Assimilation variationnelle de données dans un système dynamique d'ordre réduit

Johan Carlier, Nicolas Papadakis, Etienne Mémin

▶ **To cite this version:**

Johan Carlier, Nicolas Papadakis, Etienne Mémin. Assimilation variationnelle de données dans un système dynamique d'ordre réduit. Congrès Français de Mécanique (CFM'09), Enseignement Supérieur de Marseille et de Provence, Aug 2009, Marseille, France. pp.6. inria-00433388

HAL Id: inria-00433388

https://inria.hal.science/inria-00433388

Submitted on 19 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Assimilation variationnelle de données dans un système dynamique d'ordre réduit

J. CARLIER[a], N. PAPADAKIS[b], É. MÉMIN[c]

a. Cemagref, Université Européenne de Bretagne, 17 Avenue de Cucillé, F-35044 Rennes, France.
b. Barcelona Media/Univesitat Pompeu Fabra, Carrer Ocata 1, O8003 Barcelona, Spain.
c. INRIA Bretagne-Atlantique, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes, France.

Résumé :

Le sillage turbulent d'un cylindre circulaire à $Re = 3\,900$ a été mesuré par Vélocimétrie par Images de Particule résolue en temps. Un système dynamique d'ordre réduit est obtenu par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base issue de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres de la séquence temporelle des champs de vitesse. L'assimilation variationnelle des modes temporels discrets est mise en œuvre par contrôle des coefficients du système dynamique.

Abstract :

The turbulent wake behind a circular cylinder was measured by Time-Resolved Particle Image Velocimetry. A low-order dynamical system is obtained by Galerkin projection of the Navier-Stokes equations on the Proper Orthogonal Decomposition basis of the temporal sequence of velocity fields. The variational assimilation of discrete temporal modes is implemented by controling the dynamical system coefficients.

Mots clefs : PIV, POD, LODS, **assimilation variationelle**

1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont un modèle mathématique représentatif des écoulements de fluides. La résolution numérique dans l'espace physique de ces équations non-linéaires nécessite de prendre en compte une gamme d'échelles dont la largeur dépend du nombre de Reynolds Re. On peut montrer facilement que le nombre de degrés de liberté spatial du problème à résoudre est de l'ordre de $Re^{\frac{3n+2}{4}}$ avec n la dimension de l'espace physique considéré. Le principe de la réduction de modèle est de définir une base réduite appropriée contenant un nombre de fonction de base très petit devant ce qui est nécessaire dans l'espace physique. La projection de Galerkin des équations du mouvement sur la base retenue permet de définir un modèle dynamique réduit en ne conservant qu'un nombre limité de fonction de base. Ce modèle réduit s'intégre rapidement et, pour autant qu'il soit représentatif de l'écoulement considéré [1, 2], peut être utilisé par la suite dans une démarche de contrôle [3, 4] ou de génération de conditions initiales instationnaires [5].

Dans ce travail, le système dynamique réduit est obtenu par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur une base issue de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) d'une séquence de champs de vitesse. Cette séquence provient de la mesure par Vélocimétrie par Images de Particule (PIV) résolue en temps du sillage turbulent d'un cylindre circulaire à $Re = 3\,900$. Pour améliorer la représentativité du système dynamique réduit vis-à-vis des observations, nous proposons comme alternative aux méthodes existantes [4, 6, 7, 8] de contrôler les coefficients de ce système directement par les observations avec la mise en œuvre de l'assimilation variationnelle introduite initialement par Le Dimet [9] dans le cadre méthodologique du contrôle optimal défini par Lions [10].

