



**HAL**  
open science

# Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes

Sébastien Tordeux, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Sébastien Tordeux, Patrick Joly. Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes. Groupe de travail : Applications des Mathématiques, ENS Cachan, 2004, Rennes, France. inria-00528067

**HAL Id: inria-00528067**

**<https://inria.hal.science/inria-00528067>**

Submitted on 21 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes

Sébastien Tordeux et Patrick Joly

Groupe de travail : Applications des Mathématiques, Rennes, décembre 2004

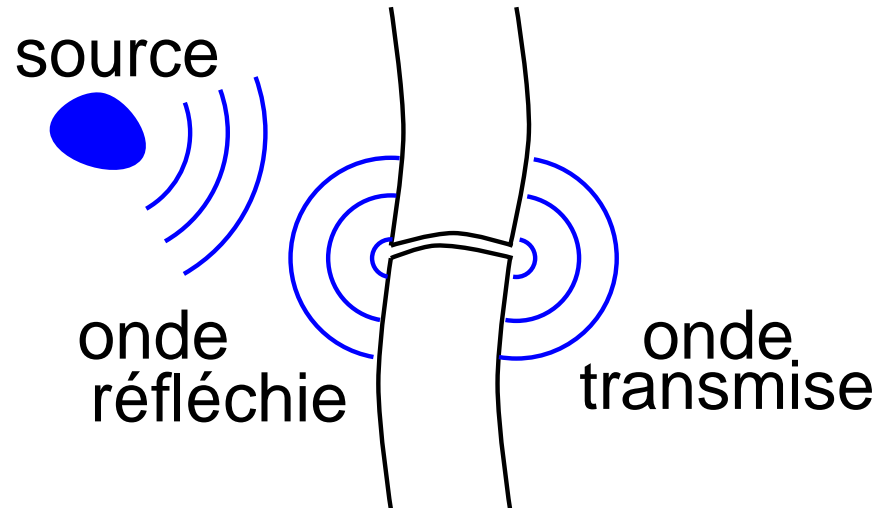
Projet POems

INRIA-Rocquencourt

ENSTA

# Une application typique

Comment peut-on étudier la diffraction des ondes dans les milieux incluant des **fentes minces** ?

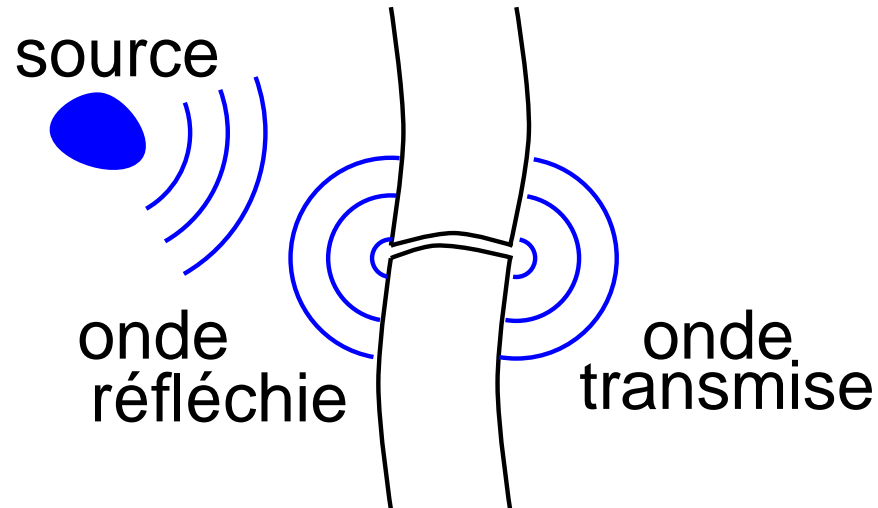


Un problème physique avec deux longueurs **caractéristiques**

- La **longueur d'onde**  $\lambda$
- La **largeur** de la fente  $\varepsilon$

# Une application typique

Comment peut-on étudier la diffraction des ondes dans les milieux incluant des **fentes minces** ?

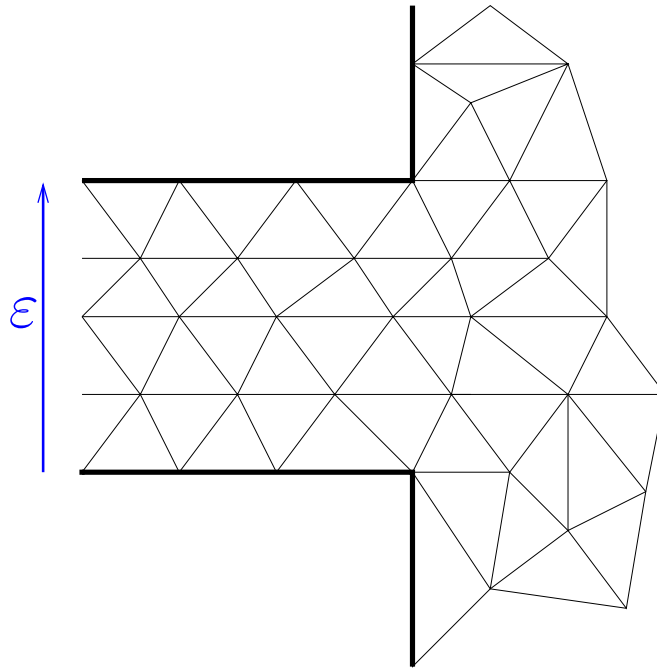


Une situation **asymptotique**:

$$\varepsilon \ll \lambda$$

# La difficulté numérique

Un pas de maillage plus petit que  $\varepsilon$



Ceci amène à des calculs **coûteux**

# Quelques références

- Fentes minces:  
Harrington, Auckland (1980), Tatout (1996).
- Différences finies:  
Taflove (1995).
- Théorie des plaques, théorie des jonctions, ...  
Ciarlet, Le Dret, Dauge-Costabel.
- Développements asymptotiques raccordés:  
McIver, Rawlins (1993), Il'in (1992).
- Techniques multi-échelles  
Maz'ya, Nazarov, Plamenevskii (1991)  
Oleinik, Shamaev, Yosifian (1992)

# Un problème simple

Equation des ondes **scalaires** :

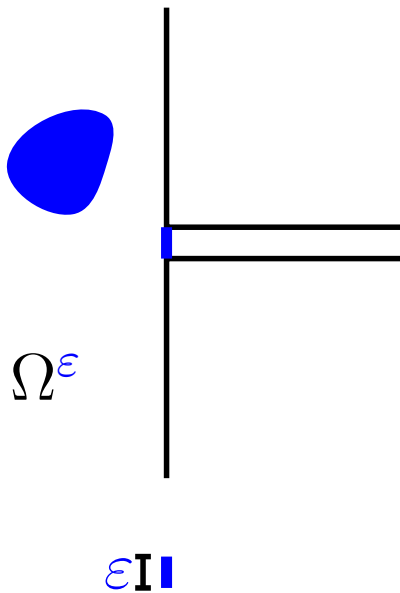
$$\frac{\partial^2 p^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta p^\varepsilon = f$$

Régime **harmonique**:

$$p^\varepsilon(x, y, t) = \exp(-i\omega t) u^\varepsilon(x, y)$$

Equation de **Helmholtz** :

$$\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{in } \Omega^\varepsilon$$



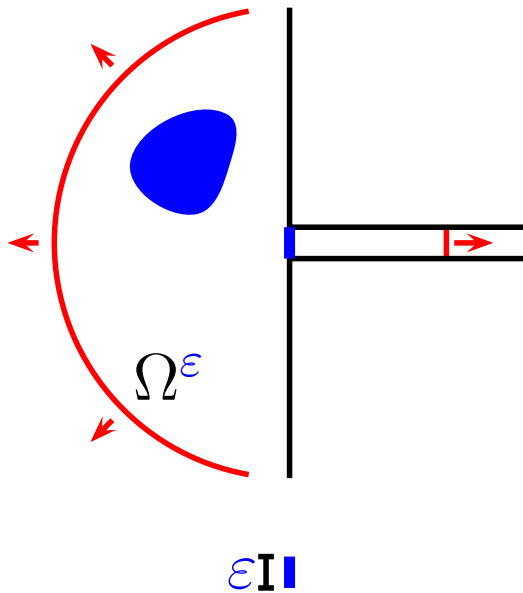
# Un problème simple

Solution **sortante** à l'infini:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon \leq \frac{C}{r^2}, \quad \text{pour } r \text{ grand,}$$

Condition aux limites de **Neumann**  
(mur rigide)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$





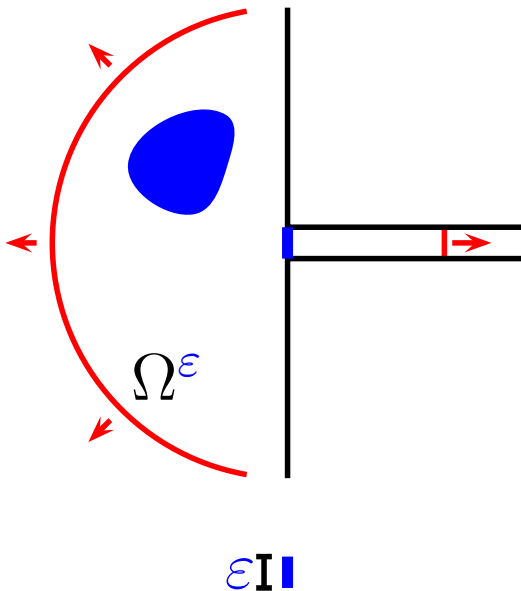
# Un problème simple

Solution **sortante** à l'infini:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon \leq \frac{C}{r^2}, \quad \text{pour } r \text{ grand,}$$

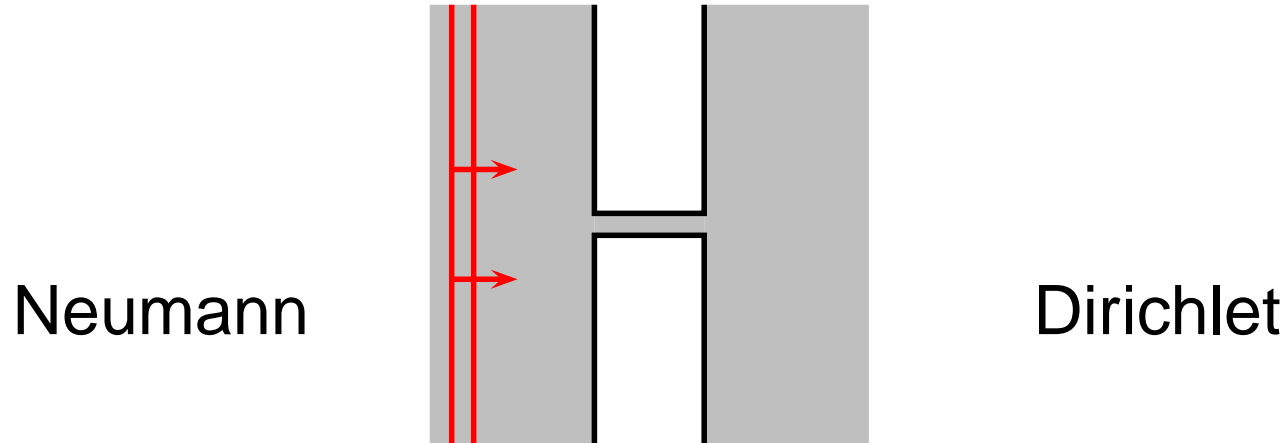
Condition aux limites de **Neumann**  
(mur rigide)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$



Avec la condition aux limites de Dirichlet, la transmission dans la fente est **négligeable** ( $o(\varepsilon^\infty)$ ).

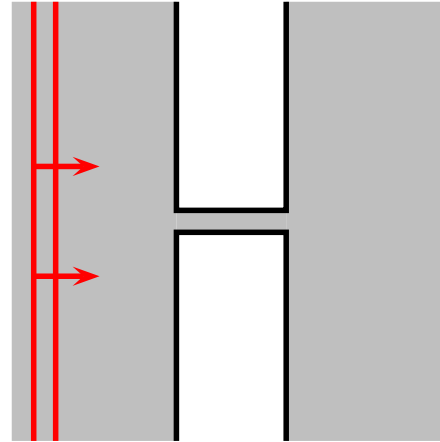
# Une simulation numérique



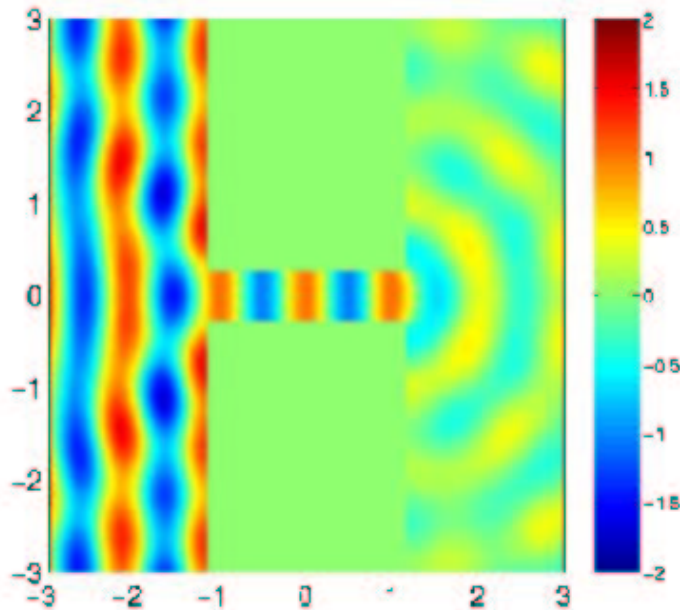
Simulation numérique effectuée avec le code éléments finis  
d'ordre élevé (M. Duruflé, INRIA)

