star$ tel que : $d(x, s) < \omega^{-1}$

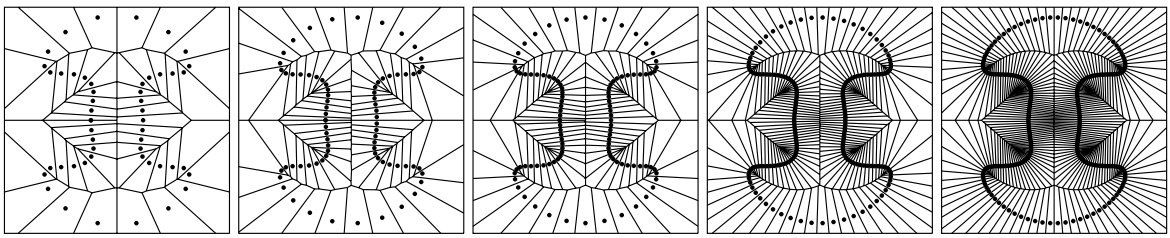


FIG. 1.14 - *Exemple de graphes de Voronoï obtenus quand l'échantillonnage augmente (de gauche à droite, le nombre de points est : 50, 75, 100, 175, 250).*

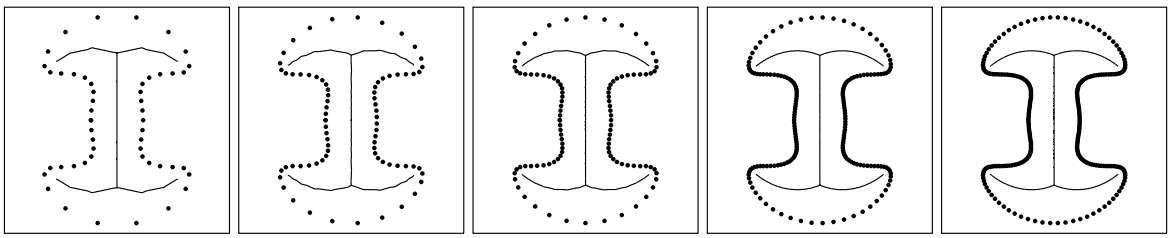


FIG. 1.15 - *Exemple de squelettes obtenus quand l'échantillonnage augmente (de gauche à droite, le nombre de points est : 50, 75, 100, 175, 250). On note que pour 25 points, l'objet n'est pas reconnu (présence de plusieurs squelettes).*

Le critère proposé utilise la dualité des représentations de Voronoï et Delaunay . Les extrémités du squelette approché sont successivement éliminées si l'angle formé par ses points de contact avec l'objet est inférieur à une valeur donnée. Cet angle correspond intuitivement à la *contribution* du sommet considéré à la construction de la forme (l'angle sous lequel le sommet *voit* la forme). Pour calculer l'angle formé entre ces deux points de contact, on utilise le fait que le triangle intérieur de Delaunay ($p^- p p^+$) associé au sommet s du squelette considéré (voir figure 1.17) a ses points sur la frontière de l'objet polygonal. On a ainsi accès à l'angle (vp^-, vp^+), et à la surface perdue en éliminant le sommet s du squelette.

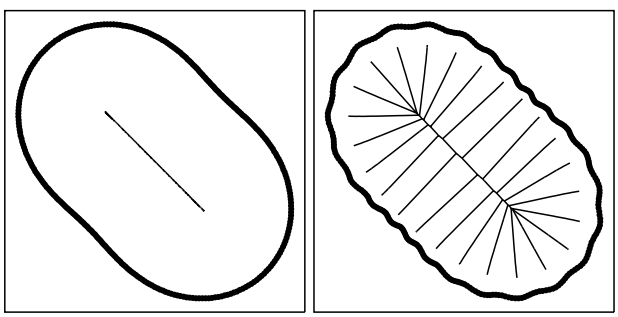


FIG. 1.16 - *Sensibilité du squelette au bruit.*

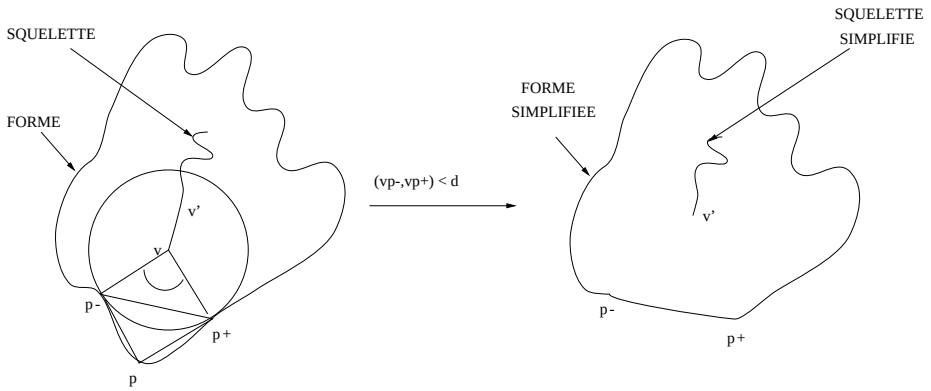


FIG. 1.17 - *Critère de simplification du squelette : la branche* $[vv']$ *est éliminée si l'angle* (vp^-, vp^+) *est inf'erieur au critère d fixé.*

Ce critère a également été étendu pour simplifier les squelettes d'objets tridimensionnels. On considère alors les tétrahèdres de Delaunay associés aux sommets du *squelette*.

1.2.4 Conclusion

Le squelette obtenu apparaît proche des éléments clefs utilisés en modélisation par surfaces implicites. Dans ce projet, nous nous sommes limités à des squelettes *filiformes*, c'est-à-dire ayant une structure de graphe et consitué de segments.

Toutefois, un tel squelette n'est pas utilisable directement, notamment à cause des problèmes de mélange inhérents aux surfaces implicites. On s'est donc intéressé au cours de ce projet au problème de branchement de surfaces implicites, dans le cas où les éléments clefs sont filiformes.

Chapitre 2

Branchement de surfaces implicites définies par des éléments clefs filiformes

On s'intéresse ici au branchement d'éléments clefs filiformes. Les méthodes de combinaison de potentiels existantes génèrent des surfaces de mélange différentes.
Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les principales méthodes et les particularités des surfaces de mélange qu'elles génèrent. Cela nous permet en même temps de préciser le type d'embranchement que l'on recherche.
Nous présentons ensuite notre étude d'une de ces méthodes, ainsi que les raisons qui nous ont fait préférer cette méthode et pourquoi nous ne l'avons finalement pas retenue.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous proposons une solution originale à ce problème, et qui a fait l'objet d'une soumission (voir annexe B)

2.1 Motivation dans le cadre du projet

A ce stade du projet, nous pensions avoir à mélanger des primitives simples : des segments de droite au long desquels l'épaisseur varie de manière linéaire et monotone.
A l'origine de cette idée, les travaux de E. Thiel exposés dans [**?**] avaient validés l'emploi de telles primitives pour reconstruire avec une précision variable des formes à partir de leur squelette. Bien que ces travaux aient été menés dans un espace discret à deux dimensions, et hors du contexte des surfaces implicites, cette approche nous semblait prometteuse.
La condition de son succès passait par l'emploi d'une méthode, généralisable en dimension trois, permettant de mélanger deux ou plusieures primitives.
Mais face aux difficultés rencontrées, nous nous sommes finalement orientés vers l'utilisation de primitives plus complexes, ne nécessitant pas de mélange

sophistiqués. La première partie de ce chapitre analyse successivement toutes les méthodes que nous avons explorées, en mettant en évidence les limitations auxquelles nous nous sommes trouvés confrontés.

2.2 Définition du problème

Différentes méthodes ont déjà été testées pour combiner des surfaces implicites. Les différentes surfaces *mélange* qu'elles produisent avec deux segments comme éléments clefs vont nous permettre de préciser le type d'embranchement que nous recherchons.

2.2.1 Union

On ne considère parmi les éléments clefs que celui dont la contribution est la plus importante en un point de l'espace. La surface obtenue correspond à l'union des surfaces générées par chaque élément clef isolé.
Dans le cas où les éléments clefs sont deux segments de potentiels V_1 et V_2, le potentiel de la *surface union* en un point P de l'espace est :

$$\text{Union}(V_1, V_2) = \max(V_1, V_2)$$

Elle comporte des discontinuités de tangentes (voir figure 2.1 ou 1.7 gauche). On souhaite obtenir un branchement sans discontinuités, dit *lisse*.

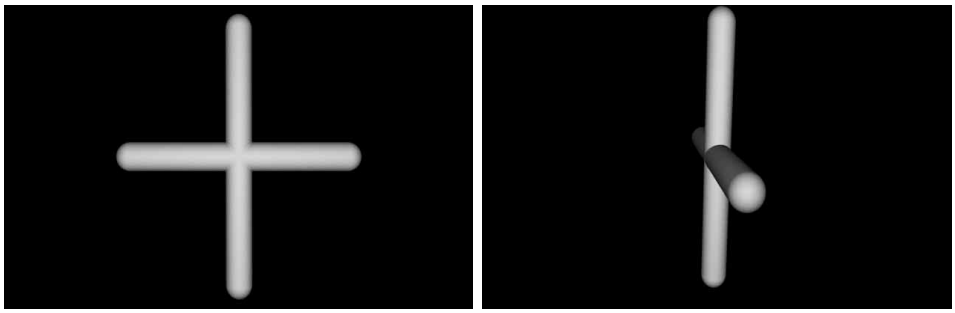


FIG. 2.1 - *Illustration des discontinuités de tangentes obtenues par union des contributions*

2.2.2 Somme

Dans le cas où les éléments clefs sont deux segments de potentiels V_1 et V_2, le potentiel de la *surface somme* en un point P de l'espace est :

$$\text{Somme}(V_1, V_2) = V_1 + V_2$$

La somme des potentiels produit des *bosses* dont la taille varie avec la *dureté* du potentiel[1] quand l'épaisseur des éléments est du même ordre (voir figure 2.2).

1. La dureté ou *raideur* est la rapidité de décroissance du potentiel, voir figures 2.2 à droite

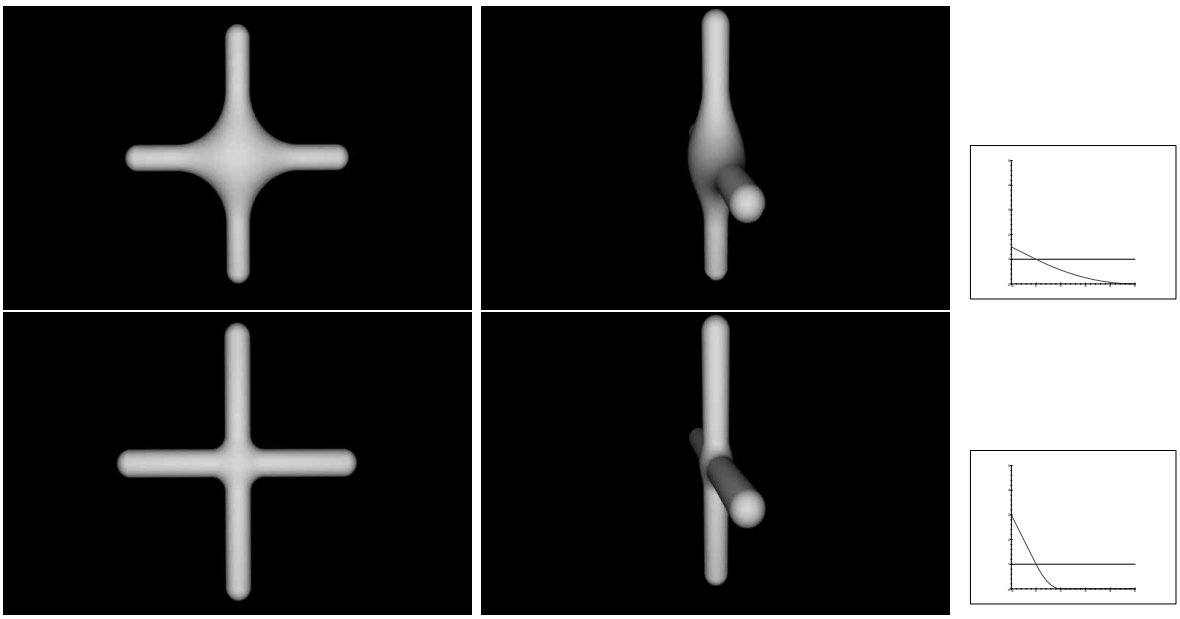


FIG. 2.2 - *Illustration des bosses générées en additionnant les contributions de deux segments qui se croisent. Le contrôle de l'extension de la déformation est possible via le potentiel utilisé. En haut on a utilisé une fonction potentielle dite douce (à variation lente et grand rayon d'influence) et en bas une fonction potentielle dite dure (à variation plus rapide et rayon d'influence limité). Cette dernière est reportée à droite: valeur du potentiel en fonction de la distance à l'élément clef. Le même potentiel est utilisé pour calculer les contributions des deux segments. On peut voir la surface implicite correspondante de face sur la figure de gauche et de côté sur la figure de droite*

Les bosses qui apparaissent (notamment visibles dans les figures centrales) sont jugées *indésirables*.

