



HAL
open science

Systèmes dynamiques hybrides pour les communications privées

Hamid Hamiche, Malek Ghanes, Jean-Pierre Barbot

► **To cite this version:**

Hamid Hamiche, Malek Ghanes, Jean-Pierre Barbot. Systèmes dynamiques hybrides pour les communications privées. CIFA, Jun 2010, Nancy, France. pp.6. inria-00531075

HAL Id: inria-00531075

<https://inria.hal.science/inria-00531075>

Submitted on 2 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Systèmes dynamiques hybrides pour les communications privées

Hamid HAMICHE¹, Malek GHANES¹, Jean-Pierre BARBOT^{1,2}

¹ ECS, ENSEA,

6 avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France

² EPI-ALIEN, INRIA.

{hamid.hamiche, ghanes, barbot}@ensea.fr

Résumé— Dans ce travail, un schéma de transmission à base de dynamique hybride et chaotique pour les communications privées est proposé. L'émetteur est constitué d'un système en temps continu et d'un système en temps discret dans lequel le message est inséré à l'aide de la méthode dite par inclusion. Les états du système continu sont eux aussi après échantillonnage inclus dans le système discret. Le récepteur est constitué d'un observateur en temps discret retardé et d'un observateur en temps continu. Le principe de la méthode hybride proposée est de montrer que la reconstitution des états du récepteur discret ainsi que le message passe d'abord par la synchronisation des deux systèmes chaotiques en temps continu. Cette nouvelle stratégie robustifie le système de transmission, notamment à une attaque à texte clair connu. Les résultats de simulation sont présentés afin d'étudier les performances de la méthode proposée.

I. INTRODUCTION

Depuis quelques années, la théorie des systèmes non linéaires complexes et surtout chaotiques a été appliquée à la cryptographie, afin de proposer d'autres méthodes de chiffrement. En 1990, T. Pecorra et L. Carroll [15] ont montré la possibilité de synchroniser des systèmes chaotiques. Alors, de nombreux schémas de chiffrement basés sur le chaos ont été proposés dans la littérature. En revanche, très peu de travaux ont réellement fait le lien entre les algorithmes de chiffrement standard et ceux basés sur la génération de séquences chaotiques. En cryptographie usuelle, parmi une grande variété de mécanismes de chiffrement, on distingue le chiffrement symétrique et le chiffrement à clé publique. Un lien entre le chiffrement symétrique standard et le chiffrement par inclusion basé sur le chaos a été proposé par F. Anstett [1]. D'autres méthodes de chiffrement utilisant les systèmes chaotiques ont été proposées dans la littérature, parmi lesquelles, on peut citer la méthode par addition [17], la modulation paramétrique [14], la modulation chaotique [5], etc. Ces méthodes sont toutes basées sur la synchronisation du récepteur avec l'émetteur, afin de pouvoir extraire le message initialement noyé dans la porteuse chaotique. En 1997, H. Nijmeijer et I. Mareels [12] ont montré que la synchronisation unidirectionnelle des systèmes chaotiques peut être considérée comme un problème de synthèse d'observateur. Différents types d'observateurs sont alors proposés pour les systèmes chaotiques (observateurs destinés uniquement à reconstruire les états de l'émetteur) [8] et

aussi pour les systèmes chaotiques à entrées inconnues (observateurs destinés à reconstruire les états de l'émetteur et récupérer l'information) [2]. Le fonctionnement correct de ces observateurs dépend de plusieurs conditions : la condition d'observabilité pour retrouver les états du système ; la condition de recouvrement de l'observabilité ("observability matching condition") pour retrouver les états du système et l'information noyée dans le système (inversibilité à gauche du système) ; la condition d'identifiabilité des paramètres qui représente les clés de codage. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un schéma de transmission constitué de systèmes dynamiques hybrides. L'émetteur est composé d'un système chaotique continu dit de Colpitts et d'un système chaotique discret dit de Hénon. Le récepteur est composé d'un observateur continu et d'un observateur discret. Au niveau de l'émetteur, des états du système continu seront introduits dans la dynamique du système discret dans le but de rendre sa structure plus complexe. Le nouveau système hybride, ainsi obtenu rend le système difficilement observable car il permet d'avoir plus de paramètres inconnus que d'équations et ceci même dans les attaques à textes clairs connus. La sortie transmise au récepteur est composée d'un signal de synchronisation issu du système continu et d'un signal utile qui contient le message (ajouté par la méthode d'inclusion) issu du système discret. Pour avoir une bonne transmission, il est nécessaire d'avoir un rapport signal utile sur signal de transmission le plus proche de 1 possible. La reconstitution des états ainsi que le message de l'observateur discret passe par la synchronisation des deux systèmes chaotiques continus (émetteur et récepteur) avant la synchronisation des systèmes en temps discret. Cette méthode présente néanmoins l'avantage que les deux systèmes peuvent se resynchroniser en cas de perte de synchronisation. Notre travail est structuré comme suit : Dans la section 2, nous présentons le principe de notre méthode en étudiant séparément l'émetteur et le récepteur du système de transmission. La section 3 est consacrée à la présentation des résultats de simulation. Enfin, nous terminons, comme il est de tradition par une conclusion.

II. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE

Dans ce travail, nous avons réalisé un système de communication basé sur la synchronisation de systèmes chaotiques hybrides à l'aide d'observateurs. Le schéma global de notre système pour les communications privées est montré par la figure 1. Ici, dans le but de simplifier notre exposé, les retards ajoutés entre la partie continue et discrète ont été supprimés. Ceux-ci n'ont pour but que de robustifier encore le système par rapport à une attaque à texte clair connu.

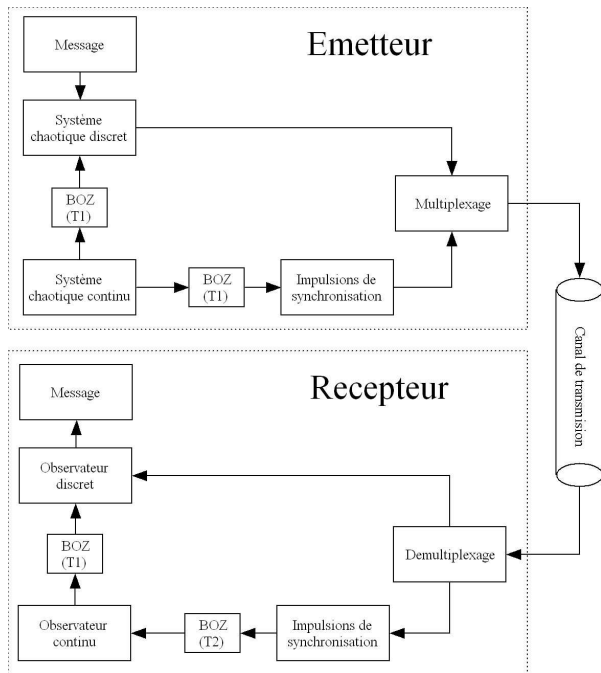


Fig. 1. Synchronisation de la chaîne de transmission basée sur un système dynamique hybride

Le développement de la méthode se fait comme suit :

A. Etude de l'émetteur

L'émetteur est constitué de trois blocs : un système chaotique continu, un système chaotique discret et un bloc de synchronisation d'impulsions. Ces blocs sont détaillés de la manière suivante :

A.1 Etude du système chaotique continu

Ce système a été largement étudié dans la littérature ([10], [11]). Les équations normalisées du Colpitts en temps continu sont données comme suit :

$$\Sigma_C : \begin{cases} \dot{z}_1 = (g/Q(1-k))(-\exp(-z_2) + 1 + z_3) \\ \dot{z}_2 = (g/Q(k))z_3 \\ \dot{z}_3 = -(Qk(1-k)/g)(z_1 + z_2) - (1/q)z_3 \end{cases}$$

Pour avoir un comportement chaotique, les paramètres du système (1) sont donnés comme suit : $g = 4.46$; $Q = 1.38$ et $k = 0.5$ avec $z_1(0) = 1.6$; $z_2(0) = 8$ et $z_3(0) = 0.1$, les conditions initiales du système.

Tout d'abord, nous étudions l'observabilité du système avec $y_1 = z_1$ sa sortie. En utilisant les travaux de [9], il est aisé

de montrer que le rang de la matrice d'observabilité du système (1) est égal à 3, donc le système est localement faiblement observable. Par conséquent, il est possible de retrouver tous les états à partir de la sortie $y_1 = z_1$ et de ses dérivées.