# Une simulation numérique

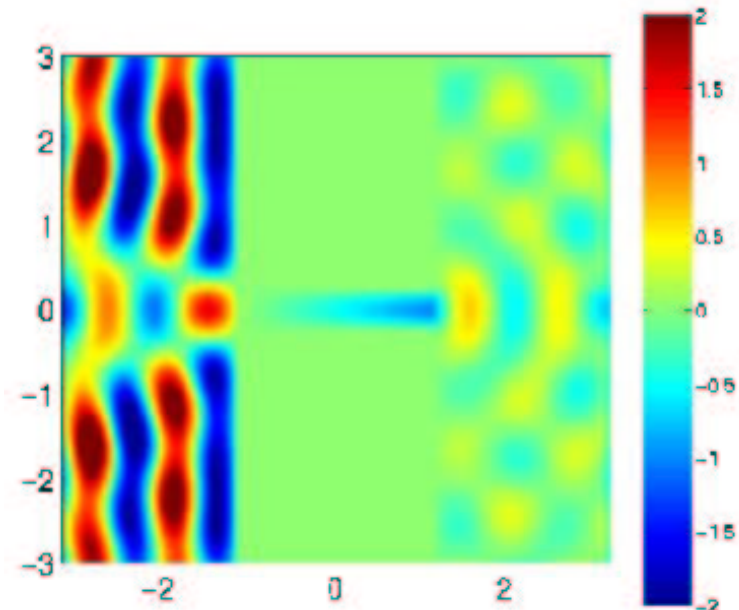
Neumann



Dirichlet

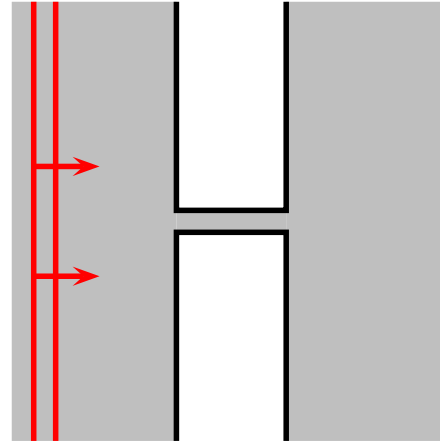


$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.5$$

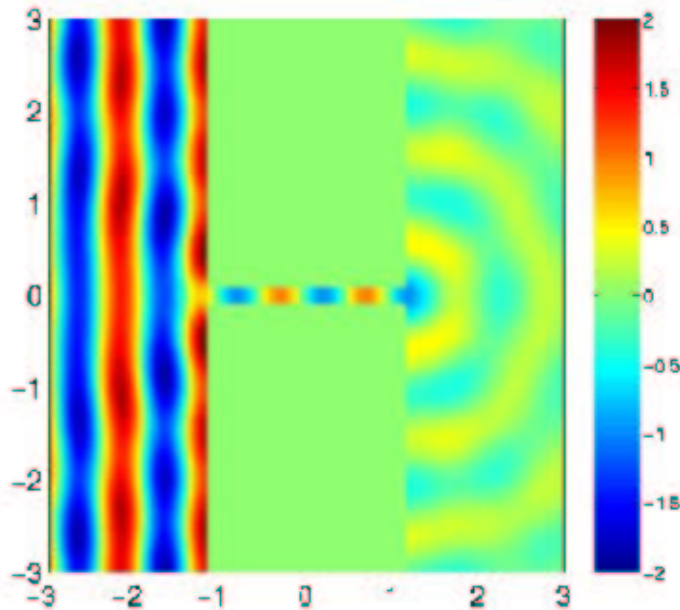


# Une simulation numérique

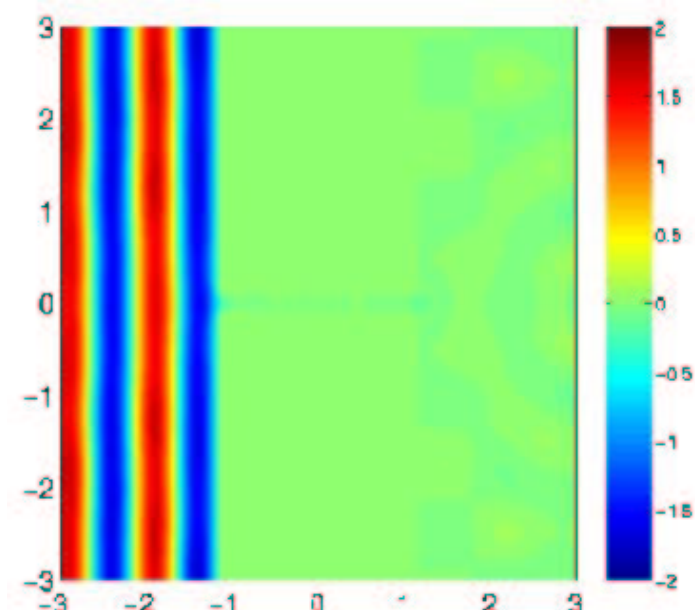
Neumann



Dirichlet

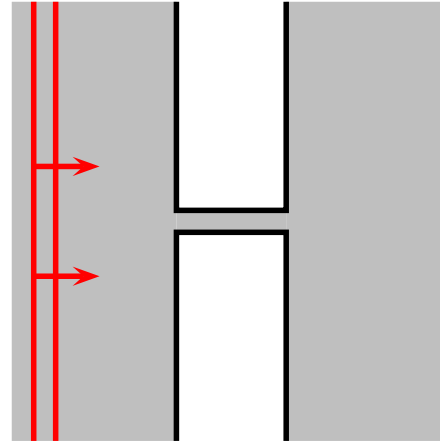


$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.2$$

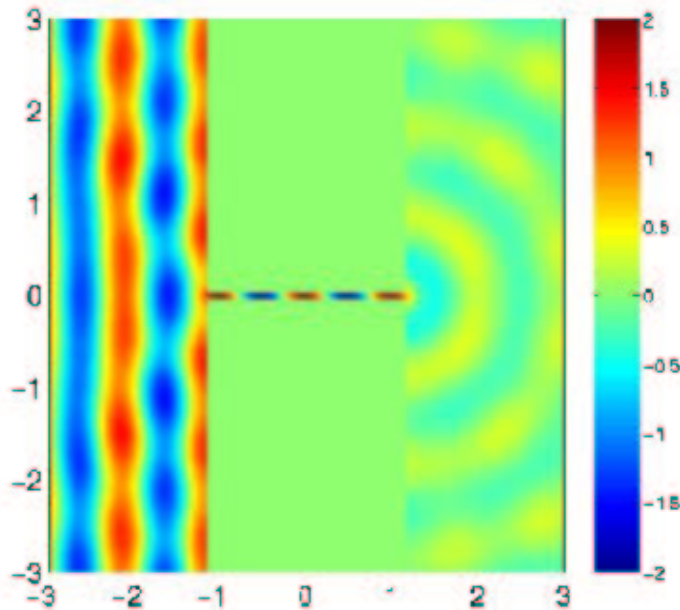


# Une simulation numérique

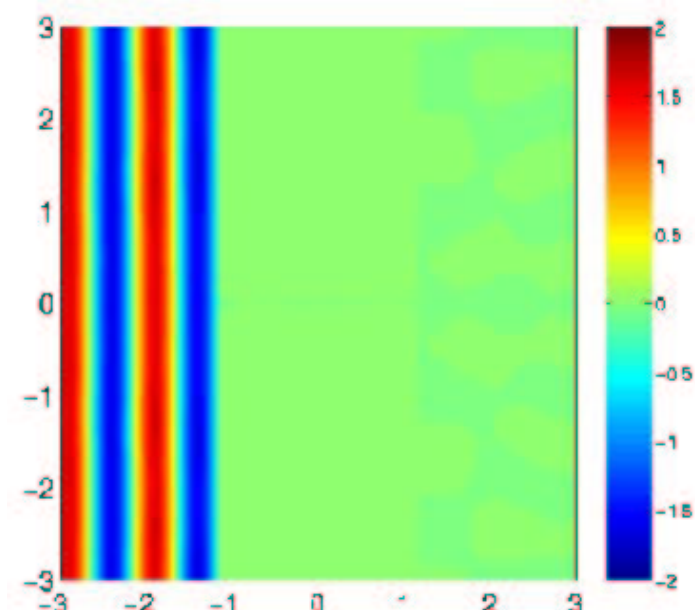
Neumann



Dirichlet



$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.1$$

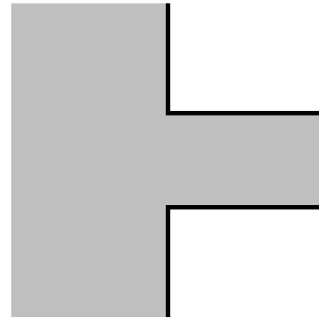


# Objectifs

- Développer des méthodes de calcul **précises**

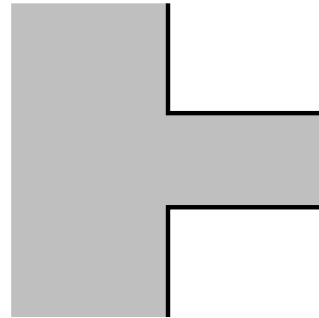
# Objectifs

- Développer des méthodes de calcul **précises**
- Introduction d'une **zone de transition**



# Objectifs

- Développer des méthodes de calcul **précises**
- Introduction d'une **zone de transition**



- Une technique appropriée: les **développements asymptotiques raccordés**
- Définir de **nouveaux modèles approchés** permettant de calculer la solution.
- Maîtriser l'utilisation de techniques “universelles” de calcul numérique (raffinement de maillage).



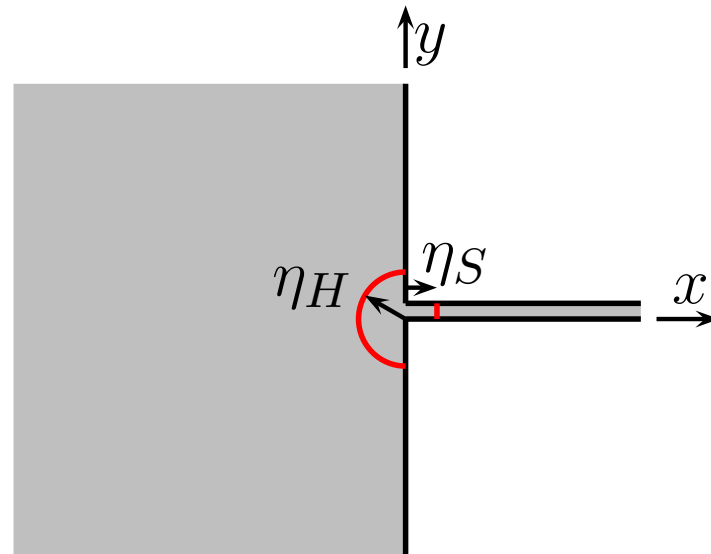
# Apports aux rac. de dév. asympt.

- Reformuler les **principes de raccord** (pas toujours clairs) proposés par l'école anglo-saxonne.

# Apports aux rac. de dév. asympt.

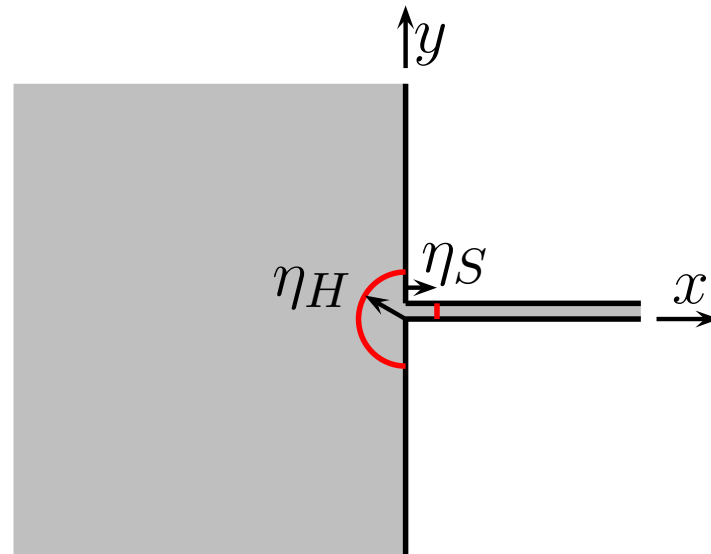
- Reformuler les **principes de raccord** (pas toujours clairs) proposés par l'école anglo-saxonne.
- Justification mathématique de cette technique.
  - Méthode **inspirée** des techniques multi-échelles
  - **Existence et unicité** des termes des développements asymptotiques.
  - Technique plus spécifique: **estimations d'erreur**.

# Trois zones



- **Champ lointain** (champ 2D)
- **Champ proche** (couche limite)
- **Champ de fente** (champ 1D)

# Trois zones

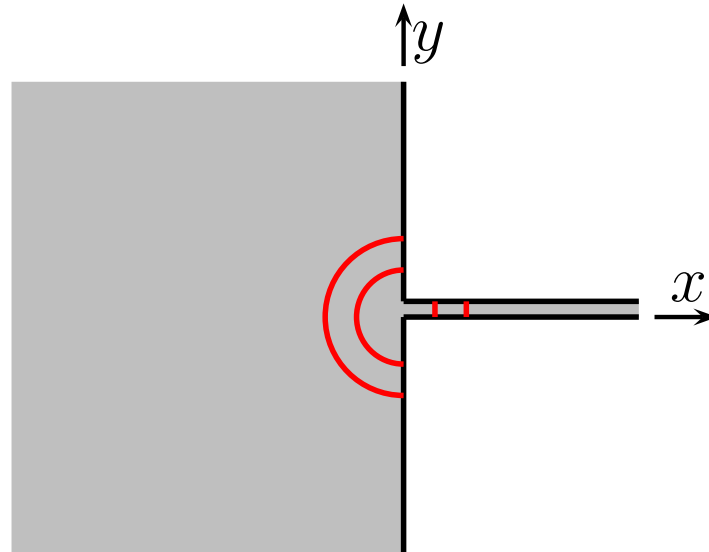


Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

# Trois zones

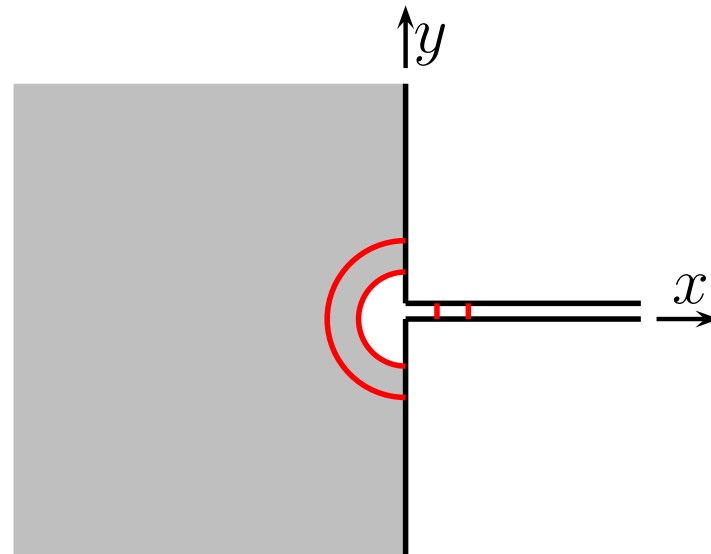


Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

# Trois zones



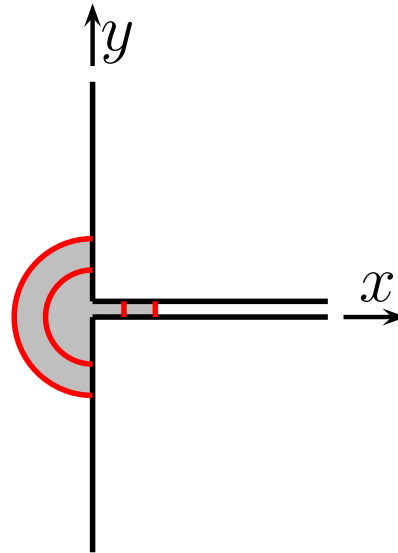
Champ lointain

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

# Trois zones



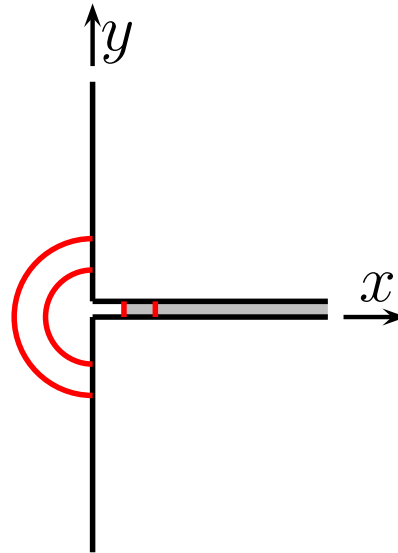
Champ proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

# Trois zones



Champ de fente

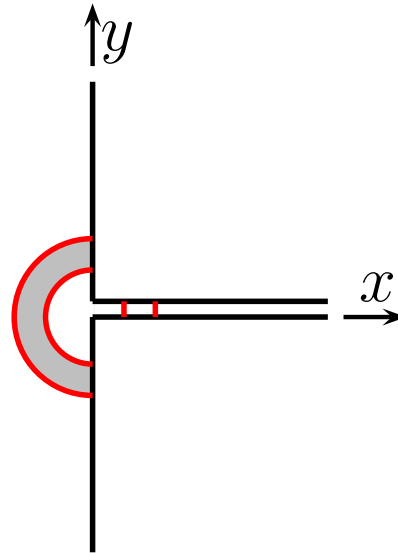
Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$



# Trois zones



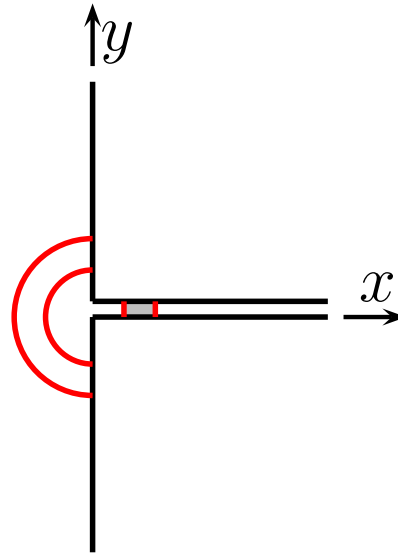
lointain et proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

