



**HAL**  
open science

## Standardization of Rational Bézier Surfaces

Yi-Jun Yang, Jun-Hai Yong

► **To cite this version:**

Yi-Jun Yang, Jun-Hai Yong. Standardization of Rational Bézier Surfaces. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2007. inria-00519199

**HAL Id: inria-00519199**

**<https://inria.hal.science/inria-00519199>**

Submitted on 18 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 有理 Bézier 曲面的标准化\*

杨义军<sup>1, 2)</sup>, 雍俊海<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (清华大学 软件学院, 北京 100084)

<sup>2)</sup> (清华大学 计算机科学与技术系, 北京 100084)

(yangyijun@gmail.com)

**摘要** 根据 Möbius 定理, 给出了有理 Bézier 曲面通过线性 Möbius 变换可以进行标准化的充要条件。为了将任意双三次有理 Bézier 曲面标准化, 提出了一个二次重新参数化算法。二次重新参数化算法通过对四条边界的 Möbius 变换进行线性插值, 将双三次有理 Bézier 曲面四个角点权因子都变为 1。最后通过实例说明了文中方法的有效性。

**关键词** 有理 Bézier 曲面; Möbius 变换; 二次重新参数化

**中图法分类号** TP391

## Standardization of rational Bézier surfaces

Yang Yi-Jun<sup>1, 2)</sup>, Yong Jun-Hai<sup>1)</sup>, Zhang Hui<sup>1)</sup>, Sun Jia-Guang<sup>1, 2)</sup>

<sup>1)</sup> (School of software, Tsinghua university, Beijing 100084, China)

<sup>2)</sup> (Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** The sufficient and necessary condition for the existence of linear Möbius transformations that can standardize the rational Bézier surfaces is given based on Möbius reparameterization theorem. To obtain the standard form of an arbitrary cubic rational Bézier surface, we then present a quadratic reparameterization algorithm to reparameterize the surface so that all the corner weights of the surface are 1. Examples are included to show the performance of the new method.

**Key words** Rational Bézier surfaces; Möbius transformation; Quadratic reparameterization

Bézier曲线/曲面是CAD/CAM系统中广泛应用的主要造型工具, 它们在曲线曲面造型中一直保持着不可替代的重要作用。由于现有Bézier曲线/曲面的算法(例如离散和求交)都是基于Bézier曲线/曲面的参数表示而不是基于他们的几何形状, 曲线/曲面的参数表示形式直接影响到最后的算法结果, 因此研究曲线/曲面的不同参数表示形式具有非常重要的意义<sup>[1]</sup>。到目前为止, 关于Bézier曲线的重新参数化已经得到了广泛的研究<sup>[1-7]</sup>。一个有理Bézier曲线的表示形式不是唯一的。一个有理Bézier曲线可以通过Möbius变换使得曲线的控制顶点和参数域都不发生改变, 改变的只是曲线的权因子和等参点的分布。由于一个有理Bézier曲线可以进行重新参数化, 很自然地我们提出了一个问题: 对于一个给定的曲线, 什么样的重新参数化是好的重新参数化? 当然这取决于我们对曲线好坏的衡量标准。Farin提出将曲线两个端点处的权因子都变为1, 并称之为标准形式(standard form)。具有标准形式的曲线具有更对称的参数化, 可以简化许多现有算法的推导和使得算法具有更好的结果形式<sup>[8-10]</sup>。特别的对于二次有理Bézier曲线, 标准化后的曲线中间控制顶点的权因子是曲线形状因子平方根的倒数。根据标准化后的曲线中间控制顶点的权因子, 我们可以很容易的判

---

基金项目:国家自然科学基金(60403047,60533070); 国家重点基础研究发展规划项目(2004CB719400); 高等学校全国优秀博士学位论文作者专项资金(200342); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助(NCET-04-0088)。

断二次有理Bézier曲线是双曲线弧，椭圆弧还是抛物线弧。文献<sup>[8-10]</sup>分别给出了将任意有理Bézier曲线进行标准化的算法，通过线性Möbius变换我们总可以将两个端点处的权因子都变为1，但是他们都没有给出曲面进行标准化的算法。

对于有理Bézier曲面，相应的我们可以对两个参数变量都进行Möbius变换，在不改变曲面控制顶点和曲面本身的前提下，改变曲面控制顶点权因子和曲面等参线的分布。Möbius变换不改变曲面的形状，改变的只是曲面等参线的分布。对于有理Bézier曲面，四个角点权因子都为1的参数表示形式被称为标准形式。曲面的标准化可以理解为将曲面四条边界线同时进行标准化。相应地，曲面的标准化形式可以简化曲面算法的推导和使得算法具有好的结果形式<sup>[8,10]</sup>。但是到目前为止还没有文章讨论有理Bézier曲面的标准化，主要有以下两方面的原因

