



**HAL**  
open science

## Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement.

Karim Drifi, Isabelle Herlin

► **To cite this version:**

Karim Drifi, Isabelle Herlin. Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement.. [Rapport de recherche] RR-7623, INRIA. 2011. inria-00593624

**HAL Id: inria-00593624**

**<https://inria.hal.science/inria-00593624>**

Submitted on 16 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Assimilation d'images dans un modèle réduit pour  
l'estimation du mouvement*

Karim Drifi — Isabelle Herlin

N° 7623

Mai 2011

Observation and Modeling for Environmental Sciences

A large, light gray stylized 'R' logo is positioned to the left of a blue rectangular area. The text 'Rapport de recherche' is written in a white serif font across the blue area, with a horizontal line underlining the word 'recherche'.

*Rapport  
de recherche*



## Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement

Karim Drifi \* † , Isabelle Herlin \* †

Theme : Observation and Modeling for Environmental Sciences  
Équipe-Projet Clime

Rapport de recherche n° 7623 — Mai 2011 — 15 pages

**Résumé :** Cet article décrit une méthode d'estimation du champ de vitesse apparent, sous-jacent à l'évolution temporelle d'une séquence d'images. Un modèle d'évolution, dit **complet**, est choisi pour représenter la dynamique du champ de vitesse et des images. La méthode de décomposition orthogonale propre est appliquée et fournit des bases de représentation des champs de vitesse et des images. La projection de Galerkin du modèle complet sur ces bases réduites définit alors le modèle **réduit**. Un algorithme d'assimilation variationnelle de données est conçu afin d'estimer les coefficients des champs de vitesse à partir des coefficients des images observées. Le mouvement est enfin restitué à partir de ces coefficients estimés. La méthode est validée sur des données synthétiques afin de quantifier les résultats.

**Mots-clés :** assimilation de données, estimation du mouvement, modèle réduit, projection de Galerkin

\* INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, France

† CERE, Joint Laboratory ENPC-EDF R&D, Université Paris-Est, France

## **Image Assimilation in a Reduced model for Motion estimation**

**Abstract:** This paper concerns the estimation of apparent motion from an image sequence. A model, named **full model**, is defined to describe the dynamics of motion field and images. The Proper Orthogonal Decomposition (POD) is used to derive basis to characterize motion fields and images. The Galerkin projection of the full model on these basis defines the so-called **reduced model**. Coefficients of motion fields are retrieved from those of images with the help of a 4D-var assimilation method. Last motion results are obtained from the coefficients. The method has been tested on twin experiments to validate the approach.

**Key-words:** data assimilation, motion estimation, reduced model, Galerkin projection

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Calcul des bases réduites</b>	<b>5</b>
2.1	Décomposition orthogonale propre . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Projection de Galerkin</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Assimilation variationnelle de données</b>	<b>7</b>
4.1	Formulation . . . . .	7
4.2	Méthode variationnelle . . . . .	7
4.3	Algorithme incrémental . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Assimilation dans le modèle réduit d'évolution</b>	<b>9</b>
5.1	Opérateur $\mathbb{M}_R$ . . . . .	9
5.2	Opérateurs dérivés et opérateur adjoints . . . . .	9
5.3	Matrices de covariances d'erreur . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Résultats</b>	<b>10</b>
6.1	Description de l'expérience jumelle . . . . .	10
6.2	Résultats . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>11</b>

## 1 Introduction

L'estimation du mouvement est un problème fondamental du traitement d'image. Il s'agit d'estimer le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  à partir d'une séquence d'images  $I(\mathbf{x}, t)$ . Dans le cas d'acquisitions satellite, les applications concernent principalement l'océanographie et la météorologie. La littérature décrit l'estimation du mouvement par des algorithmes de traitement d'image, par exemple Horn & Schunck [4], ou par des algorithmes d'assimilation de données [1, 2, 6]. Ces dernières méthodes exploitent un modèle dynamique, issu d'une connaissance a priori sur la séquence. Leurs principales limitations sont le temps de calcul et le volume de mémoire nécessaires. Un moyen d'éviter ces difficultés est d'utiliser une technique dite de réduction. Un modèle réduit, obtenu par projection de Galerkin, a été utilisé par D'Adamo et Papadakis dans [3, 5] pour estimer la dynamique à partir de snapshots acquis par «Particle Image Velocimetry» (PIV). Le modèle dynamique réduit décrit l'évolution temporelle des coefficients de projection  $a_i(t)$  sur une base  $\Phi = \{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1\dots K}$  afin d'approximer l'évolution temporelle du champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Cette base  $\Phi$  est obtenue par décomposition orthogonale propre des snapshots.

