



HAL
open science

Calcul du flot optique par assimilation variationnelle de données

Dominique Béréziat, Isabelle Herlin

► **To cite this version:**

Dominique Béréziat, Isabelle Herlin. Calcul du flot optique par assimilation variationnelle de données. RFIA - Congrès de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Jan 2008, Amiens, France. pp.341-350. inria-00583235

HAL Id: inria-00583235

<https://inria.hal.science/inria-00583235>

Submitted on 8 Jan 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul de flot optique par assimilation variationnelle de données

Optical flow computing using variational data assimilation framework

Dominique Béréziat^{1,2}

Isabelle Herlin²

¹ Laboratoire d'Informatique de Paris 6, Université Pierre et Marie Curie.

² Projet CLIME, INRIA.

INRIA Rocquencourt, domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay Cedex. B.P.105

Dominique.Bereziat@inria.fr

Résumé

Nous proposons de résoudre le problème classique de l'estimation du mouvement dans une séquence d'images en calculant le flot optique. Pour cela, nous utilisons une approche basée sur l'assimilation variationnelle de données qui permet de réaliser une intégration temporelle du calcul du flot optique : les gradients spatiotemporels constituent les observations et sont assimilés dans un modèle de transport du flot optique. Cette approche a deux avantages principaux. D'une part elle permet de définir des modèles d'erreurs qui, in fine, peuvent gérer de façon naturelle les données manquantes. D'autre part, le schéma numérique incrémental sur lequel repose l'assimilation variationnelle de données permet de résoudre efficacement les systèmes non-linéaires. Or, la contrainte du flot optique n'est pas linéaire dans sa forme non différenciée. Notre méthode prend donc en charge l'estimation de grands déplacements.

Mots Clef

Assimilation de données, formulation variationnelle, flot optique.

Abstract

This paper presents a novel approach for computing the optical flow in image sequences. A data assimilation framework is established to perform a temporal integration of the optical flow : the spatiotemporal image gradients are considered as observations, assimilated in a transport model constituted of the optical flow constraint. This framework has two main advantages : first, it provides an error model which is used to manage missing data, for instance due to occlusions or absence of contrast. Second, it allows to consider the optical flow constraint in its original non-linear expression, thus enabling the estimation of large displacements.

Keywords

Data assimilation, calculus of variation, optical flow.

1 Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons au problème classique de l'estimation du mouvement dans une séquence d'images. L'approche usuelle de ce problème est de calculer le champ de vitesse apparent dans les images, également appelé flot optique, en utilisant une équation de transport de la luminosité d'un plan à l'autre de la séquence. Cette équation est communément appelée Contrainte du Flot Optique et a été introduite dans [6]. Habituellement, la contrainte de flot optique est linéarisée par un développement de Taylor à l'ordre 1 : on se ramène ainsi à une forme linéaire sur w , le champ des vitesses apparentes, mettant en jeu les gradients spatio-temporels de la séquence d'images. Ceci implique que l'équation linéarisée n'est valide que pour des petites amplitudes de déplacement. L'équation du flot optique ainsi obtenue est sous-dimensionnée : c'est une forme linéaire sur un vecteur à deux composantes. Il faut donc lui adjoindre une seconde équation afin de rendre le système inversible. Sans faire une liste exhaustive de toutes les approches proposées ces vingt dernières années, nous dirons simplement que l'approche la plus commune consiste à restreindre l'espace de recherche de la solution, par exemple aux fonctions dont les variations sont bornées dans L^2 . Cela se traduit en pratique par la minimisation d'une fonctionnelle composée d'un terme représentant le résidu de la contrainte du flot optique et d'un terme mesurant la norme des variations spatiales du champ des vitesses. La résolution est obtenue dans un cadre variationnel : on résout les équations d'Euler-Lagrange associées qui forment alors un système d'équations résolubles par des méthodes de descente de gradient. Les EDPs ainsi obtenues sont de type diffusion/réaction et l'on dispose de solides résultats théoriques sur la convergence et les propriétés de ces schémas numériques.

Dans l'approche que nous venons de décrire, le calcul du flot optique n'est pas un processus dynamique. En effet il nécessite certes le calcul de la dérivée temporelle sur la séquence d'image (qui entre en jeu dans la contrainte de

flot optique) mais on ne dispose pas d'équation d'évolution dans le temps. La contrainte de flot optique est statique, le calcul du champ des vitesses d'un plan est indépendant du calcul du champ des vitesses des autres plans. Il serait beaucoup plus intéressant de calculer globalement le flot optique sur tous les plans de la séquence en utilisant, par exemple, des propriétés temporelles. Weickert [16] propose de calculer le mouvement sur l'ensemble de la séquence en utilisant une régularisation spatio-temporelle. Si l'équation du flot optique reste statique, on cherche une solution qui soit régulière en temps et en espace et le cadre méthodologique utilisée reste le même que celui décrit dans le paragraphe précédent. Toutefois, n'existerait-il pas un cadre méthodologique qui soit plus pertinent pour la résolution de systèmes dynamiques ?

Un autre problème courant concerne les données manquantes. Comment estimer correctement le flot optique lorsqu'un plan de la séquence est partiellement disponible, ou que les données sont dégradées ? Le cadre méthodologique décrit précédemment ne répond pas à cette question. Dans le domaine de la modélisation météorologique et océanographique, le problème des données manquantes devient fondamental. En effet, la quantité de point de mesures disponibles est largement insuffisante eût égard à la taille des domaines physiques considérés. L'assimilation de données [3, 8, 14] permet de résoudre ce problème. Cette méthodologie permet de gérer les données manquantes en proposant une solution optimale en terme d'interpolation. Le principe de l'assimilation de données est assez simple. On dispose d'un modèle dynamique qui décrit l'évolution dans le temps d'un ensemble de variables d'état. Mais ce modèle est insuffisant : il faut disposer d'observations pour coller au mieux possible à la réalité ainsi que d'une valeur initiale (au temps $t = 0$). Quand les observations ne sont pas disponibles, c'est le modèle d'évolution qui permet alors le calcul des variables d'état, à partir de la valeur initiale. La méthode d'assimilation de données décrite dans cet article utilise le cadre variationnel pour calculer le minimum d'une certaine fonctionnelle, c'est pour cette raison que nous parlons d'assimilation variationnelle de données.