# Trois zones



de fente et proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

# Les temps de la méthode

- **Dérivation** des développements asymptotiques:
  - Partie **formelle**
  - Plusieurs présentations possibles

# Les temps de la méthode

- **Dérivation** des développements asymptotiques:
  - Partie **formelle**
  - Plusieurs présentations possibles
- **Description** des développements asymptotiques
  - Partie **rigoureuse**
  - **Définition** des termes de développements asymptotiques

# Les temps de la méthode

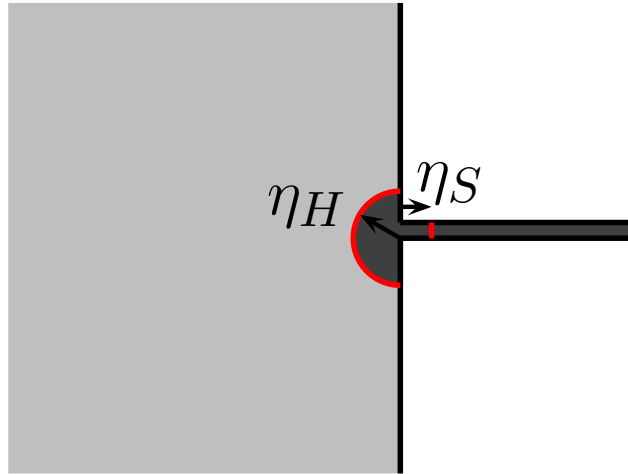
- **Dérivation** des développements asymptotiques:
  - Partie **formelle**
  - Plusieurs présentations possibles
- **Description** des développements asymptotiques
  - Partie **rigoureuse**
  - **Définition** des termes de développements asymptotiques
- **Validation mathématique** du développement asymptotique
  - Partie **rigoureuse**
  - **Estimations d'erreur**

# Les temps de la méthode

- 2 **Dérivation** des développements asymptotiques:
  - Partie **formelle**
  - Plusieurs présentations possibles
- 1 **Description** des développements asymptotiques
  - Partie **rigoureuse**
  - **Définition** des termes de développements asymptotiques
- 3 **Validation mathématique** du développement asymptotique
  - Partie **rigoureuse**
  - **Estimations d'erreur**

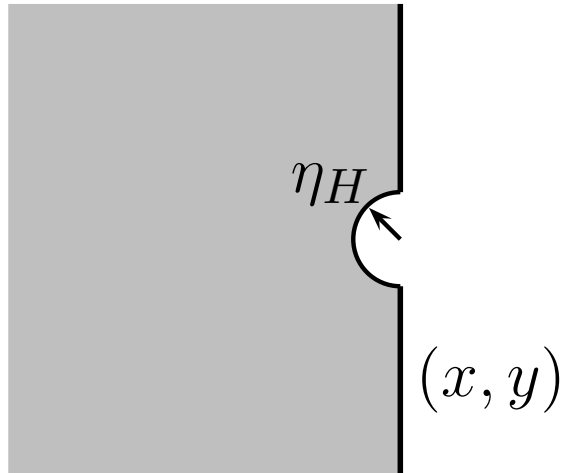
# Champ lointain

Contexte asymptotique:  $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$ .



# Champ lointain

Contexte asymptotique:  $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$



Pas de **normalisation**:

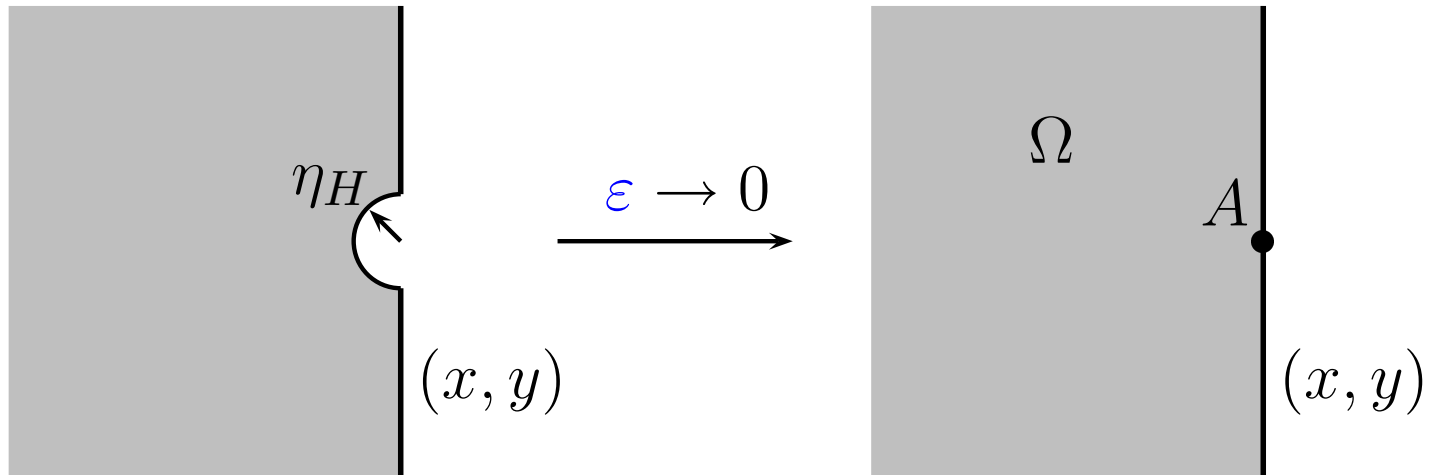
$$X = x, \quad Y = y.$$



# Champ lointain

Contexte asymptotique:

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$



Pas de **normalisation**:

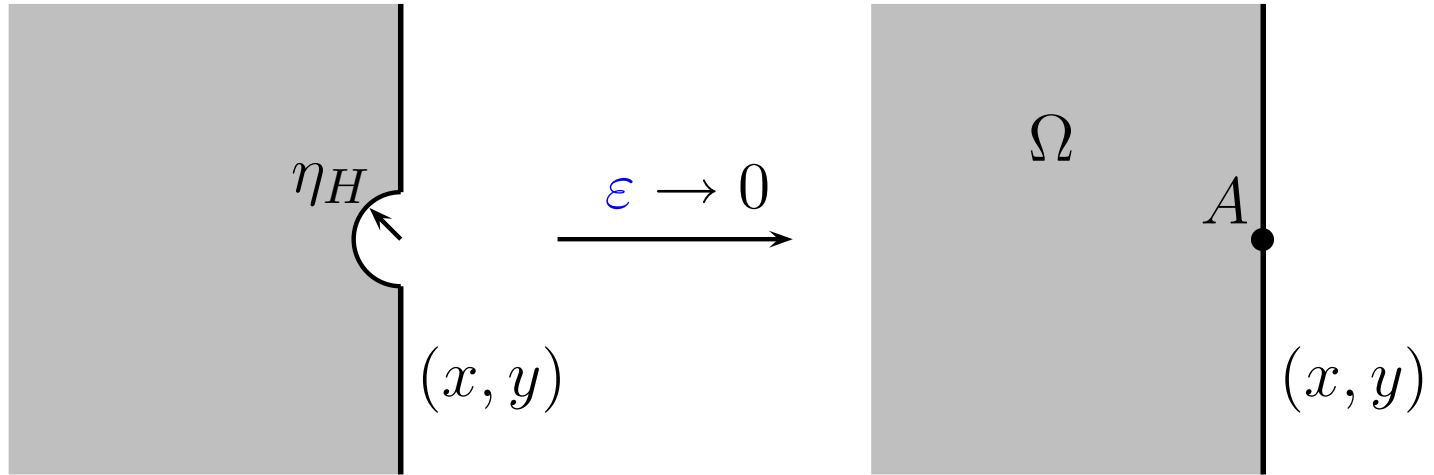
$$X = x,$$

$$Y = y.$$

# Champ lointain

Contexte asymptotique:

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$

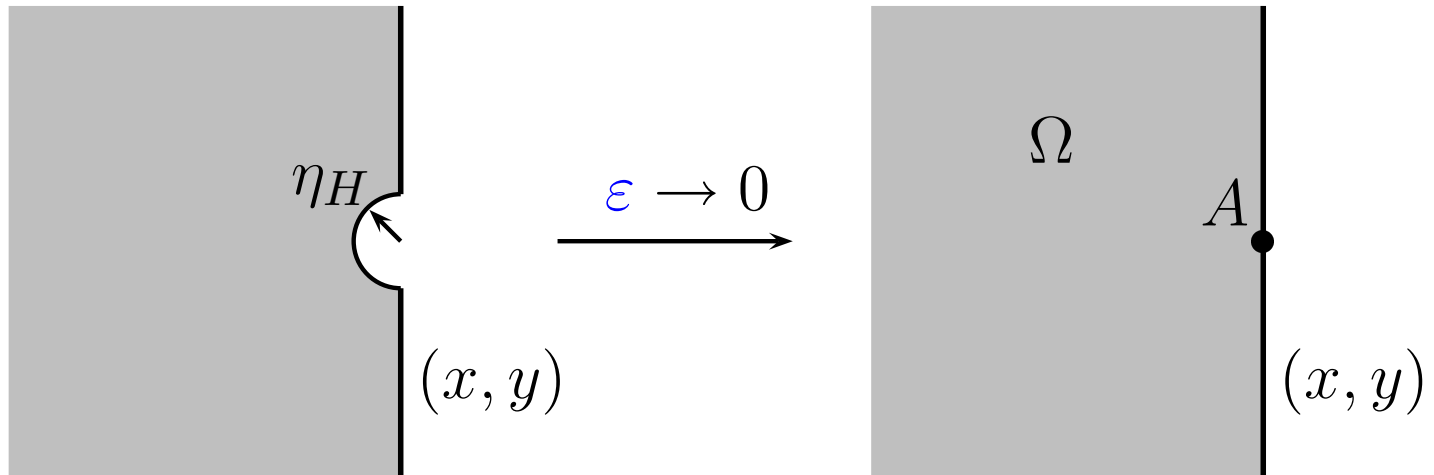


$$u^\varepsilon = u^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{dans } \Omega.$$

# Champ lointain

Contexte asymptotique:

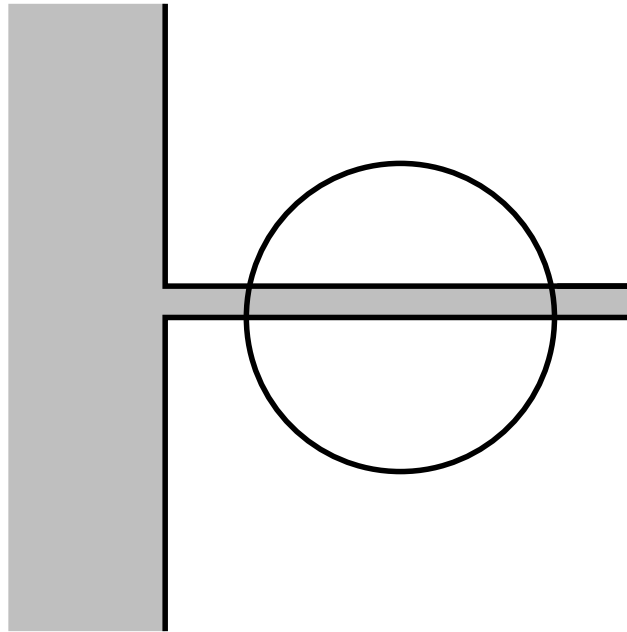
$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$



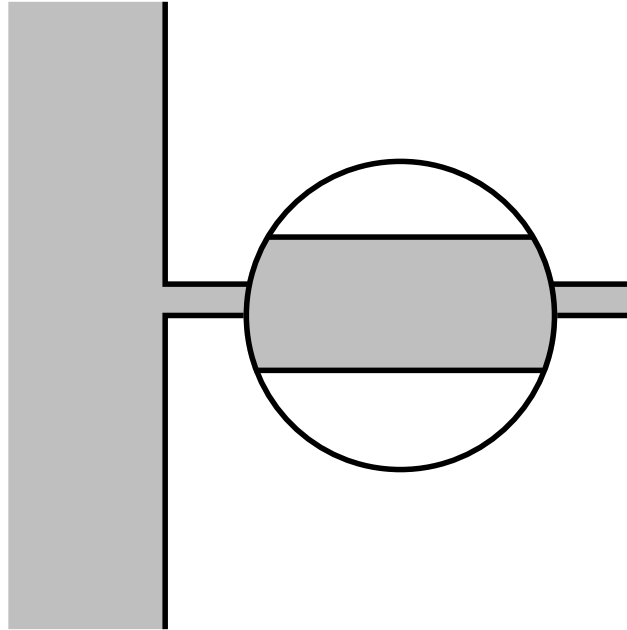
où les  $u_i^k$  vérifient l'équation de **Helmholtz homogène**

$$\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0.$$

# Champ de fente

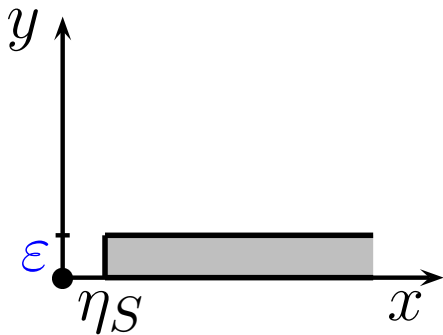


# Champ de fente



$$u^\epsilon(x, y) = U^\epsilon\left(x, \frac{y}{\epsilon}\right)$$

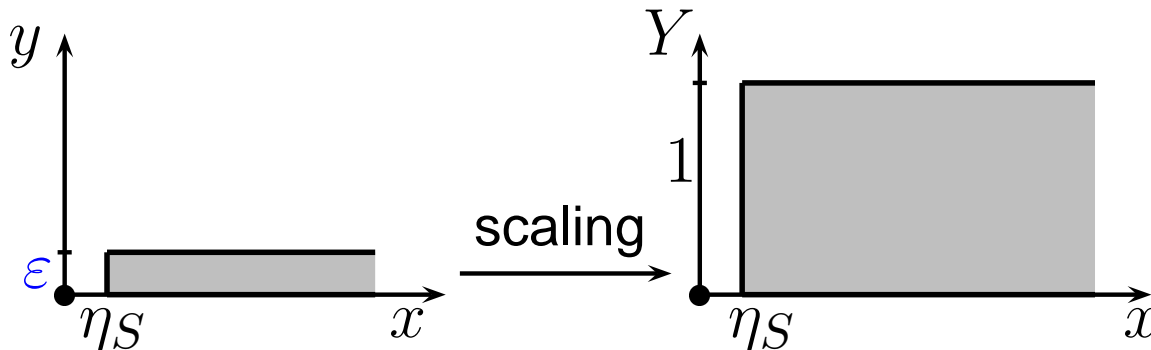
# Champ de fente



Le contexte **asymptotique**:  $\epsilon \ll \eta_S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = x, \quad Y = \frac{y}{\epsilon}$

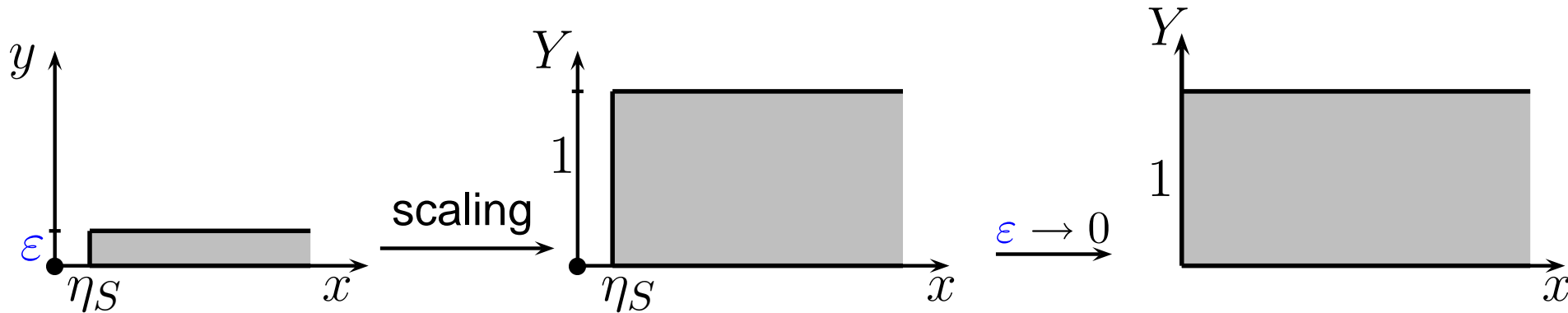
# Champ de fente



Le contexte **asymptotique**:  $\varepsilon \ll \eta S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = x, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}$

