HAL
open science

# Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride triangulaire / quadrangulaire pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires

Clement Durochat, Stephane Lanteri

## To cite this version:

Clement Durochat, Stephane Lanteri. Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride triangulaire / quadrangulaire pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires. [Rapport de recherche] RR-7253, 2010. inria-00472211v1

**HAL Id: inria-00472211**

**https://inria.hal.science/inria-00472211v1**

Submitted on 9 Apr 2010 (v1), last revised 14 Apr 2010 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

# *Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride triangulaire / quadrangulaire pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*

Clément Durochat — Stéphane Lanteri

**N° ????**

Mars 2010

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--????--FR+ENG

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

INRIA

centre de recherche SOPHIA ANTIPOLIS - MÉDITERRANÉE

# Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride triangulaire / quadrangulaire pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires

Clément Durochat * , Stéphane Lanteri †

Thème : Modélisation, simulation et analyse numérique
Équipe-Projet Nachos

Rapport de recherche n° ???? — Mars 2010 — 46 pages

**Résumé :** Nous présentons dans ce rapport une méthode Galerkin discontinue pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel sur des maillages hybrides. Nous formulons les schémas de discrétisation en trois dimensions d'espace (3D) pour des maillages hybrides alors tétraédriques / hexaédriques, en utilisant une approximation centrée pour approcher les intégrales de surface et un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton d'ordre deux. Toujours en 3D, nous étudions la stabilité $L^2$ de cette méthode en montrant qu'elle conserve une énergie discrète et en exhibant une condition suffisante de stabilité de type CFL. Nous réalisons plusieurs simulations numériques en deux dimensions (on utilise dans ce cas des maillages hybrides triangulaire / quadrangulaire) qui visent à valider et réaliser une première évaluation des possibilités de la méthode Galerkin discontinue proposée.

**Mots-clés :** Electromagnétisme, équations de Maxwell, domaine temporel, méthode Galerkin discontinue, maillages hybrides.

* Clement.Durochat@inria.fr
† Stephane.Lanteri@inria.fr

Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

# Discontinuous Galerkin method on hybrid meshes triangular / quadrangular for the numerical resolution of the time domain Maxwell's equations

**Abstract:** We present in this report a discontinuous Galerkin method for the numerical resolution of the time domain Maxwell's equations on hybrid meshes. We formulate the discretization schemes in three space dimensions (3D) for hybrid tetrahedral / hexahedral meshes, using a centered approximation for the surface integrals and a second order leap-frog scheme for advancing in time. Still in 3D, we study the $L^2$ stability of this method by proving the conservation of a discrete analog of the eletromagnetic energy and by exhibiting a sufficient CFL-like stability condition. We perform numerical tests in two space dimensions (in this case, we make use of hybrid triangular / quadrangular meshes) which aim at validating and giving a first assessment of the possibilities of the proposed discontinuous Galerkin method.

**Key-words:** Electromagnetism, Maxwell's equations, time domain, discontinuous Galerkin method, hybrid meshes.

# Table des matières

**Introduction** **4**

**1 Equations de Maxwell tridimensionnelles** **5**

**2 Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride** **6**
2.1 Méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ en maillage tétraédrique . . . 6
2.1.1 Formulation faible . . . 6
2.1.2 Equations semi-discrétisées . . . 9
2.2 Méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique . . . 10
2.2.1 Formulation faible . . . 10
2.2.2 Equations semi-discrétisées . . . 11
2.3 Méthode hybride $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$ . . . 12
2.3.1 Formulation faible . . . 12
2.3.2 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques . . . 14
2.3.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques . . . 15

**3 Discrétisation en temps** **16**

**4 Etude de stabilité** **17**
4.1 Théorème de Poynting et déroulement de l'étude . . . 17
4.2 Résultats connus, notations et hypothèses . . . 18
4.3 Conservation d'une énergie discrète . . . 19
4.4 Condition suffisante de stabilité . . . 22

**5 Etude numérique 2D** **30**
5.1 Préambule et quelques précisions sur l'étude . . . 30
5.2 Résultats pour un premier type de maillage hybride . . . 31
5.3 Résultats pour un second type de maillage hybride . . . 36
5.4 Comparaison avec la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ et avec la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ . . . 42

**Conclusion** **44**
Bibliographie45

# Introduction

L'électromagnétisme numérique est aujourd'hui une discipline en plein essor. Son champ d'application concerne un large spectre d'applications industrielles et sociétales. En dépit de nombreuses avancées méthodologiques, la résolution numérique des équations de Maxwell modélisant les problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques reste une tâche difficile, en particulier lorsqu'il s'agit de prendre en compte des structures géométriques complexes mutliéchelles ou/et lorsque les milieux de propagation sont hétérogènes. De nombreuses méthodes numériques ont été développées mais il semble qu'aucune ne soit prédominante, le choix étant déterminé essentiellement par le type d'application considéré. Les méthodes qui s'appuient sur une discrétisation du volume complet du domaine de calcul permettent à la fois de traiter le problème de la diffraction d'onde en domaine extérieur, mais aussi de tenir compte avec précision des hétérogénéités du milieu de propagation. On peut envisager des méthodes de discrétisation de type différences finies, éléments finis ou volumes finis, qui ont chacunes leurs avantages et limitations. Ainsi, les méthodes de différences finies basées sur des maillages structurés (cartésiens) [Yee66] sont faciles à mettre en oeuvre et performantes mais pas adaptées à la prise en compte de formes géométriques irrégulières. Les méthodes d'éléments finis nodales classiques sont connues pour générer des modes parasites faussant les simulations numériques. Les éléments finis d'arêtes [Ned80]-[Ned86] ont été développés notamment pour s'affranchir de ces problèmes mais sont pénalisés par la complexité de mise en oeuvre et les coûts des calculs. Les méthodes de volumes finis en maillages non-structurés [PRF02b] sont plus flexibles vis-à-vis de la prise en compte des hétérogénéités du milieu de propagation et de formes géométriques irrégulières, mais sont néanmoins de précision limitée.

Récemment, des méthodes d'éléments finis discontinus (méthodes Galerkin discontinues) en maillages simplexes ou non, sont apparues qui semblent être une alternative prometteuse aux méthodes précédentes et offrent en particulier un cadre propice à la construction de méthodes de discrétisation de précision arbitraire [HW02]-[CFP06]. Ces méthodes peuvent facilement être formulées sur des maillages non-structurés, multi-éléments et éventuellement non-conformes (c'est-á-dire, présentant des nœuds flottants). Dans [FLLP05] on propose une méthode de Galerkin discontinue basée sur une interpolation polynomiale d'ordre élevé et formulée sur des maillages triangulaires (cas à deux dimensions d'espace) ou tétraédriques (cas à trois dimensions d'espace) non-structurés conformes, pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires. Néanmoins, dans certaines situations, le recours à un maillage triangulaire ou tétraédrique pour la discrétisation de la totalité du domaine de calcul ne s'impose pas. Souvent, le domaine de propagation est essentiellement un volume d'espace libre comportant un ou plusieurs objets de petite taille et aux formes irrégulières. Plus généralement, le domaine de calcul consiste en une zone complexe pour laquelle le recours à un maillage non-structuré localement adapté s'impose, et une zone de propagation environnante qui peut être discrétisée par un maillage struicturé. On souhaiterait donc discrétiser le domaine de calcul en combinant quadrangles et triangles en 2D, hexaèdres et tétraèdres en 3D. Dans le cas 2D, la construction d'un tel maillage ne pose pas de difficulté particulière. En revanche, dans le cas 3D, si la méthode numérique impose de préserver une discrétisation conforme, l'obtention d'un tel maillage hybride n'est pas une tâche aisée. Un avantage des méthodes de Galerkin discontinues dans ce contexte est de ne pas imposer la conformité de la discrétisation spatiale aux interfaces entre les deux types d'élément.

Plusieurs travaux ont déjà été réalisés qui visent à exploiter la possibilité de combiner discrétisations structurées et non-structurées. Ces travaux ont conduit au développement de différentes méthodes hybrides pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel. Dans [FPBR04], Xavier Ferrieres et *al.* couplent un schéma différences finies (DFDT) (Yee [Yee66]) avec un schéma volumes finis (VFDT). Il en résulte une méthode qui préserve les avantages de la méthode des volumes finis pour le traitement de géométries complexes (danc ce cas une voiture), et également la simplicité et la rapidité du schéma de Yee pour les zones de vide ou contenant des structures à géométrie simple. Ces avantages impliquent un gain en terme de mémoire et de temps de calcul. Dans le même esprit, des hybridations EFDT (méthode des éléments finis) / DFDT ont été proposées comme par exemple dans [VLGL07], [HR08] et [XHM09], mais aussi, Salvator G. Garcia et *al.* combinent GDDT (Galerkin discontinu en domaine temporel) et DFDT [GPdAB08].

L'objectif de la présente étude est de formuler, étudier et valider une méthode Galerkin discontinue en maillage hybride triangulaire / quadrangulaire pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires. Il

s'agit ici d'une première étape vers le développement d'une telle méthode en trois dimensions d'espace (3D) capable d'exploiter des maillages hybrides tétraédriques / hexaédriques non-conformes. Dans ce rapport nous détaillons la formulation de cette méthode en 3D et nous étudions sa stabilité. Enfin, nous présentons des résultats numériques en 2D visant à valider l'étude de stabilité et réaliser une première évaluation des possibilités de la méthode Galerkin discontinue proposée.

# 1 Equations de Maxwell tridimensionnelles

Soit $\Omega$ un ouvert, borné et régulier de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \Gamma^a \cup \Gamma^m$. Le système des équations de Maxwell tridimensionnelles est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \epsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) & = & -z_0 \sigma \mathbf{E}, \\ \mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) & = & 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

où

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{pmatrix} E_1(\mathbf{x},t) \\ E_2(\mathbf{x},t) \\ E_3(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{pmatrix} H_1(\mathbf{x},t) \\ H_2(\mathbf{x},t) \\ H_3(\mathbf{x},t) \end{pmatrix},$$

désignent respectivement les champs électrique et magnétique (avec $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$) ; $\epsilon \equiv \epsilon(\mathbf{x})$, $\mu \equiv \mu(\mathbf{x})$ et $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{x})$ sont respectivement les permittivité électrique, perméabilité magnétique et conductivité électrique. Les équations $(1)$ ont été redimensionnées et $\epsilon$ et $\mu$ définissent des quantités relatives ($z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ est l'impédance du vide). On complète ce système par les conditions aux limites suivantes où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à $\Gamma$ :

- sur $\Gamma^m$ : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$,
- sur $\Gamma^a$ : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} + z\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^\infty + z\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^\infty)$,
  où $z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ et ${}^t(\mathbf{E}^\infty, \mathbf{H}^\infty)$ est un champ incident donné.

On réécrit le système $(1)$ sous forme condensée (pseudo-conservative) :

$$Q(\partial_t \mathbf{W}) + \nabla \cdot F(\mathbf{W}) = \mathbf{J}, \tag{2}$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} \epsilon \mathbf{I}_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mu \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -z_0 \sigma \mathbf{E} \\ 0_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{W}) \\ F_2(\mathbf{W}) \\ F_3(\mathbf{W}) \end{pmatrix},$$

où :

$$0_3 = {}^t(0,\ 0,\ 0),$$

$$F_1(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_1 \\ -N_1 & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = {}^t(0,\ H_3,\ -H_2,\ 0,\ -E_3,\ E_2) \ \in \mathbb{R}^6,$$

$$F_2(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_2 \\ -N_2 & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = {}^t(-H_3,\ 0,\ H_1,\ E_3,\ 0,\ -E_1) \ \in \mathbb{R}^6,$$

$$F_3(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_3 \\ -N_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = {}^t(H_2,\ -H_1,\ 0,\ -E_2,\ E_1,\ 0) \ \in \mathbb{R}^6,$$

et où les matrices (anti-symétriques) $N_1$, $N_2$ et $N_3$ sont données par :

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin, $\nabla \cdot F(\mathbf{W}) = \partial_{x_1}(F_1(\mathbf{W})) + \partial_{x_2}(F_2(\mathbf{W})) + \partial_{x_3}(F_3(\mathbf{W})) \in \mathbb{R}^6$.

# 2 Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride

Nous allons présenter dans cette section la méthode Galerkin discontinue 3D d'ordre élevé (i.e. $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$) en maillage tétraédrique (décrite par exemple dans [PF03]), qui peut être considérée soit comme une méthode d'éléments finis discontinue soit comme méthode de volumes finis d'ordre élevé. Nous présenterons ensuite cette même méthode en maillage hexaédrique (i.e. $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$). Enfin, nous proposerons une adaption de ces deux méthodes de manière à les coupler en une méthode hybride Galerkin discontinue en maillage tétraédrique/hexaédrique (i.e. $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$).

## 2.1 Méthode $\mathrm{GD}-\mathbb{P}_p$ en maillage tétraédrique

### 2.1.1 Formulation faible

Le domaine $\Omega$ est supposé discrétisé par une triangulation $\mathscr{T}_h = \bigcup_{i=1}^{N} \tau_i$, où les $\tau_i$ sont des triangles en deux dimensions d'espace (2D) et des tétraèdres en trois dimensions (3D). Nous notons $\psi$ une fonction test scalaire. On suppose $\mathbf{J} = 0$ pour simplifier la présentation. En multipliant (2) par $\psi$ et en intégrant sur $\tau_i$, nous obtenons :

$$\int_{\tau_i} Q(\partial_t \mathbf{W})\psi d\mathbf{x} + \int_{\tau_i} (\nabla \cdot F(\mathbf{W}))\, \psi d\mathbf{x} = 0.$$

En utilisant une formule d'intégration par parties (Green), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i} Q(\partial_t \mathbf{W})\psi d\mathbf{x} - \int_{\tau_i} \nabla\psi \cdot F(\mathbf{W}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\tau_i} (F(\mathbf{W}) \cdot \breve{\mathbf{n}})\, \psi d\sigma &= 0, \\ \Longleftrightarrow \quad \int_{\tau_i} Q(\partial_t \mathbf{W})\psi d\mathbf{x} - \int_{\tau_i} \nabla\psi \cdot F(\mathbf{W}) d\mathbf{x} + \sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}) \cdot \breve{\mathbf{n}}_{ij})\, \psi d\sigma &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

où $a_{ij} = \tau_i \cap \tau_j$, est la face commune entre $\tau_i$ et $\tau_j$ et $\mathcal{V}_i = \{j | \tau_i \cap \tau_j \neq \varnothing\}$ est l'ensemble des éléments voisins de $\tau_i$. $\breve{\mathbf{n}}_{ij}$ est le vecteur normal **unitaire** sortant à $a_{ij}$ dirigé de $\tau_i$ vers $\tau_j$ et $\breve{\mathbf{n}}_{ij} = {}^t(\breve{n}^1_{ij}, \breve{n}^2_{ij}, \breve{n}^3_{ij}) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus $p$ sur $\tau_i$ (par exemple les polynômes $\mathbb{P}_2$ en 2D sont de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2$). Nous cherchons une solution approchée $\mathbf{W}_h$ de notre problème sur $\Omega$, dans l'espace d'approximation global $V_h^6$, défini tel que :

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \mid \forall \tau_i \in \mathscr{T}_h,\ v_{h\,|\tau_i} \in \mathbb{P}_p[\tau_i] \right\}.$$

Soit maintenant $\phi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \cdots, \varphi_{id_i})$ une base locale de $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ qui est donc l'espace vectoriel engendré par les $\varphi_{il},\ 1 \leq l \leq d_i$, les degrés de liberté locaux sont notés $\mathbf{W}_{il} \in \mathbb{R}^6$. Enfin, nous notons $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^6$ la projection $L_2$-orthogonale de $\mathbf{W}$ sur $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ (i.e. $\mathbf{W}_{h\,|\tau_i}$), c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{W}_{il}\varphi_{il}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{E}_{il}\varphi_{il}(\mathbf{x}) \\ \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{H}_{il}\varphi_{il}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

**Remarque** : c'est chaque composante de $\mathbf{W}_i(\mathbf{x})$ qui est écrite dans la base $\phi_i$, ici on écrit directement $\mathbf{W}_i(\mathbf{x})$ sous forme vectorielle. $d_i$ est le nombre de degrés de liberté pour le tétraèdre (triangle en 2D) $\tau_i$. On ne se soucie pas pour le moment du type de base choisi (i.e. modale ou nodale, hiérarchique ou non, orthogonale ou non, etc.).

Puisque la représentation locale de $\mathbf{W}$ (et donc de $\mathbf{W}_h$) n'assure aucune forme de continuité d'un élément à un autre, un traitement particulier doit être introduit pour l'évaluation des intégrales de bord sur la face $a_{ij}$. Dans le contexte des méthodes volumes finis, on parle de **flux numérique**. Nous utilisons ici un flux numérique basé sur un schéma centré :

$$\mathbf{W}_h|_{a_{ij}} = \frac{\mathbf{W}_i + \mathbf{W}_j}{2}.$$

Par conséquent (en tenant compte de la linéarité de $F$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_h)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma &= \sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \left(F\left(\frac{\mathbf{W}_i+\mathbf{W}_j}{2}\right)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij}\right)\psi d\sigma \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_i)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_j)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\tau_i} (F(\mathbf{W}_i)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_j)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma \\
&\approx \sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W})\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma.
\end{aligned}$$

A l'aide, une seconde fois, d'une intégration par parties appliquée à $\frac{1}{2}\int_{\partial\tau_i} (F(\mathbf{W}_i)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W})\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma \;\approx\; & \frac{1}{2} \int_{\tau_i} ((\nabla\cdot F(\mathbf{W}_i))\,\psi + \nabla\psi\cdot F(\mathbf{W}_i))\,d\mathbf{x} + \\
& \frac{1}{2} \sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_j)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma.
\end{aligned} \tag{5}$$

En injectant $\mathbf{W}_i$ et en utilisant $(5)$, dans l'équation $(3)$, nous obtenons (par abus de notation, nous gardons le signe $=$ au lieu du signe $\approx$) :

$$\begin{aligned}
Q_i \int_{\tau_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\tau_i} ((\nabla\cdot F(\mathbf{W}_i))\,\psi - \nabla\psi\cdot F(\mathbf{W}_i))\,d\mathbf{x} + \\
\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_j)\cdot\breve{\mathbf{n}}_{ij})\,\psi d\sigma = 0,
\end{aligned}$$

avec $Q_i = \begin{bmatrix} \epsilon_i I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mu_i I_{3\times3} \end{bmatrix}$, $\epsilon_i$ et $\mu_i$ étant des valeurs constantes sur $\tau_i$.

Cette dernière équation peut être réécrite comme :

$$Q_i \int_{\tau_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\tau_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} F_k(\mathbf{W}_i) \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) F_k(\mathbf{W}_i) \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \left( \sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k F_k(\mathbf{W}_j) \right) \psi d\sigma = 0. \tag{6}$$

Maintenant, nous définissons les trois matrices suivantes :

$$\mathcal{O}^k = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_k \\ -N_k & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$\breve{N}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k N_k = \begin{bmatrix} 0 & \breve{n}_{ij}^3 & -\breve{n}_{ij}^2 \\ -\breve{n}_{ij}^3 & 0 & \breve{n}_{ij}^1 \\ \breve{n}_{ij}^2 & -\breve{n}_{ij}^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k \mathcal{O}^k = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & \breve{N}_{ij} \\ -\breve{N}_{ij} & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

et enfin l'équation $(6)$ devient :

$$Q_i \int_{\tau_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\tau_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \left( \sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k \mathcal{O}^k \mathbf{W}_j \right) \psi d\sigma = 0,$$

$$\iff Q_i \int_{\tau_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\tau_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma = 0. \tag{7}$$

**Remarques** :

- On peut aisément vérifier que $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ on a $\breve{N}_{ij}\mathbf{X} = -\breve{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{X}$.
- Les matrices $N_k$ et $\breve{N}_{ij}$ sont de taille $3 \times 3$ et sont anti-symétriques ; les matrices $\mathcal{O}^k$ et $\mathcal{M}_{ij}$ sont de taille $6 \times 6$ et sont symétriques.
- $\breve{\mathbf{n}}_{ij} = -\breve{\mathbf{n}}_{ji}$ et donc $\breve{N}_{ij} = -\breve{N}_{ji}$.