A.2 Etude du système chaotique discret

Le système chaotique en temps discret utilisé dans notre travail est dit système de Hénon modifié. Ce système a été largement étudié dans la littérature, on peut citer par exemple les travaux de Vesely [16]. Il est donné par les équations suivantes :

$$\Sigma_D : \begin{cases} x_1(n+1) = a - x_2^2(n) - bx_3(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = x_2(n) \end{cases} \quad (1)$$

Pour avoir un comportement chaotique, les paramètres du système (2) sont donnés comme suit : $a = 1.76$ et $b = 0.1$ avec $x_1(0) = 0.1$; $x_2(0) = 0.1$ et $x_3(0) = 0.1$, les conditions initiales du système. Au niveau de l'émission, notre objectif est de rendre la structure du système discret plus complexe. Pour cela, nous allons introduire (sans retard) dans la dynamique du système en temps discret, les états z_1 , z_2 et z_3 du système en temps continu. Il est à noter que les états du système continu seront d'abord échantillonnés avec une période $T1$ avant d'être introduits dans le système en temps discret. Cette période $T1$ (dont la valeur est donnée en simulation) est choisie pour assurer la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur des deux systèmes en temps continu (cet argument est détaillé en section (II-B.1)). Malgré, le fait que le système de Hénon soit un système en temps discret pur, sans aucun lien avec le temps, ici, chaque itération sera faite après une période de temps fixe $T1$. Ce choix de fréquence fixe a été fait pour simplifier la mise en oeuvre du récepteur.

Dans cette partie, nous allons utiliser le système donné par (2) comme émetteur avec $y_2(n) = x_2(n)$, la sortie du système.

Dans notre travail, nous avons ajouté les deux états (z_2 , z_3) et le message m sur la troisième dynamique du système (2). Le détail de la reconstruction des états et du message m est donné dans la section (II-B.2). Le nouveau système hybride obtenu est donné comme suit :

$$\Sigma_H : \begin{cases} x_1(n+1) = a - x_2^2(n) - bx_3(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = x_2(n) + Az_2(n) + Bz_3(n) + Cm(n) \end{cases} \quad (2)$$

Avec : A , B et C des nouveaux coefficients du système en temps discret et m le message à envoyer. Pour conserver le comportement chaotique du système défini par (3), ces paramètres doivent être choisis avec précaution. Dans notre cas, il faut respecter les valeurs suivantes : $A \leq 0.04$, $B \leq 0.1$ et $C \leq 1$.

En utilisant les travaux ([4],[6]), il est facile de montrer que le rang de la matrice d'observabilité du système (3) est égale à 3, donc le système est localement observable. De plus, la condition de recouvrement d'observabilité a été

vérifiée, ici, le message n'intervient qu'après 3 itérations. En conséquence, il est alors possible de reconstituer tous les états et le message à partir de la sortie et de ses sorties retardées. En utilisant les méthodes (approche égalité des sorties et approche relation entrée-sortie) détaillées dans les travaux de [1], il est facile de montrer que le système (3) est identifiable à partir de la connaissance de la sortie et de suffisamment de ces itérations et du message si les variables continues ne changent pas fréquemment.

A.3 Etude du bloc de multiplexage

Le signal de sortie $y_1 = z_1$ issu du système en temps continu sera d'abord échantillonné avec un pas d'échantillonnage T_2 mais bloqué uniquement durant T_1 . Le signal $y_1 = z_1$ joue le rôle du signal de synchronisation, il est envoyé dans le canal pendant une durée T_1 . Quant au signal y_2 , il sera envoyé pendant 9 durées T_1 . Le système en temps discret n'est pas itéré pendant le dixième cycle (T_1) qui correspond à l'envoi du signal de synchronisation. Le cycle se compose donc de 10 durées T_1 , comme l'illustre le chronogramme ci-dessous.

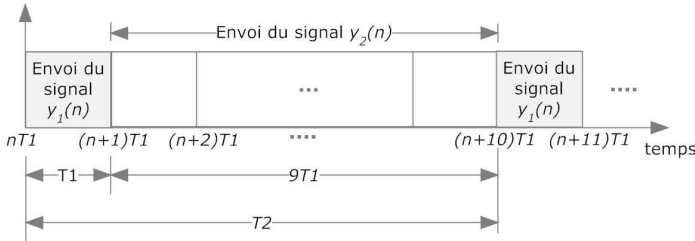


Fig. 2. Cycles de transmission des signaux y_1 et y_2

B. Etude du récepteur

Le récepteur est constitué de trois blocs : un observateur chaotique en temps continu, un observateur chaotique en temps discret et un bloc de synchronisation d'impulsions.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'étude de la synchronisation entre les émetteurs et les récepteurs du schéma de transmission proposé. Nous allons présenter les deux observateurs respectivement continu et discret permettant de synchroniser les systèmes (1) et (3) respectivement avec leurs récepteurs.