Quand l'épaisseur d'enrobage de l'un des deux segments est *très* différente, une telle combinaison de potentiels peut fournir de *bons*[2] résultats si la fonction potentielle employée est assez *dure* (voir figure 2.3).

J. Bloomenthal propose une définition (caractérisation) des *bosses* sur une surface dans [**?**] (voir figure2.4) :
une surface possède une bosse si une de ses sections exhibe une courbure par rapport à l'élément clef successivement : négative, puis positive puis négative.

2.2.3 Mélange *Super-elliptique*

Cette méthode exposée dans [**?**] mélange deux potentiels V_1 et V_2 en les combinant selon l'équation d'un *super-ellipsoïde* :

2. i.e. sans déformations.

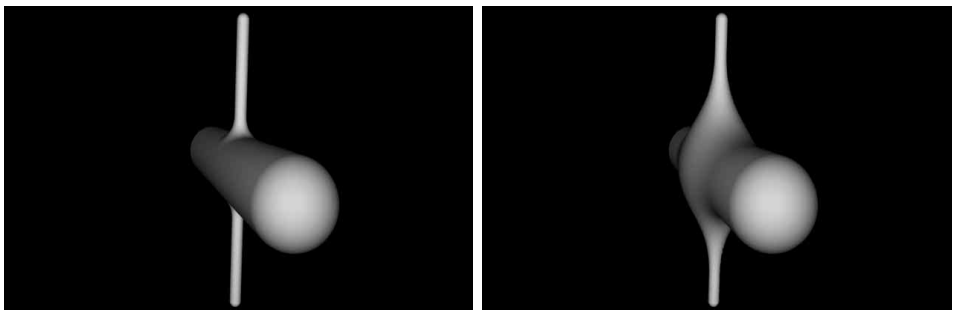


FIG. 2.3 - *Illustration de la forme obtenue en additionnant les contributions de deux segments. A gauche on obtient de bons résultats pour un rayon d'influence limité. A droite, on observe une bosse à la jonction des deux segments pour une fonction potentielle douce.*

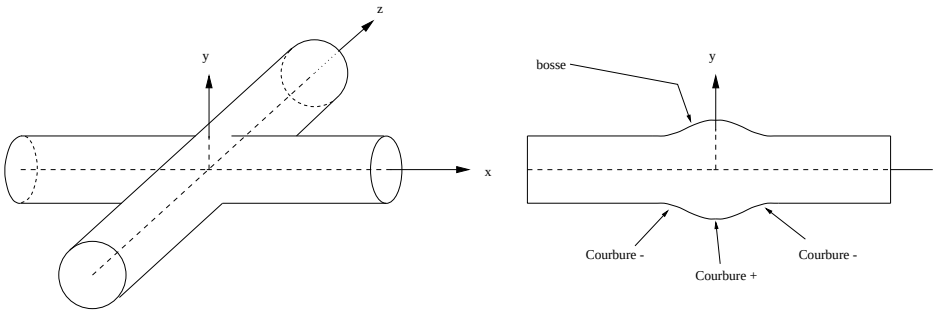


FIG. 2.4 - *Illustration des bosses générées en additionnant les contributions de deux segments qui se croisent. On a reporté à droite la section de la surface dans le plan* (xOy).

$$B(V_1, V_2 = 1 - \left[1 - \frac{V_1}{r_1}\right]_+^t - \left[1 - \frac{V_2}{r_2}\right]_+^t$$

où $[x]_+ = max(0, x)$, et V_1 et V_2 sont les potentiels des surfaces à raccorder. La surface correspondant au mélange est l'ensemble des points P vérifiant $B(V_1(P), V_2(P)) = 0$. Ceci définit 4 zones en dehors des frontières initiales correspondant à V_1 et V_2 (voir figure 2.5).

Dans les zones I et IV, $V_2 > r_2$, donc $[1 - \frac{V_2}{r_2}]_+ = 0$, i.e. la contribution du potentiel V_2 à la surface *mélange* B est nulle. De même, dans les zones III et IV, $V_1 > r_1$: la contribution de V_1 est nulle. Ainsi, dans la zone II, V_1 et V_2 s'*additionnent*, dans la zone IV V_1 et V_2 ne contribuent pas à B (i.e. $B = 1$ donc), puis dans la zone I, $B = V_1$ et dans la zone III, $B = V_2$.

Dans le cas particulier où deux cylindres de même diamètre s'intersectent, il apparaît une *bosse* : on *ajoute de la matière* aux surfaces même là où ce n'est pas *nécessaire*. L'auteur propose de l'éliminer en caractérisant les zones *nécessaires*.

Il remarque que là où les surfaces $V_1 = 0$ et $V_2 = 0$ sont déjà tangentes, le mélange des potentiels génère une *bosse*. L'angle θ entre les gradients des

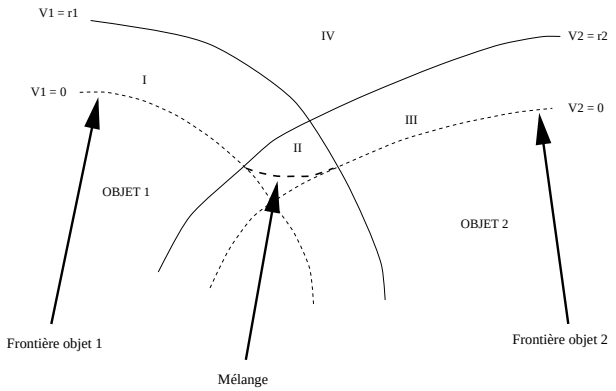


FIG. 2.5 - *Découpage de l'espace lors du mélange super-elliptique*

surfaces permet de *mesurer* si les surfaces sont tangentes, et sert à pondérer les influences des potentiels comme suit :

$$\begin{aligned}\text{Super-elliptique}(P) &= B(V_1(P), V_2(P)) \\ &= 1 - \left[1 - \frac{V_1}{r_1(1-\cos(\theta))}\right]_+^t + \left[1 - \frac{V_2}{r_2(1-\cos(\theta))}\right]_+^t\end{aligned}$$

La bosse disparait (voir figure 2.6 à droite).

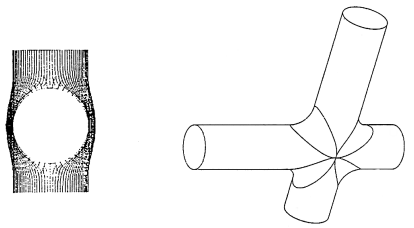


FIG. 2.6 - *Mélange super-elliptique de deux cylindres, avec rayon d'influence fixe à gauche et variable à droite. Figures extraites de [*ROCKWOOD89*] .*

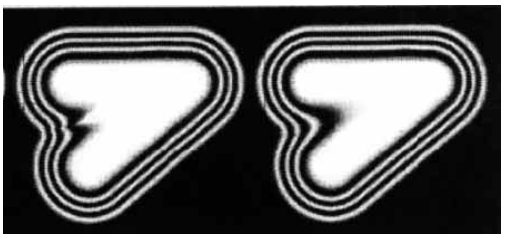


FIG. 2.7 - *Apparition d'un pic lorsque l'angle entre les segments est aigu, et modification proposée par J. Bloomenthal (figures extraites de [*BLOOOMENTHAL95*b]) .*

J. Bloomenthal, dans [**?**] montre que cette technique génère des *pics* lorsque l'angle entre les axes des deux cylindres est aigu (car $\cos(\theta)$ devient

négatif, voir figure 2.7 à gauche). Il propose une solution faisant appel à une *mesure de convexité* (voir figure 2.8. L'expression du potentiel de la surface mélange (appelée *combination surface*) devient :

$$\begin{aligned}\text{Combination}(P) &= \text{Super-elliptique}(P) \\ &\quad + \text{Mesure de convexité}(P)\,(\text{Union} - \text{Super-elliptique}(P))\end{aligned}$$

Le résultat figure 2.7 à droite est *satisfaisant* (selon les deux critères définis).

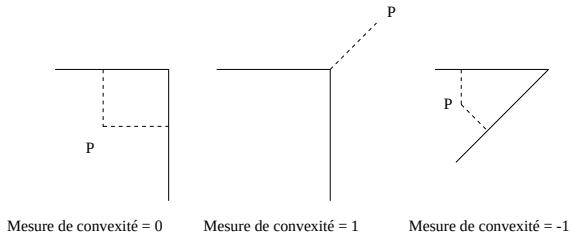


FIG. 2.8 - *Définition de la mesure de convexité en un point P de l'espace par rapport à deux éléments clefs filiformes*

L'extension à n primitives proposée dans [**?**] s'exprime par :

$$B(P) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \frac{V_i(P)}{r_i}\right]_+^t - c$$

Mais le calcul de l'angle entre les normales s'étend difficilement à plus de deux primitives. Cette méthode semble donc peu exploitable dans le cas général.

2.2.4 Mélange procédural

Cette technique de mélange est présentée dans [**?**]. L'idée directrice est d'utiliser une distance *composée*. Considérons la figure 2.9.(c) : la valeur du potentiel en p est calculée en fonction de la distance composée d, qui est la distance de p au segment $[a, b]$; a étant le projeté orthogonal de p sur un arc de courbe et b sur l'autre.
Ce procédé génère une surface satisfaisant les critères fixés : pas de discontinuité de tangente, et pas de *bosse* (figure 2.9.(b)).

Il semble de plus aisément extensible à des embranchements d'ordre supérieur : par exemple avec trois branches, on peut envisager de considérer trois projections de p sur les trois arcs de courbe. Ces trois points définissent une facette. La *distance composée* peut alors être considérée par extension comme la distance de p à la facette.

Cette méthode nous ayant semblé une bonne base de départ, à été retenue pour une étude plus précise. Nous y reviendrons donc à la section 2.3.

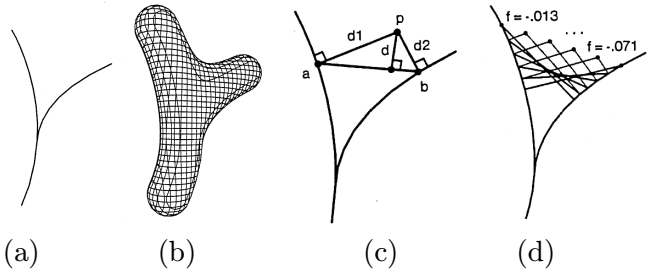


FIG. 2.9 - *Mélange procédural de deux courbes (extrait de [*BLOOMENTHAL90*]). (a) les courbes génératrices. (b) La surface obtenue. (c) Le calcul de la distance composée. (d) Variation du potentiel le long d'une droite.*

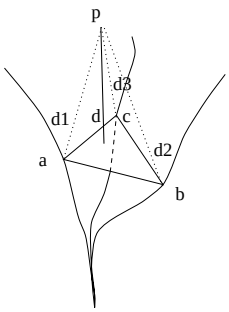


FIG. 2.10 - *Mélange procédural de trois courbes*

2.2.5 Les surfaces de convolution

Les surfaces de convolution ont été introduites par J. Bloomenthal et K. Shœmake dans [**?**].

