



**HAL**  
open science

## Construction de maillages de degré 2 - Partie 1 : Triangle P2

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Patrick Laug

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Patrick Laug. Construction de maillages de degré 2 - Partie 1: Triangle P2. [Rapport de recherche] RR-7519, 2011, pp.27. inria-00560529v1

**HAL Id: inria-00560529**

**<https://inria.hal.science/inria-00560529v1>**

Submitted on 28 Jan 2011 (v1), last revised 7 Feb 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Construction de maillages de degré 2*  
*Partie 1 : Triangle P2*

Paul Louis George — Houman Borouchaki — Patrick Laug

**N° 7519**

Janvier 2011

— Computational models and simulation —

 *rapport  
de recherche*



## Construction de maillages de degré 2 Partie 1 : Triangle P2

Paul Louis George\* , Houman Borouchaki† , Patrick Laug‡

Theme : Computational models and simulation  
Applied Mathematics, Computation and Simulation  
Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 7519 — Janvier 2011 — 27 pages

**Résumé :** La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. (équations aux dérivées partielles) nécessite le recours à des éléments finis de degré deux ou plus. Ce rapport en trois parties se propose de montrer comment construire de tels maillages dans le cas d'éléments triangulaires (plans ou surfaciques) ou tétraédriques (dans le cas volumique) en se restreignant au degré deux.

Cette première partie discute le cas plan et, donne, en premier, quelques rappels sur les courbes de Bézier de degré deux et sur les triangles de Bézier de degré deux également. Dans le cas des triangles, on fait le lien avec les éléments finis de degré deux, ou éléments Lagrange P2. On donne les conditions de validité de tels éléments et on montre quelques cas d'éléments non valides en proposant quelques idées permettant de les corriger. On décrit ensuite une méthode de construction de maillages P2 plans qui est illustrée par quelques exemples.

Le cas des surfaces gauches est l'objet de la seconde partie de ce papier, [4], et le cas volumique est traité dans la partie trois [6].

**Mots-clés :** Triangle P2. Triangle à 6 nœuds. Tétraèdre P2. Tétraèdre à 10 nœuds. Maillage P2. Éléments Finis P2. Courbe de Bézier. Triangle de Bézier.

\* INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

† UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

‡ INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: patrick.laug@inria.fr

# Construction of meshes of degree 2

## Part 1: P2 triangle

**Abstract:** There is a need for finite elements of degree 2 or more to solve various P.D.E. problems. This report in three parts discusses a method to construct such meshes in the case of triangular element (in the plane or for a surface) or tetrahedral element (in the volume case), restricting at degree 2.

This first part considers the planar case and, to begin with, returns to Bézier curves and Bézier triangles of degree 2. In the case of triangles, the relation with Lagrange P2 finite element is shown. Validity conditions are discussed and some unvalid elements are shown while proposing a method to correct them. A construction method is then proposed and several application examples are given.

The surface case is detailed in the second part [4], and the volume case is seen in part three [6].

**Key-words:** P2 triangle. 6-node triangle. P2 tetrahedron. 10-node tetrahedron. P2 mesh. P2 finite element. Bézier curve. Bézier triangle.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Courbe de Bézier de degré 2</b>	<b>4</b>
2.1	La courbe . . . . .	4
2.2	La tangente . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Triangle de Bézier de degré 2</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Élément fini triangulaire de degré 2 ou triangle P2</b>	<b>8</b>
4.1	Pour un élément isoparamétrique . . . . .	8
4.2	Pour un élément droit . . . . .	12
4.3	Validité d'un élément fini P2 . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Triangle P2 vu comme un triangle de Bézier</b>	<b>12</b>
5.1	Forme de Bézier du triangle P2 . . . . .	12
5.2	Le jacobien . . . . .	13
5.3	Validité d'un triangle P2 . . . . .	17
5.4	Extension aux degrés supérieurs . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Éléments triangulaires P2 faux</b>	<b>19</b>
6.1	Élément courbe . . . . .	19
6.2	Élément droit . . . . .	20
6.3	Correction d'un maillage triangulaire P2 faux . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Construction d'un maillage P2 dans le plan</b>	<b>22</b>
7.1	Les données . . . . .	22
7.2	Construction du maillage P1 . . . . .	22
7.3	Transformation P1-P2 . . . . .	23
7.4	Notion de qualité et optimisation . . . . .	23
7.5	Quelques exemples . . . . .	24
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>25</b>

## 1 Introduction

La résolution de nombreux problèmes formulés en E.D.P. nécessite le recours à des éléments finis de degré deux ou plus, en particulier, pour les problèmes fortement non-linéaires (problèmes de plasticité en mécanique des solides, ..). En outre, de tels éléments permettent une représentation plus fidèle de géométries complexes (frontières courbes).

La construction de maillages avec ce type d'éléments est loin d'être une opération triviale, contrairement à ce que l'on pense en général. Ce sujet est d'ailleurs rarement abordé dans le détail et très peu de papiers sont disponibles, on pense en effet qu'il suffit de modifier sans grandes difficultés un maillage de degré un pour obtenir le résultat cherché et que le sujet n'en est pas vraiment un.

Les quelques papiers disponibles sur ce sujet sont relatifs à deux de ces aspects. Le premier concerne l'utilisation d'éléments finis d'ordre quelconque

dans le cadre de géométries simples (le problème de construction étant alors trivial). Le second concerne effectivement le cas de géométries complexes et, dans ce cadre, la plupart des références sont issues de l'équipe de M.S. Shephard et certaines d'entre elles sont listées en fin de ce rapport.

Il y a, *a priori*, deux approches possibles pour obtenir un maillage de degré deux, ou P2 (on se cantonne à ce degré). La première approche consiste à modifier un maillage de degré un, ou P1, et à transformer les éléments "droits" en éléments "courbes" en créant les nœuds différents des sommets P1 et en courbant les arêtes devant l'être. L'autre approche consiste à construire directement les éléments P2.

La première approche semble être la solution la meilleure et la plus simple pour traiter le cas des maillages plans et volumiques. Les triangles, resp. les tétraèdres, du maillage P1 sont modifiés. La seconde approche semble être la solution la plus adéquate pour traiter le cas des maillages des surfaces gauches, en particulier dans le cas des surfaces paramétrées. Les triangles P1 de l'espace des paramètres sont envoyés dans l'espace et on forme au vol les triangles P2 (autrement dit, on ne considère jamais un maillage P1 complet de la surface).

Autour de ce qu'est un maillage P2, se posent de nombreuses questions, à commencer simplement par définir les critères de validité puis sur la définition de la notion de qualité pour un élément P2. La vision Bézier d'un triangle P2 et sa vision habituelle élément fini sont mises en correspondance en montrant, au passage, quelques aspects théoriques plus ou moins cachés du problème. Grâce à cette façon de regarder le problème, on pourra aborder le cas d'éléments de degré plus élevé.

Ce papier se concentre donc sur le cas d'un triangle, le cas d'une surface est l'objet de [4] tandis que le cas 3D est traité dans [6]. On commence par rappeler quelques notions sur les quadriques de Bézier dans le cas des courbes puis des triangles. On revient aux éléments finis et on montre que l'on peut les regarder comme des formes de Bézier. Ceci nous permet d'établir des critères de validité pour ces éléments. La construction effective de maillages P2 par transformation de maillages P1 est décrite et illustrée par quelques exemples (ce point est plus détaillé dans les deux autres parties du rapport, cas nettement plus délicats).

## 2 Courbe de Bézier de degré 2

Les points de contrôle introduits dans la suite sont dans  $\mathbb{R}^2$ , cas plan, ou dans  $\mathbb{R}^3$ , cas d'une surface gauche.

### 2.1 La courbe

On se donne trois points de contrôle,  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  et un paramètre  $t$  variant dans  $[0, 1]$ . On définit la courbe  $\Gamma$  par la fonction  $\gamma$  suivante :

$$\gamma(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Cette courbe passe par  $P_0$  et  $P_2$ . Le point  $\gamma(\frac{1}{2})$  est appelé *milieu* de la courbe.

En vue de la construction des éléments finis P2, on va utiliser ces courbes pour définir les arêtes des éléments. Soit maintenant  $AB$  un segment et  $C$  un

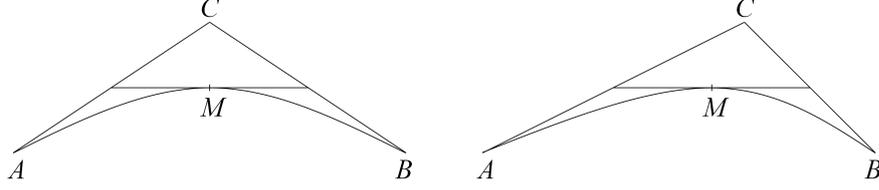


FIG. 1 – La courbe  $AB$  avec ses trois points de contrôle  $A$ ,  $B$  et  $C$  et son milieu  $M$ . Deux positions de  $C$ , pour  $A$  et  $B$  fixés, donnent deux courbes différentes.

point quelconque pour l’instant. On définit une arête comme le lieu des points  $P(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  correspondant à la courbe  $\Gamma$  et la fonction  $\gamma$  ci-dessus dans laquelle on fixe  $P_0 = A$ ,  $P_1 = C$  et  $P_2 = B$ . Donc

$$P(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)C + t^2B, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

le milieu, correspondant par définition à  $t = \frac{1}{2}$ , vaut

$$M = P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A + B + 2C}{4}, \quad (3)$$

le point  $M$  est donc le milieu des milieux respectifs de  $AC$  et de  $BC$ . Inversement, on a

$$C = \frac{4M - A - B}{2}. \quad (4)$$

Dès lors que  $C$  n’est pas aligné avec  $A$  et  $B$ , l’arête est courbe, en cas contraire l’arête reste droite et on impose que  $C = M$  ce qui revient à dire que le nœud milieu est bien le milieu de l’arête<sup>1</sup>.

