HAL open science

Segmentation convexe multi-région de données sur les surfaces

Amael Delaunoy, Emmanuel Prados, Ketut Fundana, Anders Heyden

To cite this version:

Amael Delaunoy, Emmanuel Prados, Ketut Fundana, Anders Heyden. Segmentation convexe multi-région de données sur les surfaces. RFIA 2010 - 17ème Congrès de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Jan 2010, Caen, France. inria-00526301

HAL Id: inria-00526301

https://inria.hal.science/inria-00526301v1

Submitted on 14 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Segmentation convexe multi-région de données sur les surfaces

Amaël Delaunoy[1] Emmanuel Prados[1] Ketut Fundana[2] Anders Heyden[3]

[1] INRIA Rhône-Alpes / LJK, Grenoble, France
[2] Applied Mathematics Group, Malmö University, Sweden
and Image Group, Copenhagen University, Denmark
[3] Mathematical Imaging Group, Lund University of Technology, Sweden

Résumé

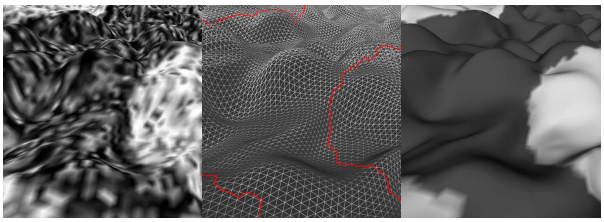
Dans cet article, nous nous intéressons au problème de segmenter des données de nature quelconque définies sur une surface en un ensemble de régions distinctes. Nous adoptons une approche variationnelle basée sur un modèle de Pott, une régularisation de type variation totale et sur l'utilisation de méthodes récentes de segmentation d'images en plusieurs régions. L'approche est basée sur la formulation d'une énergie convexe qui permet de bénéficier de propriétés intéressantes telles que la robustesse aux conditions initiales ainsi que la robustesse aux minima locaux. Dans cet article nous adaptons tout d'abord le modèle sur les variétés, en particulier les surfaces. Ensuite, nous présentons l'implémentation du terme de régularisation basé sur la variation totale lorsque la surface est représentée par un maillage triangulaire. Enfin nous montrons comment cette segmentation peut être utilisée ou combinée dans des problèmes de vision tels que la reconstruction 3D. L'intérêt de la méthode est présenté sur plusieurs types de données.

Mots Clef

Méthodes variationnelles, segmentation convexe, surface, multi-labélisation, variation totale, maillage.

Abstract

In this paper, we address the problem of segmenting data defined on a manifold into a set of regions with uniform properties. In particular, we propose a numerical method when the manifold is represented by a triangular mesh. Based on recent image segmentation models, our method minimizes a convex energy and then enjoys significant favorable properties : it is robust to initialization and avoid the problem of the existence of local minima present in many variational models. The contributions of this paper are threefold : firstly we adapt the convex image labeling model to manifolds ; in particular the total variation formulation. Secondly we show how to implement the proposed method on triangular meshes, and finally we show how to use and combine the method in other computer vision problems, such as 3D reconstruction. We demonstrate the efficiency of our method by testing it on various data.



(a) (b) (c)

FIG. 1: Exemple de segmentation sur une surface. (a) La surface d'entrée texturée. (b) La représentation en maillages triangulaires de la surface avec le contour final de la segmentation (en rouge). (c) La surface colorée avec les valeurs moyennes estimées de chaque régions (avec l'ombrage de la surface).

Keywords

Variational method, image segmentation, convex relaxation, surface, multi-labelling, total variation, gradient flow, mesh.

1 Introduction

La segmentation d'images consiste à extraire une ou plusieurs régions significatives à partir de certains attributs tels que l'intensité, la texture ou la couleur. C'est l'un des problèmes les plus importants de la vision par ordinateur. Dans cet article, nous nous attaquons au problème de segmenter des *données* définies sur une variété (en particulier les surfaces 2D dans $\mathbb{R}^3$) en plusieurs régions partageant des attributs similaires et constants sur une région. Une solution à ce problème ouvre la porte à de nouvelles applications. Par exemple, en reconstruction 3D (voir Jin et al. [17]), une segmentation en régions constantes par morceaux d'une surface reconstruite permet d'introduire des contraintes sur les matériaux de la scène. Dans leurs travaux, Jin et al. [17] considèrent des surfaces avec un albédo constant par morceaux permettant ainsi de faire du *shape from shading* en présence de deux albédos différents.

1.1 Segmentation multi-régions globale

De nombreuses approches ont été proposées afin de résoudre le problème de segmentation d'images. En parti-

culier, les méthodes variationnelles ont connu un grand succès. Parmi ces méthodes, on peut citer par exemple les *snakes* [19], les contours actifs géodésiques [8], les régions actives géodésiques [28] et le modèle de Chan et Vese [10]. Ces premières méthodes procèdent *via* des descentes de gradients. Leur principal désavantage est donc la présence de minima locaux due à la non convexité des fonctionnelles d'énergies et la forte dépendance des résultats aux conditions initiales.

Afin de s'affranchir de ces limitations, des travaux utilisent différents types d'optimisation : on peut citer par exemple les *graph-cuts* dans une configuration purement discrète, voir [6, 20, 21] et leurs références. Néanmoins, alors que les méthodes de segmentation binaire basées sur les *graph-cuts* assurent l'obtention d'un minima global, les algorithmes de segmentation multi-régions utilisant ces mêmes outils sont en fait basés sur des séquences de *graph-cuts* qui ne peuvent garantir une optimisation globale.