# Champ de fente

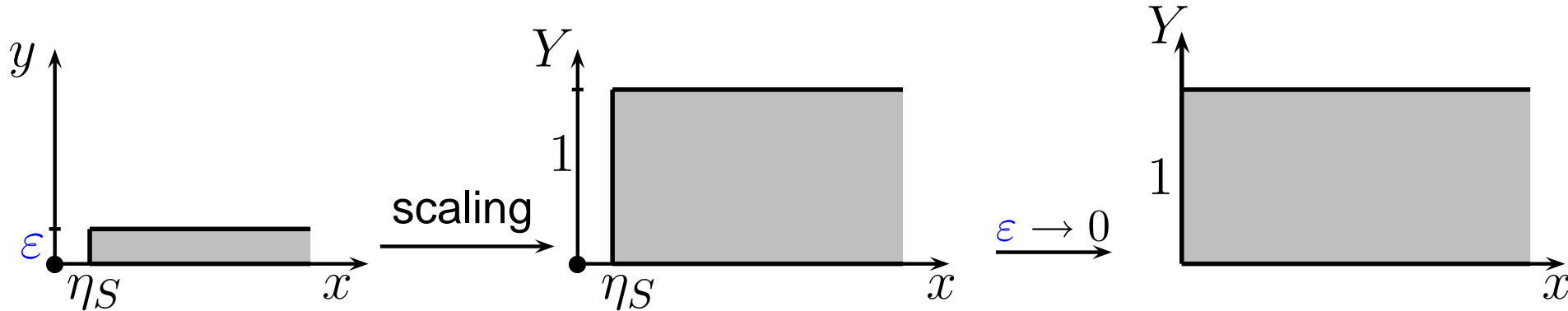


Le contexte **asymptotique**:  $\varepsilon \ll \eta S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = x, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}$

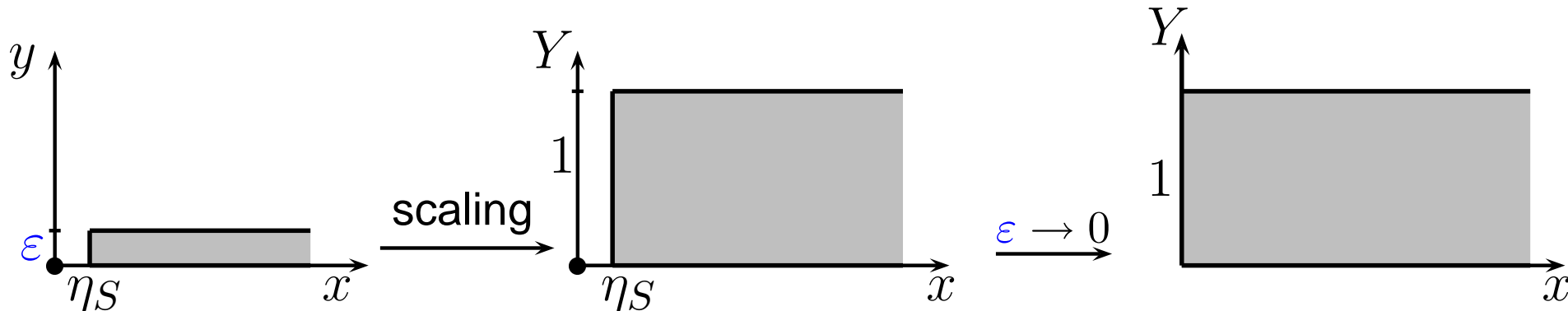


# Champ de fente



$$u^\varepsilon(x, Y\varepsilon) = U^\varepsilon(x, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k(x, Y) + o(\varepsilon^\infty),$$

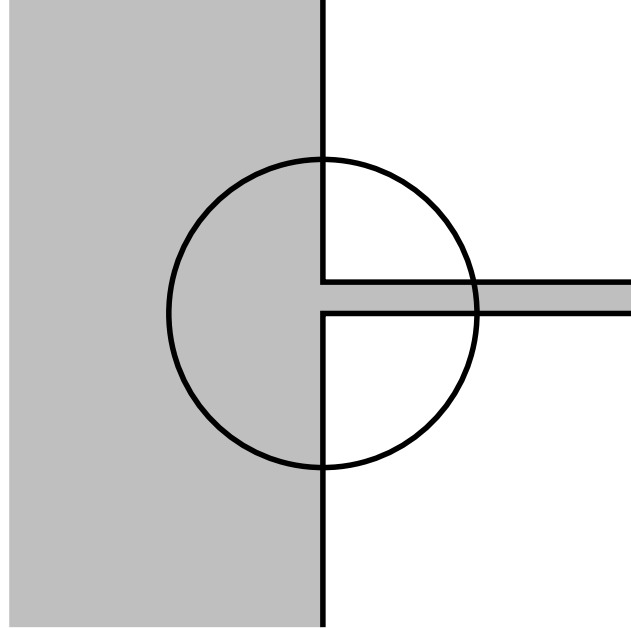
# Champ de fente



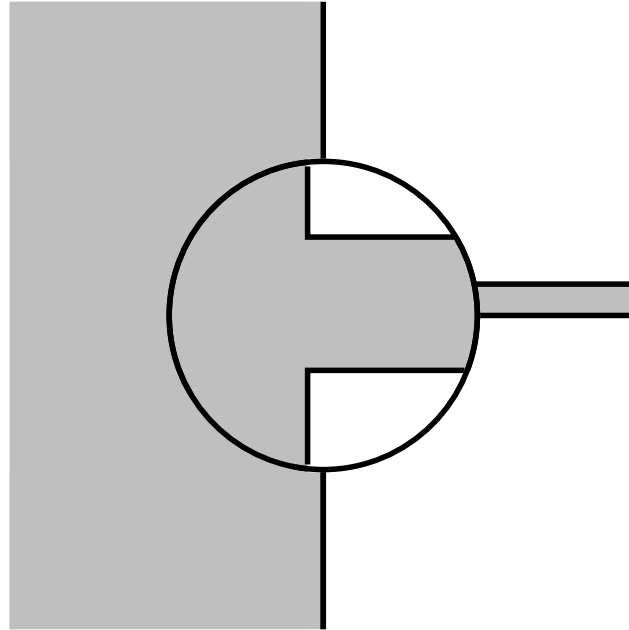
où les  $U_i^k$  vérifient l'équation de **Helmholtz 1D**:

$$\frac{d^2 U_i^k}{dx^2} + \omega^2 U_i^k = 0$$

# Champ proche

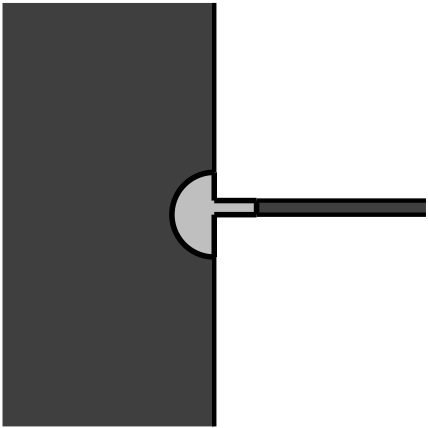


# Champ proche



$$u^\varepsilon(x, y) = u_p^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

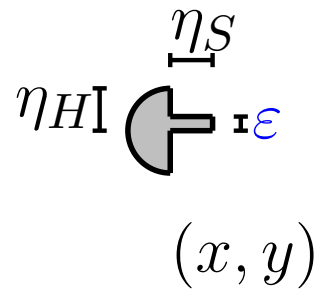
# Champ proche



Contexte **asymptotique**:  $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$ ,  $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = \frac{x}{\varepsilon}$ ,  $Y = \frac{y}{\varepsilon}$

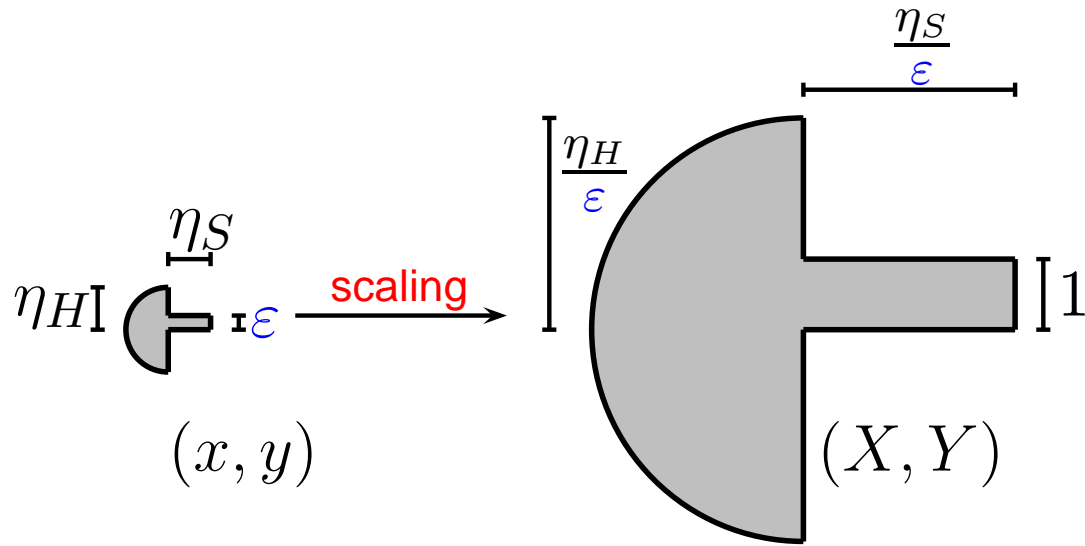
# Champ proche



Contexte **asymptotique**:  $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$ ,  $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = \frac{x}{\varepsilon}$ ,  $Y = \frac{y}{\varepsilon}$

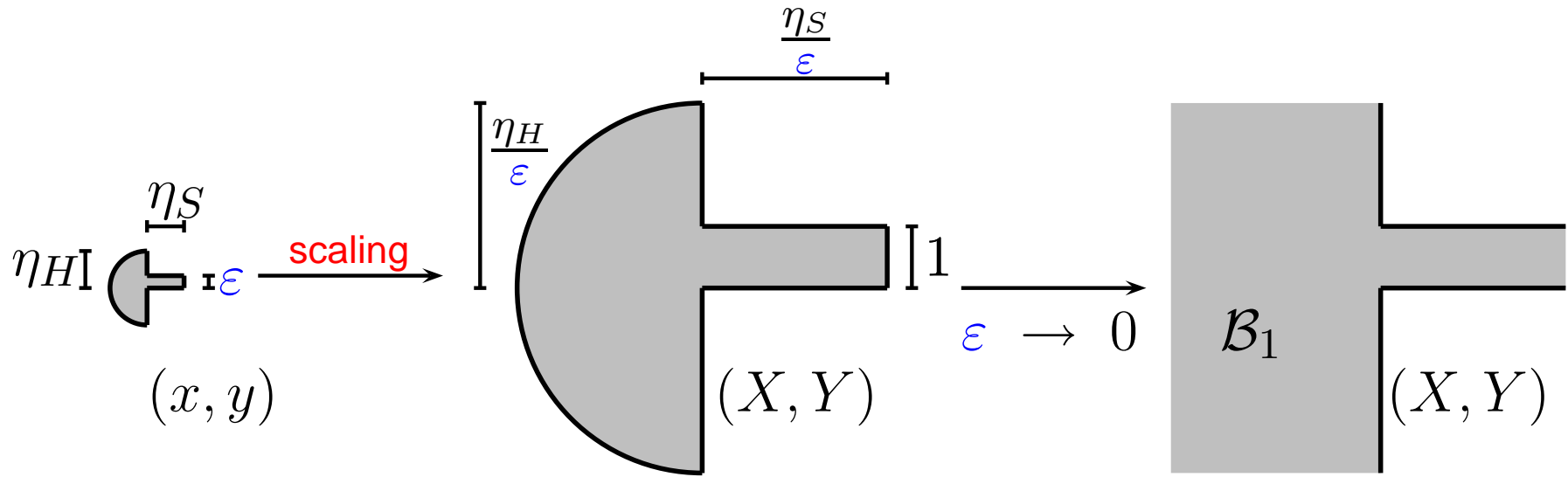
# Champ proche



Contexte **asymptotique**:  $\epsilon \ll \eta_H \ll \lambda$ ,  $\epsilon \ll \eta_S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = \frac{x}{\epsilon}$ ,  $Y = \frac{y}{\epsilon}$

# Champ proche

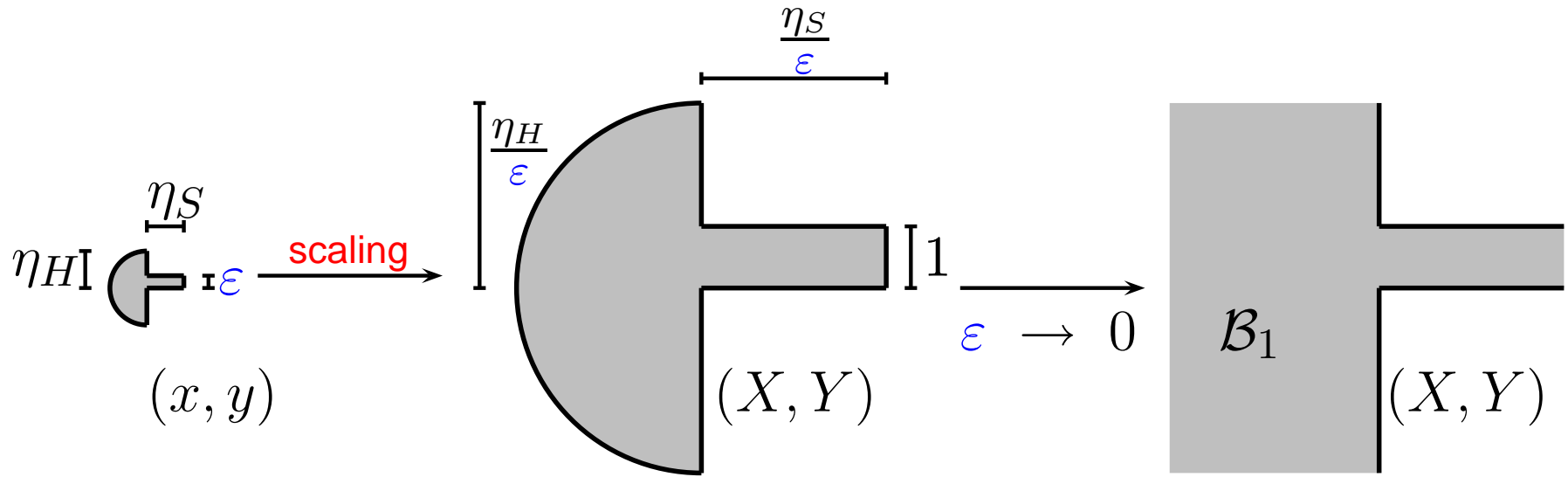


Contexte **asymptotique**:  $\epsilon \ll \eta_H \ll \lambda$ ,  $\epsilon \ll \eta_S \ll \lambda$ .

