



**HAL**  
open science

## Estimation en ligne par approche algébrique : application au cas des frottements secs

Kaouther Ibn Taarit, Lotfi Belkoura, Mekki Ksouri

► **To cite this version:**

Kaouther Ibn Taarit, Lotfi Belkoura, Mekki Ksouri. Estimation en ligne par approche algébrique : application au cas des frottements secs. Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jun 2010, Nancy, France. inria-00504942

**HAL Id: inria-00504942**

**<https://inria.hal.science/inria-00504942>**

Submitted on 25 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation en ligne par approche algébrique : application au cas des frottements secs

Kaouther IBN TAARIT<sup>1,3</sup>, Lotfi BELKOURA<sup>2</sup>, Mekki KSOURI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal  
(FRE 3303 CNRS) et et Alien Project (INRIA Lille-Nord Europe)  
Université Lille Nord de France,  
Ecole Centrale de Lille, BP 48, Cité Scientifique. 59651 Villeneuve d'Ascq, France.  
*Kaouther.IbnTaarit@enit.rnu.tn*

<sup>2</sup>Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal  
(FRE 3303 CNRS) et et Alien Project (INRIA Lille-Nord Europe)  
Université Lille Nord de France,  
Université des Sciences et Technologies de Lille, 59650 Villeneuve d'Ascq, France.  
*lotfi.belkoura@univ-lille1.fr*

<sup>3</sup>Unité de recherche Analyse et Commande des Systèmes  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 1002 Tunis, Tunisie.  
*mekki.ksouri@enit.rnu.tn*

*Résumé*— L'extension de la méthode algébrique, initiée par Fliess et Sira-Ramirez [8], à une certaine classe de systèmes non linéaires continus et stationnaires soumis à des frottements secs est la principale contribution apportée par cette communication. En se basant sur le formalisme distributionnel, une procédure d'estimation en ligne est proposée, permettant de déterminer les instants de commutation (les singularités) ainsi que les paramètres inconnus d'un pendule simple soumis à des frottements secs. Les résultats de simulations illustrent l'efficacité de nos algorithmes d'identification. Une étude en présence des données bruitées est aussi menée.

*Mots-clés*— Systèmes non linéaires, frottements secs, pendule simple, identification algébrique, estimation en ligne.

## I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous nous intéressons à l'estimation d'une certaine classe de systèmes dynamiques non linéaires soumis à des frottements secs [15]. L'identification se limite ici au cas des paramètres invariants dans le temps. La méthode d'identification étudiée est issue de la méthode algébrique initiée par les travaux de Fliess et Sira-Ramirez (2003) dans le cadre des systèmes de dimension finie [8]. En 2006, Belkoura, Richard et Fliess, dans [2], ont généralisé ces travaux en posant les bases d'une approche non asymptotique pour l'identification simultanée des paramètres et des retards de systèmes dynamiques continus. Cette technique présente jusqu'à maintenant un apport intéressant par rapport aux méthodes existantes (voir, par exemple [19]) et permet la convergence rapide des algorithmes ([3] et [4]) sans requérir connaissance statistique des bruits (voir, par exemple [9] et [10]). Cette méthode a montré une flexibilité à s'appliquer dans d'autre domaine d'étude parmi lesquels, on peut citer la détection des ruptures pour une certaine classe de systèmes hybrides [5] et le diagnostic de défauts [14]. Plusieurs travaux se sont penchés sur l'identification des systèmes soumis à des frottements, ces méthodes sont essentiellement asymptotiques, au sens où la solution est obtenue après convergence d'une série

réursive et mènent à une mise en oeuvre complexe : par exemple, citons [7] qui utilise des séries temporelles, [13] avec des moindres carrés récursifs, et [18] par des algorithmes génétiques. La méthode que nous développons ici est de nature non-asymptotique, en ceci qu'elle donne les valeurs à identifier sous forme exacte (en l'absence de bruit) et après un temps fini.

Bien que présentant une formulation simple et académique, l'objectif de ce travail est double : d'une part il souligne que l'extension à une certaine classe de systèmes non linéaires en l'état est immédiate, dans la mesure où rien n'est changé dans la méthode, si ce n'est qu'à la mesure  $y$  est substituée une autre mesure  $f(y)$ . D'autre part, il montre comment appréhender les singularités dépendant implicitement du temps. Pour cela, la classe des systèmes à laquelle nous nous intéressons peut :

- regrouper en général le cas des systèmes représentés par des équations différentielles ordinaires d'ordre 2 soumis à des perturbations constantes par morceaux ou soumis à des frottements secs ;
- toucher aussi une classe de systèmes hybrides et, plus précisément, les systèmes implusifs pour lesquels on s'intéresse à la détermination des instants de commutation sans connaître les lois de commutations (voir, par exemple, [21] et [11]) ;
- dans l'avenir, s'étendre à des classes plus générales de systèmes articulés modélisés par des groupes d'équations différentielles du second ordre et pour lesquels la prédiction du comportement vibratoire est fondamentale afin d'élaborer une loi de commande.

