HAL
open science

Analyse des performances de reseaux de capteurs 2D et 3D pour la localisation de source

Dinh Thang Vu, Alexandre Renaux, Remy Boyer, Sylvie Marcos

To cite this version:

Dinh Thang Vu, Alexandre Renaux, Remy Boyer, Sylvie Marcos. Analyse des performances de reseaux de capteurs 2D et 3D pour la localisation de source. Colloque GRETSI 2009, 2009, Dijon, France. inria-00444822

HAL Id: inria-00444822

https://inria.hal.science/inria-00444822v1

Submitted on 7 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse des performances de réseaux de capteurs 2D et 3D pour la localisation de source

Dinh Thang VU, Alexandre RENAUX, Remy BOYER, Sylvie MARCOS

Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S), Université Paris-Sud XI, CNRS, SUPELEC
3, rue Joliot Curie 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France
{Vu,Renaux,Remy.Boyer,Marcos}@lss.supelec.fr

Résumé – Dans le contexte de la localisation passive de sources par un réseau de capteurs, les performances d'estimation concernant les angles d'arrivée des sources (azimut et élévation) sont liées au type d'estimateur mis en oeuvre, mais aussi à la géometrie du réseau considéré. Bien que de nombreux résultats soient disponibles concernant les antennes linéaires ainsi que les antennes circulaires, d'autres géométries existent dans la littérature et ont été moins étudiées. Dans cet article, nous étudions l'impact en termes de performance d'estimation pour l'azimut et l'élévation d'une source déterministe pour deux configurations de réseaux. Il s'agit d'une antenne planaire (2D) dite "en V" et de son homologue en trois dimensions. L'outil utilisé ici est la borne de Cramér-Rao largement utilisée par la communauté du traitement du signal pour caractériser les performances d'estimation du fait qu'elle peut être atteinte (sous certaines conditions) par des estimateurs de type maximum de vraisemblance.

Abstract – In the context of passive localization of sources using antenna array, the estimation performance of elevation and azimuth are related to not only the type of estimator used, but also to the geometry of the considered antenna array. Although there are several available results on the linear array and also on the circular array, other geometries existing in the literature such as 3D arrays have been less studied. In this paper, we study the impact of geometry of two models of antenna array on the estimation performance of elevation and azimuth, the so called V-shaped antenna (2D) and its 3D extension. The Cramér Rao Lower Bound widely spread in signal processing to characterize the performance estimation will be used here as a powerful tool to find out the optimal configuration.

1 Introduction

L'estimation de la direction d'arrivée (DDA) d'ondes provenant de sources émettrices à partir d'un réseau de capteurs est largement étudiée en traitement d'antenne pour réaliser plusieurs fonctions : la poursuite, la localisation, l'identification. Malgré la richesse des résultats concernant les antennes planaires, les antennes 3D ont été peu étudiées dans la littérature. Par contre il existe des applications où les capteurs sont éparpillés dans l'espace ce qui fait que l'antenne est de forme arbitraire (réseau de télescopes sur la surface de la terre, réseaux d'électrodes sur le crâne d'un patient, réseaux de capteurs dans une pièce ou dans un espace réduit pour des fonctions de robotique, réseau de bouées à la surface de la mer, etc). La structure proposée dans cet article[1] est une première étape dans l'étude des antennes 3D, qui permet en comparaison des travaux effectués dans [1], de mesurer l'apport d'une troisième dimension. Outre le fait que ce type de réseau ait été peu étudié dans la littérature, nous adoptons une approche où les deux géométries considérées disposent d'un degré de liberté, à savoir les deux branches de la partie planaire de chaque antenne sont supposées avoir un angle Δ entre elles. Ceci explique pourquoi l'antenne est dite "en V" en opposition au plus classique réseau "en L" (c'est à dire $\Delta = \frac{\pi}{2}$) [2]. De ce fait, les bornes de Cramér-Rao (BCR) obtenues dépendent de cet angle au travers du vecteur directionnel et nous permettent de discuter de l'optimisation de la géométrie du réseau.