La **normalisation**:  $X = \frac{x}{\epsilon}$ ,  $Y = \frac{y}{\epsilon}$

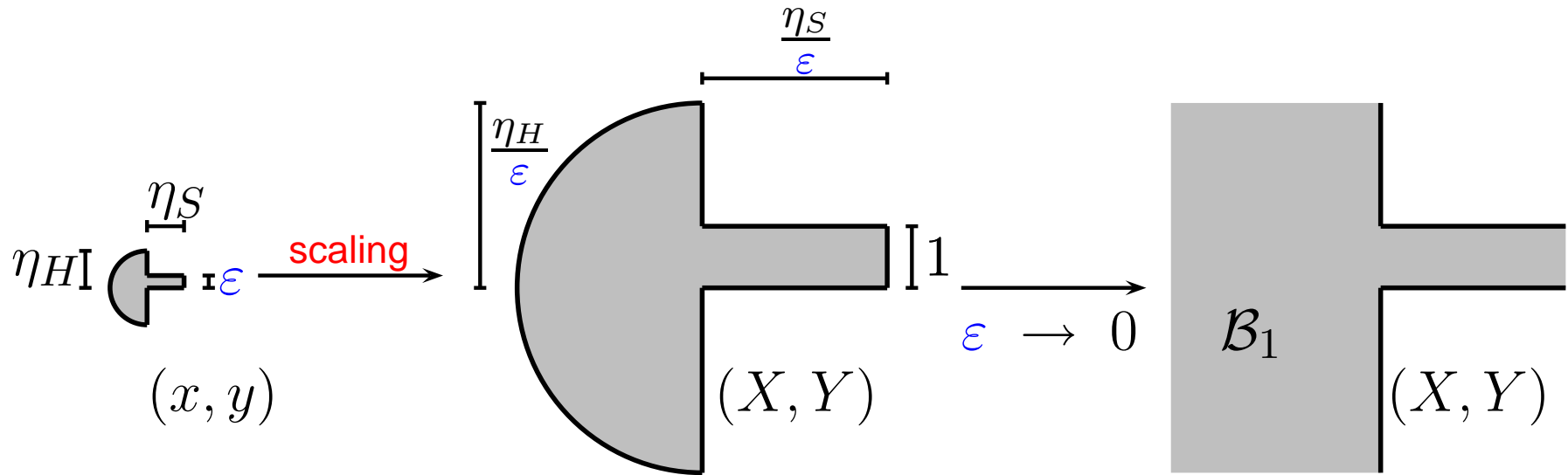


# Champ proche



$$u^\epsilon(\epsilon X, \epsilon Y) = u_p^\epsilon(X, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \epsilon^i (\log \epsilon)^k (u_p)_i^k(X, Y) + o(\epsilon^\infty)$$

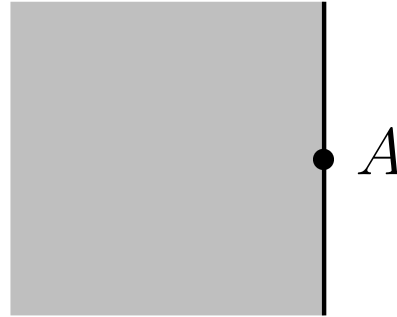
# Champ proche



où les  $(u_p)_i^k$  vérifient l'équation de **Laplace (in)homogène**.

$$\begin{cases} \Delta(u_p)_i^k = 0, & \text{si } i = k \text{ ou } k + 1, \\ \Delta(u_p)_i^k = -\omega^2 (u_p)_{i-2}^k, & \text{sinon.} \end{cases}$$

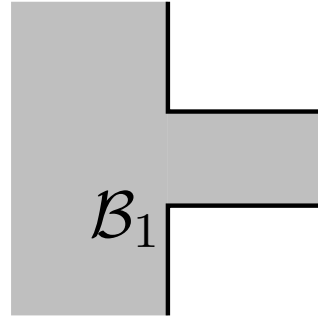
**Ordre 0 :**  $\underline{u}^0$ ,  $(u_p)_0^0$ ,  $U_0^0$



**Champ lointain:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^0 \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u^0 \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

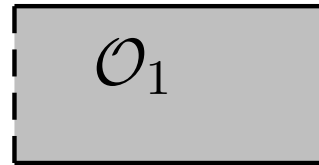
**Ordre 0 :**  $u^0$ ,  $\underline{(u_p)_0^0}$ ,  $U_0^0$



**Champ proche:**

$$(u_p)_0^0(X, Y) = u^0(A), \quad \text{dans } B_1.$$

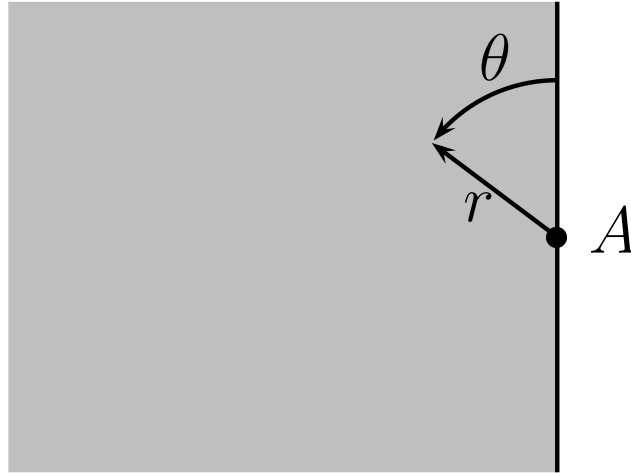
**Ordre 0 :**  $u^0$ ,  $(u_p)_0^0$ ,  $U_0^0$



**Champ de fente:**

$$U_0^0(x, Y) = u^0(A) \exp(i\omega x), \quad \text{dans } \mathcal{O}_1.$$

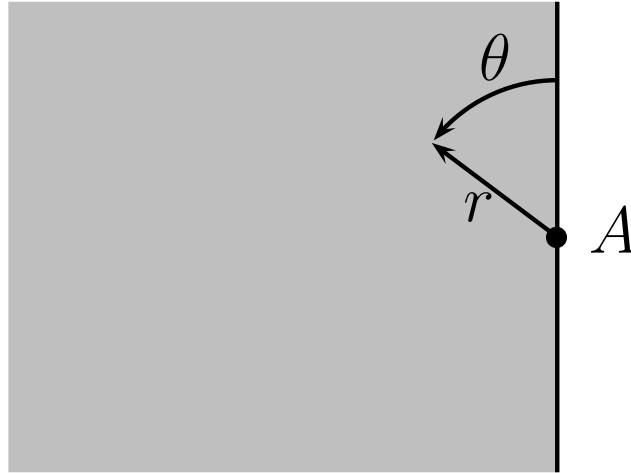
**Ordre 1 :**  $\underline{u}_1^0$ ,  $(u_p)_1^0$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



**Approximation** de la solution exacte :

$$u^\varepsilon \simeq u^0 + \varepsilon u_1^0$$

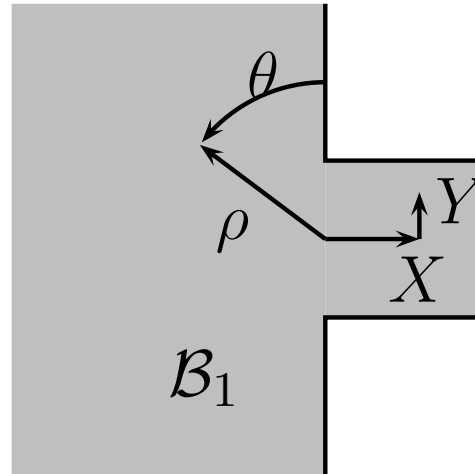
**Ordre 1 :**  $\underline{u}_1^0$ ,  $(u_p)_1^0$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



**Forme explicite de  $u_1^0$**

$$u_1^0(r, \theta) = -\frac{\omega}{2} u^0(A) H_0^{(1)}(\omega r).$$

**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $\underline{(u_p)_1^0}$ ,  $\underline{(u_p)_1^1}$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$

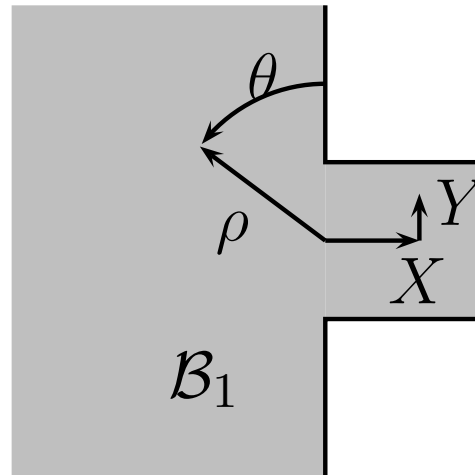


**Approximation** de la solution exacte :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(\varepsilon X, \varepsilon Y) = u_p^\varepsilon(X, Y), \\ u_p^\varepsilon \simeq (u_p)_0^0 + \varepsilon (u_p)_1^0 + \varepsilon \log \varepsilon (u_p)_1^1. \end{cases}$$



**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $\underline{(u_p)_1^0}$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$

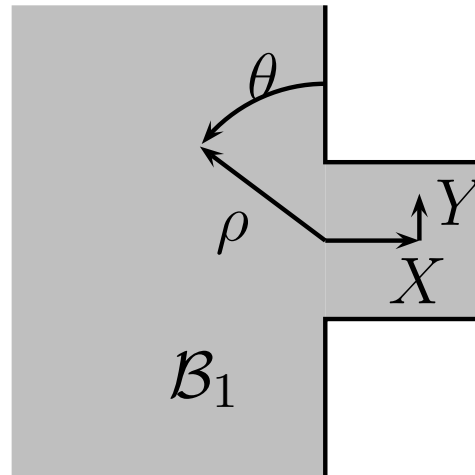


**Champ proche :**

Chercher  $(u_p)_1^0 \in H_{loc}^1(B_1)$  tel que:

$$\begin{cases} \Delta(u_p)_1^0 = 0, & \text{dans } B_1 \\ \frac{\partial(u_p)_1^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial B_1. \end{cases}$$

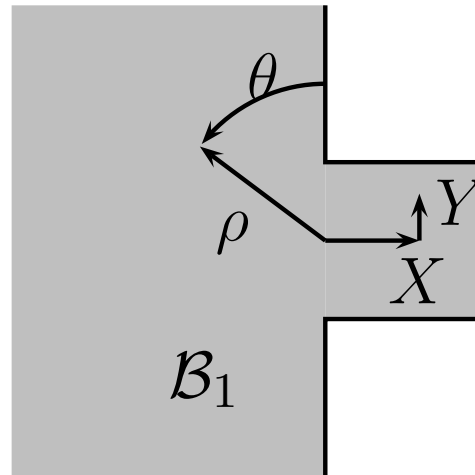
**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $\underline{(u_p)_1^0}$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



**Le comportement à l'infini dans le demi-espace:**

$$(u_p)_1^0(\rho, \theta) - \frac{\partial u^0}{\partial y}(A) \rho \cos \theta + \frac{\omega}{2} u^0(A) \left[ 1 + \frac{2i}{\pi} (\log \rho + \gamma) \right] = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $\underline{(u_p)_1^0}$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



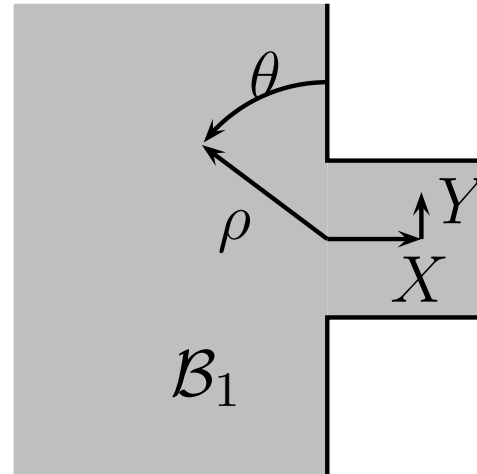
**Le comportement à l'infini dans le demi-espace:**

$$(u_p)_1^0(\rho, \theta) - \frac{\partial u^0}{\partial y}(A) \rho \cos \theta + \frac{\omega}{2} u^0(A) \left[ 1 + \frac{2i}{\pi} (\log \rho + \gamma) \right] = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

**Le comportement à l'infini dans la fente:**

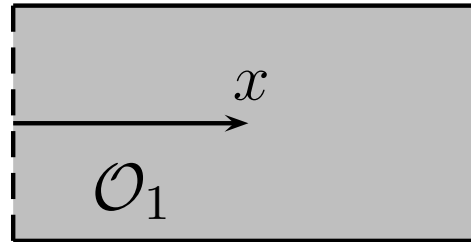
$$(u_p)_1^0(X, Y) - i \omega u^0(A) X = O(1).$$

**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $(u_p)_1^0$ ,  $\underline{(u_p)_1^1}$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



$$(u_p)_1^1 = -\frac{i\omega}{\pi} u^0(A)$$

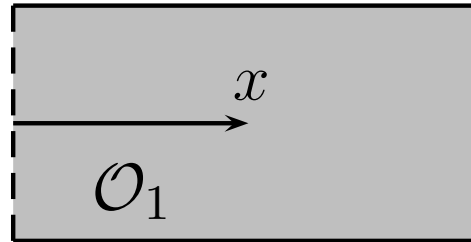
**Ordre 1** :  $u_1^0$ ,  $(u_p)_1^0$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



**Approximation** de la solution exacte :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, \varepsilon Y) = U^\varepsilon(x, Y), \\ U^\varepsilon \simeq U_0^0 + \varepsilon U_1^0 + \varepsilon \log \varepsilon U_1^1. \end{cases}$$

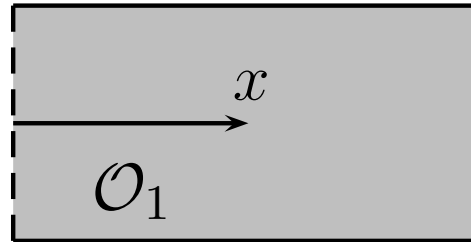
**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $(u_p)_1^0$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$



**Le champ de fente:**

$$U_1^0(x) = \int_0^1 \mathcal{U}_1^0(0, Y) dY \exp(i\omega x),$$

**Ordre 1 :**  $u_1^0$ ,  $(u_p)_1^0$ ,  $(u_p)_1^1$ ,  $U_1^0$ ,  $U_1^1$

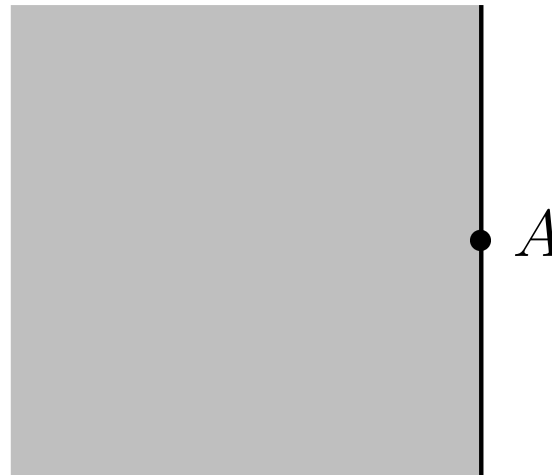


**Le champ de fente:**

$$U_1^1(x) = -\frac{i\omega}{\pi} u^0(A) \exp(i\omega x).$$

# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

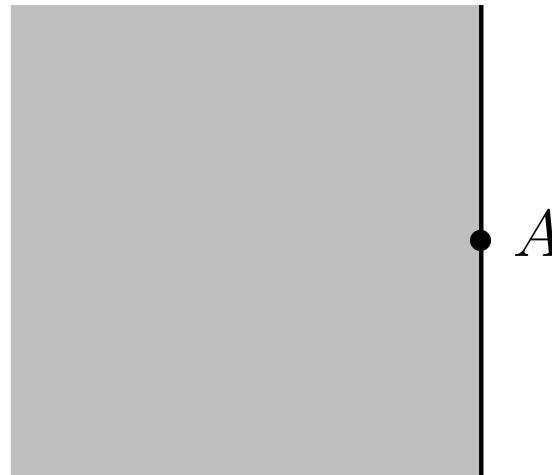
- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:





# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

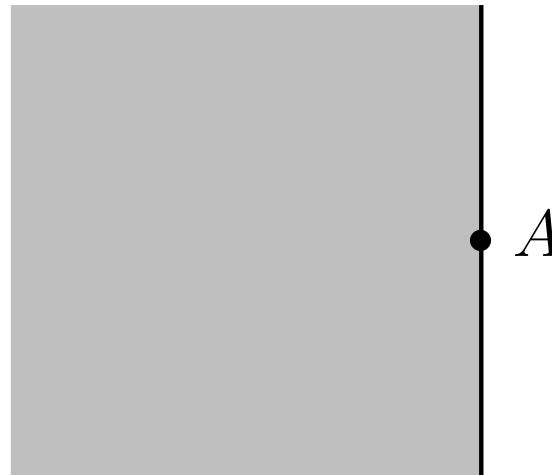
- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:



- Les champs lointains  $u_i^k$ 
  - vérifient l'équation de **Helmholtz homogène**
  - sont **singuliers** au voisinage de l'origine
  - sont sortants à l'infini

# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

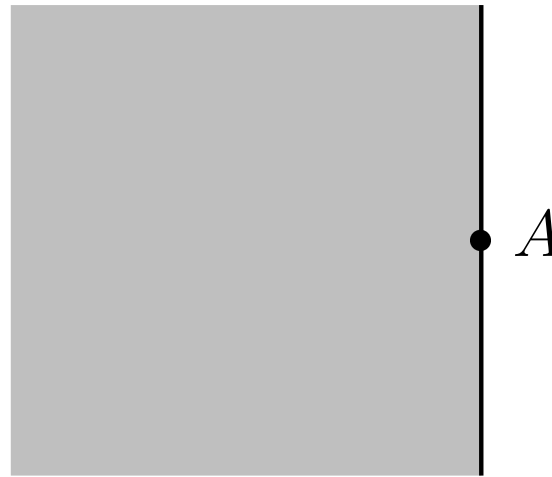
- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:



- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

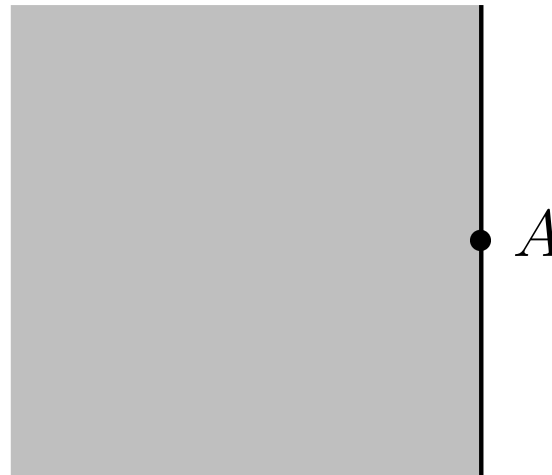
- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:



- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:



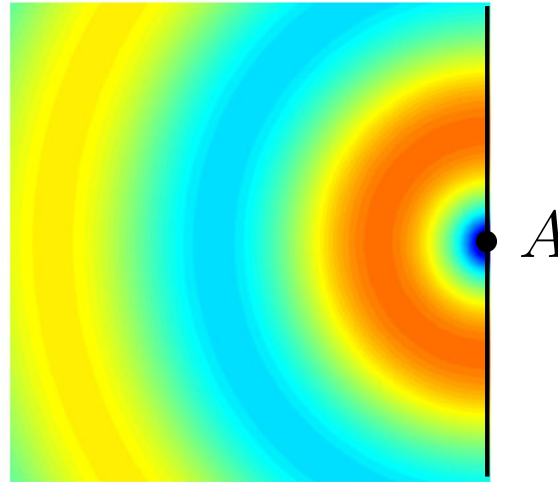
- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les  $a_p$  sont fonctions des termes d'**ordre inférieur**

# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:

$$\text{Im}(H_0^{(1)}(\omega r))$$



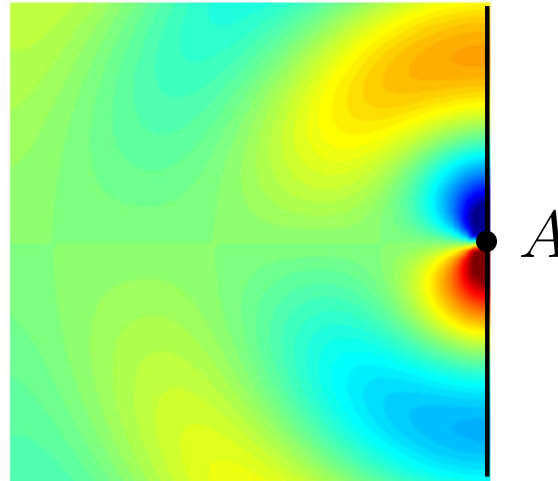
- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les  $a_p$  sont fonctions des termes d'**ordre inférieur**

# Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs  $u_i^k$  sont définis dans tout le **demi-espace**:

$$\text{Im}(H_1^{(1)}(\omega r) \cos \theta)$$

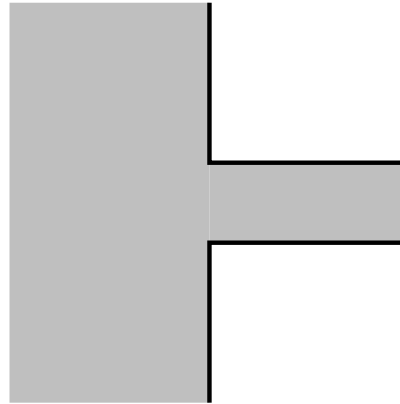


- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les  $a_p$  sont fonctions des termes d'**ordre inférieur**

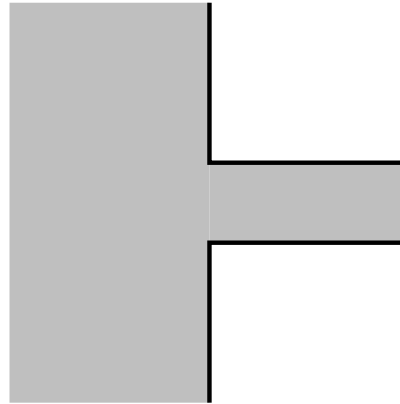
# Les champs proches d'ordre $i > 1$

- Les  $(u_p)_i^k(X, Y)$  sont définis sur le domaine **canonique**:



# Les champs proches d'ordre $i > 1$

- Les  $(u_p)_i^k(X, Y)$  sont définis sur le domaine **canonique**:



- par des équations de **Laplace**:

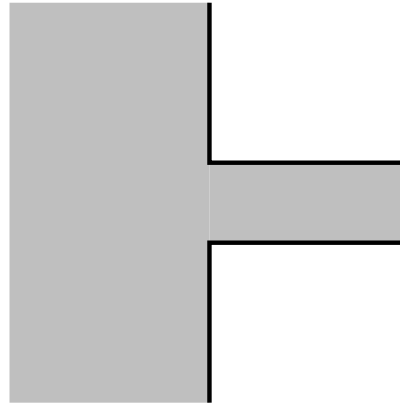
$$\Delta(u_p)_i^k = 0, \quad (i = k \text{ ou } k + 1),$$

$$\Delta(u_p)_i^k = -\omega^2 (u_p)_{i-2}^k, \quad (i \geq k + 2),$$



# Les champs proches d'ordre $i > 1$

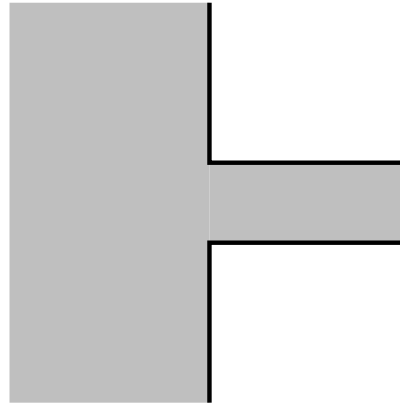
- Les  $(u_p)_i^k(X, Y)$  sont définis sur le domaine **canonique**:



- par des équations de **Laplace**:
- par des **croissances** polynomiales à l'infini:
  - Les **croissances** dans le demi-espace sont fonctions des champs **lointains d'ordre inférieur ou égal**
  - Les **croissances** dans la fente sont fonctions des champs de **fente d'ordre inférieur**

# Les champs proches d'ordre $i > 1$

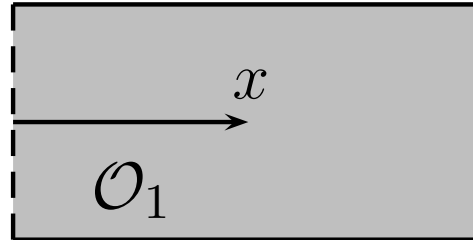
- Les  $(u_p)_i^k(X, Y)$  sont définis sur le domaine **canonique**:



- Preuve de l'**existence-unicité**:
  - Avec des fonctions de troncature, on retire le comportement croissant à l'infini des  $(u_p)_i^k$
  - On utilise la **théorie variationnelle** "classique" (espace de Sobolev à poids, Leroux, Hardy,...)

# Les champs de fente d'ordre $i > 1$

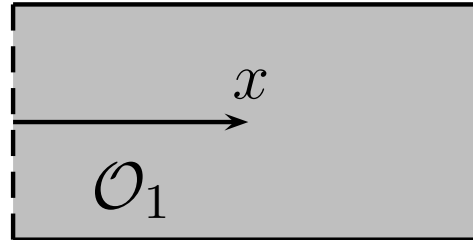
- Les  $U_i^k$  sont définis sur le domaine **canonique**:



- $$U_i^k(x) = \int_0^1 (u_p)_i^k(0, Y) dY \exp i\omega x$$

# Les champs de fente d'ordre $i > 1$

- Les  $U_i^k$  sont définis sur le domaine **canonique**:



- Les  $U_i^k$  ne dépendent que de  $x$ .
- $$U_i^k(x) = \int_0^1 (u_p)_i^k(0, Y) dY \exp i\omega x$$

# Quelques propriétés

On observe que:

- Plus  $i - k$  est grand plus  $u_i^k$  est **singulier** à l'origine:

Termes en  $r^{-p}$ ,  $p = 0, \dots, i - k - 1$

# Quelques propriétés

On observe que:

- Plus  $i - k$  est grand plus  $u_i^k$  est **singulier** à l'origine:

Termes en  $r^{-p}$ ,  $p = 0, \dots, i - k - 1$

- Plus  $i - k$  est grand plus  $(u_p)_i^k$  est **croissant**:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Termes en } \rho^p, \quad p = 0, \dots, i - k, \\ \text{Termes en } X^p, \quad p = 0, \dots, i - k, \end{array} \right.$

# Quelques propriétés

On observe que:

- Plus  $i - k$  est grand plus  $u_i^k$  est **singulier** à l'origine:

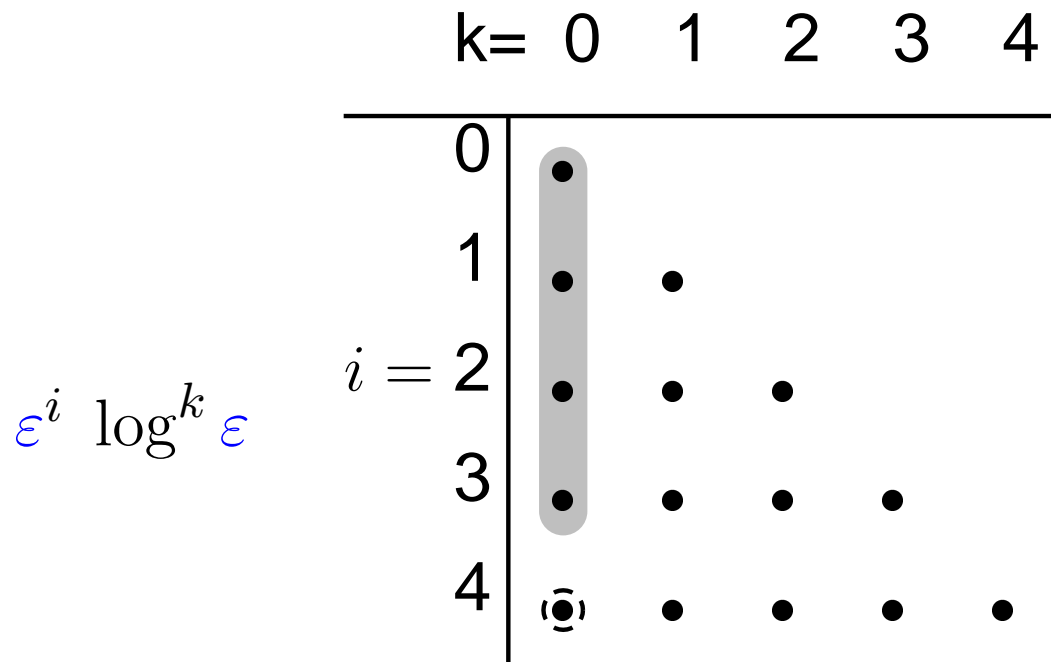
Termes en  $r^{-p}$ ,  $p = 0, \dots, i - k - 1$

- Plus  $i - k$  est grand plus  $(u_p)_i^k$  est **croissant**:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Termes en } \rho^p, \quad p = 0, \dots, i - k, \\ \text{Termes en } X^p, \quad p = 0, \dots, i - k, \end{array} \right.$

- Lorsque l'**ordre**  $i$  augmente, on a  $O(\frac{i^2}{2})$  ( $\times 3$ ) termes à calculer...

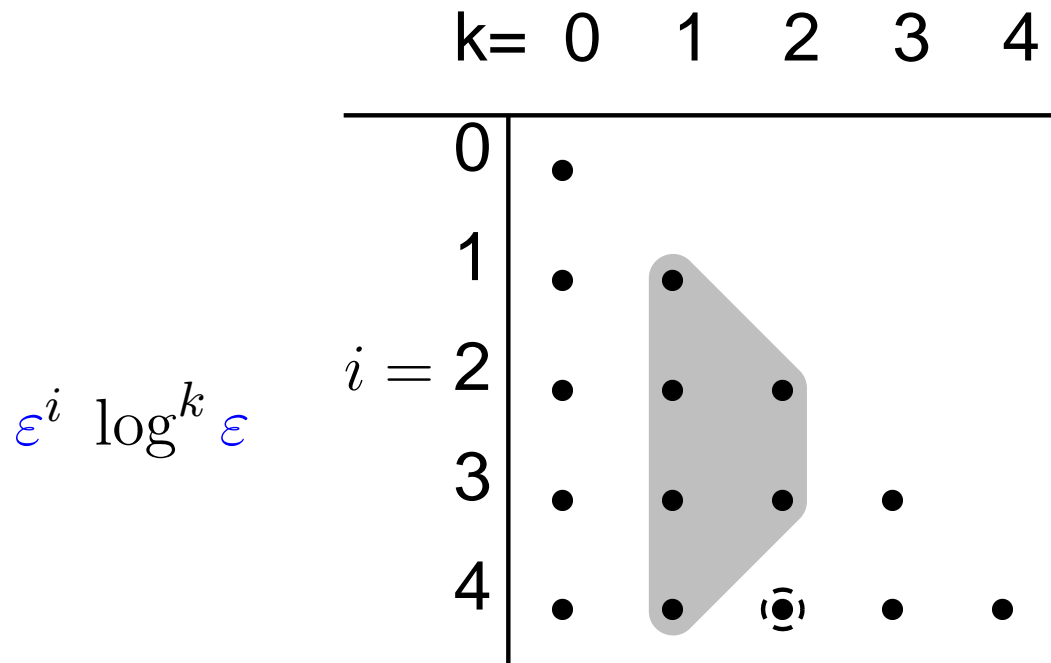
# Diagramme de dépendance des correcteurs



Chaque point correspond au triplet  $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$ .