B.1 Etude de l'observateur chaotique à temps continu

Soit le système (1), avec la sortie $y_1 = z_1$. Le but est de concevoir un observateur réduit de type Parlitz [14] qui permet à partir, de la sortie $y_1 = z_1$, de reconstruire les états du système (1) (notés $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$).

Les équations de l'observateur sont données par (4) :

$$\Sigma_{OC} : \begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = (g/Q(1-k))(-\exp(\hat{z}_2) + 1 + \hat{z}_3) \\ \quad + K(z_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_2 = (g/Q(k))\hat{z}_3 \\ \dot{\hat{z}}_3 = -(Qk(1-k)/g)(\hat{z}_1 + \hat{z}_2) - (1/q)\hat{z}_3 \end{cases}$$

Le gain K est choisi de telle sorte que la dynamique de l'erreur de synchronisation $e_1 = z_1 - \hat{z}_1$ soit stable. Ceci

permet d'assurer la convergence de l'erreur de synchronisation $e_3 = z_3 - \hat{z}_3$ vers zéro et par conséquent la convergence de l'erreur de synchronisation $e_2 = z_2 - \hat{z}_2$ vers zéro. La période d'échantillonnage $T_2 = 10T_1$ est choisie en accord avec le théorème de Shannon.

B.2 Etude de l'observateur chaotique discret

Dans cette partie, nous considérons le système donné par (3) avec $y_2(n) = x_2(n)$ sa sortie correspondante. Pour la réception, en utilisant les travaux de ([4], [6]), nous allons concevoir un observateur en temps discret retardé, fonctionnant à la période T_1 , de la façon suivante :

- Construction de l'état \hat{x}_1 :

A partir du système (3), on a :

$$\hat{x}_2(n+1) = \hat{x}_1(n) \quad (3)$$

En appliquant un retard sur la sortie, on déduit l'état \hat{x}_1 comme suit :

$$\hat{x}_1(n-1) = y_2(n)$$

- Construction de l'état \hat{x}_3 :

Du système (3), on a également :

$$\hat{x}_3(n) = (a - \hat{x}_1(n+1) - \hat{x}_2^2(n))/b \quad (4)$$

Appliquant cette fois deux retards sur la sortie et en utilisant l'équation (5), on obtient l'état \hat{x}_3 :

$$\hat{x}_3(n-2) = (a - y_2(n) - y_2^2(n-2))/b$$

- Construction du message \hat{m} :

Du système (3), on a :

$$m(n) = (\hat{x}_3(n+1) - \hat{x}_2(n) - A\hat{z}_2(n) - B\hat{z}_3(n))/C \quad (5)$$

En appliquant cette fois-ci trois retards sur la sortie et en utilisant l'équation (6), on aura :

$$m(n-3) = \frac{a - y_2(n) - y_2^2(n-2)}{bC} - \frac{y_2(n-3) + A\hat{z}_2(n-3) + B\hat{z}_3(n-3)}{C} \quad (6)$$

L'équation (7) permet de reconstituer le message mais ceci uniquement après synchronisation des deux systèmes continus ((1)et(4)).

B.3 Etude du bloc de démultiplexage

A la réception, le signal reçu sera d'abord démultiplexé en deux signaux y_1 et y_2 . Le signal y_1 qui n'est accessible que durant la période T_1 est maintenant mémorisé sur une période $T_2 = 10T_1$ (voir figure 2). Ensuite, il est introduit dans l'observateur continu. L'autre signal y_2 est accessible pendant 9 cycles et change tous les cycles. Il est introduit dans l'observateur discret (voir figure 2).

III. RÉSULTATS DE SIMULATIONS

Dans cette section, les performances de la méthode proposée seront étudiées en utilisant le logiciel Matlab/Simulink.

Nous allons d'abord présenter les résultats de simulation sur les synchronisations des deux systèmes continus. Le gain K est égal à 1. Il est choisi pour assurer la stabilité de l'observateur (convergence des différentes erreurs de synchronisation données dans la section II-B.1). Les conditions initiales choisies de l'observateur (4) sont : $\hat{z}_1(0) = 1.8$, $\hat{z}_2(0) = 3$ et $\hat{z}_3(0) = 0$. Celles du système émetteur sont données dans la section II-A.1.

A. Résultats de synchronisation des deux systèmes continus

Les figures (3, 5 et 7) et (4, 6 et 8) présentent respectivement les états et leurs écarts de synchronisation. À partir de $t = 15s$, nous pouvons remarquer que les pourcentages d'erreurs sur e_1 , e_2 et e_3 (Figures (4, 6 et 8)) sont de l'ordre de 4.2%, 0.8% et 0.08%. Ce constat nous permet d'affirmer que les erreurs sont négligeables et tous les états sont bien estimés par l'observateur en temps continu.