Parmi les travaux récents sur l'identification algébrique des systèmes mécaniques, on trouve, par exemple, [1] sur l'estimation des paramètres d'un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté, [6] pour l'identification algébrique de la fréquence et l'amplitude de vibrations exogènes affectant le système mécanique sans frottement en utilisant seulement les mesures de la position et [22]

s'intéresse à l'identification, basés sur la théorie des distributions, des systèmes soumis à des frottements modélisés par le modèle de Dahl où l'estimation des paramètres du système étudié est faite en supposant que le couple entrée-sortie ainsi que la dérivée de la sortie sont nécessairement connus.

Alors que nous visons ici à concevoir des algorithmes d'identification des instants de commutations et des paramètres à partir du couple de mesures entrée-sortie. Pour illustrer l'apport de cette nouvelle méthode d'identification, le modèle de frottements utilisé est suffisamment simple pour être simulé et identifié en temps réel.

Parmi les méthodes d'identification des instants de commutations des systèmes à commutations existantes dans la littérature, on trouve les techniques de détection de ruptures (voir [16] et [17]). Connaissant le couple de mesures entrée-sortie, le principe de ces techniques est de déterminer les changements de la dynamique du système étudié qui correspondent bien aux instants de commutations cherchés. Bien qu'elles sont robustes en présence de données bruitées, ces méthodes souffrent généralement d'un retard à la détection.

Par contre, la principale contribution de la procédure d'identification en ligne proposée dans cette communication est l'estimation rapide et exacte des instants de commutations.

Cet article est organisé comme suit : dans la deuxième section, on présente le cadre mathématique et algébrique de la méthode. La troisième section est réservée pour la formulation du problème d'estimation. Les résultats de simulations de l'estimation des instants de commutations d'un pendule simple soumis à des frottements secs et de l'identification simultanée des instants de commutation ainsi que des paramètres du pendule à partir de la résolution d'un problème de valeur propre généralisée sont donnés par la quatrième section. La conclusion générale est donnée dans la dernière section.

## II. FORMALISME MATHÉMATIQUE

### A. Notations

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats de la théorie des distributions [20] et nous donnerons les notations que nous emploierons par la suite. Supposons que  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ . L'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$  est noté par  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est l'espace des distributions sur  $\Omega$ , c'est à dire, l'espace des fonctions linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ . On appelle support d'une distribution  $T$  ( $\text{supp } T$ ) le complémentaire du plus grand ouvert  $\omega$  de  $\Omega$  tel que la restriction de  $T$  à  $\omega$  soit nulle. Nous écrivons  $\mathcal{D}'_+$  (respectivement  $\mathcal{E}'$ ), l'espace des distributions avec un support contenu dans  $[0, \infty)$  (respectivement support compact). La dérivation, la translation et l'intégration peuvent être formées de produits de convolution, notés "∗", et dans lesquels l'impulsion de Dirac joue le rôle de l'unité dans le produit de convolution,  $\delta_\tau$  est l'impulsion  $\delta$  retardée de  $\tau$ ,  $\delta^{(i)}$  est la dérivée  $i$ -ième de  $\delta$  et  $H$  est la fonction de Heaviside. Tous les signaux considérés sont à support borné à gauche et on se situe dans une algèbre de convolution avec unité  $\delta$ ,  $\dot{y} = \delta^{(1)} * y$ ,  $\int y = H * y$ ,  $y(t - \tau) = \delta_\tau * y$ . Une distri-

bution est d'ordre  $r$  si elle agit continûment sur les fonctions de classe  $C^r$  et non  $C^{r-1}$ . Les mesures et les fonctions sont d'ordre 0. Toute fonction, vue comme distribution, est indéfiniment dérivable.

Pour une fonction  $y$  continue sauf en un point  $a$  de discontinuité  $\sigma_a$ , sa dérivée  $dy/dt$  est  $dy/dt = \dot{y} + \sigma_a \delta_a$ , où  $\dot{y}$  est la distribution provenant de la dérivée habituelle de  $y$ .