Dans le domaine du traitement de l'image, l'utilisation de l'assimilation de données est récent. C'est probablement F.-X. Le Dimet qui, le premier, a proposé d'assimiler les structures spatio-temporelles extraites des données images dans des modèles d'environnement [7]. Nous pouvons également citer les travaux de Herlin *et al* [5] et ceux de Papadakis *et al* [11, 12] qui mettent en pratique l'assimilation de données images pour la résolution d'un problème image.

Dans [5], les auteurs se proposent d'estimer le courant océanique de surface. Pour cela, ils disposent d'observations satellitaires constituées d'images de température de surface de la mer méditerranée et d'un modèle simplifié de circulation océanographique. Le problème est que la température de surface n'intervient pas dans le modèle de circulation océanographique. Elle constitue une observation indirecte de cette circulation. Pour résoudre ce pro-

blème, les auteurs utilisent une équation de transport de la température en supposant que l'évolution des températures de surface est induite par la circulation de surface de l'océan. L'équation de transport de la température permet de calculer un champ de vitesse qui peut alors être utilisé comme observation dans le modèle de circulation océanographique.

Dans [11, 12], les auteurs utilisent le cadre méthodologique de l'assimilation variationnelle de données pour résoudre un problème de suivi d'objets déformables (il s'agit de contours de raies se déplaçant dans le sable). La difficulté à résoudre dans ce contexte est justement l'absence de données car les raies peuvent s'enfouir dans le sable et disparaître temporairement des acquisitions. Les auteurs utilisent une approche de type *level-set* pour segmenter les raies. La résolution du *level-set* se traduit par une équation d'évolution incluant un terme gérant les déplacements des raies en utilisant un flot optique observé. Les observations de ce système sont donc des contours partiels des raies (obtenus par seuillage) et un flot optique. Dans une seconde partie, les auteurs proposent d'estimer également le flot optique pour les cas d'observations manquantes. L'assimilation du flot optique est obtenue par une contrainte de transport du flot optique et qui sert l'équation d'évolution et par une observation partielle du champ des vitesses : lorsque le flot optique n'est pas disponible, le modèle d'évolution donne une estimation du champ des vitesses qui correspond à une interpolation.

Notre étude se place donc dans le contexte de l'estimation du flot optique pour laquelle nous proposons une méthodologie alternative aux approches de type Horn *et al* qui résolvent la contrainte de flot optique et le problème de l'ouverture par régularisation spatiale du champ de vitesse. La méthode proposée est l'assimilation variationnelle de données. Pour la mettre en œuvre, il faut disposer :

- d'un modèle d'évolution du champ des vitesses (quantité à calculer). Ce modèle peut, par exemple, représenter la régularité de la solution dans le temps ;
- d'un modèle d'observation. Il est fourni par la contrainte de flot optique ;
- de données à assimiler : il s'agit des gradients spatio-temporels calculés sur la séquence d'images acquises ;
- d'un champ de vitesse initial. Il peut être donné par une méthode de calcul de flot optique usuelle ;
- de modèles d'erreurs se traduisant par des matrices de corrélation croisée. Cela implique, on va le voir, un travail de modélisation.

La méthode proposée est semblable à celle de Papadakis *et al* à la différence que la contrainte de flot optique (quelle soit linéarisée ou pas) constitue la donnée d'observation dans notre algorithme. Évidemment, la contrainte de flot optique est sous-dimensionnée et c'est le modèle d'évolution sur le champ des vitesses qui donne la solution. Ce modèle d'évolution est le même que celui utilisé dans [12] mais on peut utiliser d'autres modèles basées sur la diffusion isotropique ou anisotropique du champ des vitesses

pour obtenir des solutions moins contraintes en terme de régularité.

Dans la section 2, nous formulons le problème du calcul du flot optique en terme d'assimilation variationnelle de données. Nous y exposons la méthodologie et en particulier l'algorithme incrémental qui en découle. Nous calculons les différentielles et opérateurs adjoints des modèles utilisés. Nous proposons également des choix pour les matrices de corrélation. La section 3 présente les schémas numériques qu'il faut discrétiser et implanter. Les résultats sont discutés dans la section 4. Enfin, à la section 5, nous analysons la méthode et ses résultats afin de proposer des études complémentaires.

2 Estimation du flot optique par assimilation de données

2.1 Modèle

Le calcul du flot optique consiste à résoudre une équation de transport de la luminosité. Si on note I une séquence d'images, cette équation se traduit par :

$$\nabla I^T(\mathbf{x}, t)w(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \in [0, \mathbf{T}]$$

où w désigne le champ des vitesses, Ω est le domaine spatial borné des images et \mathbf{T} un réel strictement positif. Le vecteur w représente le flot optique qui doit être calculé. Comme cette équation est sous-dimensionnée (w est un vecteur de \mathbb{R}^2), il faut adjoindre une seconde équation, qui est habituellement une contrainte de régularité sur la solution recherchée. Dans cette étude, nous recherchons un champ régulier en temps, ce qui se traduit par une équation de transport sur le vecteur vitesse :

$$\frac{dw}{dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla w(\mathbf{x}, t)^T w(\mathbf{x}, t) = 0$$

Enfin, nous souhaitons prendre en compte les erreurs liées aux modèles et aux mesures, ce qui nous amène à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla w^T(\mathbf{x}, t)w(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}_m \quad (1)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \nabla I^T(\mathbf{x}, t)w(\mathbf{x}, t) + \mathcal{E}_o \quad (2)$$

$$w(\mathbf{x}, 0) = \omega(\mathbf{x}) + \mathcal{E}_b \quad (3)$$

L'équation (3) est un terme d'ébauche : elle fournit l'initialisation de l'équation (1) à partir d'une condition initiale ω . Les termes \mathcal{E}_m , \mathcal{E}_o , \mathcal{E}_b sont des vecteurs gaussiens qui représentent respectivement les erreurs du modèle (équation (1)), de l'observation (équation (2)) et de l'ébauche (équation (3)). On peut supposer que ces vecteurs ne sont pas indépendants spatialement et temporellement, ce qui fait que \mathcal{E}_m , \mathcal{E}_o , \mathcal{E}_b ainsi que leurs matrices de covariance Q , R et B sont des fonctions du temps et de l'espace.