2 Formulation d'un système dynamique réduit

On dispose d'une séquence de champs de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)$, avec $i \in [1 \cdots M]$, d'un même écoulement pour M temps discrets différents. La POD fournit les fonctions propres $\phi_i(\mathbf{x})$ de la base orthogonale optimale vis-à-vis d'une représentation de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement. Cette décomposition permet d'écrire le champ de vitesse comme une moyenne temporelle $\langle \mathbf{u} \rangle$ avec une fluctuation $\mathbf{u}'$ portée par un ensemble fini

de fonctions propres :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \langle \mathbf{u} \rangle + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{M}} \mathbf{a_i}(\mathbf{t})\phi_\mathbf{i}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

À partir de cette décomposition modale, il est possible de ne conserver qu'un nombre limité de modes pour approcher les champs de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)$. Le choix du nombre s de modes conservés s'appuie sur le pourcentage d'énergie cinétique turbulente nécessaire pour rendre compte des structures cohérentes, de leurs dynamiques propres et de leurs interactions. Les équations de Navier-Stokes pour la vitesse fluctuante sont ensuite projetées sur les s premiers modes spatiaux :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u}'\nabla\langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}'\nabla\mathbf{u}' - \langle \mathbf{u}'\nabla\mathbf{u}' \rangle + \nabla \mathbf{p}' - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Re}} \mathbf{\Delta} \left(\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}' \right) \ , \ \phi_\mathbf{j} \right) = 0. \tag{2}$$

En identifiant $\mathbf{u}'$ par sa décomposition en modes propres dans les équations (2) et en ne considérant que les modes $k \leq s$, on obtient le système d'EDOs suivant :

$$\frac{da_k}{dt} = i_k + \sum_{i=1}^{s} l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=i}^{s} a_i c_{ijk} a_j \qquad\qquad k = 1 \cdots s, \tag{3}$$

avec :

$$\begin{aligned} i_k &= \int_\Omega \nabla p' \phi_k d\mathbf{x} - \frac{1}{Re} \int_\Omega \Delta \langle \mathbf{u} \rangle \phi_\mathbf{k} \mathbf{dx} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{s}} \langle \mathbf{a_j a_j} \rangle \int_\mathbf{\Omega} \phi_\mathbf{j} \nabla \phi_\mathbf{j} \phi_\mathbf{k} \mathbf{dx}, \\ l_{ik} &= \int_\Omega \langle \mathbf{u} \rangle \nabla \phi_\mathbf{i} \phi_\mathbf{k} \mathbf{dx} + \int_\mathbf{\Omega} \phi_\mathbf{i} \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \phi_\mathbf{k} \mathbf{dx} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Re}} \int_\mathbf{\Omega} \mathbf{\Delta} \phi_\mathbf{i} \phi_\mathbf{k} \mathbf{dx}, \\ c_{ijk} &= \int_\Omega \phi_j \nabla \phi_i \phi_k d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4}$$

À partir du système dynamique (3) constitué de s équations et des conditions initiales $a_k^{obs}(t_0)$, une simple intégration temporelle du type Runge-Kutta peut être effectuée pour simuler les trajectoires $a_k(t)$. Les coefficients (4) du système dynamique peuvent être estimés par une méthode directe en intégrant sur le domaine Ω les différents produits scalaires faisant intervenir les fonctions propres, le champ de vitesse moyen, le champ de pression et leurs dérivées spatiales. Cette méthode est fastidieuse et surtout génératrice d'erreurs numériques importantes, notamment pour des données expérimentales bruitées et incomplètes. Elle est en revanche souvent utilisée pour des données de simulations numériques car elle permet explicitement d'implémenter des modèles de fermeture prenant en compte les effets des modes non-résolues [8].