- 关于有理 Bézier 曲面重新参数化的研究到目前为止特别少(大部分论文都讨论有理 Bézier 曲线的重新参数化);
- 单纯通过线性 Möbius 变换(到目前为止, 研究 Bézier 曲线曲面重新参数化的文章大都基于 Möbius 变换), 不能保证使得曲面四个角点的权因子都变为 1。

本文首先给出了通过线性 Möbius 变换能够将曲面进行标准化的充要条件。为了达到标准化任意三次有理 Bézier 曲面的目的, 我们提出了一个二次重新参数化算法。通过插值四条边界上的 Möbius 变换, 我们可以将任意一个三次有理 Bézier 曲面四个角点的权因子都变为 1。

## 1 有理 Bézier 曲面的线性 Möbius 变换

本文首先给出了通过线性 Möbius 变换能够将 Bézier 曲面进行标准化的充要条件, 推导过程如下。设空间有理 Bézier 曲面为

$$X(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \omega_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \omega_{i,j}}, \quad u \in (0, 1), v \in (0, 1), \quad (1)$$

其中  $P_{i,j} (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n)$  为曲面控制顶点和  $\omega_{i,j} (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n)$  为控制顶点权因子。我们对两个参变量  $u, v$  分别进行如下的线性 Möbius 变换

$$u = u(s) = \frac{(\alpha - 1)s}{2\alpha s - s - \alpha}, \quad (2)$$

和

$$v = v(t) = \frac{(\beta - 1)t}{2\beta t - t - \beta}. \quad (3)$$

Möbius 定理<sup>[9-11]</sup>表明对有理 Bézier 曲面(1)的参变量  $u, v$  进行 Möbius 变换(2)和(3)后, 曲面控制顶点和形状都不会发生改变, 曲面控制顶点的权因子变为

$$\tilde{\omega}_{i,j} = \omega_{i,j} (1 - \alpha)^i \alpha^{m-i} (1 - \beta)^j \beta^{n-j}, \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n), \quad (4)$$

其中  $\tilde{\omega}_{i,j}$  代表重新参数化后曲面控制顶点的权因子。本文的目的就是在不改变曲面形状和曲面参数域的前提下, 使得四个角点权因子都为 1。将一个有理 Bézier 曲面所有权因子都放缩同一个正的倍数  $k$

$$\tilde{\omega}_{i,j} = \omega_{i,j} k, \quad (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n), \quad (5)$$

曲面的形状不会发生改变<sup>[3]</sup>。综合公式(2), (3)和(5), 对于一个有理 Bézier 曲面, 我们三个自由变量  $\alpha, \beta, k$ 。基于公式(4)和(5), 我们得到

$$\tilde{\omega}_{i,j} = \omega_{i,j} k (1-\alpha)^i \alpha^{m-i} (1-\beta)^j \beta^{n-j}, \quad (i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n). \quad (6)$$

**定理 1.** 任意一个有理 Bézier 曲面(1)通过线性 Möbius 变换(2)和(3)能够进行标准化的充要条件是  $\omega_{m,0} \omega_{0,n} = \omega_{0,0} \omega_{m,n}$ 。

证明: 令重新参数化曲面四个角点权因子  $\tilde{\omega}_{0,0}$ ,  $\tilde{\omega}_{m,0}$ ,  $\tilde{\omega}_{0,n}$  和  $\tilde{\omega}_{m,n}$  都为 1。由公式 (6) 我们有

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_{0,0}} = k \alpha^m \beta^n \\ \frac{1}{\omega_{m,0}} = k (1-\alpha)^m \beta^n \\ \frac{1}{\omega_{0,n}} = k \alpha^m (1-\beta)^n \\ \frac{1}{\omega_{m,n}} = k (1-\alpha)^m (1-\beta)^n \end{cases} \quad (7)$$

方程组(7)有四个方程, 可是只有三个自由变量  $\alpha, \beta, k$ 。对于任意一个有理 Bézier 曲面, 四个角点的权因子可以是任意正的实数。因此方程组(7)在一般情况下都不存在解。如果存在解, 必须保证这四个方程相容

$$\frac{\omega_{m,0} k (1-\alpha)^m \beta^n \omega_{0,n} k \alpha^m (1-\beta)^n}{\omega_{0,0} k \alpha^m \beta^n \omega_{m,n} k (1-\alpha)^m (1-\beta)^n} = \frac{\omega_{m,0} \omega_{0,n}}{\omega_{0,0} \omega_{m,n}} = 1, \quad \text{证毕。}$$