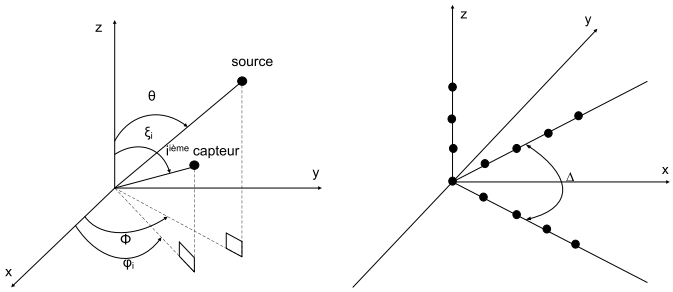
Notons que l'analyse des géométries des réseaux de capteurs a déjà fait l'objet de travaux. On citera en particulier [3] (chapitre 4) pour l'analyse des réseaux d'antenne au travers de leurs diagrammes de rayonnement ainsi que les récents travaux de [4] pour l'analyse des ambiguïtés des réseaux à l'aide des outils provenant de la géométrie différentielle. Certains travaux ont également concerné l'étude des BCR dans le cadre d'antennes planaires à géométries non-standard. On citera, par exemple, [5] et [1] où, contrairement à notre étude, les sources sont supposées stochastiques conduisant à des structures de BCR différentes et où l'étude est limitée aux réseaux 2D.

[1]Ces travaux sont financés par le groupe de recherche Digiteo et la région Île de France.

2 Modèle

On considère le problème classique où l'on cherche à localiser une source émettant un signal $s(t)$ déterministe et à bande étroite à l'aide d'un réseau de capteurs. Les capteurs sont supposés identiques et omni-directionnels. La source et le $i^{ème}$ capteur du réseau sont représentés dans l'espace à l'aide de leurs coordonnées sphériques, c'est-à-dire le couple (ϕ, θ) pour la source (supposée en champs lointain) et le triplet $(\rho_i, \varphi_i, \xi_i)$ pour le $i^{ème}$ capteur (voir figure 1(a)). Dans cette étude, nous considérons deux types de géométrie d'antenne. La première concerne une antenne planaire en V où les deux branches, séparées par un angle noté Δ, sont constituées par des antennes linéaires non obligatoirement uniformes. La deuxième géométrie considérée consiste simplement en une extension de l'antenne planaire où une branche (antenne linéaire non obligatoirement uniforme) orthogonale au plan est ajoutée (voir figure 1(b)). A partir des hypothèses susmentionnées, une simple analyse du retard inter-capteur conduit au modèle d'observation à la sortie du réseau suivant

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_M(t)]^T = \mathbf{a}(\theta,\phi)s(t) + \mathbf{b}(t) \qquad (1)$$



(a) Système de coordonnées pour la source et les capteurs du réseau

(b) Géométrie du réseau de capteurs 3D (Dans le cas du réseau 2D, seuls les capteurs dans le plan xOy sont présents)

FIG. 1: Géométrie du problème

où $t = 1, \ldots, T$. T est le nombre d'observations, et le vecteur directionnel est donné par :

$$\mathbf{a}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2j\pi\rho_1}{\lambda}(\sin\theta\sin\xi_1\cos(\phi-\varphi_1)+\cos\xi_1\cos\theta)} \\ \vdots \\ e^{\frac{2j\pi\rho_M}{\lambda}(\sin\theta\sin\xi_M\cos(\phi-\varphi_M)+\cos\xi_M\cos\theta)} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Le vecteur de bruit $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{C}^M$ est supposé gaussien, circulaire, i.i.d., de moyenne nulle et de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}$. Le nombre de capteurs dans le plan est noté N_1 et le nombre de capteurs pour la branche orthogonale dans le cas de l'antenne 3D est noté N_2. Le nombre total de capteurs $M = N_1 + N_2$ sera constant lors de la comparaison des deux géométries.