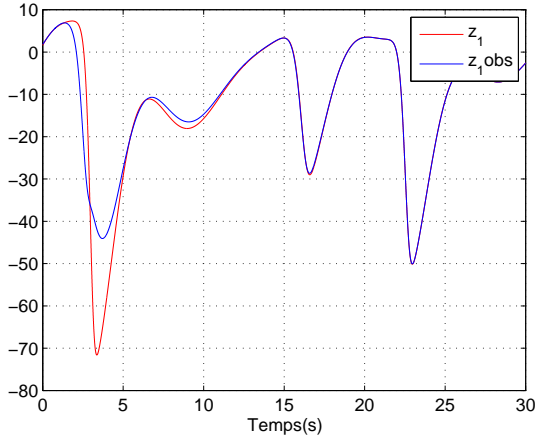


Fig. 3. z_1 et \hat{z}_1

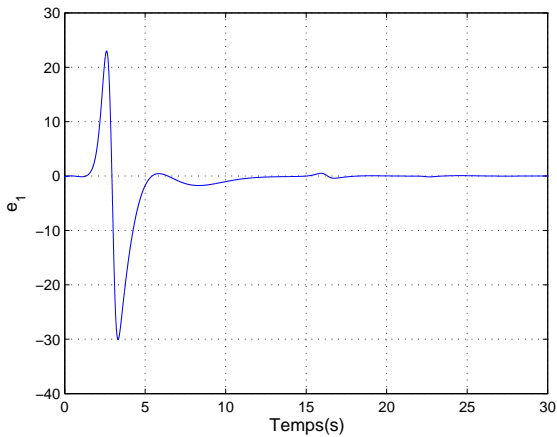


Fig. 4. Erreur de synchronisation sur l'état z_1

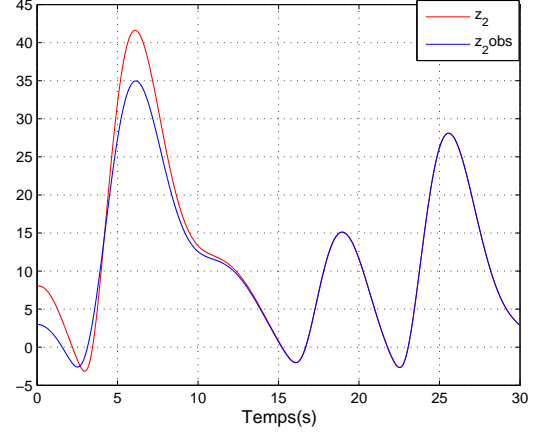


Fig. 5. z_2 et \hat{z}_2

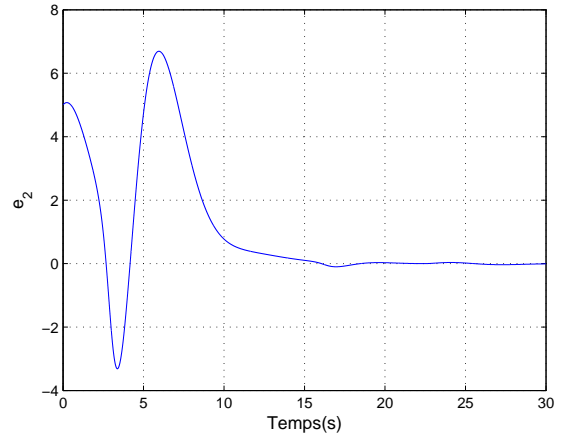


Fig. 6. Erreur de synchronisation sur l'état z_2

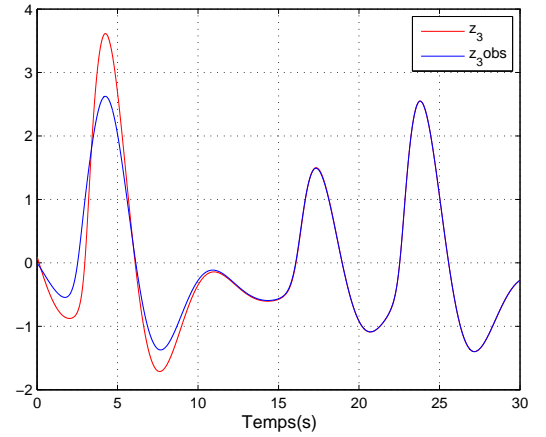


Fig. 7. z_3 et \hat{z}_3

B. Résultats de synchronisation des deux systèmes hybrides

Dans ce qui suit, nous allons présenter les résultats de simulation sur la synchronisation des deux systèmes hybrides, c-à-d le système (3) et l'observateur détaillé dans la section (II-B.2). Les nouveaux paramètres A , B , C de cet observateur sont : $A = 0.04$, $B = 0.1$ et $C = 1$ et le message à envoyer est un signal carré d'amplitude égale à