L'idée intuitive consiste à évaluer le potentiel en un point P en tenant compte des *contributions* des éléments clefs S_i en P. Par exemple, cela revient à calculer le potentiel créé en P par un segment S_1 comme la somme des potentiels créés par chacun des points le constituant (ce qui correspond à une intégration sur ce segment) : d'où la définition suivante du potentiel

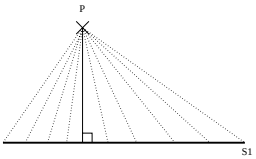


FIG. 2.11 - *Convolution : chaque point du segment contribue au potentiel en P : somme continue.*

en un point P :

$$f_S(P) = (h * S)(P)$$

où $h(P) = e^{\left(\frac{-\|P\|^2}{2}\right)}$, correspond au *noyau de convolution*, et $S(P)$ est une

fonction *indicatrice* des éléments-clefs $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (i.e. $S(P) = 1$ si $\exists i$ tel que $P \in S_i$, $S(P) = 0$ sinon). Ainsi,

$$f_S(P) = \int_S \exp(\frac{-\|s - P\|^2}{2})ds$$

Une propriété intéressante de ces surfaces provient de la distributivité de la convolution :

$$h * (S_1 + S_2) = h * S_1 + h * S_2$$

Cela signifie en pratique l'indépendance de la forme de l'isopotentielle par rapport au découpage des éléments clefs (voir figure 2.12).

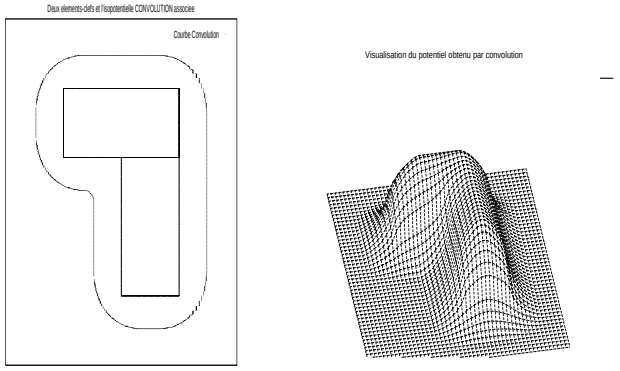


FIG. 2.12 - *Isopotentielle du plan obtenue par Convolution (à gauche) et visualisation de l'allure du potentiel, i.e. on élève la valeur du potentiel en tout point du plan. Ainsi, la figure de gauche est une coupe horizontale de celle de droite.*

Le côté très séduisant de cette approche est le lien qu'elle établit entre le traitement effectué sur la forme et la notion de filtrage. La convolution est en effet une opération connue pour ses propriétés *régularisantes* en traitement du signal.

Cette méthode de mélange est satisfaisante à condition que la dimension du squelette soit celle de l'espace, c'est-à-dire des polygones dans les plan (voir figure 2.12) et des volumes dans l'espace.

Elle génère des bosses lorsque les éléments clefs sont filiformes (voir figure 2.13). La solution exposée dans [**?**] consiste à utiliser des éléments clefs volumiques dans l'espace, avec une condition sur leur taille par rapport au *rayon* du noyau de convolution.

2.2.6 Conclusion

Nous avons défini au cours de cette section le type d'embranchement que l'on cherche à construire : lisse et sans bosses.

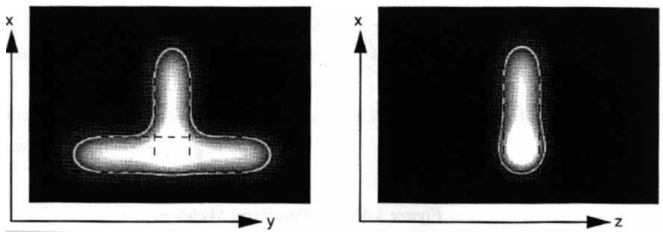


FIG. 2.13 - *Illustration des bosses apparaissant avec des éléments clefs filiformes (figure de J. Bloomenthal).*

Dans ce cadre, les combinaisons *Union* et *Somme* ne sont pas utilisables. Les méthodes *super-elliptiques* et par *convolution* également. La première en raison des difficultés d'extension à des branchements d'ordre supérieur à deux. La seconde du fait de la difficulté d'engendrer les éléments clefs volumiques, qu'elle nécessite pour construire les branchements lisses et sans bosses souhaités.

Ainsi, notre attention s'est portée sur la méthode procédurale.

2.3 Exploration des méthodes procédurales

A ce stade du projet, nous pensions avoir à mélanger des primitives simples : des segments le long desquels l'épaisseur varie de manière linéaire et monotone. Nous avons donc étudié comment appliquer la méthode de mélange procédurale à ce type de primitive seulement.

2.3.1 Primitives à rayon variable

Le rayon d'enrobage variable est obtenu en calculant pour un point p donné son *abscisse* u sur le segment considéré puis par interpolation linéaire entre les deux rayons extrémités (voir figure 2.14) :

$$r(u) = (1-u)R1 + uR2$$

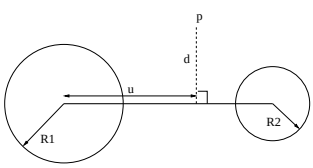


FIG. 2.14 -

Le potentiel correspondant est :

$$f\left(\frac{d}{2r(u)}\right)$$

où $f(.)$ est une fonction *potentielle* décroissante telle que :

$$f(x) \text{ soit } \begin{cases} > isovaleur & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ = isovaleur & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \text{nulle} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction f que nous avons utilisée est souvent appelée *Wyvill* (voir figure 1.5 à gauche).

La surface implicite obtenue est analogue aux *gyxels* employés par E. Thiel dans [**?**]. Ce dernier a montré (dans un cadre très différent de géométrie discrète) l'intérêt de ces éléments pour approcher une forme à partir de son squelette.
A l'origine de cette étude, on souhaite adopter la même approche en réalisant des branchements *lisses* et *sans bosses* comme défini précédemment.

2.3.2 Interpolation linéaire entre les rayons d'enrobage

On souhaite mélanger deux segments s_1 et s_2, primitives à rayon variable.

Définition

Le calcul du potentiel de mélange en un point de l'espace s'effectue comme suit :

potentiel(P)
$P_1 \leftarrow$ projeté de P sur s_1 d'abscisse u_1
$P_2 \leftarrow$ projeté de P sur s_2 d'abscisse u_2
$P_t \leftarrow$ projeté de P sur $[P_1, P_2]$ d'abscisse u_t
$d \leftarrow \text{longueur}[P, P_t]$
$r(u_t) = (1 - u_t)r_1(u_1) + u_t r_2(u_2)$
$potentiel(P) \leftarrow f\left(\frac{d}{2r(u_t)}\right)$

Résultats

Pour visualiser le potentiel, on a reporté des niveaux de gris entre noir (potentiel nul) et blanc (potentiel unité).

Le résultat est satisfaisant en ce qui concerne les figures 2.20.(a) et 2.20.(b), mais assez surprenant pour 2.20.(c) car nous n'avons trouvé aucune remarque signalant ce genre d'irrégularité dans la forme dans les articles consultés (voir le décrochement apparaissant vers l'intérieur au bout des branches). Aussi nous avons essayé de mieux comprendre les origines de ce problème, pour éventuellement l'éviter.

Découpage de l'espace par la méthode procédurale

Analysons ce qui se passe lors de l'utilisation de la méthode procédurale. Le plan est en fait découpé en *zones*, selon que le point P considéré se

projette sur le segment ou en l'une de ses extrémités (voir figure 2.15).

- `Zone B` : P se projette sur les segments s_1 et s_2 en B, le potentiel résultat du mélange est celui de la boule extrémité commune au deux segments.
- `Zone P1-B` : P se projette sur le segment s_2 en B et sur le segment s_1 en P_1. Comme la projection de P sur le segment $[P_1, B]$ est P_1, le potentiel résultat du mélange est celui généré par le segment s_1 seul.
- `Zone P2-B` : même explication, en permutant les segments : le potentiel résultat du mélange est celui généré par le segment s_2 seul.
- `Zone P1` : P se projette sur le segment s_1 en P_1 et sur le segment s_2 en P_2. Mais comme $\alpha < \frac{\pi}{2}$, la projection de P sur le segment $[P_1, P_2]$ est P_1. Le potentiel résultat du mélange est donc celui généré par le segment s_1 seul.
- `Zone P2` : même explication, en permutant les segments : le potentiel résultat du mélange est celui généré par le segment s_2 seul.
- `Zone P1-P2` : P se projette sur le segment s_1 en P_1 et sur le segment s_2 en P_2. La projection de P sur le segment $[P_1, P_2]$ est P_t, point intérieur au segment. Le potentiel résultat du mélange est donc une *combinaison* des deux.

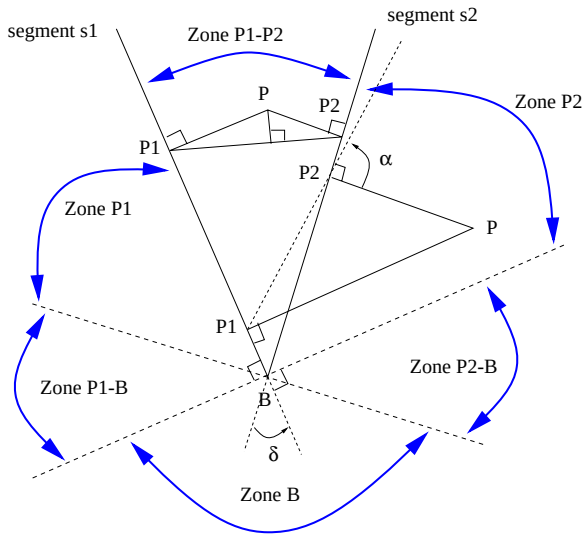


FIG. 2.15 - *Partition de l'espace selon la projection du point sur le segment*

On remarque sur la figure 2.15 que la répartition des zones peut varier avec δ. Si $\delta > \frac{\pi}{2}$ (angle obtu), on obtient une réparition analogue à celle présentée sur la figure 2.16, qui comporte moins de zones.

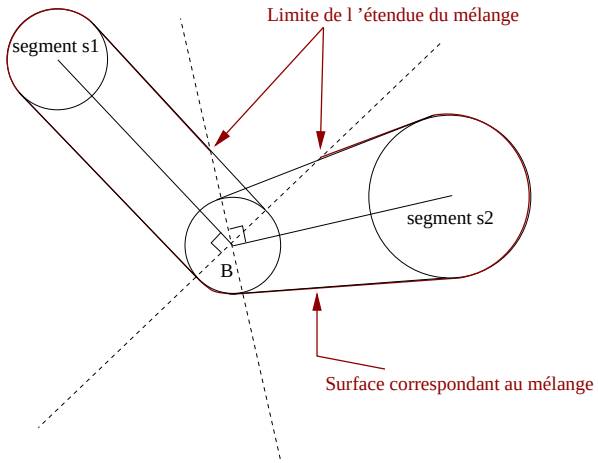


FIG. 2.16 - *Partition de l'espace selon la projection du point sur le segment : cas où l'angle entre les segments est obtu.*

Explication de l'irrégularité observée

Dans le cas où δ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, , la distance composée d connaît plusieurs discontinuités dans ses variations. Sur la figure 2.17, nous avons reporté le lieu géométrique des points P_t lorsque P se déplace sur une droite.