3 Bornes de Cramér-Rao

L'analyse des performances ultimes, en terme de variance, qu'un estimateur (non biaisé) peut espérer atteindre est généralement conduite à l'aide des BCR. Dans le cas du modèle d'observation (1), il est clair que $\mathbf{y}(t)$ est distribué selon une loi gaussienne multivariée de moyenne $\mathbf{a}(\theta,\phi)s(t)$ et de variance $\sigma^2\mathbf{I}$. Les paramètres d'intérêt pour cette étude étant l'azimut et l'élévation, c'est-à-dire ϕ et θ (puisque la variance du bruit est découplée par rapport aux autres paramètres, cette dernière est omise du vecteur de paramètres). Seule la moyenne de $\mathbf{y}(t)$ est paramétrée. Dans ce cas, après concaténation de tous les vecteurs d'observation ($t = 1, \ldots, T$), la BCR, notée $\mathbf{C}$, est donnée par [6]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{\theta\theta} & C_{\theta\phi} \\ C_{\phi\theta} & C_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{2\mathbf{s}^H\mathbf{s}} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{a}^H(\theta,\phi)}{\partial\theta}\frac{\partial\mathbf{a}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{a}^H(\theta,\phi)}{\partial\theta}\frac{\partial\mathbf{a}(\theta,\phi)}{\partial\phi}\right) \\ \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{a}^H(\theta,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial\mathbf{a}(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{a}^H(\theta,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial\mathbf{a}(\theta,\phi)}{\partial\phi}\right) \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3}$$

où l'on définit $\mathbf{s} = [s(1)\ldots s(T)]^T$ et, où $C_{\theta\theta}$ et $C_{\phi\phi}$ représentent, respectivement, la BCR concernant l'élévation et la BCR concernant l'azimut. $C_{\theta\phi}$ et $C_{\phi\theta}$ représentent le couplage des paramètres θ et ϕ.

Grâce à la structure du vecteur directionnel donné par le modèle d'observation (1) et après quelques efforts calculatoires qui sont détaillés dans l'annexe, en posant : $\|\mathbf{s}\|^2 = \mathbf{s}^H\mathbf{s}$, $C_{RSB} = \frac{8\pi^2\|\mathbf{s}\|^2}{\sigma^2\lambda^2}$, $S_1 = \sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2$, et $S_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\rho_i^2$, on obtient les expressions analytiques des BCR dans le cas de l'antenne 3D :

$$\begin{cases} C_{\theta\theta}^{3D} = \frac{2}{C_{RSB}}\frac{1-\cos\Delta\cos 2\phi}{S_1\sin^2\Delta\cos^2\theta+2S_2\sin^2\theta(1-\cos\Delta\cos 2\phi)}, \\ C_{\phi\phi}^{3D} = \frac{4}{C_{RSB}\sin^2\theta}\frac{\frac{1}{2}S_1\cos^2\theta(1+\cos\Delta\cos 2\phi)+S_2\sin^2\theta}{S_1^2\sin^2\Delta\cos^2\theta+2S_1S_2\sin^2\theta(1-\cos\Delta\cos 2\phi)}, \\ C_{\theta\phi}^{3D} = \frac{1}{C_{RSB}\tan\theta}\frac{S_1\cos\Delta\sin 2\phi}{S_1^2\sin^2\Delta\cos^2\theta+2S_1S_2\sin^2\theta(1-\cos\Delta\cos 2\phi)}. \end{cases} \tag{4}$$

Puisque l'antenne 2D n'est qu'un cas particulier de l'antenne 3D ($N_2 = 0$), les BCR sont obtenues en posant $S_2 = 0$ dans les équations ci-dessus

$$\begin{cases} C_{\theta\theta}^{2D} = \frac{2}{C_{RSB}}\frac{1-\cos\Delta\cos 2\phi}{S_1\sin^2\Delta\cos^2\theta}, \\ C_{\phi\phi}^{2D} = \frac{2}{C_{RSB}}\frac{1+\cos\Delta\cos 2\phi}{S_1\sin^2\Delta\sin^2\theta}, \\ C_{\theta\phi}^{2D} = \frac{1}{C_{RSB}}\frac{\cos\Delta\sin 2\phi}{S_1\sin^2\Delta\cos\theta\sin\theta}. \end{cases} \tag{5}$$