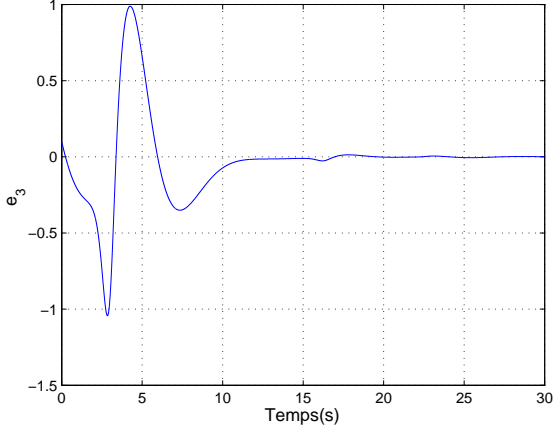


Fig. 8. Erreur de synchronisation sur l'état z_3

C (le choix de ces amplitudes est justifié juste après l'observateur (3)). Dans notre cas, tous les systèmes en temps continu (1) et (4) et en temps discret (3) et (II-B.2) fonctionnent toujours à la période $T1 = 0.001s$. Quand à la sortie (y_1 et y_2) du système émetteur, elle est transmise dans le canal de transmission à chaque période $T2 = 10T1$.

Les figures (9, 11) et (10, 12) présentent respectivement les états et les écarts de synchronisation du système hybride avec son observateur correspondant. Notons que les états x_1 et x_3 ne dépendent pas des états z_1 , z_2 et z_3 du système continu. Ceci permet de bien constater que l'écart sur $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ s'annule après une période $T1 = 0.001s$ qui correspond à un retard d'un pas sur la sortie (en accord avec l'équation (5)) et l'écart sur e_3 s'annule après une période $T = 2T1 = 0.002s$ qui correspond à un retard de deux pas sur la sortie (en accord avec l'équation (6)). Par contre, la reconstitution du message m (voir équation (7)) dépend de la synchronisation des états z_1 , z_2 et z_3 de l'émetteur en temps continu (1) et du récepteur en temps continu (4). On peut remarquer sur les figures précédentes ((3, 5 et 7) et (4, 6 et 8)) que le temps de synchronisation de ces deux systèmes ((1) et (4)) se produit à $t = 15s$. Ce n'est qu'à partir de cet instant que le message est reconstitué (voir figures 13 et 14).

IV. CONCLUSION

Dans ce papier, un schéma de transmission basé sur des systèmes dynamiques hybrides a été conçu pour les communications privées. Dans la partie émetteur, un système chaotique en temps continu dit de Colpitts est combiné avec un système en temps discret dit de Hénon dans le but de réaliser une structure complexe de l'émetteur qui soit "robuste" notamment à une attaque à texte clair connu. Ici, le système doit encore être robustifié en introduisant des retards [18] et aussi en faisant intervenir les états continus de façon à ne pas respecter la condition de recouvrement de l'observabilité. (Ceci sera développé dans nos travaux ultérieures). Dans le canal de transmission, les sorties envoyées ont été choisies en accord avec la condition de rang d'observabilité pour le système en temps continu (Colpitts) et avec la condition de rang d'observabilité et la condition de