Notons pour finir que la Relation (2), exprimée cette fois en fonction des nœuds  $A, B$  et  $M$ , tels que définis ci-dessus, s’écrit

$$P(t) = (1-t)(1-2t)A + 4t(1-t)M + t(2t-1)B, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

où on retrouve les polynômes de Lagrange de degré 2 des éléments finis (ici en une dimension). Par ailleurs, en fonction maintenant des points de contrôle, cette même expression s’écrit

$$P(u, v) = u^2A + 2uvC + v^2B, \quad (6)$$

avec  $u + v = 1$ ,  $u \in [0, 1]$  qui est la forme de Bernstein (ou de Bézier) bien connue. Pour simplifier l’écriture, on a gardé la même notation pour  $P$ , *i.e.*,  $P(t)$  ou  $P(u, v)$ . De façon formelle,  $P(u, v)$  s’écrit aussi comme

$$P(u, v) = \sum_{i+j=1} B_{i,j}^2(u, v) P_{i,j}, \quad (7)$$

avec  $P_{20} = A$ ,  $P_{11} = C$  et  $P_{02} = B$ .

<sup>1</sup>Ceci n’est pas strictement nécessaire, on pourrait, a priori, définir comme nœud “milieu” interne de l’arête tout point  $P(\alpha) = (1-\alpha)A + \alpha B$  avec néanmoins la limitation  $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}$ . Cette limitation vient du lien entre  $M$  et  $C$  qui n’a de sens que si  $M$  et  $C$  sont compris entre  $A$  et  $B$ . Sortir de cette intervalle conduirait à une boucle car  $C$  sort de  $AB$ . Néanmoins, mettre le nœud exactement au milieu rend le traitement élément fini en P2 (droit) cohérent avec l’élément P1 sous-jacent et identique au cas courbe, voir plus bas.

## 2.2 La tangente

La tangente de  $\Gamma$  est définie par

$$\gamma'(t) = -2(1-t)P_0 + (2-4t)P_1 + 2tP_2, t \in [0, 1]. \quad (8)$$

En  $t = 0$ ,  $\gamma'(t) = 2\overrightarrow{P_0P_1}$ , en  $t = 1$ ,  $\gamma'(t) = 2\overrightarrow{P_1P_2}$  et en  $t = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma'(t) = \overrightarrow{P_0P_2}$ . Autrement dit, la courbe part de  $P_0$  tangente à  $\overrightarrow{P_0P_1}$ , est parallèle au segment  $P_0P_2$  au point  $\gamma(\frac{1}{2})$  et arrive en  $P_2$  tangente à  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . Un résultat connu est que cette tangente est elle-même une forme de Bézier. En effet, on peut écrire  $\gamma'(t)$  comme

$$\gamma'(t) = 2 \left[ (1-t)\overrightarrow{P_0P_1} + t\overrightarrow{P_1P_2} \right], \quad (9)$$

ainsi on trouve la forme de Bézier de degré un dont les "points" de contrôle sont les vecteurs  $\overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . On peut l'écrire également comme

$$\gamma'(u(t), v(t)) = -2 \left[ u\overrightarrow{P_0P_1} + v\overrightarrow{P_1P_2} \right],$$

avec  $u = 1 - t$  et  $u + v = 1$ . Notons ainsi que  $\gamma'(u, v) = -\gamma'(t)$ .

Ceci permet de trouver simplement la tangente en tout point  $\gamma(t)$  de la courbe  $\Gamma$  par une construction géométrique évidente. Appliqué à l'arête  $AB$  de points de contrôle  $A, B$  et  $C$ , on voit que la tangente en  $A$  est portée par le vecteur  $\overrightarrow{AC}$ , la tangente en  $B$  est portée par le vecteur  $\overrightarrow{CB}$  et que la tangente en  $M$ , le milieu, est parallèle au vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

## 3 Triangle de Bézier de degré 2

On regarde, dans le plan ou sur une surface en 3D, une face triangulaire (trois sommets et trois "milieux" d'arête) et on construit le réseau de points de contrôle de ce triangle vu comme un triangle de Bézier. Les points de contrôle de ce réseau sont donc ces trois sommets et les trois points de contrôle des arêtes calculés comme ci-dessus à partir des extrémités et du milieu. On définit le carreau triangulaire  $\Sigma$  par la fonction

$$\sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=2} B_{i,j,k}^2(u, v, w) P_{i,j,k}, \quad (10)$$

où  $u, v, w$  sont les coordonnées barycentriques ( $u + v + w = 1$ ) par rapport aux sommets du triangle, les  $B_{i,j,k}^2$  sont les polynômes de Bernstein de degré 2 associés à un triangle. Soit

$$B_{i,j,k}^2(u, v, w) = \frac{2!}{i!j!k!} u^i v^j w^k.$$

Tandis que les  $P_{i,j,k}$  sont les points de contrôle ci-dessus qui, topologiquement, forment le réseau ci-dessous (en terme d'indices) :

$$\begin{array}{c} P_{002} \\ P_{101} \quad P_{011} \\ P_{200} \quad P_{110} \quad P_{020} . \end{array}$$

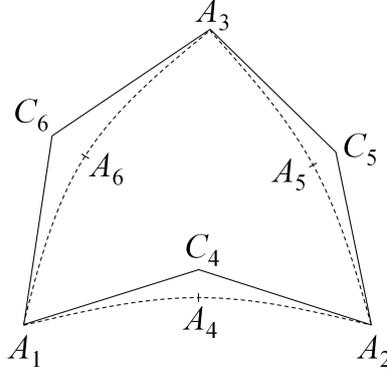


FIG. 2 – Le triangle de Bézier avec ses six points de contrôle, les trois premiers  $A_i$  et les  $C_i$ . En tireté, les arêtes courbes avec leurs nœuds.

Les polynômes de Bernstein, s'écrivent, en suivant cette représentation, comme :

$$w^2$$

$$\begin{array}{ccc} & 2uw & 2vw \\ u^2 & 2uv & v^2 \end{array}$$

Si on note  $S_i = A_i$ , pour  $i = 1, 3$ , les trois sommets du triangle et  $A_4, A_5$  et  $A_6$  les trois "milieux" d'arête dont on déduit  $C_4, C_5$  et  $C_6$  les trois points de contrôle alors l'expression ci-dessus permet d'écrire le point courant  $M(u, v, w) = \sigma(u, v, w)$  de la face comme

$$M(u, v, w) = u^2 S_1 + 2uv C_4 + v^2 S_2 + 2vw C_5 + w^2 S_3 + 2uw C_6. \quad (11)$$

Cette formule peut s'interpréter par une construction géométrique plus parlante. À savoir

$$M(u, v, w) = uA + vB + wC,$$

avec

$$A = uS_1 + vC_4 + wC_6$$

$$B = uC_4 + vS_2 + wC_5$$

$$C = uC_6 + vC_5 + wS_3.$$

Il est facile de vérifier (par exemple, faire  $w = 0$  pour la première arête frontière de la face) que la face passe par ses trois arêtes courbes (avec une continuité  $C^0$  entre faces *a priori*). En effet,  $M(u, v, 0) = u^2 S_1 + 2uv C_4 + v^2 S_2$ , en posant  $u = 1 - t$ , donc  $v = t$ , on retrouve exactement l'arête  $S_1 S_2$  telle que définie par la Relation (2).

Le plan tangent aux sommets est porté par le triangle formé par le sommet en question et les deux points de contrôle adjacents, en  $S_1$  c'est donc le triangle  $S_1 C_4 C_6$ . En effet, le plan tangent est engendré par les vecteurs  $\frac{\partial \sigma(u, v, w)}{\partial u}$

et  $\frac{\overrightarrow{\partial\sigma(u,v,w)}}{\partial v}$  qui, par exemple en  $S_1$  valent respectivement  $2\overrightarrow{C_6S_1}$  et  $2\overrightarrow{C_6C_4}$ , autrement dit le triangle  $S_1C_4C_6$ .

Pour des raisons qui seront clarifiées plus tard, nous allons réécrire la Relation (11) sous la forme suivante (en notant indifféremment  $P_{ijk}$  le point  $P_{i,j,k}$  de la Relation (10)) :

$$M(u, v, w) = u^2P_{200} + 2uvP_{110} + v^2P_{020} + 2vwP_{011} + w^2P_{002} + 2uwP_{101}. \quad (12)$$

## 4 Élément fini triangulaire de degré 2 ou triangle P2

Les notations sont les notations classiques des éléments finis. On note  $\hat{K}$  l'élément de référence,  $K$  l'élément courant,  $F_K$  la transformation permettant de passer de  $\hat{K}$  à  $K$ ,  $p_i$  le polynôme de base numéro  $i$  et  $A_i$  le nœud  $i$  de  $K$ .  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  désignent les coordonnées d'un point dans  $\hat{K}$ ,  $x$ , et  $y$  les coordonnées d'un point courant. Les nœuds de  $\hat{K}$ , à savoir les 3 sommets et les 3 nœuds d'arête sont, dans l'ordre, les suivants :

- $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$
- $(0.5, 0)$ ,  $(0.5, 0.5)$ ,  $(0, 0.5)$ .

Un élément est décrit par la liste de ses nœuds dont les trois premiers sont ses sommets et les trois suivants les nœuds d'arête. Les conventions de numérotation sont classiques, l'arête  $A_1A_2$  porte le nœud  $A_4$ , etc.

### 4.1 Pour un élément isoparamétrique

Les six polynômes de base, du point de vue élément fini et du point de vue de la transformation géométrique, sont (en variables  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$ ) :

- $p_1 = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})$ ,
- $p_2 = \hat{x}(2\hat{x} - 1)$
- $p_3 = \hat{y}(2\hat{y} - 1)$ ,
- $p_4 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}$ ,
- $p_5 = 4\hat{x}\hat{y}$ ,
- $p_6 = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}$ .