如果一个曲面四个角点权因子满足  $\omega_{m,0} \omega_{0,n} = \omega_{0,0} \omega_{m,n}$ , 则由方程(7)我们得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{1 + \sqrt[m]{\frac{\omega_{0,0}}{\omega_{m,0}}}} \\ \beta = \frac{1}{1 + \sqrt[n]{\frac{\omega_{0,0}}{\omega_{0,n}}}} \\ k = \frac{1}{\omega_{0,0} \alpha^m \beta^n} \end{cases} \quad (8)$$

由以上推导我们证明了对于任意空间有理 Bézier 曲面, 我们不能保证通过 Möbius 变换使得四个角点权因子都变为 1。为了增加可利用自由变量, 我们提出如下二次重新参数化算法。

## 2 有理 Bézier 曲面的二次重新参数化

重新定义公式(2)和(3)中的  $\alpha$  和  $\beta$  如下

$$\alpha = \alpha_1 t + \alpha_2 (1-t) \quad (9)$$

和

$$\beta = \beta_1 s + \beta_2 (1-s) \quad (10)$$

将公式 (2) 和 (3) 代入 (1), 我们得到有理 Bézier 曲面重新参数化的公式  $\mathbf{X}(u(s), v(t))$ 。

如果  $\alpha$ ,  $\beta$  由公式 (9) 和 (10) 分别定义, 则我们称  $\mathbf{X}(u(s), v(t))$  为有理 Bézier 曲面的二次重新参数化。

根据公式(5), (9)和(10), 我们现在有  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, k$  共 5 个自由变量。将  $t = 0$  代入公式(9), 我们得到  $\alpha = \alpha_2$ 。综合考虑公式(3)和(9), 可以看出二次重新参数化对曲面的边界线  $\mathbf{X}(u, 0)$  进行线性的 Möbius 变换  $u = u(s) = (\alpha_2 - 1)s / (2\alpha_2 s - s - \alpha_2)$ , 对曲面的边界线  $\mathbf{X}(u, 1)$  进行另外一个线性 Möbius 变换  $u = u(s) = (\alpha_1 - 1)s / (2\alpha_1 s - s - \alpha_1)$ 。由上, 我们可以看出二次重新参数化可以对曲面的两个相对边界进行不同的线性 Möbius 变换(参数域示意图见图 1)。二次重新参数化的系数就是对两个边界线性 Möbius 变换系数的一个线性插值。下面我们需要解决的问题是计算二次重新参数化后曲面的控制顶点和权因子。将公式(2)和(9)代入曲面基函数  $B_i^m(u)$ , 我们得到

$$B_i^m(u) = \frac{B_i^m(s)(\alpha_2 t - \alpha_1 t - \alpha_2)^{m-i} (\alpha_1 t + \alpha_2 - \alpha_2 t - 1)^i}{(2s\alpha_1 + 2s\alpha_2 - 2s\alpha_2 t - s - \alpha_1 t - \alpha_2 + \alpha_2 t)^m}, \quad (11)$$

其中多项式  $(\alpha_2 t - \alpha_1 t - \alpha_2)^{m-i} (\alpha_1 t + \alpha_2 - \alpha_2 t - 1)^i$  可以通过一个矩阵求解转化为如下 Bézier 基函数的形式

$$(\alpha_2 t - \alpha_1 t - \alpha_2)^{m-i} (\alpha_1 t + \alpha_2 - \alpha_2 t - 1)^i = \sum_{l_1=0}^m c_{l_1, i} B_{l_1}^m(t). \quad (12)$$

其中  $c_{l_1, i}$  为 Bézier 基函数的系数。

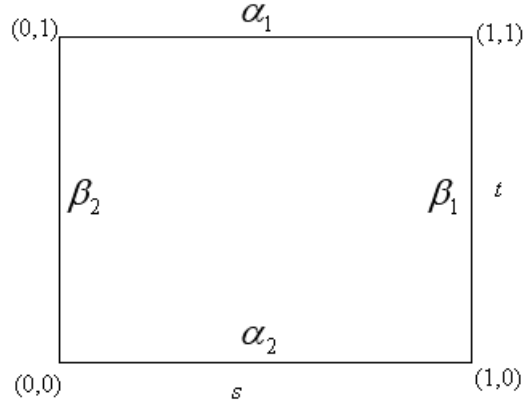


图 1 曲面二次重新参数化示意图

将公式(12)代入公式(11)，我们得到

$$B_i^m(u) = \frac{\sum_{l_1=0}^m c_{l_1,i} B_i^m(s) B_{l_1}^m(t)}{D_1}, \quad (13)$$

其中  $D_1 = (2s\alpha_1 t + 2s\alpha_2 - 2s\alpha_2 t - s - \alpha_1 t - \alpha_2 + \alpha_2 t)^m$ 。类似的，我们可以得到

$$B_j^n(v) = \frac{\sum_{l_2=0}^n e_{l_2,j} B_j^n(t) B_{l_2}^n(s)}{D_2}. \quad (14)$$