Dans cet article, on souhaite estimer un mouvement,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  à partir d'une séquence discrète  $I = \{I^i\}_i = \{I(\mathbf{x}, t_i)\}_i$ , acquise aux dates  $t_i$ . On considère le vecteur d'état  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t))^T$ , où le traceur passif  $q$  est une quantité scalaire similaire aux images de  $I$ . L'évolution temporelle de  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)$  est décrite par un modèle complet  $\mathbb{M}_C$ , choisi à partir d'heuristiques. Le vecteur  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)$  est projeté sur un espace réduit, engendré par des bases  $\Phi$  et  $\Psi$ , dont l'obtention est décrite ultérieurement :

- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  est projeté sur  $\Phi$  et associé aux coefficients temporels  $a_i(t)$ ,
- $q(\mathbf{x}, t)$  est projeté sur  $\Psi$  et associé aux coefficients temporels  $b_j(t)$ .

La projection de Galerkin du modèle complet  $\mathbb{M}_C$ , sur  $\Phi$  et  $\Psi$ , fournit un modèle réduit  $\mathbb{M}_R$  décrivant l'évolution des coefficients  $a_i(t)$  et  $b_j(t)$ . Afin de réaliser l'estimation du mouvement, la séquence d'images  $I$  est projetée sur  $\Psi$ , fournissant des valeurs  $b_j^{obs}(t_i)$ , qui sont ensuite assimilées dans  $\mathbb{M}_R$ . Les coefficients  $a_i(t)$  ainsi obtenus permettent de restituer le champs de mouvement  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

Comment sont obtenues les bases  $\Psi$  et  $\Phi$  ? La méthode de décomposition orthogonale propre, appliquée à  $I$ , permet de calculer  $\Psi$ . Un algorithme de calcul de mouvement est utilisé sur les deux premières images  $I^1$  et  $I^2$  de la séquence afin d'obtenir une initialisation  $\mathbf{v}_0$ . Une séquence  $V = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i)\}_i$  de snapshots est ensuite calculée en intégrant  $\mathbf{v}_0$  avec le modèle  $\mathbb{M}_C$ . Une décomposition orthogonale propre est enfin appliquée à  $V$  afin d'obtenir la base  $\Phi$ .

La Section 2 décrit le calcul des bases réduites au moyen de la décomposition orthogonale propre. La Section 3 résume la projection de Galerkin du modèle complet afin d'obtenir le modèle réduit. La Section 4 décrit le cadre de l'assimilation variationnelle de données ainsi que l'algorithme incrémental utilisé, dans le cas particulier d'un modèle réduit. La Section 5 spécifie la méthode d'assimilation pour l'application d'estimation du mouvement. Enfin, la Section 6 présente l'application de la méthode pour des expériences jumelles.

## 2 Calcul des bases réduites

On résume, dans cette section, l'obtention des bases réduites  $\Psi = \{\psi_j(\mathbf{x})\}_{j=1\dots L}$ , pour la représentation du traceur  $q$ , et  $\Phi = \{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1\dots K}$ , pour le mouvement  $\mathbf{v}$ .

### 2.1 Décomposition orthogonale propre

Dans un cadre général, on considère une séquence discrète  $E = \{E^m\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$ .  $E$  peut être scalaire,  $E = I$ , ou vectorielle  $E = V$ . Un élément  $E^m$  est représenté sur la base canonique  $\{e_n\}_{n=1\dots N}$  :

$$\forall m \in \{1, \dots, M\}, \quad E^m = \sum_{n=1}^N E_n^m e_n \quad (1)$$

avec  $N$  le nombre de pixels.

Considérons la matrice  $\underline{E}$  de taille  $N \times M$ , telle que l'élément de la  $n^{\text{ième}}$  ligne et  $m^{\text{ième}}$  colonne est  $E_n^m$ . Soit  $G = \underline{E} \underline{E}^T$  la matrice de Gram de taille  $N \times N$ . Les  $P$  premiers vecteurs propres, expliquant 90% de la variance de  $E$ , sont choisis pour constituer la base réduite  $\Gamma = \{\gamma_p\}_{p=1\dots P}$ .

## 3 Projection de Galerkin

Soit  $\mathbb{M}_C$  le modèle dynamique complet associé au vecteur d'état  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)$ . On a :

$$\frac{\partial \mathbf{X}_C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}_C(\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Dans l'article,  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t))$ .  $\mathbb{M}_C$  caractérise la dynamique de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et celle de  $q(\mathbf{x}, t)$ . Les équations d'évolution choisies sont l'advection de la vitesse par elle-même et l'advection du traceur par la vitesse.  $\mathbf{X}_0(\mathbf{x})$  est la condition initiale, à  $t = 0$ , de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et  $q(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x})$$

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla q(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \\ q(\mathbf{x}, 0) = q_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