La transformation  $F_K$  permettant de passer de  $\hat{K}$  à  $K$  est par définition  $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M})A_i$ , on a ainsi  $M = F_K(\hat{M})$ . On vérifie immédiatement que

la restriction de  $F_K$  à une arête définit cette arête comme une courbe de Bézier telle qu'introduite ci-dessus, sous la forme de la Relation (5) (pour, par exemple, la variable  $\hat{x} \in [0, 1]$  et  $\hat{y} = 0$  dans le cas de la première arête).

La matrice jacobienne, dont le déterminant nous intéresse, se définit à partir des dérivées des polynômes de base. Pour mémoire, au point<sup>2</sup>  $x, y$ , la matrice des dérivées des polynômes s'écrit

$$\begin{bmatrix} -3 + 4(x + y) & 4x - 1 & 0 & 4(1 - 2x - y) & 4y & -4y \\ -3 + 4(x + y) & 0 & 4y - 1 & -4x & 4x & 4(1 - x - 2y) \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup>en omettant le symbole  $\hat{\cdot}$ .

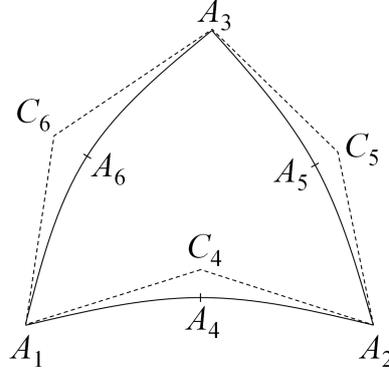


FIG. 3 – Le triangle courbe avec ses six nœuds, les  $A_i$ . Ce triangle est l'élément fini correspondant au triangle de Bézier (en tireté) de la figure précédente.

La matrice jacobienne s'écrit

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})x_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})x_i \\ \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})y_i & \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})y_i \end{bmatrix},$$

où  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du nœud courant  $A_i$  et  $\hat{A}_i$  est le nœud d'évaluation. En ce nœud d'évaluation, le jacobien qui est le déterminant de cette matrice, s'écrit comme le produit mixte  $\langle \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \rangle$ . Il représente donc, au facteur 6 près, le volume du tétraèdre formé par les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  rapportés en un point, ici avec,  $\vec{u} = {}^t(0, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial x}(\hat{A})\vec{A}_i$  et  $\vec{w} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial y}(\hat{A})\vec{A}_i$  avec  $\hat{A}$  le nœud d'évaluation et  $A_i$  les nœuds du triangle considéré. Ce jacobien mesure donc la surface signée (au facteur 2) de la face (du triangle) définie par  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

Regardons ce jacobien vu par le nœud  $\hat{A}_1$  donc pour le couple  $\hat{x} = 0, \hat{y} = 0$ , la matrice ci-dessus vaut :

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

donc

$$\vec{v} = -3A_1 - A_2 + 4A_4$$

avec  $A_4 = \frac{A_1 + A_2 + 2C_4}{4}$  où  $C_4$  est le point de contrôle de l'arête  $A_1A_2$ , autre que  $A_1$  et  $A_2$  qui sont aussi des points de contrôle, en fait on a  $C_1 = A_1$  et  $C_2 = A_2$ , vue comme une arête de Bézier, il vient donc

$$\vec{v} = -3A_1 - A_2 + A_1 + A_2 + 2C_4 = 2\overrightarrow{A_1C_4}.$$

$$\vec{w} = -3A_1 - A_3 + 4A_6$$

avec  $A_6 = \frac{A_1 + A_3 + 2C_6}{4}$  où  $C_6$  est le point de contrôle de l'arête  $A_1A_3$  vue comme une arête de Bézier, il vient

$$\vec{w} = -3A_1 - A_3 + A_1 + A_3 + 2C_6 = 2\overrightarrow{A_1C_6}.$$

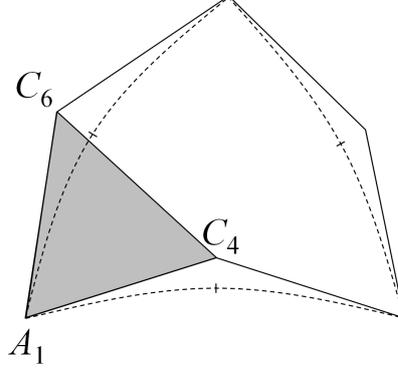


FIG. 4 – Interprétation du jacobien au sommet  $A_1$ , la surface du triangle  $A_1C_4C_6$  au facteur 8 près.

Par suite

$$\mathcal{J}(\hat{A}_1) = 4 \langle \vec{w} \cdot (\overrightarrow{A_1C_4} \wedge \overrightarrow{A_1C_6}) \rangle, \quad (13)$$

qui mesure (huit fois) la surface signée du triangle  $A_1C_4C_6$ , sous-triangle formé par le sommet  $A_1$  et les points de contrôle des deux nœuds d'arête voisins de  $A_1$ . Il est immédiat de vérifier que l'on a des expressions analogues pour  $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$  et  $\mathcal{J}(\hat{A}_3)$ , soient

$$\mathcal{J}(\hat{A}_2) = 4 \langle \vec{w} \cdot (\overrightarrow{A_2C_5} \wedge \overrightarrow{A_2C_4}) \rangle,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_3) = 4 \langle \vec{w} \cdot (\overrightarrow{A_3C_6} \wedge \overrightarrow{A_3C_5}) \rangle,$$

qui, par suite, mesurent (à un facteur près) l'aire des triangles  $A_2C_5C_4$  et  $A_3C_6C_5$ .

Regardons ce jacobien vu par le nœud  $\hat{A}_4$ , donc pour le couple  $\hat{x} = \frac{1}{2}, \hat{y} = 0$ , la matrice ci-dessus vaut :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

donc

$$\vec{w} = -A_1 + A_2 = \overrightarrow{A_1A_2}.$$

$$\vec{w} = -A_1 - A_3 - 2A_4 + 2A_5 + 2A_6,$$

on exprime les nœuds en fonction des points de contrôle, il vient alors

$$\vec{w} = \overrightarrow{A_1C_6} + \overrightarrow{C_4C_5} = \overrightarrow{A_1C_6} - \overrightarrow{A_1C_4} + \overrightarrow{A_1C_5}.$$

Par suite

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = \langle \vec{w} \cdot [\overrightarrow{A_1A_2} \wedge (\overrightarrow{A_1C_6} - \overrightarrow{A_1C_4} + \overrightarrow{A_1C_5})] \rangle,$$

qui mesure (à un facteur près) la surface des triangles formés avec  $A_1A_2$  et les points  $C_4, C_5$  et  $C_6$ . Si on définit le point  $C_{456}$  comme

$$C_{456} = C_5 + C_6 - C_4$$

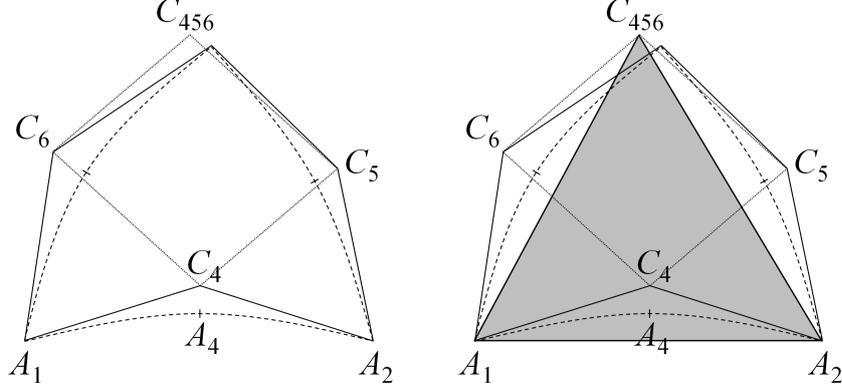


FIG. 5 – Interprétation du jacobien au sommet  $A_4$ , la surface, au facteur 2 près, du triangle  $A_1A_2C_{456}$ , à droite. Construction du point fictif  $C_{456}$ , quatrième sommet du parallélogramme formé à partir des cotés  $C_4C_6$  et  $C_4C_5$ , à gauche.

alors

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = \langle \vec{u} \cdot [\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_{456}}] \rangle, \quad (14)$$

qui indique la forme générale de l'expression qui implique l'arête portant le nœud image du nœud d'évaluation et les 3 nœuds de contrôle, celui de l'arête en question contribuant de manière négative. De même, on confirme l'aspect mécanique de cette expression en vérifiant que

$$\mathcal{J}(\hat{A}_5) = \langle \vec{u} \cdot [\overrightarrow{A_2A_3} \wedge \overrightarrow{A_2C_{564}}] \rangle,$$

$$\mathcal{J}(\hat{A}_6) = \langle \vec{u} \cdot [\overrightarrow{A_3A_1} \wedge \overrightarrow{A_3C_{645}}] \rangle,$$

avec des définitions analogues pour les points  $C_{546}$  et  $C_{645}$ .

Une première interprétation géométrique de ces trois jacobiens se fait en introduisant les hauteurs signées des trois triangles incriminés. Par exemple, pour  $\mathcal{J}(\hat{A}_4)$ , on considère les triangles  $A_1A_2C_4$ ,  $A_1A_2C_5$  et  $A_1A_2C_6$ . On définit  $h_4$  la hauteur signée de  $A_1A_2C_4$ . Si  $C_4$  et  $A_3$  sont du même côté de  $A_1A_2$ ,  $h_4$  est la hauteur classique, sinon c'est son opposée. Avec cette définition, ce jacobien est du signe de  $h_5 + h_6 - h_4$  :

$$\text{signe de } \mathcal{J}(\hat{A}_4) = \text{signe de } (h_5 + h_6 - h_4). \quad (15)$$

Il en va de même pour les deux autres jacobiens avec les  $h_i$  voulus.