2.2 Assimilation de données

Le système (1,2,3) entre dans le cas de figure prévu par l'assimilation variationnelle de données[8, 14]. Il consiste à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} E(w) = & \int \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{M}(w) \right)^T(\mathbf{x}, t) Q^{-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \\ & \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{M}(w) \right)(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x} dt d\mathbf{x}' dt' \\ & + \int \mathbb{H}(w, y)^T(\mathbf{x}, t) R^{-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \\ & \mathbb{H}(w, y)(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x} dt d\mathbf{x}' dt' \\ & + \int (w(\mathbf{x}, 0) - \omega(\mathbf{x}))^T B^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ & (w(\mathbf{x}', 0) - \omega(\mathbf{x}')) d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (4)$$

Les matrices Q , R et B sont donc des matrices de covariance croisée. C'est une première différence fondamentale avec l'approche variationnelle classique du calcul du flot optique, puisque l'assimilation de données permet de définir des modèles d'erreur précis. Les opérateurs $\mathbb{M}(w)$ et $\mathbb{H}(w, y)$ sont respectivement $\nabla w^T w$, le modèle d'évolution, et $\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla I^T w$, le modèle d'observation dans notre cas d'étude. Le vecteur y regroupe les observations (les gradients spatio-temporel dans notre étude). Bien-sûr, ce qui suit reste valable pour des modèles \mathbb{M} et \mathbb{H} quelconques. Si on suppose que les bruits \mathcal{E}_m , \mathcal{E}_o et \mathcal{E}_b sont indépendants entre eux, la fonctionnelle (4) peut-être vue comme la probabilité conditionnelle de la variable d'état w sachant l'observation y et la condition initiale ω . Donc minimiser la fonction (4) donne un estimateur du maximum de vraisemblance de w car les lois de \mathcal{E}_m , \mathcal{E}_o et \mathcal{E}_b sont supposés gaussiennes.

Dans la suite de cet article, nous omettons l'écriture des variables $\mathbf{x}, \mathbf{x}', t$ et t' des fonctions lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Nous devons maintenant calculer la différentielle de E en w . Les calculs sont trop longs pour être détaillés dans cet article, le lecteur intéressé pourra consulter [14]. La différentielle de (4) peut être calculée avec la formule de Gâteaux (22). Une variable auxiliaire λ , appelée *variable adjointe* dans la littérature de l'assimilation de données, doit alors être introduite dans les calculs de la différentielle. Elle est définie par :

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = \int Q^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla w^T w \right) (\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (5)$$

Ce terme correspond à la corrélation Q^{-1} et son opérande de droite dans la fonctionnelle (4) intégrée en \mathbf{x}' et t' .

La solution du problème de minimisation de (4) est donnée en résolvant $\frac{\partial E}{\partial w} = 0$ ce qui conduit alors au système

d'équations suivant :

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{T}) = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}\right)^* \lambda = - \int \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}\right)^* (\mathbf{x}', t') R^{-1} \mathbb{H}(w)(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{M}(w) = \int Q \lambda(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (8)$$

$$\lambda(\mathbf{x}, 0) = \int B^{-1}(w(\mathbf{x}', 0) - \omega(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' \quad (9)$$

Dans ces équations, interviennent des opérateurs adjoints. L'opérateur adjoint est défini formellement par :

$$\int \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}(\phi) \lambda d\mathbf{x} dt = \int \phi^T \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \phi}\right)^* (\lambda) d\mathbf{x} dt \quad (10)$$

et représente en faite une notation compacte pour l'intégration par partie [14]. L'existence et l'unicité de l'opérateur adjoint sont assurées par le théorème de représentation de Riesz. En assimilation de données, le modèle d'observation est écrit sous la forme $y - \mathbb{H}(w) = \mathcal{E}_o$ où y représente le vecteur d'observation. Nous avons généralisé la forme de l'équation d'observation à $\mathbb{H}(w, y) = \mathcal{E}_o$ qui est plus adapté à notre cas d'étude. Cela implique néanmoins un changement de signe dans l'équation d'évolution de la variable adjointe (7) par rapport à ce qu'on peut lire habituellement dans la littérature (notamment dans [11, 12, 14]).

2.3 Schéma incrémental et linéarisation

En l'état, le système (6,7,8,9) n'est pas satisfaisant. En effet, le calcul de λ nécessite de connaître w et inversement ! Pour résoudre ce problème, nous devons introduire une variable incrémentale : nous remplaçons la variable d'état w par $w + \delta w$ dans (4) et nous minimisons maintenant la fonctionnelle en δw . Si on suppose que w est dans un voisinage d'un minimum local de E , alors le vecteur minimisant E en δw est le même, autrement dit, nous avons :

$$\min_w E(w) = \min_{\delta w} E(w_0 + \delta w)$$

Cette situation est illustrée par la figure 1. Nous pouvons

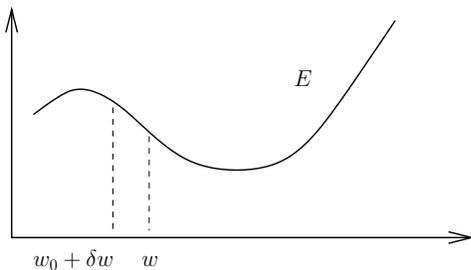


FIG. 1 – Minimisation incrémentale.

alors remplacer w par $w + \delta w$ dans les équations (7,8,9).

Nous linéarisons l'opérateur \mathbb{M} par un développement de Taylor-Young à l'ordre 1, dans l'équation (8), pour obtenir :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \mathbb{M}(w) + \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}(\delta w) = \int Q \lambda d\mathbf{x}' dt'$$

En séparant les termes w et δw , on se ramène donc au système :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbb{M}(w) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}(\delta w) = \int Q \lambda d\mathbf{x}' dt' \quad (12)$$

Il faut également injecter le terme incrémental dans l'équation (7) et linéariser l'opérateur \mathbb{H} . Nous obtenons alors, pour le terme de droite de l'équation (7) :

$$\int \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}\right)^* R^{-1} \left[\mathbb{H}(w) + \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}(\delta w) \right] d\mathbf{x}' dt' \quad (13)$$

Pour finir, le terme incrémental est introduit dans l'équation (9). Nous obtenons alors le système :

$$w(\mathbf{x}, 0) = \omega(\mathbf{x}) \quad (14)$$

$$\delta w(\mathbf{x}, 0) = \int B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \lambda(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}' \quad (15)$$

En regroupant les équations (6), (7), (11), (12), (13), (14) et (15), nous pouvons définir l'algorithme complet de l'assimilation variationnelle de données. Nous utilisons l'indice i pour désigner la i -ième étape de l'algorithme incrémentale.