Soient  $a_i(t)$  les coefficients de projection de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sur  $\phi_i$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  peut être approximé par  $\sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$ . De même  $q(\mathbf{x}, t)$  est approximé par  $\sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j(\mathbf{x})$  avec  $b_j$  les



coefficients de projection de  $q(\mathbf{x}, t)$  sur  $\psi_j$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et  $q(\mathbf{x}, t)$  sont remplacés par leurs approximations dans le Système (2) afin d'obtenir les approximations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^K \frac{da_i}{dt}(t) \phi_i(\mathbf{x}) + \left[ \sum_{i=1}^K (a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})) \cdot \nabla \right] \left( \sum_{j=1}^K a_j(t) \phi_j(\mathbf{x}) \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^L \frac{db_i}{dt}(t) \psi_i(\mathbf{x}) + \left[ \sum_{i=1}^K (a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})) \right] \cdot \nabla \left( \sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j(\mathbf{x}) \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^K a_i(0) \phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_{i0} \phi_i(\mathbf{x}) \\ \sum_{j=1}^L b_j(0) \psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^L b_{j0} \psi_j(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (3)$$

On fait ensuite le produit scalaire du Système d'équations (3) avec les  $\phi_k$  et  $\psi_l$  afin d'obtenir le système d'ODE suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_k}{dt}(t) + \left\langle \left( \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i \cdot \nabla \right) \left( \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i \right), \phi_k \right\rangle = 0, k = 1, \dots, K \\ \frac{db_l}{dt}(t) + \left\langle \left( \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i \right) \cdot \nabla \left( \sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j \right), \psi_l \right\rangle = 0, l = 1, \dots, L \\ a_k(0) = a_{k0}, \\ b_l(0) = b_{l0}, \end{array} \right. \quad (4)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans l'espace des fonctions de carré sommable  $L_2$  :

$$\langle f, g \rangle = \int f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Le Système (4) se simplifie en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_k}{dt}(t) + a^T(t)B(k)a(t) = 0, \quad k = 1 \dots K. \\ \frac{db_l}{dt}(t) + a^T(t)G(l)b(t) = 0, \quad l = 1 \dots L. \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{array} \right. \quad (6)$$

avec :

- $a(t) = (a_1(t), \dots, a_K(t))^T$ ,
- $B(k)$  la matrice de taille  $K \times K$  dont les éléments sont  $B(k)_{i,j} = \langle (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j, \phi_k \rangle$ ,
- $b(t) = (b_1(t), \dots, b_L(t))^T$ ,
- $G(l)$  la matrice de taille  $K \times L$  dont les éléments sont  $G(l)_{i,j} = \langle \phi_i \cdot \nabla \psi_j, \psi_l \rangle$ ,
- $a_0$  vecteur de taille  $K$ ,
- $b_0$  vecteur de taille  $L$ ,

Soit  $\mathbf{X}_R(\mathbf{x}, t) = (a(t), b(t))^T$ , appelé vecteur d'état réduit, le Système (6) se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_R}{dt}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \mathbf{X}_R(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}_{R0}(\mathbf{x}) = (a_0, b_0)^T \end{cases} \quad (7)$$

$\mathbb{M}_R$  est appelé modèle réduit et correspond à la projection de Galerkin de  $\mathbb{M}_C$  sur  $\Phi$  et  $\Psi$ .

## 4 Assimilation variationnelle de données

On décrit succinctement, dans cette section, les principes de l'assimilation variationnelle de données, pour le cas d'un modèle réduit ne dépendant que du temps.

### 4.1 Formulation

Soit  $\mathbf{X}_R$  un vecteur d'état dépendant du temps et défini sur  $[0, T]$ .  $\mathbf{X}_R$  obéit à l'équation :

$$\frac{d\mathbf{X}_R}{dt}(t) + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R)(t) = \mathcal{E}_m(t) \quad (8)$$

$\mathbb{M}_R$  est supposé différentiable et décrit la dynamique approchée du vecteur d'état  $\mathbf{X}_R$ .  $\mathcal{E}_m$  est l'erreur modèle, qui quantifie l'écart entre la dynamique effective de  $\mathbf{X}_R$  et  $\mathbb{M}_R$ .

On suppose que l'on dispose d'observations  $\mathbf{Y}(t)$ , qui sont liées à  $\mathbf{X}_R$  par l'équation d'observation :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbb{H}\mathbf{X}_R(t) + \mathcal{E}_O(t) \quad (9)$$

$\mathbb{H}$  est la matrice associée à la projection :  $\mathbf{X}_R(\mathbf{x}, t) = (a(t), b(t))^T \rightarrow b(t)^T$ .  $\mathcal{E}_O$  représente simultanément l'erreur liée à l'observation et l'écart entre le vecteur d'état et cette observation.