On peut néanmoins trouver un triangle (virtuel) qui permet, via sa surface, de mesurer exactement, par exemple,  $\mathcal{J}(\hat{A}_4)$ . Il suffit de considérer la Relation (14) et de trouver le point  $C_{456}$ . Pour ce faire, on construit le triangle  $C_4C_5C_6$ , le milieu  $C_{56}$  de  $C_5C_6$ , alors  $C_{456}$  n'est autre que le symétrique de  $C_4$  par rapport à ce milieu<sup>3</sup>. En d'autres termes, le polygone  $C_4C_5C_{456}C_6$  est un parallélogramme. Il en va de même pour les deux autres jacobiens avec les constructions voulues.

<sup>3</sup>Cette interprétation peut donner des idées pour corriger un élément dont ce jacobien est négatif ou nul. Si, par exemple, les trois sommets sont fixés et les trois nœuds sont libres, il faut "baisser"  $C_4$  et/ou "monter"  $C_5$  et/ou  $C_6$  dans le cas où  $A_3$  est "au-dessus" de  $A_1A_2$ .

## 4.2 Pour un élément droit

Dans le cas d'un triangle P2 droit (ses arêtes sont des segments droits) avec comme nœuds les milieux des arêtes, on a  $C_{456} = A_3$ , le sommet opposé à l'arête portant  $A_4$ . La même propriété vaut pour les deux autres points  $C$  définis ci-dessus. De plus, dans ce cas, les 6 jacobiens considérés ci-dessus sont égaux.

La transformation  $F_K$  fait, ici, intervenir les 3 polynômes P1. Par conséquent, traiter un triangle droit comme un triangle courbe impose que les nœuds milieux soient positionnés exactement aux milieux des arêtes, les 6 jacobiens sont égaux entre eux et égaux au jacobien P1 (la surface (orientée) du triangle au facteur 2 près).

## 4.3 Validité d'un élément fini P2

Sans même se poser la question de sa qualité (notion à définir), le premier point à trancher est de s'assurer de la validité d'un triangle P2 puis de trouver des critères permettant de la caractériser. En fait, la validité est assurée dès lors que le jacobien est positif partout.

$$\mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) > 0 \text{ pour tout couple } (\hat{x}, \hat{y})$$

La question est donc d'évaluer cette quantité partout (impossible en pratique) ou de trouver où l'évaluer pour garantir la bonne propriété. On peut penser, *a priori*, qu'il suffit que les six jacobiens calculés ci-dessus soient positifs pour assurer la validité. En fait, c'est faux et l'objet de la section suivante est de le montrer.

## 5 Triangle P2 vu comme un triangle de Bézier

Un élément fini P2 est déclaré juste si son jacobien est positif en tout point. Ci-dessus, nous avons exprimé six de ces jacobiens (l'idée étant que s'ils sont tous positifs alors l'élément est valide). La question est, rappelons le, de savoir si cela permet vraiment de qualifier l'élément. Pour répondre nous allons regarder le problème en Bézier pur. Pour ce faire, notre élément fini s'écrit selon la Relation (12), à savoir

$$M(u, v, w) = u^2 P_{200} + 2uv P_{110} + v^2 P_{020} + 2vw P_{011} + w^2 P_{002} + 2uw P_{101},$$

qui n'est, de fait, qu'une fonction de  $u$  et  $v$ , notée encore  $\sigma$ , donc  $M(u, v, w) = \sigma(u, v)$ .

### 5.1 Forme de Bézier du triangle P2

Un triangle P2 est défini via la transformation  $F_K$  introduite ci-dessus à la Section 3. Elle s'écrit  $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M}) A_i$ , on va ici montrer que l'on peut également l'exprimer via la Relation (12) rappelée ci-dessus. On modifie de manière évidente l'écriture  $F_K(\hat{M}) = \sum_i p_i(\hat{M}) A_i$  en  $M(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_i p_i(\hat{x}, \hat{y}) A_i$ .

En développant, on a

$$M(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})A_1 + \hat{x}(2\hat{x} - 1)A_2 + \hat{y}(2\hat{y} - 1)A_3$$

$$+ 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}A_4 + 4\hat{x}\hat{y}A_5 + 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}A_6.$$

On va vérifier que le terme en  $A_1$  est en  $u^2$  et que le terme en  $C_4$ , le point de contrôle associé à l'arête  $A_1A_2$  et le nœud  $A_4$  est  $2uv$  pour un système de coordonnées adéquat. Notons que  $A_1$  intervient via  $p_1$ ,  $p_4$  et  $p_6$  donc via lui-même et  $A_4$  et  $A_6$ . Comme on a  $A_4 = \frac{2C_4 + A_1 + A_2}{4}$  et  $A_6 = \frac{2C_6 + A_1 + A_3}{4}$ , il vient donc, comme coefficient :

$$(1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y}) + (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x} + (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}$$

soit  $(1 - \hat{x} - \hat{y})^2$ ,

en posant  $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$ , on trouve un terme en  $u^2$ . Pour  $C_4$ , le coefficient cherché vient du terme en  $A_4$ , à savoir

$$2(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x},$$

avec  $u = 1 - \hat{x} - \hat{y}$  et en posant  $v = \hat{x}$  on trouve le coefficient cherché  $2uv$ . De fait, ce changement de variable revient à utiliser les coordonnées barycentriques,  $u$ ,  $v$  et  $w$  où  $u + v + w = 1$ , donc  $w = \hat{y}$ . Ainsi,

$$M(\hat{x}, \hat{y}) = u^2 A_1 + 2uv C_4 + \dots$$

que l'on note

$$M(u, v, w) = u^2 A_1 + 2uv C_4 + \dots$$

et en prenant les notations classiques des Bézier, ici  $P_{200} = A_1$  et  $P_{110} = C_4$ , on obtient

$$M(u, v, w) = u^2 P_{200} + 2uv P_{110} + \dots$$

Il est clair que l'on retrouve également les autres coefficients des 4 autres points de contrôle et que la Relation (12) est bien une écriture équivalente à celle des éléments finis.

La forme en  $F_K$  implique les 6 nœuds du triangle, la forme de Bézier implique les 6 points de contrôle du triangle. Elle va nous permettre d'établir un résultat intéressant sur son jacobien.

## 5.2 Le jacobien

La matrice jacobienne de la transformation, notée indifféremment  $M(u, v, w)$  ou  $\sigma(u, v)$  (où  $w$  est remplacé par  $1 - u - v$ ), s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} \end{array} \right],$$

où  $\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u}$  (resp.  $\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v}$ ) est la première (resp. deuxième) colonne de la jacobienne. On exprime ces dérivées en fonction de  $u$ ,  $v$  et  $w$  :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} = u(P_{200} - P_{101}) + v(P_{110} - P_{011}) + w(P_{101} - P_{002})$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} = u(P_{110} - P_{101}) + v(P_{020} - P_{011}) + w(P_{011} - P_{002}).$$

Soit  $\Delta^{l,m,n}P_{ijk}$  le vecteur  $\overrightarrow{P_{ijk} - P_{i-l,j-m,k-n}}$  pour les valeurs 1, 0 ou -1 de  $l, m$  et  $n$ , alors

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} = u \Delta^{1,0,-1} P_{200} + v \Delta^{1,0,-1} P_{110} + w \Delta^{1,0,-1} P_{101}$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} = u \Delta^{0,1,-1} P_{110} + v \Delta^{0,1,-1} P_{020} + w \Delta^{0,1,-1} P_{011}.$$

Ces dérivées peuvent s'écrire de façon générique, pour tout degré et en toute dimension d'espace, voir [6].

Le déterminant est écrit comme

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \left[ \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} \right] \cdot \vec{n},$$

avec  $\vec{n}$  le vecteur  $(0, 0, 1)$  pour un triangle en deux dimensions et la normale à ce triangle (le triangle P1 dont les sommets sont les sommets du triangle P2) en trois dimensions. Notons, dans ce dernier cas, que cette définition exclut le cas d'un triangle P2 dont la restriction P1 est mal orientée alors que ce cas est *a priori* possible.

**Théorème**  $\mathcal{J}(u, v, w)$  est un polynôme homogène de degré 2 en  $(u, v, w)$ .  $\square$

En corollaire, le jacobien s'écrit comme une forme de Bézier. Pour démontrer ce résultat<sup>4</sup>, il suffit de vérifier que  $\mathcal{J}(u, v, w)$  est exactement de la même forme que  $M(u, v, w)$ , à savoir une combinaison de "points" de contrôle via les polynômes de Bernstein. En fait ce résultat est évident. D'après son expression le jacobien est un polynôme homogène de degré 2 en les variables  $u, v$  et  $w$ . Retrouver comme polynômes ceux de Bernstein (qui forment une base) n'est qu'un jeu d'écriture qui revient à exprimer les 6 "points" de contrôle notés  $N_{ijk}$  de l'écriture générique des formes de Bézier.