Il nous reste maintenant à nous occuper du traitement numérique des conditions aux limites. Dans le cadre de cette étude, nous ne considérons que des frontières métalliques. Nous notons $\mathscr{T}_d^i$ l'ensemble des faces internes du tétraèdre $\tau_i$ et par $\mathscr{T}_m^i$ l'ensemble des faces métalliques du tétraèdre $\tau_i$. Si $a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$ alors nous posons, en considérant $\mathbf{W}_j$ une cellule fictive :

$$\mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} -I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W}_i.$$

$\mathscr{T}_d^i \bigcup \mathscr{T}_m^i$ désigne l'ensemble des faces de $\tau_i$, on sépare alors la somme pour $j \in \mathcal{V}_i$ en somme pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i$ et somme pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$. Dans le calcul des flux internes (i.e. des termes de bord pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i$), $\mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j$ ne change pas.

Ensuite, pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$ : $\mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j = \mathcal{M}_{im} \begin{bmatrix} -I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & \breve{N}_{im} \\ \breve{N}_{im} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W}_i \equiv \mathcal{S}_{im}\mathbf{W}_i$.

On notera que $\mathcal{S}_{im}$ est une matrice $6\times 6$ anti-symétrique. On en deduit une première équation essentielle, à savoir la formulation faible et l'équation $(7)$ devient :

$$\begin{aligned} 2Q_i \int_{\tau_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \int_{\tau_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \\ \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j \psi d\sigma + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{S}_{im}\mathbf{W}_i \psi d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

### 2.1.2 Equations semi-discrétisées

On introduit maintenant les notations suivantes :

$$\Phi_i = \int_{\tau_i} {}^t\phi_i \phi_i d\mathbf{x}, \quad \Phi_i^{x_k} = \int_{\tau_i} \left( {}^t\phi_i \left(\partial_{x_k}\phi_i\right) - {}^t\left(\partial_{x_k}\phi_i\right)\phi_i \right) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \Phi_{ij} = \int_{a_{ij}} {}^t\phi_i \phi_j d\sigma,$$

où :

- ${}^t\phi_i$ un vecteur colonne $\in \mathbb{R}^{d_i}$ et $\phi_i$ est un vecteur ligne $\in \mathbb{R}^{d_i}$.
- $\Phi_i$ est une matrice $d_i \times d_i$ symétrique définie positive.
- $\Phi_i^{x_k}$ est une matrice $d_i \times d_i$ anti-symétrique.
- $\Phi_{ij}$ est a priori une matrice rectangulaire quelconque si $d_i \neq d_j$ ($\Phi_{ij}$ est une matrice $d_i \times d_i$ symétrique positive si $d_i = d_j$).

Pour conclure cette sous-section, proposons une expression du système d'équations semi-discrétisées associé à la formulation $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$. Posons $\overline{\mathbf{E}}_i$ et $\overline{\mathbf{H}}_i$ qui désignent les vecteurs $\in \mathbb{R}^{3d_i}$ des degrés de liberté locaux $\mathbf{E}_{il}$ et $\mathbf{H}_{il}$ pour $l = 1, \cdots, d_i$, (les $\mathbf{E}_{il}$ $(\in \mathbb{R}^3)$ sont les premières composantes des $\mathbf{W}_{il}$ $(\in \mathbb{R}^6)$ et les $\mathbf{H}_{il}$ $(\in \mathbb{R}^3)$ les dernières composantes) associés au tétraèdre (triangle en 2D) $\tau_i$ :

$$\overline{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i1} \\ \mathbf{E}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{id_i} \end{pmatrix} \text{ et } \overline{\mathbf{H}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{i1} \\ \mathbf{H}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{id_i} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Dans $(8)$, on remplace $\mathbf{W}_i$ par :

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{E}_{il}\varphi_{il} \\ \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{H}_{il}\varphi_{il} \end{pmatrix}$$

(et on fait de même pour $\mathbf{W}_j$) et $\psi$ par $\varphi_{il}$ pour $1 \leq l \leq d_i$. On obtient un système de $6d_i$ équations :

$$\forall \tau_i \in \mathscr{T}_h \quad : \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathcal{X}_{\epsilon,i} \frac{d\overline{\mathbf{E}}_i}{dt} + \sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{H}}_i &= 0, \\ 2\mathcal{X}_{\mu,i} \frac{d\overline{\mathbf{H}}_i}{dt} - \sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{E}}_i &= 0, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\mathcal{X}_{\epsilon,i} & = & \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{11}(\epsilon_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{12}(\epsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{1d_i}(\epsilon_i I_{3\times3}) \\ (\Phi_i)_{21}(\epsilon_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{22}(\epsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{2d_i}(\epsilon_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_i)_{d_i1}(\epsilon_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{d_i2}(\epsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{d_id_i}(\epsilon_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_{\mu,i} & = & \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{11}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{12}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{1d_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ (\Phi_i)_{21}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{22}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{2d_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_i)_{d_i1}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{d_i2}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{d_id_i}(\mu_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_i^{x_k} & = & \begin{bmatrix} (\Phi_i^{x_k})_{11}N_k & (\Phi_i^{x_k})_{12}N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{1d_i}N_k \\ (\Phi_i^{x_k})_{21}N_k & (\Phi_i^{x_k})_{22}N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{2d_i}N_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_i^{x_k})_{d_i1}N_k & (\Phi_i^{x_k})_{d_i2}N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{d_id_i}N_k \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_{ij} & = & \begin{bmatrix} (\Phi_{ij})_{11}\breve{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{12}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{1d_j}\breve{N}_{ij} \\ (\Phi_{ij})_{21}\breve{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{22}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{2d_j}\breve{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_{ij})_{d_i1}\breve{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{d_i2}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{d_id_j}\breve{N}_{ij} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_{im} & = & \begin{bmatrix} (\Phi_{ij})_{11}\breve{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{12}\breve{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{1d_i}\breve{N}_{im} \\ (\Phi_{ij})_{21}\breve{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{22}\breve{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{2d_i}\breve{N}_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_{ij})_{d_i1}\breve{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{d_i2}\breve{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{d_id_i}\breve{N}_{im} \end{bmatrix}.
\end{array}\right.$$

A partir de maintenant, on suppose $d_i$identique pour tous les tétraèdres $\tau_i$. Alors toutes les matrices précédentes sont de taille $3d_i \times 3d_i$. De plus, $\mathcal{X}_{\epsilon,i}$ et $\mathcal{X}_{\mu,i}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\mathcal{X}_i^{x_k}$ est une matrice symétrique, $\mathcal{X}_{ij}$ et $\mathcal{X}_{im}$ sont des matrices anti-symétriques.

## 2.2 Méthode $\mathrm{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique

### 2.2.1 Formulation faible

On reprend ici la démarche de la section précedente mais pour un maillage hexaédrique. Le domaine $\Omega$ est supposé discrétisé par une quadrangulation $\mathscr{Q}_h = \bigcup_{i=1}^{N} q_i$, où les $q_i$ sont des quadrangles en 2D et des hexaèdres en 3D. On note $\psi$ une fonction test scalaire.

Soit $\mathbb{Q}_k[q_i]$ l'espace des fonctions polynomiales de degrés au plus $k$ par rapport à chaque variable séparément sur $q_i$ (par exemple les polynômes $\mathbb{Q}_2$ en 2D sont de la forme $\gamma_0+\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_1x_2+\gamma_4x_1^2+\gamma_5x_2^2+\gamma_6x_1^2x_2+\gamma_7x_1x_2^2$). Nous cherchons une solution approchée $\mathbf{W}_h$ dans l'espace d'approximation global $V_h^6$, défini dans ce cas tel que :

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \mid \forall q_i \in \mathscr{Q}_h,\ v_{h\,|q_i} \in \mathbb{Q}_k[q_i] \right\}.$$

Soit $\theta_i = (\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}, \cdots, \vartheta_{ib_i})$ une base locale de $\mathbb{Q}_k[q_i]$ qui est donc l'espace vectoriel engendré par les $\vartheta_{il}$, $1 \le l \le b_i$, les degrés de liberté locaux sont ici aussi notés $\mathbf{W}_{il} \in \mathbb{R}^6$. $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^6$ est la projection $L_2$-orthogonale de $\mathbf{W}$ sur alors $\mathbb{Q}_k[q_i]$ (i.e. $\mathbf{W}_{h\,|q_i}$) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{W}_{il}\vartheta_{il}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{E}_{il}\vartheta_{il}(\mathbf{x}) \\ \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{H}_{il}\vartheta_{il}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

**Remarque** : $b_i$ est le nombre de degrés de liberté pour l'hexaèdre $q_i$.

Désignons par $\mathscr{Q}_d^i$ l'ensemble des faces de l'hexaèdre $q_i$ qui sont internes au maillage et par $\mathscr{Q}_m^i$ l'ensemble des faces frontières métalliques de $q_i$ (et donc $\mathscr{Q}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_m^i$ est l'ensemble des faces de $q_i$). Pour tout le reste, nous reprenons les mêmes notations, les mêmes définitions de matrices, les mêmes étapes, le même flux centré, le même traitement numérique des conditons aux limites et le même calcul des intégrales de bord que dans la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$. On peut donc réutiliser la formule $(8)$ mais adaptée au maillage hexaédrique, ce qui donne la formulation faible pour cette méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ :

$$\begin{gathered} 2Q_i \int_{q_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \int_{q_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \\ \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j \psi d\sigma + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{S}_{im}\mathbf{W}_i\psi d\sigma = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

### 2.2.2 Equations semi-discrétisées

On introduit les notations suivantes :

$$\Theta_i = \int_{q_i} {}^t\theta_i\theta_i d\mathbf{x}, \quad \Theta_i^{x_k} = \int_{q_i} \left( {}^t\theta_i \left(\partial_{x_k}\theta_i\right) - {}^t\left(\partial_{x_k}\theta_i\right)\theta_i \right) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \Theta_{ij} = \int_{a_{ij}} {}^t\theta_i\theta_j d\sigma,$$

où :

- ${}^t\theta_i$ un vecteur colonne $\in \mathbb{R}^{b_i}$ et $\theta_i$ est un vecteur ligne $\in \mathbb{R}^{b_i}$.
- $\Theta_i$ est une matrice $b_i \times b_i$ symétrique définie positive, $\Theta_i^{x_k}$ est une matrice $b_i \times b_i$ anti-symétrique.
- $\Theta_{ij}$ est a priori une matrice rectangulaire si $b_i \neq b_j$ (ou $b_i \times b_i$ symétrique positive si $b_i = b_j$).

On formule maintenant le système d'équations semi-discrétisée associé à la formulation $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$. Posons $\widetilde{\mathbf{E}}_i$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_i$ qui désignent les vecteurs $\in \mathbb{R}^{3b_i}$ des degrés de liberté locaux $\mathbf{E}_{il}$ et $\mathbf{H}_{il}$ pour $l = 1, \cdots, b_i$, associés à l'hexaèdre (quadrangle en 2D) $q_i$. Nous prennons volontairement une notation différente entre $\overline{\mathbf{E}}_i$ (resp. $\overline{\mathbf{H}}_i$) spécifiques aux tetraèdres et $\widetilde{\mathbf{E}}_i$ (resp. $\widetilde{\mathbf{H}}_i$) spécifiques aux hexaèdres, ce qui nous sera utile plus tard pour les schémas en maillage hybride :

$$\widetilde{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{ib_i} \end{pmatrix} \text{ et } \widetilde{\mathbf{H}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{ib_i} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Comme pour la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$, dans $(12)$, on remplace $\mathbf{W}_i$ par son expression dans la formule $(11)$ (de même pour $\mathbf{W}_j$) et $\psi$ par $\vartheta_{il}$ pour $1 \leq l \leq b_i$. On obtient un système de $6b_i$ équations :

$$\forall q_i \in \mathscr{Q}_h \quad : \quad \begin{cases} 2\mathcal{W}_{\epsilon,i} \dfrac{d\widetilde{\mathbf{E}}_i}{dt} + \sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k} \widetilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{H}}_i & = & 0, \\ 2\mathcal{W}_{\mu,i} \dfrac{d\widetilde{\mathbf{H}}_i}{dt} - \sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k} \widetilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{E}}_i & = & 0. \end{cases} \tag{14}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\mathcal{W}_{\epsilon,i} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_i)_{11}(\epsilon_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{12}(\epsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{1b_i}(\epsilon_i I_{3\times3}) \\ (\Theta_i)_{21}(\epsilon_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{22}(\epsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{2b_i}(\epsilon_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_i)_{b_i1}(\epsilon_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{b_i2}(\epsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{b_ib_i}(\epsilon_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_{\mu,i} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_i)_{11}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{12}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{1b_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ (\Theta_i)_{21}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{22}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{2b_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_i)_{b_i1}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{b_i2}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{b_ib_i}(\mu_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_i^{x_k} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_i^{x_k})_{11}N_k & (\Theta_i^{x_k})_{12}N_k & \cdots & (\Theta_i^{x_k})_{1b_i}N_k \\ (\Theta_i^{x_k})_{21}N_k & (\Theta_i^{x_k})_{22}N_k & \cdots & (\Theta_i^{x_k})_{2b_i}N_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_i^{x_k})_{b_i1}N_k & (\Theta_i^{x_k})_{b_i2}N_k & \cdots & (\Theta_i^{x_k})_{b_ib_i}N_k \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_{ij} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_{ij})_{11}\breve{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{12}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{1b_j}\breve{N}_{ij} \\ (\Theta_{ij})_{21}\breve{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{22}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{2b_j}\breve{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_{ij})_{b_i1}\breve{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{b_i2}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{b_ib_j}\breve{N}_{ij} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_{im} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_{ij})_{11}\breve{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{12}\breve{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{1b_i}\breve{N}_{im} \\ (\Theta_{ij})_{21}\breve{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{22}\breve{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{2b_i}\breve{N}_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_{ij})_{b_i1}\breve{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{b_i2}\breve{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{b_ib_i}\breve{N}_{im} \end{bmatrix}.
\end{array}\right.$$

A partir de maintenant, on suppose $b_i$ identique pour tous les hexaèdres $q_i$. Alors toutes ces matrices précédentes sont de taille $3b_i \times 3b_i$. Enfin, $\mathcal{W}_{\epsilon,i}$ et $\mathcal{W}_{\mu,i}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\mathcal{W}_i^{x_k}$ est symétrique, $\mathcal{W}_{ij}$ et $\mathcal{W}_{im}$ sont anti-symétriques.

## 2.3 Méthode hybride $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$

Les sous-sections précédentes 2.1 et 2.2 vont maintenant nous servir à établir un schéma sous forme d'un système d'équations semi-discrétisées pour un maillage hybride en appliquant donc la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ sur les tétraèdres (triangles en 2D) et la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ sur les hexaèdres (quadrangles en 2D). Commençons par la formulation faible.

### 2.3.1 Formulation faible

Le domaine $\Omega$ est maintenant discrétisé par $\mathscr{C}_h = \bigcup_{i=1}^{N} c_i$, où les $c_i$ désignent des cellules qui sont des triangles ou des quadrangles en 2D, des tétraèdres ou des hexaèdres en 3D. Sauf mention spécifique, nous garderons ici les mêmes notations que précédemment (les espace de fonctions polynomiales et leurs fonctions de base associées, les discrétisations, les normales, les ensembles des faces, etc.). On note $\psi$ une fonction test scalaire. Nous cherchons une solution approchée $\mathbf{W}_h$ dans l'espace d'approximation global $V_h^6$, défini dans ce cas tel que :

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall c_i \in \mathscr{T}_h,\ v_{h\,|c_i} \in \mathbb{P}_p[c_i] \\ \forall c_i \in \mathscr{Q}_h,\ v_{h\,|c_i} \in \mathbb{Q}_k[c_i] \end{array} \right\}.$$

Les faces frontières métalliques sont soit des faces frontières métalliques de tétraèdres ($a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$), soit des faces frontières métalliques d'hexaèdres ($a_{ij} \in \mathscr{Q}_m^i$). Les faces internes sont soit des faces communes à deux tétraèdres ($a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i$), soit des faces communes à deux héxaèdres ($a_{ij} \in \mathscr{Q}_d^i$), soit enfin des faces communes à un tétraèdre et un hexaèdre ; dans ce dernier cas, on désigne par $\mathscr{H}_d^i$ l'ensemble de ces faces hybrides, et donc $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i$.

Le principal problème auquel nous sommes confrontés concerne le calcul des intégrales sur les faces de $\mathscr{H}_d^i$. Dans le cas 2D, on obtient une discrétisation spatiale conforme (les faces des triangles et des quadrangles étant toutes deux des segments) ce qui n'est en revanche pas le cas en 3D car les faces des tétraèdres sont des triangles alors que celles des hexaèdres sont des quadrangles. Pour obtenir un maillage hybride conforme, il faut dont faire appel à des éléments intermédiaires (prismes et pyramides) ce qui complique notablement le processus de construction du maillage. Dans le cadre d'une méthode de discrétisation de type Galerkin discontinu, il n'est pas nécessaire d'imposer une telle conformité. Dans la présente étude, nous nous limitons à un certain type de non-conformité schématisée sur la figure 1 (voir aussi la figure 2 pour une coupe 2D de la face hybride entre $\mathbf{q2}$ et, $\mathbf{t1}$ et $\mathbf{t2}$). Autrement dit, on se limitera au cas où, sur une face hybride, l'ensemble des faces triangulaires (issues des tétraèdres) coïncident avec la face quadrangulaire de l'hexaèdre voisin.