1. Initialisation ($i = 0$) :

(a) Calcul de w^0 :

$$w^0(\mathbf{x}, 0) = \omega(\mathbf{x}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial w^0}{\partial t} + \mathbb{M}(w^0) = \vec{0}, \forall t \in [0, \mathbf{T}] \quad (17)$$

(b) $\delta w^0(\mathbf{x}, t) = \vec{0}, \forall t \in [0, \mathbf{T}]$

2. Étape $i > 0$:

(a) Calcul de λ^i :

$$\lambda^i(\mathbf{x}, T) = \vec{0} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \lambda^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w^{i-1}}\right)^* (\lambda^i) = \\ - \int \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w^{i-1}}\right)^* R^{-1} \left[\mathbb{H}(w^{i-1}) \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w^{i-1}}(\delta w^{i-1}) \right] d\mathbf{x}' dt' \end{aligned} \quad (19)$$

(b) Calcul de δw^i :

$$\delta w^i(\mathbf{x}, 0) = \int B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \lambda^i(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}' \quad (20)$$

$$\frac{\partial \delta w^i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w^{i-1}}(\delta w^i) = \int Q \lambda^{i-1} d\mathbf{x}' dt' \quad (21)$$

3. $w^i = w^{i-1} + \delta w^i$ et retour en 2 jusqu'à convergence.

Pour mettre en œuvre l'assimilation variationnelle de données, il faut calculer les différentielles des opérateurs \mathbb{M} et \mathbb{H} , ainsi que leurs opérateurs adjoints respectifs. Il faut également définir les matrices Q , B et R et l'inverse de cette dernière.

2.4 Calcul des différentielles et des opérateurs adjoints

Le terme $\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}$ est une matrice Hessienne car l'opérateur \mathbb{M} est défini de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On note $\mathbb{M} = (\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2)^T$ et $w = (u, v)^T$. Par exemple, pour calculer $\frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial u}$, on utilise la formule de Gâteaux :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial u}(\delta u) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{M}_1(u + \beta \delta u, v) - \mathbb{M}_1(u, v)}{\beta} \quad (22) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\frac{(u + \beta \delta u)(u + \beta \delta u)_x + v(u + \beta \delta u)_y}{\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{uu_x + vu_y}{\beta} \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta^2 \delta u \delta u_x + \beta(u \delta u_x + u_x \delta u + v \delta u_y)}{\beta} \\ &= u \delta u_x + v \delta u_y + u_x \delta u \end{aligned}$$

En faisant le même calcul, pour les autres composantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial v}(\delta v) &= u_y \delta v \\ \frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial u}(\delta u) &= v_x \delta u \\ \frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial v}(\delta v) &= v_y \delta v + u \delta v_x + v \delta v_y \end{aligned}$$

La différentielle est donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}(\delta w) &= \left(\frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial w}(\delta w), \frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial w}(\delta w) \right)^T \\ &= \left(\frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial u}(\delta u) + \frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial v}(\delta v), \frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial u}(\delta u) + \frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial v}(\delta v) \right) \\ &= \begin{pmatrix} u \delta u_x + v \delta u_y + u_x \delta u + u_y \delta v \\ u \delta v_x + v \delta v_y + v_x \delta u + v_y \delta v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le calcul de l'opérateur adjoint $\left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w} \right)^*$ s'obtient par intégration par parties et en appliquant la définition (10) :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w}(\psi)^T \lambda d\mathbf{x}dt &= \int \left(\frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial w}(\psi) \lambda_1 + \frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial w}(\psi) \lambda_2 \right) d\mathbf{x}dt \\ &= \int (u(\psi_1)_x + v(\psi_1)_y + u_x \psi_1 + u_y \psi_2) \lambda_1 \\ &\quad + (u(\psi_2)_x + v(\psi_2)_y + v_x \psi_1 + v_y \psi_2) \lambda_2 \\ &= \int -\psi_1 u(\lambda_1)_x - \psi_1 v_y \lambda_1 - \psi_1 v(\lambda_1)_y + \psi_2 u_y \lambda_1 \\ &\quad - \psi_2 u_x \lambda_2 - \psi_2 u(\lambda_2)_x - \psi_2 v(\lambda_2)_y + \psi_1 v_x \lambda_2 \\ &= \int \psi^T \left(\frac{\partial \mathbb{M}_1}{\partial w} \right)^* (\lambda_1) + \psi^T \left(\frac{\partial \mathbb{M}_2}{\partial w} \right)^* (\lambda_2) \\ &= \int \psi^T \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w} \right)^* (\lambda) \end{aligned}$$

En identifiant les termes, nous trouvons :

$$\left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial w} \right)^* (\lambda) = \begin{pmatrix} -u(\lambda_1)_x - v(\lambda_1)_y - v_y \lambda_1 + v_x \lambda_2 \\ u_y \lambda_1 - u_x \lambda_2 - u(\lambda_2)_x - v(\lambda_2)_y \end{pmatrix} \quad (23)$$

Le calcul de la dérivée directionnelle de \mathbb{H} est aisé en appliquant la formule de Gâteaux. On trouve $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial u} \delta u = \frac{\partial I}{\partial x} \delta u$ et $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial v} \delta v = \frac{\partial I}{\partial y} \delta v$ soit en notation vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}(\delta w) = \nabla I^T \delta w$$

Dans ce cas de figure, le calcul de l'opérateur adjoint est direct car $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}$ ne comporte pas d'opérateur différentiel sur w . On a $\int \nabla I^T \psi \phi d\mathbf{x} = \int \psi^T \nabla I \phi d\mathbf{x}$. Donc :

$$\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w} \right)^* (\phi) = \nabla I \phi$$

2.5 Corrélation croisée et inverse fonctionnelle

La matrice de corrélation croisée est sans doute le point le plus important et intéressant dans la méthodologie de l'assimilation de données appliquée aux images. En effet, elle permet d'intégrer une composante stochastique dans les EDPs mais, le plus important, elle décrit les interactions, par corrélation croisée, entre deux points de l'espace-temps [2]. Cette formulation permet de gérer, par exemple, les données manquantes. En tout état de cause, il y a un aspect de modélisation à prendre en compte dans le choix des matrices de corrélation. Une telle matrice se définit formellement à partir de la loi jointe de la variable d'état en deux points de l'espace-temps.

Un second point important est le calcul de l'inverse de ces matrices, puisque c'est sous cette forme qu'elles interviennent dans la fonctionnelle (4). En pratique, il n'est pas

intéressant de calculer numériquement cet inverse, c'est-à-dire de construire la matrice de corrélation après discrétisation et d'inverser numériquement cette matrice. En effet, ces matrices sont de trop grande taille et l'inversion matricielle trop coûteuse en ressource. Nous chercherons, quand cela est possible, à évaluer analytiquement l'inverse de la matrice de corrélation ; nous donnons un exemple à la fin de cette sous-section.