En  $u^2$ , on trouve

$$N_{200} = 4. \left[ \Delta^{1,0,-1} P_{200} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{110} \right] \cdot \vec{n},$$

en  $uv$ , on trouve

$$N_{110} = 2. \left[ \Delta^{1,0,-1} P_{200} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{020} \right] \cdot \vec{n} + 2. \left[ \Delta^{0,1,-1} P_{110} \wedge \Delta^{1,0,-1} P_{110} \right] \cdot \vec{n},$$

en  $v^2$ , on trouve

$$N_{020} = 4. \left[ \Delta^{1,0,-1} P_{110} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{020} \right] \cdot \vec{n},$$

en  $vw$ , on trouve

$$N_{011} = 2. \left[ \Delta^{1,0,-1} P_{110} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{011} \right] \cdot \vec{n} + 2. \left[ \Delta^{0,1,-1} P_{020} \wedge \Delta^{1,0,-1} P_{101} \right] \cdot \vec{n},$$

en  $w^2$ , on trouve

$$N_{002} = 4. \left[ \Delta^{1,0,-1} P_{101} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{011} \right] \cdot \vec{n},$$

<sup>4</sup>Ce résultat est connu comme le théorème de Panzoult.

et, enfin, en  $uw$ , on trouve

$$N_{101} = 2. [\Delta^{1,0,-1}P_{200} \wedge \Delta^{0,1,-1}P_{011}] \cdot \vec{n} + 2. [\Delta^{0,1,-1}P_{110} \wedge \Delta^{1,0,-1}P_{101}] \cdot \vec{n},$$

et, avec ce formalisme, on a

$$\mathcal{J}(u, v, w) = u^2 N_{200} + 2uv N_{110} + v^2 N_{020} + 2vw N_{011} + w^2 N_{002} + 2uw N_{101}, \quad (16)$$

ce qui est exactement la forme cherchée et le résultat est établi. Notons que ce résultat est donné dans [13], en trois dimensions d'ailleurs, mais que les  $N_{ijk}$  ne sont pas explicites.

Le problème est de savoir si  $\forall(u, v, w)$ ,  $\mathcal{J}$  est strictement positif. Pour tout  $(u, v, w)$ , on sait que

$$\mathcal{J}(u_m, v_m, w_m) \leq \mathcal{J}(u, v, w) \leq \mathcal{J}(u_M, v_M, w_M),$$

où  $(u_m, v_m, w_m)$  correspond au minimum de  $\mathcal{J}$  et  $(u_M, v_M, w_M)$  correspond à son maximum. Avoir le jacobien  $\mathcal{J}$  positif impose que  $\mathcal{J}(u_m, v_m, w_m) > 0$ . Par conséquent, et c'est là le résultat important, si  $\mathcal{J}(u_m, v_m, w_m)$  est positif, le déterminant est positif pour toutes les valeurs de  $u$  et  $v$  et le triangle est valide.

Comme  $\mathcal{J}$  est non linéaire, le calcul de cet extremum est fastidieux<sup>5</sup>. Par suite, les propriétés des formes de Bézier vont pouvoir être utilisées pour définir des bornes plus simples.

**Interprétation géométrique de  $\mathcal{J}(u, v, w)$**  Le jacobien, du point de vue éléments finis, est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y})\mathcal{J}(\hat{A}_1) + \hat{x}(2\hat{x} - 1)\mathcal{J}(\hat{A}_2) + \hat{y}(2\hat{y} - 1)\mathcal{J}(\hat{A}_3) \\ &\quad + 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}\mathcal{J}(\hat{A}_4) + 4\hat{x}\hat{y}\mathcal{J}(\hat{A}_5) + 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{y}\mathcal{J}(\hat{A}_6). \end{aligned}$$

Il s'exprime aussi sous une forme de Bézier, d'après la Relation (16), comme

$$\mathcal{J}(u, v, w) = u^2 N_{200} + 2uv N_{110} + v^2 N_{020} + 2vw N_{011} + w^2 N_{002} + 2uw N_{101}.$$

D'après les propriétés des formes de Bézier, on a

$$\min_{ijk} N_{ijk} \leq \mathcal{J}(u, v, w) \leq \max_{ijk} N_{ijk},$$

ou encore

$$\min_{ijk} N_{ijk} \leq \mathcal{J}(u_m, v_m, w_m) \leq \mathcal{J}(u, v, w) \leq \mathcal{J}(u_M, v_M, w_M) \leq \max_{ijk} N_{ijk}.$$

Ainsi pour que  $\mathcal{J}(u, v, w) > 0$  partout, il suffit que  $\min_{ijk} N_{ijk} > 0$ . Il s'agit d'une condition suffisante garantissant la positivité du jacobien alors que la condition nécessaire est  $\mathcal{J}(u_m, v_m, w_m) > 0$  mais le calcul de  $\min_{ijk} N_{ijk}$  est aisé.

Si on considère la surface définie par l'ensemble des points  $M = (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}))$ , on obtient une quadrique plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . La condition de positivité du jacobien indique que cette surface doit être au dessus du plan  $z = 0$  dans le cas d'un triangle plan et au-dessus du plan du triangle P1 associé au triangle P2 considéré dans le cas d'un triangle de l'espace.

<sup>5</sup>En pratique, il est usuel (mais incorrect) d'utiliser un échantillon de nœuds pour évaluer cette positivité.

**Remarque.** Si  $dim$  est la dimension de l'espace des paramètres,  $d$  le degré des éléments finis, alors le degré  $q$  du polynôme jacobien est  $q = (d - 1) \times dim$ . Ici  $dim = 2, d = 2$ , donc  $q = 2$  également, c'est d'ailleurs le seul cas où  $q = d$ .

**Interprétation des  $N_{ijk}$ .** Rappelons, en premier lieu, la correspondance entre les  $P_{ijk}$ , avec les indices de la notation Bézier, et les  $A_i$  et  $C_i$ , avec les indices de la notation éléments finis. Elle se schématise comme :

$$\begin{array}{ccc} & P_{002} & \\ & P_{101} & P_{011} \\ P_{200} & P_{110} & P_{020} \end{array}$$

versus

$$\begin{array}{ccc} & A_3 & \\ & C_6 & C_5 \\ A_1 & C_4 & A_2 \end{array}$$

On va examiner  $N_{200}$  et  $N_{110}$ , les autres s'en déduisant facilement. Pour  $N_{200}$  on regarde le terme

$$\Delta^{1,0,-1} P_{200} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{110}.$$

Il vient, en notation Bézier,

$$(P_{200} - P_{101}) \wedge (P_{110} - P_{101})$$

donc, avec les  $A_i$  et les  $C_i$ ,

$$\overrightarrow{C_6 A_1} \wedge \overrightarrow{C_6 C_4}$$

soit, dit autrement,

$$\overrightarrow{A_1 C_4} \wedge \overrightarrow{A_1 C_6},$$

ainsi

$$N_{200} = 4. \left( \overrightarrow{A_1 C_4} \wedge \overrightarrow{A_1 C_6} \right) \cdot \vec{n}$$

qui n'est autre que le jacobien  $\mathcal{J}(\hat{A}_1)$  de la Relation (13) comme on pouvait s'y attendre ( $u = 1, v = w = 0$ ) d'après la Relation (16). Le "point" de contrôle est une surface de contrôle, huit fois la surface du triangle  $A_1 C_4 C_6$ .

Pour  $N_{110}$ , on regarde donc précisément le terme

$$\Delta^{1,0,-1} P_{200} \wedge \Delta^{0,1,-1} P_{020} + \Delta^{0,1,-1} P_{110} \wedge \Delta^{1,0,-1} P_{110}.$$

Il vient

$$(P_{200} - P_{101}) \wedge (P_{020} - P_{011}) + (P_{110} - P_{101}) \wedge (P_{110} - P_{011}),$$

soit également

$$\overrightarrow{C_6 A_1} \wedge \overrightarrow{C_5 A_2} + \overrightarrow{C_6 C_4} \wedge \overrightarrow{C_5 C_4},$$

par suite, il n'y a pas d'interprétation géométrique particulière.

Par contre, on a la relation (en faisant  $u = v = \frac{1}{2}, w = 0$ )

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = \frac{N_{200}}{4} + \frac{N_{110}}{2} + \frac{N_{020}}{4},$$

qui est identique à la relation liant "nœuds" milieux et "points" de contrôle, à savoir

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = \frac{2N_{110} + N_{200} + N_{020}}{4},$$

ou encore

$$\mathcal{J}(\hat{A}_4) = \frac{2N_{110} + \mathcal{J}(\hat{A}_1) + \mathcal{J}(\hat{A}_2)}{4}.$$

Avec, en sens inverse,

$$N_{110} = \frac{4\mathcal{J}(\hat{A}_4) - \mathcal{J}(\hat{A}_1) - \mathcal{J}(\hat{A}_2)}{2},$$

et des relations analogues pour les autres  $N_{ijk}$ .

### 5.3 Validité d'un triangle P2

La synthèse de ce qui précède donne une condition suffisante de validité. En premier, on rappelle que

$$\min_{ijk} N_{ijk} \leq \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y}) \leq \max_{ijk} N_{ijk}.$$

**Théorème** Le triangle de nœuds  $A_i$  est valide si  $\mathcal{J}(\hat{A}_i) > 0$  pour  $i = 1, 3$  et si  $4\mathcal{J}(\hat{A}_i) - \mathcal{J}(\hat{A}_j) - \mathcal{J}(\hat{A}_k) > 0$  pour  $i = 4, 6, j = i - 3$  et  $k = i - 2$  modulo 3.  $\square$

Si le minimum des  $N_{ijk}$  est atteint en l'un des trois premiers  $\hat{A}_i$ , la condition est nécessaire, sinon, elle est suffisante mais *a priori* trop forte.

On note également qu'il peut exister des  $N_{ijk}$  négatifs alors que le jacobien est bien positif. Cela signifie que l'on peut, au prix de calculs supplémentaires, affiner la condition suffisante.

L'intérêt de ce résultat est qu'il montre qu'il suffit de calculer les 6 jacobiens associés aux nœuds pour valider l'élément. On peut se demander si cela reste vrai en toute dimension et pour tout les degrés. La section suivante aborde ces questions tandis que [6] regarde le cas de la trois dimension (et la réponse sera négative).

### 5.4 Extension aux degrés supérieurs

L'élément fini de Lagrange de degré  $n$  quelconque s'écrit

$$\sigma(u, v) = \sigma(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k},$$

où les  $P_{ijk}$  sont les points de contrôle. Le jacobien s'écrit

$$\mathcal{J}(u, v) = \mathcal{J}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=m} B_{i,j,k}^m(u, v, w) N_{i,j,k},$$

où les  $N_{ijk}$  sont les "jacobiens" de contrôle et  $m = 2(n - 1)$ . Cette expression permet de trouver les conditions suffisantes de validité.