其中  $D_2 = (2s\beta_1 t + 2t\beta_2 - 2s\alpha_2 t - t - \alpha_1 s - \alpha_2 + \alpha_2 s)^m$ 。附录 1 给出了三次有理 Bézier 曲面情况下的  $c_{l_1,i}$ 。综合考虑公式(13)和(14)，我们可以得到

$$\begin{aligned} B_i^m(u) B_j^n(v) &= \frac{\sum_{l_1=0}^m c_{l_1,i} B_i^m(s) B_{l_1}^m(t) \sum_{l_2=0}^n e_{l_2,j} B_j^n(t) B_{l_2}^n(s)}{D_1 D_2} \\ &= \frac{\sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^n c_{l_1,i} e_{l_2,j} \frac{\binom{m}{l_1} \binom{n}{j} \binom{n}{l_2} \binom{m}{i}}{\binom{m+n}{l_1+j} \binom{m+n}{l_2+i}} B_{l_1+j}^{m+n}(t) B_{l_2+i}^{m+n}(s)}{D_1 D_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

由上面的式子我们可以看出，二次重新参数化后曲面的阶数为  $(m+n) \times (m+n)$ 。由公式(15)，我们得到二次重新参数化后曲面的第  $(k_1, k_2)$  个控制顶点为

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k_1, k_2} = \frac{\sum_{i=\max(k_1-n, 0)}^{\min(k_1, m)} \sum_{j=\max(k_2-m, 0)}^{\min(k_2, n)} c_{k_2-j, i} e_{k_1-i, j} \frac{\binom{m}{k_2-j} \binom{n}{j} \binom{n}{k_1-i} \binom{m}{i}}{\binom{m+n}{k_2} \binom{m+n}{k_1}} \omega_{i, j} \mathbf{P}_{i, j}}{\sum_{i=\max(k_1-n, 0)}^{\min(k_1, m)} \sum_{j=\max(k_2-m, 0)}^{\min(k_2, n)} c_{k_2-j, i} e_{k_1-i, j} \frac{\binom{m}{k_2-j} \binom{n}{j} \binom{n}{k_1-i} \binom{m}{i}}{\binom{m+n}{k_2} \binom{m+n}{k_1}} \omega_{i, j}}, \quad (16)$$

二次重新参数化后曲面第  $(k_1, k_2)$  个控制顶点权因子为

$$\tilde{\omega}_{k_1, k_2} = \sum_{i=\max(k_1-n, 0)}^{\min(k_1, m)} \sum_{j=\max(k_2-m, 0)}^{\min(k_2, n)} c_{k_2-j, i} e_{k_1-i, j} \frac{\binom{m}{k_2-j} \binom{n}{j} \binom{n}{k_1-i} \binom{m}{i}}{\binom{m+n}{k_2} \binom{m+n}{k_1}} \omega_{i, j}. \quad (17)$$

公式(16)和公式(17)分别给出了二次重新参数化后曲面的控制顶点和权因子。根据二次重新参数化后曲面四个角点权因子的计算公式，我们可以很容易导出  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  应满足的关系式。

对于双三次有理 Bézier 曲面(现有 CAD 系统中最常用的是双三次 Bézier 曲面)我们给出了二次重新参数化系数的计算公式。对于三次有理 Bézier 曲面，由公式(17)和附录 1 我们得到二次重新参数化后曲面四个角点的权因子为

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{0,0} = c_{0,0} e_{0,0} \omega_{0,0} = \alpha_2^3 \beta_2^3 \omega_{0,0} \\ \tilde{\omega}_{6,0} = c_{0,3} e_{3,0} \omega_{3,0} = (1-\alpha_2)^3 \beta_1^3 \omega_{3,0} \\ \tilde{\omega}_{0,6} = c_{3,0} e_{0,3} \omega_{0,3} = (1-\beta_2)^3 \alpha_1^3 \omega_{0,3} \\ \tilde{\omega}_{6,6} = c_{3,3} e_{3,3} \omega_{3,3} = (1-\alpha_1)^3 (1-\beta_1)^3 \omega_{3,3} \end{cases}.$$

令  $\tilde{\omega}_{0,0} = \tilde{\omega}_{6,0}, \tilde{\omega}_{0,0} = \tilde{\omega}_{0,6}, \tilde{\omega}_{0,6} = \tilde{\omega}_{6,6}$ ，我们推导出  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  应满足的关系式如下

$$\begin{cases} \frac{\alpha_2 \beta_2}{(1-\alpha_2) \beta_1} = \sqrt[3]{\frac{\omega_{30}}{\omega_{00}}} \\ \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 (1-\beta_2)} = \sqrt[3]{\frac{\omega_{03}}{\omega_{00}}} \\ \frac{(1-\beta_2) \alpha_1}{(1-\beta_1) (1-\alpha_1)} = \sqrt[3]{\frac{\omega_{33}}{\omega_{03}}} \end{cases}. \quad (18)$$