De plus, dans le cas particulier où l'on travaille avec $\Delta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque l'antenne 2D et l'antenne 3D représentent, respectivement, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, on obtient des formules compactes :

$$\begin{cases} C_{\theta\theta}^{3D\perp} = \frac{1}{C_{RSB}}\frac{2}{S_1\cos^2\theta+2S_2\sin^2\theta}, \\ C_{\phi\phi}^{3D\perp} = \frac{2}{C_{RSB}S_1\sin^2\theta}, \\ C_{\theta\phi}^{3D\perp} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

et

$$\begin{cases} C_{\theta\theta}^{2D\perp} = \frac{2}{C_{RSB}S_1\cos^2\theta}, \\ C_{\phi\phi}^{2D\perp} = \frac{2}{C_{RSB}S_1\sin^2\theta}, \\ C_{\theta\phi}^{2D\perp} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

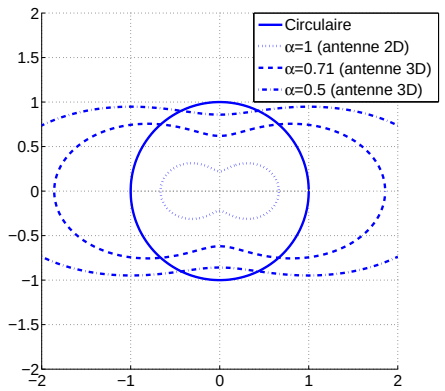
A partir de ces expressions, on peut remarquer que :

- lorsque la source se situe dans le plan, c'est-à-dire lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, $C_{\theta\theta}^{2D}$ tend vers l'infini tandis que $C_{\theta\theta}^{3D}$ reste fini. L'antenne 3D permet donc de lever l'ambiguïté.
- Dans le cas où $\Delta = \frac{\pi}{2}$, il y a découplage entre ϕ et θ ce qui confirme l'intuition. De plus, $C_{\phi\phi}^{3D\perp}$ et $C_{\phi\phi}^{2D\perp}$ ne dépendent plus de ϕ (propriété d'isotropie par rapport à ϕ). Si de plus $S_1 = 2S_2$, c'est-à-dire lorsque les trois branches de l'antenne 3D sont constituées par des antennes linéaires uniformes avec le même nombre de capteurs, l'estimation de θ ne depend plus de la position de la source (propriété d'isotropie par rapport à θ et ϕ) pour l'antenne 3D.

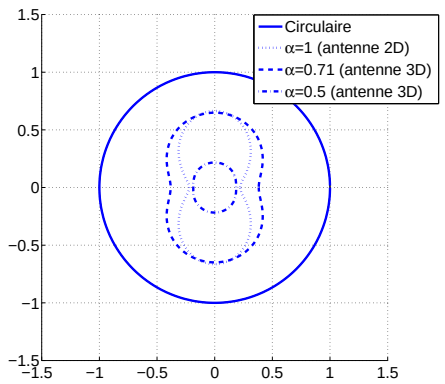
4 Analyses et simulations

On considère dans cette partie des résultats de simulation concernant le comportement des BCR calculées précédemment en fonction du degré de liberté Δ. Toutes les branches, que le réseau soit 2D (deux branches) ou 3D (trois branches), sont des antennes linéaires uniformes avec un espacement inter-capteur d'une demi longueur d'onde. Pour toutes les simulations, le rapport signal sur bruit est de $10dB$ et le nombre d'observations est de $T = 50$.