Il est immédiat de vérifier que

$$N_{m00} = \mathcal{J}(1, 0, 0) = \mathcal{J}(\hat{A}_1),$$

$$N_{0m0} = \mathcal{J}(0, 1, 0) = \mathcal{J}(\hat{A}_2),$$

$$N_{00m} = \mathcal{J}(0, 0, 1) = \mathcal{J}(\hat{A}_3),$$

par contre, les autres  $N_{ijk}$  ne s'expriment pas, *a priori*, en fonction uniquement des jacobiens évalués en l'image des nœuds de l'élément  $\hat{K}$  puisque  $m \neq n$  (voir plus bas, le cas du degré 3).

**Degré 3 : passage contrôles-nœuds et passage nœuds-contrôles.** On fixe  $n = 3$ , en reprenant pour les indices la numérotation habituelle (les trois sommets puis, dans l'ordre des arêtes, les nœuds), il est facile d'établir que

$$A_4 = \frac{8A_1 + 12C_4 + 6C_5 + A_2}{27},$$

$$A_5 = \frac{A_1 + 6C_4 + 12C_5 + 8A_2}{27},$$

où  $C_4$  et  $C_5$  sont les contrôles de l'arête  $A_1A_2$ . Inversement, les relations donnant  $C_4$  et  $C_5$ , en fonction des nœuds, sont :

$$C_4 = \frac{-5A_1 + 18A_4 - 9A_5 + 2A_2}{6},$$

$$C_5 = \frac{2A_1 - 9A_4 + 18A_5 - 5A_2}{6}.$$

Les autres nœuds d'arête, de  $A_6$  à  $A_9$ , se définissent de la même manière à partir des autres points de contrôle.

**Degré 3 : les  $N_{ijk}$  en fonction des jacobiens associés aux nœuds.** Il est clair que les trois premiers  $N_i$ , avec les indices de la numérotation habituelle, sont

$$N_1 = \mathcal{J}(\hat{A}_1), \quad N_2 = \mathcal{J}(\hat{A}_2) \quad \text{et} \quad N_3 = \mathcal{J}(\hat{A}_3).$$

Les  $N_{ijk}$  sont au nombre de 15, trois sont donc évalués en fonction des nœuds (sommets) de l'élément. Pour voir si les autres sont calculables de la même façon, on va instancier  $\mathcal{J}$  pour des valeurs particulières de  $u, v$  et  $w$ . Ainsi

- pour  $w = 0$ , on fixe successivement  $u = \frac{3}{4}, u = \frac{1}{2}$  et  $u = \frac{1}{4}$  avec  $v = 1 - u$ .  
On a donc

$$\mathcal{J}(u, v) = u^4 N_{4000} + 3u^3 v N_{3100} + 6u^2 v^2 N_{2200} + 3uv^3 N_{1300} + v^4 N_{0400},$$

noté encore

$$\mathcal{J}(u, v) = u^4 N_1 + 3u^3 v N_4 + 6u^2 v^2 N_5 + 3uv^3 N_6 + v^4 N_2.$$

On a un système de 3 équations pour 3 inconnues. Par suite, les 3  $N_i$  s'expriment bien en fonction des  $\mathcal{J}$  suivants,  $\mathcal{J}(\hat{A}_1)$ ,  $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$ ,  $\mathcal{J}(\hat{A}_4)$ ,  $\mathcal{J}(\hat{A}_5)$  et  $\mathcal{J}(\hat{A}_6)$  avec, par exemple,  $\mathcal{J}(\hat{A}_4) = \mathcal{J}(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ .

- pour  $v = 0$ , la même méthode conduit à trouver les 3  $N_{ijk}$  correspondants,
- pour  $u = 0$ , de même pour les  $N_{ijk}$  correspondants.

À ce stade, on connaît 12  $N_{ijk}$ . Pour évaluer les 3 derniers, on utilise la même démarche, on instancie  $\mathcal{J}$  en trois points internes, le choix le plus naturel est de choisir  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  et  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ . On obtient un système de 3 équations à 3 inconnues. Par suite la solution est connue et tout les  $N_{ijk}$  sont connus.

Nos instanciations reviennent à considérer les nœuds du triangle P4.

La condition suffisante reste que les  $N_{ijk}$  soient positifs. Dans la troisième partie de ce rapport, [6], on donne les formules explicites de ces termes pour un élément de degré quelconque en dimension quelconque.

En remarque finale, on note que l'évaluation de la validité de l'élément **ne fait pas** intervenir que les jacobiens aux nœuds de l'élément (sauf pour le triangle P2 en dimension 2 qui, d'ailleurs, est le seul cas de ce type).

## 6 Éléments triangulaires P2 faux

Un maillage P2 est faux si au moins l'un de ses triangles P2 est faux. Un triangle est faux si son jacobien, en un nœud d'évaluation quelconque est négatif ou nul. Géométriquement, cela signifie un problème au niveau des tangentes en un sommet, une intersection entre deux arêtes (auto-intersection de l'élément lui-même), un chevauchement entre deux éléments (donc une auto-intersection de l'un des deux) ou un élément retourné (donc encore une auto-intersection quelque part).

### 6.1 Élément courbe

Un triangle courbe P2 (sommets  $A_1, A_2, A_3$  et points de contrôle  $C_4, C_5, C_6$ ) est faux dès lors que son jacobien, en un point interne ou un point de son bord, est négatif ou nul. Plusieurs cas, *a priori* contre-intuitifs, existent pour lesquels un jacobien est strictement nul en un nœud du bord de l'élément en question alors que, visuellement, tout semble normal.

- un triangle avec son arête  $A_1A_2$  droite et tel que l'arête  $A_3A_1$  soit courbe avec comme tangente en  $A_1$  la droite portée par  $A_1A_2$ . Donc,  $A_1, C_6$  et  $A_2$  sont alignés et le premier jacobien est nul car  $C_4$  est sur  $A_1A_2$ . On nomme un tel triangle, *triangle auto-tangent à angle nul*.
- un triangle avec son arête  $A_3A_1$  droite et tel que l'arête  $A_1A_2$  soit courbe avec comme tangente en  $A_1$  la droite portée par  $A_1A_3$ . Donc,  $A_3, A_1$  et  $C_4$  sont alignés et le premier jacobien est nul car  $C_6$  est sur  $A_1A_3$ . On nomme un tel triangle, *triangle auto-tangent à angle plat*.
- un triangle avec ses arêtes  $A_1A_2$  et  $A_3A_1$  courbes avec une tangente en  $A_1$ , à droite, identique à la tangente en  $A_1$  à gauche. Donc,  $C_6, A_1$  et  $C_4$  sont alignés et le premier jacobien est encore nul. On nomme un tel triangle, comme ci-dessus, *triangle auto-tangent à angle plat*.
- plus surprenant est le cas d'un triangle tel que  $h_5 + h_6 = h_4$  où  $h_i$  désigne la hauteur issue de  $C_i$  dans le triangle appuyé sur l'arête, vue comme droite, associée à  $C_i$  où le jacobien au nœud d'évaluation associé à  $C_i$  est nul. Dans notre exemple, c'est en  $\hat{A}_4$  pour l'arête  $A_1A_2$  que le quatrième jacobien est nul. On nomme un tel triangle, *triangle auto-pénétrant*.

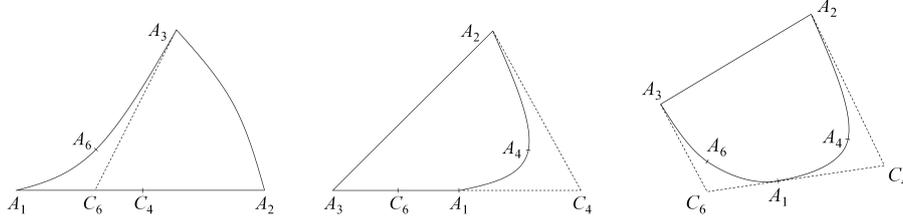


FIG. 6 – Trois exemples de triangles non valides. À gauche, triangle auto-tangent à angle nul, au milieu et à droite, triangles auto-tangents à angle plat. Pour simplifier les figures, certaines arêtes ne sont pas courbes.

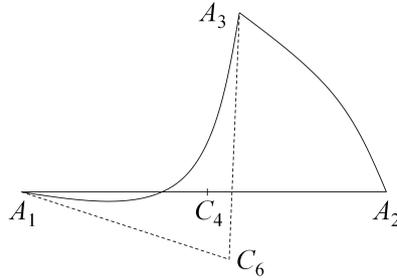


FIG. 7 – Un exemple de triangle auto-pénétrant ou auto-intersectant.

Une conséquence de cette situation est que à partir d'un maillage P2 correct d'une courbe, on peut, si l'on n'y prête garde, construire des triangles P2 dont un jacobien au bord est nul (la même remarque vaut évidemment dans la dimension supérieure, une surface P2 correcte peut conduire à construire des tétraèdres P2, voir [6], ayant un jacobien nul au bord) voire négatif.

Les autres cas d'invalidité réelle sont plus classiques, en fait l'élément lui-même, s'auto-intersecte<sup>6</sup> (pour le cas d'une surface, c'est identique, en supposant que la surface ne s'auto-intersecte pas elle-même (si deux éléments se coupent)) ou est à l'envers (surface orientable)).

Remarquons qu'il existe des triangles P2 courbes justes alors que leur surface P1 est nulle (les trois sommets sont alignés) voire négative (cas plan) ou à l'envers (surface orientable).