方程组(18)有三个方程和四个自由变量  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 。为了简化推导，我们令  $\beta_1 = \beta_2$ 。将  $\beta_1 = \beta_2$  代入方程组(18)，我们得到如下四个变量  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  的表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{\omega_{00}}{\omega_{30}}}} \\ \alpha_1 = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{\omega_{03}}{\omega_{33}}}} \\ \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt[3]{\frac{\omega_{00}}{\omega_{03}}}} \end{array} \right. \quad (19)$$

用公式(19)中的  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  对曲面进行二次重新参数化后, 曲面四个角点的权因子都变为  $\alpha_2^3 \beta_2^3 \omega_{0,0}$ 。最后我们将曲面所有的权因子都放缩  $1/\alpha_2^3 \beta_2^3 \omega_{0,0}$  倍后, 二次重新参数化后曲面四个角点权因子都变为 1。

### 3 算法实例

有理 Bézier 曲面标准化可以应用到下面两个方面:

- 比较有理 Bézier 曲面是否重合。在曲面设计中, 重复的曲面会增加系统的开销, 造成设计的不一致性。判断两个有理 Bézier 曲面是否是同一个曲面, 可以通过先标准化两个曲面, 然后通过调整使得两个曲面同阶, 最后判断所有控制顶点和权因子是否相同。
- 有理 Bézier 曲面的拼接。在曲面设计上, 经常要用到多个曲面的拼接, 这就要判断曲面在拼接处的曲线是否重合。如果有理 Bézier 曲面已经进行标准化, 则判断两条拼接处曲线是否重合要简单得多。只需要调整两条曲线使得曲线同阶, 然后判断两条曲线的控制顶点和权因子是否相等。特别是在多个曲面的拼接处, 要求公共顶点的权因子相等(如图 2)。如果所有的曲面都进行了标准化, 则自动的满足了在拼接处公共顶点权因子相等的条件。

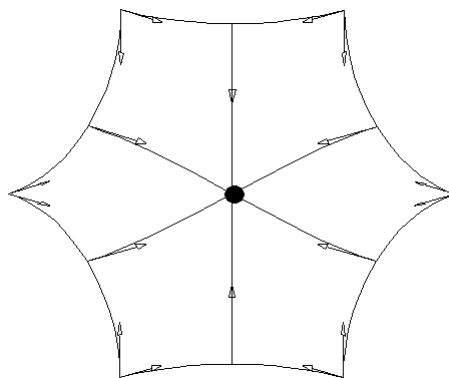


图 2 多张曲面在顶点处的拼接(黑点为公共拼接点)

首先我们给出了一个可以用 Möbius 变换进行标准化的例子(如图 3)。

**例 1.** 曲面控制顶点为  $P_{0,0} = (-34.5 \ 22.9 \ -3)$ ,  $P_{1,0} = (-17.6 \ 24.4 \ 10)$ ,  $P_{2,0} = (25.9 \ 26.9 \ 8)$ ,

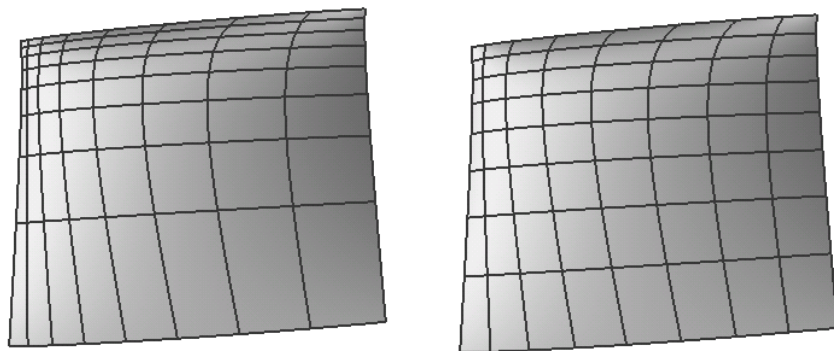
$P_{0,1} = (-34.2 \ 16.2 \ -5)$ ,  $P_{1,1} = (-26.2 \ 17.1 \ 45)$ ,  $P_{2,1} = (26.0 \ 19.1 \ 4)$ ,  $P_{0,2} = (-35.5 \ -31.2 \ 2)$ ,



$\mathbf{P}_{1,2} = (-11.4 \ -29.4 \ 10)$  ,  $\mathbf{P}_{2,2} = (31.2 \ -27.5 \ -2)$  。曲面控制顶点的权因子为  $\omega_{0,0} = 8$  ,  $\omega_{1,0} = 2$  ,  $\omega_{2,0} = 3$  ,  $\omega_{0,1} = 5$  ,  $\omega_{1,1} = 3$  ,  $\omega_{2,1} = 2$  ,  $\omega_{0,2} = 2$  ,  $\omega_{1,2} = 1$  ,  $\omega_{2,2} = 0.75$  。因为  $\omega_{0,0}\omega_{2,2} = 6 = \omega_{0,2}\omega_{2,0}$ ,根据定理 1, 此曲面可以通过 Möbius 变换进行标准化。由式(8)我们