3 Identification polynomiale des coefficients du système dynamique réduit

Les simulations numériques, les peignes de fils chauds et plus récemment les mesures par Vélocimétrie par Images de Particule doubles ou à hautes fréquences permettent d'accéder simultanément aux modes a_k et à leurs dérivés temporelles $\dot{a}_k$. Les coefficients i_k, l_{ik} et c_{ijk} du système dynamique (3) peuvent alors s'écrire comme les solutions d'un système linéaire (Perret *et al*. [6]) :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_i(t_1) & \cdots & a_i(t_1)a_j(t_1) & \cdots \\ & & \cdots & & & \\ 1 & \cdots & a_i(t_M) & \cdots & a_i(t_M)a_j(t_M) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \cdots & I_s \\ & \cdots & \\ L_{i1} & \cdots & L_{is} \\ & \cdots & \\ C_{ij1} & \cdots & C_{ijs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1(t_1) & \cdots & \dot{a}_s(t_1) \\ & \cdots & \\ \dot{a}_1(t_M) & \cdots & \dot{a}_s(t_M) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Cette méthode d'identification polynomiale est, pour des données expérimentales, une alternative robuste au calcul direct. Cependant, lorsque k augmente, les trajectoires des modes a_k sont de plus en plus bruitées et sous-échantillonnées en temps. Les dérivés temporelles $\dot{a}_k$ ne sont pas estimées précisément, ce qui impacte la qualité de l'identification polynomiale. Le système dynamique obtenu est alors très instable, d'autant que les termes tronqués sont principalement dissipatifs. Le système peut être stabilisé simplement en ajoutant une viscosité artificielle, mais cette méthode n'assure en aucun cas de reproduire les modes temporels observés (ou mesurés). Bergmann *et al*. [4] proposent de se ramener à la résolution d'un problème d'assimilation de données sous contrainte dynamique faible en ajoutant une fonction de contrôle à ce système dynamique imparfait. La fonction de contrôle optimale permet de minimiser l'écart entre les modes simulés et observés. D'Adamo *et al*. [7] mettent en œuvre une procédure similaire mais contrôlent en outre la condition initiale $a(t_0)$. Les coefficients du système dynamique peuvent ensuite être réestimés sur les trajectoires assimilées. On aboutit dans ce cas à une méthode en deux passes pour la définition du système dynamique réduit [7].

4 Assimilation de données avec contrôle des coefficients du système dynamique

Papadakis [11] propose une alternative au problème d'assimilation de données sous contrainte dynamique faible en contrôlant directement la condition initiale $a(t_0)$ et les coefficients i_k, l_{ik} et c_{ijk} du système dynamique réduit. Il s'agit alors d'un problème d'assimilation de données sous contrainte dynamique forte puisque ce modèle n'est pas modifié par l'adjonction d'une fonction de contrôle. Le modèle peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{da(t)}{dt} + \mathbb{M}(a(t)) = 0, \\ a(t_0) = a_0 + \eta. \end{cases} \tag{6}$$

En identifiant le modèle (6) dans le système (3), l'opérateur différentiel $\mathbb{M}$ s'exprime par :

$$\frac{da_k}{dt} = \underbrace{i_k + \sum_{i=1}^{s} l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=i}^{s} a_i c_{ijk} a_j}_{-\mathbb{M}(a_k)} \qquad k = 1 \cdots s. \tag{7}$$

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} J(\eta, I, L, C) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \|a_k^{obs}(t) - a_k(t, \eta, I, L, C)\|^2_{R^{-1}} dt + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} \|\eta_k\|^2_{B_\eta^{-1}} \\ + \frac{1}{2}\|I - I^0\|^2_{B_I^{-1}} + \frac{1}{2}\|L - L^0\|^2_{B_l^{-1}} + \frac{1}{2}\|C - C^0\|^2_{B_C^{-1}}, \end{aligned} \tag{8}$$

avec les variables de contrôle (η, I, L, C) et les matrices de covariance d'observation R et d'initialisation B. Le premier terme correspond au coût associé à l'écart entre les trajectoires des modes temporels observés $a^{obs}(t)$ et simulés $a(t)$. Les termes suivants sont les coûts associés à l'écart des variables de contrôle à leurs valeurs cibles notées $\left(\eta, I^0, L^0, C^0\right)$. La difficulté de la minimisation de la fonctionnelle (8) réside dans l'estimation de son gradient par rapport aux variables de contrôle. Ce gradient peut néanmoins être obtenu par intégration du modèle adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_a \mathbb{M})^* \lambda(t) = R^{-1}(t)(a^{obs}(t) - a(t)), \\ \lambda(t_f) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