On suppose connaître une estimation  $\mathbf{X}_{R,b}$  du vecteur d'état à la date  $t = 0$  :

$$\mathbf{X}_R(0) = \mathbf{X}_{R,b} + \mathcal{E}_b \quad (10)$$

$\mathcal{E}_b$  est l'erreur associée à cette condition initiale. L'intégration de  $\mathbf{X}_{R,b}$  sur la fenêtre temporelle  $[0, T]$  permet d'obtenir l'ébauche  $\mathbf{X}_R(t)$ .

On fait l'hypothèse que les erreurs  $\mathcal{E}_m$ ,  $\mathcal{E}_O$  et  $\mathcal{E}_b$  sont décorréelées en temps et gaussiennes de moyenne nulle. Elles sont caractérisées par leurs matrices de covariance respectives  $Q$ ,  $R$  et  $B$ .

### 4.2 Méthode variationnelle

On cherche à estimer  $\mathbf{X}_R$ . Pour cela on minimise la fonction de coût  $E$  :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_R) = & \frac{1}{2} \left[ \int_{[0,T]} \left( \frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) \right)^T (t) Q^{-1} \left( \frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) \right) (t) dt \right. \\ & + \int_{[0,T]} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}_R))^T (t) R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}_R)) (t) dt \\ & \left. + (\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b})^T B^{-1} (\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b}) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

Cette fonction exprime une contrainte dynamique faible, avec une erreur modèle représentée par le premier terme. Le système d'optimalité à résoudre pour minimiser  $E$  s'obtient en calculant les équations d'Euler-Lagrange :

$$\lambda(T) = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{d\lambda}{dt} + \left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right)^* \lambda = \mathbb{H}^T R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}_R)) \quad (13)$$

$$\mathbf{X}_R(0) = B\lambda(0) + \mathbf{X}_{R,b} \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) = Q\lambda(t) \quad (15)$$

avec :

- $\lambda$  la variable adjointe du système, de même dimension que  $\mathbf{X}_R$ ,
- $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right)$  le modèle tangent linéaire et  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right)^*$  son adjoint.

Le calcul du système d'optimalité (Eq.12 à 15) est détaillé dans [1]. Celui-ci est résolu en utilisant l'algorithme incrémental résumé brièvement dans la sous-section suivante.

### 4.3 Algorithme incrémental

L'algorithme incrémental ré-estime, de manière itérative, l'ébauche  $\mathbf{X}_{R,b}(t)$  afin de minimiser la fonctionnelle  $E$ . A chaque itération, un incrément  $\delta\mathbf{X}_R(t)$  est calculé, puis ajouté à  $\mathbf{X}_{R,b}(t)$  :

$$\mathbf{X}_{R,b}(t) = \mathbf{X}_{R,b}(t) + \delta\mathbf{X}_R(t)$$

On peut résumer l'algorithme de la manière suivante :

- **INITIALISATION** ( $k = 0$ )

1.  $\mathbf{X}_{R,b}(0) = \mathbf{X}_{R,b}$ .
2. Calcul de  $\mathbf{X}_{R,b}(t)$  par intégration sur  $[0, T]$  :

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{R,b}}{\partial t}(t) + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_{R,b})(t) = 0.$$

3.  $\delta\mathbf{X}(t) = 0$  sur  $[0, T]$ .

- **FAIRE**

1. Calcul de la variable adjointe à partir de  $\lambda(T) = 0$  par intégration rétrograde :

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \left. \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}_{R,b}}^* \lambda = \mathbb{H}^T R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}\mathbf{X}_{R,b} - \mathbb{H}\delta\mathbf{X}_R)$$

2. Mise à jour de l'ébauche :

$$\mathbf{X}_{R,b}(t) = \mathbf{X}_{R,b}(t) + \delta\mathbf{X}_R(t)$$

3. Calcul de l'incrément  $\delta\mathbf{X}_R(t)$  à partir de la condition initiale  $\delta\mathbf{X}_R(0) = B\lambda(0)$  par intégration :

$$\left. \frac{\partial \delta\mathbf{X}_R}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}_R} \right|_{\mathbf{X}_{R,b}} (\delta\mathbf{X}) = Q\lambda. \quad (16)$$

4.  $k = k + 1$

- **TANT QUE**  $\|\delta \mathbf{X}_R\| > \epsilon$
- **RÉSULTAT** :  $\mathbf{X}_{R,b} + \delta \mathbf{X}_R$ .

Lors de l'initialisation, une première trajectoire est calculée par intégration du modèle  $\mathbb{M}_R$  à partir de l'ébauche sur la condition initiale. Ensuite la variable adjointe  $\lambda$  est calculée par une intégration "backward". L'écart aux observations est pris en compte lors de ce calcul. La valeur de  $\lambda$  à  $t = 0$  permet d'initialiser l'incrément  $\delta \mathbf{X}_R$ , calculé par intégration du modèle tangent, en prenant en compte la variable adjointe. On itère ces étapes jusqu'à convergence.