得到  $\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{8}{3}}} = 0.3798$  ,  $\beta = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{8}{2}}} = 0.3333$  ,  $k = \frac{1}{\omega_{0,0}\alpha^2\beta^2} = 7.8378$  。利用计算出

的  $\alpha, \beta$  对曲面进行变换(2)和变换(3), 我们得到变换后曲面控制顶点权因子为  $\omega_{0,0} = 0.1282$  ,  $\omega_{1,0} = 0.0523$  ,  $\omega_{2,0} = 0.1282$  ,  $\omega_{0,1} = 0.1603$  ,  $\omega_{1,1} = 0.1570$  ,  $\omega_{2,1} = 0.1709$  ,  $\omega_{0,2} = 0.1282$  ,  $\omega_{1,2} = 0.1047$  ,  $\omega_{2,2} = 0.1282$  。最后对曲面的所有权因子都放缩  $k = 7.8378$  倍后, 曲面控制顶点权因子为  $\omega_{0,0} = 1$  ,  $\omega_{1,0} = 0.4099$  ,  $\omega_{2,0} = 1$  ,  $\omega_{0,1} = 1.2564$  ,  $\omega_{1,1} = 1.2305$  ,  $\omega_{2,1} = 1.3395$  ,  $\omega_{0,2} = 1$  ,  $\omega_{1,2} = 0.8206$  ,  $\omega_{2,2} = 1$  。由文献[10]可知, 如果标准化后的二次 Bézier 曲线中间控制顶点权因子小于 1, 此曲线为椭圆弧; 等于 1, 此曲线为抛物线弧; 大于 1, 此曲线为双曲线弧。由于  $\omega_{1,0} = 0.4099 < 1$ , 边界线  $\mathbf{X}(u, 0)$ (最上面边界线)为一条椭圆弧; 由于  $\omega_{0,1} = 1.2564 > 1$ , 边界线  $\mathbf{X}(0, v)$ (最左边边界线)为一条双曲线弧; 由于  $\omega_{1,2} = 0.8206 < 1$ , 边界线  $\mathbf{X}(u, 1)$ (最下面边界线)为一条椭圆弧; 由于  $\omega_{2,1} = 1.3395 > 1$ , 边界线  $\mathbf{X}(1, v)$ (最右边边界线)为一条双曲线弧。在曲面的交互式设计中, 如果要修改曲面的边界, 在修改标准化后曲面边界中间控制顶点权因子的同时, 我们可以很清楚的知道曲面边界线的类型。而对于非标准化的曲面, 我们就需要综合考虑整个边界三个控制顶点的权因子后才能知道修改后的曲面边界是什么类型的曲线。



a Bézier曲面以及等参线    b 线性重新参数化后的Bézier曲面以及等参线

图 3 Bézier曲面的线性重新参数化

下面我们再给出一个三次有理 Bézier 曲面的例子(如图 4)。

**例 2.** 曲面控制顶点为  $\mathbf{P}_{0,0} = (-30.1, 21.0, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{1,0} = (-30, 17.1, 0)$  ,

$\mathbf{P}_{2,0} = (-30, 13.8, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{3,0} = (-29.1, -6.1, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{0,1} = (-24.6, 21.3, 0)$  ,  
 $\mathbf{P}_{1,1} = (-24.6, 17.3, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{2,1} = (-24.6, 13.4, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{3,1} = (-23.3, -5.8, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{0,2} = (-15.6, 22.1, 0)$  ,  
 $\mathbf{P}_{1,2} = (-24, 17.2, 22.1)$  ,  $\mathbf{P}_{2,2} = (-14.4, -0.3, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{3,2} = (-14.6, -6.6, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{0,3} = (-5.8, 22, 0)$  ,  
 $\mathbf{P}_{1,3} = (-4.1, 4.1, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{2,3} = (-14.4, -0.3, 0)$  ,  $\mathbf{P}_{3,3} = (-3.9, -5.1, 0)$  。曲面控制顶点的权因子  
 为  $\omega_{0,0} = 3$  ,  $\omega_{1,0} = 3$  ,  $\omega_{2,0} = 2$  ,  $\omega_{3,0} = 2$  ,  $\omega_{0,1} = 2$  ,  $\omega_{1,1} = 4$  ,  $\omega_{2,1} = 3$  ,  $\omega_{3,1} = 1$  ,  $\omega_{0,2} = 2$  ,  
 $\omega_{1,2} = 1$  ,  $\omega_{2,2} = 3$  ,  $\omega_{3,2} = 1$  ,  $\omega_{0,3} = 5$  ,  $\omega_{1,3} = 2$  ,  $\omega_{2,3} = 3$  ,  $\omega_{3,3} = 8$  。由  $\omega_{0,0}\omega_{3,3} = 24$  ,  
 $\omega_{3,0}\omega_{0,3} = 10$  , 我们可以得出  $\omega_{0,0}\omega_{3,3} \neq \omega_{3,0}\omega_{0,3}$  。由定理 1 我们知道所给曲面不可能通过线  
 性 Möbius 变换使得曲面四个角点权因子都为 1。采用二次重新参数化, 由公式(19)我们得  