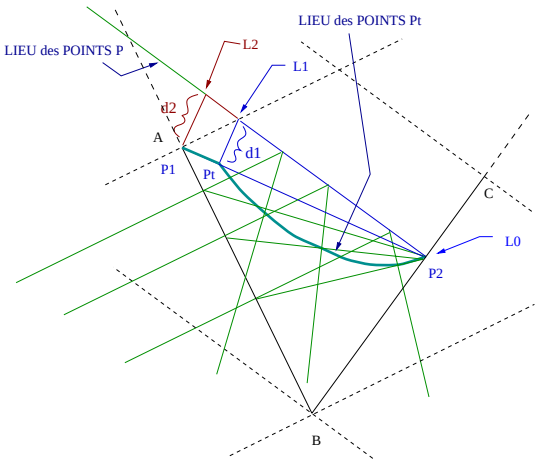


FIG. 2.17 - *Evolution de la distance considérée lorsque le point P se déplace le long d'une droite. On a reprensenté quelques configurations pour montrer comment la courbe a été obtenue.*

Nous avons cherché à modifier la méthode de manière à prendre en compte ces variations et maîtriser l'extension du mélange. Nous avons pour cela défini une zone d'extension du mélange, et des conditions pour le raccordement.

2.3.3 Méthode procédurale 2 : Conditions aux limites

Définition

La zone de mélange est limitée à l'intérieur d'une *sphère* centrée au point de jonction, et dont le rayon est fixé par l'utilisateur.

Pour forcer le raccord des isopotentielles au passage de la distance composée à la distance euclidienne (limite du cercle de mélange), nous avons ajouté des paramètres à l'expression définissant le mélange.
Le rayon de mélange fixé détermine deux positions limites pour le point P_t sur le segment $[P_1, P_2]$ (voir figure 2.18).

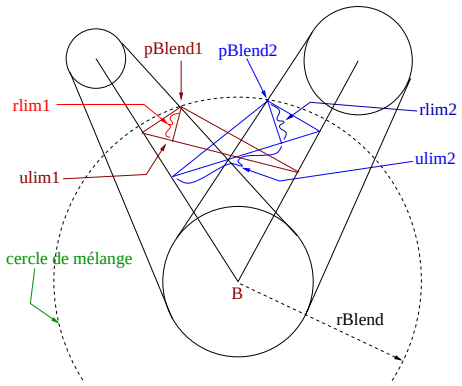


FIG. 2.18 - *Nouveaux paramètres pour le calcul du potentiel de mélange*

Nous proposons de calculer le potentiel de mélange en un point de l'espace comme suit :

potentiel(P)
$P_1 \leftarrow$ projeté de P sur s_1 d'abscisse u_1
$P_2 \leftarrow$ projeté de P sur s_2 d'abscisse u_2
$P_t \leftarrow$ projeté de P sur $[P_1, P_2]$ d'abscisse u_t
$d \leftarrow$ longueur$[P, P_t]$
$w \leftarrow \frac{u_{lim2} - u_t}{u_{lim2} - u_{lim1}}$
$r(w) = (1 - w)u_{lim1} + wu_{lim2}$
$potentiel(P) \leftarrow f\left(\frac{d}{2r(w)}\right)$

Résultats

On constate sur l'exemple de la figure 2.20.(d) que l'isopotentielle est bien raccordée cette fois, mais partout ailleurs le potentiel présente des discontinuités à la limite du cercle de mélange.
Cela provient de la différence de variation entre la distance composée $d = \text{dist}(P, P_t)$ et la distance euclidienne. Dans cette méthode de calcul, on passe brutalement de l'une à l'autre.
Ces discontinuités sont gênantes car elles empêchent toute dichotomie ou

descente de gradient, indispensables pour une visualisation efficace de l'isopotenitelle.

Il faut donc trouver une combinaison qui assure la continuité du potentiel au moins dans un voisinage de l'isosurface qui nous intéresse (voir la partie 1.1.2).

2.3.4 Méthode procédurale 3 : interpolation entre union et procédural

L'idée directrice est de conserver les conditions aux limites (et le rayon de mélange donc), tout en effectuant une combinaison entre les deux mélanges, comme une somme pondérée des deux contributions.

Définition

Comme on veut conserver un raccord sans discontinuités de tangentes, le terme en union doit s'annuler là où les surfaces se raccordent. On définit donc un *rayon minimum* de mélange (rBlendMin) en plus du *rayon maximum* (rBlendMax) (voir figure 2.19).

Le calcul de rBlendMin nécessite de connaître la surface procédurale définie seulement avec les conditions aux limites pour en extraire le point de *contact* déterminant ce rayon minimum.

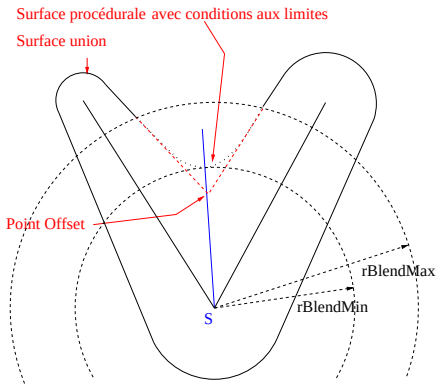


FIG. 2.19 - *Nouveaux paramètres pour le calcul du potentiel de mélange*

Ce paramètre peut être déterminé géométriquement, car comme on le montre sur la figure 2.19, le point d'Offset (intersection des deux surfaces, dans le plan de jonction) et le point de contact (minimisant la distance à S, sommet commun aux deux segments) sont alignés.

Le calcul du potentiel de mélange en un point de l'espace s'effectue finalement comme suit :

potentiel(P)

$P_1 \leftarrow$ projeté de P sur s_1 d'abscisse u_1

$f_1 \leftarrow f\left(\frac{dist(P,P_1)}{2r_1(u_1)}\right)$

$P_2 \leftarrow$ projeté de P sur s_2 d'abscisse u_2

$f_2 \leftarrow f\left(\frac{dist(P,P_2)}{2r_2(u_2)}\right)$

$P_t \leftarrow$ projeté de P sur $[P_1, P_2]$ d'abscisse u_t

$d \leftarrow$ longueur$[P, P_t]$

$w \leftarrow \frac{u_{lim2}-u_t}{u_{lim2}-u_{lim1}}$

$r(w) = (1-w)u_{lim1} + wu_{lim2}$

$v \leftarrow \frac{dist(P,S)-rBlendMin}{rBlendMax-rBlendMin}$

$potentiel(P) \leftarrow (1-v)f\left(\frac{d}{2r(w)}\right) + v\max(f_1, f_2)$

Résultats

L'exemple de la figure 2.20.(e) semble valider la démarche.

2.3.5 Conclusion

Nous sommes parvenus à adapter la technique de mélange procédurale dans le cas du branchement de deux éléments filiformes dans le plan. Cependant, trop de paramètres entrent en jeu pour permettre l'extension de cette technique à des embranchement d'ordre supérieur à deux. Il faudrait autant de paramètres rBlendMin et rBlendMax que de secteurs angulaires dans le plan. Dans le cas d'un embranchement gauche, la situation est encore plus floue.

Toutefois, cette recherche n'aura pas été inutile, pour deux raisons.

- La première raison est qu'elle nous a montré qu'il n'était peut être pas judicieux d'utiliser des primitives aussi simples. En effet il faut gérer dans ce cas chaque raccord pour obtenir une surface lisse et sans bosses. C'est à partir de là que nous nous sommes orientés vers l'utilisation de primitives plus complexes, à savoir des courbes le long desquelles l'épaisseur d'enrobage est variable. Tant que ces courbes ont un rayon de courbure plus petit que l'épaisseur d'enrobage, la surface *enrobage* ne présente pas de discontinuités (voir figure 2.21).

  Nous sommes ainsi libérés des problèmes de branchements de deux primitives : ne restent à traiter que les branchements d'ordre supérieur.

- La deuxième raison est que cette étude nous a permis d'entrevoir une solution au problème de branchement, basée sur la remarque suivante : *Le lieu géométrique des points P_t définit une courbe (voir figure 2.22). La surface procédurale associée aux deux segments se déduit de la surface distance associée à la courbe des points P_t.*

Ainsi, au lieu de chercher à contrôler cette courbe (définie indirectement) en multipliant les paramètres du mélange procédural, on pourrait spécifier explicitement une courbe qui serait ensuite utilisée pour générer le potentiel de manière plus simple, c'est-à-dire sans combinaison de potentiel. En dimension 3, cette courbe pourrait être remplacée par un élément de surface ou de volume raccordant les branches à proximité du point de jonction.

Après cette première approche dans le plan, nous avons également décidé de travailler directement en dimension trois, le problème n'étant de toute façon pas simplifié en dimension deux.

Nous avons décidé d'employer des éléments clefs complexes et de combiner leurs potentiels en réalisant l'union pour obtenir la *surface enrobage*.

Dans la perspective d'éléments clefs complexes, c'est-à-dire des courbes à épaisseur d'enrobage variable, il restait à trouver le moyen de raccorder les surfaces *enrobage* générées.

Ainsi, nous avons étudié comment définir un élément dont la surface *enrobage* serait lisse et sans bosses pour réaliser le branchement des courbes. Nous avons considéré dans la suite des embranchements triples.

2.4 Une solution basée sur les triangles de Bézier

On considère donc un embranchement triple. Notre solution consiste à générer un *patch* triangulaire de Bézier dont le rôle est analogue à la courbe implicitement définie dans la méthode procédurale (figure 2.22).
L'utilisation de ce patch pour générer une surface implicite sans discontinuités impose des conditions liant sa courbure à son *rayon d'enrobage* (qui est la distance de la surface génératrice à la surface).

2.4.1 Définition générale

Coordonnées barycentriques

Tout point P du plan peut s'exprimer à l'aide de ses coordonnées barycentriques par rapport à un triangle non dégénéré P_0, P_1, P_2 :

$$P = rP_0 + sP_1 + tP_2$$

où r, s et t sont uniques et valent :

$$r = \frac{aire(P, P_1, P_2)}{aire(P_0, P_1, P_2)} \quad s = \frac{aire(P_0, P, P_2)}{aire(P_0, P_1, P_2)} \quad t = \frac{aire(P_0, P_1, P)}{aire(P_0, P_1, P_2)}$$

Polygone de contrôle

Un triangle de Bézier est défini par 10 points de contrôle (voir figure 2.24) :

- 3 points de contrôle *primaires* déterminent les extrémités du triangle.
- 6 points de contrôle *secondaires* qui déterminent les tangentes aux points extrémités.
- 1 point de contrôle *tertiaire*, central.

Le triangle est l'ensemble des points (voir figure 2.26) :

$$\begin{aligned} P(r,s,t) = \quad & r^3P_0 + s^3P_1 + t^3P_2 \\ & +3r^2sP_3 + 3rs^2P_4 + 3s^2tP_5 + 3st^2P_6 + 3rt^2P_7 + 3r^2tP_8 \\ & +6rstP_9 \\ & \text{avec } (r+s+t) = 1 \end{aligned}$$

2.4.2 Raccordement à des courbes : choix des points de contrôle

Notre première idée était de choisir les points de contrôle primaires sur les courbes à raccorder, puis de confondre deux à deux les points de contrôle secondaires de manière à n'avoir qu'une seule tangente, identique à celle de la courbe au point de contact.

Le triangle obtenu est alors bien tangent aux courbes, mais on rencontre des problèmes aux extrémités car le rayon de courbure devient nul et la normale au triangle n'est plus définie. Cela nous empêche de générer l'*enrobage* du triangle (voir figures 2.27).

2.4.3 Lien entre la courbure et l'épaisseur d'enrobage

Si l'épaisseur d'enrobage est supérieure au rayon de courbure du triangle, la surface comporte des discontinuités.

Notre procédé de visualisation (voir annexe A) consiste à réaliser une polygonalisation de la surface enrobage en positionnant les sommets à une distance égale à l'épaisseur d'enrobage selon la normale à la surface du triangle. Lorsque cette condition de courbure n'est pas respectée, l'effet est encore plus désastreux qu'une discontinuité car la surface s'intersecte, se tord et présente des boucles.

Les triangles de Bézier tels qu'exposés ci-avant ont des rayons de courbure qui deviennent nuls aux points de contrôle primaires. Ceci nous a contraint à calculer les normales à la surface géométriquement (avec les points échantillons de sa surface) pour obtenir son enrobage. Mais on ne peut éviter les discontinuités (voir figure 2.28 à droite), qui seraient de toute façon visibles avec un procédé de visualisation *exact* de la surface implicite correspondante.