où $(\partial_a \mathbb{M})^*$ est l'adjoint de l'opérateur tangent linéaire $(\partial_a \mathbb{M})$. Le gradient de la fonctionnelle (8) s'exprime alors simplement en connaissant la trajectoire de la variable adjointe λ :

$$\begin{cases} \partial_\eta J = B_\eta^{-1}(a(t_0) - a_0) - \lambda(t_0), \\ \partial_I J = B_I^{-1}(I - I^0) - \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) dt, \\ \partial_L J = B_L^{-1}(L - L^0) - \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} a(t)\lambda(t) dt, \\ \partial_C J = B_C^{-1}(C - C^0) - \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} a(t)a(t)\lambda(t) dt. \end{cases} \tag{10}$$

Connaissant la fonctionnelle J et son gradient ∇J, les variables de contrôle minimisant cette fonctionnelle peuvent être obtenues par une méthode itérative à direction de descente.

5 Description de l'expérience

La séquence de champs de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)$ utilisée par la suite est obtenue expérimentalement. L'expérience a été réalisée dans la soufflerie de couche de mélange du Cemagref. Une description détaillée de cette soufflerie peut être trouvée dans la thèse de Ndoye [12]. Pour ce travail, la soufflerie a été provisoirement modifiée. La plaque séparant les 2 flux d'air a été prolongée dans la veine d'essai créant ainsi 2 veines identiques et indépendantes de $100 \times 50\, cm^2$ de section.

Le cylindre circulaire a été placée horizontalement au milieu de la veine d'essai supérieure de la soufflerie modifiée. Il mesure $89.6\, cm$ de longueur et $32\, mm$ de diamètre. Son rapport d'aspect est de 28 et son effet de blocage est de 3.2%. Il est équipé de 2 plaques limitatives d'effets de bouts rectangulaires. L'origine des axes (x, y, z) est situé au centre du cylindre.

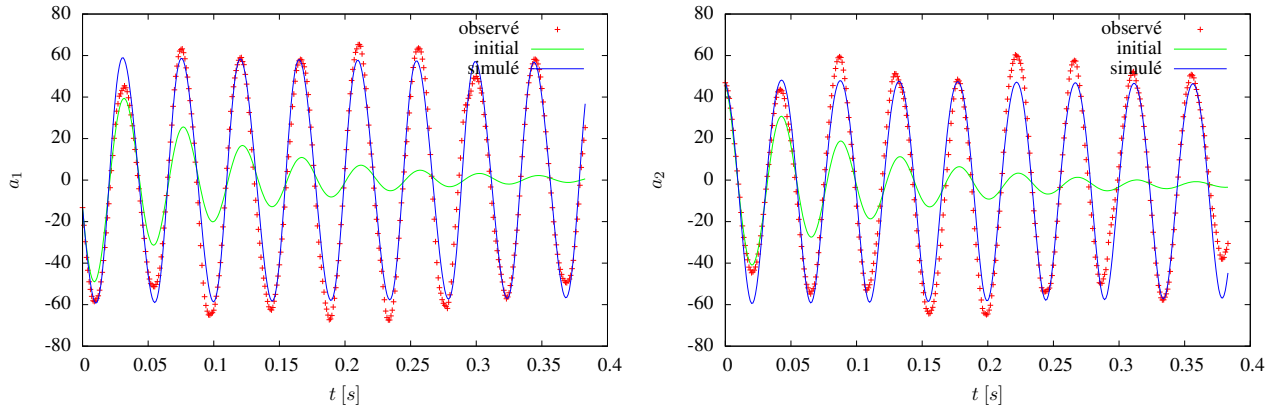

FIG. 1 – Trajectoires des modes simulés dans le cas de l'assimilation des 2 premiers modes observés

Le sillage d'un cylindre circulaire à $Re = 3\,900$ est relativement bien documenté dans la littérature (Parnaudeau *et al.* [13]). La vitesse de l'écoulement dans la soufflerie a donc été ajustée en conséquence avec $U_e = 1.82\,m/s$. Pour ce nombre de Reynolds, le nombre de Strouhal St est d'environ 0.208, soit une fréquence de Strouhal f_s (fréquence des lâchées tourbillonnaires de l'allée de von Karman) d'environ $12\,hz$.