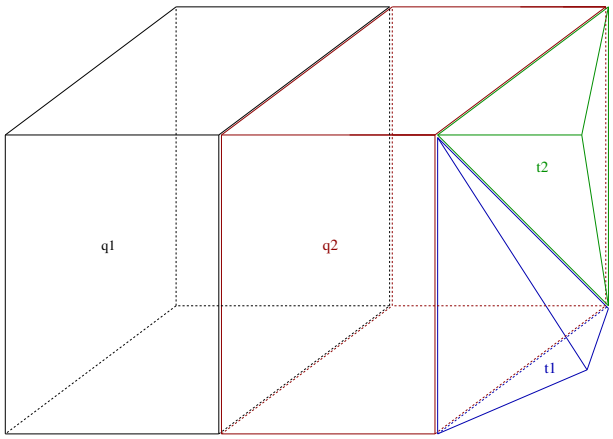


FIGURE 1 – Type non-conformité considéré en 3D, entre un hexaèdre et deux tétraèdres

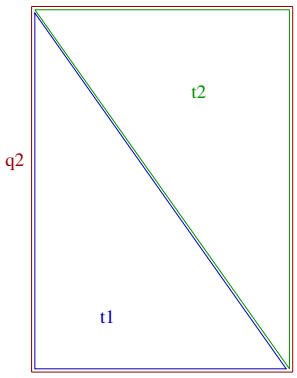


FIGURE 2 – Vue 2D d'une face hybride non-conforme entre un hexaèdre et deux tétraèdres

Nous distinguons deux cas différents :

- Cas (A), $c_i \in \mathscr{T}_h$. Pour $j \in \mathcal{V}_i$ on a $c_j \in \mathscr{C}_h = \mathscr{T}_h \bigcup \mathscr{Q}_h$, donc pour $j \in \mathcal{V}_i$ on a $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i \bigcup \mathscr{T}_d^i \bigcup \mathscr{T}_m^i$. En d'autres termes, $c_i$ est un tétraèdre et les cellules voisines à $c_i$ sont des tétraèdres ou des hexaèdres, donc $a_{ij}$ est une face de $c_i$ soit sur la frontière métallique, soit commune à un tétraèdre voisin, soit commune à un hexaèdre voisin (donc une face hybride). Dans ce cas, reprenons la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ en maillage tétraédrique (la formulation faible étant donnée par l'équation $(8)$) : la somme des intégrales sur les faces est séparée entre les faces internes ($\in \mathscr{T}_d^i$ dans cette méthode) et les faces frontières métalliques ($\in \mathscr{T}_m^i$). Or, dans ce premier cas de la méthode hybride, les faces internes $\in \mathscr{H}_d^i \bigcup \mathscr{T}_d^i$ (et le traitement des faces frontières métalliques reste le même). Il suffit donc de séparer dans $(8)$ la somme des intégrales sur les faces internes entre les faces internes $\in \mathscr{T}_d^i$ et celles $\in \mathscr{H}_d^i$ (nous expliciterons le dernier terme dans la sous-section $\mathbf{2.3.2}$) :

$$\begin{aligned} 2Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \\ \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{S}_{im} \mathbf{W}_i \psi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

- Cas (B), $c_i \in \mathscr{Q}_h$. Pour $j \in \mathcal{V}_i$ on a $c_j \in \mathscr{C}_h = \mathscr{T}_h \bigcup \mathscr{Q}_h$, donc pour $j \in \mathcal{V}_i$ on a $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_m^i$. En d'autres termes, $c_i$ est un hexaèdre et les cellules voisines à $c_i$ sont des tétraèdres ou des hexaèdres, donc $a_{ij}$ est une face de $c_i$ soit frontière métallique, soit commune à un hexaèdre voisin, soit commune à un tétraèdre voisin (donc une face hybride). Dans ce cas, reprenons la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique (la formulation faible étant donnée par l'équation $(12)$) : la somme des intégrales sur les faces est là aussi séparée entre les faces internes ($\in \mathscr{Q}_d^i$ dans cette méthode) et les faces frontières métalliques ($\in \mathscr{Q}_m^i$). Or, dans ce second cas de la méthode hybride, les faces internes $\in \mathscr{H}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_d^i$ (et le traitement des faces frontières métalliques reste le même). Il suffit donc de séparer dans $(12)$ la somme des intégrales sur les faces internes entre les faces internes $\in \mathscr{Q}_d^i$ et celles $\in \mathscr{H}_d^i$ (nous expliciterons le dernier terme dans la sous-section $\mathbf{2.3.3}$) :

$$\begin{aligned} 2Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left( \left( \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{O}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \\ \sum_{a_{ij} \in \mathscr{Q}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{Q}_m^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{S}_{im} \mathbf{W}_i \psi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

**Remarque** : les deux formulations faibles $(15)$ et $(16)$ sont proches mais il y a tout de même des différences à souligner. $\mathbf{W}_i$ n'est pas la même projection dans l'une que dans l'autre, $c_i$ est un tétraèdre dans $(15)$, un hexaèdre dans $(16)$. Les sommes sur les faces sont aussi différentes entre les deux formulations.

### 2.3.2 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques

Nous sommes donc dans le cas (A), intéressons nous au terme $\displaystyle\sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma$ dans $(15)$.

Pour tous les autres termes nous effectuons exactement les mêmes remplacements que dans la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$, rappelons que dans ces termes, $\mathbf{W}_i$ (resp. $\mathbf{W}_j$) est la projection de $\mathbf{W}$ sur $\mathbb{P}_p[c_i]$ (resp. $\mathbb{P}_p[c_j]$) avec $c_i$ (resp. $c_j$) un tétraèdre. Il est important de préciser qu'en revanche dans le terme $\displaystyle\sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi d\sigma$, $\mathbf{W}_j$ est la projection de $\mathbf{W}$ sur $\mathbb{Q}_k[c_j]$ car $c_j$ est un hexaèdre.

On va donc, dans ce terme, remplacer $\mathbf{W}_j$ par $\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{b_j} \mathbf{E}_{jl}\vartheta_{jl} \\ \sum_{l=1}^{b_j} \mathbf{H}_{jl}\vartheta_{jl} \end{pmatrix}$ et $\psi$ par $\varphi_{il}$ pour $1 \leq l \leq d_i$.

On introduit la notation suivante :

$$\Upsilon_{ij} = \int_{a_{ij}} {}^t\phi_i \theta_j d\sigma,$$

où :

- ${}^t\phi_i$ un vecteur colonne $\in \mathbb{R}^{d_i}$ et $\theta_j$ est un vecteur ligne $\in \mathbb{R}^{b_j}$,
- $\Upsilon_{ij}$ est une matrice rectangulaire de taille $d_i \times b_j$. L'ordre des indices ($i$ puis $j$) est important.

Proposons ainsi une expression du système de $6d_i$ équations associé à la formulation hybride dans le cas (A) que l'on vient de présenter :

$$\forall c_i \in \mathscr{T}_h : \left\{ \begin{array}{rcl} 2\mathcal{X}_{\epsilon,i}\dfrac{d\overline{\mathbf{E}}_i}{dt} + \sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j & = & 0, \\ 2\mathcal{X}_{\mu,i}\dfrac{d\overline{\mathbf{H}}_i}{dt} - \sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j & = & 0, \end{array} \right. \tag{17}$$

avec :

$$\mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Upsilon_{ij})_{11}\breve{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{12}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{1b_j}\breve{N}_{ij} \\ (\Upsilon_{ij})_{21}\breve{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{22}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{2b_j}\breve{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Upsilon_{ij})_{d_i1}\breve{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{d_i2}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{d_ib_j}\breve{N}_{ij} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{A}_{ij}$ est une matrice $3d_i \times 3b_j$, $\widetilde{\mathbf{H}}_j$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_j$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{3b_j}$, donc $\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j$ et $\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{3d_i}$ ce qui correspond bien au nombre d'équations du système. Pour les autres matrices et vecteurs, on peut se reporter à la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ de la section 2.1 dont on a repris les notations.

### 2.3.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques

Nous sommes donc dans le cas (B), intéressons nous au terme $\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j\psi d\sigma$ dans (16).

Pour tous les autres termes nous effectuons exactement les mêmes remplacements que dans la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$, rappelons que dans ces termes, $\mathbf{W}_i$ (resp. $\mathbf{W}_j$) est la projection de $\mathbf{W}$ sur $\mathbb{Q}_k[c_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[c_j]$) avec $c_i$ (resp. $c_j$) un hexaèdre. Il est important de préciser qu'en revanche dans le terme $\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j\psi d\sigma$, $\mathbf{W}_j$ est la projection de $\mathbf{W}$ sur $\mathbb{P}_p[c_j]$ car $c_j$ est un tétraèdre.

On va donc, dans ce terme, remplacer $\mathbf{W}_j$ par $\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{d_j} \mathbf{E}_{jl}\varphi_{jl} \\ \sum_{l=1}^{d_j} \mathbf{H}_{jl}\varphi_{jl} \end{pmatrix}$ et $\psi$ par $\vartheta_{il}$ pour $1 \leq l \leq b_i$.

Remarquons que ${}^t\Upsilon_{ji} = \displaystyle\int_{a_{ij}} {}^t\theta_i \phi_j d\sigma$ (${}^t\theta_i$ en colonne, $\phi_j$ en ligne) est une matrice rectangulaire $b_i \times d_j$.

Proposons ainsi une expression du système de $6b_i$ équations associé à la formulation hybride dans le cas (B) que l'on vient de présenter :

$$\forall c_i \in \mathcal{Q}_h : \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{W}_{\epsilon,i} \dfrac{d\widetilde{\mathbf{E}}_i}{dt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k} \widetilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \widetilde{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \widetilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \overline{\mathbf{H}}_j = 0, \\ 2\mathcal{W}_{\mu,i} \dfrac{d\widetilde{\mathbf{H}}_i}{dt} - \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k} \widetilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \widetilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j = 0. \end{array} \right. \tag{18}$$

avec :

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{bmatrix} ({}^t\Upsilon_{ji})_{11} \breve{N}_{ij} & ({}^t\Upsilon_{ji})_{12} \breve{N}_{ij} & \cdots & ({}^t\Upsilon_{ji})_{1d_j} \breve{N}_{ij} \\ ({}^t\Upsilon_{ji})_{21} \breve{N}_{ij} & ({}^t\Upsilon_{ji})_{22} \breve{N}_{ij} & \cdots & ({}^t\Upsilon_{ji})_{2d_j} \breve{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ({}^t\Upsilon_{ji})_{b_i 1} \breve{N}_{ij} & ({}^t{}_{ji})_{b_i 2} \breve{N}_{ij} & \cdots & ({}^t\Upsilon_{ji})_{b_i d_j} \breve{N}_{ij} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{B}_{ij}$ est une matrice $3b_i \times 3d_j$, $\overline{\mathbf{H}}_j$ et $\overline{\mathbf{E}}_j$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{3d_j}$, donc $\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j$ et $\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{3b_i}$ ce qui correspond bien au nombre d'équations du système. Pour les autres matrices et vecteurs, on peut se reporter à la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ dont on a repris les notations.

**Remarques** :

- Dans ces deux systèmes d'équations semi-discrétisées, attention à bien distinguer $\overline{\mathbf{E}}_i$ (resp. $\overline{\mathbf{E}}_j$, $\overline{\mathbf{H}}_i$ et $\overline{\mathbf{H}}_j$) de $\widetilde{\mathbf{E}}_i$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_j$, $\widetilde{\mathbf{H}}_i$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_j$ ) dont les définitions sont donnés dans (9) et (13).
- La structure des matrices $\mathcal{A}_{ij}$ et $\mathcal{B}_{ij}$, plus précisément l'ordre dans lequel les indices $i$ et $j$ sont placés, est important.

# 3 Discrétisation en temps

Le choix de la discrétisation en temps est une étape clé pour l'efficacité globale de la méthode numérique. Nous allons utiliser ici des schémas explicites, dont le principal avantage est la facilité de mise en œuvre. En général, il est aussi relativement aisé de construire des schémas explicites d'ordre élevé. En revanche, la stabilité de ces schémas est contrainte par une condition de stabilité qui peut s'avérer parfois très restrictive lorsque le maillage sous-maillage est non-uniforme ou localement raffiné. Parmi ces schémas, les plus utilisés pour la résolution numérique des équations de Maxwell sont les schémas de type Runge-Kutta et le schéma saute-mouton utilisé dans la méthode DFDT.

Des systèmes (17) et (18) de la méthode hybride qui sont désormais des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) locaux, on en déduit les deux schémas saute-mouton du second ordre (sur lesquels nous allons nous appuyer pour la suite), où le champ électrique et et le champ magnétique sont évalués sur une grille en temps décalée :

- Cas (A) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n, \\ \overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \overline{\mathbf{E}}_i^{n} + \dfrac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{X}_{\epsilon,i}\right]^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}}, \end{array}\right. \tag{19}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}} & = & \displaystyle-\sum_{k=1}^{3}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

- Cas (B) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{W}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n, \\ \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n} + \dfrac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{W}_{\epsilon,i}\right]^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}}, \end{array}\right. \tag{20}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}} & = & \displaystyle-\sum_{k=1}^{3}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

# 4 Etude de stabilité

## 4.1 Théorème de Poynting et déroulement de l'étude

Pour notre type de problème, l'étude de stabilité se basera sur un théorème physique, le théorème de Poynting. Ce théorème stipule que l'énergie électromagnétique, dans le vide, en absence de charge et de courant, vérifie la relation :

$$\int_V (\partial_t \mathfrak{E})d\mathbf{x} + \int_{\partial V}\mathbf{P}.\breve{\mathbf{n}}d\sigma = 0,$$

pour tout volume $V$ fermé de frontière $\partial V$ régulière, où $\mathfrak{E}$ est l'énergie électromagnétique et $\mathbf{P}$ est le vecteur de Poynting définis par :

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\left(\epsilon^t\mathbf{E}\mathbf{E} + \mu^t\mathbf{H}\mathbf{H}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}.$$

Pour des conditions aux limites de type métallique $\mathbf{E}\times\breve{\mathbf{n}} = 0$, le théorème de Poynting montre que l'énergie est exactement conservée.

L'étude est alors divisée en deux parties :

- Nous proposons une formulation d'énergie électromagnétique discrète $\mathfrak{E}^n$, et nous vérifions, de façon à être cohérents avec le théorème de Poynting, qu'elle est exactement conservée.

- Nous cherchons ensuite à exhiber une condition suffisante de stabilité en démontrant que l'énergie discrète est une forme quadratique définie positive sous une condition de type CFL sur $\Delta t$. Nous pouvons alors conclure que notre schéma hybride est conditionnellement stable.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats connexes déjà connus à ce jour.

## 4.2 Résultats connus, notations et hypothèses

Nous nous baserons sur l'étude de stabilité de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ proposée dans [FLR06]-[PF03], ou encore celle de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0$ proposée dans [PRF02a], qui nous seront utiles pour faire l'étude de stabilité de notre méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$. Nous allons donc exposer les résultats déjà connus, mais commençons tout d'abord par rappeler/présenter certains points, que nous utiliserons pour l'étude et qui vont nous permettre de comprendre ces résultats :

- Concernant les vecteurs normaux, $\breve{\mathbf{n}}_{ij}$ est le vecteur normal **unitaire** sortant à $a_{ij}$ dirigé de $\tau_i$ vers $\tau_j$. On désigne alors par $\mathbf{n}_{ij} = \displaystyle\int_{a_{ij}} \breve{\mathbf{n}}_{ij} d\sigma$ (et $\mathbf{n}_{ij} = {}^t(n^1_{ij}, n^2_{ij}, n^3_{ij})$) le vecteur normal à $a_{ij}$ dirigé de $\tau_i$ vers $\tau_j$ mais ici **non unitaire**. Le vecteur $\mathbf{n}_{ij}$ est normalisé en $\breve{\mathbf{n}}_{ij}$ c'est-à-dire que l'on a $\breve{\mathbf{n}}_{ij} = \dfrac{\mathbf{n}_{ij}}{\|\mathbf{n}_{ij}\|}$ ($\|.\|$ la norme euclidienne). Ceci implique que $\|\mathbf{n}_{ij}\| = \displaystyle\int_{a_{ij}} 1 d\sigma$, cette valeur correspond ainsi à la longueur de l'arête $a_{ij}$ en 2D ou à l'aire de la face $a_{ij}$ en 3D.
- On note par $|\tau_i| = \displaystyle\int_{\tau_i} 1 d\mathbf{x}$ le volume du tétraèdre (l'aire du triangle en 2D) $\tau_i$ et par $|q_i| = \displaystyle\int_{q_i} 1 d\mathbf{x}$ le volume de l'hexaèdre (l'aire du quadrangle en 2D) $q_i$. Enfin, on pose $p_i = \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{V}_i} \|\mathbf{n}_{ij}\|$, qui correspond à la valeur de l'aire totale (la somme de l'aire des faces) de l'élément $i$ (tétraèdre ou hexaèdre) en 3D (et donc du périmètre en 2D).
- $\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{P}_p[\tau_i])^3$, on note par $\|\mathbf{X}\|_{\tau_i}$ la norme $L^2$ du champ $\mathbf{X}$ sur $\tau_i$, i.e. $\|\mathbf{X}\|^2_{\tau_i} = \displaystyle\int_{\tau_i} \|\mathbf{X}\|^2 d\mathbf{x}$. On utilise la même notation pour définir la norme $L^2$ du champ $\mathbf{X}$ sur la face $a_{ij}$. On admet alors les hypothèses suivantes.

  **Hypothèses 1 :** *On suppose que pour tout tétraèdre $\tau_i$, il existe des constantes $\alpha^\tau_i$ et $\beta^\tau_{ij}$ ($j \in \mathcal{V}_i$), telles que :*

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{P}_p[\tau_i])^3, \quad \|\mathrm{rot}(\mathbf{X})\|_{\tau_i} \leq \frac{\alpha^\tau_i p_i}{|\tau_i|} \|\mathbf{X}\|_{\tau_i}, \\ &\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{P}_p[\tau_i])^3, \quad \|\mathbf{X}\|^2_{a_{ij}} \leq \frac{\beta^\tau_{ij} \|\mathbf{n}_{ij}\|}{|\tau_i|} \|\mathbf{X}\|^2_{\tau_i}. \end{aligned} \tag{21}$$

- $\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{Q}_k[q_i])^3$, on note par $\|\mathbf{X}\|_{q_i}$ la norme $L^2$ du champ $\mathbf{X}$ sur $q_i$, i.e. $\|\mathbf{X}\|^2_{q_i} = \displaystyle\int_{q_i} \|\mathbf{X}\|^2 d\mathbf{x}$. On utilise la même notation pour définir la norme $L^2$ du champ $\mathbf{X}$ sur la face $a_{ij}$. On admet alors les hypothèses suivantes.

  **Hypothèses 2 :** *On suppose que pour tout hexaèdre $q_i$, il existe des constantes $\alpha^q_i$ et $\beta^q_{ij}$ ($j \in \mathcal{V}_i$), telles que :*

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{Q}_k[q_i])^3, \quad \|\mathrm{rot}(\mathbf{X})\|_{q_i} \leq \frac{\alpha^q_i p_i}{|q_i|} \|\mathbf{X}\|_{q_i}, \\ &\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{Q}_k[q_i])^3, \quad \|\mathbf{X}\|^2_{a_{ij}} \leq \frac{\beta^q_{ij} \|\mathbf{n}_{ij}\|}{|q_i|} \|\mathbf{X}\|^2_{q_i}. \end{aligned} \tag{22}$$

**Remarque** : pour présenter la méthode hybride, nous avons appelé toutes les cellules $c_i$. Pour l'étude de stabilité il sera plus clair de garder la notation $\tau_i$ pour les tétraèdres et $q_i$ pour les hexaèdres ; évidemment ces derniers restent tout de même des cellules $c_i$ faisant partie d'un seul et même maillage $\mathcal{C}_h$.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat de l'étude de stabilité de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$. Premièrement, il va de soi qu'il a bien été démontré que l'énergie discrète $\mathfrak{E}^n$ est exactement conservée ($\Delta\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{n+1} - \mathfrak{E}^n = 0$). La condition suffisante de stabilité sur $\Delta t$ que nous appelons alors $\Delta t_\tau$ est alors définie par :

$$\forall i, \forall j \in \mathcal{V}_i : \quad \Delta t_\tau \left[ 2\alpha_i^\tau + \beta_{ij}^\tau \max\left( \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}}, \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}} \right) \right] \; < \; \frac{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{p_i}. \tag{23}$$

Sous cette condition (qui comprend également le traitement des faces frontières métalliques en remplaçant $j$ par $i$), $\mathfrak{E}^n$ est une forme quadratique définie positive.