Certains auteurs proposent de résoudre ces difficultés via une autre direction. Au lieu de travailler sur les techniques d'optimisation (afin d'obtenir un minimum global de problèmes non convexes), ils reformulent l'énergie dans le but d'obtenir un problème convexe [2, 7, 9, 11, 23, 30, 34]. Ces techniques de segmentation sont basées sur une régularisation de type variation totale et essaient de trouver des fonctions caractéristiques qui minimisent la fonction de coût. Un minimum global est alors obtenu en effectuant simplement une descente de gradient et les difficultés d'initialisation disparaissent. L'algorithme peut partir de n'importe quelle condition initiale et obtenir des résultats similaires. Les modèles de segmentation multi-régions proposés par [9, 23, 34] exploitent ces modèles et les adaptent au cas multi-région. Les travaux de Pock et al. [30] diffèrent légèrement de ceux-ci dans le sens où ils considèrent un ordre particulier pour les différentes labélisations et utilisent un terme de régularisation qui favorise les transitions entre les libellés voisins. Cette hypothèse est cohérente dans le cadre de l'application à la stéréovision proposée par [30], mais elle ne l'est pas ici où nous considérons des libellés indépendants. Nous adoptons donc le modèle de [9, 23, 34] qui est plus approprié dans le type d'applications que nous envisageons (en utilisant le fait que les scènes réelles sont constituées d'un nombre fini de matériaux dans les problèmes de reconstruction 3D) et nous adaptons ce modèle de labélisation d'images aux variétés, typiquement des surfaces de $\mathbb{R}^3$.

1.2 Segmentation de données sur les variétés

Les variétés telles que les surfaces sont couramment utilisées que ce soit en synthèse d'images ou en vision par ordinateur. En vision, bien que la segmentation de données sur les surfaces a été récemment utilisée sur des représentations implicites telles que les *level sets* (voir par exemple [17, 22]), ce problème n'a été que rarement traité dans le cadre de représentations explicites telles que les maillages triangulaires qui sont pourtant des représentations plus naturelles et intuitives. Aussi, la représentation par maillage a été récemment très utilisée en reconstruction 3D ; voir par exemple [1, 12, 32]. L'essor actuel de ces représentions explicites dans le cadre des méthodes variationnelles est dû à l'apparition de méthodes d'évolution de surfaces [1, 31, 35] qui permettent désormais de gérer naturellement les changements de topologie. Par ailleurs, dans un certain nombre d'applications, en particulier dans la communauté graphique, cela peut être la seule représentation disponible. Dans cet article, après avoir adapté le modèle de segmentation d'images aux variétés, nous montrons comment implémenter la méthode proposée sur des maillages triangulaires.

Notons ici que la segmentation de maillages a été utilisée dans la communauté graphique afin de décomposer les surfaces en régions significatives. Ces travaux se focalisent cependant sur les aspects géométriques, le choix et la représentation d'éléments à utiliser (comme la courbure moyenne, les distances géodésiques). Nous référons le lecteur à [3] pour une comparaison récente de certains de ces algorithmes. Ici nous nous intéressons à la segmentation de données sur les variétés. Ce problème n'a pas été beaucoup traité, et est assez différent de la décomposition géométrique d'une surface. Dans [29], les auteurs tiennent compte à la fois de l'information de texture et de courbure, mais leur approche est basée sur un algorithme de *Fast marching* qui nécessite d'être initialisé par des points de départ fixés par l'utilisateur. De plus, comme la méthode de segmentation n'est pas globale, différentes régions partageant les mêmes propriétés peuvent aboutir à plusieurs libellés différents. Le même problème est présent dans [27] ou une segmentation par ligne de partage des eaux (watershed) est utilisé. Contrairement à ces approches, nous proposons ici une méthode globale et également robuste à l'initialisation.

Finalement, il est à noter que le modèle de segmentation considéré est basé sur une régularisation de type variation totale. Bien que cette régularisation ait été utilisée précédemment pour des représentations implicites (voir [4] avec une application à la synthèse de texture), cela n'a pas été le cas pour les méthodes Lagrangiennes. Dans la littérature sur les éléments finis, certains articles traitent le cas de l'opérateur Laplace-Beltrami $\nabla_{\mathcal{S}} \cdot \nabla_{\mathcal{S}} u$ qui correspond au gradient du terme de régularisation carré $\int_{\mathcal{S}} |\nabla_{\mathcal{S}} u|^2 d\sigma$ (voir par exemple [13, 15]). A notre connaissance, il n'existe pas de tels travaux sur le gradient de la variation totale dans ce cadre. Notons par ailleurs que l'opérateur de Laplace-Beltrami est linéaire (propriété essentielle dans l'étude théorique et les algorithmes numériques proposés dans [13, 15]) alors que le terme associé à la variation totale $\nabla_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\nabla_{\mathcal{S}} u}{|\nabla_{\mathcal{S}} u|}$ ne l'est pas.

1.3 Contributions

Tout d'abord, nous adaptons le modèle convexe de segmentation d'images de [7, 9, 11, 23, 34] aux variétés. Ensuite nous montrons comment implémenter la méthode quand la variété est représentée par un maillage triangulaire. Enfin

nous expliquons comment notre algorithme de segmentation multi-régions peut être intégré dans le cadre d'applications potentielles en vision par ordinateur telles que la reconstruction 3D.

2 Modèle de segmentation multi-régions

Dans cette partie, nous décrivons le modèle de segmentation d'image proposé. Afin de rendre la suite compréhensible et intuitive, nous rappelons tout d'abord le modèle de contours actifs basés régions de Chan et Vese [10]. Nous décrivons que leur fonctionnelle d'énergie, qui est le cas constant par morceaux du modèle de Mumford et Shah [26] peut être reformulée en une fonctionnelle convexe dont les minima global coïncident avec ceux de l'énergie de départ [11].