Pour  $S, T \in \mathcal{D}'_+$ ,  $\text{supp } S * T \subset \text{supp } S + \text{supp } T$ , où la somme dans le côté droit est définie par  $\{x + y; x \in \text{supp } S, y \in \text{supp } T\}$ . Avec un léger abus de notation, nous écrirons  $H^k y$  la convolution itérée  $H * H * \dots * H * y$  ce qui revient à effectuer  $k$  intégrations successives de  $y$  et, plus généralement,  $T^k$  représente le produit de convolution de l'ordre  $k$ . Enfin, lorsqu'une confusion n'est possible, nous notons parfois  $T(s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$  la transformée de Laplace de  $T$ .

### B. Cadre d'étude

La multiplication de deux distributions  $\alpha$  et  $T$  n'est pas toujours définie. Cette opération semble cependant raisonnable si l'un des deux termes est indéfiniment dérivable. Plusieurs propriétés peuvent être dérivées de ce produit dont le plus important est le prochain théorème permettant une identification aisée des paramètres et des retards lorsque les entrées considérées sont constantes par paliers.

*Théorème 1* : Si  $T$  a un support compact  $K$  et est d'ordre (nécessairement fini)  $m$  et  $\alpha$  une fonction régulière,  $\alpha T = 0$  lorsque  $\alpha$  et ses dérivées d'ordre  $\leq m$  s'annulent sur  $K$  [20].

Les exemples suivants illustrent ce théorème quand  $\alpha$  est une fonction polynômiale ou exponentielle et  $T$  une distribution singulière. Notons que, par la formulation  $\alpha T$ , le terme  $\tau$  est passé du statut d'argument  $T(t - \tau)$  à celui d'argument et de coefficient.

$$\begin{aligned} t \delta &= 0, & (1 - e^{-\gamma t}) \delta &= 0, \\ (t - \tau) \delta_\tau &= 0, & (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \delta_\tau &= 0. \end{aligned}$$

La règle usuelle de Leibniz  $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$  reste toujours valable. Nous nous servons d'une autre propriété impliquant la multiplication par  $t^n$  ou  $e^{-\gamma t}$  et le produit de convolution, dans le cas où l'une des deux distributions ( $S$  ou  $T$ ) a un support compact :

$$t^n (S * T) = \sum_{k=0}^n C_n^k (t^k S) * (t^{n-k} T), \quad (1)$$

$$e^{-\gamma t} (S * T) = e^{-\gamma t} S * e^{-\gamma t} T. \quad (2)$$

Le  $C_n^k$  désigne les coefficients du développement binomial. En combinant la règle de Leibniz et (1) avec  $S = \delta^{(p)}$  et  $T = y$  permet de transformer les termes de la forme  $t^n y^{(p)}$  en somme linéaire des dérivées du produit  $t^k y$ . En posant  $z_i = t^i y$  et  $v = e^{-\gamma t} y$ , nous obtenons alors

$$t^3 y^{(2)} = t^3 (\delta^{(2)} * y) = -6 z_1 + 6 z_2^{(1)} - z_3^{(2)} \quad (3)$$

$$e^{-\gamma t} y^{(2)} = \gamma^2 v + 2\gamma v^{(1)} + v^{(2)}. \quad (4)$$

Notons qu'en intégrant deux fois, ces expressions conduisent à des décompositions correspondants aux formules d'intégration par partie.

### III. FORMULATION DU PROBLÈME D'ESTIMATION

On étudie ici le balancement d'une tige rigide soumise à des frottements secs, dont le comportement est régi par l'équation suivante :

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 \sin y = b \operatorname{sgn}(\dot{y}) + \varphi_0 + u, \quad (5)$$

dans laquelle les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont constants,  $b$  représente le coefficient du frottement sec et  $\varphi_0$  (d'ordre 1 et de support 0) regroupe les termes relatifs à la condition initiale.

L'objectif de ce travail est d'identifier les instants de passage de la dérivée  $\dot{y}$  par 0, notés  $\tau_i$ , ainsi que les paramètres  $a_1, a_0$ .

Une difficulté rencontrée dans ce genre de situation réside dans l'estimation de la dérivée  $\dot{y}$  intervenant dans la fonction signe. Dans cet exemple, la dérivation de la contribution du terme de frottement se traduit par la fonction composée  $2b\delta \circ \dot{y}$ . Cette dernière quantité s'exprime également par  $2b \sum \delta_{\tau_i}$ .