Enfin, pour réaliser notre étude de stabilité de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$, nous devons tout d'abord dégager un pas de temps, que l'on appelle $\Delta t_q$, pour le schéma $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique. Compte tenu des similitudes de ce schéma avec le schéma $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$, nous pouvons aisément conclure que l'énergie $\mathfrak{E}^n$ (définie différemment mais de forme identique à celle du schéma $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$) est exactement conservée. Et, nous déduisons aussi très facilement la condition suffisante de stabilité sur ce pas de temps $\Delta t_q$ :

$$\forall i, \forall j \in \mathcal{V}_i : \quad \Delta t_q \left[ 2\alpha_i^q + \beta_{ij}^q \max\left( \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}}, \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}} \right) \right] \; < \; \frac{4|q_i|\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{p_i}. \tag{24}$$

Sous cette condition (qui comprend également le traitement des faces frontières métalliques en remplaçant $j$ par $i$), $\mathfrak{E}^n$ est une forme quadratique définie positive.

Le résultat souhaité pour le pas de temps global $\Delta t$, du schéma hybride, est donc $\Delta t = \min(\Delta t_\tau, \Delta t_q)$.

## 4.3 Conservation d'une énergie discrète

Nous introduisons l'énergie discrète $\mathfrak{E}^n$ pour le schéma hybride. Soit $N_\tau$ le nombre de tétraèdres du maillage et $N_q$ le nombre d'hexaèdres, le bilan d'énergie globale est donné par :

$$\mathfrak{E}^n = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{N_\tau} \left( {}^t\overline{\mathbf{E}}_i^n \mathcal{X}_{\epsilon,i} \overline{\mathbf{E}}_i^n + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \mathcal{X}_{\mu,i} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + \sum_{i=1}^{N_q} \left( {}^t\widetilde{\mathbf{E}}_i^n \mathcal{W}_{\epsilon,i} \widetilde{\mathbf{E}}_i^n + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \mathcal{W}_{\mu,i} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right). \tag{25}$$

Nous évaluons la variation d'énergie au cours d'un pas de temps :

$$\begin{aligned} \Delta\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^{n+1} - \mathfrak{E}^n \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{N_\tau} \left( \left( {}^t\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} \mathcal{X}_{\epsilon,i} \overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \mathcal{X}_{\mu,i} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} \right) - \left( {}^t\overline{\mathbf{E}}_i^n \mathcal{X}_{\epsilon,i} \overline{\mathbf{E}}_i^n + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \mathcal{X}_{\mu,i} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) + \right. \\ &\qquad \left. \sum_{i=1}^{N_q} \left( \left( {}^t\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} \mathcal{W}_{\epsilon,i} \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \mathcal{W}_{\mu,i} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} \right) - \left( {}^t\widetilde{\mathbf{E}}_i^n \mathcal{W}_{\epsilon,i} \widetilde{\mathbf{E}}_i^n + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \mathcal{W}_{\mu,i} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (basiques) suivantes :

- Soient $A$ une matrice $n \times m$ et $B$ une matrice $m \times p$ ($n, m, p \in \mathbb{N}$), on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$,
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ vecteurs colonne $\in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a ${}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = {}^t\mathbf{y}\mathbf{x}$,

ainsi que la symétrie de $\mathcal{X}_{\epsilon,i}$ et $\mathcal{X}_{\mu,i}$, nous pouvons remarquer que :

- ${}^t\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}\mathcal{X}_{\epsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} \;-\; {}^t\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\mathcal{X}_{\epsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^{n} \;=\; {}^t\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{X}_{\epsilon,i}\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}-\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right),$
- ${}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} \;-\; {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \;=\; {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}}-\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}+\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}-\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right).$

Par un raisonnement similaire avec les termes dans la somme pour $i = 1, .., N_q$, nous obtenons :

$$\Delta\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left({}^t\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{X}_{\epsilon,i}\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}-\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)+{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}}-\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}+\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}-\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{N_q}\left({}^t\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{W}_{\epsilon,i}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}-\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)+{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{\mu,i}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}}-\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}+\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}-\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\right)\right],$$

puis :

$$\Delta\mathfrak{E} \;=\; \frac{\Delta t}{4}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left({}^t\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}}+{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^{n+1}+\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^{n}\right)\right)+\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{N_q}\left({}^t\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{H},i}^{n+\frac{1}{2}}+{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^{n+1}+\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^{n}\right)\right)\right].$$

Nous allons maintenant remplacer les termes de flux par leurs expressions explicitées dans (19) et (20). Toujours en utilisant les propriétés précédentes et la symétrie des matrices $\mathcal{X}_i^{x_k}$, on remarque que les termes de gradient s'annulent dans la somme pour $i = 1, .., N_\tau$. De la même manière, ceux dans la somme pour $i = 1, .., N_q$ s'annulent également. Il reste donc seulement les termes de sommes sur les ensembles de faces, et nous pouvons réécrire la variation d'énergie sous la forme :

$$\Delta\mathfrak{E} = \frac{\Delta t}{4}\left(R_{int}^{\tau}+R_{met}^{\tau}+R_{int}^{q}+R_{met}^{q}+R_{hyb}^{\tau}+R_{hyb}^{q}\right),$$

avec :

$$\begin{aligned}
R_{int}^{\tau} &= \sum_{i=1}^{N_\tau}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\left[-{}^t\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}+{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right],\\
R_{met}^{\tau} &= \sum_{i=1}^{N_\tau}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\left[-{}^t\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}-{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{im}\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\right],\\
R_{int}^{q} &= \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\left[-{}^t\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}+{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right],\\
R_{met}^{q} &= \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\left[-{}^t\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}-{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{im}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\right],\\
R_{hyb}^{\tau} &= \sum_{i=1}^{N_\tau}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\left[-{}^t\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}+{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right],\\
R_{hyb}^{q} &= \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\left[-{}^t\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}+{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ij}\left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant de nouvelles notations : $\mathscr{T}_d$ désigne l'ensemble de toutes les faces internes communes à deux tétraèdres, du maillage $\mathcal{C}_h$, et $\mathscr{T}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques issues des tétraèdres du maillage. Pareillement, $\mathscr{Q}_d$ désigne l'ensemble de toutes les faces internes du maillage communes à deux hexaèdres, et $\mathscr{Q}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques issues des hexaèdres du maillage. Enfin, nous notons par $\mathscr{H}_d$ l'ensemble de toutes les faces hybrides (communes à un tétraèdre et un hexaèdre) du maillage $\mathcal{C}_h$.

Compte tenu de leurs formes, nous pouvons exprimer $R^\tau_{int}$ comme une somme sur $\mathscr{T}_d$ (en faisant attention de prendre en considération, pour chaque $a_{ij}$, le tétraèdre $\tau_i$ et le tétraèdre $\tau_j$), $R^q_{int}$ comme une somme sur $\mathscr{Q}_d$ (en prenant en considération, pour chaque $a_{ij}$, l'hexaèdre $q_i$ et l'hexaèdre $q_j$), $R^\tau_{met}$ comme une somme sur $\mathscr{T}_m$ et $R^q_{met}$ comme une somme sur $\mathscr{Q}_m$ :

$$\begin{aligned}
R^\tau_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \Big[ {}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\left(-\mathcal{X}_{ij}\right)\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\Big(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + \\
&\qquad {}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\Big)\left(-\mathcal{X}_{ji}\right)\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ji}\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big],\\
R^q_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d} \Big[ {}^t\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\left(-\mathcal{W}_{ij}\right)\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + \\
&\qquad {}^t\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big)\left(-\mathcal{W}_{ji}\right)\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ji}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big],\\
R^\tau_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \Big[ {}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\left(-\mathcal{X}_{im}\right)\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{im}\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big],\\
R^q_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m} \Big[ {}^t\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\left(-\mathcal{W}_{im}\right)\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{im}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Nous utilisons encore une fois les mêmes propriétés basiques, l'antisymétrie de $\mathcal{X}_{ij}$, $\mathcal{X}_{im}$, $\mathcal{W}_{ij}$ et $\mathcal{W}_{im}$ ainsi que les propriétés $\mathcal{X}_{ij} = -\mathcal{X}_{ji}$ et $\mathcal{W}_{ij} = -\mathcal{W}_{ji}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
R^\tau_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \Big[ {}^t\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big) + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\Big(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + \\
&\qquad {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\left(-\mathcal{X}_{ij}\right)\Big(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + {}^t\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\left(-\mathcal{X}_{ij}\right)\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big] \;=\; 0,\\
R^q_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d} \Big[ {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big) + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + \\
&\qquad {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\left(-\mathcal{W}_{ij}\right)\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\left(-\mathcal{W}_{ij}\right)\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big] \;=\; 0,\\
R^\tau_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \Big[ {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{im}\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big) - {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{im}\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big] \;=\; 0,\\
R^q_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m} \Big[ {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{im}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big) - {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{im}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Big] \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Il ne nous reste donc maintenant plus qu'à considérer les termes $R^{\tau}_{hyb}$ et $R^{q}_{hyb}$. Compte tenu de leurs formes, nous pouvons exprimer $R^{\tau}_{hyb}$ et $R^{q}_{hyb}$ comme une somme sur $\mathscr{H}_d$ en posant $R_{hyb} = R^{\tau}_{hyb} + R^{q}_{hyb}$ et en prenant en considération, pour chaque $a_{ij}$, le tetraèdre $\tau_i$ et l'hexaèdre $q_j$ (ce choix est arbitraire, prendre le l'hexaèdre $q_i$ et le tétraèdre $\tau_j$ ne changerait rien) :

$$R^{\tau}_{hyb} + R^{q}_{hyb} \;=\; R_{hyb} \;=\; \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg[ -{}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) \;- \\ {}^t\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big)\mathcal{B}_{ji}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ji}\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\Bigg].$$

En effectuant le même type de manipulation que précédemment, nous avons :

$$R_{hyb} \;=\; \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg[ -{}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) \;- \\ {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\left({}^t\mathcal{B}_{ji}\right)\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + {}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\left({}^t\mathcal{B}_{ji}\right)\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\Bigg].$$

Or, du fait que ${}^t\breve{N}_{ji} = -\breve{N}_{ji} = \breve{N}_{ij}$, nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{B}_{ji} \;&=\; \begin{bmatrix} ({}^t\Upsilon_{ij})_{11}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) & ({}^t\Upsilon_{ij})_{21}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) & \cdots & ({}^t\Upsilon_{ij})_{b_j1}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) \\ ({}^t\Upsilon_{ij})_{12}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) & ({}^t\Upsilon_{ij})_{22}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) & \cdots & ({}^t\Upsilon_{ij})_{b_j2}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ({}^t\Upsilon_{ij})_{1d_i}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) & ({}^t\Upsilon_{ij})_{2d_i}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) & \cdots & ({}^t\Upsilon_{ij})_{b_jd_i}\left({}^t\breve{N}_{ji}\right) \end{bmatrix}, \\ &=\; \begin{bmatrix} (\Upsilon_{ij})_{11}\breve{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{12}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{1b_j}\breve{N}_{ij} \\ (\Upsilon_{ij})_{21}\breve{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{22}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{2b_j}\breve{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Upsilon_{ij})_{d_i1}\breve{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{d_i2}\breve{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{d_ib_j}\breve{N}_{ij} \end{bmatrix} \;=\; \mathcal{A}_{ij}, \end{aligned}$$

et donc :

$$R_{hyb} \;=\; \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg[ -{}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) \;- \\ {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\Big) + {}^t\Big(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\Big)\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\Bigg] \;=\; 0.$$

Ainsi, $R^{\tau}_{int} = R^{\tau}_{met} = R^{q}_{int} = R^{q}_{met} = R_{hyb} = R^{\tau}_{hyb} + R^{q}_{hyb} = 0$ et nous avons bien $\Delta\mathfrak{E} = 0$, donc pour des conditons aux limites de type métallique seulement, l'énergie est exactement conservée, ce qui est cohérent avec le théorème de Poynting.

## 4.4 Condition suffisante de stabilité

Nous allons donc maintenant chercher à minorer l'énergie électromagnétique. Réécrivons tout d'abord $\mathfrak{E}^n$ sous une forme différente :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}^n &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left({}^t\overline{\mathbf{E}}_i^n\,\mathcal{X}_{\epsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^n + {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + \sum_{i=1}^{N_q}\left({}^t\widetilde{\mathbf{E}}_i^n\mathcal{W}_{\epsilon,i}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\epsilon_i\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\,{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n\right) + \right. \\
&\qquad \left.\sum_{i=1}^{N_q}\left(\epsilon_i\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}^2 + \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\,{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n\right)\right],
\end{aligned}
$$

car :

$$
{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} = {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n\right) = \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left({}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n,
$$

et :

$$
{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} = {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n\right) = \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left({}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n.
$$

**Remarque** : il ne faut pas confondre $\mathbf{E}_i^n$ dans $\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$ (resp. $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$ dans $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}$) qui est la projection de $\mathbf{E}$ au temps $n$ (resp. de $\mathbf{H}$ au temps $n-\frac{1}{2}$) sur $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ (donc un vecteur $\in \mathbb{R}^3$) avec $\mathbf{E}_i^n$ dans $\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}$ (resp. $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$ dans $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}$) qui est la projection de $\mathbf{E}$ au temps $n$ (resp. de $\mathbf{H}$ au temps $n-\frac{1}{2}$) sur $\mathbb{Q}_k[q_i]$ (et donc aussi un vecteur $\in \mathbb{R}^3$). Bien distinger également ces derniers de $\overline{\mathbf{E}}_i^n$ (resp. $\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}$) qui est le vecteur $\in \mathbb{R}^{3d_i}$ des degrés de liberté locaux associés à la cellule $\tau_i$ et de $\widetilde{\mathbf{E}}_i^n$ (resp. $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$) qui est le vecteur $\in \mathbb{R}^{3b_i}$ des degrés de liberté locaux associés à la cellule $q_i$. Nous devrons bien faire attention à cette différence dans toute la suite de cette démonstration.

Or :

$$
\begin{aligned}
{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{\mathbf{E},i}^n &= {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{3}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{3}{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n,
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathbf{B}_{\mathbf{E},i}^n &= {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{3}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{3}{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i}{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n.
\end{aligned}
$$

Nous pouvons maintenant vérifier que (démonstration longue, non détaillée ici) :

$$
\sum_{k=1}^{3}{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i^n = -\int_{\tau_i}\left[{}^t\left(\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{E}_i^n + {}^t\left(\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n\right)\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right]d\mathbf{x},
$$

$$
{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n = \int_{a_{ij}}{}^t\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\breve{N}_{ij}\mathbf{E}_j^n d\sigma = \int_{a_{ij}}{}^t\left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right)\breve{\mathbf{n}}_{ij}d\sigma.
$$

Ainsi, en utilisant principalement les hypothèses (21), l'inégalité triangulaire, celle de Cauchy-Schwarz et :

$$\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|\|\mathbf{E}_j^n\| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|^2\right), \tag{26}$$

(quels que soient $i,\ j$ et la norme que l'on utilise), nous pouvons obtenir la minoration suivante de $\xi^\tau = \sum_{k=1}^{3} {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i} {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n$ :

$$\begin{aligned}
\xi^\tau &\geq -|\xi^\tau| \\
&\geq -\left|\int_{\tau_i} {}^t\left(\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{E}_i^n d\mathbf{x}\right| - \left|\int_{\tau_i} {}^t(\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n)\,\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} d\mathbf{x}\right| - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\int_{a_{ij}}\left\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right\|\|\breve{\mathbf{n}}_{ij}\|d\sigma \\
&\geq -\|\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \|\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i} - \\
&\quad \frac{1}{2}\left[\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ij}}^2 + \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{a_{ij}}^2\right)\right],
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\xi^\tau \geq -\frac{2\alpha_i^\tau p_i}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{1}{2}\left[\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\left(\frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ij}^\tau\sqrt{\mu_i}}{|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ji}^\tau\sqrt{\epsilon_j}}{|\tau_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{\tau_j}^2\right)\right].$$

**Remarque** : nous pourrions décomposer la somme sur $\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i$ en une somme sur les faces internes (les termes dans la somme ne changeraient pas) et une somme sur les faces frontières métalliques dans laquelle nous poserions (par convention) : $\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_j} \equiv \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}$, $\|\mathbf{E}_j^n\|_{\tau_j} \equiv \|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$, $|\tau_j| \equiv |\tau_i|$, $\beta_{ji} \equiv \beta_{ij}$, $\epsilon_j \equiv \epsilon_i$ et $\mu_j \equiv \mu_i$.

Maintenant, en vérifiant que (là aussi démonstration longue, non détaillée ici) :

$$\sum_{k=1}^{3} {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n = -\int_{q_i}\left[{}^t\left(\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{E}_i^n + {}^t(\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n)\,\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right]d\mathbf{x},$$

$${}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n = \int_{a_{ij}} {}^t\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\breve{N}_{ij}\mathbf{E}_j^n d\sigma = \int_{a_{ij}} {}^t\left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right)\breve{\mathbf{n}}_{ij}d\sigma.$$

Par le même raisonnement, en utilisant les hypothèses (22), nous pouvons arriver à la minoration de $\xi^q = \sum_{k=1}^{3} {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i} {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n$ :

$$\xi^q \geq -\frac{2\alpha_i^q p_i}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i} - \frac{1}{2}\left[\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i}\left(\frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ij}^q\sqrt{\mu_i}}{|q_i|\sqrt{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2 + \frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ji}^q\sqrt{\epsilon_j}}{|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2\right)\right].$$

**Remarque** : nous pourrions ici aussi décomposer la somme sur $\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i$ en une somme sur $\mathscr{Q}_d^i$ et somme sur $\mathscr{Q}_m^i$ dans laquelle nous poserions par convention : $\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j} \equiv \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}$, $\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j} \equiv \|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}$, $|q_j| \equiv |q_i|$, $\beta_{ji}^q \equiv \beta_{ij}^q$, $\epsilon_j \equiv \epsilon_i$ et $\mu_j \equiv \mu_i$.

On en déduit donc la minoration suivante de l'énergie :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}^n \;\geq\; & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_\tau}\Bigg[\frac{\epsilon_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2+\frac{\mu_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2+\\
& \frac{\Delta t}{2}\Bigg(-\frac{2\alpha_i^\tau}{|\tau_i|}\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}-\\
& \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\beta_{ij}^\tau\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}\|_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2+\frac{\beta_{ji}^\tau\sqrt{\epsilon_j}}{2|\tau_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{\tau_j}^2\right)\Bigg)+\\
& \frac{\Delta t}{2}\left(\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n\right)\Bigg]+\\
& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_q}\Bigg[\frac{\epsilon_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}^2+\frac{\mu_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2+\\
& \frac{\Delta t}{2}\Bigg(-\frac{2\alpha_i^q}{|q_i|}\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}-\\
& \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\beta_{ij}^q\sqrt{\mu_i}}{2|q_i|\sqrt{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2+\frac{\beta_{ji}^q\sqrt{\epsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2\right)\Bigg)+\\
& \frac{\Delta t}{2}\left(\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{27}
$$

**Remarques** :

- Dans la somme pour $i=1,..,N_\tau$ qui concerne les tétraèdres,
  $p_i=\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|=\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|$,
- Dans la somme pour $i=1,..,N_q$ qui concerne les hexaèdres,
  $p_i=\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|=\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|$.