Il est intéressant de comparer les performances de l'antenne en V avec une antenne isotrope classique telle que l'antenne circulaire. Ces antennes ont le même nombre de capteurs. L'antenne circulaire ayant des capteurs séparés de manière équidistante $\frac{\lambda}{2}$, la valeur de son rayon est donc : $r = \frac{\lambda}{4\sin\frac{\pi}{M}}$. En posant $\alpha = \frac{N_1}{M} \leq 1$, il vient que la valeur de α associée à l'antenne planaire est égale à 1 tandis que celle associée à l'antenne 3D est strictement inférieure à 1. Les figures 2(a) et 2(b) montrent respectivement les BCR concernant l'azimut et l'élévation normalisées par la borne de l'antenne circulaire



(a) BCR d'azimut normalisée en fonction de α à $\Delta = 60°$ et $\theta = 45°$



(b) BCR d'élévation normalisée en fonction de α à $\Delta = 60°$ et $\theta = 45°$

FIG. 2: Comparaison de performance des antennes en V avec antenne circulaire

pour un angle d'ouverture $\Delta = 60°$ et pour une élévation $\theta = 45°$. Les performances d'estimation concernant l'élévation des antennes en V sont toujours meilleures par rapport à l'antenne circulaire, alors que celles concernant l'estimation d'azimut sont liées au nombre de capteurs que l'on place sur l'axe orthogonal, c'est-à dire au coefficient α. Pour des valeurs de α proches de 1, l'estimation de l'élévation des antennes en V est meilleure que celle de l'antenne circulaire.

En particulier, si l'antenne en V et son extension 3D sont isotropes ($\Delta = \frac{\pi}{2}$), le rapport de la BCR sur l'azimut de ces antennes est donné par :

$$\begin{aligned} &K(M) = \frac{C_{\phi\phi}^{2D,3D\perp}}{C_{\phi\phi}^{Circulaire}} = \frac{3}{\alpha(\alpha^2M^2-1)\sin^2\frac{\pi}{M}}. \\ &\text{Si } \alpha = 1 \text{ et } M >> 1 \rightarrow K(M) = \frac{1}{3}. \\ &\text{Si } \alpha < 1 \text{ et } \alpha M >> 1 \rightarrow K(M) = \frac{1}{3\alpha^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

On peut dire que l'antenne en V a de meilleures performances en terme d'estimation d'azimut par rapport à l'antenne circulaire si et seulement si la fraction $K(M)$ est inférieure à 1. La figure 3 montre que l'antenne isotrope en V est meilleure que l'antenne circulaire à condition que la valeur de α satisfasse : $0.76 < \alpha < 1$.

Dans la suite, on compare les performances d'estimation entre le modèle 2D et 3D. Dans cette simulation, le réseau 2D est composé de $M = 7$ capteurs (un à l'origine plus trois sur

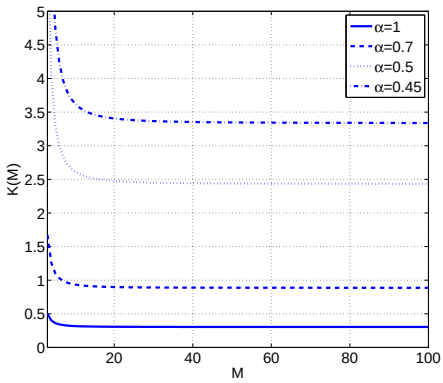


FIG. 3: Fraction $K(M)$ en fonction du nombre de capteurs M

chacune des deux branches). Le réseau 3D est également composé de $M = 7$ capteurs (un à l'origine plus deux sur chacune des trois branches). La figure 4(a) montre le comportement de $C_{\theta\theta}^{3D}$, $C_{\theta\theta}^{2D}$, $C_{\phi\phi}^{3D}$ et $C_{\phi\phi}^{2D}$ par rapport à l'angle d'ouverture Δ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour cette simulation, les valeurs de ϕ et θ sont respectivement de 20° et 70°. Nous qualifierons ce scénario de source rasante par rapport au plan de l'antenne. On observe que pour l'estimation de l'élévation, θ, le réseau 3D permet toujours d'obtenir de meilleures performances par rapport au réseau 2D. Ceci est toujours vrai pour une valeur d'élévation de $\theta \geq 62.2°$ dans ce cas, car on montre facilement que :