Puisque nous sommes dans un contexte de recherche d'une solution fonctionnelle, nous définissons l'inverse fonctionnelle par [13] :

$$\int_{\Omega} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') C^{-1}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') d\mu(\mathbf{x}'') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (24)$$

où μ est une mesure sur Ω .

Pour rendre le calcul de l'inverse accessible, les matrices de corrélation sont choisies isotropes, c'est-à-dire que $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = C(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)$. Le calcul de l'inverse s'apparente alors à chercher l'inverse fonctionnelle :

$$\int_{\Omega} C(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}''\|) C^{-1}(\|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'\|) d\mu(\mathbf{x}'') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ C \star C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Pour certains cas, le calcul est accessible. Considérons la corrélation exponentielle scalaire $C(t, t') = e^{-\frac{|t-t'|}{\sigma}}$. Notons f la fonction $x \mapsto e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$ et g son inverse fonctionnelle. En appliquant la définition de l'inverse fonctionnelle et le théorème de la convolution, nous avons $\widehat{f \star g} = \widehat{g} \times \widehat{f} = 1$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\widehat{f}(\xi) = \frac{2\sigma^2}{1 + \xi^2}$. En la substituant dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{2\sigma} (1 + \sigma^2 \xi^2) \\ g(t) = \frac{1}{2\sigma} (\delta(t) - \sigma^2 \delta''(t))$$

Il devient alors très intéressant d'évaluer la quantité $\int X^T(t) C^{-1}(t, t') X(t') dt dt'$ pour X un processus stochastique de covariance C . Pour la corrélation croisée exponentielle, nous avons :

$$\iint X^T C^{-1} X dt dt' = \int X^T(t) \frac{X(t) - \sigma^2 X''(t)}{2\sigma} dt \\ = \frac{1}{2\sigma} \int (\|X\|^2(t) - \sigma^2 X^T(t) X''(t)) dt \\ = \frac{1}{2\sigma} \int (\|X\|^2(t) + \sigma^2 \|X'\|^2(t)) dt$$

Donc une corrélation croisée exponentielle correspond à une régularisation L^2 . Dans [10, 13] on trouvera quelques exemples de calcul d'inverse fonctionnelle. Notamment, on peut montrer qu'une covariance gaussienne est équivalente à une régularisation de Tikhonov de tout ordre.

Pour cette première implantation, nous faisons un choix simple : c'est-à-dire une corrélation exponentielle en temps

et en espace et nous négligeons le terme d'ordre 1. Avec un tel choix, le terme de droite de l'équation se réduit à :

$$\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w} \right)^* \left[\mathbb{H}(w) + \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}(\delta w) \right] (\mathbf{x}, t) = \\ \nabla I(\mathbf{x}, t) \left[I_t + \nabla I^T(w + \delta w) \right] (\mathbf{x}, t) \quad (25)$$

Nous devons également définir les covariances pour le terme d'ébauche (B) et le modèle d'évolution de la variable d'état (Q). Nous remarquons qu'il n'est pas, en revanche, nécessaire de calculer leur inverse. Q , matrice 2×2 , est choisie diagonale, ce qui signifie l'indépendance entre les deux composantes du champ de vitesse w . La corrélation B est scalaire dans notre modèle. Ces deux matrices de corrélation sont choisies gaussiennes, de sorte que l'on a :

$$Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{\sigma_1} - \frac{(t - t')^2}{\sigma_2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{\sigma_3}\right) \quad (27)$$

Les écart-types $(\sigma_i)_{i=\{1..3\}}$ sont fixés empiriquement par l'utilisateur : elles contrôlent la régularité de la solution. Q et B étant isotropes, les termes de droite des équations (12) et (15) s'écrivent comme une convolution par un noyau gaussien :

$$\int Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \lambda(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt = Q \star \lambda(\mathbf{x}, t) \quad (28)$$

$$\int B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \lambda(\mathbf{x}', 0) d\mathbf{x}' = B \star \lambda(\mathbf{x}, 0) \quad (29)$$

2.6 Cas des grands déplacements

Le modèle d'observation \mathbb{H} utilise la contrainte linéarisée du flot optique et ne permet pas le calcul de larges déplacements. L'opérateur \mathbb{H} n'intervient que dans l'équation (13). Pour gérer le cas des grands déplacements, on peut utiliser la contrainte non linéarisée du flot optique, c'est-à-dire :

$$\mathbb{H}'(w) = I(\mathbf{x} + wdt, t + dt) - I(\mathbf{x}, t) \quad (30)$$

Or la différentielle de \mathbb{H}' est la même que celle de \mathbb{H} . Donc l'impact est limité dans l'algorithme incrémentale : seul le terme \mathbb{H} est modifié dans l'équation (13) et la non-linéarité de \mathbb{H}' n'est pas gênante. Pour calculer ce terme nous avons simplement besoin d'une procédure d'interpolation – bilinéaire par exemple – pour l'évaluation du terme $I(\mathbf{x} + wdt, t + dt)$. L'équation (25) devient donc :

$$\left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w} \right)^* \left[\mathbb{H}(w) + \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial w}(\delta w) \right] (\mathbf{x}, t) = \\ \nabla I(\mathbf{x}, t) \left[I(\mathbf{x} + wdt, t + dt) - I(\mathbf{x}, t) + \nabla I^T(\mathbf{x}, t) \delta w \right] \quad (31)$$

De manière plus générale, on remarque que les modèles \mathbb{M} et \mathbb{H} doivent être linéarisés pour appliquer l'algorithme incrémental. Toutefois, l'algorithme incrémental converge vers la solution recherchée ce qui montre que cette méthode permet de résoudre les modèles non linéaires.