## 5 Assimilation dans le modèle réduit d'évolution

Dans le cas de l'estimation du mouvement, le vecteur d'état est constitué de l'ensemble des coefficients  $a_i$  et  $b_j$  du modèle réduit :  $\mathbf{X}_R(t) = (a_1(t), \dots, a_K(t), b_1(t), \dots, b_L(t))^T$ . Les observations utilisées pour l'assimilation sont les coefficients de projection  $b_j^{obs}(t_i)$  des acquisitions images  $I^i$ .

### 5.1 Opérateur $\mathbb{M}_R$

Le modèle réduit  $\mathbb{M}_R$ , décrit Section 3, est formé de deux composantes  $\mathbb{M}_R^{(1)}$  et  $\mathbb{M}_R^{(2)}$ , qui décrivent respectivement la dynamique de  $a$  et  $b$  :

$$\mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_1^{(1)}(a) \\ \mathbb{M}_K^{(1)}(a) \\ \mathbb{M}_1^{(2)}(a, b) \\ \mathbb{M}_L^{(2)}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_1^{(1)}(a) \\ \dot{\mathbb{M}}_K^{(1)}(a) \\ \mathbb{M}_1^{(2)}(a, b) \\ \dot{\mathbb{M}}_L^{(2)}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T B(1)a \\ \dot{a}^T B(K)a \\ a^T G(1)b \\ \dot{a}^T G(L)b \end{pmatrix}$$

### 5.2 Opérateurs dérivés et opérateur adjoints

Afin de mettre en oeuvre l'algorithme incrémental il est nécessaire de calculer les opérateurs tangent  $\left(\frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X}\right)$  et adjoint  $\left(\frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X}\right)^*$  de  $\mathbb{M}_R$ .

#### Opérateur tangent

$$\left(\frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbb{M}_R^{(1)}}{\partial a}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial b}\right) \end{pmatrix} \quad (17)$$

avec :

$$\left(\frac{\partial \mathbb{M}_R^{(1)}}{\partial a}\right) = \begin{pmatrix} a^T [B(1) + B(1)^T] \\ \dot{a}^T [B(K) + B(K)^T] \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{a}} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T \mathbf{G}(1)^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T \mathbf{G}(L)^T \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{b}} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \mathbf{G}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^T \mathbf{G}(L) \end{pmatrix} \quad (20)$$

**Opérateur adjoint** L'opérateur  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X} \right)$  étant une application linéaire dans un espace de dimension finie, son adjoint  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X} \right)^*$  se calcule en transposant la matrice le définissant. La première étape consiste à calculer les adjoints  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(1)}}{\partial \mathbf{a}} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{a}} \right)$  et  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{b}} \right)$  :

$$\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(1)}}{\partial \mathbf{a}} \right)^* = ([B(1)^T + B(1)] \mathbf{a} \dots [B(K)^T + B(K)] \mathbf{a}) \quad (21)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{a}} \right)^* = (G(1)\mathbf{b}, \dots, G(L)\mathbf{b}) \quad (22)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{b}} \right)^* = (G(1)^T \mathbf{a}, \dots, G(L)^T \mathbf{a}) \quad (23)$$

L'adjoint  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X} \right)^*$  s'écrit alors :

$$\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial X} \right)^* = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(1)}}{\partial \mathbf{a}} \right)^* & \left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{a}} \right)^* \\ 0 & \left( \frac{\partial \mathbb{M}_R^{(2)}}{\partial \mathbf{b}} \right)^* \end{pmatrix} \quad (24)$$

### 5.3 Matrices de covariances d'erreur

Les matrices de covariance d'erreur  $Q$ ,  $R$  et  $B$  proviennent d'une modélisation des erreurs  $\mathcal{E}_m$ ,  $\mathcal{E}_o$  et  $\mathcal{E}_b$  suivant une loi normale. On estime la variance de ces erreurs à partir des observations pour les  $b_j$  et de la projection sur  $\Phi$  de la séquence  $V$  pour les  $a_i$ .