2.1 Modèle convexe binaire

Le modèle de Chan et Vese [10], qui est formulé dans le cadre des ensembles de niveaux (*level sets*), sépare l'image en deux sous-régions. Pour une image donnée I, l'idée est de trouver un sous ensemble Σ d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Sigma$ est représentée par le niveau 0 de la fonction *level set* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Pour cela on minimise l'énergie :

$$\min_{\phi,c_1,c_2} \int_\Omega \Big\{ H_\epsilon(\phi)(I(\mathbf{w}) - c_1)^2 + (1 - H_\epsilon(\phi))(I(\mathbf{w}) - c_2)^2 + \lambda \left|\nabla H_\epsilon(\phi)\right| \Big\} \, d\omega \,, \quad (1)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et H_ϵ est une fonction caractéristique de Heaviside (voir [10]).
Comme la fonctionnelle d'énergie (1) n'est pas convexe, la minimisation par descente de gradient est fortement sujette aux minima locaux. En relaxant la fonction caractéristique $H_\epsilon(\phi)$ par une fonction u bornée entre 0 et 1, Chan et al. [11] montrent que minimiser (1) peut être réécrit suivant la formulation convexe :

$$\min_{0\le u\le 1} \Big\{ \int_\Omega \Big\{ u(\mathbf{w})(I(\mathbf{w}) - c_1)^2 + (1 - u(\mathbf{w}))(I(\mathbf{w}) - c_2)^2 \Big\} \, d\omega + \lambda \int_\Omega |\nabla u| \, d\omega \Big\}, \quad (2)$$

c_1 et c_2 étant fixes dans $\mathbb{R}$. Comme prouvé dans [7, 11], si $u(x)$ minimise (2), alors pour chaque $\mu \in [0, 1]$, l'ensemble $\Sigma(\mu) = \{x \in \Omega, u(x) > \mu\}$ minimise la fonctionnelle de Mumford-Shah [26]. Ceci implique que *la solution de l'équation (1) peut être obtenue en seuillant u par un seuil arbitraire compris entre* 0 *et* 1.

2.2 Extension à la segmentation multi-régions

Très récemment, plusieurs auteurs [9, 23, 34] ont étendu la formulation convexe (2) au cas de segmentation en plusieurs régions :

$$\min_{\mathbf{u}\in K} \Big\{ \int_\Omega < \mathbf{u}(\mathbf{w}), \mathbf{s}(\mathbf{w}) > + \lambda \left|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{w})\right| d\omega \Big\}, \quad (3)$$

où K est l'ensemble des fonctions $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ telles que pour tout $\mathbf{w} \in \Omega$ et $p \in [1..m]$, $\mathbf{u}_p(\mathbf{w}) \geq 0$ et $\sum_{p=1}^m \mathbf{u}_p(\mathbf{w}) = 1$. $|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{w})|$ correspond à $\sqrt{\sum_p |\nabla \mathbf{u}_p(\mathbf{w})|^2}$, où $|.|$ exprime la norme L^2. m est le nombre de libellés pour chaque région et $\mathbf{s}(\mathbf{w})$ est un vecteur de dimension m ; $s_p(\mathbf{w})$ indique l'attache aux données au point $\mathbf{w}$ par rapport à la classe p. Le domaine convexe K permet une compétition naturelle entre les différents libellés. L'ensemble K forme un m-simplex dans $\mathbb{R}^m$.

3 Segmentation multi-régions sur les variétés

Dans cette partie nous étendons le modèle convexe (3) sur une variété, et nous montrons comment optimiser l'énergie associée pour une variété représentée par un maillage triangulaire. Sauf erreur de notre part, ces formulations convexes (2,3) ont uniquement été définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^N$ qui correspondent à des domaines d'images, comme décrit précédemment.
Soit $\mathcal{S}$ une variété Riemannienne. Typiquement, $\mathcal{S}$ pourrait être une surface lisse de $\mathbb{R}^3$. L'énergie (3) est adaptée de la manière suivante :

$$\min_{\mathbf{u}\in K} \Big\{ \int_\mathcal{S} < \mathbf{u}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}) > + \lambda |\nabla_\mathcal{S} \mathbf{u}(\mathbf{x})| \, d\sigma \Big\}, \quad (4)$$

où les fonctions $\mathbf{u}$ sont définies sur $\mathcal{S}$ au lieu de Ω, $|.|$ étant la norme Riemannienne, $\nabla_\mathcal{S}$ est le gradient intrinsèque sur $\mathcal{S}$ et $d\sigma$ est l'élément de mesure de la variété (élément de surface pour une variété 2D).
Maintenant considérons une variété représentée par un maillage. Les résultats suivant s'appliquent pour toute variété quelque soit la topologie. Soit $\mathbf{X}$, une représentation polyhedrale (linéaire par morceaux) de la surface $\mathcal{S}$, définie par un ensemble de sommets $\mathbf{x}_k$: $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_k\}$. Soit l la cardinalité de $\mathbf{X}$ (le nombre de sommets). Comme dans la littérature des éléments finis, nous définissons $\phi_k : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ la fonction de base affine par morceaux telle que $\phi_k(\mathbf{x}_k) = 1$ et $\phi_k(\mathbf{x}_i) = 0$ si $i \neq k$. Le champ vectoriel $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_k\}$ est défini sur tous les sommets $\mathbf{x}$ du polyèdre $\mathcal{S}$. Nous appelons cette extension $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_k \mathbf{u}_k \phi_k(\mathbf{x})$. Afin de rendre l'article plus simple à lire, nous supposons que la variété est une surface 2D de $\mathbb{R}^3$. Les résultats suivants s'appliquent cependant *à n'importe quelle dimension*. Soit $\mathcal{S}_j$ le $j^{\text{ème}}$ triangle du maillage. L'énergie de segmentation multi-régions devient :

$$\sum_j \sum_k \Big\langle \mathbf{u}_k, \int_{\mathcal{S}_j} \phi_k(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) d\sigma \Big\rangle + \lambda \int_{\mathcal{S}_j} |\nabla_\mathcal{S} \mathbf{u}(\mathbf{x})| d\sigma, \quad (5)$$