Les mesures de champs de vitesse ont été réalisées avec une chaîne de Vélocimetrie par Images de Particule (FlowMaster, LaVision) équipée d'un laser $Nd:YAG$ (Pegasus, New Wave Research) et une caméra CMOS ($APX-RS$, Photron). Une séquence de $3\,072$ paires d'images a été acquise à une fréquence de $1\,000\,hz$ avec un délai entre les 2 impulsions laser de $250\,\mu s$. Ces images mesurent $3 \times 3D^2$ et se situe dans le plan $z = 0$ (plan perpandiculaire à l'axe du cylindre), juste derrière le cylindre. La région filmée correspond à la zone de recirculation du cylindre circulaire dans laquelle on peut voir la formation des tourbillons principaux de l'allée tourbillonnaire de Von Karman.

Le post-traitement des paires d'images a été effectué par inter-corrélation dans un processus multi-grilles avec un recouvrement de 50% (DaVis, LaVision). Dans cette séquence, les déplacements rencontrés s'étalent sur une gamme de $10\,px$ et le nombre de déplacements identifiés erronés par filtre médian est de l'ordre de 0.1%.

6 Résultats

L'algorithme de résolution du problème d'assimilation de données avec contrôle des coefficients du système dynamique réduit est mise en œuvre sur la séquence de champs de vitesse à temps discrets obtenue par PIV. Les modes temporels et les fonctions propres spatiales observés sont obtenus par application de la POD sur la séquence complète disponible. Les coefficients des systèmes dynamiques réduits correspondant à un nombre de modes conservés $s = 2$, 4 et 8 sont ensuites déterminés par identification polynomiale. L'assimilation des trajectoires des modes observés est réalisée sur une sous-séquence de 384 champs de vitesse successifs. Les coefficients cibles du système dynamique ne sont pas modifiés. En revanche, les coefficients initiaux utilisés dans la procédure itérative de descente de gradient prennent en compte une viscosité artificielle permettant une première intégration du modèle direct. Les figures 1, 2 et 3 présentent les trajectoires des modes observés, initiaux et simulés par les systèmes dynamiques réduits $s = 2$, 4 et 8.

Les modes observés a_1 et a_2 sont de loin les modes dominant de l'écoulement. Ils contribuent à parts égales à 60% de l'énergétique cinétique turbulente totale. Ils sont périodiques et déphasés d'$\frac{1}{4}$ de periode. Ces modes appariés correspondent aux tourbillons principaux de l'allée tourbillonnaire de von Karman et leur advection vers l'aval du cylindre. Les modes observés suivants ont une contribution énergétique bien moindre et une décroissance relativement lente. Ils sont en outre très irréguliers par rapport à ceux observés par Bergmann [4] et D'Adamo *et al.* [7]. Cette différence de comportement s'explique par un nombre de Reynolds plus important ($Re = 3\,900$ dans ce travail contre $Re = 200$ dans [4] et $Re = 125$ dans [7]) qui traduit une turbulence plus développée avec une transition dans les couches cisaillées.

Les trajectoires des modes simulés lors de la première itération par les systèmes dynamiques réduits avec viscosité artificielle (modes initiaux) sont très éloignées des trajectoires des modes observés. Elles sont dans l'ensemble très amorties et introduisent parfois un déphasage sur les modes a_1 et a_2 ou une périodicité excentrique sur les modes suivants. Pourtant, les trajectoires des modes simulés par les systèmes dynamiques réduits obtenues à la fin de la procédure d'assimilation tendent à suivre correctement les trajectoires des modes observés. Cette initialisation grossière de l'algorithme d'assimilation illustre la robustesse de la méthode.