*Théorème 2 :* Considérons le système (5), où les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont à identifier. Les instants de commutations ainsi que les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  peuvent être estimés à partir des équations suivantes :

$$(A - \lambda_i B)\Theta = 0 \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (6)$$

$$A\Theta = B\Theta = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (7)$$

où, les lignes des matrices  $A$  et  $B$  sont formées respectivement par  $A_k$  et  $B_k$  qui sont données par :

$$\begin{cases} A_k = H^k * \alpha_1 \times (y^{(3)} - u^{(1)}, y^{(2)}, (\sin y)^{(1)}), \\ B_k = H^k * \alpha_2 \times (y^{(3)} - u^{(1)}, y^{(2)}, (\sin y)^{(1)}), \\ \Theta = (1, a_1, a_0)^t, \\ \alpha(t) = \alpha_1 - \lambda_i(\tau_i)\alpha_2, \\ H \text{ filtre de support } \Delta \text{ et d'ordre } k \geq 3. \end{cases}$$

Les instants de commutation sont déterminés à partir des valeurs propres  $\lambda_i(\tau_i)$  et les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont déterminés à partir des vecteurs propres  $\Theta$  sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$  et à partir de la résolution du système d'équation linéaire (7).

*Corollaire 1 :* Dans le cas où, les paramètres sont connus a priori, les instants de commutation sont plus simplement déterminés à partir de l'équation suivante :

$$\lambda_i = \frac{A(l, :)\Theta}{B(l, :)\Theta} = \frac{N}{D} \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (8)$$

*Proposition 1 :* Les matrices  $A$  et  $B$  dependent seulement de l'entrée  $u$  et de la sortie  $y$ .

*Preuve 1 :* Les paramètres  $a_1, a_0$  et  $b$  sont constants et nous supposons dans un premier temps que les coefficients  $a_1$  et  $a_0$  sont connus et que les conditions initiales sont nulles. L'application de la méthode d'identification algébrique qui s'articule autour des trois étapes permet d'aboutir à l'algorithme d'identification de ces paramètres :

1. Dérivation :

On dérive une fois l'équation (5). La dérivation du terme de frottement se traduit par la fonction  $2b \sum \delta_{\tau_i}$ .

$$y^{(3)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)} = 2b \sum \delta_{\tau_i} + (\varphi_0)^{(1)} + u^{(1)} \quad (9)$$

2. Multiplication par une fonction  $C^\infty$  : à partir du Théorème de Schwartz, la multiplication de l'équation (9) par toute fonction  $\alpha(t)$  vérifiant  $\alpha(\tau_i) = \alpha'(0) = 0$  permet d'annihiler son membre de droite :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}] = \\ \lambda_i \alpha_2 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}] \end{aligned} \quad (10)$$

3. Convolution :

Pour pouvoir aboutir à un ensemble d'égalités donnant accès aux instants de commutation  $\tau_i$ , on suppose qu'on est dans une zone de fonctionnement dans laquelle les balancements sont suffisamment espacés. Le produit de convolution par un filtre  $H$  de degré  $\geq 3$  et de support  $\subset (0, \Delta)$  avec  $\Delta < \tau_{i+1} - \tau_i$ , permet de former la relation suivante :

$$\begin{aligned} H * \alpha_1 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}] = \\ \lambda_i \underbrace{H * \alpha_2 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}]}_D \end{aligned} \quad (11)$$

Ce qui conduit à l'algorithme final :

$$\lambda_i = \frac{N}{D} \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (12)$$

$$N = D = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (13)$$

Les équations (12) et (13) montrent que les instants  $\tau_i$  ne sont identifiables que sur  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ . Les instants de commutation  $\tau_i$  sont ainsi identifiés localement à partir de  $\lambda_i$  et maintenus à leurs valeurs tant que les termes  $N$  ou  $D$  n'ont pas repris de nouvelles valeurs significatives .

Dans le cas où les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont inconnus, une formulation spectrale permettant une identification simultanée des instants de commutations  $\tau_i$  ainsi que de ces paramètres peut maintenant être dérivée de l'équation (11) :

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \times (y^{(3)} - u^{(1)} y^{(2)} (\sin y)^{(1)}) \\ - \lambda_i \alpha_2 \times (y^{(3)} - u^{(1)} y^{(2)} (\sin y)^{(1)})] \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

La convolution avec  $H_{k=k, k+1, k+2}^k$  conduit à la formulation suivante :

$$(A - \lambda_i B)\Theta = 0 \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (15)$$

$$A\Theta = B\Theta = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta) \quad (16)$$

avec, les lignes des matrices  $A$  et  $B$  sont formées respectivement par  $A_k$  et  $B_k$  qui sont données par :

$$\begin{cases} A_k = H^k * \alpha_1 \times (y^{(3)} - u^{(1)}, y^{(2)}, (\sin y)^{(1)}) \\ B_k = H^k * \alpha_2 \times (y^{(3)} - u^{(1)}, y^{(2)}, (\sin y)^{(1)}) \\ \Theta = (1, a_1, a_0)^t \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de valeur propre généralisée dans lequel les instants  $\tau_i$  sont déduits à partir des valeurs propres généralisées  $\lambda_i$  du faisceau de matrice  $(A, B)$ , alors que les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont déterminés à partir du vecteur propre correspondant.