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} + 1}} \approx 0.4663$$
 , 
$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{5}{8} + 1}} \approx 0.5391$$
 , 
$$\beta_1 = \beta_2 \approx 0.5782$$
 。用系数  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  对

曲面进行二次重新参数化后, 四个角点权因子变为  $\alpha_2^3 \omega_{0,0} \beta_1^3 \approx 0.0588$  。最后对二次重新参  
 数化曲面的权因子都除以  $\alpha_2^3 \omega_{0,0} \beta_1^3 \approx 0.0588$  后, 四个角点的权因子都变为 1。这样我们就  
 得到了这个曲面的标准形式。

下面我们给出一个判断两个曲面是否重合的例子。

**例 3.** 给定一个次数为  $2 \times 2$  的有理 Bézier 曲面。曲面的控制顶点和例 1. 中的控制顶点重  
 合, 曲面的权因子为  $\omega_{0,0} = 1.44$  ,  $\omega_{1,0} = 0.885$  ,  $\omega_{2,0} = 3.24$  ,  $\omega_{0,1} = 4.22$  ,  $\omega_{1,1} = 6.2$  ,  
 $\omega_{2,1} = 10.13$  ,  $\omega_{0,2} = 7.84$  ,  $\omega_{1,2} = 9.65$  ,  $\omega_{2,2} = 17.64$  。因为  $\omega_{0,0}\omega_{2,2} = 25.4036 = \omega_{0,2}\omega_{2,0}$  ,  
 根据定理 1, 此曲面可以通过 Möbius 变换进行标准化。由式(8)我们得到  

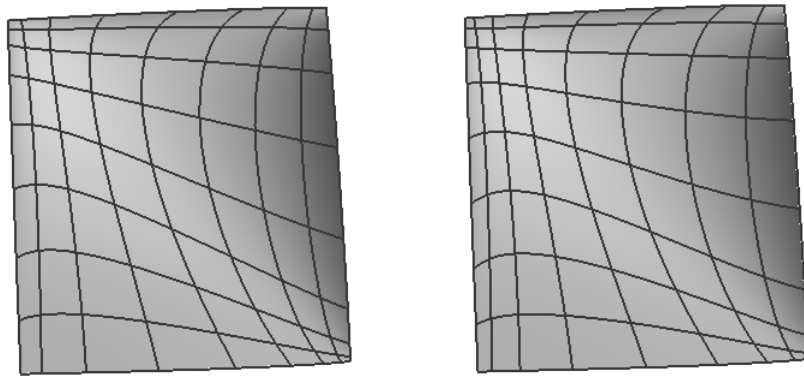
$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1.44}{3.24}}} = 0.6$$
 , 
$$\beta = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1.44}{7.84}}} = 0.7$$
 , 
$$k = \frac{1}{\omega_{0,0}\alpha^2\beta^2} = 3.9367$$
 。利用计算出的  $\alpha, \beta$

对曲面进行变换(2)和变换(3), 我们得到变换后曲面控制顶点权因子为  
 $\omega_{0,0} = 0.254$  ,  $\omega_{1,0} = 0.104$  ,  $\omega_{2,0} = 0.254$  ,  $\omega_{0,1} = 0.319$  ,  $\omega_{1,1} = 0.3125$  ,  $\omega_{2,1} = 0.34$  ,  
 $\omega_{0,2} = 0.254$  ,  $\omega_{1,2} = 0.2084$  ,  $\omega_{2,2} = 0.254$  。最后对曲面的所有权因子都放缩  $k = 3.9367$   
 倍后, 曲面控制顶点权因子为  $\omega_{0,0} = 1$  ,  $\omega_{1,0} = 0.4099$  ,  $\omega_{2,0} = 1$  ,  $\omega_{0,1} = 1.2564$  ,  
 $\omega_{1,1} = 1.2305$  ,  $\omega_{2,1} = 1.3395$  ,  $\omega_{0,2} = 1$  ,  $\omega_{1,2} = 0.8206$  ,  $\omega_{2,2} = 1$  。对比例 1 中标准化后的曲  
 面权因子, 我们知道所给定曲面和例 1 中曲面是同一个曲面。