Les modes simulés a_1 et a_2 reproduisent remarquablement bien les observations pour les systèmes dynamiques réduits $s = 2$, 4 et 8. Il n'y a aucun déphasage et l'amplitude moyenne est bien reproduite. En revanche,

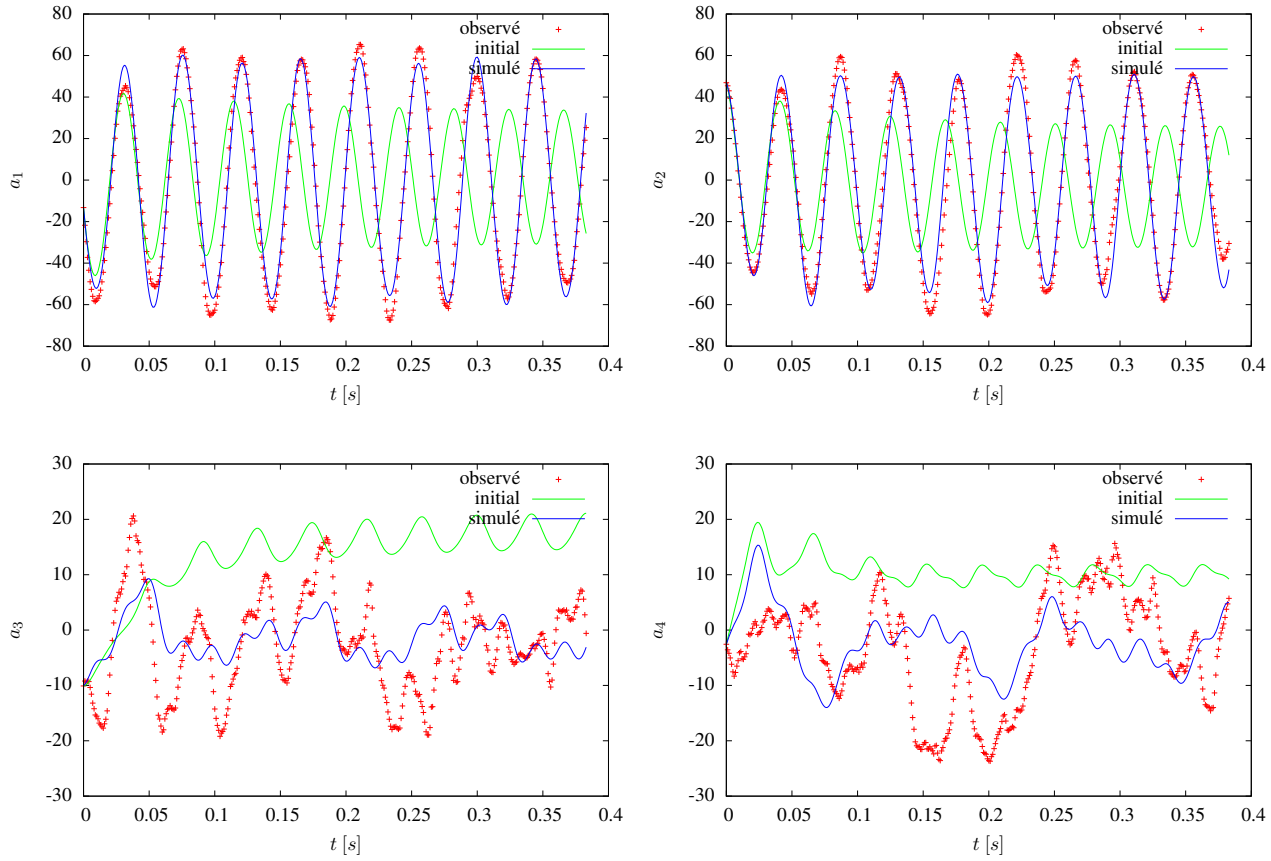

FIG. 2 – Trajectoires des modes simulés dans le cas de l'assimilation des 4 premiers modes observés

la légère variabilité sur l'amplitude des modes observés est d'autant mieux prise en compte que le nombre de modes conservés dans le système dynamique est important. De même, pour les modes simulés a_3 et a_4, l'assimilation fonctionne mieux avec $s = 8$ qu'avec $s = 4$.