Le triangle de Bézier réalise bien la connexion entre trois branches dans le cas d'embranchements plans (voir figure 2.28). Mais lorsque l'embranchement est gauche, le triangle présente de très petits rayons de courbure qui font que quelque soit l'épaisseur d'enrobage, des plis apparaissent.

2.4.4 Une solution : composition de triangles de Bézier

La forte courbure à proximité des sommets du triangle de Bézier provient de la fusion des points de contrôle secondaires. On ne peut éviter de les fusionner sans perdre la continuité de tangentes entre la courbe et le triangle.

L'idée pour palier à l'inconvénient exposé ci-avant, est de générer un triangle de Bézier sans point de contrôle double. On considère ensuite un domaine à l'intérieur de ce triangle. Ce domaine est défini par un deuxième triangle de Bézier dont les points de contrôle primaires sont ceux du premier triangle, et les points de contrôle secondaires sont confondus. Ces derniers peuvent être positionnés au milieu des points de contrôle secondaires du premier triangle par exemple (voir figure 2.29).

Ainsi, la normale à la surface du triangle est toujours définie, ce qui permet de la calculer analytiquement.

Les résultats sont meilleurs (voir figure 2.30).

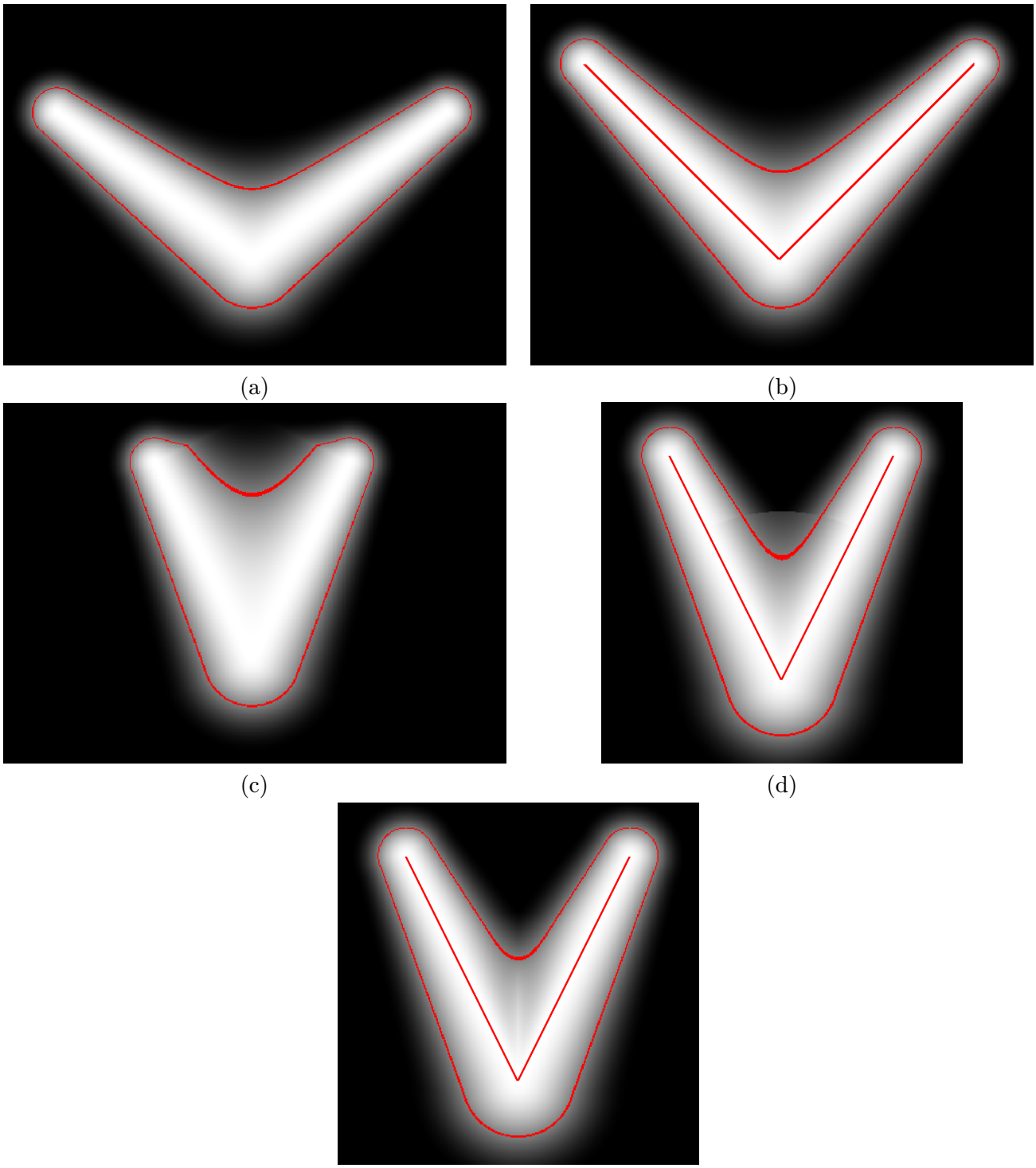


FIG. 2.20 - *Table des figures concernant le mélange procédural. Méthode procédurale directe avec un angle entre les segment : obtu en (a), droit en (b) et aigu en (c). (d) utilise les conditions aux limites. (e) utilise en plus les rayons de mélange.*

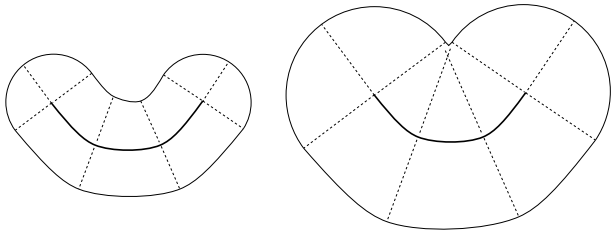


FIG. 2.21 - *Illustration du lien entre la courbure du squelette et l'épaisseur d'enrobage: cette dernière doit être inférieure au rayon de courbure pour qu'une surface lisse puisse être définie.*

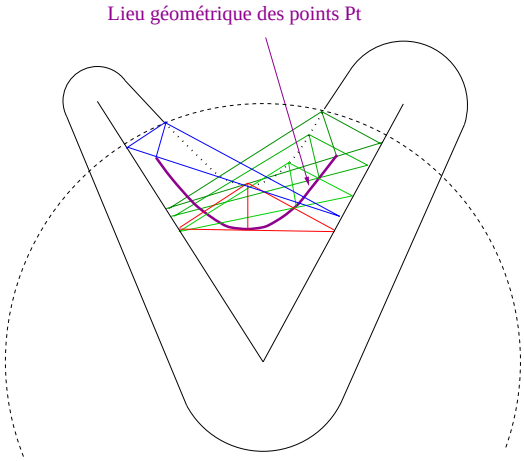


FIG. 2.22 - *Le lieu géométrique des points P_t définit une courbe*

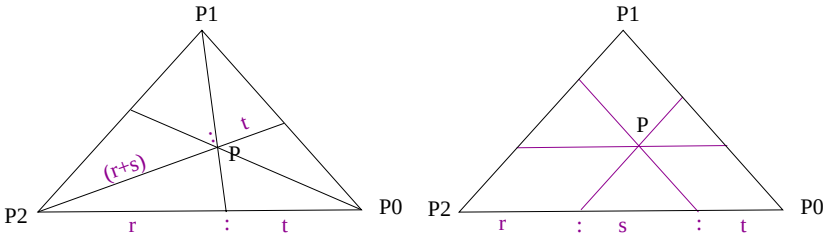


FIG. 2.23 - *Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques*

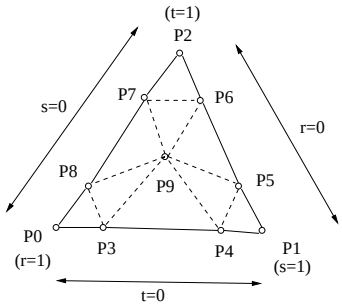


FIG. 2.24 - *Définition des points de contrôle du triangle de Bézier*

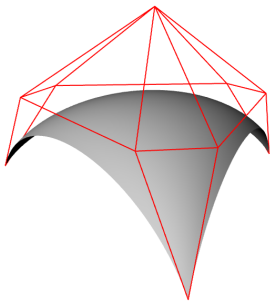


FIG. 2.25 - *Exemple de triangle de Bézier avec son polygone de contrôle.*

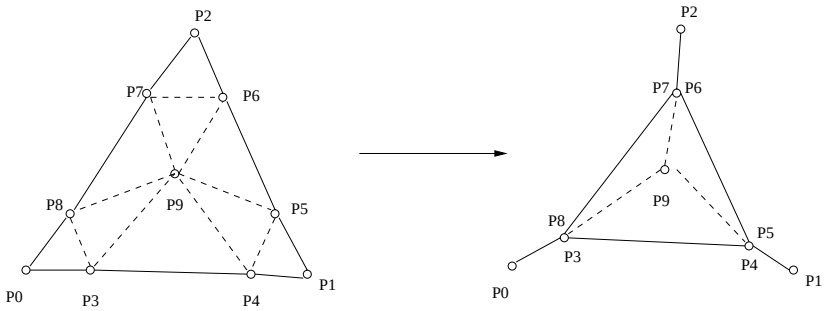


FIG. 2.26 - *Transformation du polygone de contrôle pour raccorder le triangle à des courbes.*

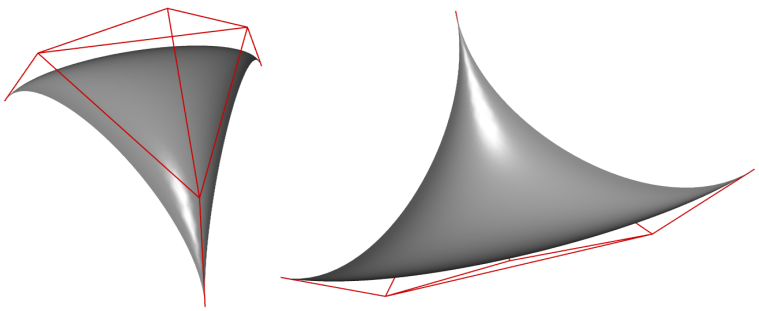
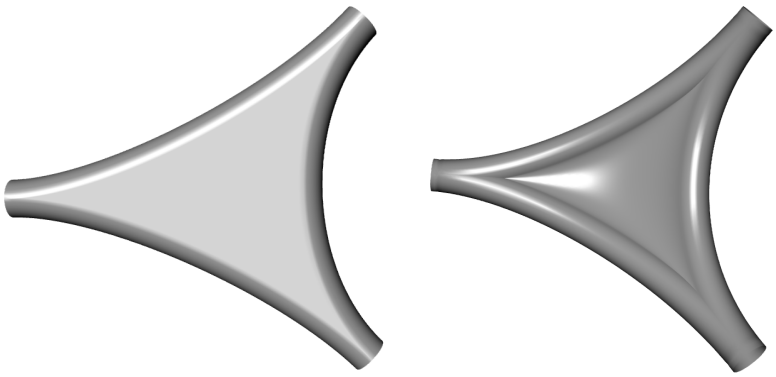


FIG. 2.27 - *Exemple de triangle de Bézier avec son polygone de contrôle dont les points de contrôle secondaires sont confondus deux à deux. A droite on a augmenté l'effet métallique de la surface qui permet de mieux voir l'augmentation très forte de la courbure à proximité des sommets du triangle.*



(a) (b)

FIG. 2.28 - *Discontinuités apparaissant sur l'enrobage d'un triangle de Bézier. Enrobage d'un triangle de Bézier dont les points secondaires sont confondus: (a) avec un triangle plan. (b) avec un triangle non plan.*