où $\mathbf{u}$ appartient à l'ensemble convexe K. Le premier terme de (5) est écrit de manière explicite en fonction de $\mathbf{U}$. Le

gradient peut donc facilement être exprimé. Afin d'obtenir le terme de variation totale de manière explicite en fonction de $\mathbf{U}$, on considère une paramétrisation locale (α, β) sur la variété. En suivant [14, 18], on réécrit le terme de droite de l'équation (5) en utilisant les formes fondamentales :

$$\nabla_{\mathcal{S}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{u}_\beta \end{bmatrix} \text{, et donc}$$

$$|\nabla_{\mathcal{S}}\mathbf{u}| = \sqrt{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha & \mathbf{u}_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{u}_\beta \end{bmatrix}} ,$$

où $\mathsf{E} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha}$, $\mathsf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta}$ et $\mathsf{G} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta}$ sont les coefficients de la première forme fondamentale (voir [14, 18]). $\mathbf{u}_\alpha$ et $\mathbf{u}_\beta$ sont les dérivées partielles de $\mathbf{u}$ par rapport à α et β, respectivement. En considérant la représentation par maillage, nous parametrtrons le triangle $\mathcal{S}_j$ par $\mathbf{x}(\alpha, \beta) = \mathbf{x}_{j,1} + \alpha\, \overrightarrow{\mathbf{x}_{j,1}\mathbf{x}_{j,2}} + \beta\, \overrightarrow{\mathbf{x}_{j,1}\mathbf{x}_{j,3}}$ où $\mathbf{x}_{j,1}$, $\mathbf{x}_{j,2}$ et $\mathbf{x}_{j,3}$ sont les trois sommets associés au triangle $\mathcal{S}_j$ et où $(\alpha, \beta) \in T = \{(\alpha, \beta) | \alpha \in [0, 1] \text{ et } \beta \in [0, 1 - \alpha]\}$. On a donc $\int_{\mathcal{S}_j} |\nabla_{\mathcal{S}}\mathbf{u}(\mathbf{x})| d\sigma =$

$$\int_T \sqrt{\sum_p \mathbf{u}_{p_\alpha}^2 \mathsf{G} - 2\mathbf{u}_{p_\alpha} \cdot \mathbf{u}_{p_\beta} \mathsf{F} + \mathbf{u}_{p_\beta}^2 \mathsf{E}}\; d\alpha d\beta \,. \tag{6}$$

$\mathbf{u}_{p_\alpha}$ et $\mathbf{u}_{p_\beta}$ sont les dérivées partielles de $\mathbf{u}_p$ par rapport à α et β respectivement. Ici le lecteur identifiera que E, F, G, $\mathbf{u}_{p_\alpha}$ et $\mathbf{u}_{p_\beta}$ sont des fonctions constantes sur $\mathcal{S}_j$ et que leurs valeurs respectives sont $\mathsf{E}_j = |\mathbf{x}_{j,2} - \mathbf{x}_{j,1}|^2$, $\mathsf{F}_j =< \mathbf{x}_{j,2} - \mathbf{x}_{j,1}, \mathbf{x}_{j,3} - \mathbf{x}_{j,1} >$, $\mathsf{G}_j = |\mathbf{x}_{j,3} - \mathbf{x}_{j,1}|^2$, $\mathbf{u}_{p_\alpha}^j = \mathbf{u}_{j,2_p} - \mathbf{u}_{j,1_p}$ et $\mathbf{u}_{p_\beta}^j = \mathbf{u}_{j,3_p} - \mathbf{u}_{j,1_p}$, où $\mathbf{u}_{j,1}$, $\mathbf{u}_{j,2}$ et $\mathbf{u}_{j,3}$ sont les valeurs de $\mathbf{u}$ aux sommets $\mathbf{x}_{j,1}$, $\mathbf{x}_{j,2}$ et $\mathbf{x}_{j,3}$ respectivement. Maintenant le terme à l'intérieur de l'intégrale de (6) ne dépend pas de α et β. L'énergie de segmentation convexe multi-régions sur le maillage devient :

$$E(\mathbf{U}) = \sum_j \sum_k \left\langle \mathbf{u}_k, \int_{\mathcal{S}_j} \phi_k(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) d\sigma \right\rangle$$
$$+ \frac{\lambda}{2} \sum_j \sqrt{\sum_p {\mathbf{u}_{p_\alpha}^j}^2 \mathsf{G_j} - 2\mathbf{u}_{p_\alpha}^j \cdot \mathbf{u}_{p_\beta}^j \mathsf{F_j} + {\mathbf{u}_{p_\beta}^j}^2 \mathsf{E_j}} \,. \tag{7}$$

3.1 Méthode d'optimisation

Quand la surface est représentée par un maillage, le modèle de segmentation convexe pour plusieurs régions nous amène à optimiser l'énergie convexe (7) par rapport à $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{l \times m}$, avec la contrainte convexe $\mathbf{U} \in K$; K étant l'ensemble $\{\mathbf{U} \text{ s.t. } \forall k,\ \sum_p \mathbf{u}_{kp} = 1 \text{ et } \forall p,\ \mathbf{u}_{kp} \geq 0\}$. Ce problème d'optimisation contraint sur $\mathbb{R}^{l \times m}$ peut être résolu par la méthode de gradient projeté [5], qui consiste à générer la suite U^t via

$$\mathbf{U}^{t+1} = Proj_K(\mathbf{U}^t - \tau \nabla E(\mathbf{U}^t)) \,, \tag{8}$$

pour un pas de temps $\tau > 0$, jusqu'à ce que $|\mathbf{U}^t - \mathbf{U}^{t-1}|_\infty \leq \delta$. δ étant une constante faible. $Proj_K$ est la projection sur l'ensemble convexe K. Autrement dit, on applique de manière itérative la descente de gradient et la projection de $\mathbf{u}_k$ sur l'ensemble K. Ces projections peuvent être réalisées via l'algorithme de Michelot [25]. A partir de l'énergie (7) on obtient