7 Bilans, conclusions et perspectives

Le principe de l'assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte a été formulé pour le contrôle des coefficients d'un système dynamique réduit par POD des équations de Navier-Stokes. Cette méthode d'assimilation de données a été mise en œuvre avec succès sur une séquence de champs de vitesse PIV du sillage turbulent d'un cylindre circulaire.

Les résultats ont montrés que les trajectoires des modes simulés suivent d'autant mieux les trajectoires des modes observés que le nombre de modes conservés dans le système dynamique réduits est important. D'un autre côté, des premiers tests non-présentés ici ont montré que l'utilisation des systèmes dynamiques réduits obtenus au-delà de la sous-séquence utilisée dans la procédure d'assimilation a bien fonctionné pour $s = 2$, plus difficilement pour $s = 4$ et pas du tout pour $s = 8$. L'augmentation du nombre de variable de contrôle semble donc surdéterminer le problème à résoudre. Le système dynamique réduit est alors plus performant dans sa capacité à interpoler les observations et mais moins performant dans sa capacité à prédire. C'est le dilemme "biais-variances" bien connu en statistique mathématique.

La simulation des trajectoires pourrait être améliorée en choisissant une méthode de direction de descente plus performante (actuellement assez fruste avec un pas constant dans la direction du gradient) pour estimer plus finement les variables de contrôle du système dynamique réduit. Toutefois, bien que le sytème dynamique réduit soit directement issu des équations de Navier-Stokes, le contrôle par les observations de l'ensemble des coefficients du système relève de l'empirisme. La prise en compte de contraintes explicites sur la stabilité du système et de modèles de fermeture pour les modes non-résolus permettraient certainement d'améliorer la méthode. Il serait également beaucoup plus avantageux et élégant de s'affranchir de l'étape préalable de construction d'une base figée pour l'inclure directement dans la procédure itérative de l'assimilation.