L'équation (15) montre que les instants de commutation  $\tau_i$  ainsi que les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont identifiables sur  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ , alors que l'équation (16) montre que  $a_1$  et  $a_0$  qui peuvent être identifiés en dehors de ces intervalles à partir de la résolution du système d'équation linéaire.

Cependant, cette formulation possède principalement deux limitations. D'une part, à partir de propriétés du support décrites dans la section (II-A) ou à partir de l'équation (16), on peut remarquer que  $A\Theta = B\Theta = 0$  en dehors des intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ , ce qui fait que le problème de valeur propre généralisée décrit par l'équation (15) n'est pas consistant pour tout  $t > 0$ . Autrement dit, à partir de l'équation (11),  $0 = \lambda_i 0$  en dehors de ces intervalles, menant ainsi à une perte d'identifiabilité de  $\tau_i$ . Cet inconvénient nécessite l'utilisation d'un seuil connu a priori permettant de tester la perte de rang du faisceau de matrices  $(A, B)$ . Cela peut être basé sur une fonction informative  $s(t) = \sqrt{(\det A(t))^2 + (\det B(t))^2}$  permettant de sélectionner la formulation d'estimation appropriée (système d'équation linéaire  $A\Theta = B\Theta = 0$  ou problème de valeur propre généralisée  $(A - \lambda B)\Theta = 0$ ). Cette fonction est basée sur l'hypothèse de stationnarité des valeurs estimées des instants de commutation sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ . D'autre part, la fonction candidate  $\alpha(t)$  doit non seulement vérifier les conditions données par le théorème 1 mais aussi elle doit être choisie de sorte que la fonction  $\lambda_i(\tau_i)$ , notée  $\lambda_i$ , soit une fonction bijective des instants de commutation  $\tau_i$ . De plus, cette fonction multiplicative est de préférence bornée afin d'assurer la robustesse de l'algorithme d'identification vis à vis des bruits.

#### IV. APPLICATION AU PENDULE SIMPLE AVEC FROTTEMENT

##### A. Identification des instants de commutation

On suppose que les conditions initiales sont nulles. Le choix de la fonction exponentielle  $\alpha(t) = (e^{j\gamma t} - e^{j\gamma(2\tau_i - t)})$  vérifie le théorème 1 et répond aux objectifs décrits par la preuve 1.

La réalisation effective des termes ci-dessus s'effectue selon le principe de l'intégration par parties en posant  $\alpha_1 = e^{j\gamma t}$ ,  $\alpha_2 = e^{-j\gamma t}$  et  $\lambda_i = e^{2j\gamma\tau_i}$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 y^{(3)} = (\alpha_1 y)^{(3)} - 3j\gamma(\alpha_1 y)^{(2)} - 3\gamma^2(\alpha_1 y)^{(1)} + j\gamma^3(\alpha_1 y), \\ \alpha_1 y^{(2)} = (\alpha_1 y)^{(2)} - 2j\gamma(\alpha_1 y)^{(1)} - \gamma^2(\alpha_1 y), \\ \alpha_1 u^{(1)} = (\alpha_1 u)^{(1)} - j\gamma(\alpha_1 u), \\ \alpha_1 (\sin y)^{(1)} = (\alpha_1 \sin y)^{(1)} - j\gamma(\alpha_1 \sin y). \end{cases}$$

La Figure 1 représente le schéma partiel de réalisation.

Les résultats de simulation illustrés par la figure (2) ont été obtenus pour un  $H_1(s) = \left(\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{4}s}}{s}\right)^4 e^{-\frac{\Delta}{4}s}$ , une entrée sinusoidale de la forme  $u(t) = u_0 \sin(\beta t)$  et les valeurs  $a_0 = 0.2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $u_0 = 3$ ,  $\gamma = 0.01$  et  $\Delta = 4$ .

Vue la non identifiabilité des instants  $\tau_i$  en dehors des intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ , ces derniers peuvent être maintenus