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}_{kp}}(\mathbf{U}) = \sum_{j \in N(k)} \left[\int_{\mathcal{S}_j} \phi_k(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) d\sigma \right]_p - \frac{\lambda}{2}\, Q\, (\xi + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} , \tag{9}$$

où $Q = (\mathbf{u}_{j,2_p} - \mathbf{u}_{kp})(\mathsf{G}_j - \mathsf{F}_j) + (\mathbf{u}_{j,3_p} - \mathbf{u}_{kp})(\mathsf{E}_j - \mathsf{F}_j)$, ξ est le terme dans la racine carrée de (7), et $N(k)$ est le voisinage (1 anneau) autour du sommet k. Comme dans [11], on régularise le terme ξ en incorporant une valeur faible ϵ à l'intérieur de la racine carrée afin d'éviter les instabilités (dues à la non différentiabilité du terme de variation totale). Rappelons maintenant que comme souligné dans [16], la notion de gradient dépend du produit scalaire. Si nous choisissons le produit scalaire "par élément" $< \mathbf{U}, \mathbf{V} >_{\mathsf{pw}} = \sum_k < \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k >$, alors les éléments de $\nabla E(\mathbf{U}^t)$ coincident directement avec $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}_{kp}}(\mathbf{U})$. Néanmoins la métrique "par élément" associée n'est pas efficace pour minimiser des énergies de la forme $\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\, d\sigma$ puisque la distance entre deux champs discrets $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ ne prend pas en compte l'aire des triangles. Le produit scalaire L^2, $< \mathbf{U}, \mathbf{V} >_{L^2} = \int_{\mathcal{S}} < \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}) > d\sigma$ est mieux adapté. Dans ce cas là, le gradient devient

$$\nabla E(\mathbf{U}) = M^{-1} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}) \,, \tag{10}$$

où M est la matrice de masse définie par $M_{ij} = Id_m \int_{\mathcal{S}} \phi_i(x) \phi_j(x)\, d\sigma$. En général, on prend une approximation de M par une matrice diagonale $\tilde{M}$, où $\tilde{M}_{ii}$ est l'aire du dual de la cellule de voronoï $\mathbf{x}_i$ multiplié par la matrice identité Id_m, voir [16].

3.2 Applications

Dans les sections précédentes, nous avons supposé que le terme d'attache aux données du modèle de segmentation s était connu (équation 4). En pratique, ce terme dépend également de paramètres. S'ils ne sont pas connus, il est nécessaire de les optimiser. Le problème est alors traité en optimisant alternativement les paramètres de s et la variable auxiliaire $\mathbf{u}$ d'une façon bi-convexe. Dans ce cas $\mathbf{u}$ est mis à jour par la méthode vue en section 3.1 en considérant les paramètres de s fixes. En pratique nous mettons à jour ces paramètres toutes les r itérations de $\mathbf{u}$ (r est choisi arbitrairement ; dans nos résultats nous avons fixé $\mathsf{r} = 10$).

Segmentation de données constantes par morceaux

Considérons le cas où les données à segmenter sont supposées être constantes par morceaux. Une expression naturelle pour $s_p(\mathbf{x})$ est de choisir l'erreur au carré entre les données (scalaires ou vectorielles) $C(\mathbf{x})$ à un point $\mathbf{x}$ et la

valeur de μ_p, la moyenne sur la région p (μ_p ayant la même dimension que les données) :

$$s_p(\mathbf{x}) = (C(\mathbf{x}) - \mu_p)^T (C(\mathbf{x}) - \mu_p) \ .$$

L'optimisation de l'énergie (4) par rapport à μ_p donne :

$$\mu_p = \frac{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_p(\mathbf{x})\, C(\mathbf{x}) d\sigma}{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) d\sigma} \ ,$$

qui correspond à la valeur moyenne des données sur la région associée. Le modèle constant par morceaux peut facilement être étendu à n'importe qu'elle densité de probabilité D_p. Par exemple, D_p peut être une densité gaussienne de moyenne μ_p et de covariance Σ_p. On aurait alors :

$$s_p(\mathbf{x}) = -\ln(D_p(\mathbf{x}, \mu_p, \Sigma_p)) \text{ , avec}$$

$$D_p(\mathbf{x}, \mu_p, \Sigma_p) = \frac{1}{\sqrt[m]{2\pi|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(C(\mathbf{x})-\mu_p)^T \Sigma_p^{-1} (C(\mathbf{x})-\mu_p)} \ .$$

Segmentation dans les problèmes de Reconstruction 3D

Ce type de segmentation peut être incorporé dans les problèmes de reconstruction 3D. Dans ces applications, il peut être intéressant de segmenter une région particulière, ou l'ensemble des régions partageant par exemple les mêmes propriétés de réflectance. En reconstruction 3D, la plupart des méthodes variationnelles reviennet à minimiser une énergie de la forme

$$E(\mathcal{S}) = \sum_i \int_{\mathcal{S}} g(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{x}_{i,z}^3} \nu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})\, d\sigma \ , \qquad (11)$$

voir par exemple [12, 17, 18]. De plus si nous choisissons

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{m} \mathbf{u}_p(\mathbf{x})(I_i(\pi_i(\mathbf{x})) - \mu_p)^T (I_i(\pi_i(\mathbf{x})) - \mu_p) \ ,$$

où $\pi_i(\mathbf{x})$ est la projection d'un point de la surface $\mathbf{x}$ dans la $i^{\text{ème}}$ image et $I_i : w \mapsto I_i(w)$ est la fonction qui associe à chaque pixel sa couleur dans l'image. On obtient une extension de la méthode de segmentation stéréoscopique de [33] dans le cas où la surface est composée d'au moins deux régions de radiance constante. Également, contrairement à notre méthode, la segmentation dans [33] est sujette aux minima locaux. Finalement, l'optimisation de l'énergie (4) par rapport à μ_p donne :

$$\mu_p = \frac{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) \sum_i I_i(\pi_i(\mathbf{x})) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3} \nu_{\mathcal{S},i}(\mathbf{x}) d\sigma}{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) \sum_i \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3} \nu_{\mathcal{S},i}(\mathbf{x}) d\sigma} \ .$$