Nous réécrivons cette minoration (27) de $\mathfrak{E}^n$ sous la forme :

$$\mathfrak{E}^n \;\geq\; \frac{1}{2}\left(S_{int}^\tau+S_{met}^\tau+S_{int}^q+S_{met}^q+S_{hyb}^\tau+S_{hyb}^q\right),$$

avec :

$$
\begin{aligned}
S^{\tau}_{int} &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[ \frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{\tau_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ji}\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{4|\tau_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|^2_{\tau_j}\right], \\
S^{\tau}_{met} &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[ \frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{\tau_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i}\right], \\
S^{q}_{int} &= \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[ \frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\epsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{q_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{q}_i\Delta t}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i} - \frac{\beta^{q}_{ji}\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|^2_{q_j}\right], \\
S^{q}_{met} &= \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[ \frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{q_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{q}_i\Delta t}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|q_i|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i}\right], \\
S^{\tau}_{hyb} &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left( \frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i} + \frac{\mu_i}{p_i}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{\tau_i} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}\right) + \frac{\Delta t}{2}\, {}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n, \\
S^{q}_{hyb} &= \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left( \frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i} + \frac{\mu_i}{p_i}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{q_i} - \frac{\alpha^{q}_i\Delta t}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}\right) + \frac{\Delta t}{2}\, {}^t\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n.
\end{aligned}
$$

Maintenant, en appliquant (26) à $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$ dans $S^{\tau}_{int}$ et $S^{\tau}_{met}$, et en sommant sur $\mathscr{T}_d$ et $\mathscr{T}_m$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
S^{\tau}_{int} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \|\mathbf{n}_{ij}\| T^{\tau}_{int}, \\
S^{\tau}_{met} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \|\mathbf{n}_{ij}\| T^{\tau}_{met},
\end{aligned}
$$

avec :

$$T^{\tau}_{int} = \left(\frac{\epsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{\tau_i} +$$
$$\left(\frac{\epsilon_j}{p_j} - \frac{\beta^{\tau}_{ji}\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{4|\tau_j|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_j\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{2|\tau_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\|\mathbf{E}^n_j\|^2_{\tau_j} + \left(\frac{\mu_j}{p_j} - \frac{\beta^{\tau}_{ji}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|\tau_j|\sqrt{\epsilon_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_j\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|\tau_j|\sqrt{\epsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|^2_{\tau_j},$$

$$T^{\tau}_{met} = \left(\frac{\epsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{\tau_i}.$$

Et en appliquant encore (26) mais à $\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|_{q_i}\|\mathbf{E}^n_i\|_{q_i}$ dans $S^q_{int}$ et $S^q_{met}$, et en sommant sur $\mathscr{Q}_d$ et $\mathscr{Q}_m$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S^q_{int} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^q_{int}, \\ S^q_{met} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^q_{met}, \end{aligned}$$

avec :

$$T^q_{int} = \left(\frac{\epsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^q_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|q_i|\sqrt{\mu_j}} - \frac{\alpha^q_i\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|q_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^q_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\epsilon_j}} - \frac{\alpha^q_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|q_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{q_i} +$$
$$\left(\frac{\epsilon_j}{p_j} - \frac{\beta^q_{ji}\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^q_j\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\|\mathbf{E}^n_j\|^2_{q_j} + \left(\frac{\mu_j}{p_j} - \frac{\beta^q_{ji}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|q_j|\sqrt{\epsilon_i}} - \frac{\alpha^q_j\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|q_j|\sqrt{\epsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|^2_{q_j},$$

$$T^q_{met} = \left(\frac{\epsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^q_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|q_i|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^q_i\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|q_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^q_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\epsilon_i}} - \frac{\alpha^q_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|q_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{q_i}.$$

Enfin, compte tenu de leurs formes, nous pouvons exprimer $S^{\tau}_{hyb}$ et $S^q_{hyb}$ comme une somme sur $\mathscr{H}_d$ en les additionnant et en prenant en considération par choix arbitraire, pour chaque $a_{ij}$, le tetraèdre $\tau_i$ et l'hexaèdre $q_j$ (prendre le l'hexaèdre $q_i$ et le tétraèdre $\tau_j$ ne changerait rien) :

$$\begin{aligned} S^{\tau}_{hyb} + S^q_{hyb} \quad = \quad \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg[ & \|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\epsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{\tau_i} + \frac{\mu_i}{p_i}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{\tau_i} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}^n_i\|_{\tau_i}\right) + \\ & \frac{\Delta t}{2}\,{}^t\overline{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}^n_j + \\ & \|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\epsilon_j}{p_j}\|\mathbf{E}^n_j\|^2_{q_j} + \frac{\mu_j}{p_j}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|^2_{q_j} - \frac{\alpha^q_j\Delta t}{|q_j|}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|_{q_j}\|\mathbf{E}^n_j\|_{q_j}\right) + \\ & \frac{\Delta t}{2}\,{}^t\widetilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_j\mathcal{B}_{ji}\overline{\mathbf{E}}^n_i\Bigg]. \end{aligned} \tag{28}$$

Ensuite, en remarquant que :

$${}^t\overline{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}^n_j = \int_{a_{ij}}{}^t\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\breve{N}_{ij}\mathbf{E}^n_j d\sigma = \int_{a_{ij}}{}^t\left(\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i \times \mathbf{E}^n_j\right)\breve{\mathbf{n}}_{ij}d\sigma.$$

où $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$ est ici bien la projection de $\mathbf{H}$ au temps $n-\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ alors que $\mathbf{E}_j^n$ est la projection de $\mathbf{E}$ au temps $n$ sur $\mathbb{Q}_k[q_j]$), et en se servant principalement de l'inégalité triangulaire, de celle de Cauchy-Schwarz, de (26), et de (21) et (22), nous avons :

$$\begin{aligned}
{}^t\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n &\geq -\left|\int_{a_{ij}} {}^t\left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right)\breve{\mathbf{n}}_{ij}d\sigma\right| \\
&\geq -\int_{a_{ij}}\left\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right\|\|\breve{\mathbf{n}}_{ij}\|d\sigma \\
&\geq -\int_{a_{ij}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|\|\mathbf{E}_j^n\|d\sigma \\
&\geq -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ij}}^2+\sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{a_{ij}}^2\right) \\
&\geq -\frac{1}{2}\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\beta_{ij}^\tau\sqrt{\mu_i}}{|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2+\frac{\beta_{ji}^q\sqrt{\epsilon_j}}{|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2\right).
\end{aligned}$$

En remarquant également que :

$${}^t\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ji}\overline{\mathbf{E}}_i^n = {}^t\left(\mathcal{B}_{ji}\overline{\mathbf{E}}_i^n\right)\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}} = {}^t\overline{\mathbf{E}}_i^n\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}} = \int_{a_{ij}} {}^t\left(\mathbf{E}_i^n\times\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\right)\breve{\mathbf{n}}_{ij}d\sigma,$$

où $\mathbf{E}_i^n$ est ici la projection de $\mathbf{E}$ au temps $n$ sur $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ alors que $\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}$ est la projection de $\mathbf{H}$ au temps $n-\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{Q}_k[q_j]$), nous avons aussi par un raisonnement similaire :

$$\begin{aligned}
{}^t\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{ji}\overline{\mathbf{E}}_i^n &\geq -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_j}}\|\mathbf{E}_i^n\|_{a_{ij}}^2+\sqrt{\frac{\mu_j}{\epsilon_i}}\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ij}}^2\right) \\
&\geq -\frac{1}{2}\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\beta_{ij}^\tau\sqrt{\epsilon_i}}{|\tau_i|\sqrt{\mu_j}}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2+\frac{\beta_{ji}^q\sqrt{\mu_j}}{|q_j|\sqrt{\epsilon_i}}\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j}^2\right).
\end{aligned}$$

On utilise alors ces deux minorations dans (28) ainsi que l'inégalité (26) que nous appliquons à $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$ et $\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j}\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}$, ce qui nous donne ainsi :

$$S_{hyb}^\tau+S_{hyb}^q \geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{hyb},$$

avec :

$$\begin{aligned}
T_{hyb} = &\left(\frac{\epsilon_i}{p_i}-\frac{\beta_{ij}^\tau\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}}-\frac{\alpha_i^\tau\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \left(\frac{\mu_i}{p_i}-\frac{\beta_{ij}^\tau\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}-\frac{\alpha_i^\tau\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \\
&\left(\frac{\epsilon_j}{p_j}-\frac{\beta_{ji}^q\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}}-\frac{\alpha_j^q\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2 + \left(\frac{\mu_j}{p_j}-\frac{\beta_{ji}^q\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|q_j|\sqrt{\epsilon_i}}-\frac{\alpha_j^q\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|q_j|\sqrt{\epsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j}^2
\end{aligned}$$

Au final, nous arrivons à la minoration de l'énergie électromagnétique suivante :

$$\mathfrak{E}^n \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^\tau_{int}+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^\tau_{met}+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^q_{int}+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^q_{met}+\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{hyb}\right).$$

Pour avoir $\mathfrak{E}^n > 0$, il suffit que $T^\tau_{int}$, $T^\tau_{met}$, $T^q_{int}$, $T^q_{met}$ et $T_{hyb}$ soient strictement positifs (en supposant $\overline{\mathbf{E}}^n_i$ et $\overline{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i$ non tous nuls pour $i = 1, 2, .., N_\tau$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^n_i$ et $\widetilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i$ non tous nuls pour $i = 1, 2, .., N_q$) :

- Pour $T^\tau_{int}$ et $T^\tau_{met}$, il suffit que $\Delta t$ soit tel que :

$$\forall i,\ \forall j\in\mathcal{V}_i\ :\ \begin{cases}\dfrac{\epsilon_i}{p_i}-\dfrac{\beta^\tau_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}}-\dfrac{\alpha^\tau_i\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}>0,\\[2ex] \dfrac{\mu_i}{p_i}-\dfrac{\beta^\tau_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}-\dfrac{\alpha^\tau_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}}>0,\end{cases}$$

$$\iff\ \forall i,\ \forall j\in\mathcal{V}_i\ :\ \begin{cases}\dfrac{4|\tau_i|}{p_i}>\dfrac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_i\mu_i}}\left(\beta^\tau_{ij}\sqrt{\dfrac{\mu_i}{\mu_j}}+2\alpha^\tau_i\right),\\[2ex] \dfrac{4|\tau_i|}{p_i}>\dfrac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_i\mu_i}}\left(\beta^\tau_{ij}\sqrt{\dfrac{\epsilon_i}{\epsilon_j}}+2\alpha^\tau_i\right),\end{cases}$$

  et enfin, nous appelons $\Delta t_\tau$ le $\Delta t$ recherché, qui est défini de la façon suivante :

$$\forall i,\ \forall j\in\mathcal{V}_i:\quad \Delta t_\tau\left[2\alpha^\tau_i+\beta^\tau_{ij}\max\left(\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}},\sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}}\right)\right]\ <\ \frac{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i\mu_i}}{p_i}.$$

  **Remarque** : cette condition comprend également le traitement des faces frontières métalliques ($T^\tau_{met} > 0$) avec la convention que $j$ est remplacé par $i$.
  Donc si nous prenons un tel $\Delta t_\tau$, alors nous aurons $T^\tau_{int} > 0$ et $T^\tau_{met} > 0$. Nous pouvons remarquer que ce $\Delta t_\tau$ correspond exactement à celui de l'étude de stabilité de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ en maillage tétraédrique défini par (23).

- De la même manière pour $T^q_{int}$ et $T^q_{met}$, il suffit que $\Delta t$, que nous appelons $\Delta t_q$, soit tel que :

$$\forall i,\ \forall j\in\mathcal{V}_i:\quad \Delta t_q\left[2\alpha^q_i+\beta^q_{ij}\max\left(\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j}},\sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}}\right)\right]\ <\ \frac{4|q_i|\sqrt{\epsilon_i\mu_i}}{p_i}.$$

  **Remarque** : cette condition comprend également le traitement des faces frontières métalliques ($T^q_{met} > 0$) avec la convention que $j$ est remplacé par $i$.
  Donc si nous prenons un tel $\Delta t_q$, alors nous aurons $T^q_{int} > 0$ et $T^q_{met} > 0$. Nous pouvons remarquer que ce $\Delta t_q$ correspond exactement à celui de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique défini par (24).

- Pour $T_{hyb}$ il suffit de trouver un $\Delta t$ tel que les expressions :

$$\left(\frac{\epsilon_i}{p_i}-\frac{\beta^\tau_{ij}\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}}-\frac{\alpha^\tau_i\Delta t\sqrt{\epsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\quad,\quad\left(\frac{\mu_i}{p_i}-\frac{\beta^\tau_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\epsilon_j}}-\frac{\alpha^\tau_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\epsilon_i}}\right),$$

$$\left(\frac{\epsilon_j}{p_j}-\frac{\beta^q_{ji}\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}}-\frac{\alpha^q_j\Delta t\sqrt{\epsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\quad,\quad\left(\frac{\mu_j}{p_j}-\frac{\beta^q_{ji}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|q_j|\sqrt{\epsilon_i}}-\frac{\alpha^q_j\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|q_j|\sqrt{\epsilon_j}}\right),$$

soient strictement positives. Nous remarquons que l'on retrouve les deux premières dans $T^{\tau}_{int}$, donc pour que celles-ci soient strictement positives il suffit de prendre $\Delta t_\tau$ comme pas de temps. Regardons maintenant les deux suivantes, nous voyons clairement qu'il suffit de prendre $\Delta t_q$ comme pas de temps pour que ces deux expressions soient strictement positives (en les écrivant sur l'hexaèdre $q_i$, c'est-à-dire en inversant simplement $i$ et $j$). Ainsi pour s'assurer que $T_{hyb}$ est strictement positif, il suffit de prendre un pas de temps égal au minimum entre $\Delta t_\tau$ et $\Delta t_q$.

Au final, en notant $\Delta t$ le pas de temps global, la condition suffisante de stabilité est définie par :

$$\Delta t = \min(\Delta t_\tau, \Delta t_q). \tag{29}$$

Sous cette condition et sous les hypothèses définies dans (21) et (22), $\mathfrak{E}^n$ est une forme quadratique définie positive, c'est-à-dire que nous avons bien :

$\mathfrak{E}^n \ \geq \ 0 \ (\forall\, \overline{\mathbf{E}}_i^n,\ \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}},\ i = 1,..,N_\tau \ \text{ et } \forall\, \widetilde{\mathbf{E}}_i^n,\ \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}},\ i = 1,..,N_q$ et

$\mathfrak{E}^n = 0 \Longrightarrow (\forall\, i = 1,..,N_\tau,\ \overline{\mathbf{E}}_i^n = 0,\ \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} = 0 \ \text{ et } \forall\, i = 1,..,N_q,\ \widetilde{\mathbf{E}}_i^n = 0,\ \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} = 0).$

# 5 Etude numérique 2D

## 5.1 Préambule et quelques précisions sur l'étude

Nous présentons des résultats d'expériences numériques en deux dimensions d'espace. Nous considérons le cas des ondes transverses magnétiques TM$_z$ pour lesquelles $\mathbf{H}(x_1, x_2, t) \equiv {}^t(H_x(x_1, x_2, t),\ H_y(x_1, x_2, t),\ 0)$ et $\mathbf{E}(x_1, x_2, t) \equiv {}^t(0, 0, E_z(x_1, x_2, t))$ (remarque : $H_x = H_1,\ H_y = H_2,\ E_z = E_3$).

Ainsi, les équations de Maxwell 2D en mode TM$_z$ s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \epsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial t} - \dfrac{\partial H_y}{\partial x_1} + \dfrac{\partial H_x}{\partial x_2} & = & 0, \\ \mu\dfrac{\partial H_x}{\partial t} + \dfrac{\partial E_z}{\partial x_2} & = & 0, \\ \mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x_1} & = & 0. \end{array}\right.$$

Le cas test que nous étudions est celui de l'évolution d'un mode dans une cavité métallique carrée dont la solution exacte est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} H_x(x_1, x_2, t) & = & -\dfrac{\pi}{\omega}\sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2)\sin(\omega t), \\ H_y(x_1, x_2, t) & = & \dfrac{\pi}{\omega}\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\omega t), \\ E_z(x_1, x_2, t) & = & \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos(\omega t), \end{array}\right.$$

où $\omega = 2\pi f$, et $f$ la fréquence. L'intérêt de ce cas test est double : il autorise les simulations en temps long et l'énergie de la solution exacte est conservée. Mais ce cas test reste simple, les maillages utilisés sont structurés et conformes, il s'agit alors de résultats préliminaires à une étude numérique plus complète.

Conformément au schéma d'intégration en temps adopté dans la section 3, on initialise $H_x$ et $H_y$ à $t = \frac{\Delta t}{2}$, et $E_z$ à $t = 0$. Par ailleurs, pour l'approximation des composantes du champ électromagnétique dans un élément du maillage, nous utilisons une interpolation de Lagrange classique où les fonctions des bases locales $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[q_i]$) sont définies par $\varphi_{il}(\mathbf{x}^m) = \delta_{lm}$ (resp. $\vartheta_{il}(\mathbf{x}^m) = \delta_{lm}$), avec $1 \leq l, m \leq d_i$ (resp. $1 \leq l, m \leq b_i$), $\delta_{lm}$ le symbole de Kronecker et $\mathbf{x}^m$ le $m$-ième noeud du triangle $\tau_i$ (resp. quadrangle $q_i$).

Précisons que dans notre mise en œuvre de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ nous stockons toutes les matrices élémentaires (de masse, de gradient et de surface) sur un élément de référence et nous exprimons les matrices sur les éléments physiques en fonction des matrices stockées par un lien simple à l'aide d'une transformation qui associe l'élément de référence aux éléments physiques (et en utilisant des formules de changement de variables pour les intégrales contenues dans les matrices). Or, afin de pouvoir faire cela, il est nécessaire que cette transformation soit affine. Pour les triangles (celui de référence est le triangle isocèle rectangle dont les sommets sont respectivement $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$), c'est toujours le cas. Pour les quadrangles (celui de référence est le carré dont les sommets sont respectivement $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$), cette transformation n'est pas affine dans le cas général (seulement bilinéaire). Pour qu'elle le soit, il suffit que les quadrangles soient des rectangles, ainsi la transformation associe le carré de référence à des rectangles, sans rotation.

Nous commençons par exposer les résultats numériques obtenus avec la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$, pour deux types de maillages hybrides différents Nous comparons ensuite ces résultats avec ceux obtenus avec la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ en maillage triangulaire et avec la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage quadrangulaire.

## 5.2 Résultats pour un premier type de maillage hybride

Nous faisons donc les tests de cette méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$ pour $p = 0, .., 2$ et $k = 0, .., 2$. Nous présentons tout d'abord sur la figure 3 les maillages utilisés qui correspondent ici à des discrétisations $11 \times 11$, $21 \times 21$ et $41 \times 41$ du carré unité.