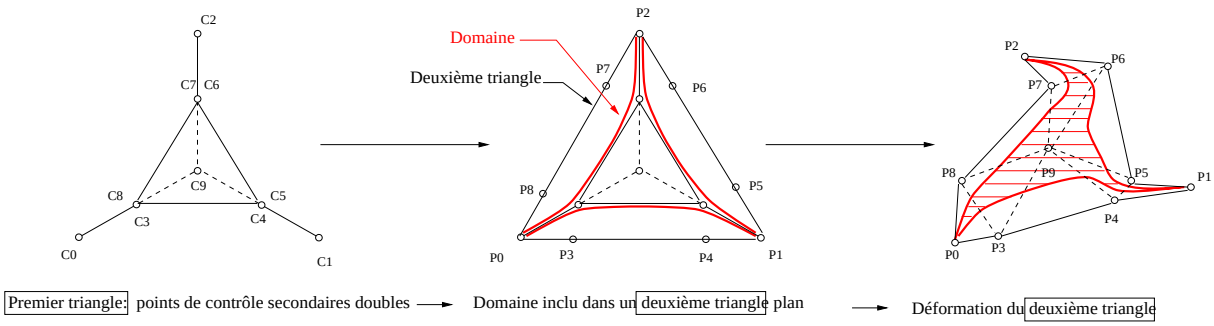
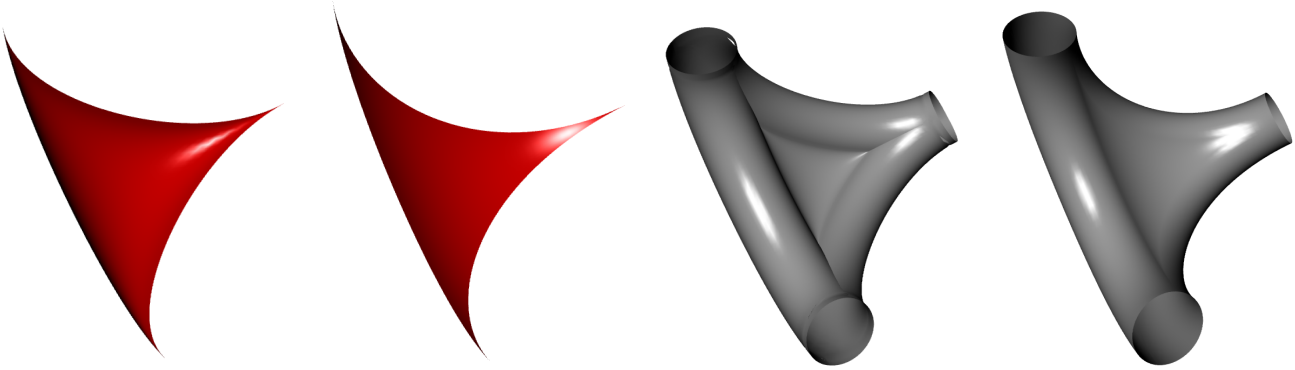


FIG. 2.29 - *Illustration de la méthode pour composer les triangles de Bézier.*



(a) (b) (c) (d)

FIG. 2.30 - *Comparaison des résultats de la méthode de composition des triangles de Bézier ((b) et (d)) avec la première méthode sans composition ((a) et (c)). (a) et (b) sont les triangles de base à partir desquels l'enrobage (c) et (d) est généré.*

Chapitre 3

Application à la reconstruction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'application des techniques présentées au problème de la reconstruction.

Le squelette géométrique est utilisé pour calculer les différents éléments clefs.
On a vu que le *squelette géométrique* obtenu à partir du nuage de points initial est constitué de segments approchant les branches du *squelette exact*. Plus l'approximation est précise, plus le nombre de segments est élevé. Ainsi, il est crucial de pouvoir réduire le nombre de segments du squelette à traiter sans trop dégrader la forme.

De plus, pour obtenir des surfaces implicites lisses, le rayon de courbure des éléments clefs employés doit être supérieur à leur épaisseur d'enrobage, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent.

Ainsi, le traitement du squelette s'effectue en deux étapes: une première pour extraire des courbes *lisses* à partir des lignes polygonales approchant les branches, et une seconde pour réaliser les connexions entre les branches à l'aide de la technique de triangles de Bézier exposée dans la partie précédente.

3.1 Réalisation des parties filiformes

A partir des branches du squelette géométrique on extrait tout d'abord une ligne polygonale simplifiée, c'est-à-dire réduite à un sous-ensemble des points constituant la ligne polygonale initiale.
Ce sous ensemble de points est ensuite utilisé pour définir une courbe spline d'approximation

3.1.1 Sur la décomposition du squelette en branches

Nous avons réalisé une décomposition naïve du squelette en ne distinguant que trois types de sommets

- sommet extrémité : sommet n'ayant qu'un seul voisin.
- sommet normal : sommet ayant 2 voisins, donc un sommet courant d'une branche.
- sommet de branchement : sommet ayant 3 (voire 4 en 3D) voisins.

Dans le cadre de ce projet, nous nous sommes *contenté* d'une représentation du squelette comme une liste de branches.

Concernant le traitement des branches, nous avons d'abord procédé à une simplification pour réduire le nombre de segments, puis nous avons généré des courbes à partir de ces ensembles réduit de points. A partir de ces courbes, il est alors possible de ne définir qu'une seule surface implicite par branche. Le nombre de branchements de surfaces à gérer correspond donc au nombre d'embranchements du squelette, ce qui n'était pas le cas dans notre première approche de mélange de gyxels.

3.1.2 Réduction du nombre de points sur une branche

La simplification considérée se fait branche par branche. Nous avons utilisé pour simplifier les lignes polygonales l'algorithme récursif de Pavlidis (présenté dans [**?**]). Cette méthode a déjà été appliquée avec succès pour simplifier des squelettes discrets dans [**?**].

Comme ce dernier, nous rajoutons une dimension aux lignes polygonales pour le rayon d'enrobage, qui est ainsi pris en compte de manière indirecte.

En pratique, on fournit un niveau de détail sous la forme d'un seuil d'erreur maximale tolérée, et on ne retient que les sommets de la ligne polygonale initiale qui dépassent ce seuil.

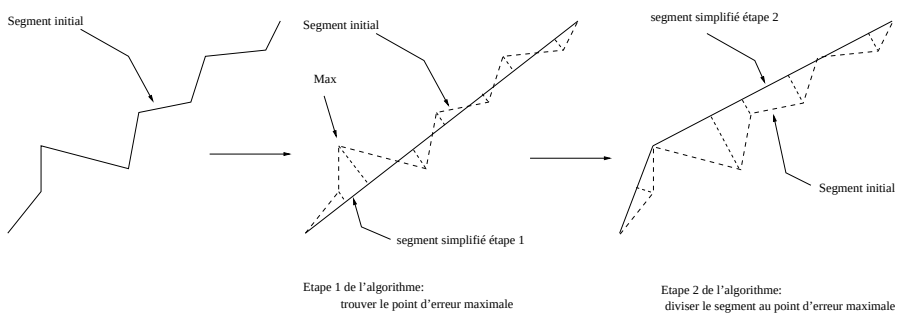
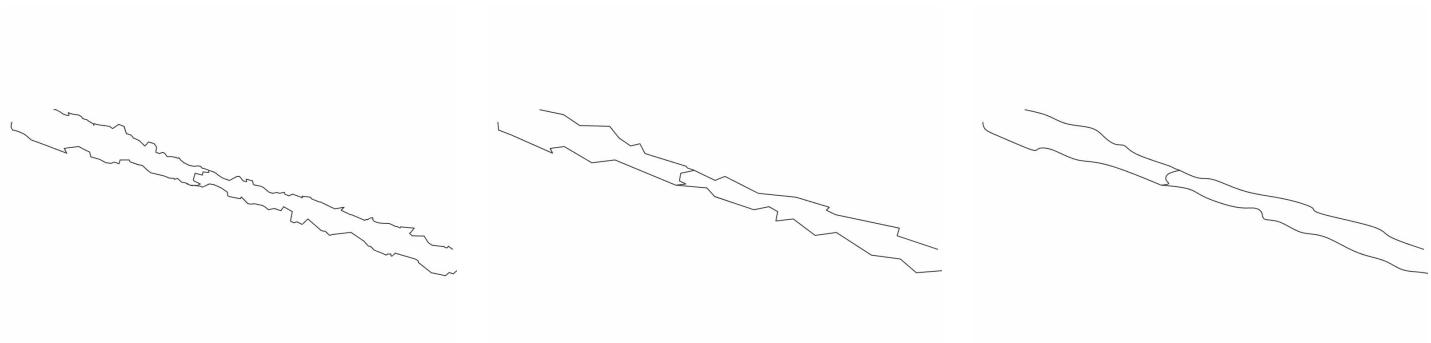


FIG. 3.1 - *Récursion de l'algorithme de Pavlidis*

Le seuil d'erreur fourni est multiplié par la *taille* du squelette estimée par la composante la plus grande de sa boîte englobante. Il est lié au squelette, donc commun à toutes les branches.

Nous avons utilisé uniquement la première passe de l'algorithme de Pavlidis : la phase de fusion destinée à réduire la sensibilité de la décomposition aux choix des points extrémités n'a pas été implémentée, les-dits points extrémités étant *fixes* : ce sont les embranchements ou les points extrémité du squelette.

Plus le seuil d'erreur est important, moins on conserve de points de contrôle. La limite est un squelette ne contenant que des sommets de branchement et des sommets extrémité reliés par des segments de droite.
Avec un nombre de points de contrôle réduit, la forme obtenue reste similaire à celle de départ (voir figure 3.2.a et 3.2.b).



(a) (b) (c)

FIG. 3.2 - *Illustration de la décomposition des branches du squelette d'un chromosome. On a reporté en (a) la squelette complet (300 sommets), en (b) le squelette simplifié (seuil d'erreur* 0.02*, 20 sommets) et en (c) la représentations en splines obtenue*

3.1.3 Décomposition des branches en splines

La ligne polygonale simplifiée est ensuite utilisée comme polygone de contrôle d'une B-Spline d'approximation. Pour interpoler les points extrémités de la branche, ces derniers ont étés triplés (voir figure 3.3).

Dans le même esprit que pour l'approximation polygonale, le calcul est effectué en dimension 4 pour approximer également le rayon (voir figure 3.4).

Avec V_0, V_1, V_2 et V_3 quatre points de contrôle, soit quatre points successifs de la ligne polygonale ici, on définit les points du segment de B-spline considérée comme l'ensemble des points:

$$\begin{aligned} Q(u) &= \frac{1}{6}(V_0 + 4V_1 + V_2 \\ &\quad +3u(V_2 - V_0) + 3u^2(V_0 - 2V_1 + V_2) \end{aligned}$$

(a) (b)

FIG. 3.3 - *(a) : une B-spline interpolant ses extrémités et son polygone de contrôle. (b) : exemple de ligne polygonale (119 sommets), avec la spline simplifiée correspondante (définie par 10 sommets, seuil d'erreur : 0.02).*

$$+u^3(V_3 - V_0 + 3(V_1 - V_2)))$$
$$\text{où } u \in [0, 1]$$

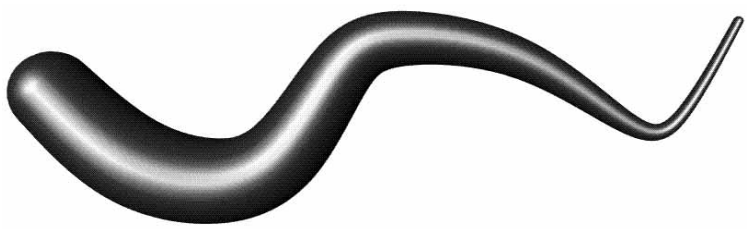


FIG. 3.4 - *Exemple d'approximation de l'épaisseur d'enrobage*

L'utilisation de splines d'approximation se justifie par le type de *bruit* existant sur le positionnement des sommets du squelette approché par rapport aux branches du squelette *exact* (voir figure 3.2): des courbes d'interpolation auraient des rayons de courbure inférieurs.

3.2 Réalisation des branchements

Nous avons choisi de placer un triangle de Bézier par embranchement, sans considérations, dans la version actuelle de la méthode, sur l'éventuelle *représentativité* du branchement.

Les triangles utilisés sont, dans le même esprit que les B-Splines, en 4 dimension pour approximer les rayons d'enrobage avec les positions.