Si on choisit $g(\mathbf{x}) =$

$$\sum_{p=1}^{m} \mathbf{u}_p(\mathbf{x})(I_i(\pi_i(\mathbf{x})) - \rho_p \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L})^T (I_i(\pi_i(\mathbf{x})) - \rho_p \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L}),$$

où $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ est la normale au point $\mathbf{x}$ et $\mathbf{L}$ est le vecteur correspondant à la source lumineuse de la scène, nous obtenons alors une extension de l'approche de *shape from shading* multi-vues proposée par [17] pour des surfaces avec un albedo constant par morceaux. Contrairement à notre approche, la méthode proposée par [17] est limitée au cas binaire est est fortement sujette aux minima locaux. L'optimisation de l'énergie (4) par rapport à l'albedo donne :

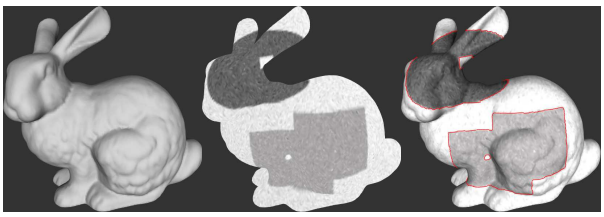
$$\rho_p = \frac{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) \sum_i I_i(\pi_i(\mathbf{x})) \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3} \nu_{\mathcal{S},i}(\mathbf{x}) d\sigma}{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}_p(\mathbf{x}) (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L})^2 \sum_i \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{x}_z^3} \nu_{\mathcal{S},i}(\mathbf{x}) d\sigma} \ .$$

Pour chacune des applications suivantes, une fois les paramètres de s fixés, $\mathbf{U}$ est mis à jour suivant la méthode décrite dans la section 3.

4 Expérimentations

Dans le but de montrer l'efficacité de l'approche de segmentation multi-régions proposée sur les maillages, nous présentons différents exemples sur des données réelles et synthétiques. Comme expliqué dans la section précédente, la segmentation est résolue de manière alternée entre les paramètres de chaque région et la variable auxiliaire $\mathbf{U}$. Pour l'ensemble des exemples, le nombre de régions est fixé à l'avance et $\mathbf{U}$ est initialisé de manière totalement aléatoire. Les expérimentations sont réalisées sur une machine linux à 2.66GHz et prennent environ 200 secondes pour un maillage de 200 000 facettes et pour 4 régions. Les valeurs de λ sont choisies arbitrairement dans chaque exemple.

4.1 Le cas binaire



(a) (b) (c)

FIG. 2: Résultats de la segmentation sur les données synthétiques du lapin de Stanford. (a) Forme d'entrée. (b) Surface d'entrée avec une texture de synthèse. (c) Maillage texturé et contour final retrouvé par notre approche.

Les figures 2 et 3 montrent des exemples de notre algorithme sur le lapin de Stanford texturé avec des images de synthèse dans le cas binaire de deux régions constantes par morceaux. Du bruit gaussien a été ajouté sur la texture. Notre approche présente de bon résultats et montre la solution binaire finale. De plus nous voyons que la méthode est robuste à l'initialisation de la fonction $\mathbf{U}$. Il est important de noter que la solution affichée est la variable auxiliaire $\mathbf{u}$, et non pas les valeurs moyennes μ_1 et μ_2. En fait, l'énergie est convexe par rapport à $\mathbf{u}$ seulement, et les valeurs μ_1 et μ_2 sont optimisées durant l'évolution et correspondent arbitrairement aux régions $\mathbf{u} = (1, 0)$ et $\mathbf{u} = (0, 1)$. Cela explique que la dernière initialisation se termine avec des

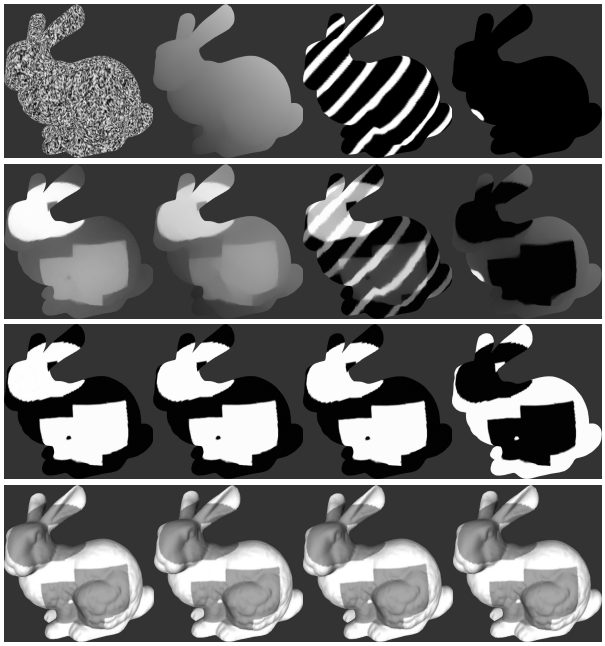


FIG. 3: Évolution sur les images de synthèse du lapin. Différentes initialisations de $\mathbf{U}$ (première ligne) ; Valeur intermédiaire de $\mathbf{U}$ (seconde ligne) ; La solution obtenue $\mathbf{U}$ (troisième ligne) ; Les valeurs moyennes obtenues (quatrième ligne) avec ombrage.