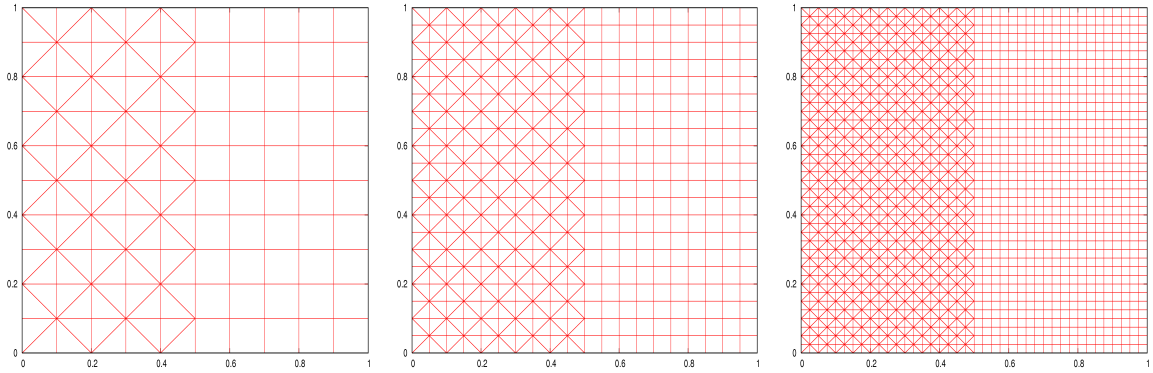


FIGURE 3 – Premier type de maillage hybride

On montre sur la figure 4 l'évolution de l'erreur au cours du temps (temps final $t_{max} = 3.34 \times 10^{-7}$ s) pour le maillage basé sur la discrétisation $11 \times 11$. Nous pouvons déjà constater que les erreurs les plus faibles sont obtenues pour les hybridations $\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$. Mais pour ce maillage l'erreur reste en général, comme nous pouvons nous y attendre, assez importante. La figure 5 montre les résultats correspondants pour le maillage basé sur la discrétisation $21 \times 21$. Les hybridations offrant la meilleure précision restent les mêmes et l'erreur diminue bien d'une manière générale. On peut vérifier sur la figure 6 que c'est toujours le cas pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$. L'erreur a encore diminué et devient désormais relativement faible, ce qui laisse penser que la méthode converge numériquement en $h$ (c'est-à-dire en raffinant le maillage). Pour l'instant, nous nous contentons d'observer que les meilleures précisions sont pour les cas $\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ et logiquement $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$.

Pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$ points, nous montrons sur la figure 7 le graphique de l'évolution de l'énergie discrète au cours du temps, montrant que celle-ci est bien conservée (elle l'est également pour les autres raffinements). On visualise également sur la figure 8 les évolutions en temps de la composante $E_z$ de la solution exacte et de la solution numérique au point de visualisation fixé en $(0.5, 0.5)$, pour un intervalle de temps $t \in [3.20 \times 10^{-7}; 3.34 \times 10^{-7}]$.

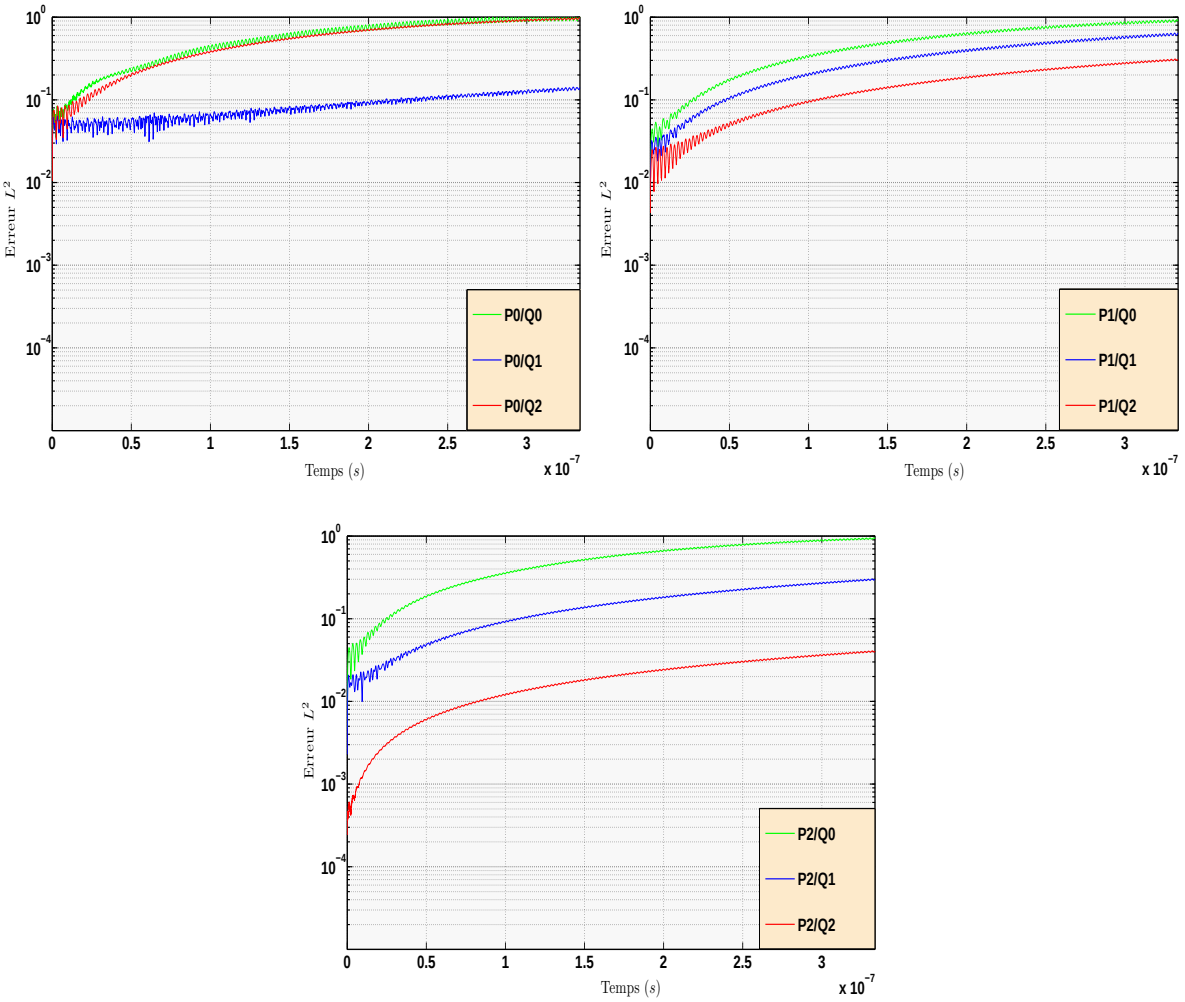


FIGURE 4 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage basé sur la discrétisation $11 \times 11$

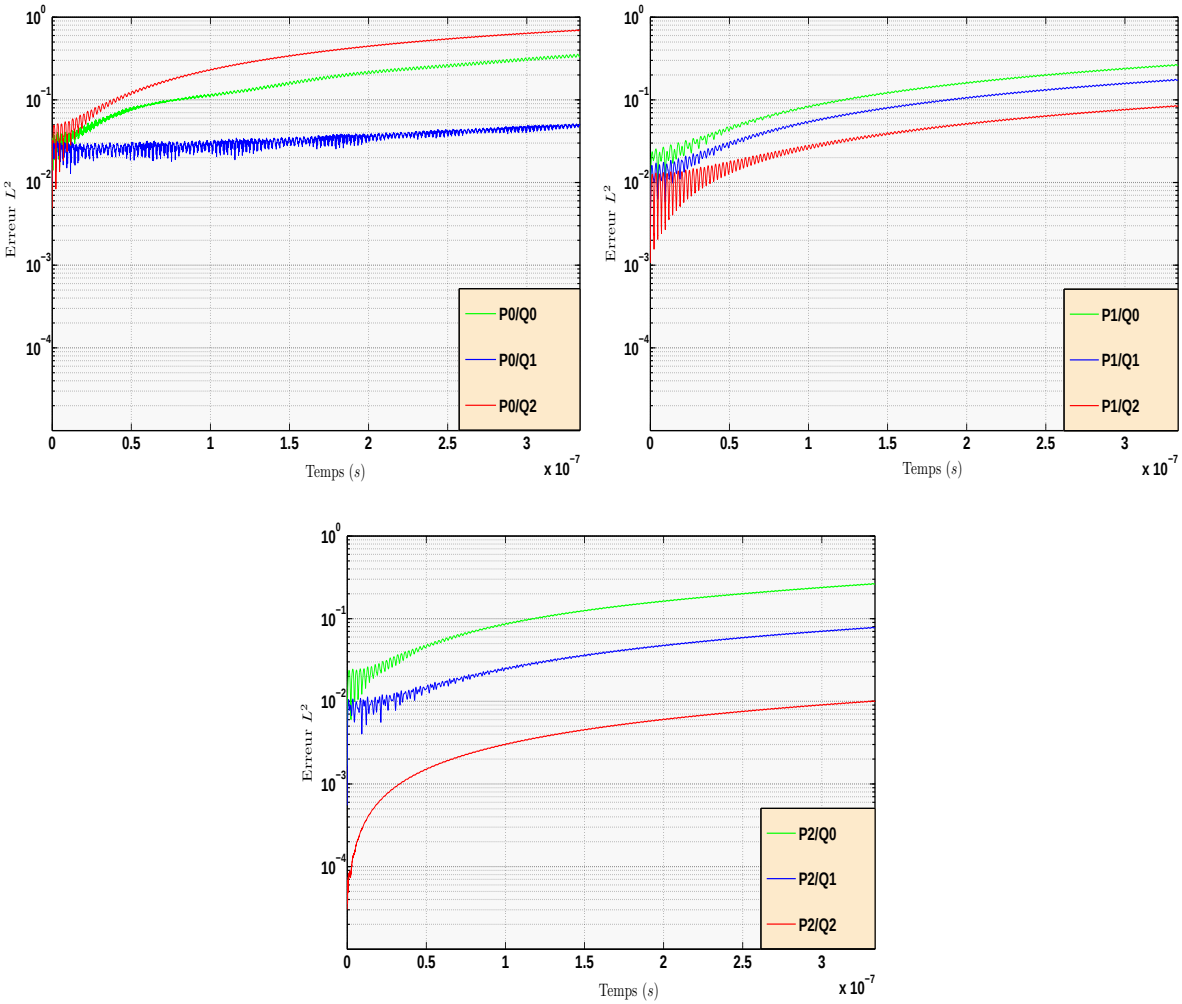


FIGURE 5 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage basé sur la discrétisation $21 \times 21$

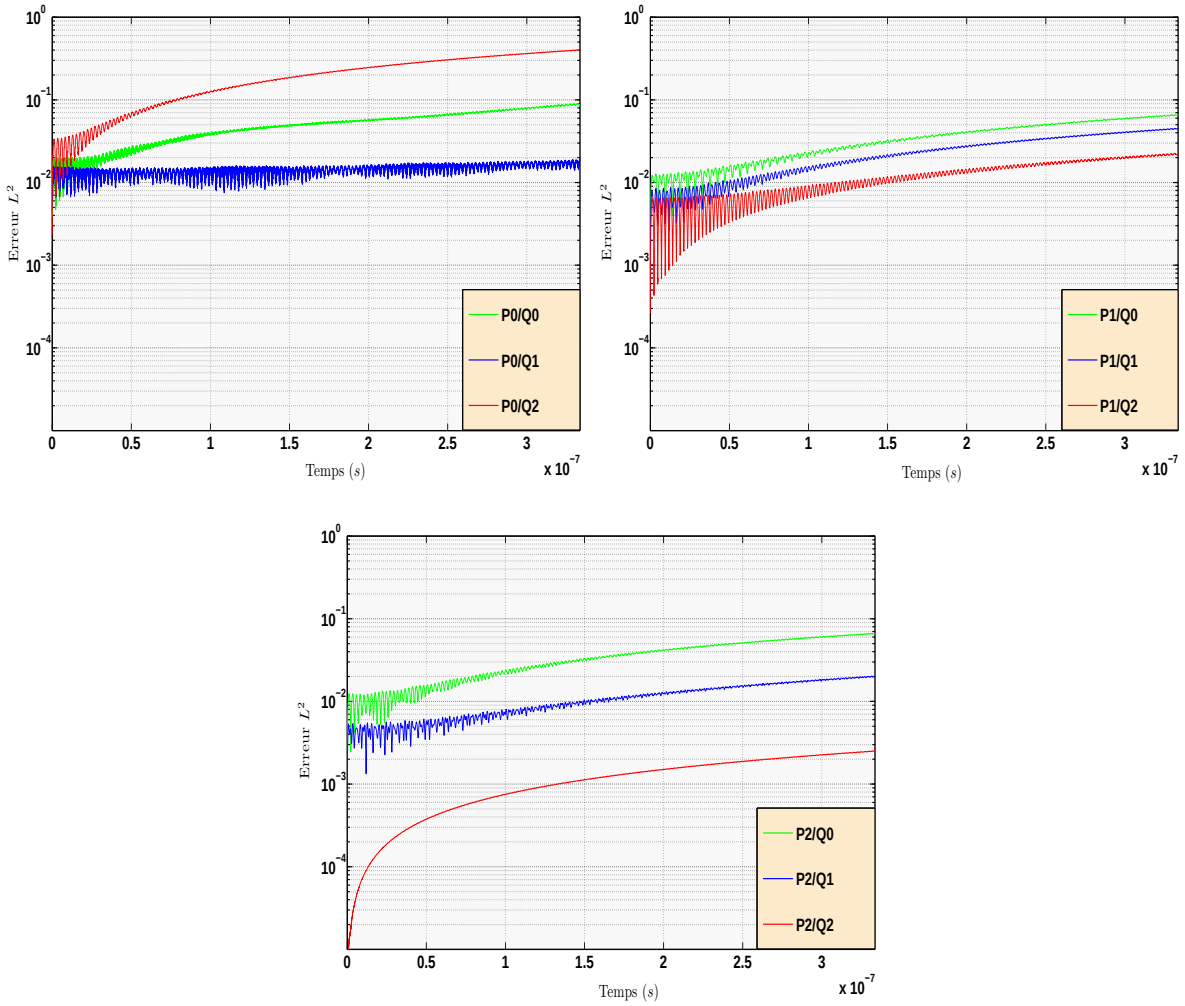


FIGURE 6 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$

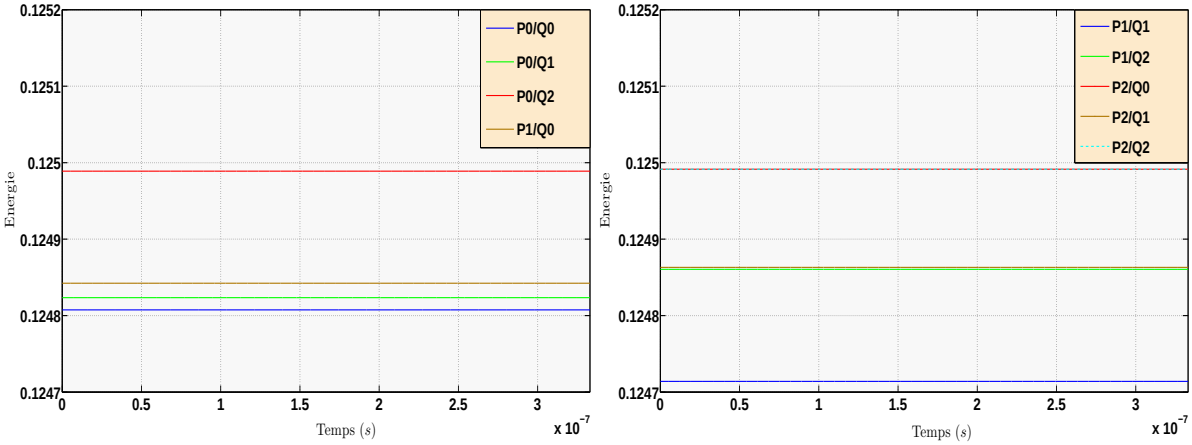


FIGURE 7 – Evolution de l'énergie discrète pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$

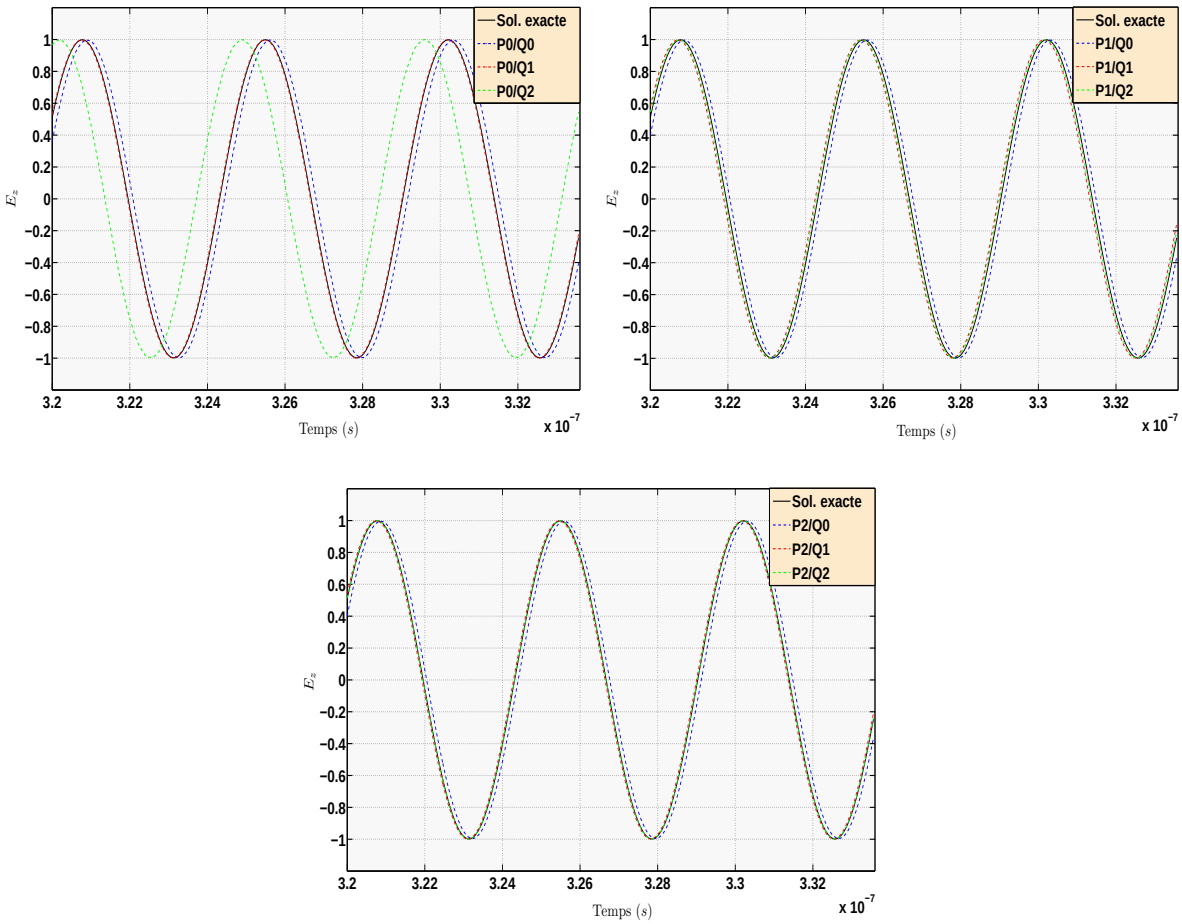


FIGURE 8 – Evolution de la composante $E_z$ au point de visualisation $(0.5, 0.5)$ pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$

On note sur les courbes de la figure 8 un déphasage plus ou moins important selon les cas mais pas de dissipation. Enfin, pour chaque maillage et pour chaque hybridation, on présente dans la table 1 les temps de calcul nécessaires, le nombre de degrés de liberté total et l'erreur au temps final $t_{max}$.

| **Raffinement : $11 \times 11$** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ | 0.3 s | 150 | $9.85 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ | 1.0 s | 300 | $1.41 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ | 4.5 s | 550 | $9.73 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ | 1.3 s | 350 | $8.88 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ | 1.9 s | 500 | $6.38 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ | 5.5 s | 750 | $3.09 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ | 5.3 s | 650 | $9.28 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ | 6.3 s | 800 | $3.00 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ | 9.2 s | 1050 | $4.07 \times 10^{-2}$ |
| **Raffinement : $21 \times 21$** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ | 1.6 s | 600 | $3.29 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ | 6.6 s | 1200 | $5.05 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ | 34.0 s | 2200 | $7.00 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ | 9.5 s | 1400 | $2.60 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ | 13.7 s | 2000 | $1.75 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ | 41.8 s | 3000 | $8.50 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ | 40.4 s | 2600 | $2.62 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ | 47.7 s | 3200 | $7.81 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ | 70.0 s | 4200 | $1.02 \times 10^{-2}$ |
| **Raffinement : $41 \times 41$** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ | 11.8 s | 2400 | $8.80 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ | 50.7 s | 4800 | $1.82 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ | 262.0 s | 8800 | $4.02 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ | 74.0 s | 5600 | $6.58 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ | 108.0 s | 8000 | $4.51 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ | 330.0 s | 12000 | $2.28 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ | 318.0 s | 10400 | $6.62 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ | 378.0 s | 12800 | $2.03 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ | 558.0 s | 16800 | $2.70 \times 10^{-3}$ |

TABLE 1 – Temps CPU, nombre de degrés de liberté total et erreur à $t_{max}$ pour un premier type de maillage hybride, en fonction de chaque hybridations et pour trois raffinements différents

Nous avons pu observer pour ce premier type de maillage hybride que la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ offre la meilleure précision. Cependant, le temps de calcul, notamment pour le raffinement $41 \times 41$ est assez long. Les hybridations $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ offrent également une très bonne précision avec des temps de calcul moindres. Nous remarquons aussi que les hybridations $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ sont sensiblement moins précises. Pour compléter ces résultats et premières impressions, nous considérons maintenant un second type de maillage hybride.