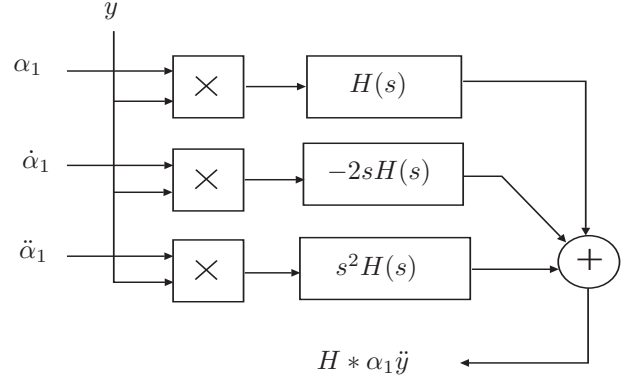


Fig. 1. Schéma de réalisation de  $H * \alpha_1 \ddot{y}$

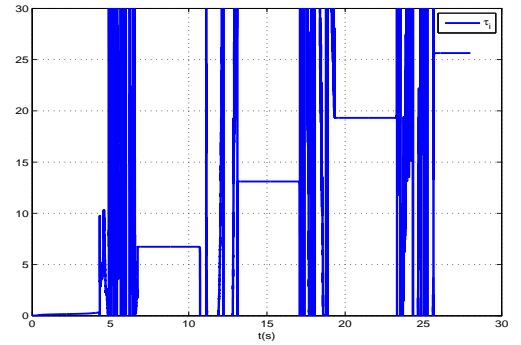


Fig. 2. Identification des instants de commutation  $\tau_i$

à 0.

##### B. Identification simultanée des instants de commutations et des paramètres

Les paires valeurs propres et vecteurs propres, solutions de l'équation (15), sont illustrées respectivement par les figures (3) et (4) pour les mêmes valeurs de la formulation précédente et pour  $H_2 = \left(\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{6}s}}{s}\right)^6$  et  $H_3 = sH_2$ .

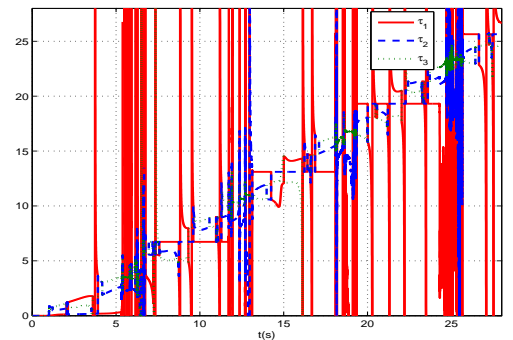


Fig. 3. Les valeurs propres généralisées (15)

Nous obtenons donc trois valeurs propres possibles (resp. vecteurs propres) dont l'une correspond aux instants de commutation (resp. aux coefficients  $a_0$  et  $a_1$ ) et les autres doivent être rejetées. Il est donc nécessaire de concevoir un algorithme d'identification en ligne, sujet du paragraphe suivant, qui permet de choisir la paire (valeur propre et vecteur propre) désirée. Nous avons mentionné dans la section précédente que la résolution du problème spectral permet

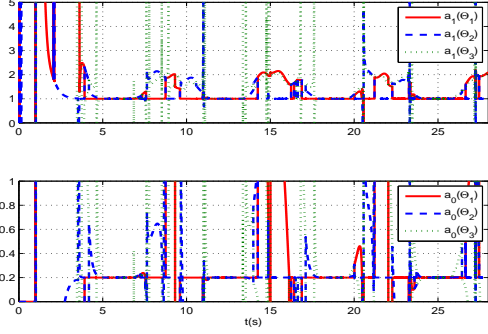


Fig. 4. Les vecteurs propres généralisés (15)

de déterminer les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  seulement sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$  alors que en dehors des ces intervalles ces paramètres sont obtenus à partir de la résolution du systèmes d'équation linéaire décrit par l'équation (16). Les résultats d'identification de ces paramètres à partir de (16) sont illustrés par la figure 5.

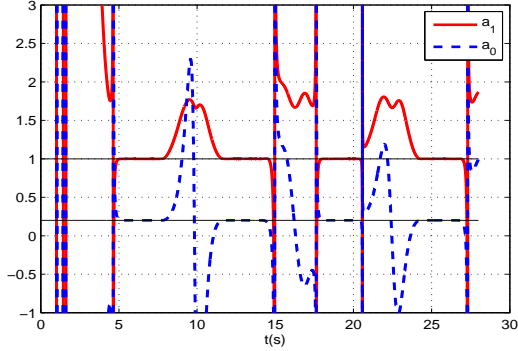


Fig. 5. Identification des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sur  $\mathcal{R}(\tau_i, \tau_i + \Delta)$  (16)

### C. Critère de sélection

La sélection de la paire (valeur propre, vecteur propre) associé qui correspond respectivement aux instants  $\tau_i$  et aux paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$  est faite en ajoutant d'autres lignes au faisceau matriciel  $(A, B)$  qui devient rectangulaire. La paire (valeur propre, vecteur propre) désirée est celle qui minimise  $\|(A - \lambda_i B)\Theta\|_2$ . Il est clair que plus on ajoute de lignes au faisceau de matrices  $(A, B)$  plus on améliore la possibilité d'estimation. Ce critère de sélection a été proposé dans [3] et prouvé dans [12].