3 Discrétisation

Dans cette section, nous récapitulons les trois schémas numériques à implanter. Le premier schéma consiste en la résolution des équations (16) et (17) qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + vu_y &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + uv_x + vv_y &= 0\end{aligned}$$

Pour obtenir un schéma spatialement symétrique (plus stable), on discrétise la dérivée du premier ordre par un point milieu : $u_x(i, j) \simeq \frac{1}{2}(u(i+1, j) - u(i-1, j))$ et $u_y(i, j) \simeq \frac{1}{2}(u(i, j+1) - u(i, j-1))$. Le système est discrétisé en temps par un schéma explicite d'Euler :

$$\begin{aligned}u_{k+1}(i, j) &= u_k(i, j) - \frac{\Delta t}{2} \left(\right. \\ &\quad u_k(i, j)(u_k(i+1, j) - u_k(i-1, j)) + \\ &\quad \left. v_k(i, j)(u_k(i, j+1) - u_k(i, j-1)) \right) \\ v_{k+1}(i, j) &= v_k(i, j) - \frac{\Delta t}{2} \left(\right. \\ &\quad u_k(i, j)(v_k(i+1, j) - v_k(i-1, j)) \\ &\quad \left. + v_k(i, j)(v_k(i, j+1) - v_k(i, j-1)) \right)\end{aligned}$$

avec $k = \{1, \dots, N\}$ où N est le nombre de plans dans la séquence d'images. On notera que ce système n'est pas linéaire et notamment, nous avons constaté des instabilités pour des valeurs trop grandes du pas de discrétisation temporelle Δt qui, normalement, doit être fixé à $\frac{\mathbf{T}}{N}$.

Le second schéma numérique à implanter concerne la résolution des équations (18) et (19). Après calcul explicites des différentielles et opérateurs adjoints, nous obtenons le système :

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - u(\lambda_1)_x - v(\lambda_1)_y - v_y \lambda_1 + v_x \lambda_2 &= -I_x H(w, \delta w) \\ -\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} - u(\lambda_2)_x - v(\lambda_2)_y + u_y \lambda_1 - u_x \lambda_2 &= -I_y H(w, \delta w)\end{aligned}$$

avec $H(w, \delta w) = I_t + \nabla I^T(w + \delta w)$ ou $H(w, \delta w) = I(\mathbf{x} + w\Delta t, t + \Delta t) - I(\mathbf{x}, t) + \nabla I^T \delta w$ pour la version non linéarisée. Là encore, nous discrétisons les dérivées spatiales (qui sont toutes d'ordre 1) par une formule de point milieu et un schéma explicite d'Euler. À la différence du schéma précédent, le calcul de la variable adjointe λ est rétrograde puisque nous partons de $t = \mathbf{T}$. L'indice k du

schéma numérique varie donc sur l'ensemble $\{N, \dots, 1\}$:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{k-1} &= \lambda_1^k + \frac{\Delta t}{2} \left(u(i, j)(\lambda_1^k(i+1, j) - \lambda_1^k(i-1, j)) \right. \\ &\quad \left. + (v(i, j+1) - v(i, j-1))\lambda_1^k(i, j) \right. \\ &\quad \left. + v(i, j)(\lambda_1^k(i, j+1) - \lambda_1^k(i, j-1)) \right. \\ &\quad \left. - (v(i+1, j) - v(i-1, j))\lambda_2^k \right) - \Delta t I_x H(w, \delta w) \\ \lambda_2^{k-1} &= \lambda_2^k + \frac{\Delta t}{2} \left(u(i, j)(\lambda_2^k(i+1, j) - \lambda_2^k(i-1, j)) \right. \\ &\quad \left. + v(i, j)(\lambda_2^k(i, j+1) - \lambda_2^k(i, j-1)) \right. \\ &\quad \left. - (u(i, j+1) - u(i, j-1))\lambda_1^k(i, j) \right. \\ &\quad \left. + (u(i+1, j) - u(i-1, j))\lambda_2^k(i, j) \right) - \Delta t I_y H(w, \delta w)\end{aligned}$$

Le dernier schéma numérique à implanter correspond au calcul de la variable incrémentale et donc à la résolution des équations (20) et (21).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + u\delta u_x + v\delta u_y + u_x\delta u + u_y\delta v &= Q_1 \star \lambda_1 \\ \frac{\partial \delta v}{\partial t} + u\delta v_x + v\delta v_y + v_x\delta u + v_y\delta v &= Q_2 \star \lambda_2\end{aligned}$$

Nous faisons le même choix de discrétisation en temps et en espace que précédemment pour obtenir le schéma explicite avant et avec k variant sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned}\delta u^{k+1}(i, j) &= \delta u^k(i, j) + Q_1 \star \lambda_1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\right. \\ &\quad u(i, j)(\delta u^k(i+1, j) - \delta u^k(i-1, j)) \\ &\quad \left. + v(i, j)(\delta u^k(i, j+1) - \delta u^k(i, j-1)) \right. \\ &\quad \left. + (u(i+1, j) - (u(i-1, j)))\delta u^k(i, j) \right. \\ &\quad \left. + (u(i, j+1) - (u(i, j-1)))\delta v^k(i, j) \right) \\ \delta v^{k+1}(i, j) &= \delta v^k(i, j) + Q_2 \star \lambda_2 - \frac{\Delta t}{2} \left(\right. \\ &\quad (v(i+1, j) - v(i-1, j))\delta u^k(i, j) \\ &\quad \left. + (v(i, j+1) - v(i, j-1))\delta v^k(i, j) \right. \\ &\quad \left. + u(i, j)(\delta v^k(i+1, j) - \delta v^k(i-1, j)) \right. \\ &\quad \left. + v(i, j)(\delta v^k(i, j+1) - \delta v^k(i, j-1)) \right)\end{aligned}$$

4 Expérimentation

Nous avons remarqué une grande instabilité dans les trois schémas numériques de la méthode. Pour améliorer la stabilité, on peut utiliser la méthode de Lax [1] qui consiste à approximer la dérivée partielle en temps dans le schéma explicite d'Euler par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i, j)|_{t=k} \simeq \frac{1}{2} \left(u^{k+1}(i, j) - \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-1,1 \\ m=-1,1}} u^k(i+n, j+m) \right)$$

pour les schémas de calcul de w et δw et par :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(i, j)|_{t=k} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-1,1 \\ m=-1,1}} \lambda^{k+1}(i+n, j+m) - \lambda^k(i, j) \right)$$

pour le schéma de calcul de la variable adjointe (qui est rétrograde). La méthode de Lax introduit un terme de diffusion qui stabilise le schéma (au prix d'un lissage). Malgré cela, les schémas restent instables et nous devons choisir des valeurs du pas de discrétisation temporel Δt faibles (de l'ordre de 10^{-3}) et implique une convergence lente.

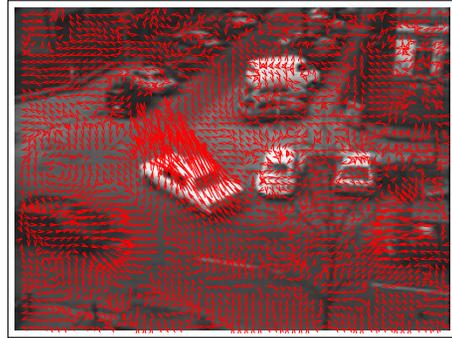
Nous avons testé notre méthode sur deux séquences classiques : la séquence du taxi (figures 2, 3 et 4) et la séquence du rond-point (figures 5 et 6) qui montre de grands déplacements.