## 6.2 Élément droit

Le nœud milieu d'une arête ne doit pas être situé avant le quart ou après les trois-quarts, bornes comprises, de son arête. Une telle situation provoque une singularité ou une définition avec retournement. Ainsi, pour la première arête, si  $A_4$  est au quart de  $A_1A_2$ , on a  $\vec{v}$  qui est un vecteur nul dans l'expression de  $\mathcal{J}(\hat{A}_1)$  tandis que si  $A_4$  est aux trois-quarts, c'est le vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathcal{J}(\hat{A}_2)$  qui est un vecteur nul.

<sup>6</sup>situation inexistante pour un triangle P1.

### 6.3 Correction d'un maillage triangulaire P2 faux

**Triangles P2 plans.** Dans le cas plan, on suppose que les sommets et nœuds sont internes au domaine, alors une idée pour corriger le maillage est l'algorithme étonnamment simple suivant :

- Boucle sur les éléments
  - calculer les 3 premiers jacobiens,
  - si, par exemple, le premier (sommets  $A_1$ ) est (strictement) négatif, inverser les 2 points de contrôle associés ( $C_4$  et  $C_6$ ) s'ils sont libres,
  - dans le même cas, si un seul point de contrôle est libre, par exemple  $C_6$ , faire  $C_6 = C_4 - \varepsilon \overrightarrow{C_4 C_6}$  ( $\varepsilon$  petit),
  - dans le même cas, si les deux points de contrôle sont fixes (nœuds frontière), le maillage de la frontière est faux,
  - si ce jacobien est nul et si  $A_1$  est fixe, le maillage de la frontière n'est pas nécessairement faux mais on peut s'attendre à des conséquences en terme de qualité et supprimer cette pathologie (en ramenant, si c'est possible une arête sur  $A_1$ , ce qui revient à casser l'arête en face de  $A_1$ ),
  - si ce jacobien est nul et si  $A_1$  est libre, faire (même si ce n'est pas strictement nécessaire)  $A_1 = .5(C_4 + C_6)$  puis  $C_4 = C_4 + \varepsilon \overrightarrow{C_4 A_2}$  et  $C_6 = C_6 + \varepsilon \overrightarrow{C_6 A_3}$  ( $\varepsilon$  petit), ou faire comme ci-dessus (ramener une connexion sur  $A_1$ ),
- Fin
- Boucle sur les éléments
  - calculer les 3 autres jacobiens puis les quantités associées (les  $N_{ijk}$  associés aux nœuds milieux),
  - si, par exemple, cette quantité au premier (nœud  $A_4$ ) est non positive, calculer  $C_{56}$  le milieu du segment  $C_5 C_6$  et fixer  $C_4 = C_{56}$  si  $C_4$  est libre,
  - dans le même cas, si  $C_4$  est fixe (nœud frontière), le maillage de la frontière n'est pas nécessairement faux mais la qualité de l'élément est vraisemblablement douteuse.
- Fin

Notons que l'endroit où le jacobien est négatif ou nul indique l'endroit où les modifications sont à effectuer. En effet, par exemple si on considère un cas où c'est le premier jacobien qui est non valide, il est clair que l'on ne peut agir que sur  $A_1$ ,  $A_4$  ou  $C_4$  et  $A_6$  ou  $C_6$  puisque les autres entités n'influent pas sur la valeur de ce jacobien. Par contre, autre exemple, si le jacobien est non valide sur le nœud  $A_4$ , alors toutes les entités voisines des extrémités de l'arête portant  $A_4$  sont à prendre en compte, à savoir toutes les entités sauf  $A_3$ .

Dans le cas où le maillage de la frontière est faux, il faut retourner à la CAO, c'est-à-dire au code qui, partant de la définition des courbes, construit effectivement le maillage de celles-ci.

**Triangles P2 surfaciques.** Dans le cas surfacique, on suppose que la surface ne s'auto-intersecte pas (au sens où aucun couple de triangles ne s'intersecte), alors les algorithmes ci-dessus peuvent être utilisés pour donner un diagnostic sur une éventuelle pathologie du maillage (tous les sommets et nœuds étant réputés fixes).

Le plus simple est, pour un triangle donné, de construire un tétraèdre virtuel en définissant un quatrième sommet et 3 arêtes droites et d'évaluer divers jacobiens de ce tétraèdre (voir [6]) en fonction de leur pertinence à détecter telle ou telle pathologie.

- Boucle sur les éléments
  - construire un tétraèdre virtuel appuyé sur le triangle
  - calculer les premiers jacobiens (ceux associés aux sommets),
  - si, par exemple, le premier (sommet  $A_1$ ) est strictement négatif, l'arête  $A_1A_2$  coupe l'arête  $A_3A_1$  après projection (sur le plan tangent en  $A_1$ , plan défini de manière approchée),
  - si ce jacobien est nul, l'arête  $A_1A_2$  et l'arête  $A_3A_1$  ont des tangentes coplanaires identiques ou opposées,
- Fin

Ce cas est discuté plus en détails dans [4].

## 7 Construction d'un maillage P2 dans le plan

### 7.1 Les données

La donnée est une discrétisation (ou maillage) en segments courbes (courbe de Bézier de degré 2) de la frontière du domaine. Ce maillage doit être P2-P1 compatible.

**Compatibilité P2-P1 d'un maillage de courbe P2.** Un maillage de courbe P2 est P1 compatible si le maillage appuyé sur les seuls sommets du maillage P2 (avec des arêtes droites) est valide au sens où le domaine est bien défini par ce maillage. Ceci n'est pas nécessairement le cas dans des zones courbes, minces ou non. En pratique, deux cas de non compatibilité sont faciles à comprendre, le premier, le maillage P1 est auto-intersectant et, en second, le maillage P1 contient deux arêtes P1 extraites identiques (pensons à un cercle maillé avec seulement deux segments courbes P2).

**Remarques.** La donnée est considérée comme intouchable, elle ne peut être modifiée. L'algorithme peut détecter des erreurs de données (et le signaler) mais ne doit pas les corriger. Par ailleurs, si le maillage fourni n'est pas de bonne qualité, l'algorithme doit produire le résultat le meilleur possible mais ne doit pas, encore une fois, modifier les données.

### 7.2 Construction du maillage P1

On utilise le logiciel BL2D, [3], pour générer le maillage P1. Ce maillage est construit par une approche combinée frontale-Delaunay en considérant comme données uniquement les segments droits joignant les extrémités des segments courbes. Les sommets internes sont définis par une méthode frontale à partir de la discrétisation des frontières et sont connectés entre eux par une méthode de type Delaunay généralisée aux cas des métriques riemanniennes. Le maillage ainsi obtenu est alors optimisé par des méthodes classiques afin d'en améliorer la qualité en forme.

### 7.3 Transformation P1-P2

La construction du tableau des arêtes du maillage P1 permet d'attribuer facilement un numéro (un indice) aux nœuds des arêtes. Ceci fait, la transformation du maillage P1 en P2 comprend les quatre étapes suivantes :

- la génération du maillage P2 droit,
- la correction des nœuds frontaliers,
- la déformation du maillage,
- l'optimisation du résultat.

Les trois premiers points sont décrits ici, tandis que le dernier sera abordé dans la section suivante.

**Génération du maillage P2 droit.** Chaque arête du maillage P1 est transformée en une arête P2 par création de son nœud milieu qui est positionné au milieu de l'arête P1. On définit alors un champ de vecteurs, appelé *signature du maillage*, associé aux nœuds (les sommets et les nœuds d'arêtes) de ce maillage. Pour chaque nœud, le vecteur de ce champ est la somme pondérée des vecteurs formés par les arêtes issues du nœud qui le joignent à ses voisins (ce qui revient à considérer la boule P1 sous-jacente).

**Correction des nœuds frontaliers.** Les nœuds milieux des arêtes frontaliers sont repositionnés à leur position spécifiée (par la donnée initiale) donc sur le contour du domaine.

**Déformation du maillage.** À l'issue de l'étape précédente, le maillage résultant peut être non valide, des nœuds peuvent se retrouver en dehors du domaine. Pour rétablir la validité, on applique un algorithme itératif de déformation du maillage qui consiste à repositionner ses nœuds. Pour cela, à chaque itération, on minimise l'écart de la signature du maillage déformé par rapport à la signature du maillage P2 droit. Le maillage résultant doit avoir une signature proche de la signature du maillage P2 droit.

### 7.4 Notion de qualité et optimisation

On introduit, en premier, trois critères de mesure de qualité pour un élément  $K$  donné.

**La distorsion des jacobiens.** On définit  $Q_J(K)$  par :

$$Q_J(K) = \frac{\min_K \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})}{\max_K \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{y})}.$$

Ce critère permet de quantifier l'écart entre un élément P2 et l'élément P1 correspondant (construits sur ses seuls sommets). En pratique, on ne sait pas calculer efficacement ce critère, certains auteurs utilisent simplement les jacobiens des nœuds. Cependant, on pourrait utiliser les extrema des "points" de contrôle du jacobien (les  $N_{ijk}$ ).

**La distorsion des sous-triangles de Bézier.** On définit  $Q_S(K)$  par :

$$Q_S(K) = \frac{\sum_k |\alpha S_1 - S_k|}{S_1},$$

où  $S_k$  désigne la surface du  $k^{ieme}$  sous-triangles du découpage naturel du triangle  $K$  avec comme sommets les sommets et les points de contrôle du triangle P2,  $\alpha = \frac{1}{4}$  et  $S_1$  est la valeur absolue de la surface du triangle P1 de sommets les 3 sommets de  $K$ .

Remarquons que cette mesure est en pratique un moyen simple d'approcher la mesure précédente.

**La qualité en forme.**

$$Q_F(K) = \alpha \frac{\rho}{h}$$

où  $\alpha$  est un coefficient de normalisation,  $h$  est le diamètre de  $K$  et  $\rho$  est l'équivalent d'un rayon inscrit que l'on peut estimer en utilisant le rapport  $\frac{S}{p}$  avec  $S$  la surface de  $K$  et  $p$  le demi-périmètre de  $K$ . Ces quantités ( $S$  et  $p$ ) peuvent être approchées en considérant un sous-maillage P1 de  $K$  avec ses nœuds comme sommets. Cette définition n'est qu'une généralisation du critère utilisé en P1 et, dans le cas d'un triangle P2 droit, est strictement identique (ce qui est souhaitable). Par continuité, le coefficient  $\alpha$  est le même que celui du cas P1.