## 5.3 Résultats pour un second type de maillage hybride

Le second type de maillage est représentatif d'une situation pour laquelle une zone correspondant à un objet à géométrie complexe est maillée à l'aide de triangles alors que des quadrangles sont utilisés pour discrétiser

l'espace libre envionnant. Nous visualisons sur la figure 9 les maillages utilisés qui correspondent ici à des discrétisations $11 \times 11$, $21 \times 21$ et $41 \times 41$ du carré unité.

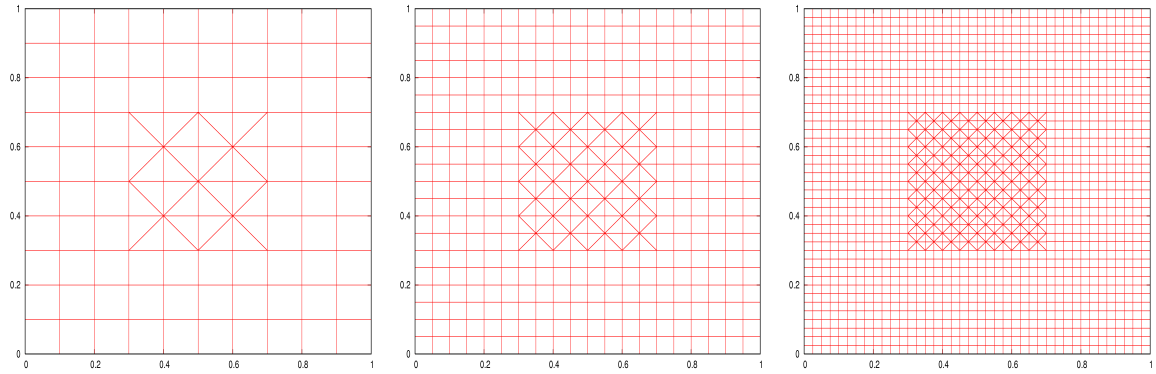

FIGURE 9 – Second type de maillage hybride

On montre sur la figure 10 l'évolution de l'erreur au cours du temps (temps final $t_{max} = 3.34 \times 10^{-7}$ s) pour le maillage basé sur la discrétisation $11 \times 11$. Nous pouvons déjà constater pour ce type de maillage, que les erreurs les plus faibles sont maintenant obtenues pour les hybridations $\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$. Mais comme précédemment, pour ce maillage l'erreur reste en général assez importante. La figure 11 montre les résultats correspondants pour le maillage basé sur la discrétisation $21 \times 21$. Les hybridations offrant la meilleure précision restent les mêmes mis à part l'erreur pour le cas $\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ qui devient plus grande que pour $\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ (plus de faces hybrides, donc plus de sauts entre le $\mathbb{P}_0$ et le $\mathbb{Q}_2$ qui sont plus importants que ceux entre le $\mathbb{P}_0$ et le $\mathbb{Q}_1$). On peut vérifier sur la figure 12 (maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$) que l'erreur a encore diminué et devient désormais relativement faible. Nous observons que les meilleures précisions sont obntenues pour les hybridations $\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ et logiquement $\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$.

Pour le maillage basé sur la discrétisation raffinement $41 \times 41$ points, nous montrons sur la figure 7 le graphique de l'évolution de l'énergie discréte au cours du temps, montrant que celle-ci est bien conservée (elle l'est également pour les autres raffinements) On visualise également sur la figure 8 les évolutions en temps de la composante $E_z$ de la solution exacte et de la solution numérique au point de visualisation fixé en $(0.5, 0.5)$, pour un intervalle de temps $t \in [3.20 \times 10^{-7}; 3.34 \times 10^{-7}]$. Enfin, pour chaque maillage et pour chaque hybridation, on présente dans la table 2 les temps de calcul nécessaires, le nombre de degrés de liberté total et l'erreur au temps final $t_{max}$.

Nous observons que pour ce second type de maillage hybride, la configuration $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ offre là aussi la meilleure précision, mais le temps de calcul reste long. L'hybridation $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ semble pour les deux types de maillages hyrides donner de bons résultats avec un temps de calcul faible. Malgrè cela, notre motivation d'obtenir une très bonne précision sur les triangles risquerait d'être compromise avec des maillages plus complexes (l'ordre 0 sur les triangles serait probablement insuffisant). Les hybridations $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$, $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$, $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ et $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ offrent clairement, pour les deux types de maillageconsidérés, les moins bons compromis précisison/temps de calcul. Le cas $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ donne des résultats intéressants pour les deux types de maillages, un temps de calcul faible avec une erreur correcte mais tout de même plus élevée que pour les cas $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$. Ces deux dernières hybridation se démarquent dans nos tests ; elles offrent une excellente précision, des temps calcul bien réduits par rapport aux configurations $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$, et peuvent s'adapter à des maillages moins réguliers. Toujours par rapport à notre objectif d'avoir le plus de précision possible sur les triangles, l'hybridation $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ semble alors prometteuse, pour ce second type de maillage hybride qui correspond d'avantage à nos motivations, le temps de calcul est de plus intéressant (environ 4 minutes pour la discrétisation $41 \times 41$).

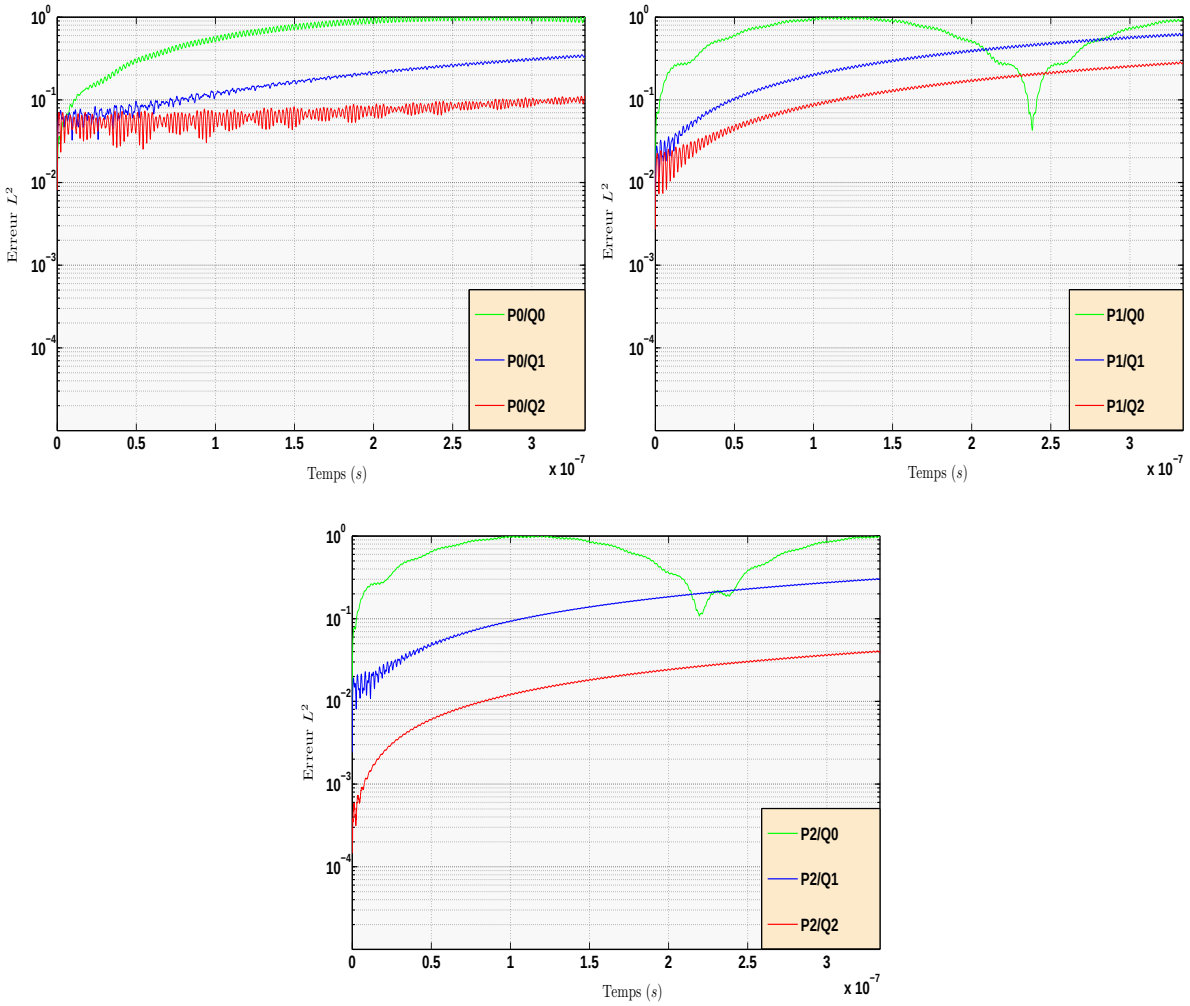


FIGURE 10 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage basé sur la discrétisation $11 \times 11$

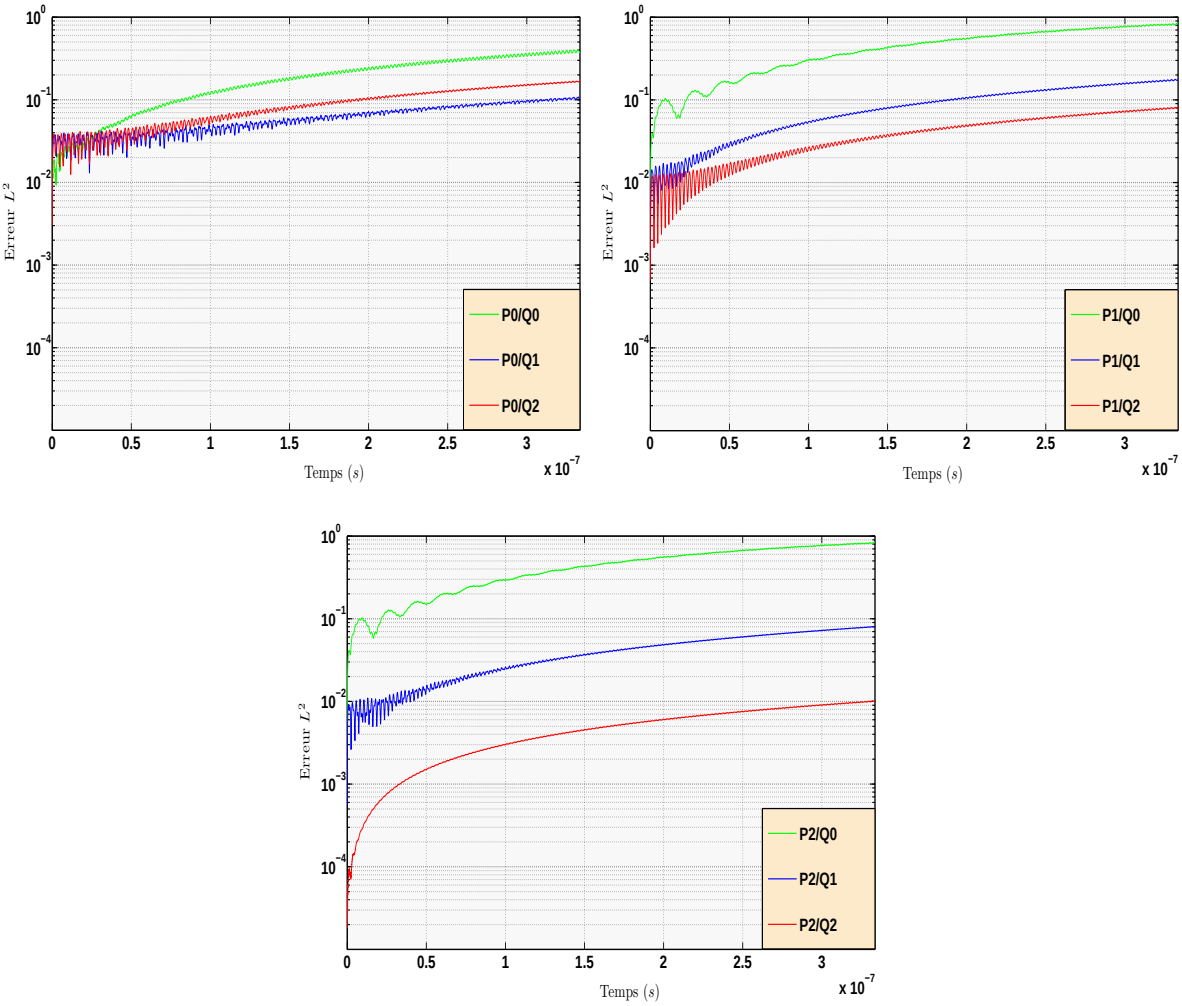


FIGURE 11 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage basé sur la discrétisation $21 \times 21$

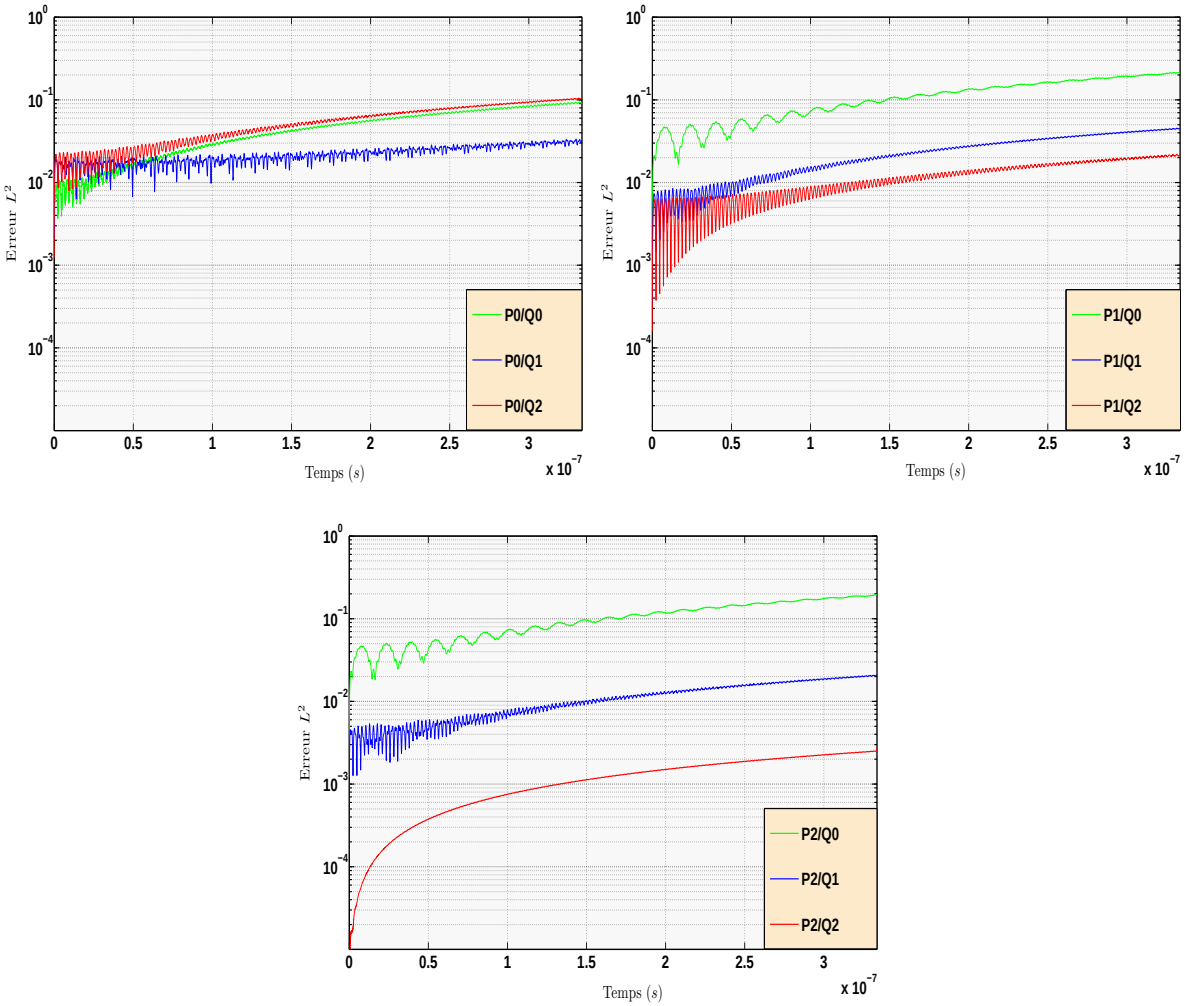


FIGURE 12 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$

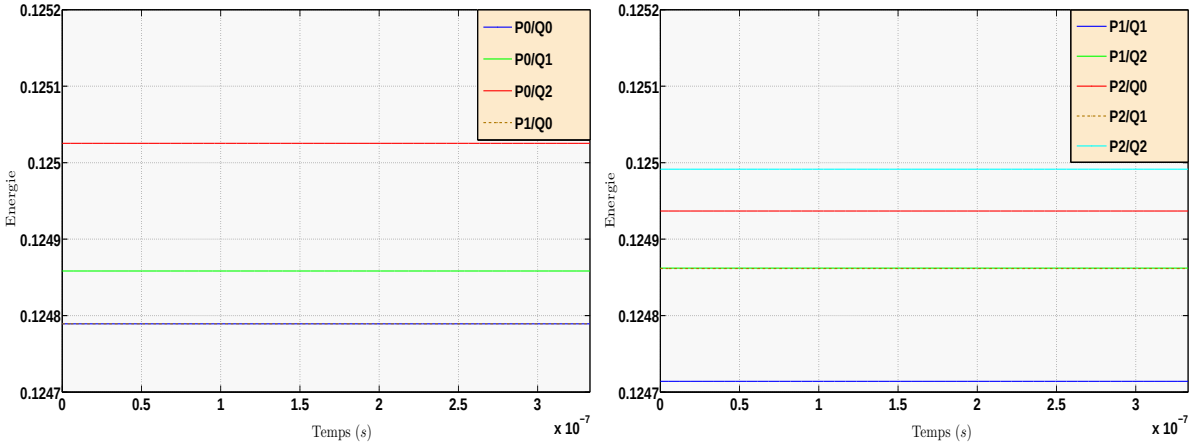


FIGURE 13 – Evolution de l'énergie discrète pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$