La méthode nécessite une condition initiale à la variable d'état c'est-à-dire qu'il faut fournir un flot optique sur le premier plan de la séquence. Nous utilisons la méthode variationnelle de Horn & Schunck [6] avec comme données d'entrée les gradients spatio-temporels de la séquence d'image concernée calculés par un filtre récursif gaussien de variance 1. Les variances σ_1 , σ_2 et σ_3 des matrices de corrélation Q et B sont toutes prises à 1. Nous comparons les résultats obtenus sur quelques plans des séquences entre les deux modèles d'observation (flot optique linéarisé et non linéarisé) avec la méthode de Horn & Schunck.

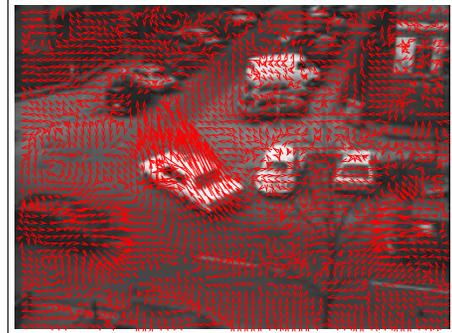
Les résultats entre la méthode d'assimilation de données et la méthode de Horn sont visuellement assez semblables. Comme nous l'avons déjà dit, nous avons dû jouer sur le paramètre de pas de discrétisation temporel Δt pour limiter les problèmes de divergence du schéma numérique incrémental. Malgré cela, la méthode fini par diverger au bout de quelques itérations de l'algorithme incrémental. Pour régler ces problèmes nous devons utiliser des schémas discrétisés stables (voir conclusion). Enfin, on note des différences entre les modèles linéarisés et non-linéarisés de la contrainte du flot optique, la seconde obtenant des champs de vitesse de plus grande magnitude en moyenne. Néanmoins, ces différences restent faibles. Ceci est dû, nous semble-t-il, au faible nombre d'itération de la méthode d'incrémentale qui limite donc les écarts. Seul l'implantation de schéma numériques stables et robustes permettront de trancher avec pertinence sur ces résultats.

5 Conclusion et Perspectives

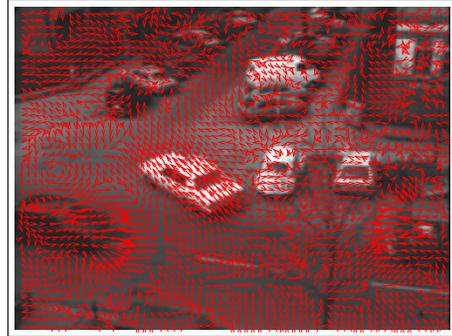
Dans cet article, nous avons présenté une première implantation du calcul de flot optique par assimilation variationnelle de données qui donne des résultats encourageants. Nous pouvons d'abord constater que l'assimilation de données procure un cadre méthodologique adaptée à la résolution de systèmes dynamiques. En effet, une approche spatio-temporelle dans le cadre variationnel classique, comme celle employée par Weickert [16], est coûteuse à la fois en temps de calcul et en mémoire puisqu'il faut calculer un schéma de Gauss-Seidel (qui implique potentiellement un grand nombre d'itérations) et cela sur un



(a) Flot optique non linéarisé, $\Delta t = 0.02$, 3 itérations.

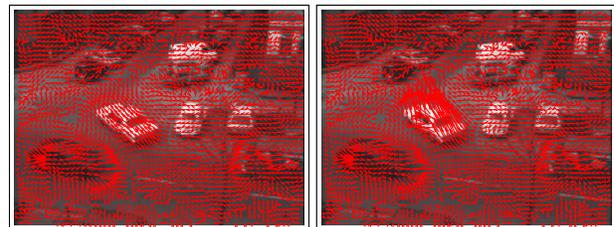


(b) Flot optique linéarisé, $\Delta t = 0.0003$, 4 itérations.



(c) Méthode de Horn.

FIG. 2 – Séquence taxi, plan 7.



(a) Flot optique non linéarisé, (b) Flot optique linéarisé, $\Delta t = 0.02$, 3 itérations. $\Delta t = 0.0003$, 4 itérations.

FIG. 3 – Séquence taxi, plan 14.

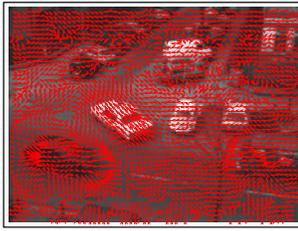
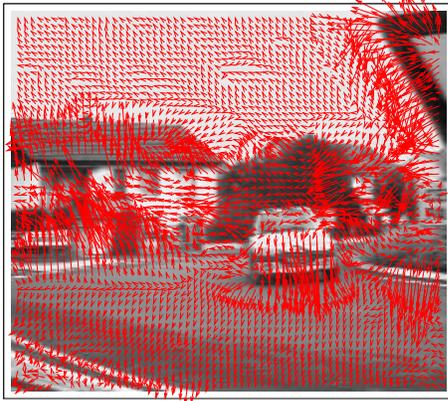


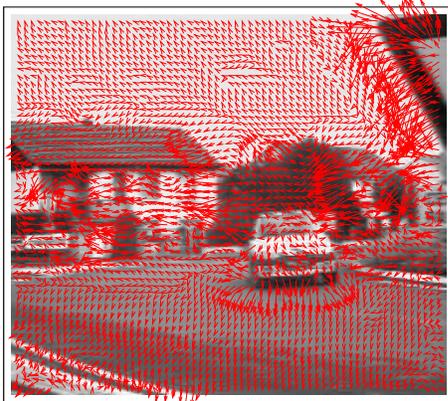
FIG. 4 – Séquence taxi, plan 14, méthode de Horn.



(a) Flot optique non linéarisé, $\Delta t = 0.001$, 8 itérations.