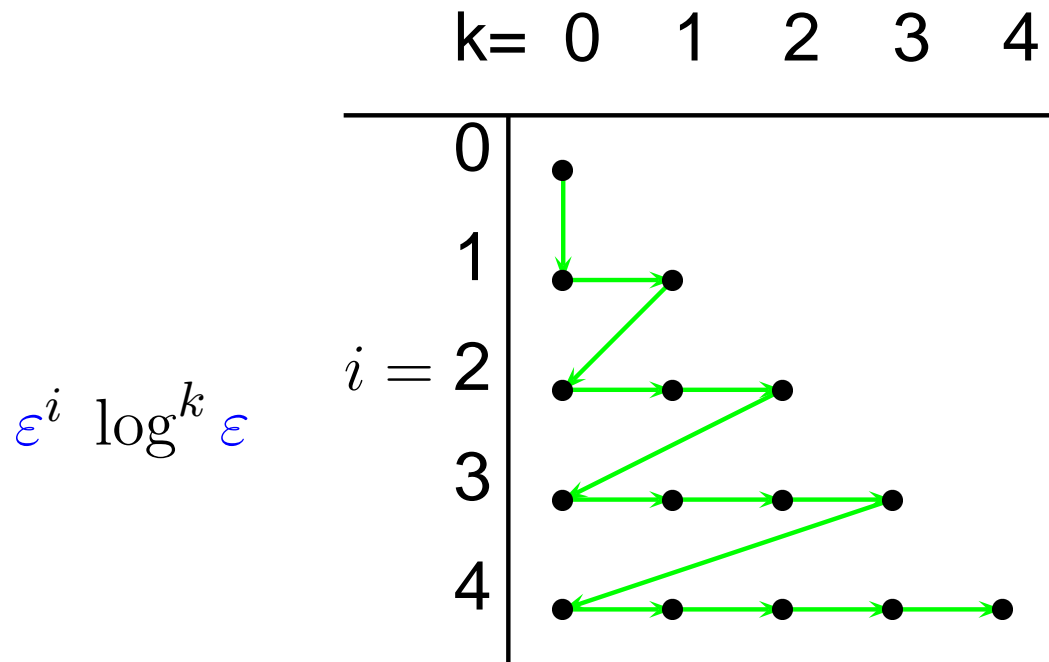


# Diagramme de dépendance des correcteur



Chaque point correspond au triplet  $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$ .

# Ordonnancement naturel des calculs



Chaque point correspond au triplet  $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$ .

# Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \quad (\text{Champ lointain})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \quad (\text{Champ proche})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k \quad (\text{Champ de fente})$$

# Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \quad (\text{Champ lointain})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \quad (\text{Champ proche})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k \quad (\text{Champ de fente})$$

- On injecte les équations volumiques et surfaciques

# Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

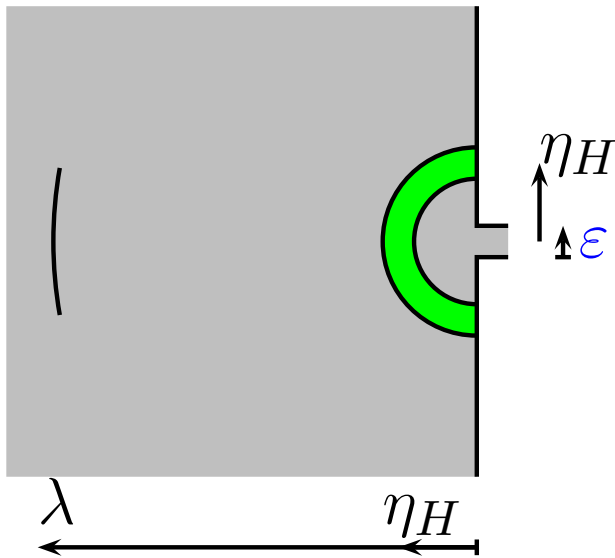
$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \quad (\text{Champ lointain})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \quad (\text{Champ proche})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k \quad (\text{Champ de fente})$$

- On **injecte les équations** volumiques et surfaciques
- Obtention des conditions de **couplage** (**la difficulté**)

# Raccord lointain-proche



Dans une zone épaisse du type:

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$

On traduit le raccord:

$$u^\varepsilon(\eta_H, \theta) = (u_p)^\varepsilon\left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right).$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k(\eta_H, \theta) \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k\left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right)$$

$\eta_H \rightarrow 0$ 
 $\frac{\eta_H}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$

# Raccord lointain-proche

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k(\eta_H, \theta) \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k\left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right)$$

$\eta_H \rightarrow 0$   $\frac{\eta_H}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$

On **développe**

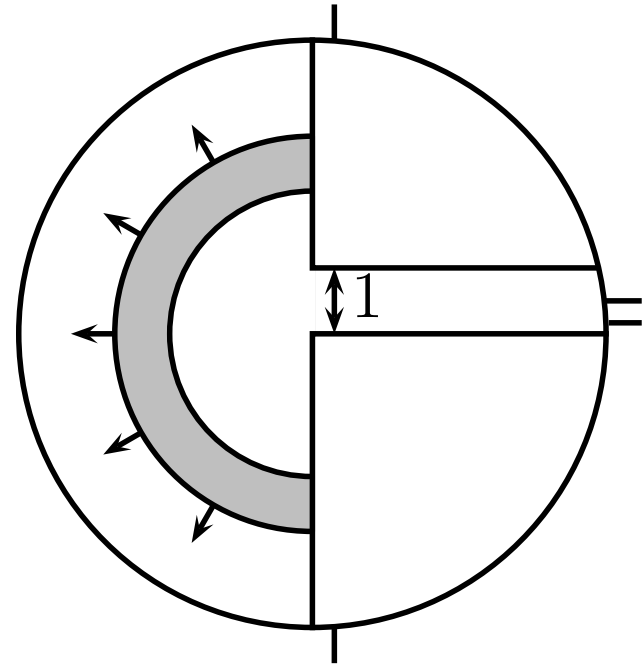
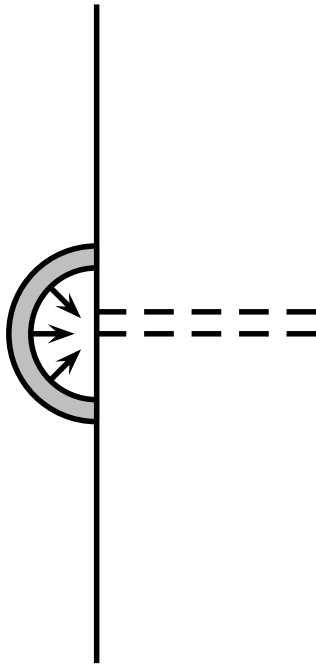
- la série de gauche suivant  $\eta_H$  proche de **0**
- la série de droite suivant  $\eta_H/\varepsilon$  proche de l'**infini**

On **identifie** terme à terme les deux séries.

# Le couplage entre les champs

- Le couplage champ lointain-champ proche:

Le comportement singulier du champ lointain en l'origine est couplé avec le comportement croissant du champ proche à l'infini dans le demi-espace

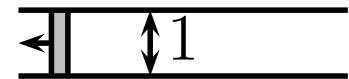
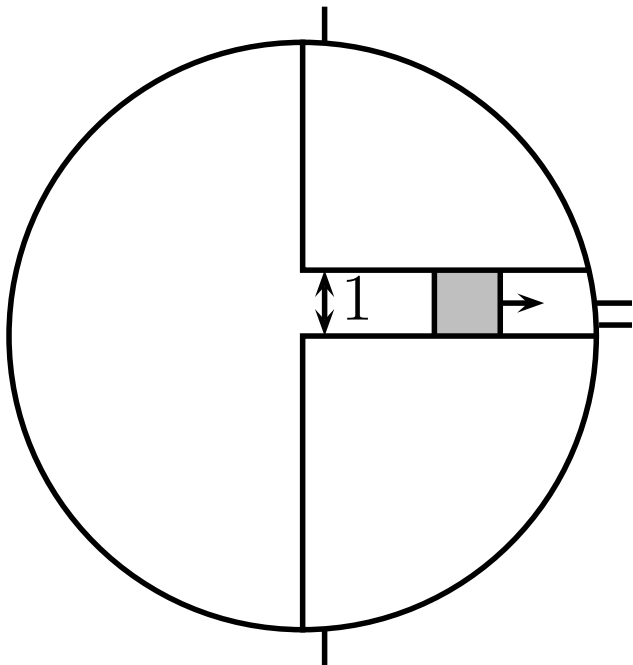




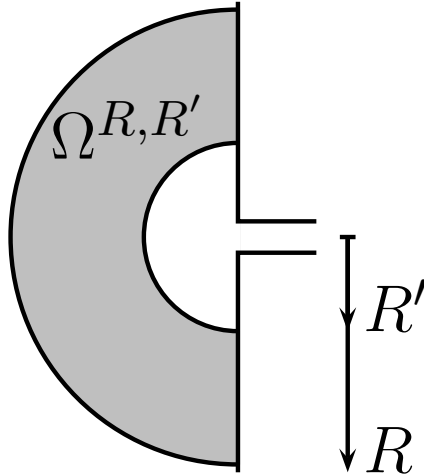
# Le couplage entre les champs

- Le couplage champ **lointain**-champ **proche**:
- Le couplage champ **proche**-champ de **fente**

Le comportement **croissant** du champ **proche** dans la fente est couplé avec le comportement à **l'origine** du champ de **fente** (valeurs des dérivées)

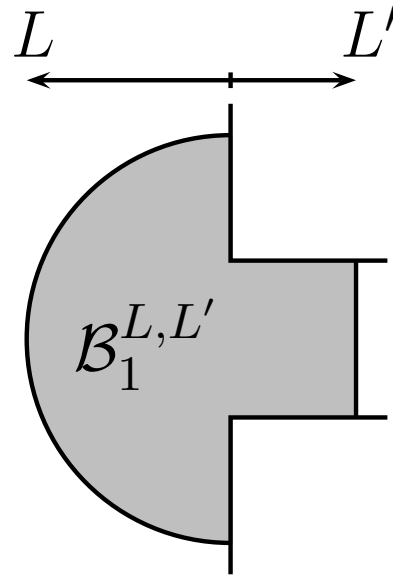
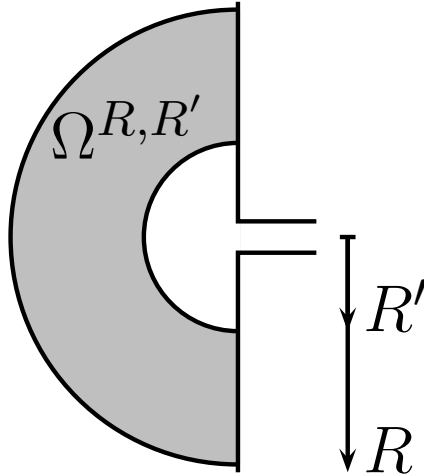


# Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

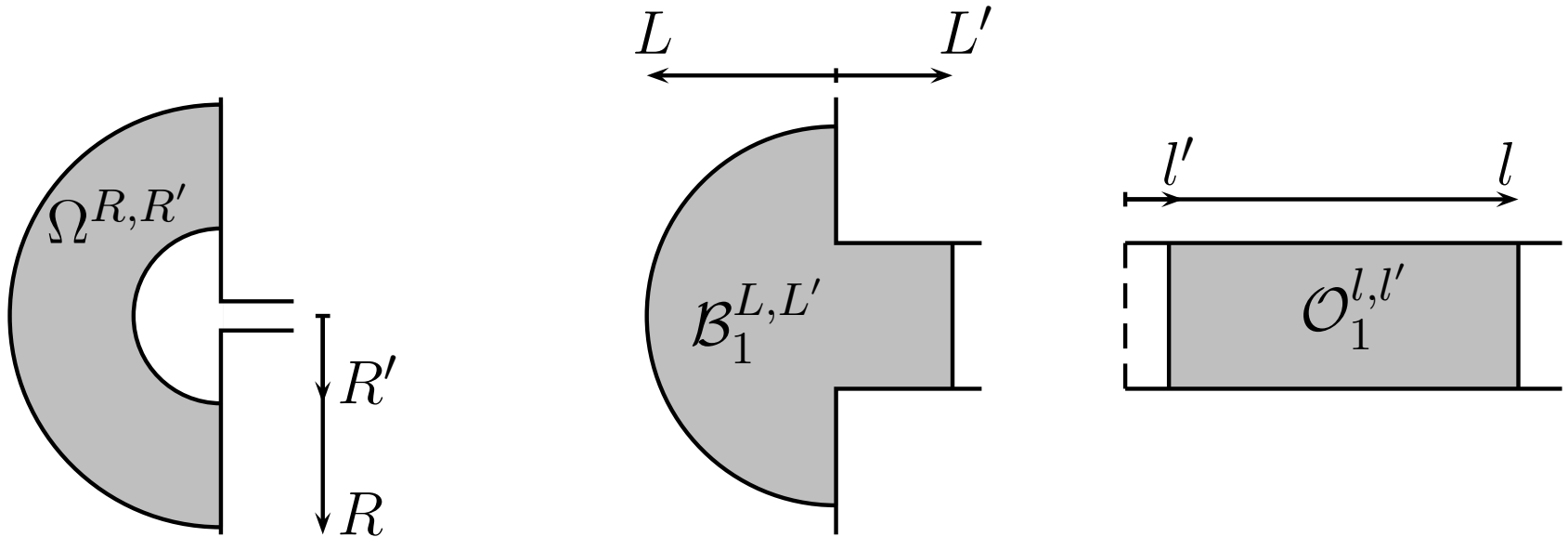
# Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

# Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

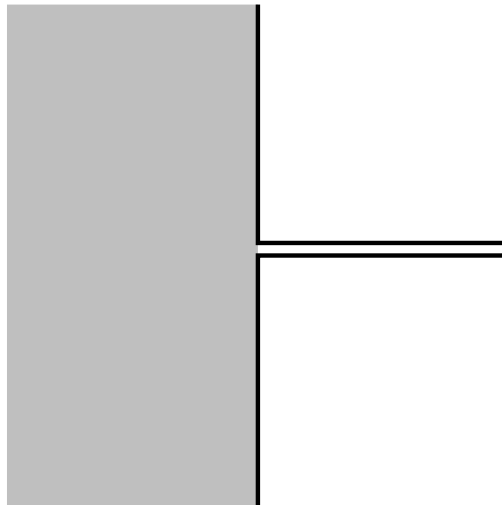
$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{O}_1^{l,l'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

# Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une **approximation**  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  de la solution exacte qui **coïncide** avec:

- le développement **tronqué** du **champ lointain** loin de la fente dans le demi-espace

$$u_n^{H,\varepsilon}(x, y) = u^0(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k(x, y)$$

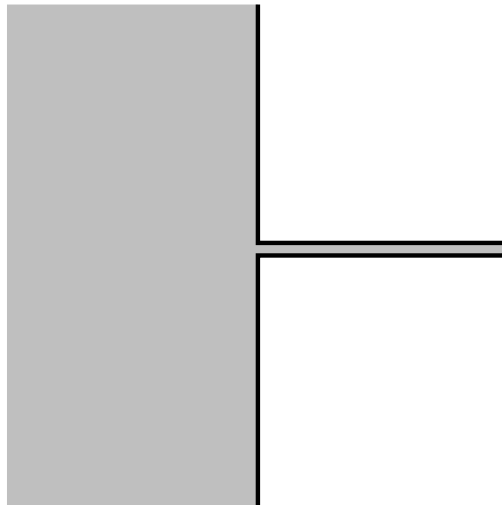


# Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une **approximation**  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  de la solution exacte qui **coïncide** avec:

- le développement **tronqué** en **champ proche** au voisinage de l'embouchure de la fente

$$u_n^{N,\varepsilon}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right)$$

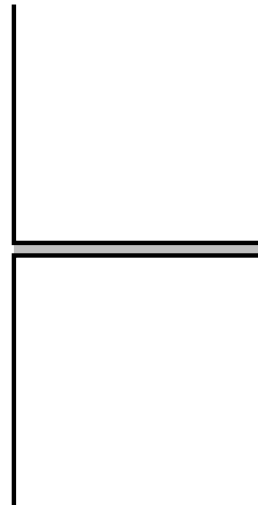


# Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une **approximation**  $\tilde{u}_n^\varepsilon$  de la solution exacte qui **coïncide** avec:

- le développement **tronqué** en **champ de fente** loin dans la fente

$$u_n^{S,\varepsilon}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k(x, \frac{y}{\varepsilon})$$