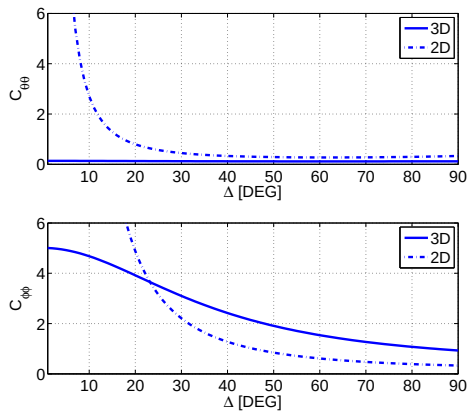
$$\frac{C_{\theta\theta}^{3D}}{C_{\theta\theta}^{2D}} < 1 \Leftrightarrow \theta > \arctan\sqrt{\max_{\Delta,\phi}\{\Gamma\}}. \tag{9}$$

avec $\Gamma = \frac{\sin^2\Delta\big((M^2-1)-\alpha(\alpha^2M^2-1)\big)}{(1-\cos\Delta\cos 2\phi)4(1-\alpha)((1-\alpha)M+1)(2(1-\alpha)M+1)}$, $\alpha = \frac{N_1}{M} = \frac{5}{7}$, $M = 7$, $\theta \in [0°, 90°]$, $\Delta \in (0°, 180°)$, $\phi \in [0°, 360°]$.

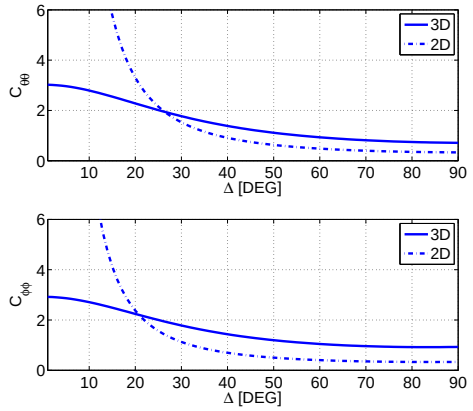
Au contraire, il existe une valeur de Δ (environ 23° dans ce cas) en dessous de laquelle le réseau 3D permet de meilleures performances par rapport au réseau 2D pour l'estimation de l'azimut. Cette valeur critique peut être obtenue en résolvant numériquement l'équation $C_{\phi\phi}^{3D} = C_{\phi\phi}^{2D}$ en Δ. La figure 4(b) montre les mêmes courbes, mais pour des valeurs de ϕ et θ respectivement égales à 50° et 30°. Nous qualifierons ce scénario de source haute par rapport au plan de l'antenne. Dans ce cas, il convient, contrairement à l'intuition, de choisir le réseau 2D au dessus d'une certaine limite d'angle d'ouverture obtenue en résolvant numériquement $\max\left(C_{\phi\phi}^{3D} = C_{\phi\phi}^{2D}, C_{\theta\theta}^{3D} = C_{\theta\theta}^{2D}\right)$.

5 Conclusion

Nous avons dérivé des formes analytiques des BCR pour l'azimut et l'élévation d'une source déterministe dans le cas de réseaux 2D et 3D. A l'aide de ces résultats, une analyse des deux géométries est fournie. Nous avons trouvé des antennes isotropes qui ont de meilleures performances d'estimation d'azimut par rapport à l'antenne circulaire classique. Nous en concluons également que, selon la région de l'espace où se situe la source, en dessous d'une certaine valeur de l'angle du réseau, l'antenne 3D est toujours plus performante que l'antenne 2D pour un même nombre de capteur qu'il s'agisse des performances d'estimation en termes d'azimut ou d'élévation. En opposition à ce résultat, nous montrons qu'il existe des valeurs de Δ telles que le réseau 2D permet d'obtenir de meilleures