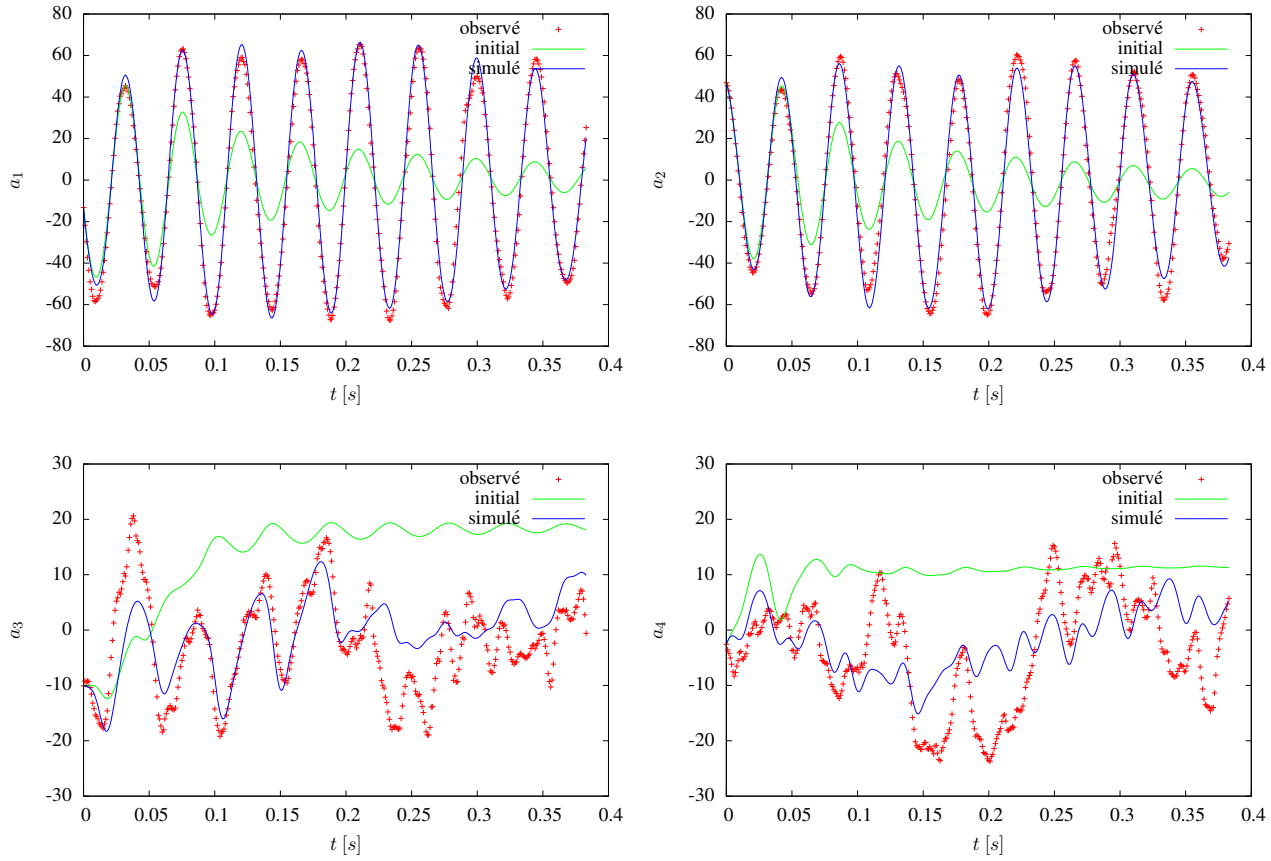

FIG. 3 – Trajectoires des modes simulés dans le cas de l'assimilation des 8 premiers modes observés

Références

[1] Bakewell H. P. and Lumley J. L. Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow. Physics of Fluids, 1967.

[2] Aubry N., Holmes P., Lumley J., and Stone E. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. Journal of Fluid Mechanics, 192, 115–173, 1988.

[3] Gillies E. A. Low-dimensional control of the circular cylinder wake. Journal of Fluid Mechanics, 371, 157–178, 1998.

[4] Bergmann M., Cordier L., and Brancher J.-P. Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model. Physics of Fluids, 17(9), 097101, 2005.

[5] Perret L., Delville J., Manceau R., and Bonnet J.-P. Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation based on low-order empirical model. Physics of Fluids, 20(7), 075107, 2008.

[6] Perret L., Collin E., and Delville J. Polynomial identification of pod based low-order dynamical system. Journal of Turbulence, 7(17), 2006.

[7] D'Adamo J., Papadakis N., Mémin É., and Artana G. Variational assimilation of pod low-order dynamical systems. Journal of Turbulence, 8(9), 1–22, 2007.

[8] Podvin B. A proper-orthogonal-decomposition-based model for the wall layer of a turbulent channel flow. Physics of Fluids, 2009.

[9] Le Dimet F.-X. and Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological. observations : theoretical aspects. Tellus, pages 97–110, 1986.

[10] Lions J. L. Optimal control of systems governed by PDEs. Springer-Verlag, 1971.

[11] Papadakis N. Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vitesses. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2007.

[12] Ndoye M. Anémométrie fil chaud à température variable : application à l'étude d'une couche de mélange anisotherme. PhD thesis, Université de Poitiers, 2007.

[13] Parnaudeau P., Carlier J., Heitz D., and Lamballais É. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3 900. Physics of Fluids, 20(8), 085101, 2008.