3.2.1 Positionnement des triangles

Nous utilisons la technique de composition des triangles de Bézier exposée dans la section 2.4.4. Pour positionner le triangle *support*, on doit définir en chaque embranchement un polygone de contrôle, soit dix points. Le triangle intérieur servant à restreindre le domaine du triangle précédent n'est

calculé qu'une seule fois: le domaines de définition de tous les triangles de Bézier étant identiques : $r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$ et $r + s + t = 1$.

Le point central est toujours positionné au sommet d'embranchement du squelette.
A partir de là, nous *remontons* successivement les 3 branches. Cette remontée s'effectue en ne considérant que les sommets discrétisés de la splines représentant la branche. Le critère d'arrêt est :

- **fin de branche** : on a atteint un sommet extrémité, ou, si la branche relie deux sommets de branchements, on a atteint la limite de déplacement. Cette dernière est fixée en partageant la *longueur* de la branche *équitablement* entre les deux branchements. En pratique, la longueur de la branche est estimée par le nombre de points discrétisés sur sa B-spline. Et le partage se fait proportionnellement aux rayons d'enrobage des sommets de branchement.

- **sommet bien placé** : c'est l'heuristique de positionnement retenue au cours de ce projet. On juge que le point de contrôle *primaire* est *bien placé* si la distance (3D cette fois) qui le sépare du point de branchement est égale à k fois l'épaisseur d'enrobage à l'embranchement. k est un paramètre modifiable via l'interface que nous avons réalisée pour les tests, mais il est commun à tout le squelette.

Le critère de *sommet bien placé* est discutable. Nous pensons qu'il serait préférable de remonter la branche selon des critères de courbure du triangle. En fait, il faudrait vérifier que la courbure est bien plus grande que l'épaisseur d'enrobage pour assurer la reconstruction d'une surface enrobage lisse.

Une autre extension intéressante serait de fusionner les embranchements voisins lorsque le triangle associé n'a pas pu être positionné correctement. Cela nécessiterait de traiter des embranchements d'ordre supérieur à trois. Une voie possible serait d'utiliser une généralisation des surfaces de Bézier comme les S-Patches (voir [**?**]).

3.3 Résultats

Les formes de la figure 3.5 ont été générées à partir de squelettes *artificiels*: on spécifie la position des sommets et leur épaisseur d'enrobage. Les formes des figures 3.8 ont elles été générées à partir de squelettes calculés.

Le tore est fortement simplifié (on ne retient que 17 sommets sur 384). La surface de la figure 3.6, obtenue sans simplification présente de nombreuses discontinuités.

La vertèbre (figure 3.7), n'a pas pu être traitée correctement en raison des limitations actuelles de la méthode à des embranchements triples.

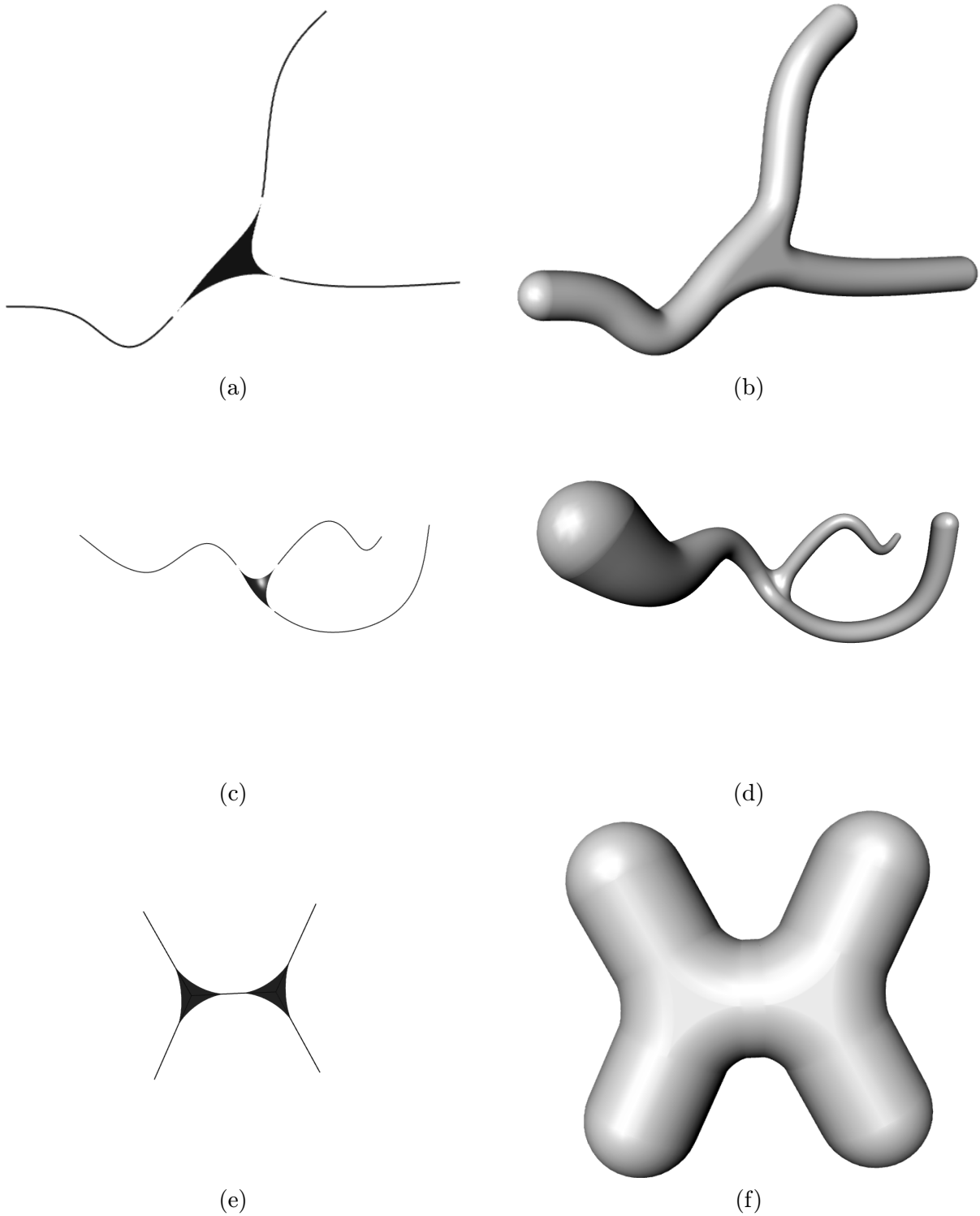


FIG. 3.5 - *Table des figures illustrant les surfaces obtenues sur un jeu d'esai à partir de squelettes fabriqués.*

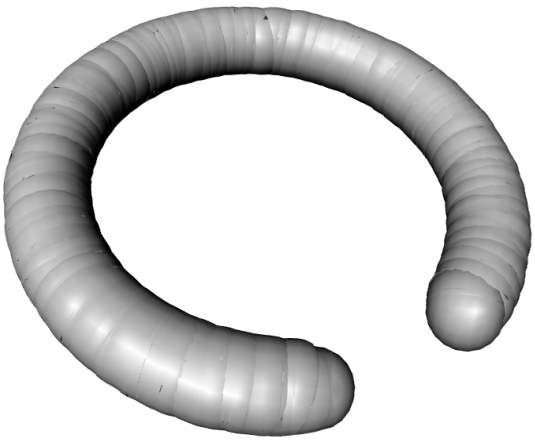


FIG. 3.6 - *Tore sans simplification.*

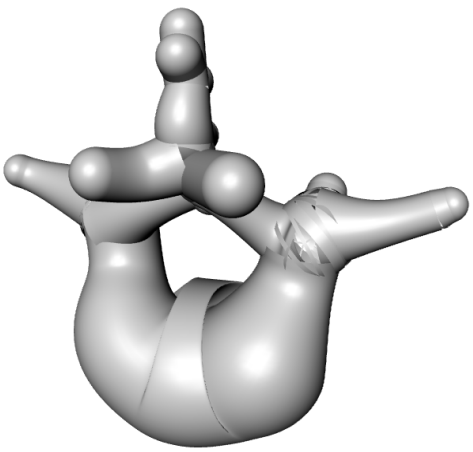


FIG. 3.7 - *Vertèbre avec simplification (60 points retenus sur 393). Embranchements non traités.*

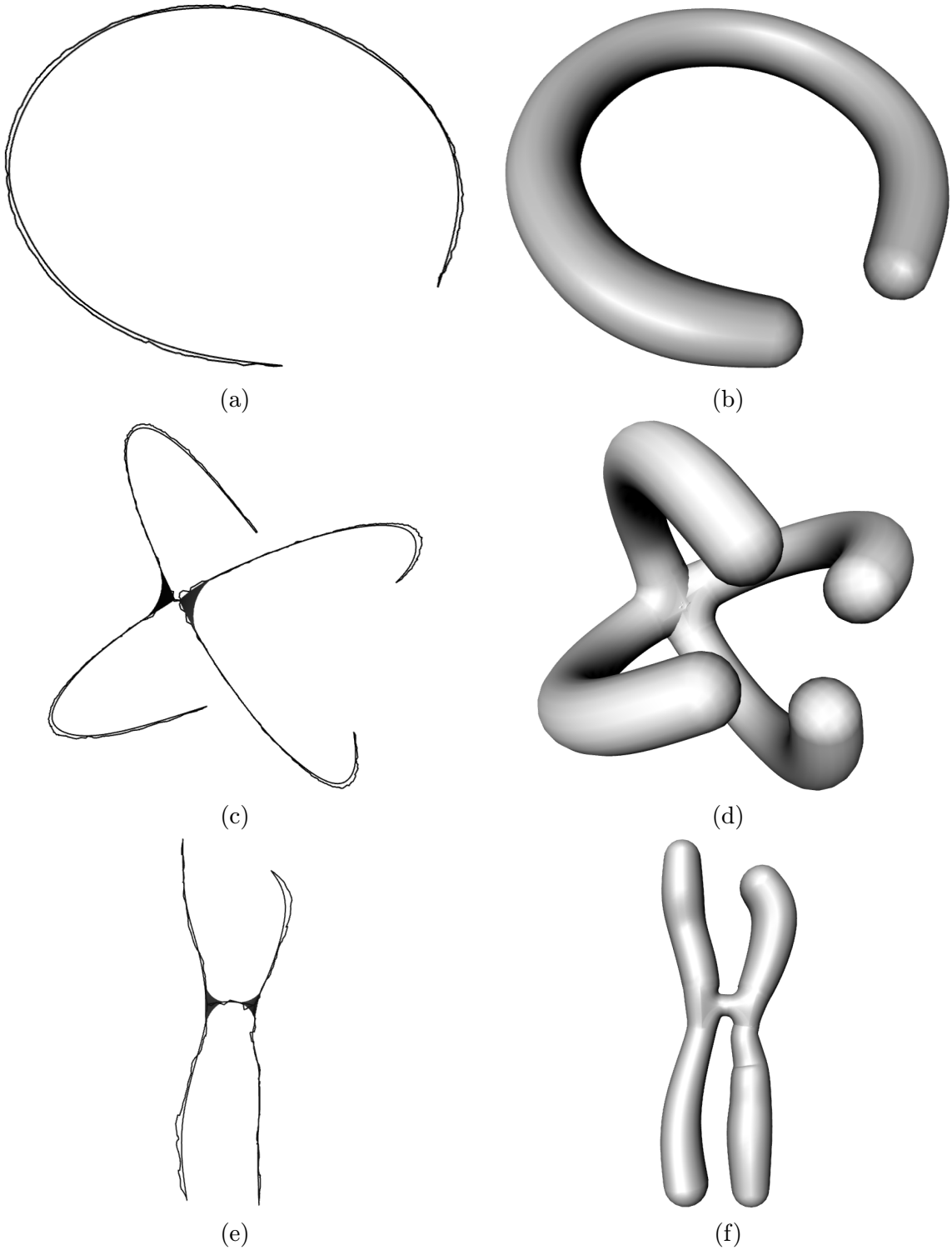


FIG. 3.8 - *Table des figures illustrant les surfaces obtenues à partir de squelettes calculés. On a reporté à gauche les squelettes non simplifiés superposés aux splines simplifiées, et à droite, l'enrobage corrspondant. (a) et (b) un tore coupé, (c) et (d) un bitore. (e) et (f) un chromosome*

Conclusion et perspectives

Nous avons donc au cours de ce projet, mis au point une technique de reconstruction d'objets à partir de squelettes filiformes.