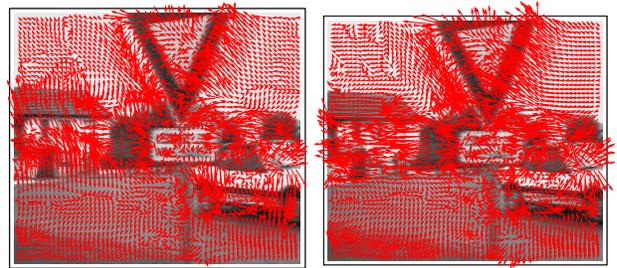


(b) Flot optique linéarisé, $\Delta t = 0.0001$, 8 itérations.

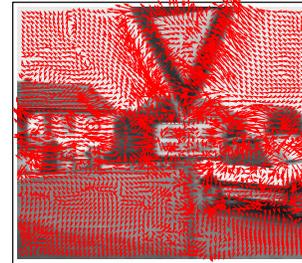


(c) Méthode de Horn.

FIG. 5 – Séquence rond-point, plan 18.



(a) Flot optique non linéarisé, (b) Flot optique linéarisé, $\Delta t = 0.001$, 8 itérations. $\Delta t = 0.0001$, 8 itérations.



(c) Méthode de Horn.

FIG. 6 – Séquence rond-point, plan 27.

domaine 3D (le temps est vu comme une troisième dimension). Au contraire, notre méthode peut travailler plan par plan et le calcul d'un plan est direct. La comparaison avec un algorithme *statique* de calcul du flot optique telle que la méthode de Horn & Schunk n'est sans doute pas la plus pertinente puisque cette dernière ne régularise pas le champ des vitesses dans le temps. Il sera plus judicieux de comparer avec une méthode à régularisation spatio-temporelle telle que Weickert.

Après cette première étude, il reste encore un certain nombre de difficultés à lever. La première de ces difficultés réside dans les problèmes d'instabilités des schémas numériques. Ces instabilités sont dûes à nos choix de discrétisation spatio-temporelle. La première des choses à faire est d'implanter, pour les trois schémas numériques de notre algorithme, des schémas d'Euler implicites, ce que nous sommes actuellement en train de finaliser. Ces schémas sont réputés stables pour la famille d'équation utilisée dans notre méthode mais ils nécessitent de résoudre, pour chaque pas de temps, un système linéaire de grande taille. Les systèmes à résoudre sont constitués de matrices bandes à diagonale strictement dominante. On peut donc utiliser des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires de type Jacobi qui ont un faible coût de stockage en mémoire et qui ne nécessitent qu'une dizaine d'itérations pour des matrices bien conditionnées comme c'est le cas ici.

Un second problème concerne la pertinence des modèles utilisés. Si le choix du modèle d'observation semble aller de soi, le choix du modèle d'évolution, qui joue le rôle de régularisation, nous semble très important. De la même manière que le choix de la contrainte de régularisation dans les méthodes différentielles de type Horn & Schunk est

primordial pour le résultat souhaité (solution régulière de type L^1 , L^2 , affine ou bien dépendant de l'orientation local du gradient, etc), le choix du modèle d'évolution dans la méthode de l'assimilation de donnée va peser sur le type de résultat souhaité. En particulier, le choix que nous avons fait semble assez contraignant et nous souhaitons tester d'autres contraintes, plus souples ou plus adaptatives, comme par exemple des schémas de diffusion du champ de vitesse, linéaire ou non linéaire, isotropique ou anisotropique. Ces schémas, dont les propriétés sont maintenant bien connues [4, 15], réalisent des régularisations que l'on peut facilement adapter en fonction de la configuration locale de l'image.

Enfin, un troisième axe de recherche concerne les aspects liés aux matrices de corrélation croisée. Dans cette étude, nous avons fait le choix de la simplicité tout en relevant les liens qui existent entre les types de corrélation et leur impact en terme de régularisation sur les solutions recherchées. Nous devons maintenant prendre en compte les aspects liés à la qualité des données d'observation. Cela concerne particulièrement la matrice R liée aux observations. Par exemple, lorsque les gradients spatio-temporels de l'image sont de faible norme à certaines positions dans l'espace-temps, l'observation y est moins signifiante et la corrélation doit alors être plus faible. On peut aussi notifier l'absence d'observation sur des certaines zones de l'image pour gérer les cas d'occultation. Toutefois, cet aspect peut aussi concerner la matrice Q liée au modèle d'évolution des variables d'états. En effet, si nous faisons le choix d'un modèle d'évolution du type diffusion non linéaire et/ou anisotrique, le comportement de la diffusion peut dépendre localement de l'image et la matrice de corrélation peut alors quantifier la qualité de la donnée utilisée par le processus de diffusion.

Références

- [1] W.F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, chapter 4. Academic Press, New-York, 2nd edition, 1977.
- [2] A.F. Bennett, B.S. Chua, and L.M. Leslie. Generalized inversion of a global numerical weather prediction model, II Analysis and implementation. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 60 :165–178, 1996.
- [3] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. Technical report, Training Course of European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, 1999.
- [4] F. Catté, P.-L. Lions, J.-M. Morel, and T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Jour. Numer. Anal.*, 1 :182–193, February 1992.
- [5] I. Herlin, E. Huot, J.-P. Berroir, F.-X. Le Dimet, and Korotaev. G. Estimation of a motion field on satellite images from a simplified ocean circulation model. In *ICIP International Conference on Image Processing*, Atlanta, USA, October 2006.
- [6] B.K.P. Horn and B.G. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, Vol 17 :185–203, 1981.
- [7] F.-X. Le Dimet. Assimage : étude de techniques d'assimilations de données image dans des modèles de simulation de fluides géophysiques, rapport final, 2003-2006. ACI Masse de données.
- [8] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : Theoretical aspects. *Tellus*, 38A(97-110), 2002.
- [9] H.H. Nagel and W. Enkelmann. An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Transactions of PAMI*, 8 :565–593, 1986.
- [10] D.S. Oliver. Calculation of the inverse of the covariance. *Mathematical Geology*, 30(7) :911–933, 1998.
- [11] N. Papadakis, E. Mémin, and F. Cao. Une approche variationnelle pour le suivi de contours. In *RFIA*, Tours, France, janvier 2006.
- [12] N. Papadakis, E. Mémin, and F. Cao. Variational approach for object contour tracking. In *ICPR*, 2006.
- [13] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.
- [14] E. Valur Hólm. Lectures notes on assimilation algorithms. Technical report, European Centre for Medium-Range Weather Forecasts Reading, U.K, June, 25 2003.
- [15] J. Weickert. Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision. In *Acta Math. Univ. Comeniana. Proceeding of Algorithmy 2000*, volume LXX, pages 33–50, 2001.
- [16] J. Weickert and C. Schnörr. Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14 :245–255, 2001.