**Optimisation de ces critères.** On utilise des méthodes classiques de repositionnement de nœuds afin d'améliorer les critères ci-dessus. Notons que bouger un nœud sommet provoque le déplacement des nœuds d'arête adjacents (qui forment sa *grappe*). Notons, pour finir, que les autres opérateurs d'optimisation peuvent être également employés (basculer d'arêtes, fusion de nœuds (sommets), ajout de sommets, ...).

## 7.5 Quelques exemples

Pour illustrer la méthode de construction, nous montrons quelques exemples de maillages obtenus ainsi.

Le premier exemple, souvent utilisé pour des calculs par éléments finis, représente un quart de plaque trouée (Figure 8). Le maillage uniforme (de taille constante) contient 162 triangles P2 et 368 nœuds. Le maillage géométrique (de taille proportionnelle au rayon de courbure) contient 166 triangles P2 et 376 nœuds.

Dans le deuxième exemple en forme de "champignon" (Figure 9), la frontière du domaine est une courbe paramétrée par un polynôme de degré 5 en  $x$  et un polynôme de degré 2 en  $y$ . Le maillage uniforme contient 164 triangles P2 et 375 nœuds. Le maillage géométrique contient 163 triangles P2 et 370 nœuds.

Enfin, le troisième exemple (Figure 10) montre des maillages adaptés à un champ de taille qui impose un raffinement le long d'une courbe de Lissajous. Le maillage de gauche est isotrope (éléments presque équilatéraux) tandis que celui de droite est anisotrope (éléments allongés parallèlement à la courbe de Lissajous). Le maillage isotrope contient 38618 triangles P2 et 77285 nœuds. Le maillage anisotrope contient 17484 triangles P2 et 35001 nœuds.

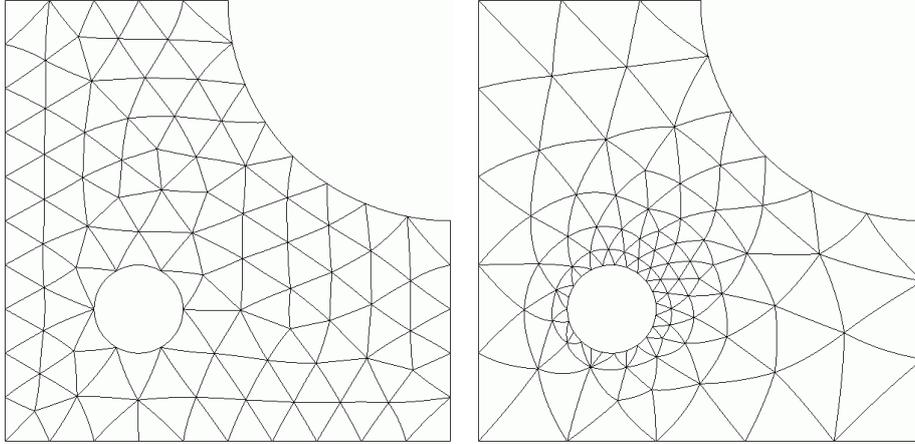


FIG. 8 – À gauche, maillage uniforme  $P2$  d'un quart de plaque trouée. À droite, maillage géométrique.

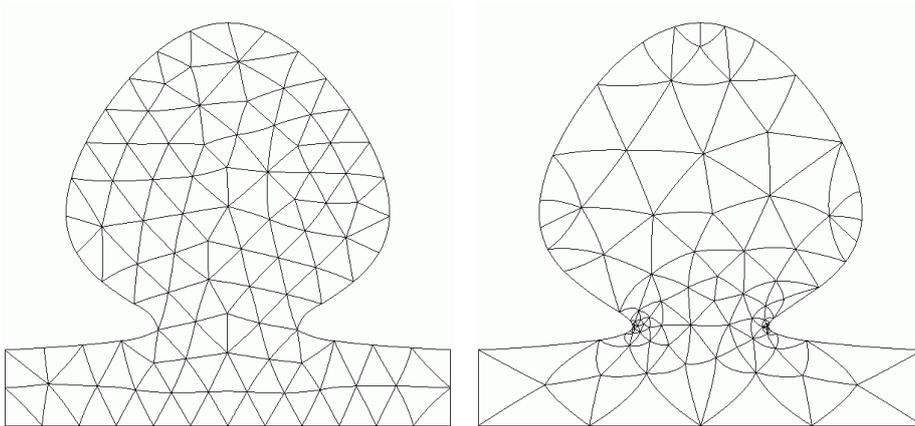


FIG. 9 – À gauche, maillage uniforme  $P2$  d'un domaine délimité par un polynôme de degré 5. À droite, maillage géométrique.

## 8 Conclusions

Après avoir donné quelques rappels sur les courbes et les triangles de Bézier et sur les éléments finis triangulaires  $P2$ , on a fait le lien entre ces triangles  $P2$  et les triangles de Bézier. De la sorte, on a exhibé une condition suffisante de validité. Incidemment, on a montré quelques pathologies correspondant à des éléments non valides en proposant des méthodes de correction. On a ensuite proposé une méthode de construction illustrée par quelques exemples.

Au passage, on a donné quelques remarques sur les éléments de degré plus élevé.

Le cas des surfaces gauches constitue la seconde partie de ce papier, [4], le cas volumique est traité dans la partie trois, [6].

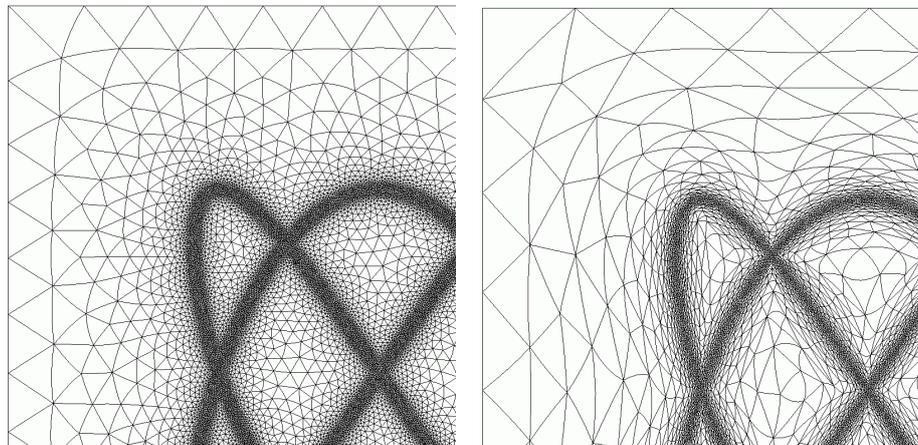


FIG. 10 – À gauche, maillage isotrope  $P2$  raffiné le long d'une courbe de Lissajous. À droite, maillage anisotrope.

## Remerciements

Nous tenons à remercier Dominique Chapelle et Marina Vidrascu (EPI Macs, INRIA Paris-Rocquencourt) pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur le sujet ainsi que Jean Louis Batoz (UTC) pour quelques échanges instructifs de courriers électroniques, et enfin, nos collègues de Distène qui, dans le cadre du I-Lab **Gamma3**-Distène, nous ont motivé dans cette étude.

## Références

- [1] P. BÉZIER, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.
- [2] H. BOROUCAKI AND P.L. GEORGE, Quality mesh generation, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Concise review paper, t. 328, Serie II-b, pp. 505-518, 2000.
- [3] P. LAUG AND H. BOROUCAKI, The BL2D Mesh Generator, Beginner's Guide, User's and Programmer's Manual, *RT INRIA 0194 (0185 in French)*, 1996.
- [4] H. BOROUCAKI ET P. LAUG, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 2 : Surface  $P2$ , à paraître.
- [5] S. DEY, R.M. O'BARA AND M.S. SHEPHARD, Curvilinear mesh generation in 3D, *8<sup>th</sup> Inter. Meshing Roundtable*, pp. 407-417, 1999.
- [6] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Construction d'un maillage de degré 2. Partie 3 : Tétraèdre  $P2$ , à paraître.
- [7] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method*, North Holland, 1978.
- [8] P.G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds, North Holland, 17-352, 1991.
- [9] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*. 5<sup>th</sup> edition, Academic Press, 2002.
- [10] P.J. FREY AND P.L. GEORGE, *Mesh Generation*, 2<sup>nd</sup> edition, ISTE and Wiley, 2008.

- [11] S.J. SHERWIN AND J. PEIRO, Mesh generation in curvilinear domains using high-order elements, *Int. J. Numer. Meth. and Engng.*, 55, 207-223, 2002.
- [12] X.J. XUO, M.S. SHEPHARD, R.M. O'BARA, R. NATASIA AND M.W. BEAL, Automatic p-version mesh generation for curved domains, *Eng. with Comp.*, 20, 273-285, 2004.
- [13] O. SAHNI, X.J. XUO, K.E. JANSE AND M.S. SHEPHARD, Curved boundary layer meshing for adaptive viscous flow simulations, *FEAD*, 46, 132-139, 2010.



---

Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Centre de recherche INRIA Bordeaux – Sud Ouest : Domaine Universitaire - 351, cours de la Libération - 33405 Talence Cedex  
Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier  
Centre de recherche INRIA Lille – Nord Europe : Parc Scientifique de la Haute Borne - 40, avenue Halley - 59650 Villeneuve d'Ascq  
Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex  
Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex  
Centre de recherche INRIA Saclay – Île-de-France : Parc Orsay Université - ZAC des Vignes : 4, rue Jacques Monod - 91893 Orsay Cedex  
Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399