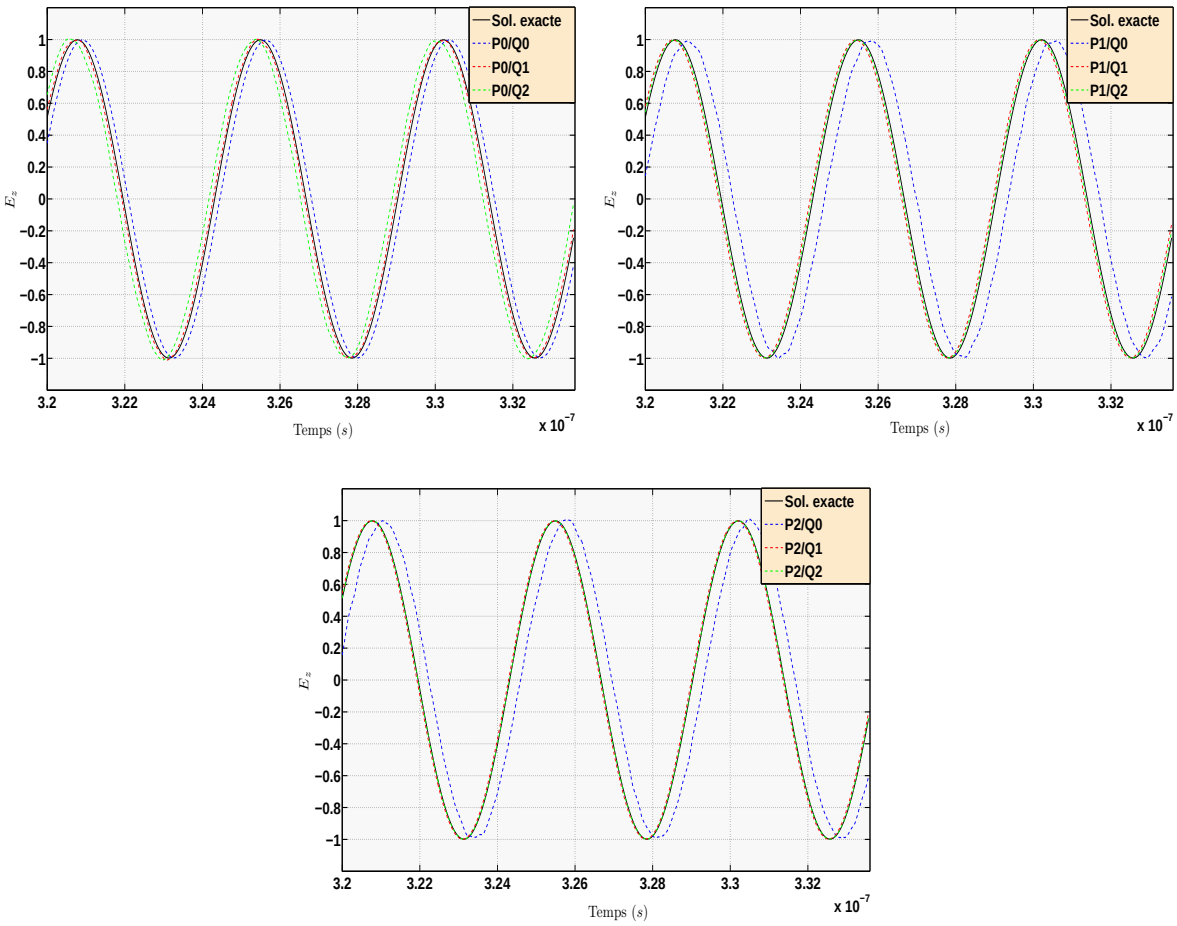


FIGURE 14 – Evolution de la composante $E_z$ au point de visualisation $(0.5, 0.5)$ pour le maillage basé sur la discrétisation $41 \times 41$

| **Raffinement : $11 \times 11$** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ | 0.2 s | 116 | $9.85 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ | 1.1 s | 368 | $3.43 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ | 6.5 s | 788 | $1.12 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ | 0.8 s | 180 | $9.16 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ | 1.7 s | 432 | $6.32 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ | 6.9 s | 852 | $2.82 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ | 2.4 s | 276 | $9.90 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ | 4.1 s | 528 | $3.04 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ | 8.8 s | 948 | $4.07 \times 10^{-2}$ |
| **Raffinement : $21 \times 21$** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ | 1.3 s | 464 | $3.71 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ | 8.1 s | 1472 | $1.05 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ | 50.0 s | 3152 | $1.69 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ | 5.2 s | 720 | $8.19 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ | 12.4 s | 1728 | $1.75 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ | 52.5 s | 3408 | $8.07 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ | 17.0 s | 1104 | $8.24 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ | 29.7 s | 2112 | $8.05 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ | 67.0 s | 3792 | $1.02 \times 10^{-2}$ |
| **Raffinement : $41 \times 41$** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ | 9.7 s | 1856 | $9.17 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ | 64.0 s | 5888 | $3.23 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ | 395.0 s | 12608 | $1.05 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ | 38.2 s | 2880 | $2.10 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ | 95.0 s | 6912 | $4.53 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ | 414.0 s | 13632 | $2.20 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ | 128.55 s | 4416 | $1.95 \times 10^{-1}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ | 238.0 s | 8448 | $2.09 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ | 531.0 s | 15168 | $2.70 \times 10^{-3}$ |

TABLE 2 – Temps CPU, nombre de degrés de liberté total et erreur à $t_{max}$ pour un second type de maillage hybride, en fonction de chaque hybridations et pour trois raffinements différents

Enfin, comme remarques plus générales, nous pouvons souligner la stabilité de cette méthode hybdride, sa convergence numérique en $h$ et en $p$ et $k$ (c'est-à-dire lorsque les degrés d'interpolations augmentent, la précision optimale étant obtenue avec l'hybridation $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$, et il est clair qu'elle sera encore meilleure par exemple pour $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_3/\mathbb{Q}_3$ ou $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_4/\mathbb{Q}_4$). Le nombre de faces hybrides et la façon dont elles sont disposées sera aussi un facteur à ne pas négliger (et le choix du type de maillage hybdride sera également contraint par la zone où l'on souhaite avoir une haute précision).

Nous concluons cette étude numérique par une comparaison entre la méthode hybride et les méthodes $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ en maillage tout triangulaire et $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ en maillage tout quadrangulaire.

## 5.4 Comparaison avec la méthode $\mathrm{GD}-\mathbb{P}_p$ et avec la méthode $\mathrm{GD}-\mathbb{Q}_k$

Nous visualisons sur la figure 15 les maillages utilisés qui correspondent ici à une discrétisation $41 \times 41$ du carré unité. On montre sur la figure 16 l'évolution de l'erreur au cours du temps. Enfin, on présente dans la table 3 les temps de calcul nécessaires, le nombre de degrés de liberté total et l'erreur au temps final $t_{max}$. Il est évident que

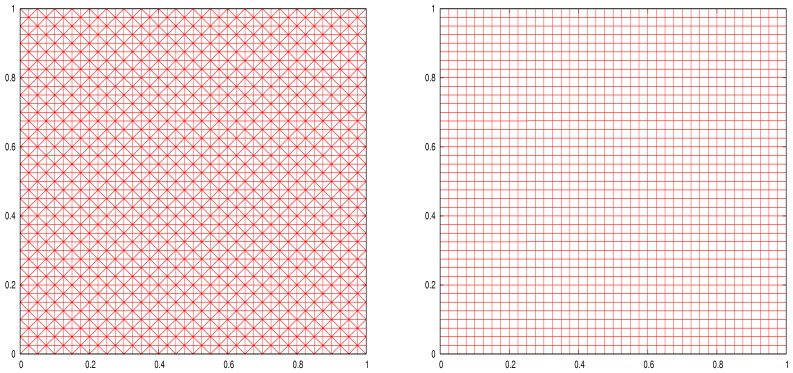

FIGURE 15 – Maillage tout triangulaire et maillage tout quadrangulaire

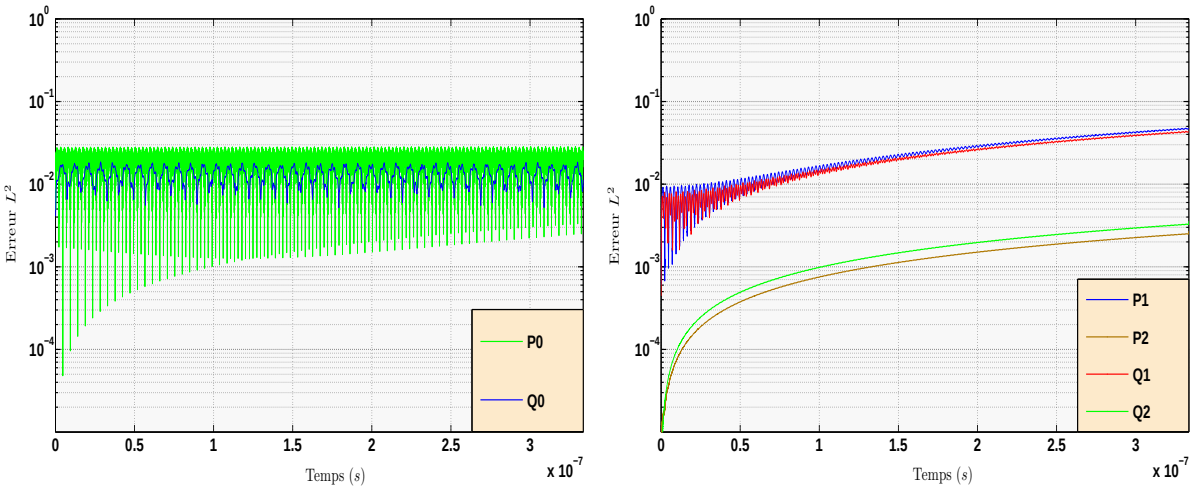


FIGURE 16 – Evolution de l'erreur $L^2$ pour le maillage tout triangulaire (gauche) et le maillage tout quadrangulaire (droite) basés sur une discrétisation $41 \times 41$

ces méthodes sont conditionnellement stables (inutile de présenter le graphique de l'évolution de l'énergie ici). En effectuant d'autres tests (que nous ne montrons pas non plus dans ce rapport), pour ces deux méthodes, nous pourrions bien sûr prouver que l'erreur diminue suite à des raffinements de maillages (convergence numérique en $h$), et qu'elle diminue également en augmentant le degré d'interpolation (convergence numérique en $p$ et convergence numérique en $k$). Nous exposons les résultats de la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_k$ sur un tel maillage plutôt dans l'intérêt d'observer comment se comporte celle-ci. Nous voyons que sur un maillage si régulier (conforme, uniforme et structuré), composé uniquement de carrés, nous obtenons une erreur très faible et des temps de calcul raisonnables. Mais il n'est cependant pas pertinent de comparer directement cette méthode sur ce maillage à la méthode hybride car un tel maillage régulier est limité et ne permet en aucun cas de mailler des objets à géométrie complexe, ce que nous souhaitons de plus faire avec des triangles.

En revanche, nous pouvons comparer la méthode $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p$ avec la méthode hybride. L'hybridation $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ offre une précision, pour les deux types de maillage hybride, quasiment identique à $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2$, avec un temps de calcul légèrement plus petit. Les cas $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ ont certes une erreur plus grande que

| **Raffinement : 41 × 41** | Temps CPU | $\# \, d.d.l.$ | Erreur $L^2$ finale |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0$ | 15.5 s | 3200 | $2.37 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1$ | 127.0 s | 9600 | $4.75 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2$ | 601.0 s | 19200 | $2.70 \times 10^{-3}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_0$ | 4.3 s | 1600 | $1.13 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_1$ | 69.0 s | 6400 | $4.31 \times 10^{-2}$ |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_2$ | 455.0 s | 14400 | $3.60 \times 10^{-3}$ |

TABLE 3 – Temps CPU, nombre de degrés de liberté total et erreur à $t_{max}$ pour les méthodes en maillages tout triangulaire et tout quadrangulaire

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0$ : 58.9 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1$ : 23.0 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2$ : 12.4 ps |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_0$ : 117 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_1$ : 29.5 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{Q}_2$ : 14.1 ps |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_0$ : 58.9 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_1$ : 29.5 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_0/\mathbb{Q}_2$ : 14.1 ps |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_0$ : 23.0 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_1$ : 23.0 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ : 14.1 ps |
| $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_0$ : 12.4 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ : 12.4 ps | $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_2$ : 12.4 ps |

TABLE 4 – Pas de temps pour les calculs en maillages hybride, tout triangulaire et tout quadrangulaire basés sur une discrétisation $41 \times 41$, (exprimés en picosecondes

$\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2$ (mais tout de même très correcte et plus petite que $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1$), mais s'effectuent surtout en des temps de calcul diminués environ de moitié par rapport à $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2$. Nous pouvons donc arriver à la conclusion que relaxer un maillage triangulaire par des quadrangles (autour de la zone où l'on souhaite avoir des triangles), permet de gagner en temps de calcul sans perdre en précision de façon trop importante.

Enfin, pour terminer cette section, nous comparons (cf. table 4) les pas de temps limites utilisés pour les tests en maillages hybride, tout triangulaire et tout quadrangulaire basés sur une discrétisation $41 \times 41$. On remarque que pour chaque hybridation $\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$, le pas de temps global utilisé correspond au minimum entre le pas de temps sur la partie triangulaire ($\mathbb{P}_p$) et le pas de temps sur la partie quadrangulaire ($\mathbb{Q}_k$). Ceci nous donne une première validation numérique de notre condition suffisante de stabilité.

# Conclusion

Nous avons présenté dans ce rapport une méthode hybride $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_p/\mathbb{Q}_k$. Le but était essentiellement axé sur la validation d'une telle méthode. En effet, nous avons pu étudier de façon théorique sa stabilité (et ainsi exhiber une condition suffisante de type CFL), et valider pour un premier cas test sa convergence numérique et stabilité numérique. Nous avons pu également commencer à percevoir l'intérêt d'une telle méthode, notamment pour les hybridations $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_1/\mathbb{Q}_2$ et $\mathbf{GD}-\mathbb{P}_2/\mathbb{Q}_1$ qui semblent offrir des compromis précision/temps de calcul prometteurs. Cependant, il s'agit d'une étude préliminaire à une problématique plus ambitieuse. En effet, pour réaliser une étude plus complète de cette méthode, nous prévoyons par la suite de travailler sur plusieurs axes :

- réaliser, afin de mieux pouvoir comprendre le comportement de la méthode, un certain nombre de nouveaux cas tests, avec des maillages non-structurés, non-conformes (comme étudiés dans [Fah08]), et éventuellement ne plus se limiter à des rectangles pour la partie quadrangulaire.
- étudier la question du choix du type de base utilisé (modale ou nodale, hiérarchique ou non, orthogonale ou non, etc.), ainsi que du choix du schéma en temps (éventuellement monter en ordre), ou encore du choix du flux numérique.
- étudier la convergence de la méthode d'un point de vue théorique, afin de dégager un estimateur d'erreur a priori [HW02]-[PF07]-[FLLP05].

## Remerciements

Ce travail est soutenu par la région Île-de-France et s'inscrit dans le cadre du projet MIEL 3D "Maillage volumique, automatique, industriel et générique" (projet coopératif de Recherche et Développement du pôle "System@tic Paris-Région").

## Références

[CFP06] G. Cohen, X. Ferrieres, and S. Pernet, *A spatial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain*, J. Comput. Phys. **217** (2006), 340–363.

[Fah08] H. Fahs, *Méthodes de type Galerkin discontinu d'ordre élévé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplexes non-conforme*, Ph.D. thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2008.

[FLLP05] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno, *Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes*, ESAIM : Math. Model. and Numer. Anal. **39** (2005), no. 6, 1149–1176.

[FLR06] H. Fahs, S. Lanteri, and F. Rapetti, *Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaire non-conformes*, Tech. Report 6023, INRIA, 2006.

[FPBR04] X. Ferrieres, J.P. Parmantier, S. Bertuol, and A.R. Ruddle, *Application of a hybrid finite difference/finite volume method to solve an automotive EMC problem*, IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility **46** (2004), no. 4, 624–634.

[GPdAB08] S.G. Garcia, M.F. Pantoja, C.M. de Jong van Coevorden, and R.G. Martin A.R. Bretones, *A new hybrid DGTD/FDTD method in 2d*, IEEE Microwave and Wireless Components Letters **18** (2008), no. 12, 764–766.

[HR08] T. Hallerod and T. Rylander, *Electric and magnetic losses modeled by a stable hybrid with explicit-implicit time-stepping for Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **227** (2008), 4499–4511.

[HW02] J.S. Hesthaven and T. Warburton, *Nodal high-order methods on unstructured grids. I. Time-domain solution of Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **181** (2002), 186–221.

[Ned80] J.C. Nedelec, *Mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math. **35** (1980), 315–341.

[Ned86] ———, *A new family of mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math. **50** (1986), 57–81.

[PF03] S. Piperno and L. Fezoui, *A centered discontinuous Galerkin finite volume scheme for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes*, Tech. Report 4733, INRIA, 2003.

[PF07] S. Pernet and X. Ferrieres, *$hp$ a-priori error estimates for a non-dissipative spectral discontiuous Galerkin method to solve the Maxwell equations in the time domain*, Math. Comp. **76** (2007), no. 260, 1801–1832.

[PRF02a] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui, *A centered second-order finite volume scheme for the heterogeneous Maxwell equations in three dimensions on arbitrary unstructured meshes*, Tech. Report 4161, INRIA, 2002.

[PRF02b] ———, *A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell's equations on unstructured meshes*, SIAM J. Numer. Anal. **39** (2002), no. 6, 2089–2108.

[VLGL07] N.V. Venkatarayalu, R. Lee, Y.B. Gan, and L.W. Li, *A stable FDTD subgridding method based on finite element formulation with hanging variables*, IEEE Trans. Antennas and Propagation **55** (2007), no. 3, 907–915.

[XHM09] Z.Q. Xie, O. Hassan, and K. Morgan, *A parallel implicit/explicit hybrid time domain method for computational electromagnetics*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **80** (2009), 1093–1109.

[Yee66] K.S. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Trans. Antennas and Propagation **AP-16** (1966), 302–307.

Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Centre de recherche INRIA Bordeaux – Sud Ouest : Domaine Universitaire - 351, cours de la Libération - 33405 Talence Cedex
Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier
Centre de recherche INRIA Lille – Nord Europe : Parc Scientifique de la Haute Borne - 40, avenue Halley - 59650 Villeneuve d'Ascq
Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex
Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex
Centre de recherche INRIA Saclay – Île-de-France : Parc Orsay Université - ZAC des Vignes : 4, rue Jacques Monod - 91893 Orsay Cedex

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399