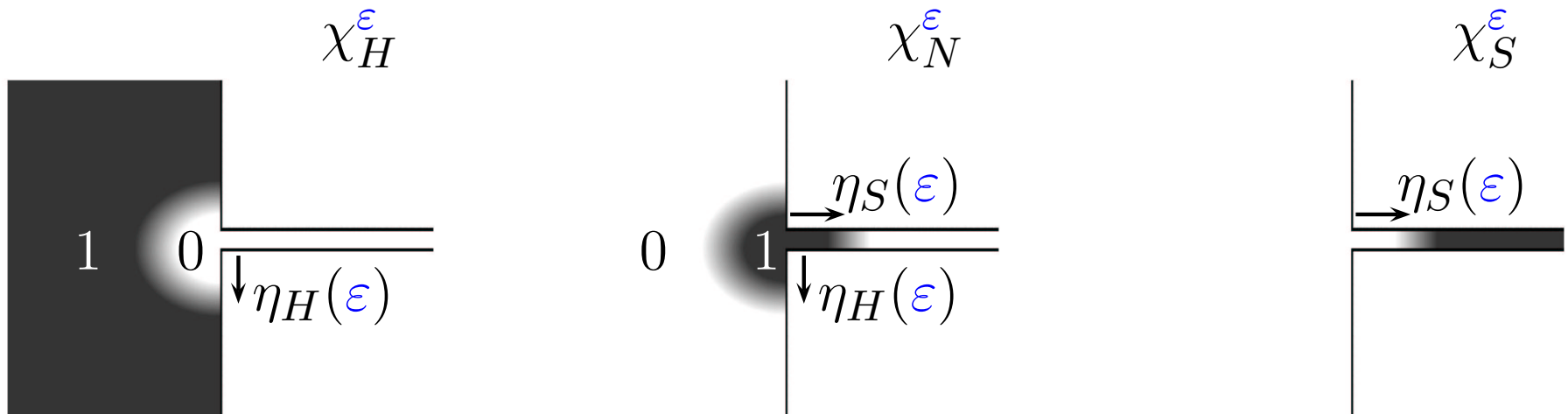
# Idée de la preuve

Introduction d'une partition de l'unité

$$\tilde{u}_n^\varepsilon(r, \theta) = \chi_H^\varepsilon u_n^{H,\varepsilon} + \chi_N^\varepsilon u_n^{N,\varepsilon} + \chi_S^\varepsilon u_n^{S,\varepsilon}$$

avec

$$\chi_H^\varepsilon + \chi_N^\varepsilon + \chi_S^\varepsilon = 1.$$



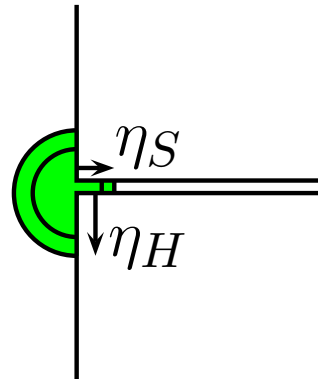


# Idée de la preuve

Equation portant sur l'erreur  $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

$(\delta_N)_n^\varepsilon$  est relié à l'approximation de l'équation de Helmholtz par le champ proche

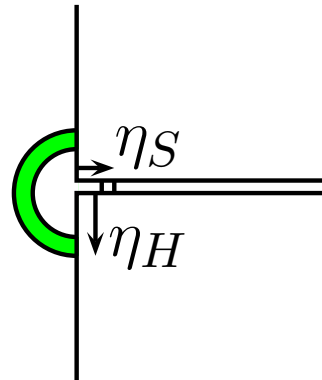


# Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur**  $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

$(\delta_{H-N})_n^\varepsilon$  est relié à l'**erreur de raccord** entre champ **lointain** et champ **proche**

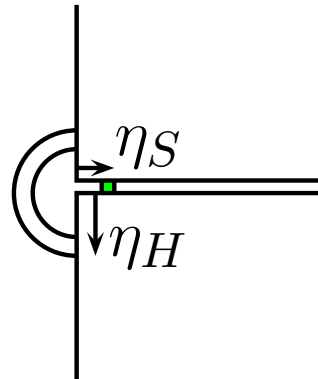


# Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur**  $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

$(\delta_{S-N})_n^\varepsilon$  est relié à l'**erreur de raccord** entre champ de **fente** et champ **proche**



# Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur**  $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

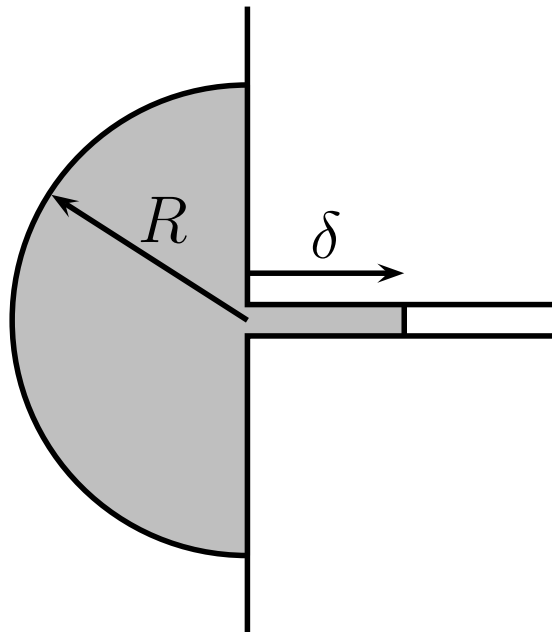
Démarche asymptotique classique:

- **Stabilité**: raisonnement par l'**absurde** (Helmholtz)
- **Consistance**: plus spécifique et technique (étude des singularités et croissances par séparation de variables)

# Idée de la preuve

L'estimation d'erreur globale

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \left[ \left(\eta_H(\varepsilon)\right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)}\right)^n \right] \\ \quad + C \left[ \left(\eta_S(\varepsilon)\right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)}\right)^n \right]. \end{array} \right.$$



# Idée de la preuve

L'estimation d'erreur globale

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \left[ \left(\eta_H(\varepsilon)\right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)}\right)^n \right] \\ \quad \quad \quad + C \left[ \left(\eta_S(\varepsilon)\right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)}\right)^n \right]. \end{array} \right.$$

On choisit  $\eta_H(\varepsilon)$  et  $\eta_S(\varepsilon)$  pour **optimiser** cette relation

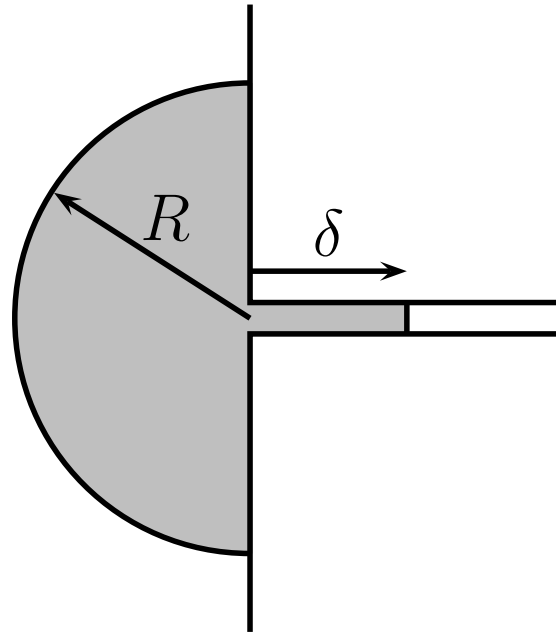
$$\eta_H(\varepsilon) = \eta_S(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$$

Nous tirons

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

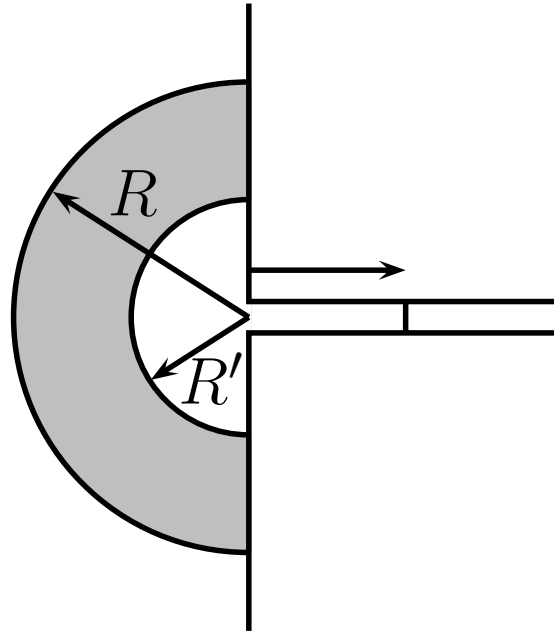
# Idée de la preuve

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$



# Idée de la preuve

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \implies \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$





# Idée de la preuve

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \implies \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Dans la zone de **champ lointain**:

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k$$

# Idée de la preuve

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \implies \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Dans la zone de **champ lointain**:

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u^\varepsilon - u_{3n}^{H,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{3n}{2}} \\ \|u_{3n}^{H,\varepsilon} - u_n^{H,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} \log^n \varepsilon \end{array} \right.$$

# Idée de la preuve

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \implies \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

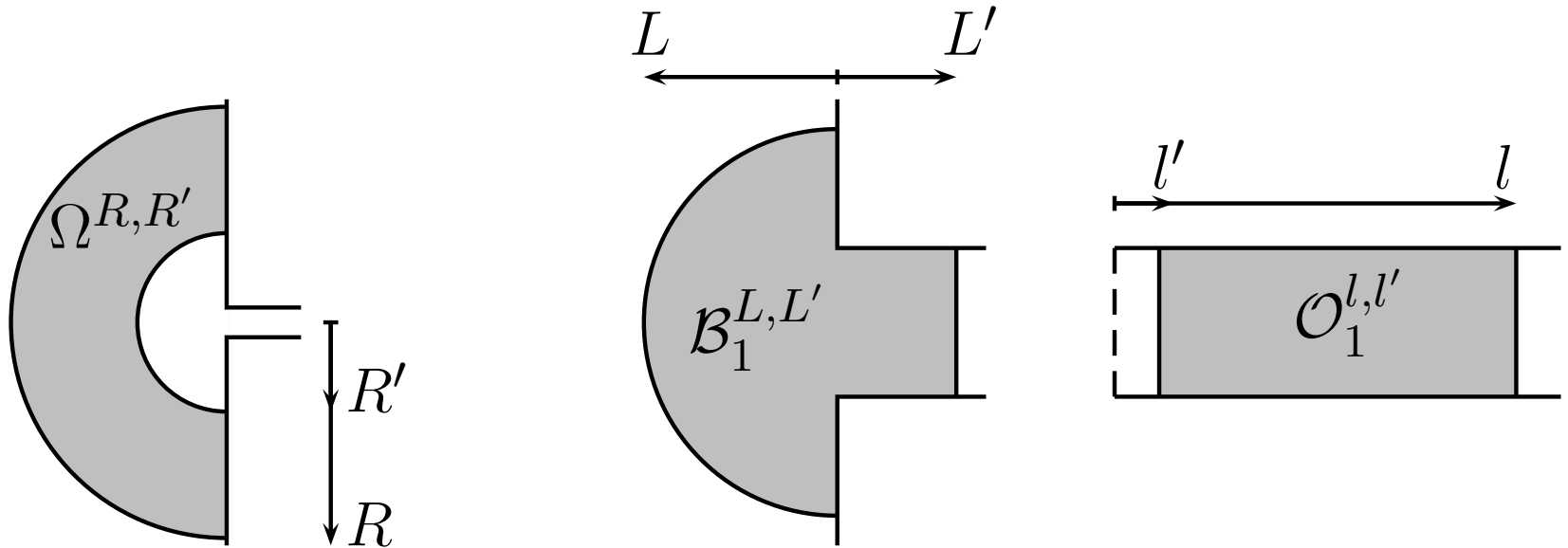
Dans la zone de **champ lointain**:

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k$$

$$\begin{cases} \|u^\varepsilon - u_{3n}^{H,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{3n}{2}} \\ \|u_{3n}^{H,\varepsilon} - u_n^{H,\varepsilon}\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} \log^n \varepsilon \end{cases}$$

On conclut par **inégalité triangulaire**.

# Analyse mathématique



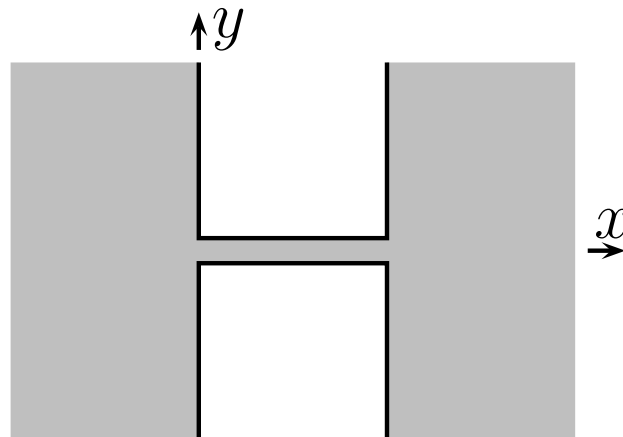
$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{O}_1^{l,l'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

# Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)



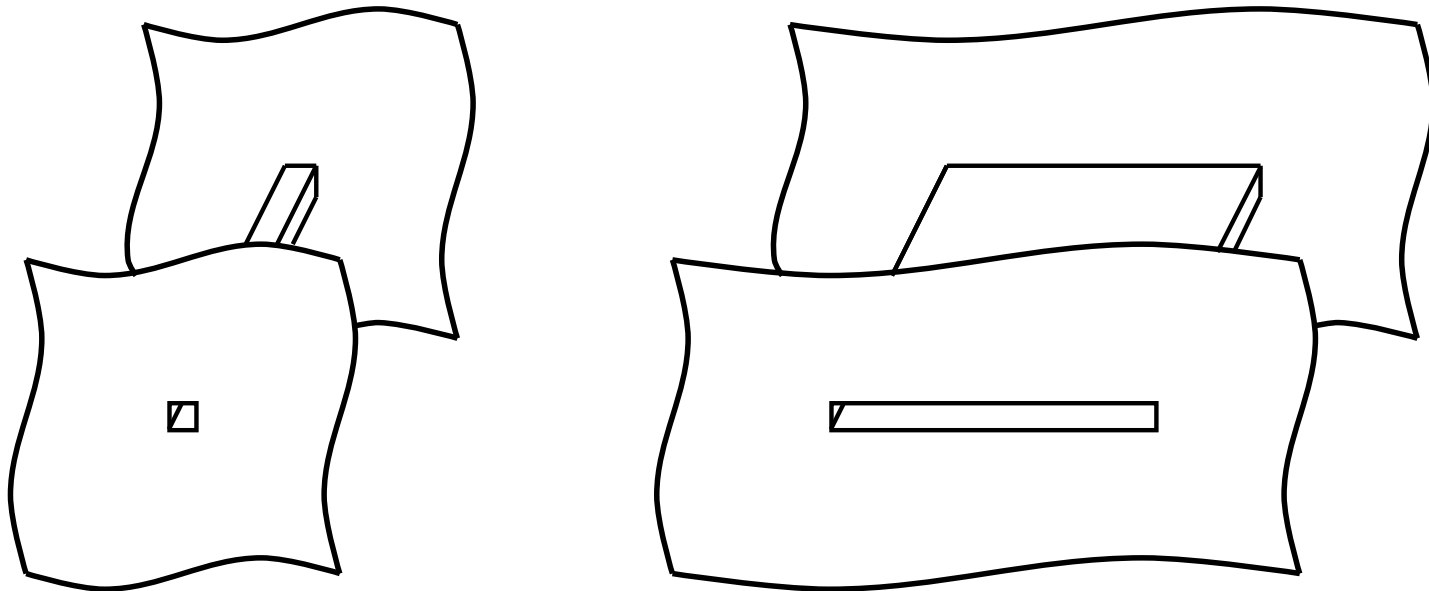
La difficulté: le résultat de **stabilité**.

# Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)
2. Comparaison avec les techniques **multi-échelles**

# Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)
2. Comparaison avec les techniques **multi-échelles**
3. Equations de **Maxwell** 3D



# Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)
2. Comparaison avec les techniques **multi-échelles**
3. Equations de **Maxwell** 3D
4. Domaine **temporel** (équation d'évolution)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0.$$