(a) Comportement de $C^{3D}_{\theta\theta}$, $C^{2D}_{\theta\theta}$, $C^{3D}_{\phi\phi}$ et $C^{2D}_{\phi\phi}$ normalisées par la valeur de la BCR de l'antenne circulaire par rapport à Δ avec $\phi = 20°$ et $\theta = 70°$



(b) Comportement de $C^{3D}_{\theta\theta}$, $C^{2D}_{\theta\theta}$, $C^{3D}_{\phi\phi}$ et $C^{2D}_{\phi\phi}$ normalisées par la valeur de la BCR de l'antenne circulaire par rapport à Δ avec $\phi = 50°$ et $\theta = 30°$

FIG. 4: BCR normalisée en fonction de l'angle d'ouverture

performances en terme d'azimut alors que le réseau 3D permet d'obtenir de meilleures performances en terme d'élévation.

6 Annexe: démonstration de (4)

Les dérivées du $i^{ième}$ élément du vecteur directionnel sont données par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_i(\theta,\phi)}{\partial\theta} &= \frac{2j\pi\rho_i}{\lambda}\left(\cos\theta\sin\xi_i\cos(\phi-\varphi_i)-\cos\xi_i\sin\theta\right)\\ &\quad\times e^{\left(\frac{2j\pi\rho_i}{\lambda}\sin\theta\sin\xi_i\cos(\phi-\varphi_i)+\cos\xi_i\cos\theta\right)}.\\ \frac{\partial a_i(\theta,\phi)}{\partial\phi} &= -\frac{2j\pi\rho_i}{\lambda}\sin\theta\sin\xi_i\sin(\phi-\varphi_i)\\ &\quad\times e^{\left(\frac{2j\pi\rho_i}{\lambda}\sin\theta\sin\xi_i\cos(\phi-\varphi_i)+\cos\xi_i\cos\theta\right)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Supposons que N_1 est un nombre impair. Comme les 2 branches du V sont symétriques, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{-2j\varphi_i} &= \sum_{i=1}^{\frac{N_1-1}{2}}\rho_i^2e^{-2j\frac{\Delta}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{N_1-1}{2}}\rho_i^2e^{2j\frac{\Delta}{2}}\\ &= \sum_{i=1}^{\frac{N_1-1}{2}}\rho_i^2\left(e^{-j\Delta}+e^{j\Delta}\right)\\ &= \cos\Delta 2\sum_{i=1}^{\frac{N_1-1}{2}}\rho_i^2 = S_1\cos\Delta.\end{aligned} \tag{11}$$

En notant que les capteurs qui se situent sur le plan xOy ont pour paramètre $\xi_i = \frac{\pi}{2}$, alors que les capteurs appartenant à l'axe orthogonal ont pour paramètre $\xi_i = 0$. Après quelques calculs, en appliquant (10) dans (3) et en sachant (11), les éléments de la matrice d'information de Fisher sont donnés par:

$$\begin{aligned}\frac{[\mathbf{C}^{-1}]_{11}}{C_{RSB}} &= \sum_{i=1}^{M}\rho_i^2\left(\cos\theta\sin\xi_i\cos(\phi-\varphi_i)-\cos\xi_i\sin\theta\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2\cos^2\theta\cos^2(\phi-\varphi_i)+\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\rho_i^2\sin^2\theta\\ &= \frac{\cos^2\theta}{4}\left(e^{2j\phi}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{-2j\varphi_i}+e^{-2j\phi}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{2j\varphi_i}\right.\\ &\qquad\left.+2\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2\right)+\sin^2\theta\sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2}\rho_i^2\\ &= \frac{1}{4}\cos^2\theta\left(S_1\cos\Delta(e^{2j\phi}+e^{-2j\phi})+2S_1\right)+\sin^2\theta S_2\\ &= \frac{1}{2}S_1\cos^2\theta\left(\cos\Delta\cos 2\phi+1\right)+S_2\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{[\mathbf{C}^{-1}]_{22}}{C_{RSB}} &= \sum_{i=1}^{M}\rho_i^2\left(\sin\theta\sin\xi_i\sin(\phi-\varphi_i)\right)^2\\ &= \sin^2\theta\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2\sin^2(\phi-\varphi_i)\\ &= -\frac{1}{4}\sin^2\theta\left(e^{2j\phi}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{-2j\varphi_i}+e^{-2j\phi}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{2j\varphi_i}\right.\\ &\qquad\left.-2\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2\right)\\ &= -\frac{1}{4}\sin^2\theta\left(S_1\cos\Delta(e^{2j\phi}+e^{-2j\phi})-2S_1\right)\\ &= -\frac{1}{2}S_1\sin^2\theta\left(\cos\Delta\cos 2\phi-1\right).\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{[\mathbf{C}^{-1}]_{12}}{C_{RSB}} &= -\sum_{i=1}^{M}\left(\rho_i^2\sin\theta\sin\xi_i\sin(\phi-\varphi_i)\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\cos\theta\sin\xi_i\cos(\phi-\varphi_i)-\cos\xi_i\sin\theta\right)\right)\\ &= -\sin\theta\cos\theta\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2\sin(\phi-\varphi_i)\cos(\phi-\varphi_i)\\ &= -\frac{1}{8j}\sin 2\theta\left(e^{2j\phi}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{-2j\varphi_i}-e^{-2j\phi}\sum_{i=1}^{N_1}\rho_i^2e^{2j\varphi_i}\right)\\ &= -\frac{1}{8j}S_1\sin 2\theta\cos\Delta(e^{2j\phi}-e^{-2j\phi})\\ &= -\frac{1}{4}S_1\sin 2\theta\cos\Delta\sin 2\phi.\end{aligned} \tag{14}$$

Le déterminant de la matrice d'information de Fisher est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{\det[\mathbf{C}^{-1}]}{C_{RSB}^2} &= \frac{[\mathbf{C}^{-1}]_{11}[\mathbf{C}^{-1}]_{22}-[\mathbf{C}^{-1}]_{12}[\mathbf{C}^{-1}]_{21}}{C_{RSB}^2}\\ &= \left(\frac{1}{2}S_1\cos^2\theta\left(\cos\Delta\cos 2\phi+1\right)+S_2\sin^2\theta\right)\\ &\qquad\times\left(-\frac{1}{2}S_1\sin^2\theta\left(\cos\Delta\cos 2\phi-1\right)\right)\\ &\qquad-\left(\frac{1}{2}S_1\sin\theta\cos\theta\cos\Delta\sin 2\phi\right)^2\\ &= -\frac{1}{4}S_1^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\Delta\cos^2 2\phi\\ &\qquad+\frac{1}{4}S_1^2\sin^2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}S_1S_2\sin^4\theta(\cos\Delta\cos 2\phi-1)\\ &\qquad-\frac{1}{4}S_1^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\Delta\sin^2 2\phi\\ &= \frac{\sin^2\theta}{4}\left(S_1^2\cos^2\theta\sin^2\Delta+2S_1S_2\sin^2\theta(1-\cos\Delta\cos 2\phi)\right).\end{aligned} \tag{15}$$

References

[1] H. Gazzah and S. Marcos, "Cramer Rao bounds for antenna array design," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, pp. 336–345, 2006.

[2] Y. Hua, T. K. Sarkar, and D. D. Weiner, "An L-shaped array for estimating 2d directions of wave arrival," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 39, pp. 143– 146, 1991.

[3] H. L. VanTrees, *Detection, Estimation and Modulation Theory: Optimum Array Processing*. New York: Wiley, 2002, vol. 4.

[4] A. Manikas, *Differential Geometry in Array Processing*. Imperial College Press, 2004.

[5] A. Mirkin and L. H. Sibul, "Cramér-rao bounds on angle estimation with a two-dimensional array," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, pp. 515–517, 1991.

[6] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood and the Cramer Rao bound," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, pp. 720–741, May 1989.