Le faisceau de matrices utilisé pour la sélection de la paire (valeur propre, vecteur propre) désirée est formé par l'addition de trois lignes supplémentaires construites en utilisant les filtres  $H_4 = \frac{(1-e^{-\frac{\Delta}{5}s})^5}{s}$ ,  $H_5 = sH_4$  et  $H_6 = \frac{(1-e^{-\frac{\Delta}{4}s})^4}{s}$ . Les résultats de simulations donnés par la figure 7 montrent l'efficacité de ce critère de sélection.

Nous avons mentionné dans la section III qu'il faut trouver un critère de commutation  $s(t)$  entre les deux formulations à savoir le problème de valeur généralisée (15) et le système d'équation linéaire (16) afin de déterminer les valeurs estimées définitives. Le critère  $s(t) = \sqrt{(\det A(t))^2 + (\det B(t))^2}$ , ne dépendant que des données mesurées, est inspiré du résultat trouvé dans l'équation (11)

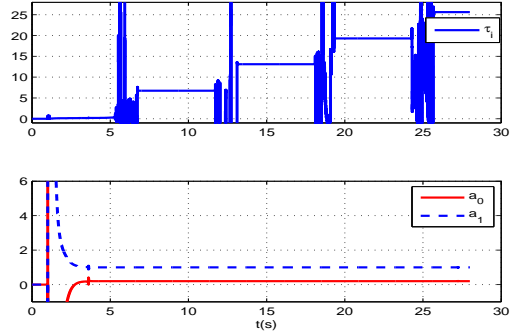


Fig. 6. Identification des instants  $\tau_i$  et des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sur  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$

et qui se base essentiellement sur les propriétés du support du filtre choisi. Les résultats de simulations sont illustrés par la figure (7) pour un seuil d'ordre  $10^{-5}$ .

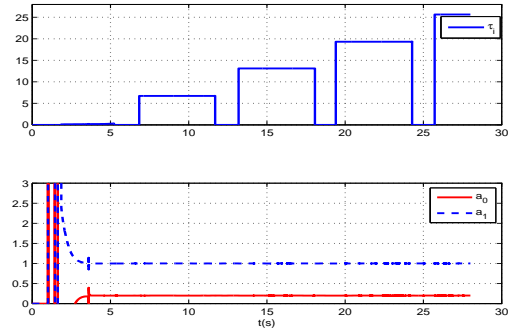


Fig. 7. Identification des instants  $\tau_i$  et des paramètres  $a_0$  et  $a_1$

Afin de tester la robustesse de nos algorithmes d'identification, un bruit blanc gaussien, dont le  $RSB \simeq 93dB$ , est ajouté à la sortie du système. Cette étude sera approfondie pour des bruits plus importants dans les futurs travaux. Les résultats de simulation présentés par la figure 8 sont effectués pour les mêmes valeurs pour  $\Delta = 5$  et illustrent les instants de commutations  $\tau_i$  estimés ainsi que des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  à partir de la résolution du problème spectral ( $PS$ ) et du système d'équation linéaire (noté( $SL$ )).

Dans un contexte bruité, la détermination d'un seuil permettant la commutation entre la formulation spectrale et le système linéaire n'est pas trivial. Cependant, le critère  $s(t)$  est fragile à l'heure actuelle. L'une des perspectives de ce travail sera l'amélioration de ce critère.

## V. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons énoncé et démontré un théorème permettant d'estimer les paramètres ainsi que les instants de commutation d'une équation différentielle du second ordre en présence des frottements secs. La formulation du problème étudié nous a permis d'aboutir à un problème spectral à partir duquel les instants de commutation ainsi que ses paramètres peuvent être déterminés simultanément. Une illustration pratique a permis d'identifier les paramètres d'un pendule simple soumis à des frottements secs en s'appuyant sur une technique d'identification

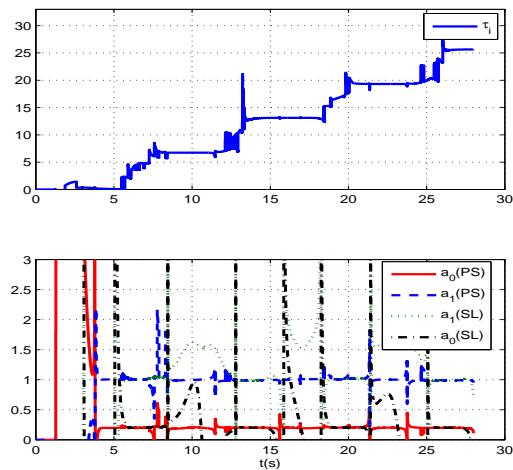


Fig. 8. Identification des instants  $\tau_i$  et des paramètres  $a_0$  et  $a_1$