Nous décomposons pour cela le squelette en utilisant deux sortes de primitives: des courbes B-splines pour approcher les lignes polygonales constituant ses branches, et des triangles de Bézier pour réaliser les branchements. Sur le principe, notre approche consiste à lisser le squelette pour obtenir une surface lisse, au lieu de chercher à lisser la surface elle-même. Les résultats du projet semblent valider cette approche dans le cas de branchements triple, en laissant entrevoir des perspectives d'extension à des branchements d'ordre quelconque. L'intérêt de cette technique est qu'elle est totalement automatique, les triangles étant positionnés en remontant les branches selon une heuristique.

Notre procédé de visualisation n'ayant pas fait appel à la formulation implicite de la forme, nous n'avons pas développé cette dernière. Nous réalisons une polygonalisation de la surface proche des techniques de scattering employées à iMAGIS, et qui pourrait servir à la visualisation intéractive de la surface implicite, si elle était calculée. Notons qu'il serait intéressant d'implémenter cette formulation implicite de la surface, notament pour utiliser la forme reconstruite et l'animer ou la déformer.

Le squelette filiforme nous semble également très intéressant comme structure de contrôle dans le cadre d'animations ou de déformations des formes où il pourrait être utilisé pour transmettre les contraintes appliquées à la forme et modéliser les articulations.
On peut se demander dans ce cadre comment évoluerait le squelette calculé par rapport au squelette de contrôle en cas de déformations.

Annexe A

Méthode de visualisation

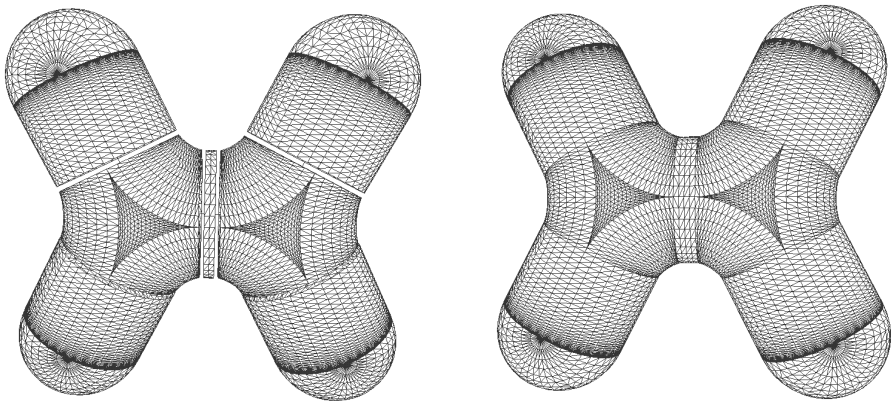
Comme nous avions à notre disposition l'épaisseur d'enrobage en chaque point du squelette et les relations de voisinnage entre ces points, nous avons été tenté de placer directement les points sur la surface au lieu de visualiser la surface implicite correspondante par d'autres moyens. Nous avons été conforté dans cette idée par le fait que le procédé de visualisation intéractive de *Fabule* utilise également une polygonalisation de la surface implicite (par des techniques de scattering, voir [**?**]) pour profiter de l'accélération des stations de travail spécialisées.

Ainsi, nous avons réalisé au cours de ce projet une polygonalisation correspondant à l'*enrobage* du squelette. Cette dernière s'est effectuée en deux étapes:

- une première étape pour générer l'enrobage des branches (un *tube*).
  Pour ce faire, nous parcourons successivement tous les sommets échantillonnés sur la spline représentant la branche.
  En chaque sommet, on calcule la *tangente géométrique* à la spline à l'aide du sommet précédent et du sommet suivant. On calcule ensuite la normale à l'aide de cette tangente et de la normale précédente (la première normale étant obtenue par produit vectoriel de la première tangente avec un des vecteur fixe du repère). On échantillonne ensuite des points sur le cercle situé dans le plan défini par la tangente, et dont le rayon est égal au rayon d'enrobage.
  En chaque extrémité de la branche, on rajoute une sphère s'il n'y a pas de branchement.

- une deuxième étape pour générer l'enrobage des triangles de Bézier.
  De la même manière, on parcourt tous les sommets echantillonnés sur le triangle. On calcule en ces points la normale à la surface, et on positionne de part et d'autre du triangle selon cette normale, des points à une distance égale au rayon d'enrobage. On obtient ainsi deux triangles décalés, qui sont alors reliés par des *demi-tubes* générés d'une manière analogue aux *tubes* des branches exposés ci-avant.

Après ces deux étapes, on obtient une polygonalisation par morceaux, comme sur la figure A.1.(a). Il suffit de raccorder ces éléments pour obtenir une polygonalisation complète de la surface (voir figure A.1.(b)).



(a) (b)

FIG. A.1 - *Illustration des étapes de construction de la polygonalisation*

On remarque toutefois que la méthode obtenue n'est pas exacte: en effet, il aurait mieux valu considérer les normales à la surface que les normales au squelette (voir figure A.2). Cela pourrait se faire en tenant compte des variations du rayon le long du squelette pour modifier la normale employée, par exemple.

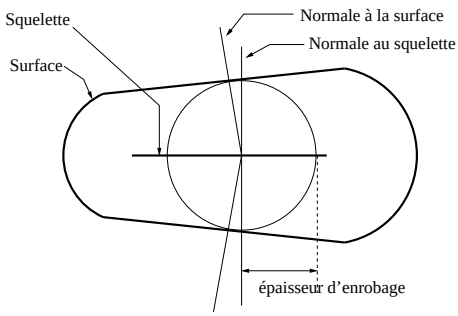


FIG. A.2 - *Exemple montrant la différence entre une normale au squelette et une normale à la surface*

Annexe B

Article soumis à Implicit Surfaces'96

Cette annexe présente l'article soumis au *workshop* Implicit Surfaces'96.

Bibliographie

[ATTALI95] D. ATTALI. *Squelettes et graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - Grenoble I, Octobre 1995.

[ATTALIBERTOLINOMONTANVERT94] D. ATTALI, P. BERTOLINO, and A. MONTANVERT. Using polyballs to approximate shapes and skeletons. In *12th International Conference on Pattern Recognition*, pages 628–630. Israël, Jerusalem, October 1994.

[ATTALIMONTANVERT94] D. ATTALI and A. MONTANVERT. Semicontinuous skeletons of 2D and 3D shapes. In C. Arcelli et al., editor, *Aspects of Visual Form Processing*, pages 32–41. World Scientific, Singapore, 1994.

[BERTIN94] E. BERTIN. *Diagrammes de Voronoï 2D et 3D: Applications en analyse d'images*. PhD thesis, Université Joseph FOURIER - Grenoble I, Janvier 1994.

[BITTARTSINGOSGASCUEL95] E. BITTAR, N. TSINGOS, and M.-P. GASCUEL. Automatic reconstruction of unstructured 3d data: Combining a medial axis and implicit surfaces. *Eurographics'95*, 1995.

[BLINN82] J. BLINN. A generalisation of algebraic surface drawing. *ACM Transactions on graphics*, pages 235–256, July 1982.

[BLOOMENTHAL95a] J. BLOOMENTHAL. Bulge elimination in implicit surface blends. *Eurogra-*

phic Workshop: Implicit Surfaces'95, pages 7–20, April 1995.

[BLOOMENTHAL95b] J. BLOOMENTHAL. *Skeletal design of natural forms*. PhD thesis, The university of Calgary, January 1995.

[BLOOMENTHALSHOEMAKE91] J. BLOOMENTHAL and K. SHOEMAKE. Convolution surfaces. *Computer Graphics*, 25(4):251–255, July 1991.

[BLOOMENTHALWYVILL90] J. BLOOMENTHAL and B. WYVILL. Interactive techniques for implicit modeling. *Computer Graphics*, 24(2):109–116, March 1990.

[BRANDT94] J.-W. BRANDT. Convergence and continuity criteria for discrete approximations of the continuous planar skeleton. *CVGIP: Image Understanding*, 59(1):116–124, January 1994.

[CHASSERYMONTANVERT96] J.-M. CHASSERY and A. MONTANVERT. Imagerie et vision 2D. *polycopié du cours de DEA Imagerie, Vision et Robotique*, 1995-1996.

[DESBRUNTSINGOSGASCUEL95] M. DESBRUN, N. TSINGOS, and M.-P. GASCUEL. Adaptative sampling of implicit surfaces for interactive modeling and animation. *Eurographic Workshop: Implicit Surfaces'95*, pages 171–185, April 1995.

[FARIN88] G. FARIN. *Curves and surfaces for computer aided geometric design*. Academic press, 1988.

[FARIN95] G. FARIN. *Triangular Bernstein-Bézier patches*. PhD thesis, Department of mathematics, University of Utah, January 1995.

[GASCUEL] J.-D. GASCUEL. Fabule: un environnement de recherche pour l'animation et la simulation.

[GASCUEL92] M.-P. GASCUEL. Surfaces implicites. *Cours de DEA: Techniques avancées en synthèse d'image*, 1992.

[GASCUEL95] J.-D. GASCUEL. Implicit patches: An optimized an powerful ray intersection algorithm for implicit surfaces. *Eurographic Workshop: Implicit Surfaces'95*, pages 143–159, April 1995.

[KALRABARR89] D. KALRA and A.-H. BARR. Guaranteed ray intersections with implicit surfaces. *Computer Graphics*, 23(3):297–306, July 1989.

[LOOPDEROSE89] C.-T. LOOP and T.-D. DEROSE. A multisided generalization of be'zier surfaces. *ACM Transactions on graphics*, 8(3):204–234, July 1989.

[MATTIOLI93] J. MATTIOLI. *Problèmes inverses et relations diff''erentielles en morphologie mathématique*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1993.

[MONTANVERT87] A. MONTANVERT. *Contribution au traitement de formes discrètes: Squelettes et codage par graphe de la ligne médiane*. PhD thesis, Université Scientifique, Technologique et médicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble, Octobre 1987.

[MURAKI91] S. MURAKI. Volumetric shape description of range data using "blobby model". *Computer Graphics*, 25(4):227–235, July 1991.

[ROCKWOOD89] A.-P. ROCKWOOD. The displacement method for implicit blending surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 8(4):282–297, October 1989.

[SCHMITT89] M. SCHMITT. Some examples of algorithms analysis in computational geometry by means of mathematical morphological techniques. In J.-D. BOISSONNAT and J.-P. LAUMONT,

editors, *Lecture Notes in Computer Science*, volume 391 of *Geometry and Robotics*, pages 225–246. Springer-Verlag, May 1989.

[SchmittMattioli93] M. Schmitt and J. Mattioli. *Morphologie Mathématique*. LMI. Masson, 1993.

[SzeliskiTonnesen91] R. Szeliski and D. Tonnesen. Oriented particles systems. Technical report, Digital Equipment Corporation, December 1991.

[Thiel94] E. Thiel. *Les distances de chanfrein en analyse d'images: fondements et applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, Setpembre 1994.

[Tsingos95] N. Tsingos. Modélisation de lèvres parlantes par des surfaces implicites. *DEA d'informatique*, 21 juin 1995.

[TsingosBittarGascuel95] N. Tsingos, E. Bittar, and M.-P. Gascuel. Implicit surfaces for semi-automatic medical organ reconstruction. *CG: Developments in Virtual Environments*, 1995.

[VelhoTerzopoulosGomes95] L. Velho, D. Terzopoulos, and J. Gomes. Constructing implicit shape models from boundary data. *Computer Vision and Image Processing*, 57(3):220–234, May 1995.

[Woodwark] J.-R. Woodwark. Blends in geometric modelling. In R.-R. Martin, editor, *The Mathematics of Surfaces* II, pages 255–297.

[WyvillWyvillM86] G. Wyvill, B. Wyvill, and C. McPheeters. Data structure for soft objects. *The visual computer*, pages 227–234, August 1986.