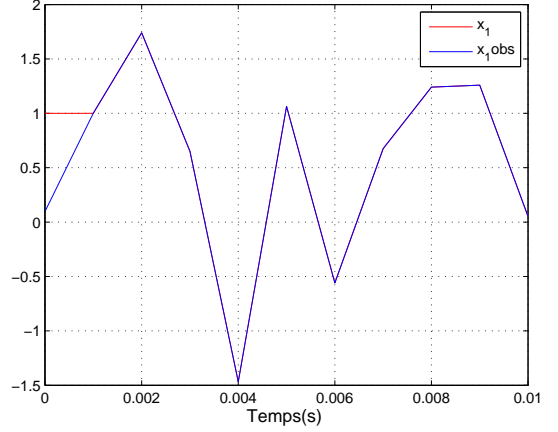


Fig. 9. x_1 et \hat{x}_1

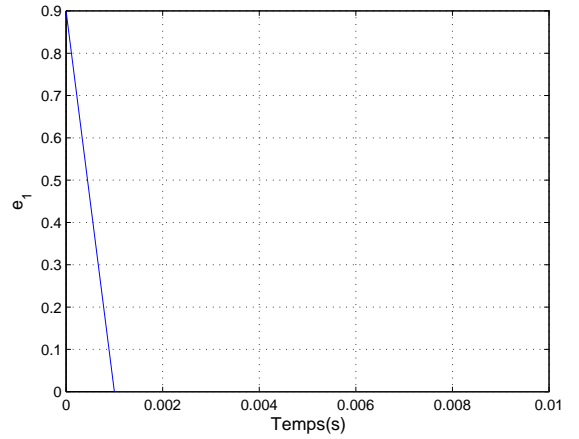


Fig. 10. Erreur de synchronisation sur l'état x_1

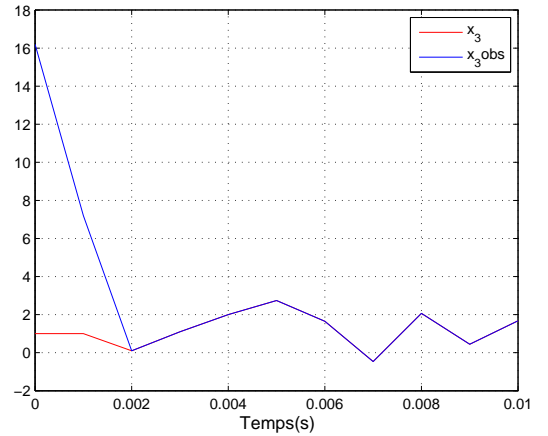


Fig. 11. x_3 et \hat{x}_3

recouvrement d'observabilité pour le système en temps discret (Hénon). La stratégie adoptée pour l'envoi du signal de sortie est réalisée par la composition des deux sorties $y_1 = z_1$ (du Colpitts) et $y_2 = x_2(n)$ (du Hénon) dans un signal de sortie composite qui est transmis dans le canal de transmission. Dans notre étude, nous avons montré que la reconstitution du message de l'émetteur discret est subordonnée à la synchronisation de l'émetteur et du récepteur