basée sur le formalisme des distributions. Le critère de commutation entre le problème de valeur propre généralisée et le système linéaire reste sensible aux bruits. Une étude portant sur le choix des filtres dans la génération des matrices  $A$  et  $B$  est donc à envisager. Outre les validations réalisées en simulation, cette démarche devra être confortée à des essais expérimentaux sur les plates-formes disponibles dans nos laboratoires.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Becedas J., Mamani G., Feliu-Batlle V. et Sira-Ramírez H., Algebraic Identification Method for Mass-Spring-Damper System, WCECS 2007, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2007, San Francisco, USA, October 24-26, 2007.
- [2] Belkoura L., Richard J.-P. et Fliess M., On line identification of systems with delayed inputs, MTNS'06, 16th Conference on Mathematical Theory of Networks and Systems, invited session Networked systems, Kyoto, Japan, July, 2006.
- [3] Belkoura L., Richard J.-P. et Fliess M., A convolution approach for delay systems Identification, 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, 6-11 July 2008.
- [4] Belkoura L., Richard J.-P. et Fliess M., Parameters estimation of systems with delayed and structured entries, Automatica, 2009.
- [5] Belkoura L., Change point detection with application to the identification of a switching process, International conference on systems theory : Modelling, Analysis and Control, Fes, Morocco, 25-28 May, 2009.
- [6] Beltrán-Carvajal F., Silva-Navarro G., Sira-Ramírez H. et Quezada-Andrade J., Active vibration control using on-line algebraic identification of harmonic vibrations, Proc. Amer. Control Conf., Portland, OR, 2005.
- [7] Chen, Q. et Thomlinson, G.-R., Parametric Identification of Systems With Dry Friction and Nonlinear Stiffness Using a Time Series Model, Journal of vibration and acoustics, vol. 118, pp. 252-263, 1966.
- [8] Fliess M. et Sira-Ramírez H., An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Contr. Optim. Cal. Variat.*, vol. 9, pp. 151-168, 2003.
- [9] Fliess M. et Sira-Ramírez H., Control via state estimations of some nonlinear systems, *Proc. Symp. Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*, Stuttgart, (available : <http://hal.inria.fr/inria-00001096>).
- [10] Fliess M., Join C. et Sira-Ramírez H., Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems, Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems, T. Meurer, K. Graichen, E.D. Gilles (Eds), Lect. Notes Control Informat. Sci., Springer, Berlin, vol. 322, pp. 217-233, 2005.
- [11] Fliess M., Join C. et Perruquetti W., Real-time estimation for switched linear systems, 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008.
- [12] Ibn Taarit K., Belkoura L., Ksouri M. et Richard J.-P., A fast identification algorithm for systems with delayed inputs, *International Journal of Systems Science*, (Internal report)2009.
- [13] Liang Y. et Feeny, B.-F., Parametric Identification of a Base-Excited Single Pendulum, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 46, pp. 17-29, 2006.
- [14] Moussa Ali A., Join. C et Hamelin F., Fault diagnosis of uncertain linear system using structural knowledge, 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SafeProcess 2009, Barcelone, Spain, 30 June-3 July 2009.
- [15] Nuninger W., Perruquetti W. et Richard J.-P., Bilan et enjeux des modèles de frottements : tribologie et contrôle au service de la sécurité des transports, 5e Journées Européennes du Freinage, JEF'06, Lille, France, 2006.
- [16] Oku H., Application of a recursive subspace identification algorithm to change detection, 13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam, The Netherlands, 2003.
- [17] Pekpe K.M., Gasso K., Mourou G. et Ragot J., Identification of switching systems using change detection technique in the subspace framework, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Bahamas, December 2004.
- [18] Qian Q., Wei H., Yixin Z., Qiang H., Qiaoli H. et Lin X., System Identification of the Double Inverted Pendulum Based on Genetic Algorithm, 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2008, Shenzhen, China, 2008.
- [19] Ren X.M., Rad A.B., Chan P.T. et Lo, W.L., On-line identification of continuous-time systems with unknown time-delay, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, pp. 1418-1422, 2005.
- [20] Schwartz L., *Théorie des distributions (2<sup>nd</sup> ed.)*, Hermann, Paris, 1966.
- [21] Tian Y., Floquet T., Belkoura L. et Perruquetti W., Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems, 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS'09, Zaragoza, Spain, 2009.
- [22] Zglimbea R., Finca V. et Marin C., Identification of systems with friction via distributions using simplified Dahl model, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 2, 2008.