valeurs inversées. En pratique, bien que la fonctionnelle ne soit pas complètement convexe, on obtient des résultats semblables et des valeurs moyennes très similaires. On a respectivement ($\mu_1 = 140.778$, $\mu_2 = 231.003$), ($\mu_1 = 140.746$, $\mu_2 = 231.01$), ($\mu_1 = 140.75$, $\mu_2 = 231.03$) et ($\mu_1 = 230.992$, $\mu_2 = 140.765$) pour les quatres initialisations. Pour la dernière colonne, les valeurs μ_1 et μ_2 sont inversées mais $\mathbf{u}$ l'est également. Dans cet exemple, les contours actifs ou les *level sets* tomberaient dans le minima local le plus proche de leur initialisation car la texture n'est pas binaire. Néanmoins, comme on est en présence d'une méthode globale ici, segmenter une région particulière doit être fait en rajoutant des contraintes additionnelles.
La figure 4 présente des segmentations binaires de surfaces générées à partir d'images plaquées sur le maillage provenant d'images classiques de segmentation. Les résultats acceptables ont un caractère binaire bienqu'il soient obtenus à partir d'initialisation aléatoire. La valeur moyenne de chaque région est estimée comme expliqué précédemment, et le paramètre λ permet d'ajuster le lissage sur la segmentation.

4.2 Le cas avec plusieurs régions

Différents exemples sont montrés avec des données de synthèses (avec un bruit ajouté) ou générées avec un plaquage de textures provenant d'images réelles.
La Figure 5 montre le résultats de la segmentation avec des données fortement bruitées avec l'approche proposée et l'algorithme K-moyennes. Notre approche, qui comparée à K-means utilise une régularisation permettant une cohérence spatiale de l'information, propose une segmentation proche de celle souhaitée et non bruitée. En plus d'être robuste à l'initialisation, notre approche est également robuste au bruit.
Nous avons ensuite testé l'approche multi-régions sur les données précédentes provenant de [24], voir Figure 6.

FIG. 4: Résultats de segmentation dans le cas binaire pour différents exemples. De haut en bas : Maillage texturé d'entrée ; Forme du maillage sur lequel la segmentation est effectuée, et valeur initiale aléatoire d'une des composantes de $\mathbf{U}$; Valeurs moyennes estimées pour chaque région ; Objet d'intérêt segmenté.

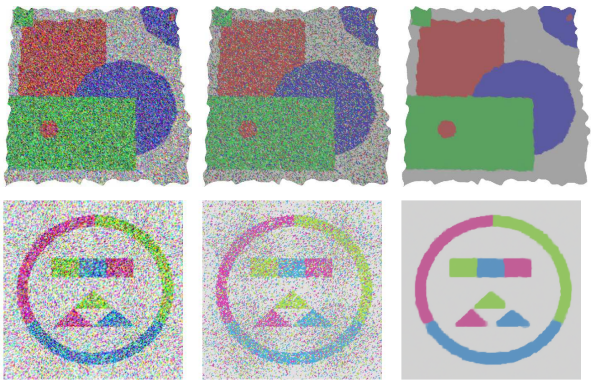
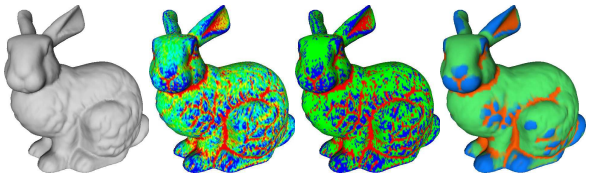


FIG. 5: Résultats de segmentation sur maillage dans le cas multi-régions pour différents exemples de synthèse inspirés de [23]. (a) Maillage texturé d'entrée. (b) Segmentation par l'algorithme K-moyennes. (c) Valeurs moyennes de chaque région obtenues par notre approche.

FIG. 6: Résultats de segmentation sur les maillages dans le cas multi-régions. Ligne du haut : données du cheval et sa segmentation en trois régions. Ligne du bas : Labélisation en quatre régions des données du papillon. (a) Maillage texturé d'entrée ; (b) Valeurs moyennes estimées pour chaque classe ; (c) Une des régions segmentée.

La figure 7 montre une application pour les aspects géométriques en segmentant la courbure moyenne en trois différentes régions (notamment concaves et convexes).



(a) (b) (c) (d)

FIG. 7: Résultat de segmentation sur la courbure moyenne en 3 régions. (a) Maillage d'entrée. (b) Visualisation de la courbure moyenne. (c) Simple seuillage de la courbure moyenne. (d) Résultat de la segmentation en trois régions par notre approche.

Finalement, la figure 8 montre un exemple avec un maillage 3D obtenu par reconstruction 3D utilisant [32, 35]. La figure montre la segmentation de la radiance de la surface en trois régions distinctes. On retrouve parfaitement les régions de la peau, du pantalon et du t-shirt.
Pour une comparaison du modèle convexe de segmentation de plusieurs régions sur les images (3) avec d'autres méthodes, nous référons les lecteurs à [23] qui montre des résultats de comparaisons quantitatifs et qualitatifs avec diverses méthodes de types *belief propagation* et *graph cuts*. Les résultats de labélisation obtenus sont comparables à l'état de l'art par rapport aux méthodes discrètes d'optimisation.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une méthode variationnelle pour la segmentation de données sur les variétés en différentes régions avec propriété constante. La formulation convexe rend le modèle proposé robuste à l'initialisation. De plus, la régularisation utilisant la variation totale permet d'être robuste au bruit. Nous avons montré comment implémenter la méthode lorsque la surface est représentée par un maillage triangulaire, et en particulier comment calculer le gradient de la variation totale dans ce cadre. Cela offre de nouvelles perspectives de résolution de problèmes variationnels sur ce type de représentation.