## 6 Résultats

### 6.1 Description de l'expérience jumelle

Une simulation du modèle complet, Équation (2), est réalisée sur une fenêtre temporelle  $[0, T]$ , à partir de conditions initiales  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0), q(\mathbf{x}, 0))$  (voir Figure 1). Une séquence  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t))$  est ainsi obtenue. Le choix des dates d'observation  $t_i$  fournit les images  $I^i = q(\mathbf{x}, t_i)$ , utilisées pour calculer la base  $\Psi$ , et les champs  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i)$ ,

nécessaires à l'obtention de la base  $\Phi$ . 4 vecteurs sont conservés pour chaque base ( $K = 4, L = 4$ ), représentés sur la Figure 2. Le modèle réduit (6) est alors défini. Les observations sont les coefficients  $b_j^{obs}$  obtenus par projection de la séquence

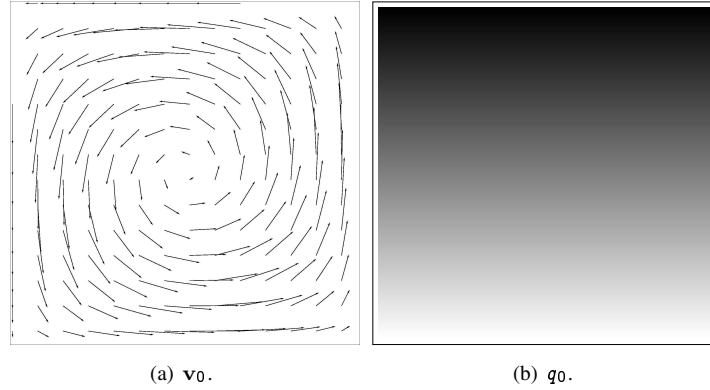


FIG. 1 – Conditions initiales.

d'images  $I$  sur  $\Psi$ . La première observation est choisie comme ébauche pour  $b$  à la date  $t = 0$ . L'ébauche  $\mathbf{X}_{R,b} = (a_b, \hat{b}_b)^T$  est donc obtenue par projection de  $(0, I^1)^T$  et vaut  $\mathbf{X}_{R,b} = (0, b^{obs}(t_1))^T$ . L'algorithme incrémental, décrit Section 4.3, est utilisé pour réaliser l'assimilation.

## 6.2 Résultats

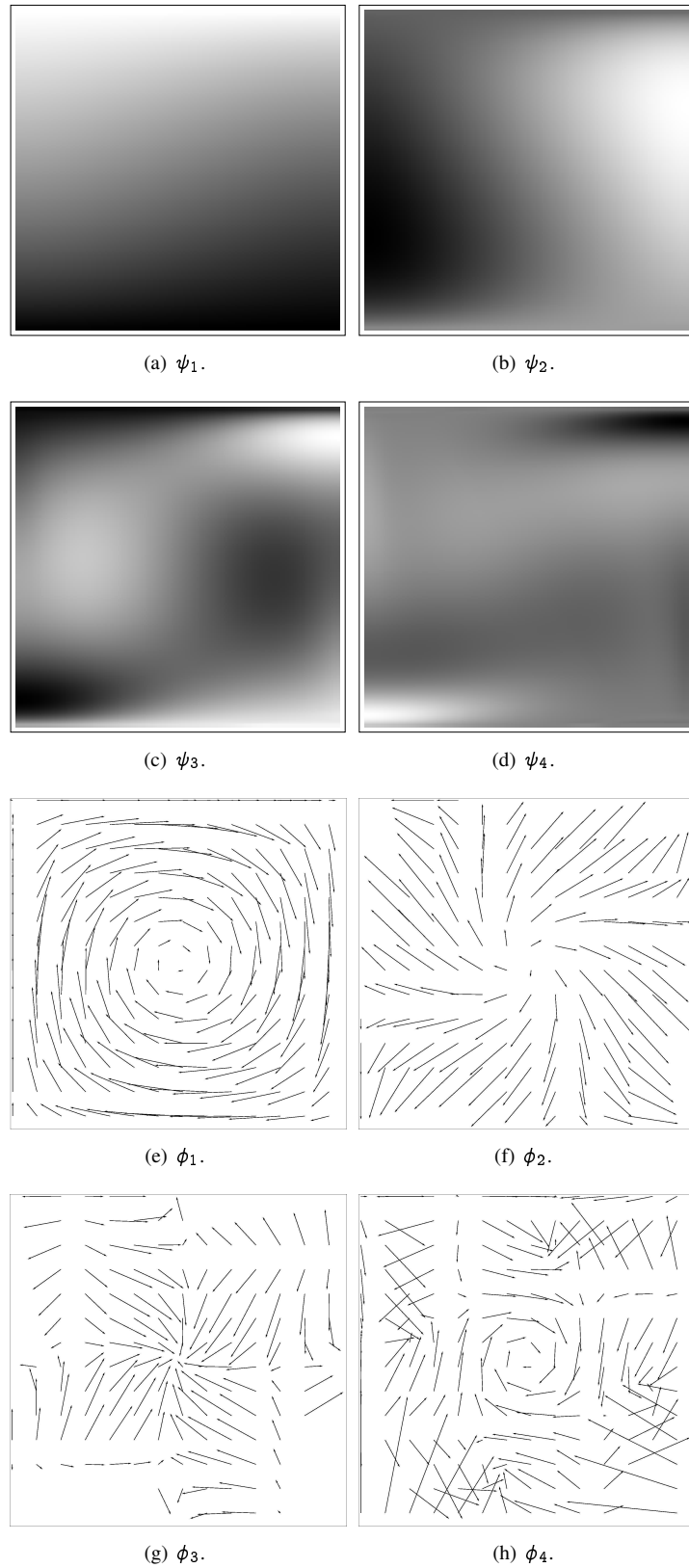
Les courbes  $a_i^a$ , obtenues après le processus d'assimilation sont comparées aux courbes  $a_i^p$ , obtenues par projection de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sur  $\Phi$ , sur la Figure 3. Les courbes  $a_i^a$  sont très proches des courbes  $a_i^p$ . En particulier  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont très bien estimées. L'évolution de  $a_4^a$  est très proche de  $a_4^p$  avec un biais constant de 4.