## 4 结论

本文研究了如何利用重新参数化将有理 Bézier 曲面进行标准化。本文首先给出了利用线性

Möbius 变换在不改变曲面参数域的情况下能将曲面转化成标准形式的充要条件,接着给出了将任意三次有理 Bézier 曲面转换成标准形式的二次重新参数化算法。对于双三次有理 Bézier 曲面,本文给出了将曲面转换成标准形式的二次重新参数化系数的计算公式。



a Bézier曲面以及等参线      b 二次重新参数化后的Bézier曲面以等参线

图 4 Bézier曲面的二次重新参数化

## 参 考 文 献

- [1] Farouki RT. Optimal parameterizations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(2): 153-168.
- [2] Zheng JM. Minimizing the maximal ratio of weights of a rational Bézier curve [J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(3): 275-280.
- [3] Jüttler B. A vegetarian approach to optimal parameterizations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(9): 887-890.
- [4] Yeh S-S, Hsu P-L. The speed-controlled interpolator for machining parametric curves [J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(5): 349-357.
- [5] Costantini P, Farouki RT, Manni C, et al. Computation of optimal composite re-parameterizations [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(9): 875-897.
- [6] Guo Feng-hua, Yang Xing-qiang. A New Re-Parameterization Method of Bézier Curve [J]. Chinese Journal of Engineering Graphics, 2006, 27(2): 108-111 (in Chinese).  
(郭风华; 杨兴强. Bézier 曲线的一种重新参数化新方法[J]. 工程图学学报, 2006, 27(2): 108-111)
- [7] Liang XiKun. Bernstein-Bézier Class Curves and a Reparametrization Method of Bézier Curve [J]. Chinese Journal of Computer Research and Development, 2004, 41(6): 1016-1021 (in Chinese).  
(梁锡坤. Bernstein-Bézier 类曲线和 Bézier 曲线的重新参数化方法 [J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(6): 1016-1021.)
- [8] Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide [M]. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002.
- [9] Lee ETY, Lucian ML. Möbius reparametrizations of rational B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(3): 213-215.
- [10] Piegl L, Tiller W. The NURBS book [M]. New York: Springer, 1997.
- [11] Alt L. Rational linear reparametrization of NURBS and the blossoming principle [J]. Computer Aided Geometric Design, 1993, 10(5): 465-467.

附录 1:

对于一个双三次有理 Bézier 曲面,  $c_{l,i}$  给出如下。

$$\begin{cases} c_{0,0} = -\alpha_2^3 \\ c_{1,0} = -\alpha_2^3 \alpha_1 \\ c_{2,0} = -\alpha_2 \alpha_1^2 \\ c_{3,0} = -\alpha_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{0,1} = \alpha_2^2 (\alpha_2 - 1) \\ c_{1,1} = \frac{\alpha_2 (3\alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_1 - \alpha_2)}{3} \\ c_{2,1} = \frac{\alpha_1 (3\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - 2\alpha_2)}{3} \\ c_{3,1} = \alpha_1^2 (\alpha_1 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{0,3} = (\alpha_2 - 1)^3 \\ c_{1,3} = (\alpha_2 - 1)^2 (\alpha_1 - 1) \\ c_{2,3} = (\alpha_1 - 1)^2 (\alpha_2 - 1) \\ c_{3,3} = (\alpha_1 - 1)^3 \end{cases}$$

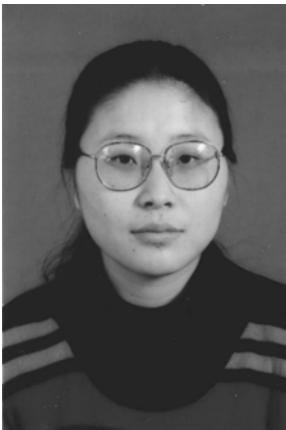
$$\begin{cases} c_{0,2} = -\alpha_2 (\alpha_2 - 1)^2 \\ c_{1,2} = -\frac{(\alpha_2 - 1)(-2\alpha_2 + 3\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1)}{3} \\ c_{2,2} = -\frac{(-1 + \alpha_1)(-2\alpha_1 + 3\alpha_2 \alpha_1 - \alpha_2)}{3} \\ c_{3,2} = -\alpha_1 (\alpha_1 - 1)^2 \end{cases}$$



男,1979 年生,博士研究生,主要研究方向为CAD & CG。



雍俊海 男,1973 年生,博士,副教授,主要研究方向为CAD & CG。



张 慧 女,1974 年生,博士,讲师,主要研究方向为CAD & CG。



孙家广 男,1946 年生,教授,博士生导师,中国工程院院士,主要研究方向为CAD & CG、产品数据管理、企业信息化。