Remerciements

Amaël Delaunoy et Emmanuel Prados ont été financés par le projet ANR Flamenco ANR-06-MDCA-007, et Ketut Fundana et Anders Heyden ont été financés par le programme VISIONTRAIN RTN CT-2004-005439 Marie Curie Action. Nous remercions Andrei Zaharescu et Adrian Hilton pour avoir partagé les données du danceur avec le groupe Perception.

Références

[1] E. Aganj, J.-P. Pons, F. Ségonne, and R. Keriven. Spatio-temporal shape from silhouette using four-dimensional delaunay meshing. In *IEEE International Conference on Computer Vision*, Rio de Janeiro, Brazil, Oct 2007.

[2] B. Appleton and H. Talbot. Globally minimal surfaces by continuous maximal flows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (1), January 2006.

[3] M. Attene, S. Katz, M. Mortara, G. Patanè, M. Spagnuolo, and A. Tal. Mesh segmentation - a comparative study. 2006.

[4] M. Bertalmio, G. Sapiro, L.-T. Cheng, and S. Osher. Variational problems and pdes on implicit surfaces. *Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, 2001.

[5] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2003.

[6] Y. Boykov and M.-P. Jolly. Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in n-d images. *IEEE International Conference on Computer Vision*, 2001.

[7] X. Bresson, S. Esedoglu, P. Vandergheynst, J. P. Thiran, and S. J. Osher. Fast global minimization of the active contour/snake model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 28(2) :151–167, June 2007.

[8] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, (1), 1997.

[9] A. Chambolle, D. Cremers, and T. Pock. A convex approach for computing minimal partitions. Technical Report R.I.649, CMAP CNRS, November 2008.

[10] T. Chan and L. Vese. Active contour without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277, 2001.

[11] T. F. Chan, S. Esedoglu, and M. Nikolova. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *Journal of Applied Mathematics*, 2006.

[12] A. Delaunoy, E. Prados, P. Gargallo, J.-P. Pons, and P. Sturm. Minimizing the multi-view stereo reprojection error for triangular surface meshes. In *British Machine and Vision Conference, Leeds, UK*, 2008.

[13] A. Demlow and G. Dziuk. An adaptive finite element method for the laplace-beltrami operator on implicitly defined surfaces. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, (1), 2007.

[14] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, February 1976.

[15] G. Dziuk. Finite elements for the beltrami operator on arbitrary surfaces. In S. B. . Heidelberg, editor, *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*, pages 142–155. Lecture Notes in Mathematics, 2006.

[16] I. Eckstein, J.-P. Pons, Y. Tong, C.-C. J. Kuo, and M. Desbrun. Generalized surface flows for mesh processing. In *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 2007.

FIG. 8: Résultat de segmentation sur un maillage obtenu par stéréo multi-vues. Vue de face (ligne du haut) et de dos (bas). Maillage coloré original et la forme 3D associée (gauche). Résultat de la segmentation en trois région par notre approche (milieu). Valeurs moyennes pour chaque région segmentée (droite).

[17] H. Jin, D. Cremers, D. Wang, E. Prados, A. Yezzi, and S. Soatto. 3-d reconstruction of shaded objects from multiple images under unknown illumination. *International Journal of Computer Vision*, 76(3), March 2008.

[18] H. Jin, A. Yezzi, Y.-H. Tsai, L.-T. Cheng, and S. Soatto. Estimation of 3d surface shape and smooth radiance from 2d images : A level set approach. *J. Sci. Comput.*, (1-3), 2003.

[19] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, pages 321–331, 1988.

[20] P. Kohli and P. H. S. Torr. Dynamic graph cuts for efficient inference in markov random fields. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Dec. 2007.

[21] Kolmogorov and Zabih. What energy functions can be minimized via graph cuts. *IEEETPAMI : IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26, 2004.

[22] M. Krueger, P. Delmas, and G. Gimel'Farb. Active contour based segmentation of 3d surfaces. In *European Conference on Computer Vision*, 2008.

[23] J. Lellmann, J. Kappes, J. Yuan, F. Becker, and C. Schnoerr. Convex multi-class image labeling by simplex-constrained total variation. Technical report, University of Heidelberg, oct 2008.

[24] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 416–423, July 2001.

[25] C. Michelot. A finite algorithm for finding the projection of a point onto the canonical simplex of rn. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 50(1) :195–200, 1986.

[26] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and variational problems. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XLII(5) :577–685, 1988.

[27] D. L. Page, A. F. Koschan, and M. A. Abidi. Perception-based 3d triangle mesh segmentation using fast marching watersheds. *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2003.

[28] N. Paragios and R. Deriche. Geodesic active regions and level set methods for motion estimation and tracking. *Computer Vision and Image Understanding*, 97 :259–282, 2005.

[29] G. Peyre and L. Cohen. Surface segmentation using geodesic centroidal tesselation. *International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission*, Sept. 2004.

[30] T. Pock, T. Schoenemann, G. Graber, H. Bischof, and D. Cremers. A convex formulation of continuous multi-label problems. In *European Conference on Computer Vision*, pages III : 792–805, 2008.

[31] J.-P. Pons and J.-D. Boissonnat. Delaunay deformable models : Topology-adaptive meshes based on the restricted delaunay triangulation. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Minneapolis, USA, Jun 2007.

[32] J. Starck and A. Hilton. Surface capture for performance based animation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2007.

[33] A. Yezzi and S. Soatto. Stereoscopic segmentation. *IEEE International Conference on Computer Vision*, 2001.

[34] C. Zach, D. Gallup, J.-M. Frahm, and M. Niethammer. Fast global labeling for real-time stereo using multiple plane sweeps. In *Proceedings of Vision, Modeling, and Visualization*, 2008.

[35] A. Zaharescu, E. Boyer, and R. Horaud. Transformesh : a topology-adaptive mesh-based approach to surface evolution. In *Proceedings Asian Conference on Computer Vision*, Tokyo, Japan, November 2007.