Les courbes  $a_i^a$  obtenues par assimilation permettent de restituer des champs de vitesses  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$ . Ces champs sont comparés Figure 4 à la séquence originale  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Quelques statistiques d'erreurs sont présentées Tableau 1 pour différentes dates de la fenêtre d'assimilation. Les champs  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$  estiment avec précision la séquence synthétique. L'erreur relative en norme ne dépasse pas 1.9% et l'erreur angulaire est inférieure à 3.70 degrés.

## 7 Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons conçu et présenté une méthode d'assimilation de données dans un modèle dynamique réduit. Cette approche permet d'estimer des champs de vitesse à partir d'une séquence d'image discrète. Une expérience jumelle, réalisée sur des données synthétiques, démontre l'intérêt de la méthode. Les champs de vitesse sont correctement estimés à partir de vecteurs d'état à 8 composantes.

Le calcul de la base  $\Phi$  du mouvement utilise une estimation bruitée de la condition initiale  $\mathbf{v}_0$  par un algorithme de traitement d'image. Une perspective de l'étude est donc de réaliser une base robuste  $\Phi$  à partir de  $\mathbf{v}_0$ .



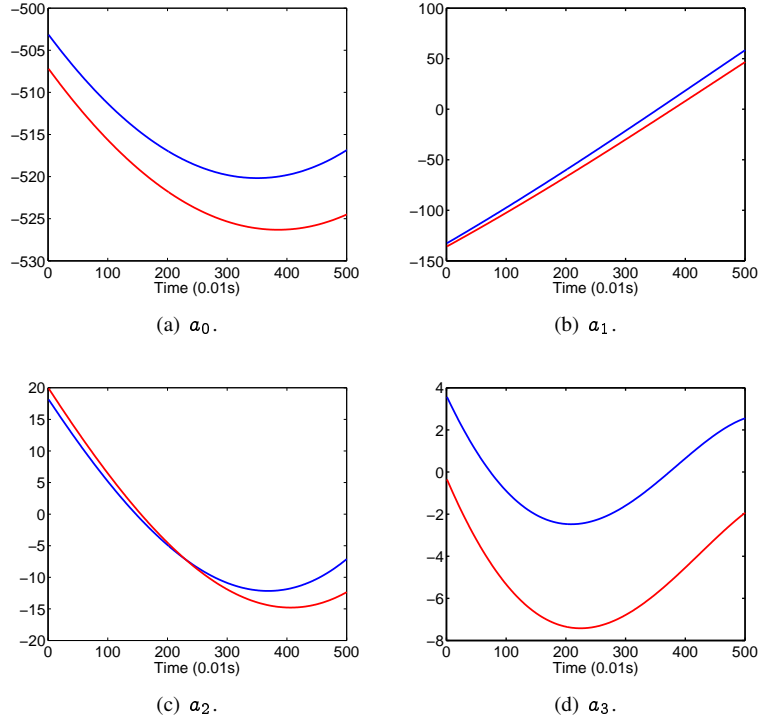


FIG. 3 – Résultats d'assimilation :  $a_i^a$  estimés par assimilation (rouge) sont comparés aux projections  $a_i^p$  (bleu).

	Erreur relative en norme	Erreur angulaire maximum (deg.)
$t$		
0	0.011	2.901
100	0.012	3.692
200	0.013	3.016
300	0.015	1.703
400	0.017	1.530
500	0.019	1.671

TAB. 1 – Statistiques d'erreur entre la séquence synthétique  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et la séquence reconstruite  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$ .