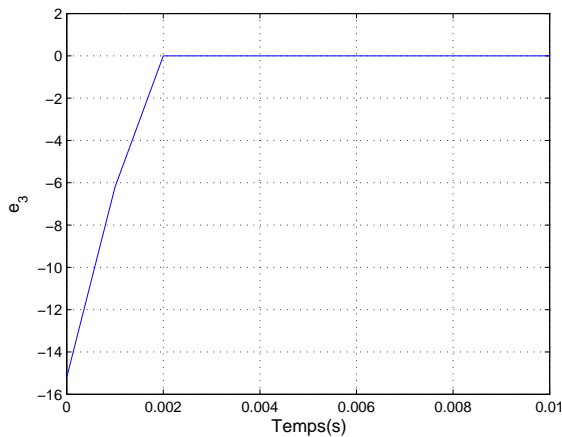


Fig. 12. Erreur de synchronisation sur l'état x_3

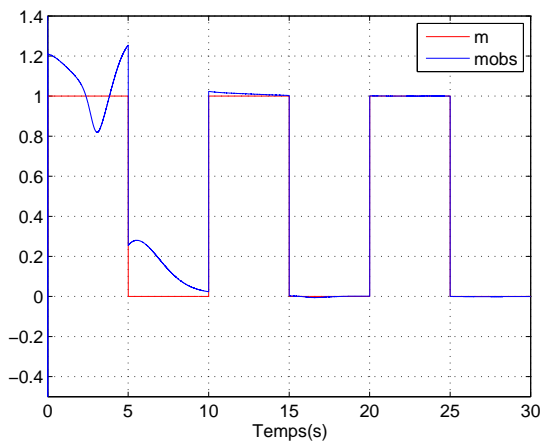


Fig. 13. Messages : m et \hat{m}

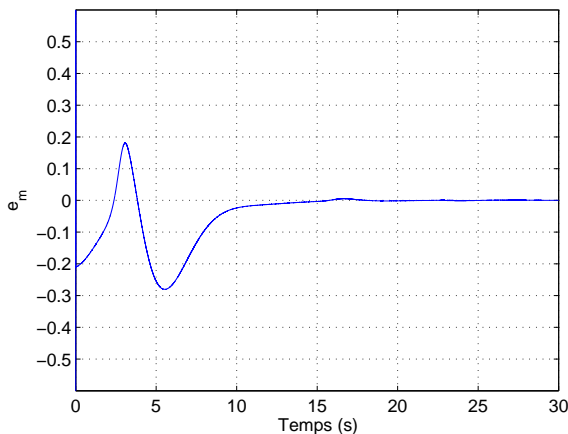


Fig. 14. Erreur de synchronisation le message m

(observateur) en temps continu et que l'échange d'informations se fait de façon discrète, il faut alors apporter un grand soin à la période d'échantillonnage du système en temps continu et ceci rend plus complexe l'identification des paramètres de ce dernier. Cette étude est validée en simulation. Les résultats de simulation obtenus ont confirmé que le message est reconstitué avec succès (au niveau du récepteur (observateur) en temps discret) si et seulement

si les deux systèmes en temps continu (Colpitts et son observateur) sont synchronisés.

RÉFÉRENCES

- [1] Anstett F., Millerioux G et Bloch, G., "Chaotic Cryptosystems : Cryptanalysis and Identifiability", IEEE Transactions on Circuits and Systems : Fundamental Theory and Applications, vol 53, n°.12, December 2006.
- [2] Barbot J.P., Belmouhoub I et Boutat-Baddas L., "Observability Bifurcations : Application to Cryptography", in Chaos in Automatic Control, Taylor and Francis, 2005.
- [3] Basiliauskas A., Tamasevicius A., Bumeliene S. et E. Lindberg., "Synchronization of Chaotic Colpitts Oscillator", Scientific proceeding of Riga Technical university, pp 55-58, 2001.
- [4] Belmouhoub I., Djemaï M. et Barbot J.P., "Observability quadratic Normal Form for Discrete-Time systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, n°.7, July 2005.
- [5] Dedieu H., Kennedy M.P et Hasler M., "Chaos shift keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, vol 40, n°.10, pp 634-642, 1993.
- [6] Djemaï M., Barbot J.P. et Belmouhoub I., "Discrete-Time Normal Form for Left Invertibility Problem", European Journal of Control, vol. 15, n°.02, pp 194-204, 2009.
- [7] Dmitriev A. S., Kassian G.A et Khilinsky A. D., "Chaotic synchronization of henon mappings : The information approach", Technical Physics Letters", vol. 28, n°.05, may 2002.
- [8] Freeland, G.C. et Durrani T.S., "Nonlinear state observers for chaotic systems and their application to communications Signal Process", Exploiting Chaos in Signal Processing, IEE Colloquium on, 1994.
- [9] L'Hernault M., Barbot J.P et Ouslimani A., "Feasibility of Analogue Realization of Sliding Mode Observer : Application to Data Transmission", IEEE Transactions on Circuits and Systems : Fundamental Theory and Applications, vol 55, n°.02, March 2008
- [10] Maggio G. M. et Feo. O.D., "Nonlinear Analysis of the Colpitts Oscillator and Application to Design", IEEE Transactions on Circuits and Systems : Fundamental Theory and Applications, vol 49, n°.09, September 1999.
- [11] Maggio G. M. et, Kennedy M. P., "Experimental manifestations of chaos in the Colpitts oscillator", Proc. of ICECS, Seville, Spain, pp 194-204, 1997.
- [12] Nijmeijer H., "On Synchronization of Chaotic Systems", Proc. 36th Conference on Decision and Control, San Diego, California USA, December 1997.
- [13] Nijmeijer H. et Mareels Iven M.Y., "An observer Looks at Synchronization", IEEE Transactions on Circuits and Systems : Fundamental Theory and Applications, vol. 44, n°.10, October 1997.
- [14] Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., Halle K.S et Shang A., "Transmission of digital signals by chaotic synchronization", International Journal of Bifurcations and Chaos", vol.3, n°.02, pp.973-977, 1993.
- [15] Pecora L. M. et Carroll T.L., "Synchronization in Chaotic Systems", Physicals Review and Letters, pp. 821-824, 1990.
- [16] Vesely K et Podolsky J., "Chaos in a modified Hénon- Heiles system describing geodesics in gravitational waves", Technical Physics Letters A, vol.271, pp.368-371, July 2000.
- [17] Wu C.W et Chua L.O., "simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communications systems", International Journal of Bifurcations and Chaos, vol.3, n°.06, pp.1619-1627, 1993.
- [18] Zheng G., Boutat D., Floquet T et Barbot J.P., "Secure data transmission based on multi-input multi-output delayed chaotic system", International Journal of Bifurcations and Chaos, vol.18, n°.02, 2007.