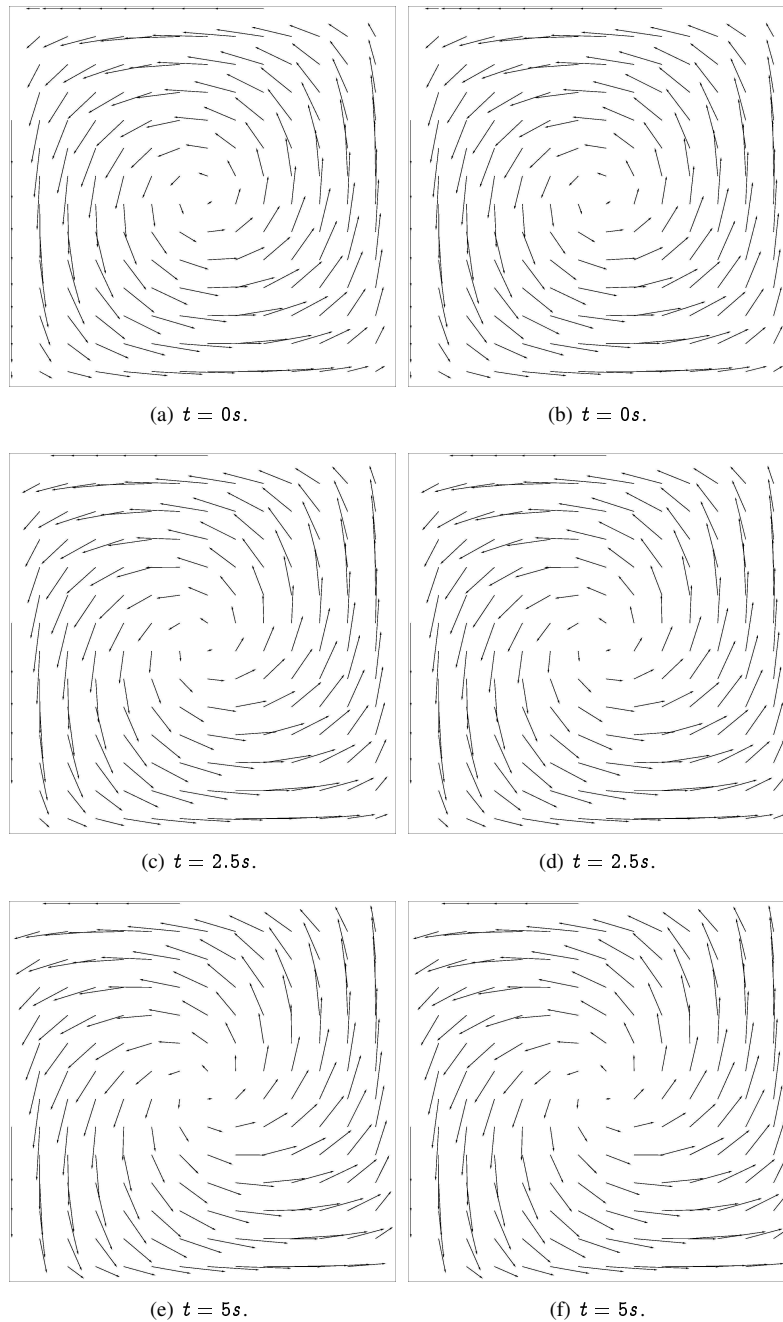


FIG. 4 – Champs de vitesse  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$  (gauche) estimés comparés aux données synthétiques  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  (droite).

## Références

- [1] Dominique Béréziat and Isabelle Herlin. Solving ill-posed image processing problems using data assimilation. *Numerical Algorithms*, 54, 2011.
- [2] Th. Corpetti, P. Héas, E. Mémin, and N. Papadakis. Variational pressure image assimilation for atmospheric motion estimation. In *Proc. Int. Geoscience and Remote Sensing Symp. (IGARSS'08)*, volume 2, pages 505–508, Boston, MA, July 2008.
- [3] J. D'Adamo, N. Papadakis, E. Mémin, and Artana G. Variational assimilation of POD low-order dynamical systems. *Journal of Turbulence*, 8(9) :1–22, 2007.
- [4] B.K.P. Horn and B.G. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203, 1981.
- [5] N. Papadakis. *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs*. PhD thesis, université de Rennes 1, Mention Mathématiques et Applications, 2007.
- [6] O. Titaud, A. Vidard, I. Souopgui, and F.-X. Le Dimet. Assimilation of image sequences in numerical models. *Tellus A*, 62 :30–47, 2010.



---

Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Centre de recherche INRIA Bordeaux – Sud Ouest : Domaine Universitaire - 351, cours de la Libération - 33405 Talence Cedex  
Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier  
Centre de recherche INRIA Lille – Nord Europe : Parc Scientifique de la Haute Borne - 40, avenue Halley - 59650 Villeneuve d'Ascq  
Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex  
Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex  
Centre de recherche INRIA Saclay – Île-de-France : Parc Orsay Université - ZAC des Vignes : 4, rue Jacques Monod - 91893 Orsay Cedex  
Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399